

第3章 刚体的定轴转动

在第2章里,我们讨论了质点和质点系的动力学规律,对处理各类具体问题给出了普遍原理。然而在实际问题中,往往物体的大小和形状不可忽略,而大小和形状随时间的改变又微乎其微,这时就可以将物体作为刚体进行处理。在讨论刚体运动及其规律时,一般的做法是:把质量连续分布的刚体分成许多部分,每一部分称为刚体的质元,可以看作是一个质点,且各个质点间的距离保持不变。这时把刚体看成是由无数个质点构成的不变质点系,借助质点系所遵从的运动规律,通过积分求和的方法,得出刚体的运动规律。

刚体的运动包括平动、定轴转动(fixed-axis rotation)和其它较复杂的运动形式。在这一章里,我们主要讨论刚体定轴转动的动力学规律。首先给出质心和质心运动定理,然后将牛顿运动定律应用定轴转动的刚体,导出刚体定轴转动的转动定律;进而分析作用在刚体上的力矩的时间累积效应和空间累积效应,讨论刚体的动量矩定理和动量矩守恒定律,以及刚体定轴转动的动能定理和机械能守恒定律;最后简单地介绍对称性的概念及对称性与守恒定律的关系。

通过本章的学习,应当掌握质心运动定理、刚体定轴转动的转动定律、动量矩定理、动量矩守恒定律、动能定理和机械能守恒定律,能够计算对刚体转轴的力矩、转动惯量、动量矩和动能等物理量,了解对称性的概念及其与守恒定律的联系。

3.1 质心 质心运动定理

3.1.1 质心

刚体的一般运动是比较复杂的,但是实践和理论都证明,刚体(可以推广到质点系)的整体运动可以用刚体或质点系的质量中心的运动来描述,这个质量中心称为质心(center of mass)。例如,在手榴弹投掷运动中,若给其一个初速度,它将大体沿着“抛物线”形态运动,同时又处于不停的转动。认真观测可以发现,手榴弹上有一个特殊点真正作抛物线运动,其它各点一方面与这个特殊点作抛物线运动,同时又绕着这个特殊点转动。这个特殊点就是手榴弹的质心。

对于N个质点构成的质点系,各个质点的质量分别是 $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N$,其位置分别是 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N$,则质心的位置矢量 \vec{r}_C 定义为

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} \quad (3.1)$$

式中, $m = \sum_i m_i$ 是质点系的总质量。质心位置矢量 \vec{r}_C 与参考点的选择有关,但可以证明,质心相对于质点系的位置完全由质点系的质量分布决定。

在直角坐标系中,各个质点和质心的位置矢量是

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k} \\ \vec{r}_C &= x_C \vec{i} + y_C \vec{j} + z_C \vec{k} \end{aligned} \quad i=1,2,\dots,N$$

带入到(3.1)式中,得出质心的坐标是

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m} \quad (3.2)$$

对于质量连续分布的物体,可以为它是无穷多个质量元的组合,其中任意一个质量元的质量为 dm ,视其为质点,位置是 \vec{r} ,则物体的质心位置是

$$\vec{r}_C = \frac{\int_m \vec{r} dm}{m} \quad (3.3)$$

在直角坐标系中的坐标是

$$x_C = \frac{\int_m x dm}{m}, \quad y_C = \frac{\int_m y dm}{m}, \quad z_C = \frac{\int_m z dm}{m} \quad (3.4)$$

应当明确，物体所受重力的作用点称为重心(center of gravity)。在一般情况下，质心与重心是重合的。但是，质心的位置只决定于物体的质量分布，与物体是否受到重力的作用无关；而物体的重力随物体在地球上的位置不同会发生变化，离开地球引力范围，重心就失去了意义。

3.1.2 质心运动定理

当质点系（或物体）发生运动时，其质心的位置将随时间变化。根据速度的定义，物体质心的运动速度 \vec{v}_C 是

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m} \quad (3.5)$$

式中， $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ 是第*i*个质点的速度。上式可以改写为

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_C \quad (3.6)$$

式中， \vec{p} 是物体的总动量。这说明，物体的总动量等于物体的全部质量集中到质心、并以质心速度 \vec{v}_C 运动时的动量。

同理，物体质心运动的加速度 \vec{a}_C 是

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m} \quad (3.7)$$

若物体上各质点所受到的外力的矢量和是 \vec{F} ，且 $\vec{F} = \sum_i m_i \vec{a}_i$ ，上式可以改写为

$$\vec{F}_C = m \vec{a}_C \quad (3.8)$$

上式称为物体的质心运动定理(theorem of motion of center of mass)。它表明：只要将物体的质量集中于质心，全部外力都集中在质心上，则物体的质心运动如同一个质点的运动。

前面我们提到了手榴弹投掷例子。把手榴弹各部分所受的重力平行等值的移到它的质心后求和，得出物体所受的总重力，将全部质量集中于质心，根据质心运动定理，质心运动的加速度是重力加速度 \vec{g} ，质心的运动与质点的抛体运动是相同的。

根据质心运动定理，物体质心的运动只与外力有关，物体内部各个质点之间相互作用的内力并不影响质心的运动。当作用于物体的外力的矢量和为零时，物体的质心加速度对于零，即：当外力的矢量和为零时，物体的质心保持静止或匀速直线运动状态。由于质心的特殊性，我们可以建立质心参照系。所谓质心参照系就是物体的质心在其中静止的平动参照系，而且往往把质心作为原点。在这样参照系中，质心的速度 $\vec{v}_C = 0$ ，即 $\vec{p} = 0$ 。因此，相对于质心参照系，物体的总动量为零。

例 3.1 在光滑水平面上有一质量为 m 、长为 l 的均质细杆，一端可以绕固定轴无摩擦转动，另一端与质量为 $m/2$ 的小球固定在一起。若系统以不变的角速度 ω 在水平面上转动，问：（1）系统的质心位置；（2）细杆与固定轴之间的作用力。

解 （1）对于均质细杆，其质心在杆的中点。而小球可以视为质点，所以系统质心到转轴一端的位置是

$$x_C = \frac{m \times \frac{l}{2} + \frac{m}{2} \times l}{m + \frac{m}{2}} = \frac{2}{3} l$$

(2) 根据质心运动定理, 细杆与固定轴之间的作用力 N 是系统的外力, 它使系统质心绕固定轴做圆周运动, 其方向沿细杆的方向。于是有

$$N = (m + \frac{m}{2}) \times \frac{v_c^2}{x_c} = \frac{3m}{2} \times \frac{2l}{3} \omega^2 = ml\omega^2$$

3.2 刚体定轴转动定律

3.2.1 力对轴的力矩

前面已经讨论了力对空间点的力矩, 现在引入力对转轴的力矩的概念。力对轴的力矩定义为力对空间点力矩在转轴方向的分量(投影)或分矢量。

如图 3.1 所示, 设刚体所受的外力在转动平面内, 力的作用点 P 到转轴中心点的矢径为 \vec{r} , 力臂的大小为 d , 则力 \vec{F} 对该转轴的力矩为

$$M = rF \sin \varphi = Fd \quad (3.9)$$

因为

$$F_t = F \sin \varphi$$

F_t 是力 \vec{F} 在垂直于矢径 \vec{r} 方向的分量, 所以力矩也可以表示为

$$M = F_t r \quad (3.10)$$

应当指出, 力矩不仅有大小, 而且有方向。力矩的方向由力矩的定义式

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.11)$$

来确定。在定轴转动中, 力对轴的力矩的方向总是沿着转轴的, 当转轴的方向确定之后, 力矩的方向可由正、负号来决定。在定轴转动中, 转轴的正方向就是角速度的方向。

如果几个力同时作用于刚体上, 而且这几个力均在转动平面内, 则它们对轴的合力矩为

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i \quad (3.12)$$

由于只讨论定轴转动的情况, 此式也可写成

$$M = \sum_i M_i \quad (3.13)$$

如果作用在刚体上的力 \vec{F} 不在转动平面内, 在计算力对轴的力矩时, 可以把力 \vec{F} 分解成两个相互垂直的分力, 与转轴平行的分力对刚体的转动不起作用, 只有与轴垂直的分力(即在转动平面内的分力)才对轴的力矩有贡献。

例 3.2 如图 3.2 所示, 长为 l 、质量为 m 的匀质细直杆, 放在粗糙的水平面上, 杆可绕通过其中心且与平面垂直的固定轴转动。已知杆与平面间的摩擦系数为 μ , 求杆绕竖直轴转动时所受的摩擦力矩。
解 杆转动时, 所受摩擦力沿杆长连续分布, 且杆上不同部位的摩擦力臂不等, 故需用积分法求摩擦力的总力矩。

如图 3.2, 建立 ox 坐标轴, 杆上任一元段 dx , 质量为 $dm = \lambda dl = \frac{m}{l} dx$, 所受的摩擦力为

$$dF = \mu g dm = \mu g \frac{m}{l} dx$$

对转轴的阻力矩大小为

$$dM = x dF = \mu g \frac{m}{l} x dx$$

由于各元段所受的阻力矩方向一致, 则总的阻力矩大小为

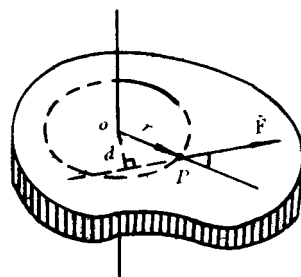


图 3.1 力对轴的力矩

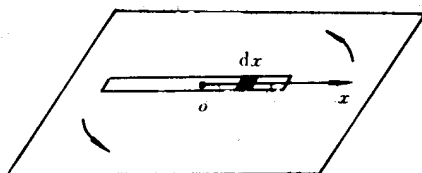


图 3.2 例 3.2 题图

$$M = \int_r dM = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \mu g \frac{m}{l} x dx = \frac{1}{4} \mu m g l$$

例 3.3 在三维坐标中, 有一力 $\vec{F} = (t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k})$ N 作用于点 $\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, 求: 2s 时 \vec{F} 对 Z 轴的力矩。

解 由题意, 力对原点的力矩为

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \times (t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}) = 3t^3\vec{i} + (-2t^3)\vec{j} + (2t^2 - 3t)\vec{k}$$

则力对 Z 轴的力矩为

$$M_z = 2t^2 - 3t$$

当 $t=2$ s 时

$$M_z = 2 \text{ Nm}$$

3.2.2 转动定律

刚体做定轴转动时, 组成刚体的各个质点在垂直于轴的平面内作圆周运动。在转动平面内, 考虑刚体任意一个质点 i , 设其质量为 Δm_i , 其到轴的距离为 r_i , 所受到的合外力为 \vec{F}_i , 不失一般性, 假定 \vec{F}_i 在转动平面内, 受到的合内力为 \vec{f}_i , 它们沿着圆周切线方向的分力分别为 F_{it} 和 f_{it} 。在切线方向上应用牛顿第二定律有

$$F_{it} + f_{it} = \Delta m_i a_{it} = \Delta m_i r_i \beta$$

其中, β 为刚体转动的角加速度。方程两边分别乘以 r_i , 然后对所有质点求和有

$$\sum_i r_i F_{it} + \sum_i r_i f_{it} = \left[\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right] \beta$$

上式左边第二项为内力矩, 由于内力总是成对出现的, 且等值反向, 所以其值为零。上式左边第一项是合外力矩, 用 M 表示, 右边括号内部分用 I 表示, 则上式可写为

$$M = I\beta$$

写成矢量式为

$$\vec{M} = I\vec{\beta} \quad (3.14)$$

式中, I 定义为转动惯量(moment inertia)。转动惯量的物理意义和计算, 下面会详细讨论。此式表明, 刚体在合外力矩 M 作用下所获得的角加速度的大小与合外力矩的大小成正比, 并与转动惯量 I 成反比。这一关系称为刚体的定轴转动定律 (law of rotation of a rigid body about a fixed axis)。

刚体的定轴转动定律在刚体动力学中的地位与牛顿第二定律在平动中的地位相当, 它是定量研究刚体定轴转动问题的基本定律。为此, 做出如下说明。

(1) \vec{M} 代表所有外力对轴的力矩的矢量和, 即合外力矩; $\vec{\beta}$ 为合外力矩引起刚体定轴转动的角加速度。

(2) 瞬时性。转动定律给出的是一种瞬时关系, \vec{M} 为某一时刻刚体所受的合外力矩, $\vec{\beta}$ 为该时刻刚体产生的角加速度, 二者同时存在, 同时消失

(3) 同轴性。这一点很重要, 力矩 \vec{M} 、转动惯量 I 和角加速度 $\vec{\beta}$ 都是对同一确定轴而言的。

例 3.4 一转动惯量为 I 的圆盘, 绕一固定轴转动, 起初角速度为 ω_0 , 设它所受阻力矩与转动角速度成正比, 即 $M = -k\omega$ (k 为常数), 试求角速度从 ω_0 变为 $\omega_0/2$ 时所需的时间。

解 由转动定律

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I} = -\frac{K}{I}\omega$$

$$-\frac{K}{I}dt = \frac{d\omega}{\omega}$$

所以

两边取定积分

$$\int_0^t -\frac{K}{I} dt = \int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{d\omega}{\omega}$$

计算得出

$$t = \frac{I}{K} \ln 2$$

例 3.5 一绳跨过定滑轮，两端分别系质量为 m_1 和 m_2 的物体， $m_2 > m_1$ 。滑轮可看作是质量均匀分布的圆盘，质量为 m ，半径为 R ，转动惯量为 $I = \frac{1}{2} mR^2$ ，可绕水平轴自由转动。如图 3.3 所示。绳与滑轮间无相对滑动。试求物体的加速度和绳的张力。

解 按题意，滑轮具有一定的转动惯量，在作加速转动时，滑轮两侧绳子的张力不再相等。同时，滑轮作自由转动，故滑轮与轴间的摩擦力矩可忽略不计。将滑轮 m 和 m_1 、 m_2 隔离开，受力情况及假定的运动方向如图 3.3 所示。按牛顿运动定律和转动定律可列出下列方程

$$\text{对于 } m_1, \text{ 有} \quad T_1 - m_1 g = m_1 a$$

$$\text{对于 } m_2, \text{ 有} \quad m_2 g - T_2 = m_2 a$$

$$\text{对于滑轮 } m, \text{ 有} \quad T_2 R - T_1 R = I \beta$$

考虑到角加速度 β 与切向加速度 a 的关系，有

$$a = R\beta$$

由上面四个方程联立解得

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

$$T_1 = m_1(g + a) = \frac{(2m_2 + \frac{1}{2}m)m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

$$T_2 = m_2(g - a) = \frac{(2m_1 + \frac{1}{2}m)m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}$$

当不计滑轮质量时，即 $m=0$ ，则有

$$T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

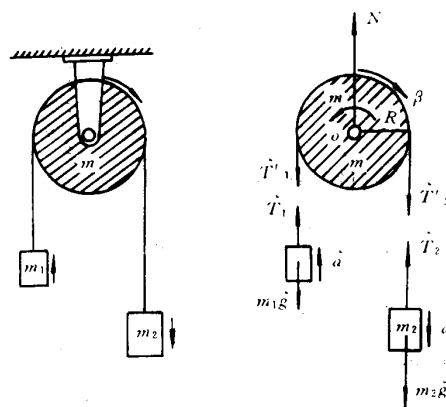


图 3.3 例 3.5 题图

3.2.3 转动惯量

由转动惯量的定义式

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad (3.15)$$

可以看出，转动惯量 I 与下列因素有关：(1) 刚体的质量；(2) 在质量一定的情况下，还与质量的分布有关，亦即与刚体的形状、大小和各部分的密度有关。例如，同质料的质量相等的空心圆柱与实心圆柱，对于圆柱的轴而言，前者的转动惯量较大。③转动惯量与转轴的位置有关。例如，同一均匀细杆，对于通过杆的中心并与杆垂直的转轴和通过杆的一端并与杆垂直的另一转轴，后者的转动惯量较大。所以只有明确转轴，转动惯量才有明确的意义。

在 SI 中，转动惯量 I 的单位为 $\text{千克} \cdot \text{米}^2 (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$ 。

由刚体定轴转动定律知，在作用于刚体上的力矩一定的情况下，转动惯量越大，刚体的角加速

度越小, 刚体转动状态改变越小。因此, 刚体转动惯量是刚体转动惯性大小的量度。

一般刚体的质量是连续分布的, 式 (3.15) 可以写成积分形式

$$I = \int r^2 dm \quad (3.16)$$

式中, dm 为任取的质元的质量, 视刚体质量分布情况, dm 可分别表示为

$$dm = \begin{cases} \rho dV \\ \sigma dS \\ \lambda dl \end{cases} \quad (3.17)$$

其中 ρ 、 σ 、 λ 分别为体积元 dV 、面积元 dS 和线元 dl 的体密度、面密度和线密度。

下面举例计算几种具有简单对称形状的刚体的转动惯量。

例 3.6 求质量为 m 、长为 l 的均质细杆对下列各轴的转动惯量: (1) 轴通过杆的中心并与杆垂直; (2) 轴通过杆的一端并与杆垂直; (3) 轴通过杆上离中心为 h 的一点并与杆垂直。

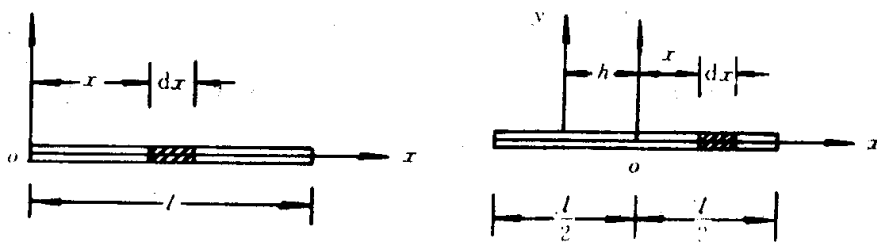


图 3.4 例 3.6 题图

解 如图 3.4 所示, 在杆上任取一质量元, 设它到轴的垂直距离为 x , 长度为 dx , 这质量元的质量 $dm = \lambda dx$, 其中 $\lambda = m/l$, 故根据转动惯量定义式 (3.16) 有

$$(1) \text{ 轴通过杆的中心并与杆垂直} \quad I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \lambda dx = \frac{1}{12} ml^2$$

$$(2) \text{ 当轴通过杆的一端并与杆相垂直时} \quad I = \int_0^l x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} ml^2$$

$$(3) \text{ 当轴通过杆上离中心为 } h \text{ 的一点并与杆垂直时} \quad I = \int_{-\frac{l}{2}+h}^{\frac{l}{2}+h} x^2 \lambda dx = \frac{1}{12} ml^2 + mh^2$$

由此题可以看出, 刚体的转动惯量与转轴的位置有关。若有两个平行转轴, 其中一轴过质心, 则刚体对另一个轴的转动惯量为

$$I = I_C + md^2 \quad (3.18)$$

式中, m 为刚体质量, I_C 为刚体过质心轴的转动惯量, d 为两轴的平行距离。式 (3.18) 叫做平行轴定理(parallel axis theorem)。

例 3.7 求质量为 m 、半径为 R 的细圆环及均质薄圆盘通过中心并与圆面垂直的转轴的转动惯量。

解 (1) 如图 3.5 所示。对于细圆环, 则有 $dm = \lambda dl$, 其中 dl 为圆环上的线元, 所以

$$I = \int_m R^2 dm = \int_0^{2\pi R} \lambda R^2 dl = mR^2$$

由此可求得半径为 R 、质量为 m 的均质薄圆筒对其几何中心轴的转动惯量亦为 mR^2 。

(2) 对于薄圆盘, 取一半径为 r 和 $r+dr$ 的小圆环, 其面积为 $dS = 2\pi r dr$, 设薄圆盘的质量面密度为 σ , 则小圆环的质量 $dm = \sigma 2\pi r dr$, 于是有小圆环对转轴 o 的转动惯量为

$$dI = r^2 dm = 2\pi \sigma r^3 dr$$

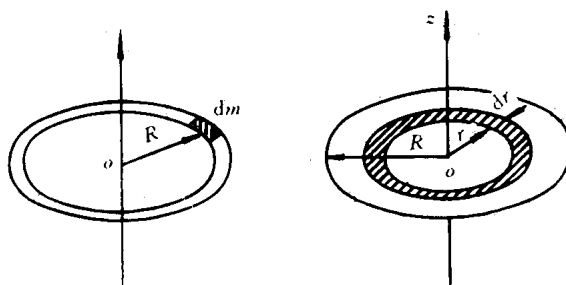


图 3.5 例 3.7 题图

因此，圆盘对轴 o 的转动惯量为

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\sigma R^4$$

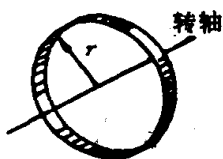

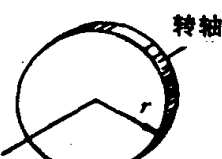

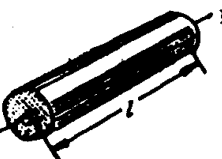
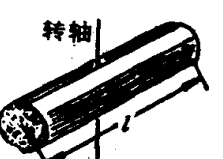
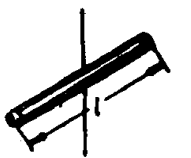

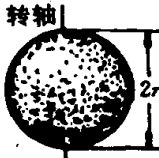
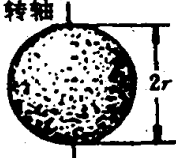
将 $\sigma = m/\pi R^2$ 代入上式，便得

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

同样道理可求出半径为 R ，质量为 m 的实心匀质圆柱体对柱中心轴的转动惯量也是 $mR^2/2$ 。

上面计算的是一些简单形状的刚体的转动惯量。对于一些不规则的物体，其转动惯量很难计算，可以通过实验的方法来测定。表 3.1 中给出一些常见的规则形状的刚体的转动惯量。

表 3.1 转动惯量

 $I = mr^2$ 圆环转轴通过中心与环面垂直	 $I = \frac{mr^2}{2}$ 圆环转轴沿直径
 $I = \frac{mr^2}{2}$ 薄圆盘转轴通过中心与盘面垂直	 $I = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$ 圆筒转轴沿几何轴
 $I = \frac{mr^2}{2}$ 圆柱体转轴沿几何轴	 $I = \frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$ 圆柱体转轴通过中心与几何轴垂直
 $I = \frac{ml^2}{12}$ 细棒转轴通过中心与棒垂直	 $I = \frac{ml^2}{3}$ 细棒转轴通过端点与棒垂直
 $I = \frac{2mr^2}{5}$ 球体转轴沿直径	 $I = \frac{2mr^2}{3}$ 球壳转轴沿直径

3.3 对定轴的动量矩定理与动量矩守恒定律

在讨论质点运动时，我们从力对时间的累积作用出发，引出了冲量和动量的概念，并得到了动量定理和动量守恒定律。本节我们将从力矩对时间的累积作用出发，给出对定轴的动量矩定理和动量矩守恒定律。

3.3.1 动量矩定理

首先讨论刚体做定轴转动时对轴动量矩的计算。由于刚体做定轴转动，刚体内各个质点在垂直于轴的平面内作圆周运动。考虑第 i 个质点，设其质量为 Δm_i ，到轴的距离 r_i ，它的线速度为 v_i ，则该质点对转轴的角动量为

$$L_i = \Delta m_i v_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

对所有质点求和有

$$L = (\sum_i m_i r_i^2) \omega = I \omega$$

写成矢量式

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (3.19)$$

动量矩(亦称角动量) $\vec{L} = I \vec{\omega}$ 是描述刚体转动状态的物理量，是矢量，其方向与角速度 $\vec{\omega}$ 的方向一致。在讨论定轴转动时，动量矩的方向可用正、负号来表示。在 SI 中，其单位是千克·米²·秒⁻¹(kg·m²·s⁻¹)。

引入刚体对轴的动量矩概念后，由刚体转动定律有

$$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (3.20)$$

或者写成

$$\vec{M} dt = d\vec{L} = d(I\vec{\omega}) \quad (3.21)$$

上式表明，刚体绕定轴转动时，作用于刚体上的合外力矩等于刚体对绕定轴的动量矩随时间的变化率，这就是对轴的动量矩定理。

一般说来，力矩是时间的函数，即 $\vec{M} = \vec{M}(t)$ 。因此，当刚体在合外力矩作用下，由 t_1 时刻的角速度 $\vec{\omega}_1$ 改变到 t_2 时刻的角速度 $\vec{\omega}_2$ 时，对式(3.21)两边取积分，得

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{\vec{\omega}_1}^{\vec{\omega}_2} d(I\vec{\omega}) = I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1 \quad (3.22)$$

式中 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$ 反映了力矩 \vec{M} 对时间的累积作用，称作力矩 \vec{M} 对转动刚体的冲量矩，又称角冲量。

在 SI 中，冲量矩的单位是牛顿·米·秒(N·m·s)。

式(3.22)表明，在定轴转动中，刚体所受的冲量矩，等于物体在这段时间内动量矩的增量。这就是定轴转动动量矩定理的积分形式。它与质点的动量定理的形式很相似。

若定轴转动的物体不能视为刚体，其内部各质点相对转轴的位置可以变化。这时，物体的转动惯量不再是常数，动量矩定理依然成立，其形式为

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{\vec{\omega}_1}^{\vec{\omega}_2} d(I\vec{\omega}) = I_2 \vec{\omega}_2 - I_1 \vec{\omega}_1 \quad (3.23)$$

3.3.2 动量矩守恒定律

由式(3.20)可知，当作用在物体上合外力矩为零时，则

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = \text{恒矢量} \quad (3.24)$$

上式说明，当物体所受合外力矩等于零时，物体的动量矩保持不变。这个结论称为动量矩守恒定律。

动量矩守恒的情形可能有两种：一种是转动惯量和角速度均保持不变，即刚体绕定轴作匀速转动。例如，静止的陀螺很难靠螺尖站立不倒，但旋转着的陀螺如果处在直立情况下，就能保持这个状态而不倾倒。这是由于在转动过程中，螺尖受地面的摩擦力矩可以忽略，即在相当长的一段时间内保持恒定的动量矩的缘故。动量矩守恒的另一种情况是转动惯量和角速度同时改变，但二者的乘积保持不变，即 $I_1 \vec{\omega}_1 = I_2 \vec{\omega}_2$ 。若是一个非刚体物体的转动，当转动惯量增大时，其角速度变小；而当转动惯量变小时，其角速度增大。这样的例子是很多的。例如，芭蕾舞演员和溜冰运动员等在旋转的时候，往往先把两臂张开旋转，然后迅速把两臂收回靠拢身体，使自己的转动惯量减小，因而旋转速度加快。

若是一个力学系统，当满足动量矩守恒定律时，即 $\vec{M}_{\text{合外力}} = 0$ ，有

$$\sum_i \vec{L}_i = \sum_i I_i \vec{\omega}_i = \text{恒矢量} \quad (3.25)$$

上式称为系统对某一定轴的动量矩守恒定律。

最后应当明确，尽管动量矩守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律都是用经典理论推证出来的，但它们的适用范围却远远超过原有条件的限制，即不仅适用于宏观物体的机械运动，也适用于基本粒子的微观运动，成为自然界中的普遍规律。

由于在无外力矩的情况下，刚体的角动量 $L = I\omega$ 守恒。如果保持刚体相对转轴的转动惯量不变，角动量守恒就表现为 ω 是常矢量，即转动快慢、转轴的方向不变。图 3.6 所示的常平架陀螺仪(gyroscope)就是这样的一种装置，它的核心部分是装在常平架上的一个质量较大的轴对称物体，称为转子。常平架由套在一起，分别具有竖直轴和水平轴的两个圆环(内环和外环)组成，转子装在内环上，转子、内环和外环三者的转轴两两正交，且相交于一点，其交点与整个陀螺的质心重合。这样，转子既不受重力矩的作用，又能在空间任意取向，可以绕三个相互垂直的轴自由转动(因此又称其为三自由度陀螺)。如果不考虑轴承的摩擦和转动时空气的阻力，一旦转子绕其对称轴高速转动起来，则陀螺转子的转轴就在空间确定了一个不变的方向，不管我们如何移动或转动陀螺仪，高速自转的陀螺具有保持其转轴在空间的方向不变的特性，这称为陀螺的定向性。陀螺仪的这一特性在现代技术中的一个重要应用是惯性导航，其广泛应用于航海、航空航天、导弹和火箭等系统的定向、导航和自动驾驶等。陀螺惯性导航系统的转子转速高达每分钟数万转，若高速转子稍不对称，就会对各个支撑轴承产生巨大的作用力而使其损坏，因此在设计和制造转子时的精度要求是非常高的。目前，陀螺的研究课题主要是如何实现无干扰力矩的支撑，主要途径是用电场力或磁场力造成悬浮支撑，例如采用超导磁悬浮无摩擦轴承等。此外，研制无机转子的陀螺仪——激光陀螺亦成为当代陀螺研究的重要课题。

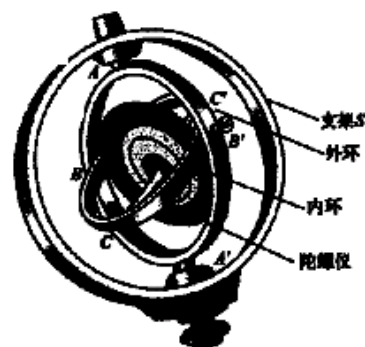


图 3.6 陀螺仪

例 3.8 一根轻绳绕过质量为 $m/4$ 、半径为 R 的定滑轮，滑轮的质量均匀分布在边缘上。绳的一端系一质量为 $m/2$ 的重物，另一端由质量为 m 的人抓住，如图 3.8 所示。若绳与滑轮间没有滑动，当人以匀速率 u 相对绳子向上爬时，重物上升的速率 v 多大？（设重物初始时静止）

解 以人、圆盘和重物为系统，则系统受到的合外力矩为

$$M = mgR - \frac{m}{2} gR = \frac{m}{2} gR$$

由动量矩定理可得

$$\frac{m}{2} gR = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} vR + I\omega - mR(u-v) \right]$$

其中， $I = \frac{m}{4} R^2$ 为滑轮的转动惯量， ω 为滑轮转动的角速度，由题意

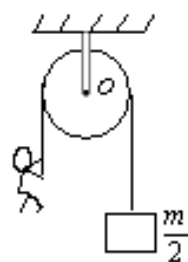


图 3.8 例 3.8 题图

$$\omega = v/R$$

因此

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{7}g$$

即

$$v = \frac{2}{7}gt$$

例 3.9 一质量为 m ，长为 $2l$ 的均质细杆，其一端有一很小的光滑圆孔。开始时杆在一光滑水平面上以速度 v 平动，一光滑小钉突然穿过圆孔固定在平面上，求此后杆做定轴转动的角速度及杆对钉（轴）的反作用力。

解 当杆以速度 v 平动时，杆上距圆孔为 r ，长为 dr 的一小段杆对圆孔的动量矩为

$$dL = r v dm = \frac{m}{2l} r v dr$$

整个杆对圆孔的动量矩为

$$L = \int_0^{2l} dL = \int_0^{2l} \frac{m}{2l} r v dr = mvl$$

设小钉穿入后杆做定轴转动的角速度为 ω ，在此过程中杆对轴的动量矩守恒，即

$$mvl = I\omega = \frac{1}{3}m(2l)^2\omega$$

则

$$\omega = \frac{3v}{4l}$$

在杆定轴转动时，距轴为 r 、长为 dr 的一小段杆受到的向心力为

$$dT = \omega^2 r dm = \omega^2 r \frac{m}{2l} dr$$

整个杆受到的向心力为

$$T = \int_0^{2l} dT = \int_0^{2l} \frac{m\omega^2}{2l} r dr = m\omega^2 l = \frac{9mv^2}{16l}$$

该力的大小即等于杆对钉的反作用力。

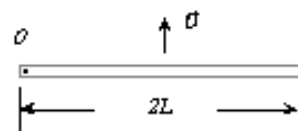


图 3.9 例 3.9 题图

3.4 刚体定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

本节讨论力矩对空间的累积作用，给出力矩的功、刚体的转动动能及将它们联系在一起的动能定理，进而给出刚体质心的定义和势能的计算公式，最后给出刚体机械能守恒定律。

3.4.1 刚体定轴转动的动能定理

一、力矩的功

刚体在外力的作用下发生了定轴转动，力做了功，对这种情形也可以描述为，刚体在外力矩作用下绕定轴转动产生了角位移，力矩做了功，力矩的功只是力的功一种替代说法。

如图 3.10，设一刚体在外力 \vec{F} 的作用下，绕轴 oz 转动，在 dt 时间内，转过一极小的角位移 $d\theta$ ，这时力 \vec{F} 的作用点的位移大小 $|d\vec{r}| = ds = r d\theta$ ，根据功的定义，力 \vec{F} 所做的元功为（设 \vec{F} 与 $d\vec{r}$ 之间的夹角为 α ）

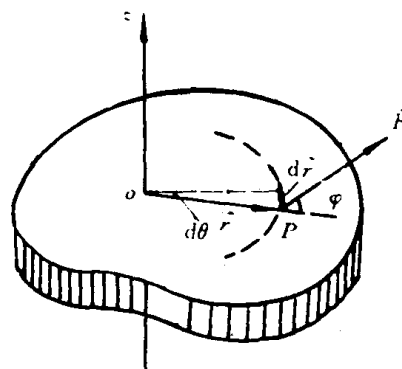


图 3.10 力矩的功

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \alpha ds = Fr \cos \alpha d\theta$$

因为 $\alpha + \varphi = 90^\circ$, 所以 $\cos \alpha = \sin \varphi$, 于是

$$dA = M d\theta \quad (3.27)$$

由此, 力对刚体所做的功, 可以用力矩和转动的角位移来表示, 称式(3.27)为力矩的元功。

当刚体在变力矩的作用下转过角 θ 时, 力矩的功为

$$A = \int_0^\theta M d\theta \quad (3.28)$$

当力矩不变时, 则它对刚体所做的功为

$$A = M\theta \quad (3.29)$$

如果刚体同时受到几个外力矩的作用, 当式(3.28)和式(3.29)中的 M 为合外力矩时, A 则是合外力矩的功。

对于刚体而言, 内力是成对出现的, 且大小相等, 方向相反, 作用在同一直线上, 故所有内力的总和为零。因此, 刚体转动具有一个特点, 即内力的总功为零。

力矩做功的快慢, 称为力矩的功率, 由式(3.27)可得

$$P = \frac{dA}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega \quad (3.30)$$

在刚体做定轴转动时, 力矩和角速度的方向或者相同, 或者相反。当力矩与角速度的方向相同时, 力矩的功率为正; 当力矩与角速度的方向相反时, 力矩的功率为负。

在 SI 中, 力矩的功与功率的单位也为焦耳(J)和瓦特 (W)。

二、转动动能

下面计算刚体做定轴转动的动能。刚体的动能等于组成刚体的全部质元(质点)做圆周运动的动能。当刚体以角速度 ω 绕定轴转动时, 刚体上各个质点的角速度相等而线速度不等。任取第 i 个质点, 设其质量为 Δm_i , 距转轴距离为 r_i , 则线速度 $v_i = \omega r_i$, 相应的动能为

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2$$

对全部质点求和得刚体的总动能为

$$E_k = \sum \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum \Delta m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

即

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.31)$$

上式是刚体转动动能的表达式。

三、刚体定轴转动的动能定理

根据力矩的功的表达式及转动定律, 可以得出刚体定轴转动的动能定理, 即

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I \beta d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I \omega d\omega = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2 \quad (3.32)$$

式中, M 为刚体所受的合外力矩, ω_1 、 ω_2 表示刚体初位置 θ_1 处和末位置 θ_2 处的角速度。此式即是刚体定轴转动的动能定理, 亦可简写为

$$A_{\text{合外力矩}} = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k \quad (3.33)$$

其物理含义为: 合外力矩对定轴转动刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。

例 3.10 如图 3.11 所示, 一根质量为 m 、长为 l 的均匀细棒 oA 可绕通过其一端的光滑轴 o 在竖直平面内转动, 今使棒从水平位置开始自由下摆, 试求: (1) 细棒摆到竖直位置时重力矩的功; (2) 细棒摆到竖直位置时的角速度; (3) 细棒摆到竖直位置时中心点 C 和端点 A 的线速度。

解 (1) 由于重力对转轴的力矩是随 θ 而变化的, 棒转过一极小的角位移 $d\theta$ 时, 重力矩所做的元功是

$$dA = mg \frac{l}{2} \cos \theta d\theta$$

棒从水平位置下降到竖直位置的过程中, 重力矩所做的总功为

$$A = \int_s dA = \int_0^{\pi/2} mg \frac{l}{2} \cos \theta d\theta = mg \frac{l}{2}$$

(2) 根据刚体定轴转动的动能定理: $A = E_k - E_{k_0}$, 得

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2 - 0$$

整理并将棒的转动惯量 $I = ml^2/3$ 代入上式, 得出

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

(3) 细棒在竖直位置时, 端点 A 和中心点 C 的线速度分别为

$$v_A = l\omega = \sqrt{3gl}, \quad v_C = \frac{l}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

例 3.11 如图 3.12 所示, 一质量为 M, 半径为 R 的圆盘, 可绕一无摩擦的水平轴转动, 圆盘上绕有轻绳, 一端悬挂质量为 m 的物体。问物体由静止下落高度 h 时, 其速度的大小为多少?

解 如图所示, 对圆盘而言, 受到重力、支持力和拉力的作用。由于重力和支持力通过转轴 o, 故作用圆盘的外力矩仅是拉力提供的力矩。由刚体绕定轴转动的动能定理可得

$$TR\Delta\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

式中, $\Delta\theta$ 为在力矩作用下圆盘转过的角度, ω_0 和 ω 为圆盘在起始和终了位置时的角速度。

对物体 m 而言, 它受到拉力 T 和重力 mg 的作用。由质点的动能定理可得

$$mgh - Th = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

式中, v_0 和 v 是物体在起始和终了位置时的速度。

由于绳与圆盘无相对运动, 所以重物下落的距离与圆盘边缘上任意点所经过的弧长相等 $h = R\Delta\theta$, 且

$$v = R\omega$$

此外, 物体是由静止开始下落的, 故有 $v_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ 。于是

$$v = \sqrt{\frac{m}{m + \frac{I}{R^2}} 2gh}$$

已知圆盘的转动惯量 $I = MR^2/2$, 故上式为

$$v = 2\sqrt{\frac{mgh}{M + 2m}} = \sqrt{\frac{2mgh}{M + 2m}}$$

我们知道, 物体由高 h 处自由下落的末速度大小为 $v' = \sqrt{2gh}$, 故 $v' > v$, 原因在于物体的重力所作的功有一部分用于增加圆盘的转动动能。

3.4.2 刚体定轴转动的机械能守恒定律

一、刚体的重力势能

刚体的重力势能是指刚体与地球共有的势能, 它等于各质元与地球共有的重力势能之和。设刚

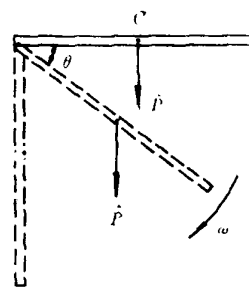


图 3.11 例 3.10 题

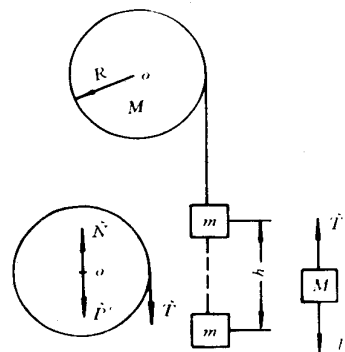


图 3.12 例 3.11 题

体任意质元的质量为 m_i ，距势能零点的高度为 $h_i=y_i$ ，如图 3.13 所示，则此质元重力势能为

$$E_{p_i} = m_i g h_i = m_i g y_i$$

整个刚体的重力势能为

$$E_p = \sum m_i g y_i = mg \frac{\sum m_i y_i}{m}$$

即

$$E_p = mgy_C \quad (3.34)$$

即刚体重力势能决定于刚体质心距势能零点的高度。

无论刚体如何放置，都能推出 (3.34) 式，故刚体势能仅取决于质心高度，与刚体的方位无关。上述结果表明：刚体的重力势能相当于在刚体质心处的一个质点的重力势能，该质点集中了刚体的全部质量。当然，这里重力势能是属于由物体和地球所组成的质点系或物体系的。

二、机械能守恒定理

在保守力场中定轴转动的刚体，对于包含有刚体的系统，如果在运动的过程中，只有保守内力做功，则系统的机械能守恒。即

$$E_k + E_p = \text{常量}$$

式中，动能 E_k 应当包括刚体的转动动能 $\frac{1}{2}I\omega^2$ ，势能 E_p 中刚体的重力势能由 (3.34) 决定。

例 3.12 设一长为 $l=1\text{m}$ 的均匀木棒，质量 $M=2.5\text{kg}$ ，可绕过其一端的水平轴在竖直平面内无摩擦转动。开始时棒自然下垂，一质量 $m=0.02\text{kg}$ 的子弹以 $v=200\text{ms}^{-1}$ 的速率从 A 点射入并停留在棒中，A 距 O 为 0.75m 。求：

(1) 棒开始转动的角速度；

(2) 棒的最大偏转角。

解 (1) 子弹射入前后，木棒与子弹系统的动量矩守恒。

$$m\vec{v} \cdot \frac{3}{4}l = I\omega$$

$$\text{其中} \quad I = \frac{1}{3}Ml^2 + m\left(\frac{3}{4}l\right)^2 = 0.845 \text{ kgm}^2$$

所以

$$\omega = \frac{\frac{3}{4}mvl}{I} = 3.55 \text{ s}^{-1}$$

(2) 转动过程中系统机械能守恒。选棒下垂时质心位置为重力势能零点，设最大偏转角为 θ_m ，则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I\omega^2 &= Mg \frac{l}{2}(1 - \cos \theta_m) + mg \frac{3}{4}l(1 - \cos \theta_m) \\ \cos \theta_m &= 1 - \frac{I\omega^2}{Mgl + \frac{3}{2}mgl} = 0.57 \end{aligned}$$

最大偏转角为 $\arccos 0.57$ 。

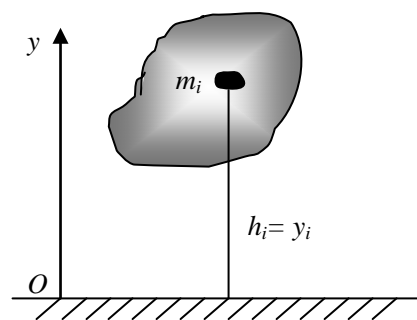


图 3.13 刚体的重力势能

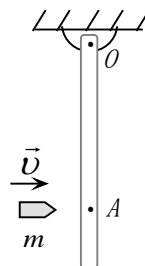


图 3.14 例 3.12 题图

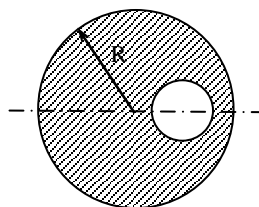
本章小结

刚体力学是经典力学的一个重要组成部分，本章重点讨论的是刚体定轴转动的动力学规律，这是深入研究刚体复杂运动的基础。由于刚体的大小和形状不随时间发生变化，因此可以将刚体看成是不变质点系。在考虑用质点系的动力学规律解决刚体问题时，必须施加刚体内各个质元（质点）的相对位置保持不变的约束条件，比如，对刚体应用质点系动能定理时，内力的功必须为零。这是第一点要注意的。第二点要注意的是，我们讨论的是刚体定轴转动，各个物理量（如，转动惯量、力矩、动量矩、转动动能等）的计算都是相对转轴而言的。第三点要注意的是，本章的组织结构同第二章是相同的，要弄清如何从刚体定轴转动定律出发分别沿着时间和空间两条线索建立其知识结构的，并把刚体运动规律与质点运动规律对照学习。

本章的重点是刚体质心运动规律，刚体定轴转动定律、动能定理、动量矩定理和动量矩守恒定律以及转动惯量、力矩、力矩的功、转动动能、动量矩等一些物理量的计算，要很好的掌握。

习题与思考题

3.1 比较为 r 的圆盘是从半径为 R 的均质圆盘上切割出来的，如图所示。圆孔中心到原来圆盘中心的距离是 $R/2$ ，求原来圆盘剩余部分的质心位置。



题 3.1 图

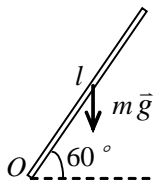
3.2 刚体的转动惯量都与那些因素有关？

3.3 刚体转动时，若它的角速度很大，那么作用在它上面的力是否一定很大？那么作用在它上面的力矩是否一定很大？

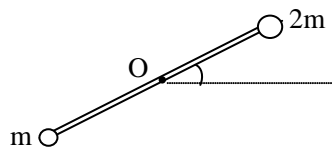
3.4 刚体在某一力矩作用下绕定轴转动，当力矩增加时，角速度与角加速度怎样变化？当力矩减少时，角速度与角加速度又怎样变化？

3.5 一长为 1 m 的均匀直棒可绕过其一端且与棒垂直的水平光滑固定轴转动。抬起另一端使棒向上与水平面成 60° ，然后无初转速地将棒释放。求：

- (1) 放手时棒的角加速度；
- (2) 棒转到水平位置时的角加速度。



题 3.5 图



题 3.6 图

3.6 一长为 l 、质量可以忽略的直杆，两端分别固定有质量为 $2m$ 和 m 的小球，杆可绕通过其中心 O 且与杆垂直的水平光滑固定轴在铅直平面内转动。开始杆与水平方向成某一角度，处于静止状态，如图所示，释放后，杆绕 O 轴转动，则当杆转到水平位置时，求：

- (1) 系统所受到的合外力矩的大小；
- (2) 此时该系统角加速度的大小。

3.7 一定滑轮半径为 0.1 m 。相对中心轴的转动惯量为 $10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 。一变力 $F=0.5t$ (SI) 沿切线方向作用在滑轮的边缘上。如果滑轮最初处于静止状态，忽略轴承的摩擦。试求它在 1 s 末的角速度。

3.8 一长为 L 、质量为 m 的均匀细杆，可绕轴 O 自由转动。设桌面与细杆间的滑动摩擦系数为 μ ，杆初始的转速为 ω_0 ，试求：

- (1) 摩擦力矩；

(2) 从 ω_0 到停止转动共经历多少时间;

(3) 一共转动多少圈。

3.9 一转动惯量为 I 的圆盘绕一固定轴转动, 起初角速度为 ω_0 。设它所受的阻力矩与转动角速度成正比, 即 $M = -k\omega$ (k 为正的常数), 求圆盘的角速度从 ω_0 变为 $\omega_0/2$ 时所需的时间。

3.10 芭蕾舞演员要使自己不断旋转时, 总是用足尖站立, 并把双臂伸开挥动后, 迅速把双臂收拢尽量靠近身体; 而要停止旋转时又把双臂伸开, 为什么要这样做?

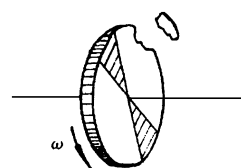
3.11 一均匀细棒长 L , 质量为 m , 可绕经过端点的 O 轴在铅直平面内转动, 现将棒自水平位置轻轻放开, 当棒摆至竖直位置时棒端恰与一质量也为 m 的静止物块相碰, 物块与地面的滑动摩擦系数为 μ , 物块被击后滑动 s 距离后停止, 求相撞后棒的质心离地面的最大高度。

3.12 半径为 R , 质量为 m 的匀质圆盘, 放在粗糙桌面上, 盘可绕竖直中心轴在桌面上转动, 盘与桌面间的摩擦系数为 μ , 初始时角速度为 ω_0 , 问经过多长时间后, 盘将停止转动? 摩擦阻力共做多少功?

3.13 一个质量为 M 、半径为 R 并以角速度 ω 转动着的飞轮 (可看作匀质圆盘), 在某一瞬时突然有一片质量为 m 的碎片从轮的边缘上飞出, 假定碎片脱离飞轮时的瞬时速度方向正好竖直向上。

(1) 问它能升高多少?

(2) 求余下部分的角速度、角动量和转动动能。



题 3.13 图