

## 第 4 章 静电场

任何电荷周围都存在电场，相对观察者静止的电荷产生的电场称为静电场。本章从反映电荷之间相互作用的实验定律——库仑定律出发，以两个角度为切入点：位于电场中的电荷受到电场力的作用和电荷在电场中移动时电场力对电荷作功，引入描述电场的基本物理量——电场强度和电势，并讨论其计算方法和二者的相互关系；从电场叠加原理出发，引入描述静电场基本性质的方程：高斯定理和环路定理；最后讨论导体存在时对电场分布的影响、电容器的电容和静电场的能量问题。

通过本章学习，掌握电场强度和电势的概念，以及电场强度和电势的计算方法；理解静电场的基本规律——高斯定理和环路定理；掌握应用高斯定理计算电场强度的条件和方法；了解导体和电介质与电场的相互影响。初步掌握有关电容和电场能量的基本知识。

### 4.1 电荷 库仑定律

#### 4.1.1 电荷及其守恒定律

人类在社会实践中发现，两种不同材料构成的物体，如毛皮和硬橡胶棒、丝绸和玻璃棒，互相摩擦后都能吸引轻微物体。相互摩擦后的两种物体能够吸引轻微物体是由于他们带了电荷（electric charge）。带有电荷的多少，称为电荷量，简称为电量（electric quantity）。电量的量值只能通过该电荷所产生的效应来计量。在国际单位制里，电量的单位是库仑（C）。

实验证明，电荷分为两种类型，电荷间有相互作用力；同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引。美国物理学家富兰克林（B. Franklin）首先提出正电荷（positive charge）和负电荷（negative charge）的名称，规定丝绸摩擦过的玻璃棒上的电荷为正电荷，毛皮摩擦过的硬橡胶棒上的电荷为负电荷。

根据现代物理学关于物质结构的理论，物质是由原子组成的，原子是由带正电的原子核和核外运动的带负电的电子（electron）构成。原子核内有质子和中子，中子不带电，质子带正电，且与电子所带的电量相等。在正常状态下，原子中的电子数与质子数相等，原子呈现电中性，由此构成的物质也将呈现电中性。由于某种外界因素的作用（如光照、碰撞、摩擦等），物体会失去或得到一部分电子，物体对外呈现电性。失去电子的物体带正电，得到电子的物体带负电。实验表明：一个与外界没有电荷交换的系统，正负电荷的代数和在任何物理过程中保持不变，称之为电荷守恒定律（conservation law of charge）。

实验表明，物体的电量与它的运动状态无关，即：在不同的参照系内观察，物体的电量不变，这个结论称为电荷的相对论不变性。

诸多实验证明，物体的电量是一个基本单元的整数倍，这称为电荷的量子化（quantization of charge）。电荷量的基本单元就是电子电量的绝对值。1913 年美国物理学家密立根（R. A. Millikan）设计了著名的油滴实验，测出了基本单元的电荷量。2002 年该量值的推荐数据是

$$e = 1.602176462 \times 10^{-19} \text{ C}$$

近代物理学从理论上预言某些粒子（如质子、中子等）由若干种夸克（quark）或反夸克组成，每个夸克或反夸克可能带有 $\pm e/3$ 或 $\pm 2e/3$ 的电量。这个预言并不影响电荷量子化的结论，而且由于夸克的禁闭，至今还没有在实验上发现自由状态的夸克。

在宏观电磁现象中，带电体（electrified body）的电量往往是基本单元电荷量的很大倍数，以至于电荷的量子化特性并不突出，我们可以认为电荷是连续分布在带电体上。

为方便对带电体的描述和相互作用规律的表示，习惯上引入点电荷（point charge）的概念。当带电体本身的几何线度与它到观察点的距离相比小得多时，其形状、大小、电荷分布形态等均可忽略，可以视为一个带电的点，称之为点电荷。应当明确，点电荷是一个相对的概念。一个带电体能否看成点电荷，与考察问题的具体情况、要求精度有关。一般而言，我们可以将一个连续分布的带电体看成诸多点电荷的组成。

## 4.1.2 库仑定律

1785 年法国物理学家库仑（C.A.de Coulomb）利用扭秤实验直接测定了两个带电球体之间的相互作用的电力（electric force），也称为库仑力（Coulombian force）。在其实验的基础上，库仑确定了两个点电荷之间相互作用的规律，即库仑定律（Coulomb's law）。其内容表述是：

在真空中，两个静止的点电荷之间的相互作用力的大小与它们电荷量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比；作用力的方向沿着两点电荷的连线并且同号电荷相互排斥，异号电荷相互吸引。

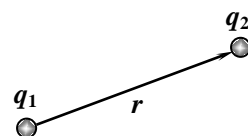


图 4.1 库仑定律

如图 4.1 所示，有两个点电荷，其电量分别为  $q_1$  和  $q_2$ ，设矢量  $\vec{r}$  由  $q_1$  指向  $q_2$ ，则  $q_2$  所受的库仑力为

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r \quad (4.1)$$

式中， $r$  是矢量  $\vec{r}$  的大小，即两个点电荷之间的距离； $\vec{e}_r$  是矢量  $\vec{r}$  的单位矢量； $k$  为比例系数，由实验确定，其数值和单位取决于上式中各量的单位，在国际单位制中

$$k = 8.9880 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \approx 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

为了使电磁学中的大量公式简化，我们定义一个新的常数  $\varepsilon_0$ ，即

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

称为真空介电常量（dielectric constant of vacuum），或真空电容率（permittivity of vacuum），它是电磁学的一个基本物理常数。于是库仑定律的数学表达式改写为

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (4.2)$$

从库仑定律的数学表达式可以看出，当  $q_1$  和  $q_2$  同号时， $q_2$  的受力方向与  $\vec{r}$  同向，表示为排斥力，反之则是吸引力。因此，上面的数学表达式不仅表示了库仑的大小而且也表示了库仑力的方向。根据定律的约定，如果要计算  $q_2$  对  $q_1$  的库仑力，只需将  $\vec{r}$  反向即得。在这个意义上讲，库仑定律给出的库仑力仍然满足牛顿第三定律，即作用力与反作用力大小相等方向相反。

库仑定律的建立标志着电学定量研究的开始，它是关于一种基本力的定律。近代物理学实验证明，库仑定律在两个点电荷的距离小到 $10^{-17}\text{m}$ 或大到 $10^7\text{m}$ 时都是成立的。这说明库仑力是一种长程力，可以认为在更大的范围内库仑定律都成立。

**例 4.1** 氢原子在能量最低状态时，电子与原子核（一个质子）的距离是 $5.29 \times 10^{-11}\text{m}$ 。比较两者之间的库仑力和万有引力的大小。

**解** 电子和质子的电量等量异号，数值是 $e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ 。电子质量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31}\text{kg}$ ，质子质量是 $m_p = 1.7 \times 10^{-27}\text{kg}$ 。

由库仑定律，两者之间库仑力的大小是

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{(5.29 \times 10^{-11})^2} = 8.1 \times 10^{-8}\text{N}$$

由万有引力定律，两者之间万有引力的大小是

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6.7 \times 10^{-11} \times 9.1 \times 10^{-31} \times 1.7 \times 10^{-27}}{(5.29 \times 10^{-11})^2} = 3.7 \times 10^{-47}\text{N}$$

两种力的比值是

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{8.1 \times 10^{-8}}{3.7 \times 10^{-47}} = 2.2 \times 10^{39}$$

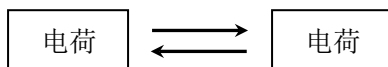
可见，在电子和质子之间万有引力远远小于库仑力。

## 4.2 电场 电场强度

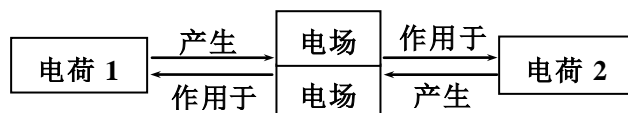
### 4.2.1 电场

回顾经典力学中的力，如弹力、张力是如何作用的。例如，力学中物体受绳子的拉力时，绳子与物体是有接触的；一根木棒顶着一个重物，物体所受的支持力也是因为它与木棒有接触。对于真空中的两个带电体，在两个带电体之间并没有相互接触，但两者之间却有库仑力，这种相互作用力是怎么发生的呢？

在早期，人们认为两个电荷之间的相互作用力是一种超距作用。即一个电荷对另一个电荷的作用力是隔着一定空间直接给予的，不需要中间媒介，也不需要时间，可用框图表示为



法国物理学家法拉第（M. Faraday）最早提出了电场（electric field）的概念，以解决电荷间相互作用力的传递问题。其基本的观点是：电荷与电荷之间的相互作用不是超距离的，而是近距离的；一个电荷之所以对另一个电荷有作用力是因为电荷要产生一个场，当其它电荷处于这个场中时这个场就对其有作用力。这种作用方式可以表示为



法拉第的这个观点，完全为其后的科学实验和理论所证实。电场是一种客观存在的物质形态，它的传播速度就是光速，是有限的量值。电场具有质量、动量和能量。

如果电荷是静止的，则空间就只有电荷产生的电场，称为静电场（electrostatic field）。静电场的性质、描述和分布规律是本章的主要讨论内容。

## 4.2.2 电场强度

电场的性质可以利用已知的实验结果来描述：它对引入到电场内某一点的电荷有电场力的作用。为此我们引入试验电荷（test charge），其满足如下要求：一是电量应当足够的小，它的引入不会明显影响产生电场的原来电荷（称为场源电荷）的分布，以至于原有电场的空间分布不会发生明显改变；二是它的线度必须足够的小，可以视为点电荷，以便于其空间位置是确定的。

设真空中有若干固定不动的点电荷  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $\cdots$ 、 $q_n$  构成的带电系统，将试验电荷  $q_0$  放入电场中。实验发现： $q_0$  放在电场不同位置时，试验电荷所受的电场力的大小和方向一般是不同的。但是在确定点处，试验电荷所受的电场力  $\vec{F}$  与电量  $q_0$  的比值  $\vec{F}/q_0$  与电量  $q_0$  无关，决定于带电系统的结构。因此比值  $\vec{F}/q_0$  反映了电场在空间不同点的性质，定义为电场强度（electrostatic field strength），用  $\vec{E}$  表示，即

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (4.3)$$

上式表明，电场中某点的电场强度等于静止于该点单位正电荷所受的电场力。

在国际单位制中，场强单位是牛顿·库仑<sup>-1</sup>（ $\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$ ）。在工程技术中常用伏特·米<sup>-1</sup>（ $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ ）。可以证明，两者是等价的。

一般而言，空间不同点电场强度的大小和方向是不相同的，其分布决定于场源电荷的分布。如果空间各点电场强度的大小和方向均相同，这种电场称为均匀电场。

根据力的矢量叠加性质，试验电荷在点电荷系内所受的电场力可以视为各个点电荷各自对  $q_0$  作用力  $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$ 、 $\cdots$ 、 $\vec{F}_n$  的矢量和，即

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

两边除以  $q_0$ ，有

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

按场强定义，等式左边是总场强，右边各项是各个点电荷单独存在时产生的场强，所以，上式可以写为

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad (4.4)$$

上式说明：点电荷系电场中任一点处的场强等于各个点电荷单独存在时产生的场强的矢量和。这个结论称为场强叠加原理（superposition principle of electric field），是电场的基本性质之一。

如果电场中各点的电场强度  $\vec{E}$  已知，利用式（4.3）可以确定其中任意点处点电荷  $q_0$  所受的电场力，有

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (4.5)$$

### 4.2.3 电场强度的计算

#### 一、点电荷产生的电场

在真空中，点电荷产生电场的规律可以通过库仑定律直接得到。如图 4.2 所示，一个静止的点电荷  $q$  在其周围产生电场，设场点  $P$  相对于  $q$  的位置矢量为  $\vec{r}$ 。现在假设有一个试验电荷  $q_0$  处于  $P$  点，根据库仑定律，试验电荷  $q_0$  所受的电力为

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

式中  $\vec{e}_r$  是矢径  $\vec{r}$  方向上的单位矢量。

根据电场强度定义， $P$  点场强是

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (4.6)$$

由上式可知，若  $q > 0$ ，则  $\vec{E}$  与  $\vec{r}$  同向，即在正电荷周围的电场中，任意一点的场强沿该点的矢径方向（如图 4.2(a)）；若  $q < 0$ ，则  $\vec{E}$  与  $\vec{r}$  反向，即在负电荷周围的电场中，任意一点的场强沿该点矢径的负方向（如图 4.2(b)）。式（4.6）说明点电荷的电场具有球对称性，即在以  $q$  为心的任意球面上场强大小相等，方向均与该球面正交。在各向同性的自由空间内，一个本身无任何方向特征的点电荷的电场分布必然具有这种对称性。

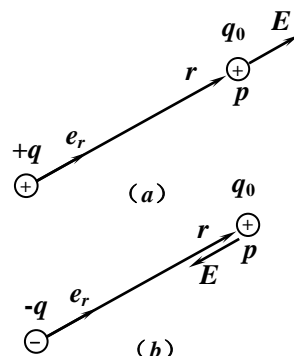


图 4.2 电荷的电场

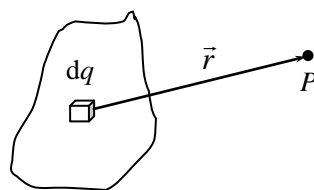


图 4.3 连续带电体的电场

#### 二、点电荷系产生的电场

根据电场强度叠加原理，点电荷系所产生的总电场的场强应等于各个点电荷场强的矢量和。对于包含  $n$  个点电荷的点电荷系，第  $i$  个点电荷  $q_i$  在场点  $P$  产生的场强为

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{e}_{ri}$$

式中， $r_i$  为场点  $P$  到点电荷  $q_i$  的距离， $\vec{e}_{ri}$  为  $P$  到  $q_i$  矢径的单位矢量。按场强叠加原理，总场强为

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{e}_{ri} \quad (4.7)$$

这就是点电荷系电场强度的计算公式。

#### 三、连续带电体产生的电场

对于连续带电体所产生的电场，我们可以根据场强叠加原理和数学中的微积分方法计算它的电场强度。这种计算电场强度的方法叫做用叠加原理计算场强。

任何连续带电体可以通过微分，将其分成无限多个无限小的微元电荷，叫做电荷元，用  $dq$  表示。虽然电荷元有各种各样的选取方法，但理论上讲它总是可以视为点电荷的。如图 4.3 所示，我们任取一个电荷元  $dq$ ，由点电荷产生电场的规律， $dq$  产生的场强为

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

图 4.3 中  $\vec{r}$  是  $dq$  指向场点  $P$  的矢量。式中  $r$  为  $\vec{r}$  的大小， $\vec{e}_r$  为  $\vec{r}$  的单位矢量。不同的电荷元指向  $P$  点的  $\vec{r}$  矢量是不同的，因此  $\vec{r}$  是一个变量。再根据场强的叠加原理，带电体在  $P$  点处产生的总场强应该为各个电荷元在  $P$  点产生的场强的矢量和。这种无限多个无限小矢量的矢量和是一个矢量积分

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{e}_r \quad (4.8)$$

积分遍及整个带电体。

在具体运算时，通常将  $d\vec{E}$  在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三坐标轴方向分解，写出分量形式  $dE_x$ 、 $dE_y$ 、 $dE_z$ ，再积分得出

$$E_x = \int dE_x \quad E_y = \int dE_y \quad E_z = \int dE_z$$

则场强的数值是

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

最后判定出场强的方向。

在电荷元的选择上，需要根据带电体的几何形状、电荷分布情况选取不同形态的电荷元。一般有下面三种情况：

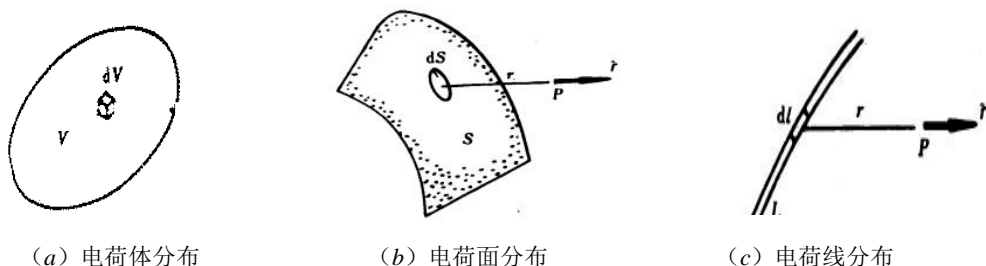


图 4.4 带电体的形态

#### (1) 带电体呈体分布的情况

如果电荷分布在一个体积内，我们称电荷是体分布的。常用于描写电荷体分布的物理量是电荷体密度 (volume charge density)，即单位体积内的电量，用  $\rho$  表示，其单位是库仑·米<sup>-3</sup> (C·m<sup>-3</sup>)。如图 4.4 (a) 所示，电荷元  $dq$  可以表示为

$$dq = \rho dV$$

式中， $dV$  表示电荷元所占据的体积元。

#### (2) 带电体呈面分布的情况

如图 4.4 (b) 所示, 当电荷分布在某一个曲面上时, 我们称电荷是面分布的。用于描写电荷面分布的物理量是电荷面密度 (surface charge density), 即单位面积上的电量, 用符号  $\sigma$  表示, 其单位是库仑·米<sup>-2</sup> ( $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ )。

真实的面分布在实质上都是体分布的, 但如果电荷分布很薄, 其厚度在所讨论问题中可以忽略, 则可以把它作为面分布处理。在这种情况下, 我们只需要对带电面进行微分, 所得到的电荷元与一个面积元相对应。即

$$dq = \sigma dS$$

这里  $dS$  表示电荷元所对应的面积元。

### (3) 带电体呈线分布的情况

有时电荷分布在一个细长的物体上, 如图 4.4 (c) 所示。在这种情况下, 通常可以忽略带电体的粗细而只考虑其长度, 这不会对所讨论的问题产生影响, 此时的带电体即是呈线分布的。

用于描写电荷线分布的物理量是电荷线密度 (linear charge density), 即单位长度上的电量, 用符号  $\lambda$  表示, 其单位是库仑·米<sup>-1</sup> ( $\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ )。在这种情况下, 电荷元一定与一个线元相对应, 即

$$dq = \lambda dl$$

式中,  $dl$  表示电荷元所对应线元的长度。

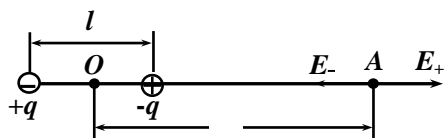
值得注意的是, 上面所讨论的三种情况下的积分都是定积分, 都有相应的积分范围, 在具体应用的时候应注意这一点。

**例 4.2** 计算电偶极子轴线上和中垂线上各点的电场强度。

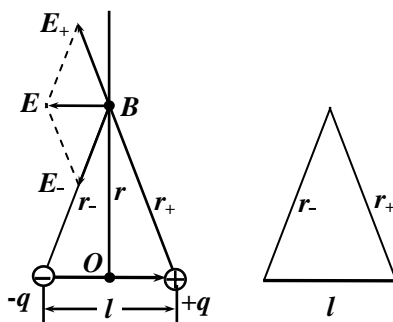
**解** 相隔较近距离的两个等量异号的点电荷 ( $+q$  和  $-q$ ) 所组成的点电荷系统叫电偶极子 (electric dipole)。电偶极子的电偶极矩 (electric dipole moment) 大小等于电偶极子的电量乘以它们的距离, 方向由负电荷指向正电荷。即

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

#### (1) 电偶极子轴线上一点 A 的电场强度



(a) 电偶极子轴线上场强



(b) 电偶极子中垂线上场强

图 4.5 电偶极子的场强

如图 4.5 (a) 所示, 取电偶极子轴线的中点  $O$  到  $A$  点的距离是  $r$ , 点电荷  $+q$  和  $-q$  在  $A$  点产生的电场强度的大小分别是

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2}$$

两者方向在轴线上，但方向相反。所以  $A$  点的总电场强度是

$$E_A = E_+ - E_- = \frac{2qrl}{4\pi\epsilon_0 r^4 \left(1 - \frac{l}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{l}{2r}\right)^2}$$

若满足  $r \gg l$ ，有

$$E_A \approx \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$E_A$  的方向与电矩  $\vec{p}$  的方向一致。

(2) 电偶极子中垂线上一点  $B$  的电场强度

如图 4.5 (b) 所示。设中垂线上任意一点  $B$  相对于  $+q$  和  $-q$  的位置矢量分别为  $\vec{r}_+$  和  $\vec{r}_-$ ，且  $r_+ = r_-$ 。 $+q$  和  $-q$  在  $B$  点处产生场强的大小相同，即

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)}$$

方向分别在  $+q$  和  $-q$  到  $B$  点的连线上，前者背向  $+q$ ，后者指向  $-q$ 。

设连线与电偶极子轴线之间的夹角是  $\alpha$ ，则  $B$  点的总场强  $\vec{E}_B$  的大小为

$$E_B = E_+ \cos \alpha + E_- \cos \alpha = 2E_+ \cos \alpha$$

因为

$$\cos \alpha = \frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

所以

$$E_B = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

若满足  $r \gg l$ ，有

$$E_B = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{2} E_A$$

其方向与电矩  $\vec{p}$  的方向相反。

**例 4.3** 设在真空中有一均匀带电直线，长为  $l$ ，总电量为  $q$ ，求带电直线中垂线上一点  $P$  的场强。设  $P$  点至直线的垂直距离为  $a$ 。

**解** 如图 4.6 所示，取直线中点为坐标原点。这里产生电场的电荷是连续分布的，所以首先要把整个电荷分布划分为许多电荷元  $dq$ ，求出  $d\vec{E}$ ，然后按  $\vec{E} = \int d\vec{E}$  求总场强。

为此在直线上离原点为  $x$  处取长度元  $dx$ 。因为电荷线密度  $\lambda = \frac{q}{l}$ ，所以  $dq = \lambda dx$ 。

设  $dx$  到  $P$  点距离为  $r$ ，则  $dq$  在  $P$  点的场强大小为

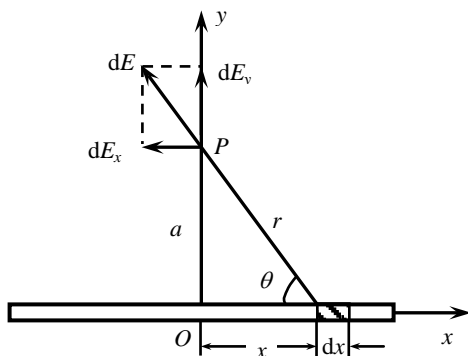


图 4.6 带电直线中垂线上的电场



$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

各电荷元在  $P$  点的场强方向各不相同, 但根据对称性, 各电荷元场强的  $x$  轴方向的分量互相抵消, 所以  $P$  点的总场强为

$$E_x = 0, E = E_y = \int dE_y$$

因为

$$dE_y = dE \sin \theta$$

又因

$$\sin \theta = \frac{a}{r} \quad r = \sqrt{a^2 + x^2}$$

所以

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

则  $P$  点的场强为

$$E = E_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 a (4a^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$\vec{E}$  的方向指向  $y$  轴正方向。

如果  $l \gg a$ , 即带电直线是“无限长”的, 则上式可简化为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \quad (4.9)$$

即“无限长”均匀带电直线外的场强大小与离直线的距离成反比。

如果  $l \ll a$ , 则  $(4a^2 + l^2)^{\frac{1}{2}} \approx 2a$ , 又因  $q = \lambda l$ , 故前式可简化为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

即在此情况下 ( $l \ll a$ ), 可将带电体看做点电荷。

**例 4.4** 如图 4.7 所示, 一均匀带电细圆环, 半径为  $R$ , 所带总电量为  $q$  (设  $q > 0$ ), 计算圆环轴上场点  $P$  的电场强度。

**解** 将圆环微分成为许多小段, 任一小段  $dl$  上的带电量为  $dq$ 。其量值是

$$dq = \frac{q}{2\pi R} dl$$

此电荷元  $dq$  在  $P$  点场强的大小为

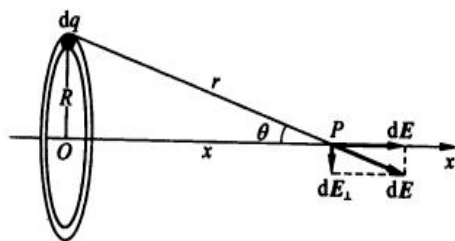


图 4.7 均匀带电圆环轴上场强

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdl}{2\pi R r^2}$$

其方向如图所示。 $d\vec{E}$  沿平行和垂直于轴线的两个方向的分量分别为  $dE_{//}$  和  $dE_{\perp}$ 。由于圆环电荷分布对于轴线对称，所以圆环上全部电荷的  $dE_{\perp}$  分量的矢量和为零，因而  $P$  点的场强沿轴线方向，即

$$E = \int dE \cos \theta$$

此式的积分遍及整个圆环，而且对于给定点  $P$ ， $r$  和  $\theta$  是定值。所以

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cos \theta}{2\pi R r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由图中几何关系

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad r^2 = R^2 + x^2$$

于是得出

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

其方向沿  $x$  轴正方向。

当  $x=0$  时， $E=0$ ，即圆环中心处的电场强度为零。

当  $x \gg R$  时，该处电场强度可以近似为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

相当于全部电荷集中于圆环中心处的点电荷在  $P$  点产生的电场。

**例 4.5** 均匀带电圆盘的半径为  $R$ （如图 4.8 所示），电荷面密度（即单位面积上的电荷）为  $\sigma$ （设  $\sigma > 0$ ），求圆面轴线上距离圆心  $x$  处场点  $P$  的场强。

**解** 对于带电平板，如果其面积的线度及考察点到平板的距离都远远大于它的厚度，该带电板就可以看作一个带电平面。

带电圆盘可看成由许多同心的带电细圆环组成。考虑其中半径为  $r$ 、宽度为  $dr$  的细圆环，此环的面积是  $dS = 2\pi r dr$ ，带有的电量是

$$dq = \sigma dS = 2\pi\sigma r dr$$

利用上题结果，该细圆环在  $P$  点的场强大小是

$$dE = \frac{x dq}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x r dr}{2\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

方向沿着轴线指向  $x$  轴正方向。

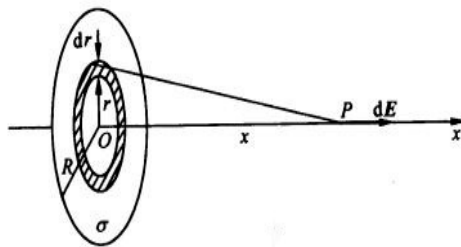


图 4.8 均匀带电圆盘轴线上的电场

由于组成圆面的各圆环的电场  $d\vec{E}$  的方向都相同, 所以  $P$  点的总场强为各个圆环在  $P$  点场强的大小的积分, 即

$$E = \int dE = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{rdr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]$$

其方向沿轴线指向  $x$  轴正方向。

当  $x \ll R$  时, 均匀带电圆盘可以视为“无限大”带电平面,  $P$  点场强是

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (4.10)$$

这表明“无限大”带电平面产生的电场是一个均匀电场或匀强电场, 各点场强量值相同, 方向都与平面垂直。

当  $x \gg R$  时, 按二项式定理展开, 略去高次项, 有

$$(R^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} + \frac{3}{8} \left( \frac{R^2}{x^2} \right)^2 - \dots \right] \approx \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{R^2}{2x^2} \right)$$

于是

$$E \approx \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi \epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 x^2}$$

式中,  $q = \sigma \pi R^2$  是圆盘所带的电量。可见, 远离带电面处的电场相当于电荷全部集中于圆盘中心的一个点电荷所产生的电场。

**例 4.6** 由两个均匀带电的“无限大”平板  $A$ 、 $B$  (如图 4.9 所示), 电荷面密度分别是  $+\sigma$  和  $-\sigma$ , 求两板之间和外侧的电场强度。

**解** 根据场强叠加原理, 任意点场强  $\vec{E}$  可以视为两个平板各自产生的场强  $\vec{E}_A$ 、 $\vec{E}_B$  的矢量和, 即

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$$

利用上题结果式 (4.10), 两板在空间任意点的电场强度大小都是  $\sigma/2\epsilon_0$ , 方向如图所示。所以, 在两板之间区域, 电场强度大小是

$$E = E_A + E_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.11)$$

方向是从  $A$  板指向  $B$  板。同理, 在两板的外侧的电场强度是

$$E = E_A - E_B = 0$$

由此可见, 由均匀带等量异号电荷的两个平板组成的系统, 如果板面的线度远大于两板之间的距离, 则除边缘附近外, 电场全部集中于两板之间, 而且是均匀电场。

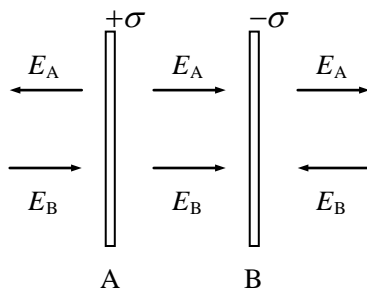


图 4.9 两均匀带电平板的电场

## 4.3 静电场中的电介质 电位移矢量

### 4.3.1 静电场中的电介质

电介质（dielectrics）是由大量中性分子组成的绝缘物质，它们是不导电的。当电介质放置在静电场中时，介质和电场将发生什么样的变化呢？下面我们就来讨论这种变化，而且只讨论均匀的、各向同性电介质的情况。

电介质的分子是由等量的正、负电荷构成。在远离分子的地方，可以把分子中的正、负电荷作为两个点电荷处理，称为等效电荷，等效电荷的位置称为电荷中心。若分子的正、负电荷中心不重合，则等效电荷形成一个电偶极子，其电偶极矩  $\vec{p} = q\vec{l}$  称为分子的固有电矩（natural electric moment），这种分子叫有极分子（polar molecules）。如 HCl 分子，H 原子一端带电  $+e$ ，Cl 原子一端带电  $-e$ ，形成一个电偶极子，这是化学中典型的极性共价键。若分子的正、负电荷中心重合，则分子的电偶极矩为零，这种分子叫无极分子（nonpolar molecules）。 $H_2$ 、 $O_2$ 、 $N_2$ 、 $CO_2$  分子即属于这一类情况，化学中称为非极性共价键。

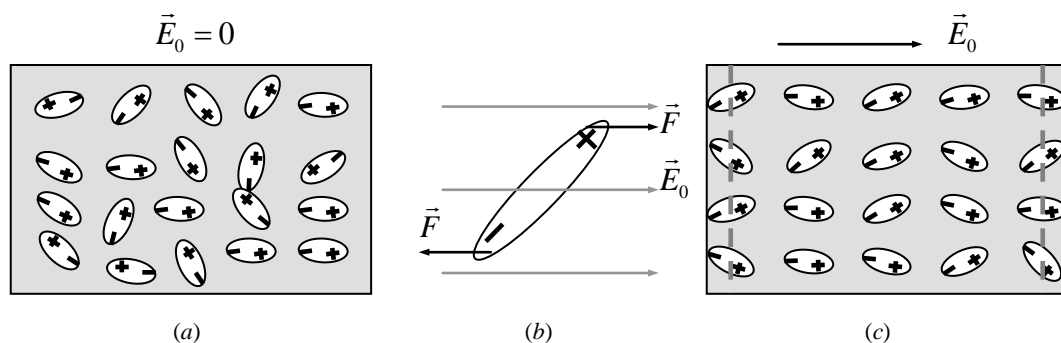


图 4.10 有极分子的转向极化示意图

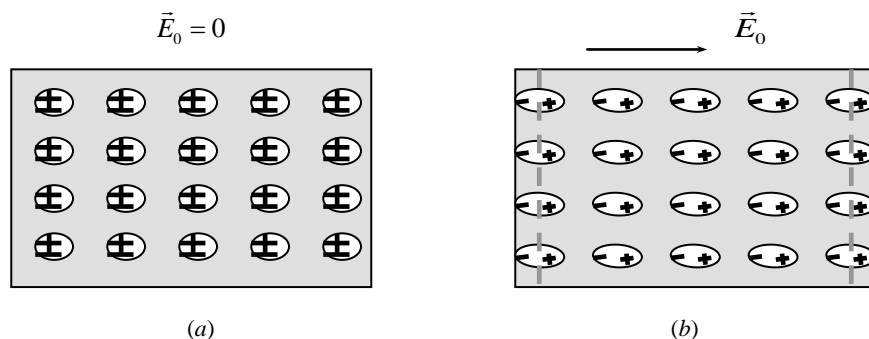


图 3.11 无极分子的位移极化示意图

有极分子在没有外场作用时，由于热运动，分子电矩无规则排列而相互抵消，介质不显电性，如图 4.10 (a)。有外场  $\vec{E}_0$  的作用时，分子将受到一个力矩的作用（见图 4.10 (b)）而转动到沿电场方向有序排列，如图 4.10 (c) 所示，这称为介质的转向极化（orientation polarization）。若撤去外场，分子电矩恢复无规则排列，极化消失，介质重新回到电中性。分子热运动的无规则性与分子极化时的取向性是矛盾的，一般说来，电场越强，温度越低，则分子的排列越有序，极化的效应也越显著。

无极分子在没有外场作用时不显电性，如图 4.11 (a)。有外场作用时，正负电荷中心受力作用而发生相对位移，形成一个电偶极矩，称为感生电矩（induced electric moment）。

感生电矩沿电场方向排列，使介质极化，如图 4.11 (b) 所示意。无极分子的极化是由于分子正负电荷中心发生相对位移来实现的，故称为位移极化（displacement polarization）。若撤去外场，无极分子的正、负电荷中心重新重合，极化消失，介质恢复电中性。显然，位移极化的微观机制与取向极化不同，但结果却相同。介质中分子电偶极矩矢量和不为零，即介质被极化了。所以，如果问题不涉及极化的机制，在宏观处理上我们往往不必对它们刻意区分。

如果介质是均匀各向同性的，极化后的介质内部仍然没有净电荷，但介质的表面会出现面电荷，称为极化电荷（polarization charge）。极化电荷不是自由电荷(free charge)，不能自由流动，故也称为束缚电荷（bound charge）。

介质中的电场  $\vec{E}$  是自由电荷电场  $\vec{E}_0$  与极化电荷的电场  $\vec{E}'$  迭加的结果，有

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \tag{4.12}$$

在各向同性介质均匀地充满电场的情况里， $\vec{E}'$  方向与  $\vec{E}_0$  的方向相反。所谓介质均匀地充满电场，举例来说，对于平板电容器，只需要一种各向同性的均匀介质充满两板之间就够了；而对于点电荷，原则上要充满到无穷远的地方。实验证明，若自由电荷的分布不变，当介质均匀地充满电场后，介质中任一点的电场强度  $\vec{E}$  为原来真空中该点电场强度  $\vec{E}_0$  的  $\epsilon_r$  分之一，即

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \tag{4.13}$$

其中  $\epsilon_r$  称为介质相对电容率(relative permittivity)，也称为相对介电常数(relative dielectric constant)，是没有单位的纯数。对于“真空”， $\epsilon_r = 1$ ；对于空气，近似有  $\epsilon_r \approx 1$ ；对其它介质， $\epsilon_r > 1$ 。一些电介质的相对介电常数列于表 4.2 中。

表 4.2 一些介质材料的相对介电常数

材 料	相对介电常数 $\epsilon_r$	介电强度/ $10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$
真 空	1.00000	
空 气	1.00059	3
石 英	3.78	8
硬质玻璃	5.6	14
聚苯乙烯	2.56	24
聚四氟乙烯	2.1	60
聚氯丁橡胶	6.7	12
尼 龙	3.4	14
纸	3.7	16
钛 酸 锶	233	8
水	80	
硅 油	2.5	15

如果外加电场不是很强时，介质只是产生电极化效应，介质中的自由电荷数量很少，不会影响介质的绝缘性质。但是，若外加电场达到一定程度，会使电介质分子中的正负电荷被拉开而形成自由电荷，导致电介质的绝缘性质被破坏，转变成导体，称这种现象为电介质的击穿（breakdown）。电介质所能承受的不被击穿的最大电场强度，称为该种电介质的介电强度（dielectric strength），表 4.2 中列出了几种电介质的介电强度的估计值。

以点电荷为例，真空中点电荷  $q_1$  在其周围空间任一点  $p$  激发的电场为

$$\vec{E}_0 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

在充满介质以后，点电荷本身激发的场强并不会因极化电荷的出现而改变，即仍为上式。而由于极化电荷的作用，在  $p$  点产生的电场由式（4.13）决定，应为

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \vec{e}_r = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r \quad (4.14)$$

式中  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ ，称为电介质的介电常数（dielectric constant），其单位与真空介电常数  $\epsilon_0$  相同。若  $P$  点放置另一点电荷  $q_2$ ，则两个点电荷间的库仑力是

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \vec{e}_r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r \quad (4.15)$$

这是各向同性介质充满电场时的库仑定律的表示式。

同点电荷在真空中的场强比较，公式形式不变，唯一的变化是把  $\epsilon_0$  换成了  $\epsilon$ 。由于在所有的场强公式中，真空中的介电常量  $\epsilon_0$  均在分母中，故在各向同性介质均匀地充满电场时，场强公式的形式都不会变，只须把  $\epsilon_0$  换作  $\epsilon$ 。式（4.14）中介质中的场强比真空中要小，这是由于极化电荷的场强影响的结果，但极化电荷在式子中并未出现，它们的影响包含在  $\epsilon$  之中。

### 4.3.2 电极化强度

电介质的电极化状态可以引入电介质的电极化强度（electric polarization）表示，其定义为：电介质单位体积内电偶极矩的矢量和。若以  $\vec{p}_{\text{分子}}$  表示电介质中某一小体积  $\Delta V$  内的某个分子的电偶极矩，则该处的电极化强度  $\vec{P}$  为

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V} \quad (4.16)$$

电极化强度反映了介质内电极化的强弱和方向。在国际单位制里，电极化强度的单位是库伦·米<sup>-2</sup>（C·m<sup>-2</sup>），与面电荷密度的量纲一致。

由于电介质的极化电荷是电介质极化的结果，所以极化电荷与电极化强度之间必然存在某种定量关系。我们可以利用一个特例来推出这个关系。如图 4.12 所示，在一对面积为  $S$ 、相距为  $d$  的均匀带电平面（设

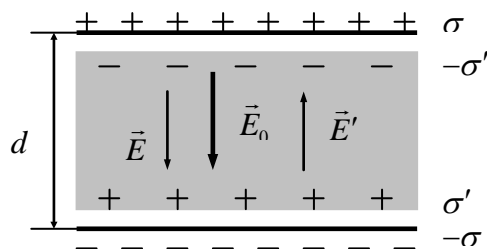


图 4.12 充满介质的带电平面

两平面的自由电荷面密度分别是  $\sigma$  和  $-\sigma$ ， $S$  的线度远大于  $d$ ）之间充入各向同性的均匀电介质。由于电极化的作用，在靠近带电平面的介质平面上会出现与自由电荷异号的均匀面分布的极化电荷，其面密度是  $-\sigma'$  和  $\sigma'$ ，而在介质内部没有剩余的极化电荷。所以整个介质的电偶极矩矢量和是  $\sigma'Sd$ ，而电极化强度是

$$P = \frac{\sum p_{\text{分子}}}{\Delta V} = \frac{\sigma'Sd}{Sd} = \sigma' \quad (4.17)$$

这表明，在均匀各向同性的电介质中，电极化强度的大小等于电极化产生的极化电荷面密度。

同样，我们利用上面的特例来分析极化电荷和束缚电荷、电极化强度与电场强度的关系。如图 4.12 所示，利用式 (4.11) 得到自由电荷产生的电场强度大小为

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

方向向下。若电介质表面的极化电荷面密度是  $\sigma'$ ，则极化电荷所激发电场的电场强度的大小是

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

方向向上。所以介质中的电场强度是

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

利用式 (4.13)， $E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ ，带入上式有

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

于是得到自由电荷密度与极化电荷密度的关系是

$$\sigma' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma \quad (4.18a)$$

利用关系式  $q = \sigma S$ 、 $q' = \sigma' S$ ，得到自由电荷与极化电荷的关系是

$$q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q \quad (4.18b)$$

将式 (4.11)、式 (4.13) 和式 (4.17) 带入式 (4.18a)，得出电介质中电极化强度与电场强度的数值关系

$$P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$$

定义  $\chi_e = \epsilon_r - 1$ ，称为电介质的电极化率 (electric susceptibility)。相应的矢量关系是

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (4.19)$$

上式表明，在各向同性电介质中，电极化强度和电场强度成正比，且方向相同。

应当注意的是，各向同性均匀电介质在静电场中被极化时，其相对介电常数  $\epsilon_r$  和电极

化率  $\chi_e$  是常数。但是在频率较高的变化电场中被极化时，由于介质电极化需要一定的时间，使分子的电偶极矩的变化跟不上电场的变化，电介质的相对介电常数会下降。所以在高频电场中，电介质的相对介电常数与外加电场的频率有关。

### 4.3.3 电位移矢量

在一般问题中，只是给出带电体自由电荷分布和电介质分布，极化电荷的分布是未知的。电介质中的电场既与自由电荷分布有关，又与极化电荷分布有关，同时极化电荷的分布又受到介质中电场的影响，所以问题就变得相当复杂。为了简化电介质中电场的计算，我们引入适当的物理量——电位移矢量（electric displacement）。

电位移矢量  $\vec{D}$  定义如下

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.20)$$

在国际单位制中，其单位是库仑·米<sup>-2</sup>（C·m<sup>-2</sup>）。

在各向同性介质中，利用式（4.19），有

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon\vec{E} \quad (4.21)$$

这是点对点应的关系式，即电介质中某点的电位移矢量  $\vec{D}$  等于该点电场强度  $\vec{E}$  与该点介电常数  $\epsilon$  的乘积，而且两者具有相同方向。

利用介质平板中电场的特例，我们来分析电位移矢量的意义。将关系式  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}$  带入

式（4.21），得出电位移矢量的大小为

$$D = \sigma \quad (4.22)$$

即在各向同性均匀电介质中，电位移矢量的大小等于带电体的自由电荷的面密度。

将式（4.7）代入式（4.21），可以证明电位移矢量仍然满足叠加原理。点电荷系在均匀无限大的各向同性介质中产生的电位移矢量是

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^n \vec{D}_i = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi r_i^2} \vec{e}_{ri} \quad (4.23)$$

电位移矢量是在研究介质中电场时引入的辅助物理量，一般决定于自由电荷的分布。所以在求解电介质中的电场时，可以先求出电位移矢量，然后再利用式（4.21）求出电场强度。

## 4.4 静电场中的高斯定理

### 4.4.1 电场线与电位移线

为了形象直观的描绘电场分布，可以引入电场线（electric field lines）和电位移线（electric displacement lines）的概念。通过这些几何线的图形，我们可以清楚的观察电场的分布特点。

电场中每一点的电场强度都有大小和方向，我们规定满足如下要求的曲线称为电场线，即

（1）曲线上每一点的切线方向和该点电场强度的方向一致；

（2）在电场中任一点处，通过垂直于该处电场强度方向的单位面积的电场线的条数等于该点处电场强度的量值。



图 4.13 给出按上述规定描绘的几种带电体电场的电场线。

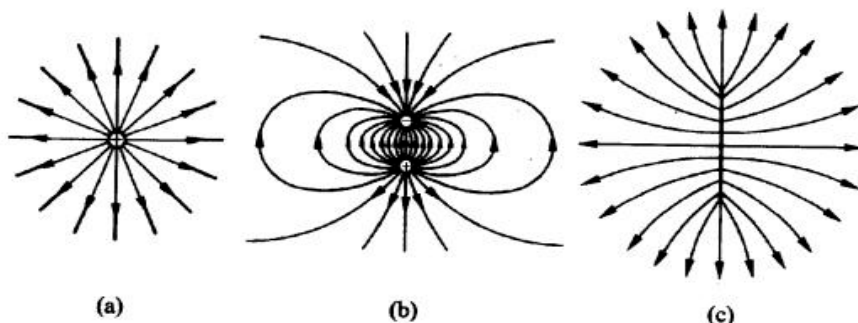


图 4.13 (a) 点电荷；(b) 电偶极子；(c) 带电直线

通过对各种电场的电场线的分析，我们会发现静电场的电场线具有如下的特点：

#### (1) 静电场的有源性

通过分析各种各样电场的电场线，我们发现静电场的电场线总是起始于正电荷或无穷远，终止于负电荷或无穷远。这一特点叫做静电场的有源性，即电场线是有头有尾的，它有起点和终点。

#### (2) 静电场的无旋性

同样可以发现，静电场中的电场线是永不闭合的曲线。这一特点叫做静电场的无旋性。静电场的这一特点实际上是和电磁相互作用过程中的能量守恒联系在一起。静电场的无旋性表明了电磁相互作用中能量是守恒的。如图 4.14 所示，假设有一电场线闭合成为一个逆时针方向的圆周，我们就可以以该圆周的大小制作一个圆盘并使其边缘带电，例如带正电，然后将圆盘放在该电场中。由于圆盘上每一个地方受到的电场力都沿着电力线的方向，对圆心的力矩都沿着逆时针的方向，我们将会发现圆盘会加速转动，动能不断增加。这显然违背了能量守恒定律，因此，静电场的电场线是不能闭合的。

#### (3) 同一电场的电场线不相交。

在同一电场中所作的电场线不会相交。事实上，若同一电场的电场线相交就意味着在交点处的场强会有两个方向，即一个点电荷在该点受到的电场力会有两个方向。这是不符合物理实际的。

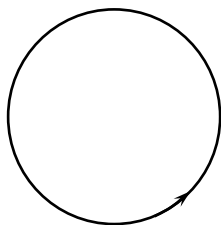


图 4.14 闭合电场线假设

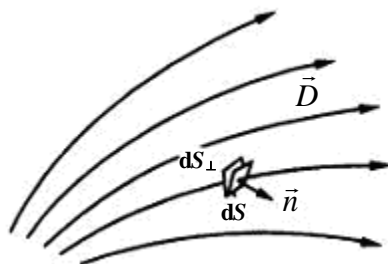


图 4.15 电位移线的密度

同理，我们可以采用电位移线形象直观的描述电场中的电位移矢量的分布。其绘制规定是：曲线上每一点的切线方向和该点电位移矢量的方向一致；在电场中任一点处，通过

垂直于该处电位移矢量方向的单位面积的电位移线的条数等于该点处电位移矢量的量值。如图 4.15 所示，通过垂直于电位移矢量方向的面积元  $dS_{\perp}$  的电位移线的条数  $d\Phi_e$  应当满足下述关系

$$D = \frac{d\Phi_e}{dS_{\perp}} \quad (4.24)$$

这说明，电场中某点电位移矢量的大小等于该点处电位移线的密度。

比较上面的定义可知，电位移线与电场线的定义是类似的，具有类似的特点。但是，两者也有明显的区别：一是密度的规定不同，按照 (4.21) 式，各向同性电介质中电位移线密度是电场线的  $\varepsilon$  倍；二是电位移线起始于自由正电荷，终止于自由负电荷，而电场线则从正电荷（包括自由正电荷和极化正电荷）出发，终止于负电荷（包括自由负电荷和极化负电荷）。

### 4.4.2 电通量

通过某一曲面电位移线的条数，叫做该曲面上的电位移矢量通量，也称为电通量

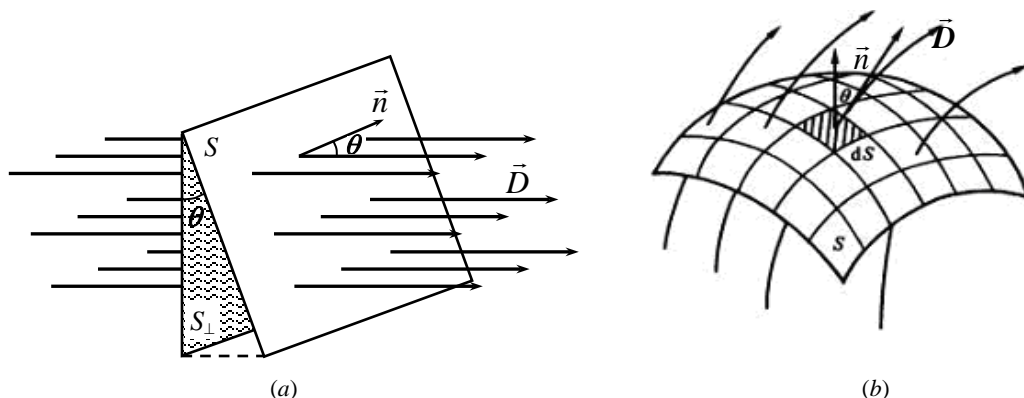


图 4.16 电通量的计算

(electric flux)，用  $\Phi_e$  表示。而且规定电位移矢量通量的正负为：与曲面法向正方向夹角小于  $90^\circ$  通过的电位移线作为正的通量，与曲面法向正方向夹角大于  $90^\circ$  通过的电位移线作为负的通量。

我们先讨论一种特殊情况，求均匀电场中一个平面上的电通量。如图 (4.16 (a)) 所示，平面  $S$  处于匀强电场  $\vec{D}$  中， $\vec{n}$  为平面的法线方向。求电通量就是求通过  $S$  的电位移线条数。

根据电位移矢量的大小与电场线密度的关系，垂直于电位移矢量方向的单位面积所通过的电位移线条数就等于电位移矢量的大小。我们将平面  $S$  投影在垂直于场强的方向上，得到  $S_{\perp} = S \cos \theta$ 。可以得到通过平面  $S$  的电通量为

$$\Phi_e = D \cdot S \cos \theta = \vec{D} \cdot \vec{S} \quad (4.25)$$

上式表明，当  $\theta < 90^\circ$  时，电通量为正，此时电位移线穿过平面的方向与法线指示方向一致。当  $\theta > 90^\circ$  时，电通量为负，此时电位移线穿过平面的方向与法线指示方向相反。当  $\theta = 90^\circ$  时，电通量为零，此时电位移线与平面平行。

计算任意曲面的电通量,要用微积分的方法。可将任意曲面视为许多无限小的面积元,如上图 4.16 (b) 所示。面积元  $dS$  可以看成是一个平面,并且在面积元的范围内场强可以近似看成大小相等、方向相同的匀强电场。与前面所讨论的平面情况类比,即可得到任意一个面积元上的电通量

$$\Phi_e = D \cdot dS \cos \theta = \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (4.26)$$

再根据积分的思想,得到任意曲面的电通量为

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (4.27)$$

这是一个面积分,积分号下标  $S$  表示此积分的范围遍及整个曲面。

通过一个闭合曲面的电通量与任意曲面的电通量在计算方法上没有本质的区别。图 4.17 所示就是一个闭合曲面,其电通量可以用如下积分式子来表示

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (4.28)$$

积分遍及整个闭合曲面。

对于闭合曲面,通常取外法线方向为正方向。根据电通量正负的规定,当电位移线从内部穿出时(如在上图中面元  $dS_1$  处),电通量为正。当电场线从外部穿入时(如在上图中面元  $dS_2$  处),电通量为负。上式所表示的通过整个闭合曲面的电通量  $\Phi_e$  就等于穿出和穿入闭合曲面的电位移线的条数之差,也就是净穿出闭合曲面的电位移线的总条数。

在国际单位制中,电通量的单位是库仑 (C),与电荷有相同的量纲。

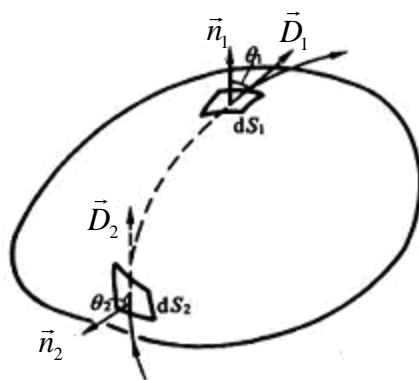


图 4.17 闭合曲面的电通量

### 4.4.3 高斯定理

高斯 (K.F.Gauss) 是德国数学家、物理学家和天文学家,他长期从事数学并将数学应用于物理学、天文学等领域的研究。在实验物理学、电磁理论、光学成像等方面作出了巨大贡献,他提出了有关电场和场源电荷关系的一条重要规律——高斯定理 (Gauss theorem)。

设空间分布若干个电荷  $q_1$ 、 $q_2$ 、...、 $q_n$ , 如图 4.18 所示。如果在空间作一任意形状的闭合曲面 (称为高斯面), 则有的点电荷处于高斯面内, 有的点电荷处于高斯面外。通过该闭合曲面的电通量, 等于该闭合曲面包围的自由电荷量的代数和, 而与闭合曲面外的电荷无关。数学表示式是

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{(S_{q_i})} q_i \quad (4.29)$$

这里  $\oint_S$  表示沿一个闭合曲面  $S$  的积分。

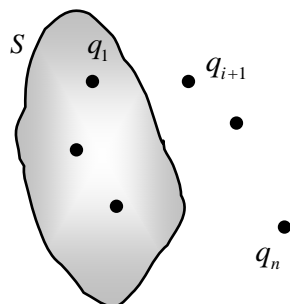


图 4.18 高斯定理图示

高斯定理是用电通量表示的电场和场源电荷关系的定理,它给出了通过任意闭合曲面的电通量与闭合曲面内部所包围的自由电荷的关系。为便于掌握高斯定理及其相关知识,

下面分步给出高斯定理的推导过程。

(1) 一个静止的点电荷激发的电场

在无限大各向同性均匀电介质中，有一个自由点电荷，如图 4.19 (a) 所示。以点电荷  $q$  为球心，取任意长度  $r$  为半径，作一闭合球面  $S$  包围点电荷  $q$ 。点电荷的电场具有球对称性，闭合球面上各点的电位移矢量的大小是

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (4.30)$$

方向均沿矢径方向，与闭合球面  $S$  的外法线方向一致。则通过球面  $S$  的电通量是

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D dS = \frac{q}{4\pi r^2} \oint_S dS = q \quad (4.31)$$

这一结果与球面半径无关，只与闭合球面包围自由电荷的电量有关。这说明：以点电荷  $q$  为中心的任意球面通过的电通量是相同的，即通过各个球面电位移线的条数相等。所以，从点电荷  $q$  发出的电位移线是连续的延伸到无限远处。

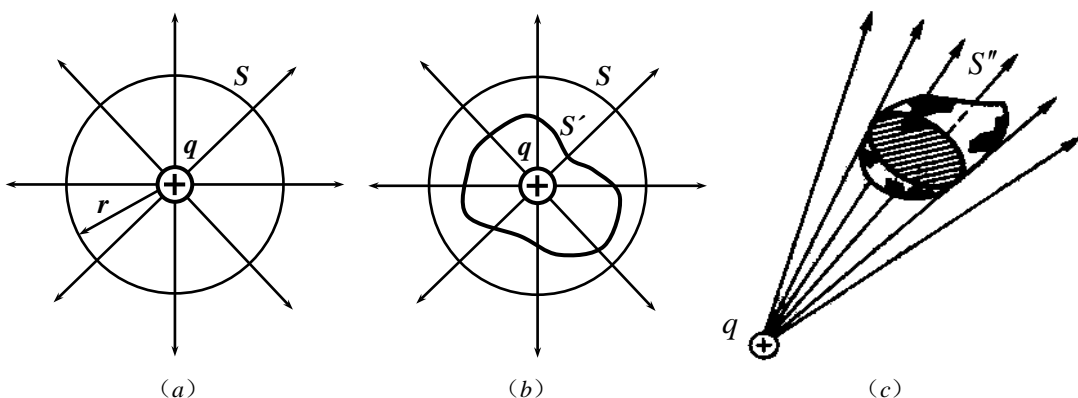


图 4.19 高斯定理的证明

如果取一个任意闭合曲面  $S'$ ， $S'$  与球面  $S$  包围同一个自由荷  $q$ ，如图 4.19 (b) 所示。由于电位移线的连续性，通过闭合曲  $S'$  的电通量与通过闭合球面  $S$  的是一致的，也是  $q$ 。这表明：通过任意形状的包围自由点电荷  $q$  的闭合曲面的电通量与曲面的大小、形状无关，只与所包围的自由电荷  $q$  的电量有关。

如果点电荷  $q$  位于闭合曲面  $S''$  的外部，如图 4.19 (c) 所示。由于电位移线的连续性，穿入闭合曲面  $S''$  的电位移线，必然从曲面  $S''$  中穿出，所以穿进与穿出  $S''$  的电位移线数目一样多，即通过  $S''$  的电通量为零。

基于上述分析我们可以得到如下结论：在一个点电荷电场中任意一个闭合曲面  $S$  的电通量或者为  $q$  或者为零，即

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} q & (S \text{ 包围自由电荷}) \\ 0 & (S \text{ 不包围自由电荷}) \end{cases} \quad (4.32)$$

(2)  $n$  个静止的点电荷构成点电荷系激发的电场

设有任一闭合曲面  $S$  包围了点电荷  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $\dots$ 、 $q_m$ ，而点电荷  $q_{m+1}$ 、 $q_{m+2}$ 、 $\dots$ 、 $q_n$  处在闭合曲面  $S$  外部如图 4.18 所示。利用电位移矢量的叠加原理式 (4.23)，通过曲面上某一面元  $dS$  的电通量是

$$d\Phi_e = \vec{D} \cdot d\vec{S} = \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} + \cdots + \vec{D}_n \cdot d\vec{S}$$

通过整个闭合曲面  $S$  的电通量是

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint_S \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} + \cdots \oint_S \vec{D}_n \cdot d\vec{S} \\ &= \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_n\end{aligned}$$

利用式 (4.32) 的结果, 得出

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = \sum_{S_{\text{内}}} q_i$$

上述结论可以推广到任意封闭曲面包围电荷连续分布的带电体的情况。这时可以把带电体分成微小体积元  $dV$  的组合, 每个体积元的电荷是  $dq = \rho dV$ ,  $\rho$  是带电体的体密度。这时高斯定理表示为

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \quad (4.33)$$

$\int_V$  表示积分应对  $S$  所包围的带电体部分的体积  $V$  进行。

在高斯定理表达式中, 方程左边的  $\vec{D}$  是曲面上各点的电位移矢量, 它是由全部自由电荷 (包括闭合曲面内外) 共同产生的, 并非只由闭合曲面内的电荷产生。而方程右边的  $\sum q_i$  只是对高斯面内的自由电荷求代数和, 与极化电荷是没有关系的, 这是因为正负极化电荷总是成对出现的。同时也表明, 通过闭合曲面的总电通量只与该曲面内部的自由电荷有关, 闭合曲面外的自由电荷对总电通量没有贡献, 但对曲面上的电位移矢量  $\vec{D}$  有贡献。因此, 当  $\sum q_i = 0$  时, 高斯面上的电场不一定处处为零, 而高斯面上的电场处处为零时, 高斯面内包围的净自由电荷必定为零。

若高斯面内有净剩的正自由电荷,  $\sum q_i > 0$ , 则  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} > 0$ , 表示有电位移线从面内穿出; 若高斯面内有净剩的负自由电荷,  $\sum q_i < 0$ , 则  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} < 0$ , 表示有电位移线从面外穿入; 若高斯面内没有自由电荷或  $\sum q_i = 0$ , 则  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$ , 表示有多少电位移线从面外穿入就有多少从面内穿出; 可见高斯定理说明正的自由电荷是发出电位移线的源头, 负的自由电荷是电位移线终止会聚的归宿。所以静电场是有源场, 高斯定理是反映静电场性质的基本方程之一。

高斯定理是在库仑定律和电场叠加原理的基础上导出的, 说明两者之间有相互连带关系, 它们从不同角度上表示了电场与场源电荷的关系。库仑定律把电场与电荷联系起来, 而高斯定理是将电场的通量与一定区域内的电荷分布联系在一起。然而应当明确的是, 对于运动电荷的电场或随时间变化的电场, 库仑定律不再有效, 而高斯定理仍然有效。高斯定理是关于电场的普遍的基本规律。

#### 4.4.4 利用高斯定理求静电场的分布

实践表明, 当电荷分布具有某种对称性时, 可以应用高斯定理求出该种电荷系统的电场分布, 而且这种方法较运用叠加原理要简便得多。

一般而言, 利用高斯定理求静电场的分布可以遵循如下思路:

(1) 根据电荷分布的对称性, 分析电场的对称性, 判断能否使用高斯定理求解电场分布;

(2) 根据电场分布的对称性, 在待求区域内选取适当的高斯面。高斯面的选取应满足下述要求

一是待求场点在高斯面上;

二是高斯面上或部分面上各点电场的大小相同, 各点的法线与该处电场的方向一致或垂直或是成恒定角度;

三是高斯面形状尽可能规整, 易于计算面积。

(3) 计算通过高斯面的电通量和高斯面内自由电荷的代数和, 依据高斯定理求出电位移矢量, 然后利用电位移矢量与电场强度的关系求出电场强度分布;

(4) 说明电场的方向, 进行有关讨论。

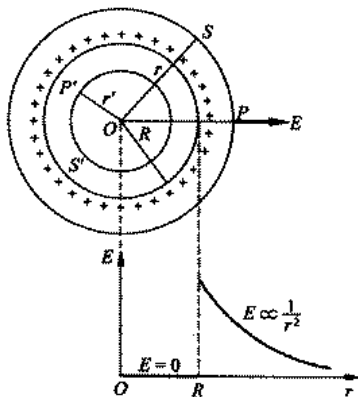


图 4.20 均匀带电球面

## 一、球对称的情况

**例 4.7** 求放在均匀无限大电介质中的均匀带电球面的电场分布。已知球面半径为  $R$ , 所带总电量为  $q$  (设  $q > 0$ ), 介质的介电常数是  $\epsilon$ 。

**解** 按对称性的理论, 如果源具有什么样的对称性, 则它的场也必然具有同样的对称性。本题中电荷分布是球对称的, 所以电荷激发的电场也应该满足球对称。

先对球面外任一点  $P$  处的场强进行具体分析。设  $P$  距球心为  $r$  (如图 4.20), 连接  $OP$  直线。由于空间介质的各向同性和电荷分布对于  $O$  点的球对称性,  $P$  点电场  $\vec{D}$  (也是  $\vec{E}$ ) 的方向只可能是沿矢径  $\vec{OP}$  的方向。其它各点的电场方向也都沿各自的矢径方向。由于电荷分布的球对称性, 在以  $O$  为中心的同一直径上, 各点的电场的大小都应该相等, 可选该球面  $S$  为高斯面。由于球面上每个面元  $dS$  上的电场的方向都和面元矢量的方向 (法向) 相同且大小不变, 故通过它的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \oint_S dS = D \cdot 4\pi r^2$$

该高斯面  $S$  包围的自由电荷是  $\sum q_i = q$ , 利用高斯定理得出

$$4\pi r^2 D = q$$

于是

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{4\pi \epsilon r^2} \quad (r > R)$$

方向沿径向方向, 指向远离中心方向。

此结果说明, 均匀带电球面外的场强分布正像球面上的电荷都集中在球心时所形成的一个点电荷的场强分布一样。

对球面内部任一点  $P'$ , 上述关于场强的大小和方向的分析仍然适用。过  $P'$  点作半径  $r'$  的同心球面为高斯面  $S'$ 。通过它的电通量仍可表示为  $4\pi r'^2 D$ , 但由于此  $S'$  面内没有电荷, 根据高斯定理有

$$4\pi r'^2 D = 0$$

于是

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = 0 \quad (r < R)$$

这表明, 均匀带电球面内部的场强处处为零。

上述结果可以统一表示为

$$D = \begin{cases} \frac{q}{4\pi r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \quad E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \quad (4.34)$$

画出电场随距离的变化曲线—— $E \sim r$  曲线 (如图 4.20 所示), 从  $E \sim r$  曲线中可看出, 电场强度的数值在球面 ( $r = R$ ) 上是不连续的。

**例 4.8** 求均匀带电球体的电场分布。已知球体半径为  $R$ , 所带总电量为  $q$ , 内外介电常数分别是  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$ 。

**解** 均匀带电球体同样满足球对称, 高斯面的选择及对称性的分析可以仿照上一例题。

对于球外部, 上一例题中关于球外的电场方向和大小的分析和计算此时也完全适用。可以直接得出: 在球体外部的电场分布与所有电荷都集中到球心时产生的电场一样, 即

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad E = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_2 r^2} \quad (r > R)$$

为了求出球体内任一点的电场, 可以通过球内  $P$  点做一个半径为  $r$  ( $r < R$ ) 的同心球面  $S$  作为高斯面, 通过此面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \oint_S dS = D \cdot 4\pi r^2$$

此球面包围的电荷为电荷的体密度与球的体积之积, 即

$$\sum q_i = \rho V = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r^3}{R^3} q$$

按高斯定理得

$$4\pi r^2 D = \frac{r^3}{R^3} q$$

于是

$$D = \frac{qr}{4\pi R^3} \quad E = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{qr}{4\pi \varepsilon_1 R^3} \quad (r < R)$$

这表明, 在均匀带电球体内部各点场强的大小与矢径大小成正比。

上述结果可以统一表示为

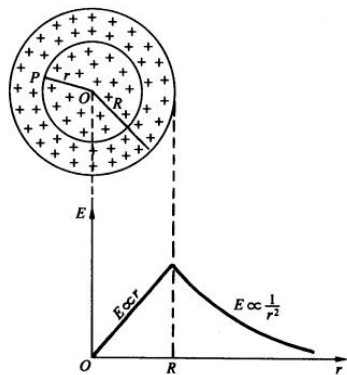


图 4.21 均匀带电球体

$$D = \begin{cases} \frac{q}{4\pi r^2} & (r > R) \\ \frac{qr}{4\pi R^3} & (r < R) \end{cases} \quad E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_2 r^2} & (r > R) \\ \frac{qr}{4\pi\epsilon_1 R^3} & (r < R) \end{cases} \quad (4.35)$$

均匀带电球体的  $E \sim r$  曲线绘于上图中。注意，在球体表面上，场强的大小是不连续的。

通过分析前两个例题，可以看出一些共同规律：在点（球）对称的情况下，高斯面是一个满足对称条件的球形曲面。

## 二、柱对称的情况

**例 4.9** 求无限长均匀带电直线的电场分布。已知直线上电荷线密度为  $\lambda$ ，所在空间的介电常数是  $\epsilon$ 。

**解** 均匀带电直线的电荷分布是轴对称的，因而其电场分布亦应具有轴对称性。考虑离直线距离为  $r$  的一点  $P$  处的电场（如图 4.22 所示）。由于带电直线为无限长，且均匀带电，因而  $P$  点的电场方向唯一的可能是垂直于带电直线而沿径向，和  $P$  点在同一圆柱面（以带电直线为轴）上的各点的电场的方向也都应该沿着径向，而且电场的数值应该相等。

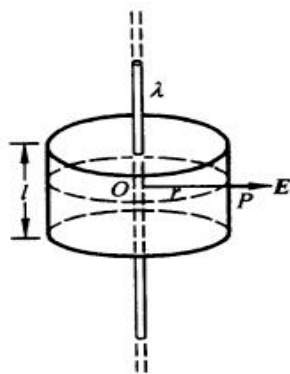


图 4.22 均匀带电直线

以带电直线为轴，作一个通过  $P$  点，高为  $l$  的圆筒形封闭面为高斯面  $S$ ，通过  $S$  面的电通量为通过上、下底面（ $S_1$  和  $S_2$ ）的电通量与通过侧面（ $S_0$ ）的电通量之和

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_0} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

在  $S$  面的上、下底面，电场方向与底面平行，因此上式右侧前面两项等于零。在侧面上各点电场的方向与各点的法线方向相同，所以有

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_0} \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 2\pi r l$$

此封闭面内包围的电荷  $\sum q_i = \lambda l$ ，由高斯定理得

$$D \cdot 2\pi r l = \lambda l$$

于是

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \quad (4.36)$$

**例 4.10** 求无限长均匀带电圆柱面内外的电场分布。已知圆柱面半径为  $R$ ，沿轴线方向的电荷线密度为  $\lambda$ ，柱面内外介电常数分别是  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ 。

**解** 考虑均匀带电圆柱面外距离轴线为  $r$  的一点  $P$  处的电场（如图 4.23）。电荷的轴对称分布必然导致电场分布的轴对称性，因而  $P$  点的电场方向只可能是垂直于带电圆柱面的轴线而沿径向。而且和  $P$  点同一圆柱面（以圆柱面的轴线为轴）上的各点的场强也都沿径向，大小也都相等。



作一个通过  $P$  点, 高为  $l$  的圆筒形封闭面为高斯面  $S$ 。  
与上一例题同理可得

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 r} \quad (r > R)$$

对于均匀带电圆柱面内部的圆筒形高斯面, 由于面内没有电荷, 应该有

$$4\pi r^2 D = 0$$

于是

$$D = 0 \quad E = \frac{D}{\epsilon_1} = 0 \quad (r < R)$$

这表明: 均匀带电圆柱面内部的场强处处为零。

上述结果可以统一表示为

$$D = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi r} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \quad E = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 r} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \quad (4.37)$$

即无限长均匀带电圆柱面外面的电场等于其全部电荷集中于轴线上时 (均匀带电直线) 的电场, 其内部的电场等于零。

**例 4.11** 求无限长均匀带电圆柱体内外的电场分布。已知圆柱体半径为  $R$ , 内外空间的介电常数分别是  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ , 电荷体密度为  $\rho$ 。

**解** 均匀带电圆柱体的电场分布也具有轴对称性。对圆柱体外场强的分析与上题中对均匀带电圆柱面的分析相同, 若以  $\lambda = \pi R^2 \rho$  表示沿轴线方向的电荷线密度, 其结果的形式也一样, 即有

$$D = \frac{\rho R^2}{2r} \quad E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_2 r} \quad (r > R)$$

对圆柱体内的高为  $l$  的圆筒形高斯面  $S$ , 通过  $S$  面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{s_0} \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 2\pi r l$$

高斯面内包围的电荷是  $\sum q_i = \pi r^2 l \rho$ , 由高斯定理得

$$2\pi r l D = \pi r^2 l \rho$$

于是

$$D = \frac{\rho r}{2} \quad E = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{\rho r}{2\epsilon_1} \quad (r < R)$$

上述结果可以统一表示为

$$D = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2r} & (r > R) \\ \frac{\rho r}{2} & (r < R) \end{cases} \quad E = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_2 r} & (r > R) \\ \frac{\rho r}{2\epsilon_1} & (r < R) \end{cases} \quad (4.38)$$

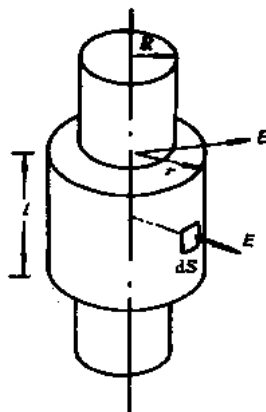


图 4.23 均匀带电圆柱面

可见无限长均匀带电圆柱体外面的电场也等于其全部电荷集中于轴线上时的电场，其内部的电场与场点到轴线的距离成正比。

综上所述，在线对称的情况下用高斯定理求解电场的关键是取一个高为  $l$  的两端封闭的圆筒作为高斯面。这个高斯面的电通量为  $2\pi r l D$ ，若能求出  $\sum q_i$  就能通过高斯定理求出电场。

### 三、面对称的情况

**例 4.12** 求无限大均匀带电平面的电场分布，已知带电平面上电荷面密度为  $\sigma$ ，所在空间的介电常数是  $\epsilon$ 。

**解** 无限大均匀带电平面的电场分布应满足平面对称。考虑距离带电平面为  $r$  的场点  $P$  的电场（如图 4.24 所示）。由于电场分布应满足平面对称，所以  $P$  点的电场必然垂直于该带电平面，而且离平面等远处（同侧或两侧）的电场大小都相等，方向应垂直于平面指向远离平面的方向（当  $\sigma > 0$  时）。

选择轴线垂直于带电平面的封闭柱面作为高斯面  $S$ ，带电平面平分此柱面，而  $P$  点位于它的一个底面上。由于柱面的侧面上各点电场与侧面平行，所以通过侧面的电通量为零。因而只需要计算通过两底面的电通量。

以  $\Delta S$  表示一个底的面积，则通过  $S$  面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2 \int_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 2\Delta S$$

高斯面内包围的电荷  $\sum q_i = \Delta S \cdot \sigma$ ，由高斯定理得

$$2\Delta S \cdot D = \Delta S \cdot \sigma$$

于是

$$D = \frac{\sigma}{2} \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \quad (4.39)$$

此结果说明，无限大均匀带电平面两侧的电场是均匀场。这一结果与使用迭加原理计算的结果相同。

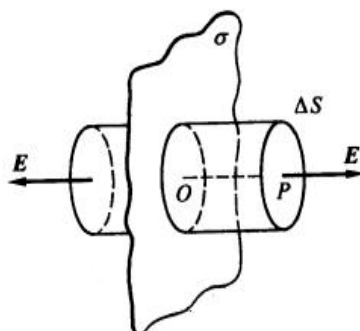


图 4.24 均匀无限大带电平面

## 4.5 静电场的环路定理 电势

电荷在电场中运动时，电场力做功。根据静电场力做功的特点，我们给出反映静电场基本性质的方程——静电场环路定理（circuital theorem of electrostatic field），并引入一个描述电场的物理量“电势（electric potential）”。电场强度和电势是描述电场性质的物理量，两者的结合可以完整的描述静电场。

### 4.5.1 静电场的环路定理

在一个静止的点电荷  $q$  的电场中，有一试验电荷从  $a$  点经任意路径  $acb$  移动到  $b$  点，如图 4.25 所示。在路径中任一点  $c$  的附近取一位移元  $d\vec{l}$ ，在这个位移元  $d\vec{l}$  上，电荷  $q_0$  所受的电场力  $\vec{F} = q_0 \vec{E}$  可以视为恒量，对  $q_0$  作的功是

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cos \theta dl$$

其中， $\theta$  是  $\vec{E}$  与  $d\vec{l}$  间夹角。利用  $dr = dl \cdot \cos \theta$ ，

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ 于是}$$

$$dA = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

将试验电荷从  $a$  点移动到  $b$  点，电场力作的总功是

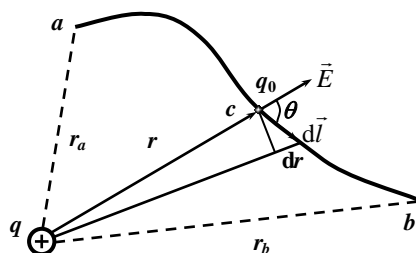


图 4.25 在静电场中移动点电荷做功

$$A = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (4.40)$$

式中， $r_a$ 、 $r_b$  分别是  $a$  点和  $b$  点到点电荷  $q_0$  的距离。此式表明，在点电荷的电场中，电场力做功与试验电荷的电量  $q_0$  成正比，决定于试验电荷的始末位置，与试验电荷经过的路径无关。

对固定不动的点电荷  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $\dots$ 、 $q_n$  构成的带电系统，依据电场叠加原理，得到其电场是每个点电荷单独存在时产生的电场的矢量和，即

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

当试验电荷从这个电场的  $a$  点移动到  $b$  点时，电场力做功是

$$A = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n q_0 \int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n A_i$$

等于各个点电荷电场力做功的代数和。由于上式右边每一项都与路径无关，所以点电荷系的电场力的功  $A$  是与路径无关的。

同理，静止的连续带电体可以划分成无数个电荷元的集合，依据叠加原理可以证明，它对试验电荷的电场力所作的功也与路径无关。

任何做功与路径无关的力场，称为保守力场。静电场力是保守力，静电场是保守场。

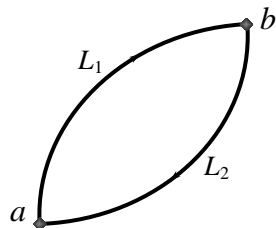


图 4.26 闭合环路的环流

如果在静电场中移动试验电荷  $q_0$ ，经过闭合路径  $L$  ( $L$  由路径  $L_1$  和  $L_2$  组成) 又回到原来的位置，如图 4.26 所示。由式 (4.40) 可知，静电场力做功为零，即

$$q_0 \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

因为  $q_0 \neq 0$ ，所以上式可以写成

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.41)$$

上式左边表示静电场场强  $\vec{E}$  沿任意闭合环路  $L$  的线积分，称为电场强度  $\vec{E}$  的环流。所以，上式表明：静电场场强  $\vec{E}$  沿任意闭合路径的环流等于零。这个结论称为静电场的环路定理，它表明静电场的电场线是不会闭合的，所以称之为无旋场。同时，它与静电场是保守场、静电场力是保守力的提法是一致的。

## 4.5.2 电势

由于静电场力是保守力，所以能够引入电势能 (electric potential energy) 的概念。根据保守力做功与相应势能变化的关系，我们可以明确：在静电场力作用下，将试验电荷  $q_0$  从  $a$  点移动到  $b$  点，静电场力作的功等于电势能的减少。即

$$A = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_a - W_b \quad (4.42)$$

式中， $W_a - W_b$  与试验电荷的电量  $q_0$  成正比，所以比值  $(W_a - W_b)/q_0$  与试验电荷无关，它反映了  $a$ 、 $b$  两点静电场本身的性质。我们将这个比值定义为静电场中  $a$ 、 $b$  两点的电势差 (electric potential difference)，也称为电压 (voltage)。

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4.43)$$

即静电场中  $a$ 、 $b$  两点的电势差等于将单位正电荷从  $a$  点经任意路径移到  $b$  点时电场力所作的功。因此，当任意电荷  $q_0$  在电场中从  $a$  点移到  $b$  点时，电场力所作的功可以用电势差表示

$$A = q_0(U_a - U_b) \quad (4.44)$$

通过定义势能零点可以确定某一点的势能，静电场中某点的电势值可以通过选定参考零点来决定。对于电荷分别在有限空间的带电体，通常规定无限远处为电势参考零点。于是空间任一点  $a$  的电势可以表示为

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4.45)$$

其物理意义是：电场中某点的电势在数值上等于放在该点处的单位正电荷的电势能；或者等于单位正电荷从该点经任意路径移到无限远时电场力所作的功。

电势是标量，可以有正负。在国际单位制中，电势的单位是伏特 (V)。

电势具有相对意义，它决定于电势零点的选择。一般而言，电势零点的选择是任意的，但为了理论计算的方便，要视具体研究问题而定。在理论计算中，当电荷分布在有限区域时，通常选择无限远处为电势零点；对于“无限大”、“无限长”的带电体，这时只能在有限范围内选择某点作为电势零点。在实际应用中，需要的是两点间的电势差，而不是某点的电势，所以通常取地球的电势为零点。

根据式 (4.40) 和式 (4.45)，选择参考电势零点在无限远时，静止点电荷  $q$  在真空中的电势分布是

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.46)$$

式中,  $r$  是场点到场源电荷的距离。在正点电荷的电场中, 各点电势均为正值, 离电荷越远的点, 电势越低, 与  $r$  成反比。在负点电荷的电场中, 各点的电势均为负, 离电荷越远的点, 电势越高, 无穷远处电势为零。容易看出, 在以点电荷为球心的任意球面上电势都是相等的。

### 4.5.3 电势叠加原理

设带电系统是由  $n$  个带电体组成, 它们各自产生的电场是  $\vec{E}_1$ 、 $\vec{E}_2$ 、 $\cdots$ 、 $\vec{E}_n$ 。根据电场叠加原理, 该带电系统的总电场是

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

由电势的定义式 (4.45), 空间某点  $P$  处的电势是

$$\begin{aligned} U_P &= \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^\infty (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_P^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_P^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \cdots + \int_P^\infty \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

上式右方的每个积分分别是各个带电体单独存在所产生的电场在  $P$  点的电势, 即

$$U_P = U_{1P} + U_{2P} + \cdots + U_{nP} = \sum_{i=1}^n U_{iP} \quad (4.47)$$

这表明一个由若干带电体组成的带电系统, 在其电场中某点的电势等于每个带电体单独存在时在该点产生的电势的代数和, 称为电势叠加原理。

一般说来, 计算电势的方法有两种。第一种方法是由电势的定义式通过场强的线积分来计算; 另一种方法是利用电势叠加原理。

#### 一、利用电势的定义求电势

这种方法常用于电场分布已知或可以利用高斯定理容易确定电场的分布的情况。

在计算过程中, 应当注意如下几点:

一是选择适当的电势零点, 其选择原则如前所述;

二是积分路径选择有任意性, 但是为了积分计算的方便, 一般选择  $d\vec{l}$  与  $\vec{E}$  平行、垂直或有恒定夹角的积分路径;

三是空间电场的分布可能是不连续的、分区间的, 这时要分区间进行积分, 而且在某一区间积分时, 必须应用该区间的电场表达式。

**例 4.13** 求置于空气中的均匀带电球面所产生的电势分布。如图 4.27 所示, 球面半径为  $R$ , 总带电量为  $q$ 。

**解** 均匀带电球面的场强分布很有规律性, 适宜用电势的定义式通过对场强的积分来求电势。我们利用高斯定理可以确定电场的分布规律是

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

方向沿径向方向。

对球面外一点  $P$  的电势，选择沿径向方向为积分路径，这时  $d\vec{l}$  与  $\vec{E}$  同向。若无限远处是电势零点，由电势定义有

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

可见，均匀带电球面外一点电势与电荷集中于球心作为点电荷在该点产生的电势相同。

对球面上一点  $P$ ， $r = R$ ，有

$$U_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

对球面内一点  $P$ ，该点电势是

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E}_{\text{外}} \cdot d\vec{l}$$

同样选择径向为积分路径，有

$$U_P = \int_r^R 0 \cdot dr + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

可见，球面内任一点的电势与球面上的电势相同，球内区域是一个等电势区域。

电势随  $r$  的变化曲线 ( $U \sim r$  曲线) 如图 4.27 所示。与场强分布  $E \sim r$  曲线相比看到，在球面处 ( $r = R$ )，电场强度不连续，而电势是连续的。这一点体现了经典物理学中的能量始终是连续的观点。

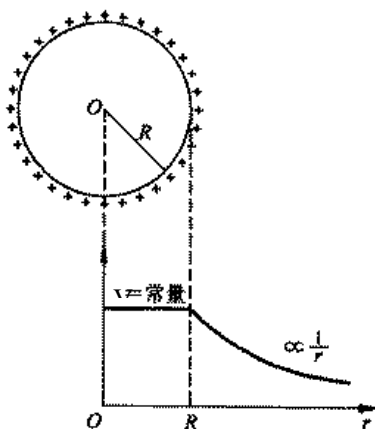


图 4.27 均匀带电球面的电势

## 二、应用电势叠加原理求电势

这种方法常用于带电体的电荷分布已知而电场分布未知或不宜用高斯定理求出电场的情况。一般有三种情况：

### (1) 点电荷系电场中的电势

在包含  $n$  个点电荷的点电荷系所产生的电场中，第  $i$  个点电荷  $q_i$  在场点  $P$  产生的电势由式 (4.46) 决定。依据叠加原理，整个点电荷系在  $P$  点的电势是

$$U_P = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (4.48)$$

式中， $r_i$  是点电荷  $q_i$  到  $P$  点的距离。

### (2) 连续带电体电场中的电势

任意带电体可以视为无数个电荷元  $dq$  的组合，每个电荷元在场点  $P$  处的电势是点电荷产生的电势，即

$$dU_P = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

式中， $r$  是电荷元  $dq$  到  $P$  点的距离。由电势叠加原理可知，连续带电体在  $P$  点的电势是

$$U_P = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.49)$$

积分区域遍及整个带电体所在区域。

### (3) 利用典型带电体的电势公式确定一些规则带电体的电势

某些规则连续带电体可以看成某种典型带电体的组合,而典型带电体的电势计算公式是已知的,这种情况下的电势计算公式可以写成

$$U_P = \int dU_P \quad (4.50)$$

式中,  $dU_P$  是典型带电体的电势,一般不能看成是点电荷的电势。

**例 4.14** 求电偶极子电场的电势分布。已知电偶极子中两点电荷的电量为  $+q$ 、 $-q$ , 相距是  $l$ 。

**解** 建立极坐标系,如图 4.28 所示。原点取在电偶极子的中点,场点  $P$  离  $+q$  和  $-q$  的距离分别为  $r_+$  和  $r_-$ , 距离电偶极子中点  $O$  的距离为  $r$ ,  $r$  与轴线  $l$  的夹角是  $\theta$ 。

依据电势叠加原理,  $P$  点电势是

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 r_+ r_-}$$

对于离电偶极子比较远的点,即  $r \gg l$  时,有近似:

$r_+ r_- \approx r^2$ ,  $r_- - r_+ \approx l \cos \theta$ 。于是

$$U = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

注意到  $\vec{p} = ql$ , 利用矢量的点积关系, 上式可以写成

$$U = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.51)$$

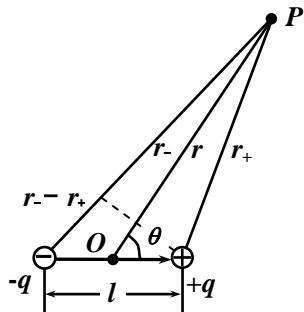


图 4.28 电偶极子的电势

**例 4.15** 一半径为  $R$  的均匀带电细圆环, 所带电量为  $q$ , 求在圆环轴线上任意点  $P$  的电势。

**解** 取圆环中心  $O$  为坐标原点,  $P$  点坐标是  $x$ , 如图 4.29 所示。在圆环上取一段微小线元, 所带电量是

$$dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi R} dl$$

该电荷元在  $P$  点产生的电势是

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q dl}{8\pi^2 \epsilon_0 R \sqrt{R^2 + x^2}}$$

则带电圆环在  $P$  点电势是

$$\begin{aligned} U &= \int dU = \frac{q}{8\pi^2 \epsilon_0 R \sqrt{R^2 + x^2}} \int_0^{2\pi R} dl \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} \quad (4.52) \end{aligned}$$

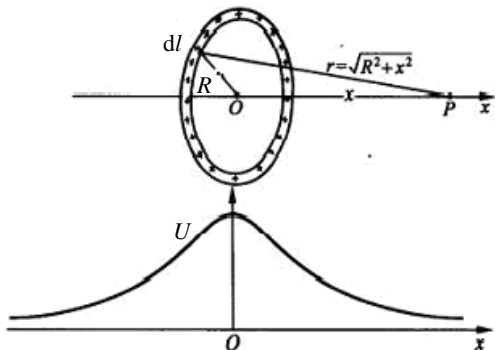


图 4.29 均匀带电圆环轴线上电势分布

当  $P$  点位于环心  $O$  处时,  $x=0$ , 则  $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ ;

当  $P$  点位于轴线上相当远处时,  $x \gg R$ , 则  $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$ , 相当于全部电荷集中于环心的点电荷所产生的电势。

**例 4.16** 一半径为  $R$  的均匀带电圆盘, 所带电量为  $q$ , 求在圆盘轴线上任意点  $P$  的电势。

**解** 如图 4.30 所示, 圆盘中心为原点, 圆盘上电荷的面密度是

$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

在圆盘上任取一半径为  $r$ 、宽度  $dr$  的圆环, 其电量是

$$dq = \sigma 2\pi r dr = \frac{2rq}{R^2} dr$$

它在  $P$  点产生的电势是

$$dU = \frac{rq}{2\pi\epsilon_0 R^2 \sqrt{r^2 + x^2}} dr$$

整个圆盘在  $P$  点的电势可以视为不同半径带电圆环在  $P$  点电势的叠加, 故

$$U = \int_0^R \frac{rq}{2\pi\epsilon_0 R^2 \sqrt{r^2 + x^2}} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} (\sqrt{R^2 + x^2} - x) \quad (4.53)$$

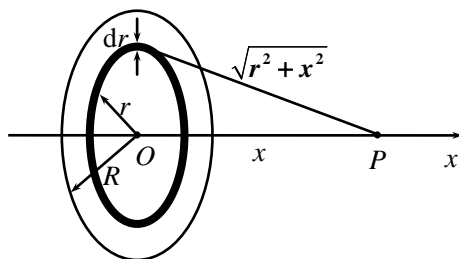


图 4.30 均匀带电圆盘轴线上电势分布

## 4.6 电场强度与电势梯度的关系

电场强度和电势是描写电场性质的两个基本物理量。从逻辑上讲, 描写同一事物的物理量之间应该有某种关系。电势定义表达式给出了电势与场强的积分关系, 在场强分布已知时, 可以从这个关系式计算出电势。反之, 如果已知电势分布, 应当能够确定场强。我们从几何图示和微分解析两个角度来研究这种关系。

### 4.6.1 等势面

在静电场中, 我们采用电场线形象的描述电场强度的空间分布。同理, 我们也可以采用几何绘图的方法来形象描述电势的空间分布, 这就是等势面 (equipotential surfaces) 的方法。而且比较电场线和等势面两种几何图像, 可以定性直观的了解场强与电势的关系。

在电场中, 电势相同点组成的曲面称为等势面。为了直观比较电场中各点的电势, 一般规定在绘制等势面时, 应使相邻等势面的电势差相同。显然, 不同电荷分布的电场有不同形状的等势面。图 4.31 示出了几种典型带电体电场的等势面和电场线, 其中虚线表示等势面, 实线表示电场线。

根据等势面和电场线的定义, 可以得出如下结论:

(1) 电荷沿等势面移动时, 静电场力作功为零。

设试验电荷  $q_0$  从同一等势面  $a$  点移动到  $b$  点, 由式 (4.44) 得出静电场力作功是

$$A_{ab} = q_0(U_a - U_b)$$



由于  $U_a = U_b$ ，所以

$$A_{ab} = 0$$

(2) 等势面与电场线处处垂直。

设试验电荷  $q_0$  在某一等势面上有任意微小位移  $d\vec{l}$ ，静电场力做功是

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E dl \cos \theta = 0$$

式中， $\theta$  是  $\vec{E}$  与  $d\vec{l}$  间的夹角。由于  $q$ 、 $E$ 、 $dl$  皆不为零，所以  $\cos \theta = 0$ ， $\theta = 90^\circ$ 。电场强度  $\vec{E}$  与等势面上任意微小位移  $d\vec{l}$  垂直，即电场强度与等势面垂直。

(3) 等势面密集处的电场强度大，稀疏处的电场强度小，电场线指向电势降低的方向。

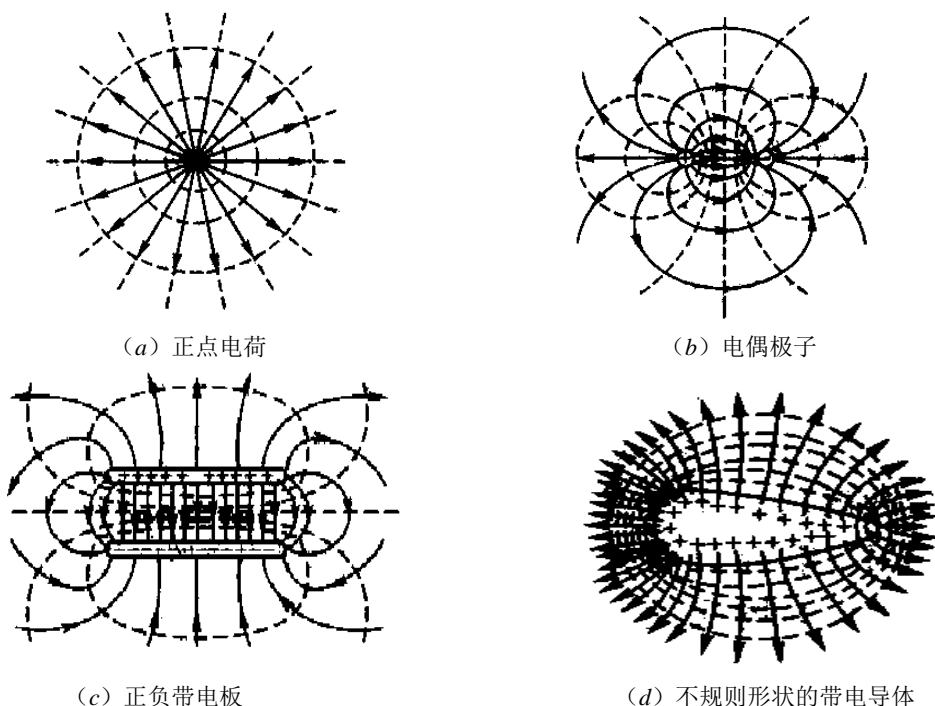


图 4.31 几种典型带电体的等势面与电场线

#### 4.6.2 电场强度与电势梯度

在静电场中，两个邻近的等势面，电势分别为  $U$  和  $U+dU$ ，如图 4.32 所示。将试验电荷  $q_0$  从一个等势面上的  $a$  点移动到另一等势面上的  $b$  点，微小位移  $d\vec{l}$  与电场强度间夹角是  $\theta$ 。则静电场力做功是

$$dA_{ab} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q_0 (U_a - U_b)$$

因为  $U_b - U_a = dU$ ，而电场强度在位移方向的分量是  $E_l = E \cos \theta$ ，则有

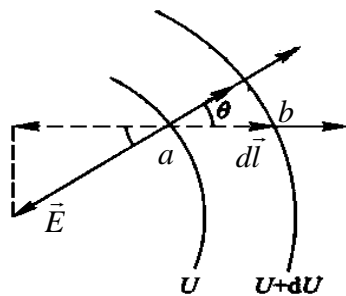


图 4.32 电势梯度与场强关系

$$E_l \cdot dl = -dU \quad E_l = -\frac{dU}{dl} \quad (4.54)$$

这说明, 电场中某一点的电场强度沿任意方向的分量等于这一点的电势沿该方向单位长度的变化率的负值。

显然, 对于一定的  $\Delta U$ ,  $\Delta l$  越小则  $E$  越大; 反之,  $\Delta l$  越大则  $E$  越小。即等势面密集处的电场强度大, 稀疏处的电场强度小。如果  $E_l > 0$ , 则  $dU < 0$ 。所以沿着电场强度的方向, 电势降低; 逆着电场强度的方向, 电势升高。即电场线的方向指向电势降低的方向。

按式 (4.54), 在直角坐标系中电场强度的三个分量是

$$E_x = -\frac{dU}{dx} \quad E_y = -\frac{dU}{dy} \quad E_z = -\frac{dU}{dz}$$

于是电场强度是

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) \quad (4.55)$$

上式给出了电场强度与电势间的微分关系。

在数学上引入梯度算符  $\nabla$ , 其表示式为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

所以有

$$\vec{E} = -\nabla U \quad (4.56)$$

此式进一步表明, 电场中某点电场强度等于该点电势梯度 (potential gradient) 的负值。

理论上讲, 只要知道了电场强度和电势其中之一, 就可以确定另一个物理量。由于电势是标量, 较电场强度容易计算, 所以可以先计算电势, 然后再利用式 (4.56) 求出电场强度。

在理解场强与电势梯度关系时, 大家要注意如下几点:

(1) 场强与电势梯度关系式表明, 场强在自身方向的投影等于电势在该方向的减少率。由于场强在它自身方向的投影是最大投影, 因此场强的方向是电势减少最快的方向。

(2) 场强与电势梯度关系还表明, 场强的大小等于电势沿场强方向的减少率, 与该点电势值本身并无直接关系。

综合以上两条即有如下结论: 场强的方向是电势减少最快的方向, 而场强的大小等于电势沿该方向的减少率。由于电势梯度与场强的大小相同而方向相反, 因而反过来有下述结论: 电势梯度的方向沿着电势增加最快的方向, 而电势梯度的大小等于电势沿该方向的变化率, 即电势的最大变化率。此结论不仅对于电势分布是正确的, 而且对所有标量场都成立。

**例 4.17** 在均匀带电细圆环轴线上任一点的电势公式可以表示为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{1/2}}$$

其中,  $x$  表示圆心到场点的距离,  $R$  是圆环的半径。求轴线上任一点的场强。

**解** 由于均匀带电细圆环的电荷分布对于轴线是对称的, 所以轴线上各点的场强在垂直于轴线方向的分量为零, 因而轴线上任一点的场强方向沿  $x$  轴方向。场强与电势梯度关系式的分量形式可得

$$E = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

这一结果与使用迭加原理得到的结果相同。

**例 4.18** 已知电偶极子的电势公式是

$$U = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

求电偶极子的场强分布。

**解** 建立球坐标系，取电偶极子中心位于坐标原点  $O$ ，如图 4.33 所示。梯度算符在球坐标系中的表示式是

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

依据式 (4.56)，有

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\left(\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta\right) \\ &= \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (4.57)$$

显然，在两个特殊的方向有

$$\theta = 0 \text{ 时, } E = E_r = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } E = E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

这正是例 4.2 的结果。

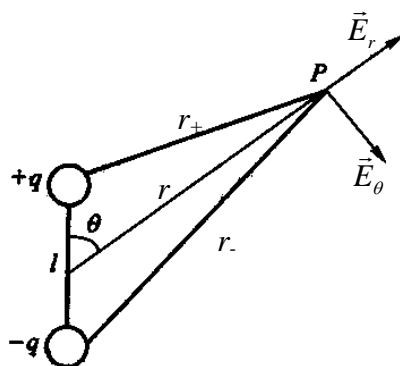


图 4.33 电偶极子的电场

## 4.7 静电场中的导体

根据物质导电性能的不同，一般将物质分成三类：导体(conductor)、绝缘体(insulator)、半导体(semiconductor)。绝缘体处于电场中时，会出现电极化现象。静电场中导体与电场之间的相互影响是我们这里要讨论的内容。为讨论方便，这里主要研究各向同性均匀金属导体在电场中的情况。

### 4.7.1 静电平衡

导体的静电平衡条件

物质结构理论表明，金属导体由带负电的电子和带正电的晶体点阵组成。它之所以具有导电性能，是由于内部存在可以自由移动的电荷——自由电子。

当导体不带电，也不受外电场作用时，导体内的自由电子只做微观的无规则热运动。自由电子的负电荷与晶体点阵的正电荷相互中和，导体的各个部分呈现出电中性(electric neutrality)。

当导体置于外电场中时，导体内的自由电子在外电场的作用下会出现宏观的定向运动，引起导体中的电荷重新分布，这就是静电感应(electrostatic induction)现象。由于静

电感应作用，在导体表面会出现新的电荷，称之为感应电荷（induced charge）。感应电荷的出现反过来会改变导体内部和周围的电场分布，直至导体中电荷宏观运动停止，电荷分布达到新的平衡。我们把导体中没有电荷做宏观定向运动的状态称为静电平衡(electrostatic equilibrium) 状态。

如图 4.34 所示，在匀强外电场  $\vec{E}_0$  中放置一块金属导体板。由于静电感应的作用，导体表面出现感应电荷。感应电荷会激发一个与外电场方向相反的感应电场  $\vec{E}'$ ，导体中的电场是外电场  $\vec{E}_0$  和感应电场  $\vec{E}'$  的矢量和，即  $E = E_0 - E'$ 。开始时  $E_0 > E'$ ，自由电子会不断的沿电场强度  $\vec{E}$  的反方向移动，使感应电荷逐渐加大，感应电场  $\vec{E}'$  随之增大。这个

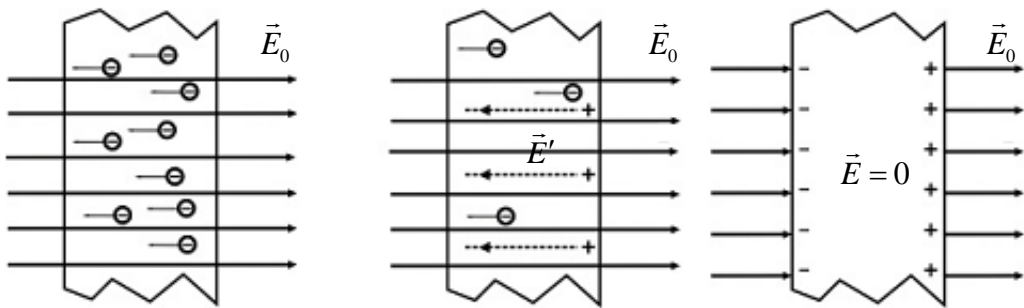


图 3.34 静电感应过程

过程一直延续到感应电场与外电场平衡，导体中的电场  $\vec{E} = 0$  为止。于是导体内没有电荷做定向运动，电场分布不随时间变化，导体处于静电平衡状态。因此，导体处于静电平衡状态的条件是：

- (1) 导体内部电场强度处处为零；
- (2) 导体表面邻近处的电场强度的方向与导体表面垂直。

在静电平衡的状态下，由于导体内部电场强度处处为零和表面电场强度的方向与导体表面垂直，所以导体内部和表面上任意两点间的电势差必然为零。于是得出结论：导体是等势体，导体表面是等势面。

### 4.7.2 静电平衡时导体上的电荷分布

在导体处于静电平衡状态时，导体上的电荷分布满足一定的规律。

- (1) 处于静电平衡的导体内部没有净电荷存在，电荷只能分布在导体的表面上。

在导体内部任意作一个闭合曲面  $S$ ，如图 4.35 (a) 所示。由于导体内的场强处处为零，由高斯定理可知， $S$  面包围的净电荷为零。也即是说，任意地在导体内作一个闭合曲面，无论此闭合曲面在什么位置，无论是大或是小，均不能包围净电荷。这意味着导体内确实没有净电荷，电荷只能分布于导体表面。

对于导体内部有空腔的情况，如果空腔内没有其它带电体，在静电平衡情况下，空腔内表面也不会有电荷存在。我们在导体内取如图 4.35 (b) 所示的高斯面，因为  $S$  面上电场处处为零，根据高斯定理，在导体内表面上电荷的的代数和为零。这时内表面仍可能某点面电荷  $\sigma > 0$ ，而在另一点面电荷  $\sigma < 0$ ，内表面上电荷的的代数和仍为零。利用电场线定义，由正电荷到负电荷引出一条电场线。根据电场线的性质，电场线两端存在电势

差，只与导体是等势体的要求矛盾。所以，在静电平衡时，导体空腔内表面电荷处处为零。

(2) 处于静电平衡的导体表面的面电荷密度与该处表面曲率有关，电荷面密度与曲

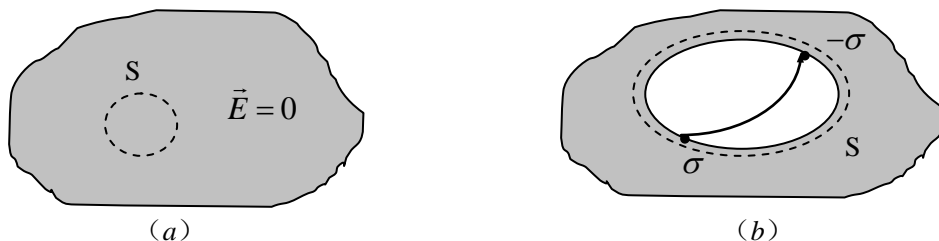


图 3.35 导体上电荷分布

率成正比。

电荷在导体表面上是如何分布的？一般而言，它不仅与导体形状有关，而且与它附近其它导体或带电体有关。对于孤立导体，导体表面凸出而尖锐的地方曲率大，面电荷密度  $\sigma$  较大；表面比较平坦的地方曲率较小，面电荷密度  $\sigma$  较小；表面凹进的地方曲率为负，面电荷密度  $\sigma$  更小。图 4.36 示出尖端导体面上电荷分布。

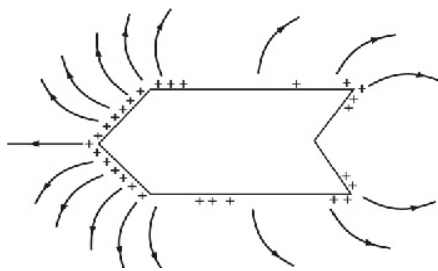


图 4.36 尖端导体

### 4.7.3 静电平衡的导体表面附近的场强

利用高斯定理可以证明：静电平衡导体表面外附近的电场强度的大小与该处表面上的电荷密度成正比，其关系是

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.58)$$

这里所说的导体表面附近的含义是指考察点的位置相对于导体很近，以至于在该点能看到的导体表面上一块很小的面积  $S$  就象是一个无限大的平面。

上式可以用高斯定理来证明。如图 4.37 所示。考察点  $P$  在导体表面附近，过  $P$  点作一个很小的柱型高斯面  $S$ ，柱面的上底  $\Delta S$  过  $P$  点且与导体表面平行，下底位于导体内，柱面的侧面与导体表面垂直。由于导体内电场处处为零，表面电场方向与导体表面垂直，因此通过下底面和侧面的电通量是零。由高斯定理得

$$\Phi_e = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot \Delta S$$

高斯面内的电荷代数和是

$$\sum q = \sigma \cdot \Delta S$$

于是

$$D \cdot \Delta S = \sigma \cdot \Delta S$$

整理得出

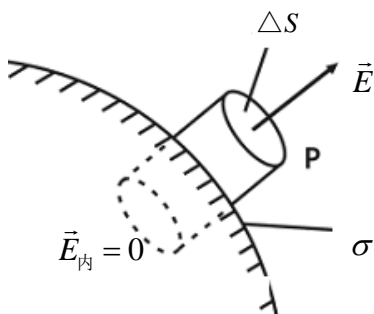


图 4.37 导体表面附近的电场

$$D = \sigma \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.59)$$

应当明确，根据高斯定理的物理意义，上式中的  $E$  不要误解为只是考察点  $P$  附近的导体表面处的电荷贡献的场强，而是所有表面上的电荷以及导体外的电荷共同产生的总电场的场强。

对于有尖端的带电导体，在尖端附近处的电荷面密度很大，其附近的电场也非常强，导致尖端附近的空气中的残留离子在这个电场作用下发生剧烈运动，并与空气分子碰撞而使之电离。与尖端上电荷异号的离子受到吸引而飞向尖端，同尖端上的电荷中和；与尖端上电荷同号的离子受到排斥而离开尖端作加速运动。从表面上看，如同尖端上的电荷“喷射”出来，形成尖端放电（point discharge）现象。

强烈的尖端放电会产生耀眼的火花，并发出“啪啪”的响声；较弱的放电会在尖端附近出现淡绿色的光晕，称为电晕。尖端放电会使高压输电线等设备产生电能损失和漏电危险，所以高压输电线表面应当尽量做得光滑些，具有高压的零部件的表面常做成光滑的球面。

尖端放电也有可以利用的一面，避雷针就是利用金属尖端的放电原理来避免建筑物和设备被雷击损坏。

#### 4.7.4 静电屏蔽

一个达到静电平衡的导体空腔能够隔断空腔内外电荷的相互影响，这种作用称之为静电屏蔽（electrostatic shielding）。

如图 4.38 所示，导体空腔是一个导体球壳，空腔内部没有电荷而空腔外部有一个点电荷。如前所述，此时导体中的场强为零，空腔内的场强也为零。这表明导体空腔确实屏蔽了空腔外部的电荷对空腔内部的影响。

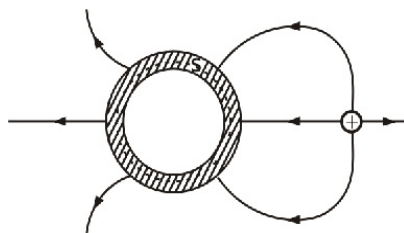


图 4.38 外部带电体对空腔内部无影响

静电屏蔽并不违背场强迭加原理，而应该理解为场强迭加原理应用于导体时的一个结果。导体外部空间的电荷仍然在空腔内的每一点独立地产生它的场强，而在导体外表面分布的感应电荷却能精确地按照迭加原理在每一点把它完全抵消。静电屏蔽是把导体的静电平衡条件应用于空腔时所得到的一个必然结论。静电屏蔽是相当完美的，无论腔外的电荷有多大，无论电荷距离空腔有多近，甚至电荷可以与空腔外表面接触而直接使空腔外表面带上净电荷，空腔内表面都不会有电荷分布，空腔内也都不会有电场分布。

静电屏蔽在工程技术中有很多的应用，为了避免外场对某些精密元件的影响，可以把元件用一个金属壳或金属网罩起来。高压作业时，操作人员要穿上用金属丝网做成的屏蔽服也是为了防止电场对人体的伤害。屏蔽服也会带电，电势可能会很高，但屏蔽服内的场强却为零，这就保证了操作者的安全。

其次考虑图 4.39 所示情况。图 4.39 (a) 显示一个导体球壳本身不带电，而在空腔内部有一个点电荷  $q$ 。在导体中作一闭合曲面包围空腔，由高斯定理可知，曲面内的净电荷为零，即空腔内表面的感应电荷应与空腔内部的电荷等值异号，即为  $-q$ 。按电荷守恒定律，

空腔外表面要出现感应电荷 $+q$ ，并在空腔外产生一个电场。如果把导体空腔接地，如图 4.39 (b) 所示。这时外表面的感应电荷被中和，导体电势为零，在空腔外部不产生电场。所以，一个接地的导体空腔能屏蔽空腔内电荷对外部的影响。

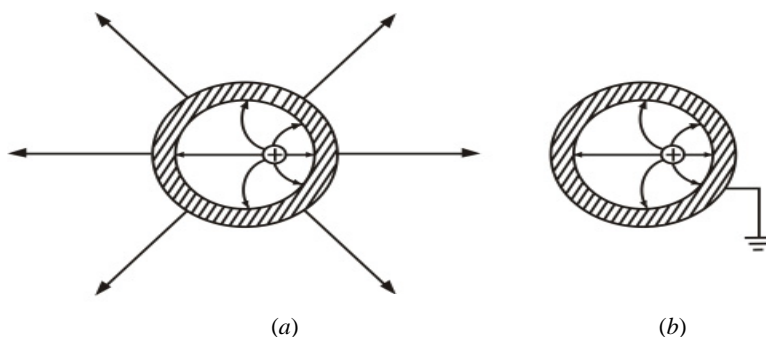


图 4.39 内部带电体对接地空腔外部无影响

静电屏蔽原理在生产技术中有着许多应用。为了避免外部电场对设备（如某些精密电子测量仪器等）的干扰，或者避免某些电器设备（如高压设备等）对外界产生影响，可以在这些设备的外围安装接地的金属外壳（网、罩）。为了避免外界对传递弱信号的导线的干扰，往往在导线外面包裹一层金属丝编织的屏蔽层。

**例 4.19** 半径为  $R_1$  的导体球带有电量  $q$ ，球外有一内、外半径分别为  $R_2$  和  $R_3$  的同心导体球壳带电为  $Q$ ，如图 4.40 所示。（1）求导体球和球壳的电势；（2）若用导线连接球和球壳，再求它们的电势；（3）若不是连接而是使外球接地，再求它们的电势。

**解** （1）由静电平衡条件可知，电荷只能分布于导体表面。

在球壳中作一闭合高斯面，利用高斯定理可以求出球壳内表面感应电荷为 $-q$ 。由于电荷守恒，球壳外表面电量应为  $Q+q$ 。由于球和球壳同心放置，满足球对称性，故电荷均匀分布形成三个均匀带电球面，如图 4.40 (a) 所示。

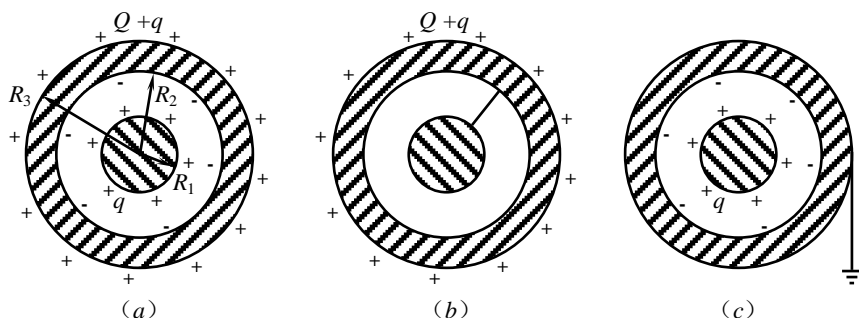


图 4.40 例 4.19 图示

依据电势叠加原理，空间任一点的电势是三个带电球面在该点各自产生电势的代数叠加。所以导体球的电势为

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} + \frac{q+Q}{R_3} \right)$$

导体球壳的电势为

$$U_2 = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

(2) 若用导线连接导体球和球壳，球上电荷  $q$  将与球壳内表面电荷  $-q$  中和，电荷只分布于球壳外表面，如图 4.40 (b)。此时球和球壳的电势相等，为

$$U_1 = U_2 = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

(3) 若使球壳接地，球壳外表面电荷被中和，这时只有球和球壳的内表面带电，如图 4.40 (c)。此时球壳电势为零

$$U_2 = 0$$

导体球的电势是

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} \right)$$

## 4.8 电容 电容器

### 4.8.1 孤立导体的电容

所谓孤立导体是指远离其他导体、电解质和带电系统的导体。设有一孤立导体，当它带点量为  $q$  时，电势为  $U$ ，这些电荷应以不同的面密度分布在导体的表面各处。如果导体所带电荷增加一倍，即再使导体带电荷  $q$ ，则这些新增加电荷将仍按第一次的分配方式在导体表面分布。如果不这样，导体内的场强将不等于零。这样一来，导体表面各处的电荷面密度都将增加一倍，因而导体产生的场强也都增加一倍，由场强和电势的积分关系可知，导体的电势要增加一倍，变为  $2U$ 。以此类推可得到如下结论：对于任何一个不受外界影响的孤立导体，所带的电荷  $q$  和它的电势  $U$  的比值为—恒量，与导体所带电荷无关，这个量定义为孤立导体的电容。用  $C$  表示，即

$$C = \frac{q}{U} \quad (4.60)$$

导体的电容是表征导体容纳电荷能力的物理量，利用导体的这一性质制成的电容器是电子技术中最基本的元件之一。

在国际单位制中，电容的单位是法拉 (F)。常用的单位还有微法 ( $\mu\text{F}$ )、皮法 (pF)。其中

$$1\text{F} = 1\text{C}/\text{V}, \quad 1\text{F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{pF}$$

### 4.8.2 电容器的电容

导体的电容不仅与导体的几何形状和大小有关，而且还要受到周围物体的影响。例如，当带电导体  $A$  附近有另一导体  $B$  时，由于静电感应， $B$  的两端将出现异号电荷，根据电势叠加原理，导体  $A$  的电势将发生变化，因而使  $A$  的电容改变。因此，在实际应用中，需要设计一个导体组，使其电容大而体积小，另一方面使这个导体组的电容不受其他物体的影响，电容器 (capacitor) 就是这样的导体组。通常所用的电容器由两个金属板和中间的电解质组成，如图 4.41 所示。电容器工作时它的两个极板相对的两个表面总是带等量异号的电荷  $\pm q$ ，此时两极板间的电势差为  $U_A - U_B$ ，则电容器的电容定义为



$$C = \frac{q}{U_A - U_B} \quad (4.61)$$

式中,  $q$  代表一个极板的内表面所带电荷的绝对值。

下面根据电容的定义, 我们来计算几种常用的电容器的电容。

### (1) 平板电容器的电容

平板电容器由夹有一层介电常数为  $\varepsilon$  电介质的两个平行而靠近的金属薄板  $A$ 、 $B$  构成, 如图 4.42 所示。设  $A$  板带电  $+q$ 、 $B$  板带电  $-q$ , 忽略边缘效应, 电荷将各自均匀地分布在两板的内表面, 电荷面密度的大小为  $\sigma = q/S$ 。由高斯定理求出两板间的电场为

$$D = \sigma \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

两板之间的电势差是

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed = \frac{qd}{\varepsilon S}$$

根据电容器电容的定义, 平板电容器的电容是

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{\varepsilon S}{d} \quad (4.62)$$

上式表明, 平板电容器的电容  $C$  和极板面积  $S$ 、极板间电介质的介电常数  $\varepsilon$  成正比, 与极板间距  $d$  成反比, 而与极板所带的电量无关。

如果两极板之间是真空, 其电容是

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (4.63)$$

平板电容器充满介质后与不充介质时电容的比值是

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r \quad (4.64)$$

$\varepsilon_r$  是极板间电介质的相对介电常数。

### (2) 圆柱形电容器的电容

圆柱形电容器由两个同轴的金属圆筒  $A$ 、 $B$  构成, 如图 4.43 所示。两个圆筒的长度均为  $l$ , 内筒的外径为  $R_A$ , 外筒的内径为  $R_B$ , 它们之间介质的介电常量为  $\varepsilon$ 。设  $A$  筒带电  $+q$ ,  $B$  筒带电  $-q$ 。忽略边缘效应, 电荷应各自均匀地分布在  $A$  筒的外表面和  $B$  筒的内表面上, 单位长度上的电量是  $\lambda = q/l$ 。

由高斯定理可求得两筒之间距离轴线为  $r$  的  $P$  点的电场是

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \quad E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon r} \quad (R_A < r < R_B)$$

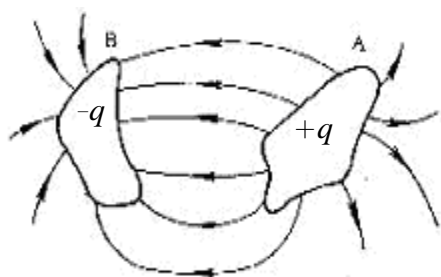


图 4.41 电容器的概念示意图

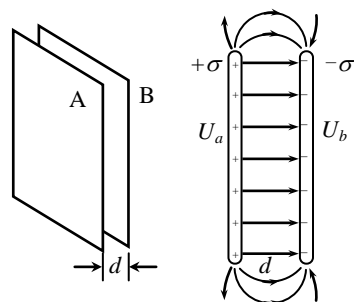


图 4.42 平板电容器

两极板间的电势差是

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

依据电容的定义, 得出

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{R_B}{R_A}} \quad (4.65)$$

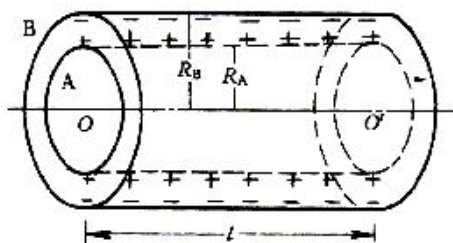


图 4.43 圆柱形电容器

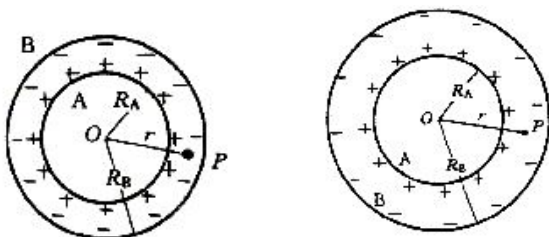


图 4.44 球形电容器

### (3) 球形电容器的电容

球形电容器由两个同心的导体球壳 A、B 构成, 如图 4.44 所示。设内球的外径为  $R_A$ , 外球的内径为  $R_B$ , 两球间介质的介电常数为  $\epsilon$ 。若内球带电  $+q$ , 外球带电  $-q$ , 则电荷将形成两个均匀带电球面。

由高斯定理可求得两球面之间距离球心为  $r$  处  $P$  点的电场是

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \quad (R_A < r < R_B)$$

方向沿半径方向。两球面之间的电势差为

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

球形电容器的电容为

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = 4\pi\epsilon \frac{R_A R_B}{R_B - R_A} \quad (4.66)$$

上述三种电容器的电容计算表明, 电容器的电容只与它的几何结构和极板之间的电介质有关, 与它是否带电无关。

## 4.8.3 电容器的连接

电容器的主要指标, 一个是它的电容大小, 另一个是它的耐(电)压能力。在实际应用中, 常会遇到已有的电容器的性能指标不能符合实际的需求, 这时只需要将若干个电容器做适当的连接即可解决问题。

### 1. 串联

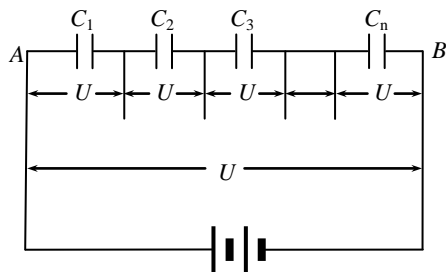


图 4.45 电容器串联

图 4.45 表示  $n$  个电容器的串联，其中每个电容器的一个极板分别与另一个电容器的一个极板相连接，再将这个组合体首末两端的两个极板分别接到电源的正负极上，电源将使两端的极板上分别带有  $+q$  和  $-q$  的电荷，其他各极板上将相应地产生感应电荷，其值分别为  $+q$  和  $-q$ 。因此，串联的一个特点是每个电容器所带电量相等。这时，每个电容器两极板之间的电势差为

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, U_2 = \frac{q}{C_2}, \dots, U_n = \frac{q}{C_n}$$

这个电容器组上的总电势差为

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}\right)$$

电容器组的等效电容按定义为

$$C = \frac{q}{U} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}\right)^{-1}$$

即

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (4.67)$$

可见，电容器串联后其等效电容的倒数等于各电容器电容的倒数和。如果每一个电容器的电容都是  $C_1$ ，有  $n$  个串联，则  $C = \frac{C_1}{n}$ 。这样每个电容器两极板间的电势差只是总电

势差的  $\frac{1}{n}$ ，被击穿的危险大为减轻，或者说增加了耐压程度，这是串联的优点。

## 2. 并联

图 4.46 表示  $n$  个电容器的并联，其中每一个电容器的一个极板都接到  $A$  点上，而另一个极板都接到  $B$  点上， $A$ 、 $B$  又分别接到电源的正、负极上，这时每个电容器两端的电势差都等于  $U_A - U_B = U$ 。但是分配在每个电容器上的电量不同，它们分别为

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$$

因此，整个电容器组的等效电容等于各电容器电容之和，即

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (4.68)$$

由此可见，电容器并联后，电容量增大了。但是，每个电容器两极板间的电势差和单独使用时一样，因此并联后的耐压程度受到能力最低的那个电容器的限制。

如果  $n$  个电容器的电容都是  $C_1$ ，则并联后的等效电容为  $C = nC_1$ 。

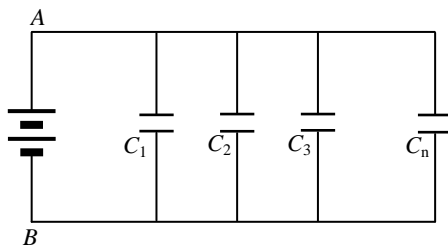


图 4.46 电容器并联

## 4.9 电场的能量

任何带电体的形成过程，外力必须克服电荷之间的相互作用力而作功。根据能量守恒定律，外力所作的功应当转换成带电体的能量。下面从平板电容器出发，计算电容器充电后所具有的电能，说明带电体所具有的静电能就是电场能量。从而得到一般电场能量的计算公式。

### 4.9.1 充电电容器的能量

一个由  $A$ 、 $B$  两极板组成的平板电容器，设想其带电过程是不断地把微小电量  $dq$  从  $A$  板移到  $B$  板上，如图 4.47 所示。直至  $B$  板带有电量  $Q$ 、 $A$  板带有  $-Q$  为止。在移动电荷的过程中需要外力克服电场力作功，这个功的量值等于电容器带电后的电能。

以  $C$  表示电容器的电容，以  $q$  表示电容器带电过程中某一时刻一个极板上所带电量，此时两极板间的电势差为  $U_{ab}$ ，将电荷  $dq$  从  $A$  板移到  $B$  板，外力作功是

$$dA = U_{ab} dq = \frac{q}{C} dq$$

当  $B$  板带有电量  $Q$ 、 $A$  板带有  $-Q$  时，外力所做的总功是

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

依据功能原理，此功转变成成为该带电体系的能量。即

$$W_e = \int_0^Q U_{ab} dq \quad (4.69)$$

此功在数值上等于充电电容器的能量

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

因为  $Q = CU_{AB}$ ，所以上式也可写成

$$W_e = \frac{1}{2} CU_{AB}^2 = \frac{1}{2} U_{AB} Q \quad (4.70)$$

无论电容器的结构如何，以上结果总是正确的。

### 4.9.2 电场的能量

现在我们要明确的是这个能量存在于何处，由谁携带。上述带电体系的形成过程，实际也是带电体系的电场建立过程。从电场的观点来看，带电体的能量也就是电场能量。仍以上面的特例为研究对象，利用如下关系

$$U_{AB} = Ed \quad E = \frac{Q}{\epsilon S}$$

则式 (4.70) 改写为

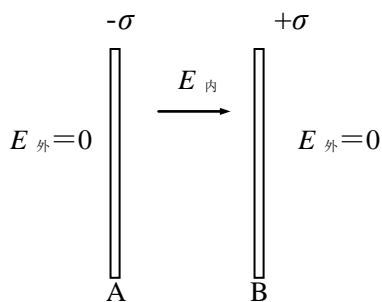


图 4.47 平板带电体系的能量

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 V$$

式中,  $V = Sd$  是两平板带电体系电场空间所占据的体积。

这个结果说明, 带电体系的能量存在于电场所在的空间。由于两板之间的电场是均匀电场, 所以电场的能量也处于均匀分布。我们引入电场能量密度 (energy density of electric field) 概念, 其定义是电场中单位体积内存储的电场能量, 用  $w_e$  表示。即

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (4.71)$$

利用电位移矢量与电场强度的关系式 (4.21), 上式可以一般写成

$$w_e = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (4.72)$$

对带电体系整个电场的能量, 有如下积分形式作为计算公式

$$W_e = \int w_e dV \quad (4.73)$$

积分区域遍及整个电场空间。

上述结果式 (4.71)、式 (4.72)、式 (4.73), 虽然是从匀强电场的特例推出, 但可以证明, 这是普遍适用的公式。

在上面讨论中, 式 (4.70) 表明能量的存在是由于电荷的存在, 电荷是能量的携带者。而式 (4.71)、式 (4.72)、式 (4.73) 告诉我们, 能量存储于电场中, 电场是能量的携带者。在静电场中, 电荷和电场都不随时间发生变化, 电场总是伴随着电荷而存在, 所以无法明确能量是以何种方式存储的。然而在时变电磁场中, 电场不依赖电荷传播, 电磁波的试验证明了这一点。事实表明, 电场是电能的携带者, 电能定域于电场存在的空间。

能量是物质的固有属性之一, 能量的概念与物质的概念是不可分割的。电场具有能量, 表明电场是一种物质。

**例 4.20** 在空气中放置一个均匀带电球面, 球面半径为  $R$ , 总带电量为  $q$ 。求均匀球面产生的电场能量。

**解** 由例 4.13 已知该带电体产生的电场分布是

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

所以, 该带电球面内部区域没有电场能量, 电场能量存在于球面外部空间。

在球面外部空间某一点处的电场能量密度是

$$w_e = \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}$$

显然, 相同  $r$  的位置处有相同的能量值。我们做一半径为  $r$ 、厚度为  $dr$  的球壳体积元, 该体积元内的能量密度值相同。该带电体的电场能量是

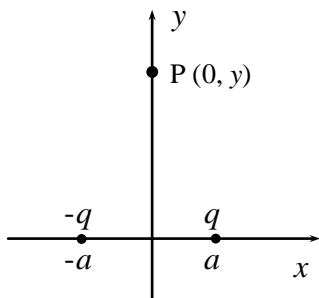
$$W_e = \int_V w_e dV = \int_R^\infty \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

## 习题与思考题

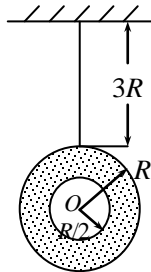
4.1 一个试验电荷  $q_0$  ( $q_0 > 0$ ) 放在带正电的大导体附近  $P$  点处, 实际测得它受力  $F$ 。若考虑到电量  $q_0$  不是足够小的, 则  $F/q_0$  比  $P$  点的场强  $E$  大还是小? 若大导体带负电, 情况如何?

4.2 根据点电荷的场强公式  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$ , 当所考虑的点 and 点电荷的距离  $r \rightarrow 0$  时, 则场强  $E \rightarrow \infty$ , 这是没有物理意义的, 对这问题应怎样理解?

4.3 如图所示, 在坐标  $(a, 0)$  处放置一点电荷  $+q$ , 在坐标  $(-a, 0)$  处放置另一点电荷  $-q$ 。  $P$  点是  $y$  轴上的一点, 坐标为  $(0, y)$ , 试求, 当  $y \gg a$  时,  $P$  点场强的大小。



题 4.3 图

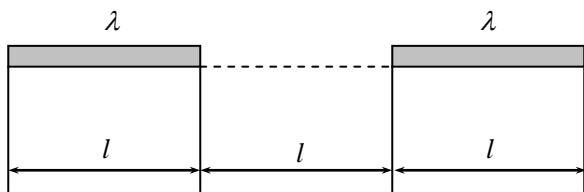


题 4.4 图

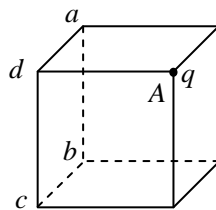
4.4 一环形薄片由细绳悬吊着, 环的外半径为  $R$ , 内半径为  $R/2$ , 并有电量  $Q$  均匀分布在环面上。细绳长  $3R$ , 也有电量  $Q$  均匀分布在绳上, 试求圆环中心  $O$  处的电场强度大小 (圆环中心在细绳延长线上)。

4.5 半径为  $R$  的带电细圆环, 电荷线密度  $\lambda = \lambda_0 \cos \varphi$  ( $\lambda_0$  为常数,  $\varphi$  为半径  $R$  与  $x$  轴的夹角), 求圆环中心处的场强。

4.6 两根相同的均匀带电细棒, 长为  $l$ , 电荷线密度为  $\lambda$ , 沿同一条直线放置。两细棒间最近距离为  $l$ , 如图所示。假设棒上电荷是不能自由移动的, 试求两棒间的静电相互作用力。



题 4.6 图



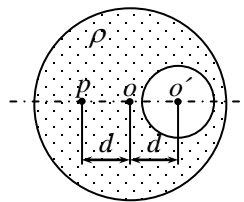
题 4.7 图

4.7 如图所示, 一个带电量为  $q$  的点电荷位于立方体的  $A$  角上, 则通过侧面  $abcd$  的电场强度通量为多少?

4.8 当封闭曲面内的电荷的代数和等于零时, 是不是闭合面上任一点的场强为零? 为什么?

4.9 有两个均匀带电球 (电荷分布保持不变), 相互接近, 能不能用高斯定理求空间场强分布?

4.10 一球体内均匀分布着电荷体密度为  $\rho$  的正电荷, 若保持电荷分布不变, 在该球内挖去半径为  $r$  的小球体, 球心为  $O'$ , 两球心间



题 4.10 图

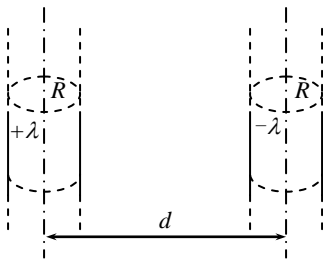
距  $\overline{OO'} = d$ ，如图所示，求：

(1) 球形空腔内，任一点处的电场强度  $\vec{E}$ ；

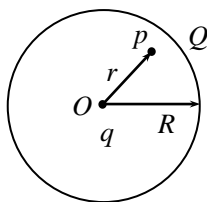
(2) 在球体内  $P$  点处的电场强度  $\vec{E}_P$ ，设  $O'$ 、 $O$ 、 $P$  三点的同一直径上，且  $\overline{OP} = d$ 。

4.11 电荷面密度为  $\sigma$  的“无限大”均匀带电平面，若以该平面处为电势零点，试求带电平面周围空间的电势分布。

4.12 如图有两根半径都是  $R$  的“无限长”直导线，彼此平行放置，两者轴线的距离是  $d$  ( $d \gg 2R$ )，单位长度上分别带有电量为  $+\lambda$  和  $-\lambda$  的电荷，设两带电导线之间的相互作用不影响它们的电荷分布，试求两导线间的电势差。



题 4.12 图



题 4.13 图

4.13 真空中一半径为  $R$  的球面均匀带电，在球心  $O$  处有一带电量为  $q$  的点电荷，如图所示。设无穷远处为电势零点，则在球内离球心  $O$  距离为  $r$  的  $P$  点处的电势为多少？

4.14 电荷以相同的面密度  $\sigma$  分布在半径为  $r_1 = 10\text{cm}$  和半径为  $r_2 = 20\text{cm}$  的两个同心球面上，设无限远处为电势零点，球心处的电势为  $U_0 = 300\text{V}$ 。

(1) 求电荷面密度  $\sigma$ ；

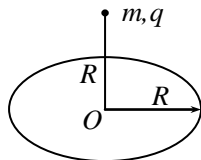
(2) 若要使球心处的电势也为零，外球面上应放掉多少电荷？

4.15 电量  $q$  分布在长为  $2l$  的细杆上，求在杆外延长线上与杆端距离为  $a$  的  $P$  点的电势（设无穷远处为电势零点）。

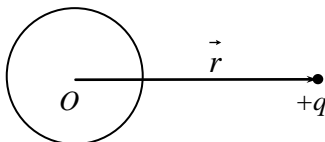
4.16 一半径为  $R$  的均匀带电圆盘，电荷面密度为  $\sigma$ ，设无穷远处为电势零点，求圆盘中心  $O$  点的电势。

4.17 质量均为  $m$ ，相距为  $r_1$  的两个电子，由静止开始在电力作用下（忽略重力作用）运动至相距为  $r_2$ ，求此时每一个电子的速率。

4.18 一半径为  $R$  的均匀带电细圆环，带电量  $Q$ ，水平放置，在圆环轴线的上方离圆心  $R$  处，有一质量为  $m$ 、带电量为  $q$  的小球，当小球从静止下落到圆心位置时，试求它的速率。



题 4.18 图



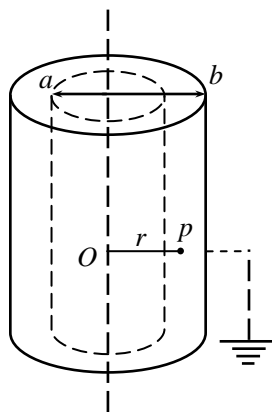
题 4.19 图

4.19 在电量为  $+q$  的点电荷电场中，放入一不带电的金属球，从球心  $O$  到点电荷所在处的矢径为  $\vec{r}$ 。试求

(1) 金属球上的感应电荷净电量；

(2) 这些感应电荷在球心  $O$  处产生的电场强度。

4.20 一长直导线横截面半径为  $a$ , 导线外同轴地套一半径为  $b$  的薄圆筒, 两者互相绝缘, 并且外筒接地, 如图所示. 设导线单位长度的带电量为  $+\lambda$ , 并设地的电势为零, 则两导体之间的  $p$  点 ( $\overline{op} = r$ ) 的场强大小和电势分别为多少?



题 4.20 图

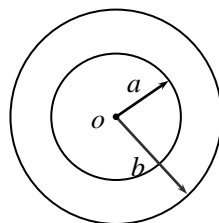
4.21 半径为  $R$  的两根无限长均匀带电直导线, 其电荷线密度分别为  $+\lambda$  和  $-\lambda$ , 两直导线平行放置, 相距  $d$  ( $d \gg R$ ), 试求该导体组单位长度的电容。

4.22 图示为一球形电容器, 在外球壳的半径  $b$  及内外导体间的电势差  $U$  维持恒定的条件下, 内球半径  $a$  为多大时才能使内球表面附近的电场强度最小? 并求这个最小的电场强度的大小。

4.23 当电场强度相同时, 为什么在电介质的电场中的电能体密度比真空中的大?

4.24 一平行板电容器, 极板面积  $S$ , 两极板紧夹一块厚度为  $d$  的面积相同的玻璃板, 已知玻璃的  $\epsilon_r$ , 电容器充电到电压  $U$  以后切断电源, 求把玻璃板从电容器中抽出来外力需作多少功?

4.25 现有一根单芯电缆, 电缆芯的半径为  $r_1 = 15\text{mm}$ , 铅包皮的内半径为  $r_2 = 50\text{mm}$ , 其间充以相对介电常数  $\epsilon_r = 2.3$  的各向同性均匀电介质, 求当电缆芯与铅包皮间的电压为  $U_{12} = 600\text{V}$  时, 长为  $l = 1\text{km}$  的电缆中贮存的静电能是多少?



题 4.22 图