吉林大学计算机科学与技术学院
College of Computer Science and Technology , Jilin University

Machine Learning Lab
College of Computer Science and Technology
Jilin University

数学建模
第六章 动态模型模拟

机器学习研究室

时小虎 时小虎

目录

1. 五步方法
2. 模拟简介
3. 连续时间模型
4. 欧拉方法
5. 混沌与分形
6. 习题

1. 五步方法

① Ask the question.	① 提出问题
② Select the modeling approach.	② 选择建模方法
③ Formulate the model.	③ 推导模型的数学表达式
④ Solve the model.	④ 求解模型
⑤ Answer the question.	⑤ 回答问题

第1步，提出问题

① Make a list of all the variables in the problem, including appropriate units.

② Be careful not to confuse variables and constants.

③ State any assumptions you are making about these variables, including equations and inequalities.

④ Check units to make sure that your assumptions make sense.

⑤ State the objective of the problem in precise mathematical terms.

① 列出问题中涉及的变量，包括适当的单位.

② 注意不要混淆变量和常量.

③ 列出你对变量所做的全部假设，包括等式和不等式.

④ 检查单位从而保证你的假设有意义.

⑤ 用准确的数学术语给出问题的目标.

第2步，选择建模方法

① Choose a general solution procedure to be followed in solving this problem.

② Generally speaking, success in this step requires experience, skill, and familiarity with the relevant literature.

③ In this book we will usually specify the modeling approach to be used.

① 选择解决问题的一个一般的求解方法.

② 一般地，这一步的成功需要经验、技巧和熟悉相关文献.

③ 在授课中，我们通常会给定要用的建模方法.

第3步，推导模型的数学表达式

① Restate the question posed in step 1 in the terms of the modeling approach specified in step 2.

② You may need to relabel some of the variables specified in step 1 in order to agree with the notation used in step 2.

③ Note any additional assumptions made in order to fit the problem described.

① 将第一步中得到的问题重新表达成第二步选定的建模方法所需要的形式.

② 你可能需要将第一步中的一些变量名改成与第二步所用的记号一致.

③ 记下任何补充假设，这些假设是为了使第一步中描述的问题与第二步中选定的数学结构相适应而做出的.

第4步，求解模型

① Apply the general solution procedure specified in step 2 to the specific problem formulated in step 3.

② Be careful in your mathematics. Check your work for math errors. Does your answer make sense?

③ Use appropriate technology. Computer algebra systems, graphics, and numerical software will increase the range.

① 将第二步中所选的方法应用于第三步得到的表达式.

② 注意你的数学推导，检查是否有错误，你的答案是否有意义.

③ 采用适当的技术.计算机代数系统、图形工具、数值计算的软件等都能扩大你能解决问题的范围，并能减少计算错误.

第5步，回答问题

① Rephrase the results of step 4 in nontechnical terms.

② Avoid mathematical symbols and jargon.

③ Anyone who can understand the statement of the question as it was presented to you should be able to understand your answer.

① 用非技术性的语言将第四步的结果重新表述.

② 避免数学符号和术语.

③ 能理解最初提出的问题的人就应该能理解你给出的解答.

2. 模拟简介

模拟技术已经成为最重要的和最流行的分析动态模型的方法．在微分方程入门课程中所讲述的精确解方法具有局限性．事实上对非常多的微分方程我们不知道如何求解．在前两章介绍的定性分析方法可应用范围很广，但是对某些问题我们需要定量的答案和高度的精确度．模拟方法满足这两个要求．几乎所有的动态模型都可以按适当的精确程度模拟．而且，模拟技术非常灵活．可以比较容易地将一些诸如时滞或随机因素这样更复杂的属性引入模型，这些是难以用解析的方法处理的．

模拟的主要缺点在灵敏性分析方面．无法求助解析公式，对一个特殊参数检验灵敏性的惟一办法就是对这个参数的几个不同的值重复整个模拟过程，然后再做插值．如果有几个参数要检验，这会很耗时，并且耗费较高．尽管如此，模拟仍是研究许多问题可取的方法．如果我们无法得到解析解，并且需要定量解，则除了模拟我们没有别的选择．

分析动态系统模型有两个基本的方法．解析方法企图根据各种情形的模型推测将会发生什么．模拟方法则通过模型的构造，运行，看到将会发生些什么．

2. 模拟简介

例 6.1 两支军队，我们称为红军(R)和蓝军(B)，进行战斗．在这场常规战中，伤亡是由于直接交火(步兵)和火炮射击(炮兵)．假设直接交火的伤亡率与敌军步兵数成正比．由炮火造成的伤亡率与敌军的炮兵数和友军的密度两者都有关系．红军聚集了五个师袭击两个师的蓝军．蓝军具有防御能力强的和武器精良的优势．蓝军为赢得战斗该尽多大的努力？

2. 模拟简介

第一步提出问题：

我们将应用五步方法．第一步的结果总结在图 6-1．我们已经假设由于炮火导致的伤亡直接正比于敌军武力水平和友军武力水平的乘积．在这里，一个似乎合理的假设是武力水平正比于军队的数量．又因为没有相对于步兵部队的火炮数量的任何信息，为了便于分析起见，我们简单地假设炮兵和步兵部队的伤亡正比于部队的数量，所以假设双方剩下的大炮或步兵部队正比于总的部队数量．

变量：

R＝红军单位数(师)

B＝蓝军单位数(师)

D_R＝由直接交火导致的红军丧亡率(单位/小时)

D_B＝由直接交火导致的蓝军丧亡率(单位/小时)

I_R＝由间接交火导致的红军丧亡率(单位/小时)

I_B＝由间接交火导致的蓝军丧亡率(单位/小时)

假设：

$D_R=a_1 B$

$D_B=a_2 R$

$I_R=b_1 RB$

$I_B=b_2 RB$

$R\geqslant 0$，$B\geqslant 0$

$R(0)=5$，$B(0)=2$

a_1，a_2，b_1，b_2 是正实数

$a_1>a_2$，$b_1>b_2$

目标：确定条件使得在 $B\to 0$ 之前，$R\to 0$

2. 模拟简介

第二步选择模型：

下面是第二步．我们将利用离散时间动态模型，对其用模拟方法求解．图 6-2 给出具有两个变量的离散时间动态模型

$$\Delta x_1 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\Delta x_2 = f_2(x_1, x_2).$$

的求解算法．

算法： 离散时间模拟

变量： $x_1(n)$＝在时刻 n 的第 1 状态变量

$x_2(n)$＝在时刻 n 的第 2 状态变量

N＝时间阶段数

输入： $x_1(0)$，$x_2(0)$，N

过程： Begin

for $n=1$ to N do

Begin

$x_1(n) \leftarrow x_1(n-1) + f_1(x_1(n-1), x_2(n-1))$

$x_2(n) \leftarrow x_2(n-1) + f_2(x_1(n-1), x_2(n-1))$

End

End

输出： $x_1(1)$，…，$x_1(N)$

$x_2(1)$，…，$x_2(N)$

2. 模拟简介

第三步 推导模型：

下面是第三步．我们将用两个状态变量：$x_1=R$，红军部队的兵力单位数量；$x_2=B$，蓝军部队兵力单位数量为战斗问题建立一个离散时间动态模型．差分方程为

$$
\begin{aligned}
\Delta x_1 &= -a_1 x_2 - b_1 x_1 x_2 \\
\Delta x_2 &= -a_2 x_1 - b_2 x_1 x_2 .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

我们从 $x_1(0)=5$ 和 $x_2(0)=2$ 个师开始．使用 $\Delta t=1$ 小时为一个时间步长．还需要确定 a_i 和 b_i 的值才能进行模拟过程．不幸的是对它们应该取什么值我们还没有任何的信息．所以我们不得不进行一个有根据的推测．设一个典型的正规战斗进行大约 5 天，每天持续约 12 小时．这意味着一支部队在大约 60 小时的战斗中减员．如果一支队伍在 60 小时内每小时减员 5%，那么剩余的部分将是 $(0.95)^{60}=0.05$，结果看来正确．我们假设 $a_2=0.05$．因为炮火在杀伤力方面通常不如直接交火有效，我们假设 $b_2=0.005$．（注意到 b_2 与 x_1 和 x_2 相乘，这就是为什么我们要将它的值取得如此小．）现在假设蓝军比红军具有更有效的武器，

2. 模拟简介

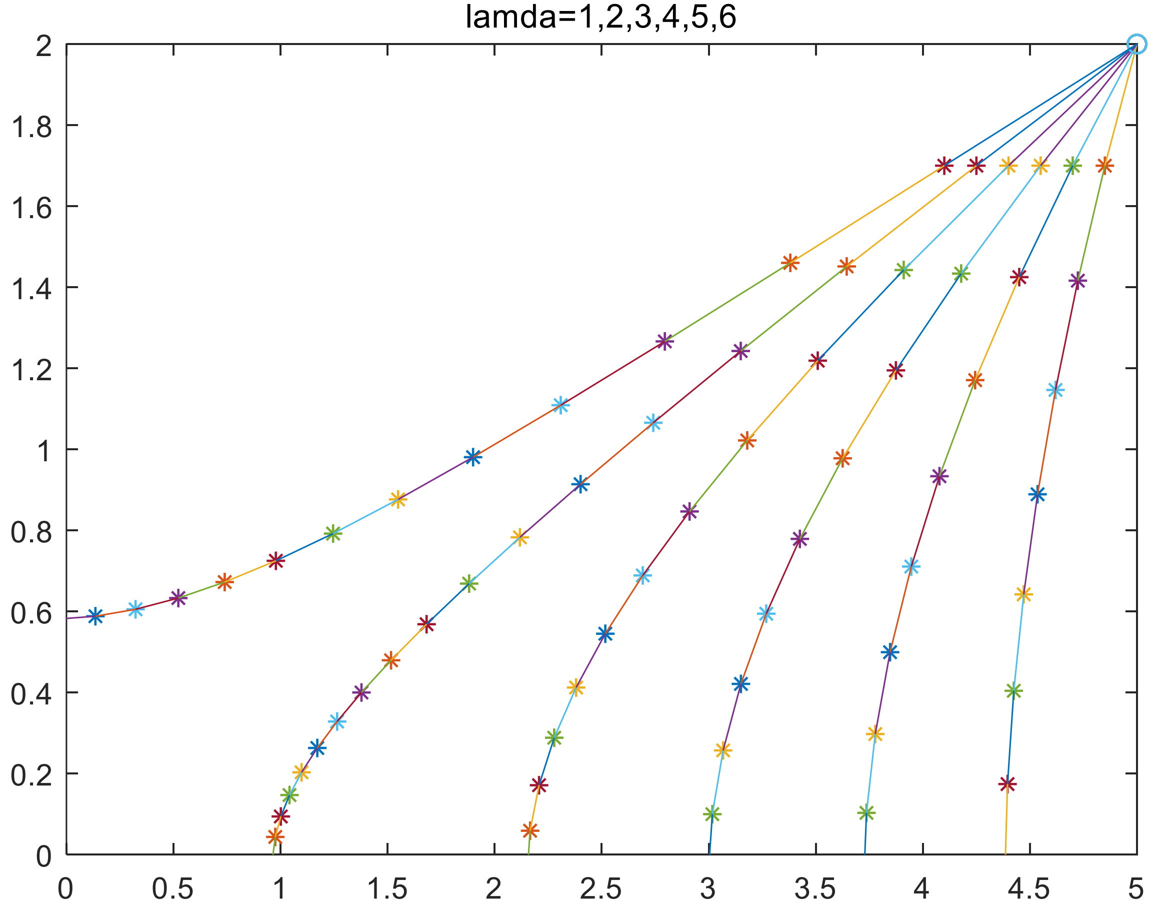
第三步 推导模型：

因此 $a_1>a_2$ 且 $b_1>b_2$. 假设 $a_1=\lambda a_2$, $b_1=\lambda b_2$, $\lambda>1$. 分析的目的是要确定最小的 λ 使得在 $x_2\to 0$ 之前，$x_1\to 0$ 成立. 于是差分方程为

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= -\lambda(0.05)x_2-\lambda(0.005)x_1x_2 \\ \Delta x_2 &= -0.05x_1-0.005x_1x_2.\end{aligned}\qquad(3)$$

2. 模拟简介

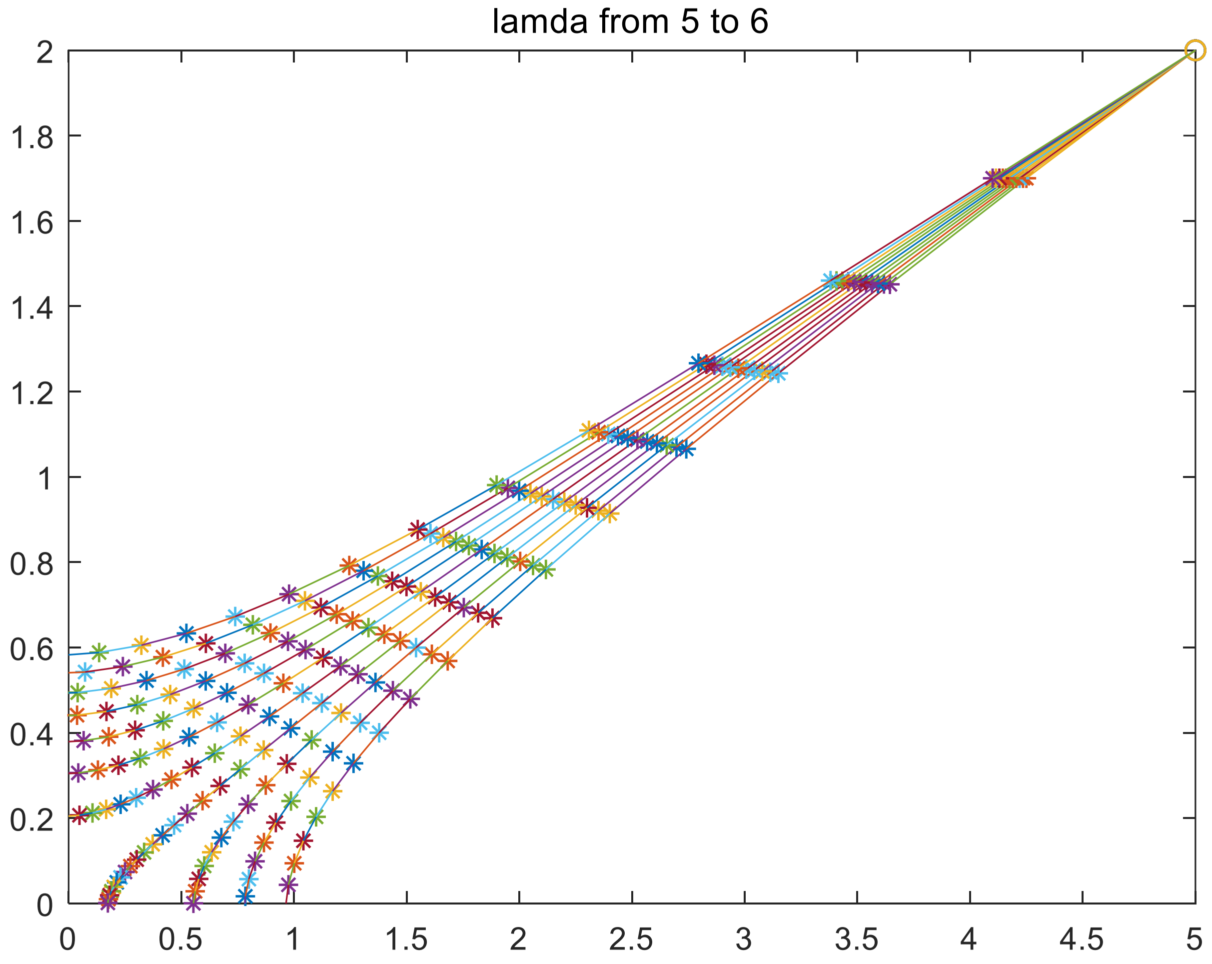
第四步 模型求解：




```
clear all, clc
%lamda=1;
a2=0.05;
b2=0.005;
for lamda=1:6
%for lamda=5.3:0.01:5.4
    a1=lamda*a2;
    b1=lamda*b2;
    x1_0=5;x2_0=2;
    plot(x1_0, x2_0,'o');
    hold on;
    for i=[1:168]
        deta_x1=-a1*x2_0-b1*x1_0*x2_0;
        deta_x2=-a2*x1_0-b2*x1_0*x2_0;
        xnew_1=x1_0+deta_x1;
        xnew_2=x2_0+deta_x2;
        plot(xnew_1,xnew_2,'*');
        hold on;
        plot([x1_0,xnew_1],[x2_0,xnew_2],'-');
        hold on;
        if ((xnew_1<=0)||(xnew_2<=0))
            disp("break");
            break;
        end
        x1_0=xnew_1;
        x2_0=xnew_2;
    end
end
title("lamda=1,2,3,4,5,6");
```

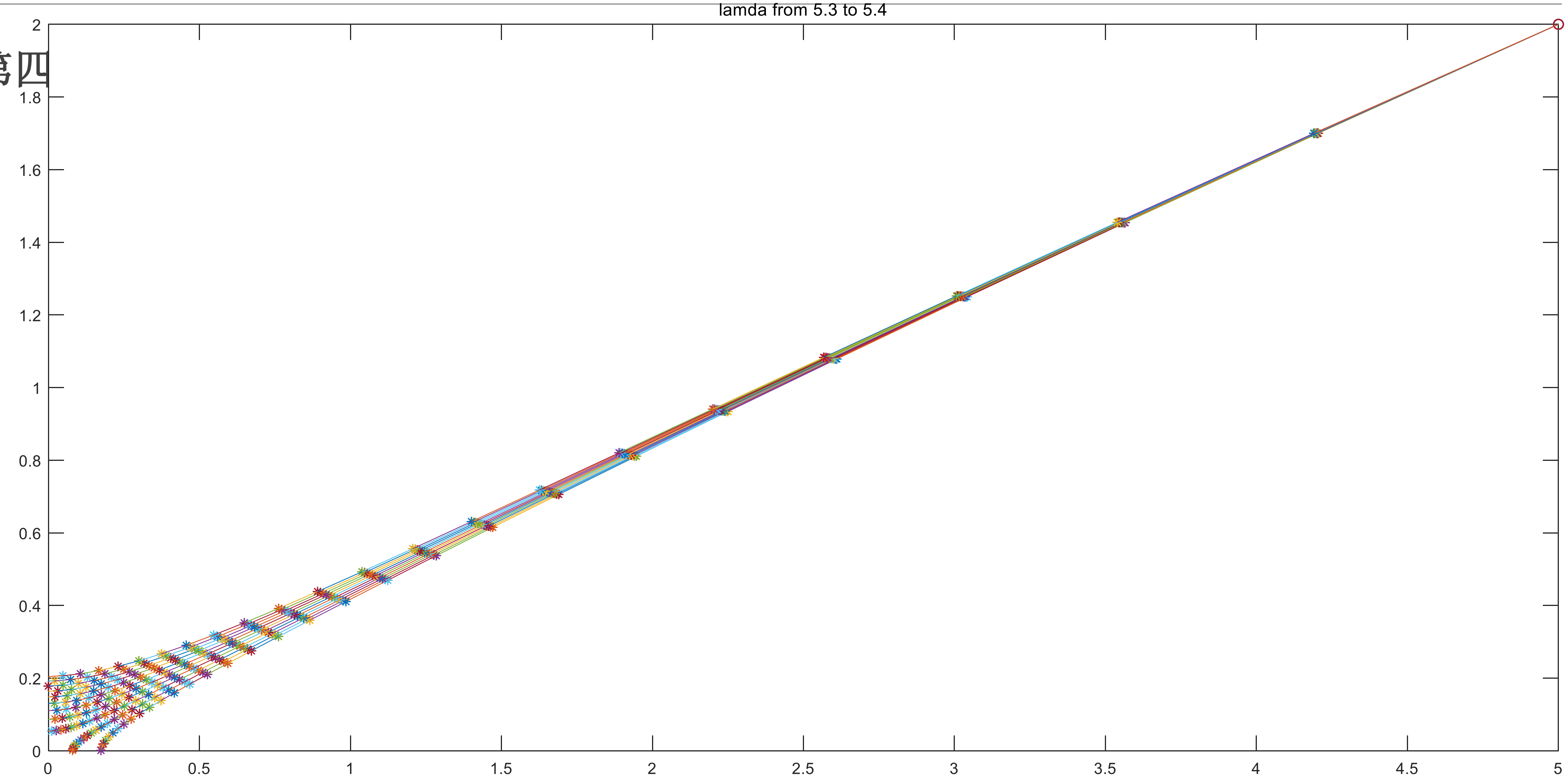
2. 模拟简介

第四步 模型求解：



2. 模拟简介

第四


lamda from 5.3 to 5.4
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

2. 模拟简介

第五步 回答问题：

最后，我们要总结一下我们结果．我们模拟了一场5个师的红军进攻和2个师的蓝军防守的交战．我们假设双方全力投入并坚持战斗直到一方完全获胜．我们要研究能够弥补数量上处于5∶2的劣势的武器有效性(杀伤力)的强度．我们对不同的武器精良性比率模拟了若干次战斗．我们发现蓝军需要至少5.4∶1的武器上的优势才能战胜数量处于优势的5个师的红军队伍．

2. 模拟简介

灵敏性分析：

在完成五步方法且回答了在第一步中提出的问题之后，我们需要进行灵敏性分析．对这类多数数据完全来自猜测的问题做这样的分析特别重要．我们从研究伤亡系数的数值和战斗结果之间的关系入手．已经假设 $a_2=0.05$，$b_2=a_2/10$，$a_1=\lambda a_2$ 和 $b_1=\lambda b_2$．现在我们让 a_2 变化，且保持它与其他变量的关系．

我们将研究 $\lambda_{\min}$ 对 a_2 的依赖关系，这里 $\lambda_{\min}$ 定义为使得蓝军取胜的最小的 λ 值．于是对每个 a_2 值运行模型若干次．不需要将结果都列表表示，因为对每种情形我们都检验(从 $a_2=0.01$ 到 $a_2=0.10$)发现 $\lambda_{\min}=5.4$，正如在基本情形($a_2=0.05$)得到的那样．显然 $\lambda_{\min}$ 对伤亡系数的数值一点都不敏感．

2. 模拟简介

灵敏性分析： 还可以进行其他各种灵敏性分析，并且分析过程可以继续下去，只要时间容许、好奇心持续不断、又没有其他工作压力．我们甚至对 λ_{min} 和红军与蓝军的数量上优势率之间的关系感兴趣，这里假设优势率为 5：2．为研究这个问题我们回到基本情况，$a_2=0.05$，为确定 λ_{min}，对各种不同的红军力量强度初值 x_1 和固定的 $x_2=2$，运行模型．这样进行的模型浏览得到的结果列于表 6-2．运算情形 $x_1=2$ 只是为了验证．我们得到此时 $\lambda_{min}=1.1$，因为 $\lambda=1$ 只会导致战平．

力量对比率(红军：蓝军)	所要求的优势(λ_{min})
8：2	11.8
7：2	9.5
6：2	7.3
5：2	5.4
4：2	3.6
3：2	2.2
2：2	1.1

3. 连续时间模型

例 6.2 重新考虑例题 4.2 的捕鲸问题. 从现有种群数量 $B=5\ 000$，$F=70\ 000$ 开始，假设竞争系数为 $\alpha<1.25\times10^{-7}$，在没有捕捞的情形下，两个鲸鱼种群将恢复到它们的自然水平. $\boxed{\text{这需要多长时间?}}$

例 4.2 蓝鲸和长须鲸是两个生活在同一海域的相似的种群，因此认为它们之间存在竞争. 蓝鲸的内禀增长率每年估计为 5%，长须鲸为每年 8%. 环境承载力(环境能够支持的鲸鱼的最大数量)估计蓝鲸为 150 000 条，长须鲸为 400 000 条. 鲸鱼竞争的程度是未知的. 在过去的 100 年剧烈的捕捞已经使鲸鱼数量减少，蓝鲸大约 5 000 条，长须鲸大约 70 000 条. 蓝鲸是否会灭绝?

3. 连续时间模型

第一步提出问题：

Variables (符号化问题描述):

变量：

B=蓝鲸的数量

F=长须鲸的数量

g_B=蓝鲸种群的增长率(每年)

g_F=长须鲸种群的增长率(每年)

c_B=与蓝鲸竞争的影响(每年鲸鱼数)

c_F=与长须鲸竞争的影响(每年鲸鱼数)

假设：

$g_B=0.05B(1-B/150\ 000)$

$g_F=0.08F(1-F/400\ 000)$

$c_B=c_F=\alpha BF$

$B\geqslant 0 \quad F\geqslant 0$

α 是正实数

目标：确定动力系统是否能够从 $B=5\ 000$，$F=70\ 000$ 开始达到稳定的平衡态

3. 连续时间模型

第一步提出问题：

Variables (符号化问题描述):

变量：

B=蓝鲸的数量

F=长须鲸的数量

g_B=蓝鲸种群的增长率(每年)

g_F=长须鲸种群的增长率(每年)

c_B=与蓝鲸竞争的影响(每年鲸鱼数)

c_F=与长须鲸竞争的影响(每年鲸鱼数)

假设：

$g_B = 0.05B(1 - B/150\,000)$

$g_F = 0.08F(1 - F/400\,000)$

$c_B = c_F = \alpha BF$

$B \geqslant 0 \quad F \geqslant 0$

α 是正实数

$\boxed{\text{从状态 } B=5\,000\text{，}F=70\,000\text{ 达到平衡态需要多长时间.}}$

3. 连续时间模型

第二步选择建模方法：

第二步是选择建模的方法．我们面对的一个似乎需要定量方法的分析问题．第 4 章的图方法告诉我们将会发生什么，但没有告诉我们需要多长时间才会发生．第 5 章提到的分析方法实际上是局部的．这里我们需要一个整体分析方法．最好是求解这个微分方程，但我们不知道如何求解．我们将应用模拟方法，这似乎是我们仅有的选择．

离散时间模型看起来是

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= f_1(x_1,\cdots,x_n)\\ &\vdots\\ \Delta x_n &= f_n(x_1,\cdots,x_n),\end{aligned}$$

连续时间模型，将得到

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1,\cdots,x_n)\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1,\cdots,x_n),\end{aligned}$$

步长 $\Delta t=1$，它将与我们在第一步选取的离散时间模型完全一致．除非因为选择 $\Delta t=1$ 导致错误，我们不必在离散与连续之间做选择．这样我们已完成第二步．

3. 连续时间模型

第三步 推导模型公式

$$\frac{dx_1}{dt} = 0.05x_1\left(1 - \frac{x_1}{150\ 000}\right) - \alpha x_1 x_2$$

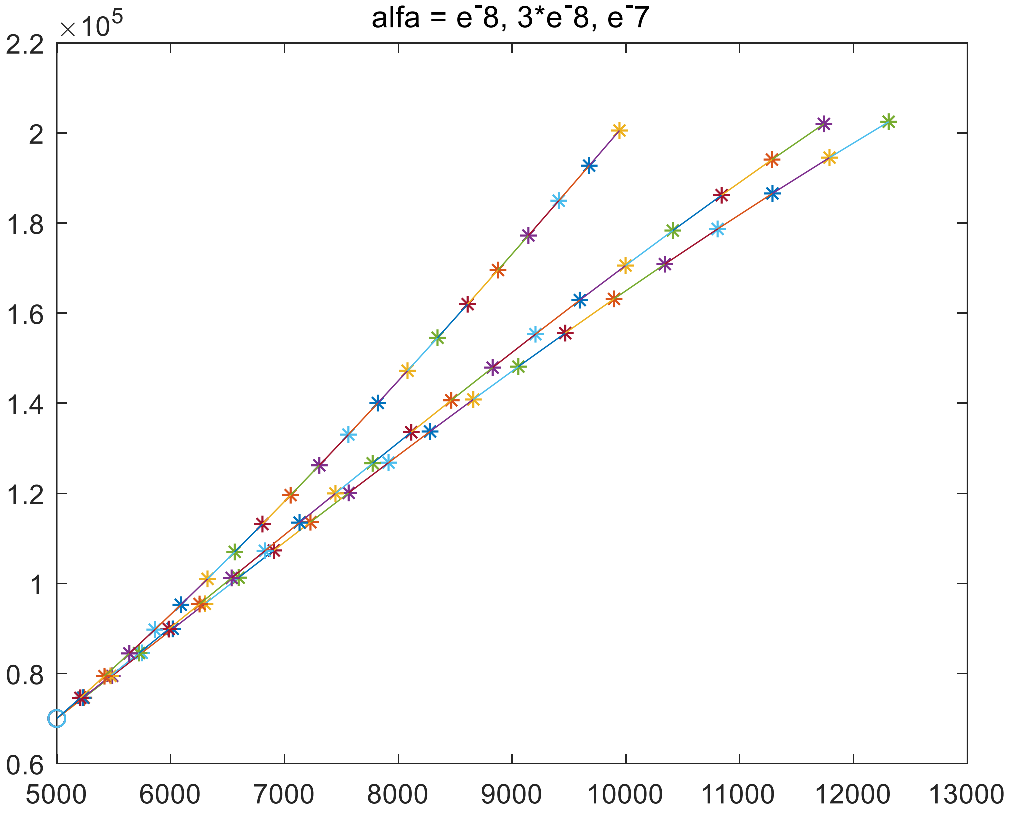
$$\frac{dx_2}{dt} = 0.08x_2\left(1 - \frac{x_2}{400\ 000}\right) - \alpha x_1 x_2$$

$$\Delta x_1 = 0.05x_1\left(1 - \frac{x_1}{150\ 000}\right) - \alpha x_1 x_2$$

$$\Delta x_2 = 0.08x_2\left(1 - \frac{x_2}{400\ 000}\right) - \alpha x_1 x_2$$

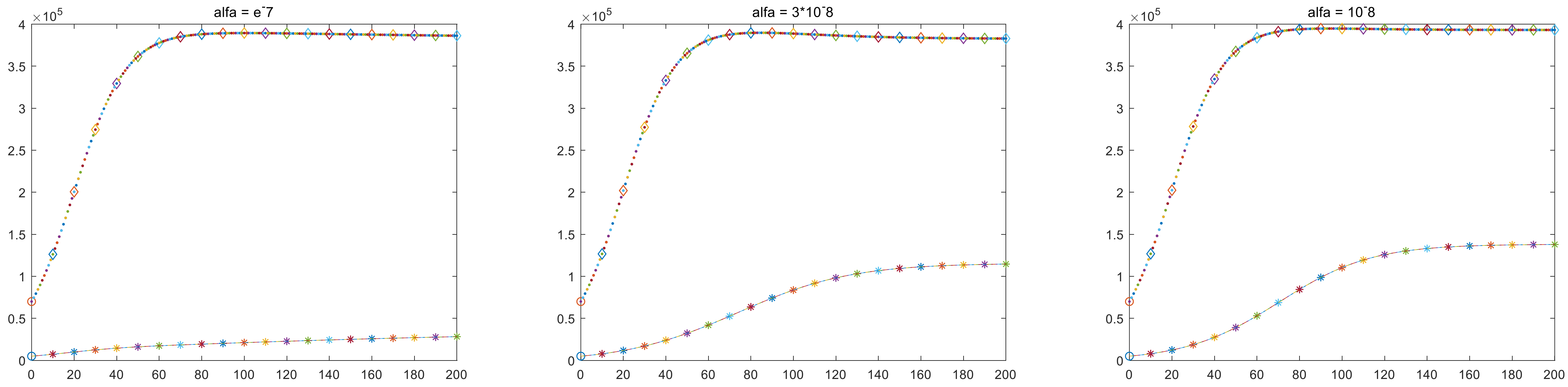
3. 连续时间模型

第四步 求解模型



3. 连续时间模型

第四步 求解模型



3. 连续时间模型

第五步 回答问题

第五步是用通俗的语言表达我们的结果. 鲸鱼种群的恢复需要很长的时间——长须鲸大约需要100年，而对更严重衰减的蓝鲸需要几个世纪.

3. 连续时间模型

灵敏性分析：

对不同的α值两个种群的平衡态不同．但是收敛到平衡态所需的时间变化不大．因此我们的一般结论对任何的竞争程度是有效的：鲸鱼种群需要几个世纪才能恢复．

4. 欧拉方法

例 6.3 重新考虑前一章例题 5.4 的 RLC 电路问题. 描述这个电路的行为. 在 5.3 节我们仅仅是成功地确定了动态系统

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_1^3 - x_2 \\ x_2' &= x_1. \end{aligned} \tag{8}$$

在(0，0)邻域内的局部性质，这是该系统惟一的平衡点. 这个平衡点不稳定，附近的解曲线逆时针方向旋转向外. 向量场草图(见图 5-11)几乎没有提供任何新的信息. 存在逆时针的旋转流，但是(在缺少附加信息下)难以断定解曲线是旋转向内、还是向外或两者都不是.

4. 欧拉方法

我们将使用欧拉方法模拟动态系统(8). 图 6-19 给出欧拉方法的算法. 考虑连续时间的动态系统模型

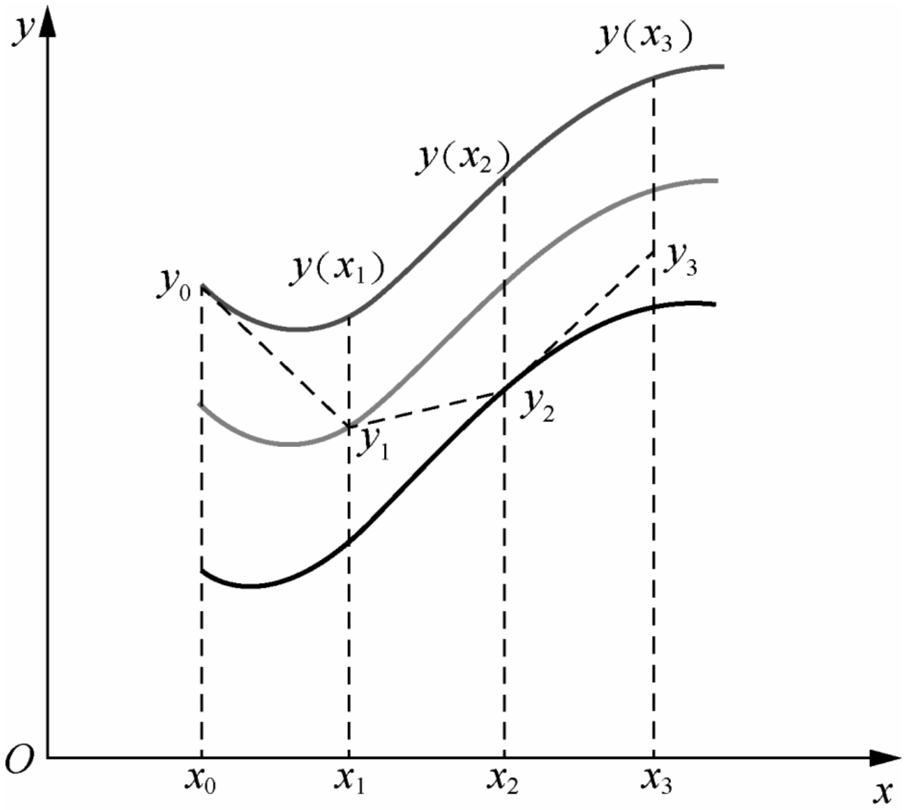
$$x' = F(x)$$

其中 $x=(x_1, \cdots, x_n)$且 $F=(f_1, \cdots, f_n)$，带有初始条件 $x(t_0)=x_0$.
从初始条件开始，利用

$$x(t+h)-x(t) \approx hF(x(t)).$$

欧拉方法的每一次迭代产生一个基于 $x(t)$估计的对 $x(t+h)$的估计. 当步长 h 变小时，即步数 N 增大，欧拉方法的精确度增加. 对小的 h 值，状态变量的最终值 $x(N)$估计的误差大约与 h 成正比. 换句话说，使用两倍多的步数(即 h 减小一半)会增加两倍的精确度.

4. 欧拉方法



算法： 欧拉方法

变量： $t(n)$ = n 步后的时间

$x_1(n)$ = 在时刻 $t(n)$ 的第 1 状态变量

$x_2(n)$ = 在时刻 $t(n)$ 的第 2 状态变量

N = 步数

T = 模拟结束时间

输入： $t(0)$，$x_1(0)$，$x_2(0)$，N，T

过程： Begin

$h \leftarrow (T - t(0))/N$

for $n=0$ to $N-1$ do

Begin

$x_1(n+1) \leftarrow x_1(n) + hf_1(x_1(n),\ x_2(n))$

$x_2(n+1) \leftarrow x_2(n) + hf_2(x_1(n),\ x_2(n))$

$t(n+1) \leftarrow t(n) + h$

End

End

输出： $t(1)$，…，$t(N)$

$x_1(1)$，…，$x_1(N)$

$x_2(1)$，…，$x_2(N)$

4. 欧拉方法

向前欧拉公式（7.3.3）也可以由泰勒展开得到。假设 $y(x)$是 $y'(x)=f(x,y(x))$ 任意一个二次连续可微的解，将 $y(x)$在点 x_n 处进行泰勒展开，可得

$$y(x)=y(x_n)+(x-x_n)f(x_n,y(x_n))+\frac{(x-x_n)^2}{2!}y''(\xi),\quad \xi\in[x_n,x] \tag{7.3.4}$$

若取 $x=x_{n+1}$，则有

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))+\frac{h^2}{2!}y''(\xi),\quad \xi\in[x_n,x_{n+1}] \tag{7.3.5}$$

忽略泰勒展开式的余项

$$R_h^{[1]}(x_n)=\frac{h^2}{2!}y''(\xi) \tag{7.3.6}$$

并记 $y(x_n)$的近似值为 y_n，也得到了式（7.3.3）。由此可以看出，向前欧拉公式（7.3.3）的误差为式（7.3.6）给出的余项，称为向前欧拉公式的**截断误差**。但应注意，该误差是没有考虑 y_n 存在误差的情况下，求 y_{n+1} 所带来的误差，又称局部截断误差。实际上计算 y_n 也是存在误差的，每个节点的误差会不断向后累积下来。

4. 欧拉方法

考虑常微分方程的定解问题式（7.2.1）中的 $y'(x)=f(x,y(x))$，将其在$[x_n,\ x_{n+1}]$上进行积分，可得

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))\mathrm{d}x \qquad (7.4.1)$$

如果等式右边的积分可以求出，就可以得到 $y(x_{n+1})$。而等式右边可以采用不同的数值积分公式进行近似求解。当使用梯形求积公式进行计算时，有

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]+R_h^{[2]}(x_n) \qquad (7.4.2)$$

其中

$$R_h^{[2]}(x_n)=-\frac{h^3}{12}y'''(\xi) \quad x_n<\xi<x_{n+1} \qquad (7.4.3)$$

为梯形求积公式余项。忽略该余项，并记 $y(x_n)$的近似值为 y_n，则有

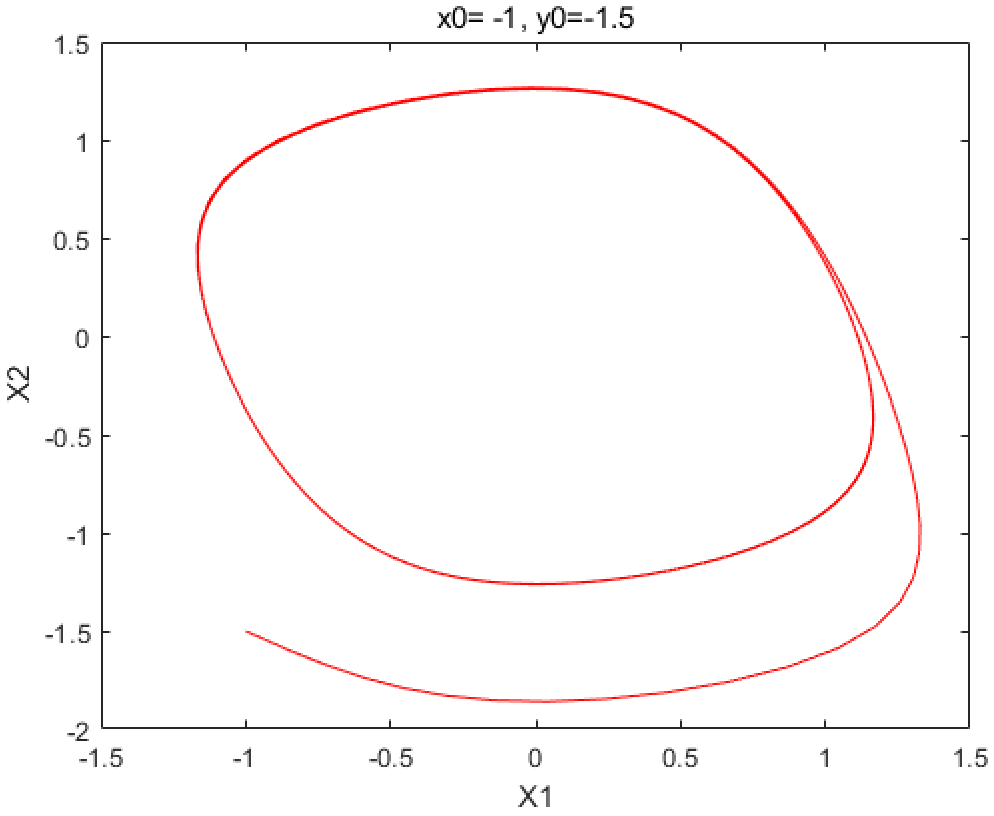
$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})],\quad n=0,1,\cdots,N-1 \qquad (7.4.4)$$

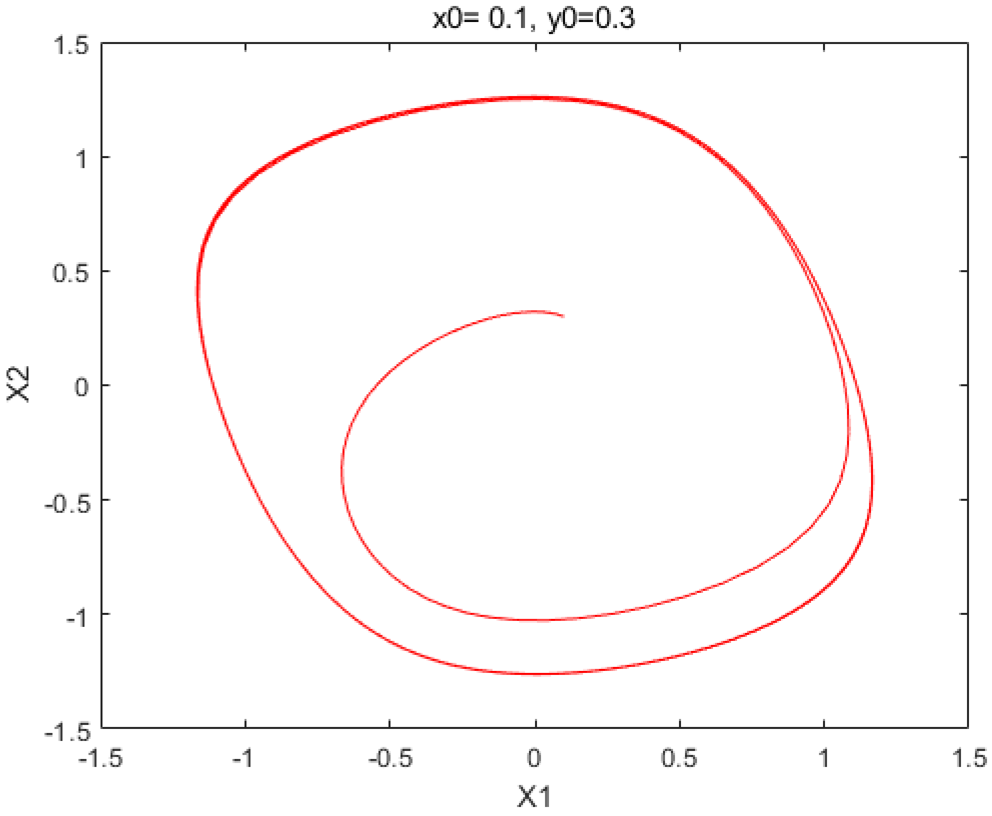
4. 欧拉方法

图 6-20 和图 6-21 说明对方程组(8)应用计算机执行欧拉方法得到的结果. 在图 6-20 和图 6-21 中的每个图形都是几次模拟运行后得到的结果. 对每个初始条件集合我们需要对输入参数 T 和 N 进行一次灵敏性分析. 首先我们增大 T, 直到进一步的增大也产生基本相同的图像(求解仅仅是多做了几次的循环). 然后我们增大 N, (即减小步长)检验精确度. 如果两倍的 N 产生的图像与前一个图像没有明显的不同, 我们就认为对我们的要求来说 N 已经足够大了.

在图 6-20 我们从 $x_1(0)=-1$, $x_2(0)=-1.5$ 开始. 结果解曲线逆时针方向旋转地趋向原点. 但是, 在它接近原点时, 解开始或多或少的具有周期行为, 绕着原点旋转. 当我们从原点附近出发, 在图 6-21, 同样的行为发生了, 只是现在解曲线旋转向外. 在两种情形解都逼近同一条绕着原点的闭轨线. 这条闭轨线被称为极限环.

4. 欧拉方法


x0= -1, y0=-1.5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
X2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
X1


x0= 0.1, y0=0.3
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
X2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
X1

4. 欧拉方法

图 6-22 展示了这个动态系统的完整的相图. 对除了(x_1, x_2)=(0, 0)以外的任何初始条件，解曲线趋向于同一个极限环. 从这个环的内部开始，解曲线旋转向外；从这个环的外部开始，解曲线旋转向内. 在图 6-22 看到的这种行为在线性系统中不会出现. 如果线性动态系统的解旋转趋向原点，则它将总是旋转地趋向原点. 如果它旋转向外，则它总是旋转向外直到无穷远. 这个观察含有建模的暗示. 任何一个具有在图 6-22 中所展示的那种行为的动态系统不能用线性微分方程恰当地建模.

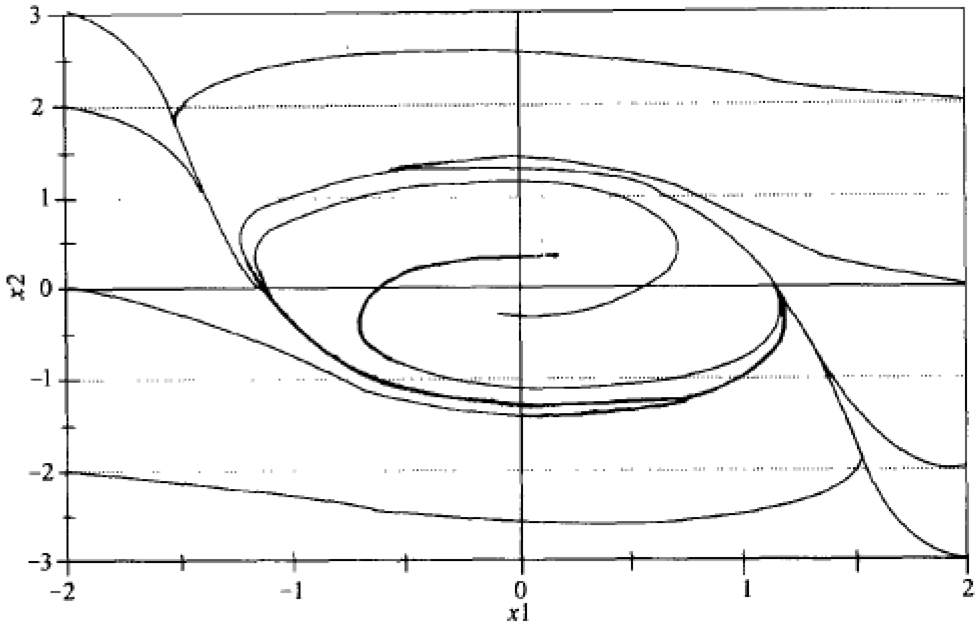


图 6-22 电压 x_2 随电流 x_1 变化的图，展示了例题 6.3 非线性 RLC 电路问题的完整的相图

4. 欧拉方法

下一步我们将进行灵敏性分析，以确定我们假设的微小改变对我们一般结果的影响. 这里我们将讨论电容的灵敏性. 对灵敏性和稳健性的其他问题的讨论放在本章末的习题中. 在我们的例子中假设 $C=1$. 对更一般的情形我们获得动态系统

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 - x_1^3 - x_2 \\
x_2' &= \frac{x_1}{C}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

对任意 $C>0$ 的向量场都基本与图 5-11 相同. 速度向量在曲线 $x_2=x_1-x_1^3$ 上呈垂直态，在 x_2 轴上呈水平态. 惟一的平衡态是原点(0，0).

偏导数矩阵是

$$
A = \begin{bmatrix} 1-3x_1^2 & -1 \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}.
$$

计算它在 $x_1=0$，$x_2=0$ 的值，得到线性系统

$$
\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{10}
$$

它与我们的非线性系统在原点附近有类似的性质. 为获得特征值我们必须求解

$$
\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1/C & \lambda-0 \end{vmatrix} = 0,
$$

或 $\lambda^2-\lambda+1/C=0$. 特征值是

$$
\lambda = \frac{1\pm\sqrt{1-\frac{4}{C}}}{2}. \tag{11}
$$

4. 欧拉方法

下一步我们需要考虑线性系统的相图. 可以通过求特征值和特征向量的方法求解系统(10), 尽管比较繁琐. 幸运的是在目前情况下为画出相图并不需要确定方程(10)精确的解析解的公式. 我们已经知道这个系统的特征值具有形式 $\lambda=a\pm ib$, 其中 a 为正数. 正如我们在 5.1 节提到的(在讨论例题 5.1 的第二步), 这暗示了任何解曲线的坐标必为两个函数项 $e^{at}\cos(bt)$ 和 $e^{at}\sin(bt)$ 的线性组合. 换句话说, 每条解曲线向外旋转. 对方程(10)的向量场的粗略检验得知旋转必须按逆时针方向. 于是我们得到对任意 $0<C<4$, 方程(10)的线性系统的相图看起来与在图 5-12 中的非常相像.

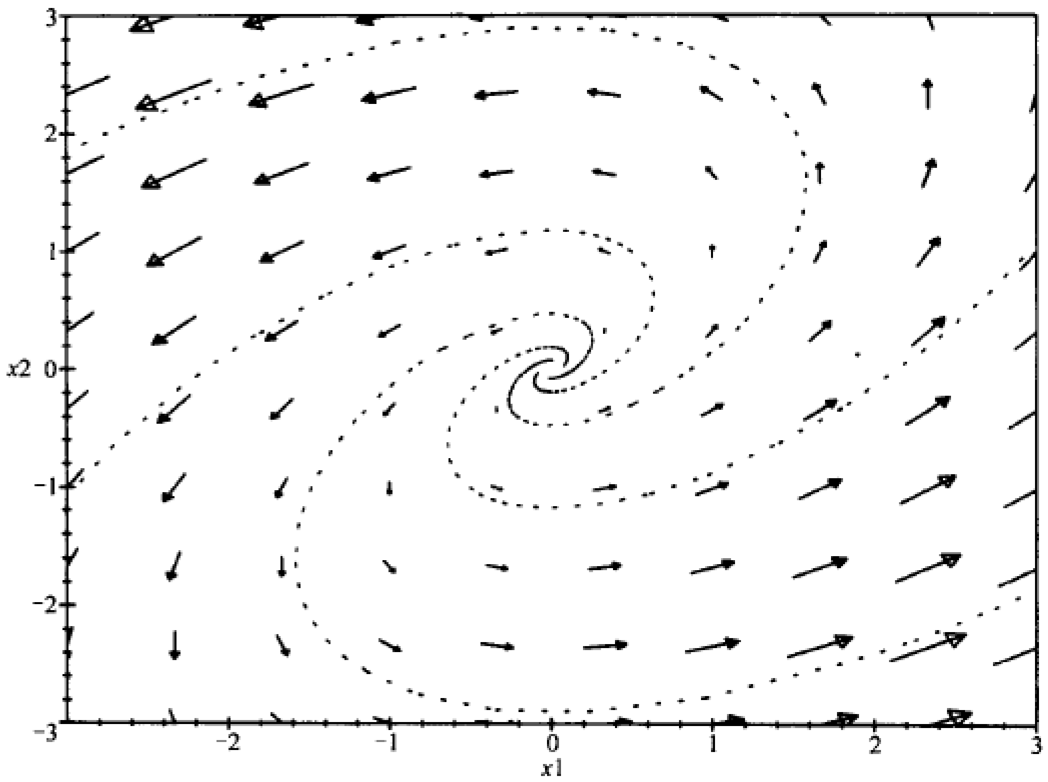


图 5-12 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了对例题 5.4 的 RLC 电路问题在(0, 0)附近的相图的线性逼近

4. 欧拉方法

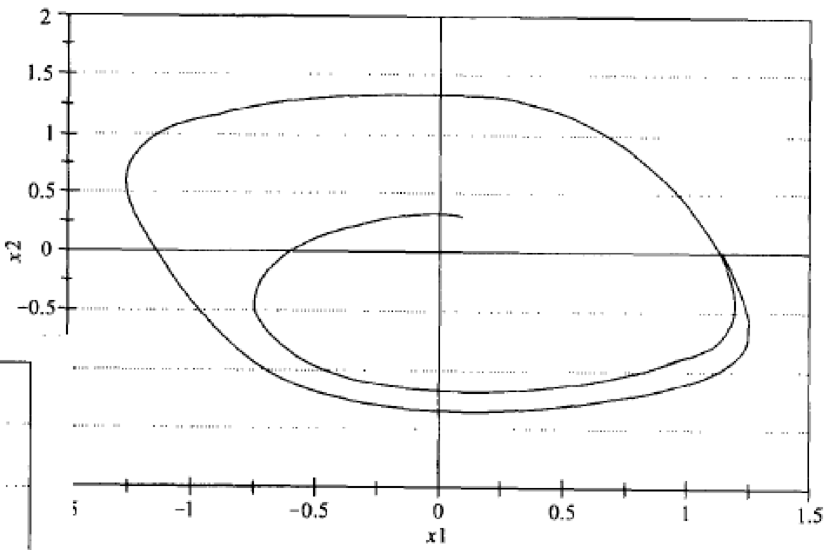


图 6-21 非线性 RLC 电路问题：当 $x_1(0)=0.1$，$x_2(0)=0.3$ 时，电压 x_2 随电流 x_1 变化的图

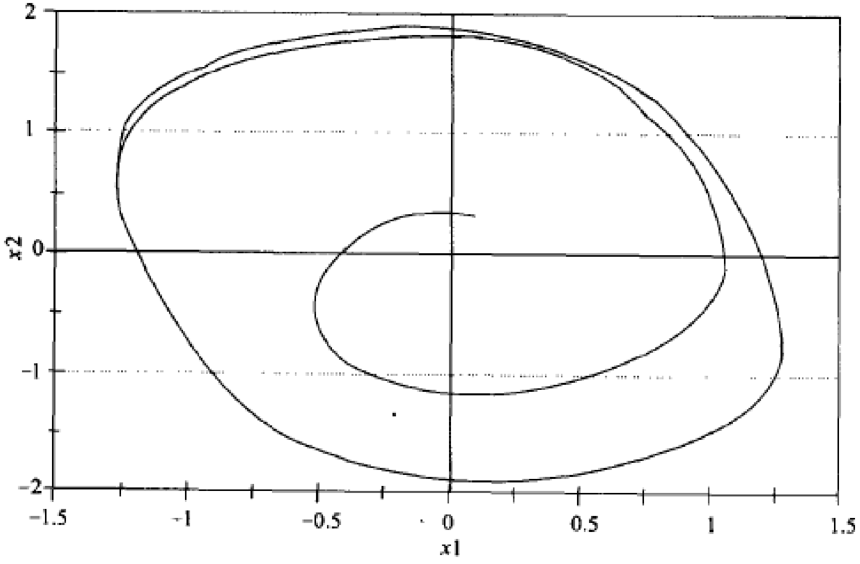


图 6-23 非线性 RLC 电路问题：当 $x_1(0)=0.1$，$x_2(0)=0.3$，$C=0.5$ 时，电压 x_2 随电流 x_1 变化的图

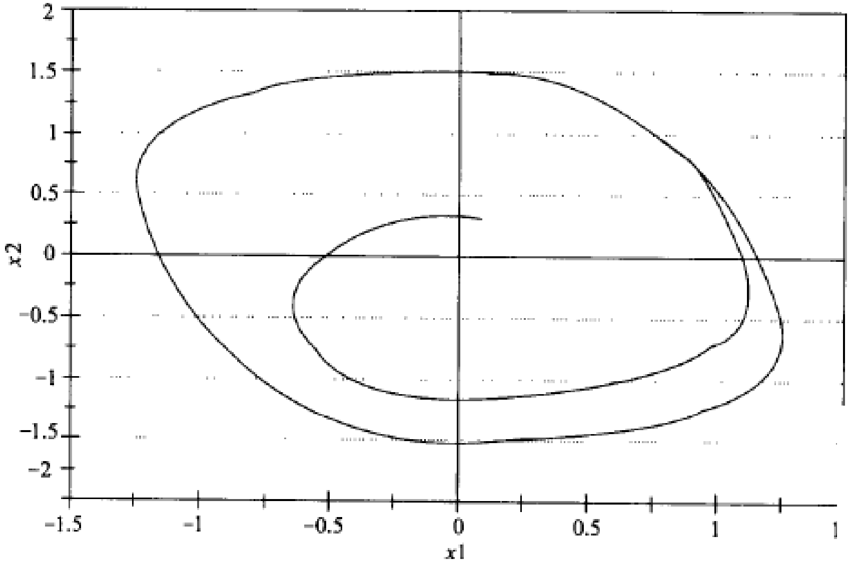


图 6-24 非线性 RLC 电路问题：当 $x_1(0)=0.1$，$x_2(0)=0.3$，$C=0.75$ 时，电压 x_2 随电流 x_1 变化的图

样的初值开始. 每次解曲线都旋转向外且逐渐地被吸引向极限环. 当 C 增大时，极限环缩小. 对每个 C 值都用几个不同的初始条件实验. (附加的模拟没有都展示出来.)显然，对每种情况都只有一个极限环吸引离开原点的解曲线. 总之，例题 6.3 的 RLC 电路对所有处于 1 附近的电容值 C，具有图 6-22 所展示的性质.

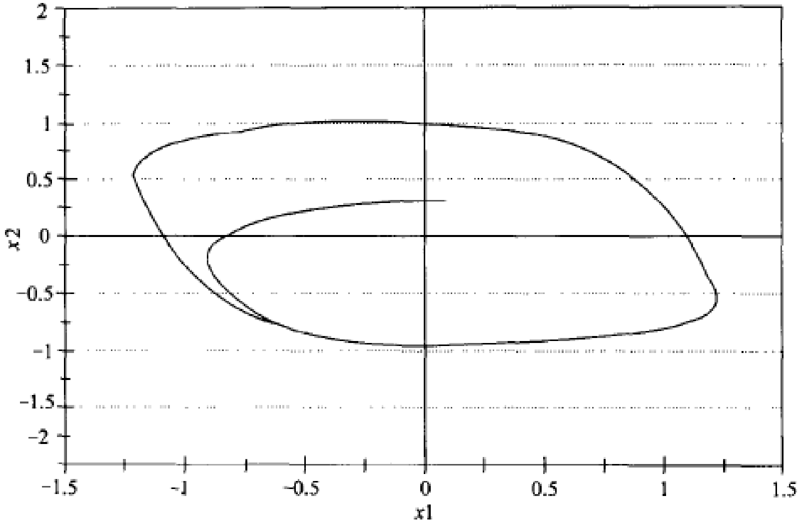


图 6-26 非线性 RLC 电路问题：当 $x_1(0)=0.1$，$x_2(0)=0.3$，$C=2.0$ 时，电压 x_2 随电流 x_1 变化的图

5. 习题

重新考虑例题 6.1 战争问题．对这个问题我们考虑天气对战争的影响．坏天气和糟糕的能见度会降低双方直接交火武器的效率．间接交火武器的效率相对而言不太受天气的影响．我们可以在模型中表达坏天气的影响如下．记 w 为坏天气条件导致的武器效率的下降，用

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= -w\lambda(0.05)x_2 - \lambda(0.005)x_1x_2 \\ \Delta x_2 &= -w0.05x_1 - 0.005x_1x_2.\end{aligned} \tag{20}$$

代替动态系统(3)．这里参数 $0\leqslant w\leqslant 1$ 表示天气条件的变化范围，$w=1$ 表示最好的天气，$w=0$ 表示最糟糕的天气．

(a)运用计算机实现图 6-2 的算法模拟离散时间动态系统(20)，取 $\lambda=3$．假设不利的天气引起双方武器效率降低 75%($w=0.25$)．谁将赢得这场战斗，且战斗将进行多长时间？胜利的一方还剩下多少队伍？

(b)对 $w=0.1$，0.2，0.5，0.75 和 0.9 各种情况重复上面的分析，且将结果列表．回答(a)中提出的问题．

(c)哪一方从不利的天气条件中受益？如果你是蓝军指挥官，你希望红军在晴天还是雨天进攻？