吉林大学计算机科学与技术学院
College of Computer Science and Technology , Jilin University

Machine Learning Lab
College of Computer Science and Technology
Jilin University

数学建模
第三章 最优化计算方法

机器学习研究室

时小虎 张禹

目录

1. 五步方法

① Ask the question.

② Select the modeling approach.

③ Formulate the model.

④ Solve the model.

⑤ Answer the question.

① 提出问题

② 选择建模方法

③ 推导模型的数学表达式

④ 求解模型

⑤ 回答问题

第1步，提出问题

① Make a list of all the variables in the problem, including appropriate units.

② Be careful not to confuse variables and constants.

③ State any assumptions you are making about these variables, including equations and inequalities.

④ Check units to make sure that your assumptions make sense.

⑤ State the objective of the problem in precise mathematical terms.

① 列出问题中涉及的变量，包括适当的单位.

② 注意不要混淆变量和常量.

③ 列出你对变量所做的全部假设，包括等式和不等式.

④ 检查单位从而保证你的假设有意义.

⑤ 用准确的数学术语给出问题的目标.

第2步，选择建模方法

① Choose a general solution procedure to be followed in solving this problem.

② Generally speaking, success in this step requires experience, skill, and familiarity with the relevant literature.

③ In this book we will usually specify the modeling approach to be used.

① 选择解决问题的一个一般的求解方法.

② 一般地，这一步的成功需要经验、技巧和熟悉相关文献.

③ 在授课中，我们通常会给定要用的建模方法.

第3步，推导模型的数学表达式

① Restate the question posed in step 1 in the terms of the modeling approach specified in step 2.

② You may need to relabel some of the variables specified in step 1 in order to agree with the notation used in step 2.

③ Note any additional assumptions made in order to fit the problem described.

① 将第一步中得到的问题重新表达成第二步选定的建模方法所需要的形式.

② 你可能需要将第一步中的一些变量名改成与第二步所用的记号一致.

③ 记下任何补充假设，这些假设是为了使第一步中描述的问题与第二步中选定的数学结构相适应而做出的.

第4步，求解模型

① Apply the general solution procedure specified in step 2 to the specific problem formulated in step 3.

② Be careful in your mathematics. Check your work for math errors. Does your answer make sense?

③ Use appropriate technology. Computer algebra systems, graphics, and numerical software will increase the range.

① 将第二步中所选的方法应用于第三步得到的表达式.

② 注意你的数学推导，检查是否有错误，你的答案是否有意义.

③ 采用适当的技术.计算机代数系统、图形工具、数值计算的软件等都能扩大你能解决问题的范围，并能减少计算错误.

第5步，回答问题

① Rephrase the results of step 4 in nontechnical terms.

② Avoid mathematical symbols and jargon.

③ Anyone who can understand the statement of the question as it was presented to you should be able to understand your answer.

① 用非技术性的语言将第四步的结果重新表述.

② 避免数学符号和术语.

③ 能理解最初提出的问题的人就应该能理解你给出的解答.

2. 单变量最优化

一头猪重200磅，每天增重5磅，饲养每天需花费45美分。猪的市场价格为每磅65美分，但每天下降1美分，求出售猪的最佳时间。[@meerschaert2005]

猪的增长率是常数吗？更接近实际的假设是猪的增长率正比于体重，即

$$\frac{dw}{dt} = cw$$

根据$w = 200$磅时，$dw/dt = 5$，可求出$c = 0.025$. 可得到一个简单的微分方程

$$\frac{dw}{dt} = 0.025w \quad w(0) = 200$$

分离变量，解得：

$$w = 200e^{0.025t}$$

2. 单变量最优化

第一步提出问题:

Variables (符号化问题描述):

符号	意义
t	time (days)
w	weight of pig (lbs)
p	price for pigs ($/lb)
C	cost of keeping pig t days ($)
R	revenue obtained by selling pig ($)
P	profit from sale of pig ($)

Assumptions（基本假设）：

$$\boxed{w = 200e^{0.025t}}$$
$$p = 0.65 - 0.01t$$
$$C = 0.45t$$
$$R = p \cdot w$$
$$P = R - C$$
$$t \geq 0$$

Objective（目标函数）：

Maximize $\boldsymbol{P}$

2. 单变量最优化

第二步选择建模方法：

给定定义在实轴的子集S上的实值函数$y=f(x)$. 设f在S的某一内点x是可微的. 若f在x达到极大或者极小，则$f'(x)=0$. 据此，我们可以在求极大或者极小点时不考虑那些$x\in S$中$f'(x)\neq 0$的内点. 只要$f'(x)=0$的点不太多，这个方法就很有效.

本节主要探究实现此求解的一般方法

2. 单变量最优化

第三步推导模型公式：

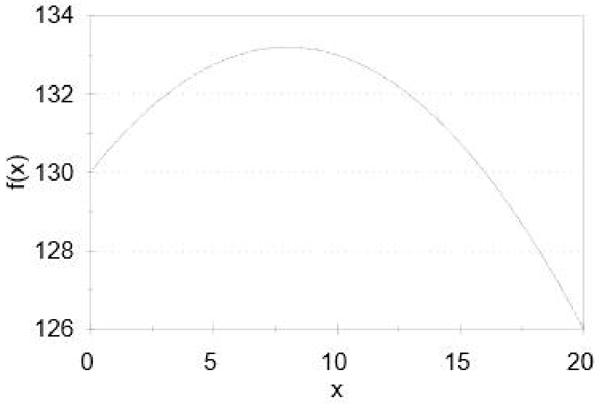
$$P = R - C = p \cdot w - 0.45t = \left(0.65 - 0.01t\right)\left(200e^{0.025t}\right) - 0.45t$$

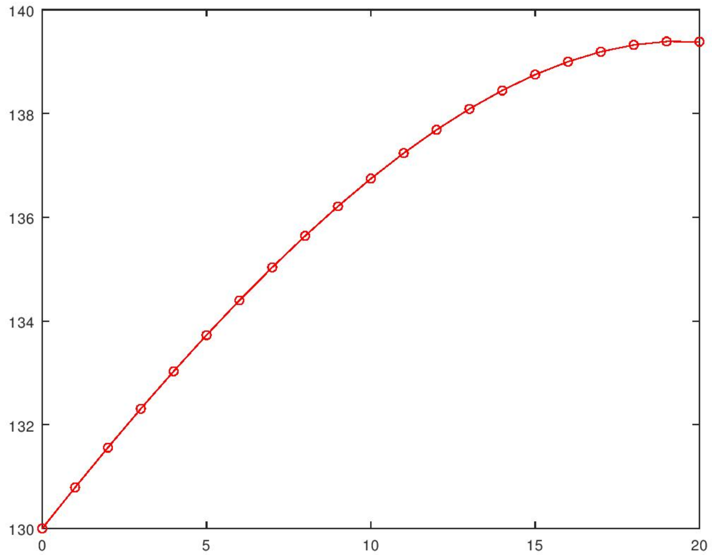
$$y = f(x) = \left(0.65 - 0.01x\right)\left(200e^{0.025x}\right) - 0.45x$$

$$S = \left\{x : x \geq 0\right\}$$

2. 单变量最优化

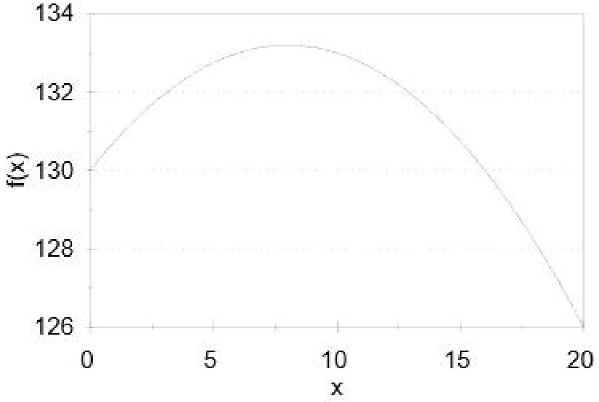
第四步求解模型：

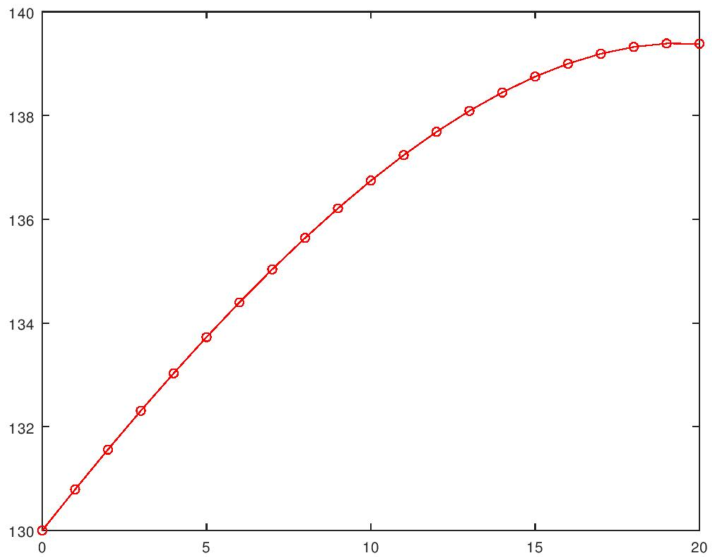


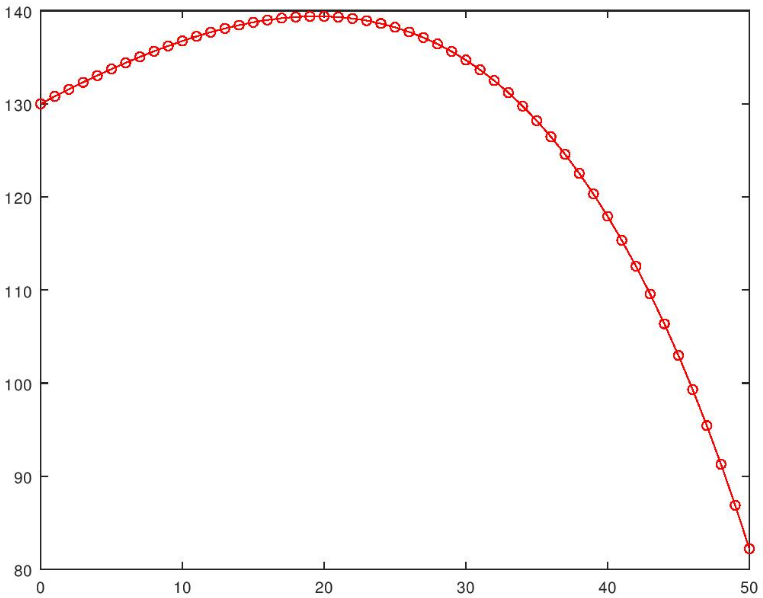


2. 单变量最优化

第四步求解模型：





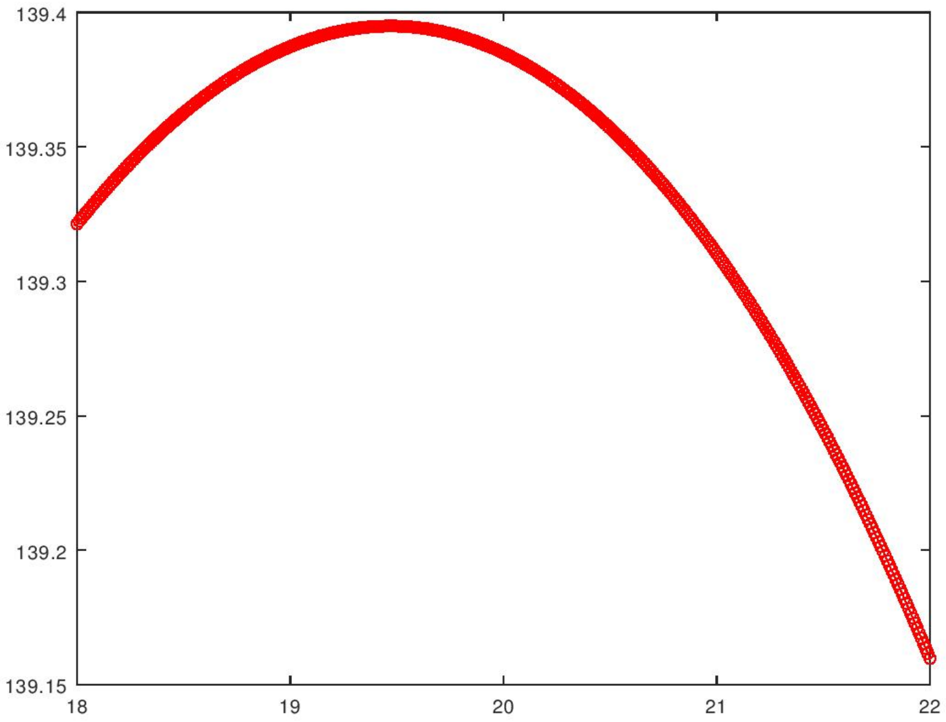



```
function y=nl_weight(t)
  y = 200*(0.65-0.01*t).*exp(0.025*t)-0.45*t;
endfunction

clear
clc
x = 0:1:50;
plot(x,nl_weight(x),'ro-')
```

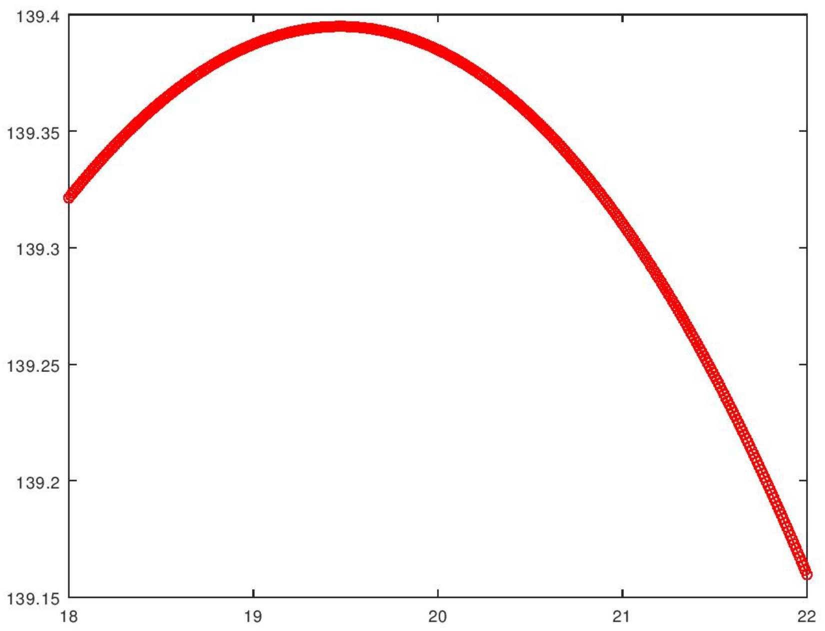
2. 单变量最优化

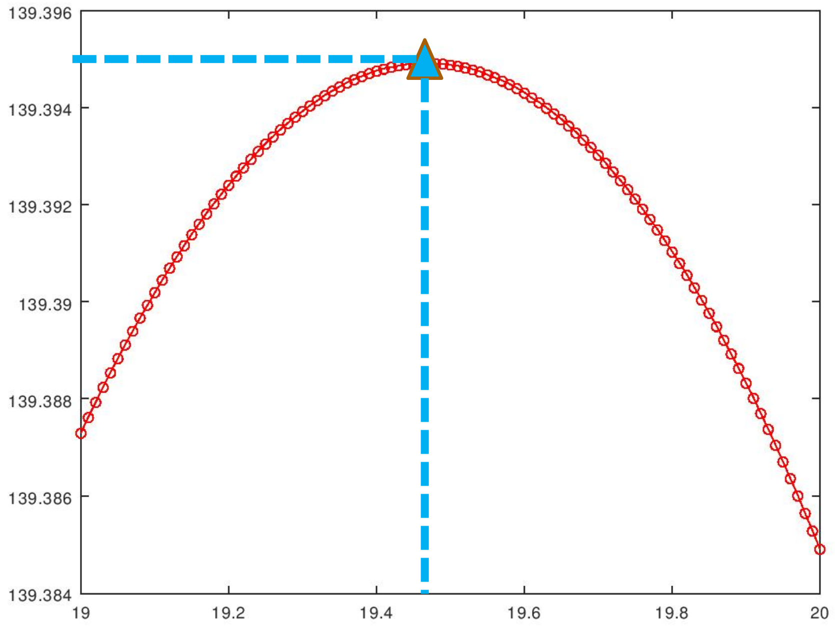
第四步求解模型：



2. 单变量最优化

第四步求解模型：





$x = 19.5$

$y = f(x) = 139.395$

2. 单变量最优化

第五步回答问题：

考虑到小猪的生长率还在增加，建议等等**19**到**20**天再将猪卖出，这样会得到将近**140**美元的净收益。

2. 单变量最优化

灵敏性分析：

讨论最优点坐标和最优值对于$c = 0.025$的灵敏性。一种方法是对于不同的c重复前面的图像分析的工作。繁琐！一般方法：

$$P = R - C = p \cdot w - 0.45t = (0.65 - 0.01t)(200e^{ct}) - 0.45t$$

$$y = f(x) = (0.65 - 0.01x)(200e^{cx}) - 0.45x$$

$$S = \{x : x \geq 0\}$$

2. 单变量最优化

灵敏性分析：

$$f'(x) = 200ce^{cx}\left(0.65 - 0.01x\right) - 2e^{cx} - 0.45$$

求极值

$$200ce^{cx}\left(0.65 - 0.01x\right) - 2e^{cx} - 0.45 = 0$$

$$S = \left\{x : x \geq 0\right\}$$

2. 单变量最优化

Newton法：

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_k)}{n!}(x - x_k)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_k)^{n+1}$$

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

2. 单变量最优化

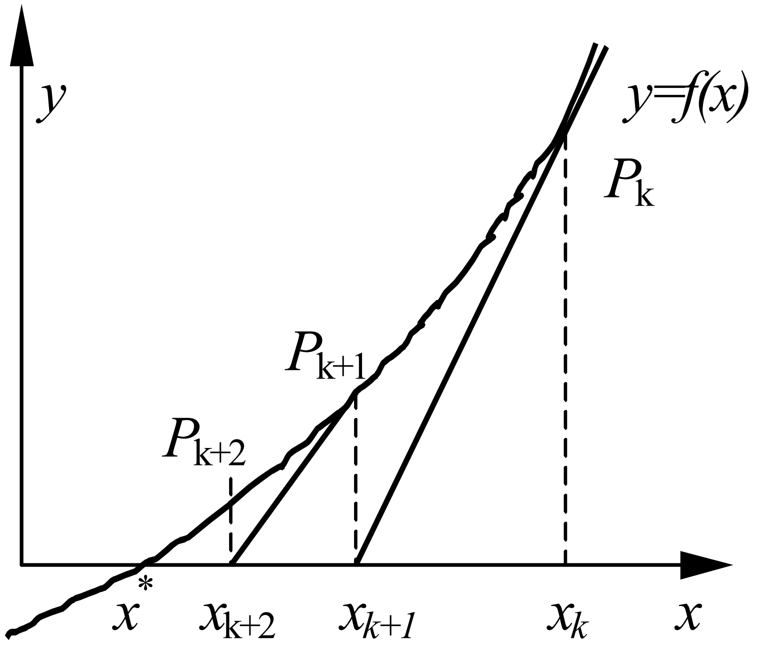
方程$f(x)=0$可以近似地表示成 $f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$

这是一个线性方程，其根为

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

记根为x_{k+1}，则有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k=0,1,\ldots$$



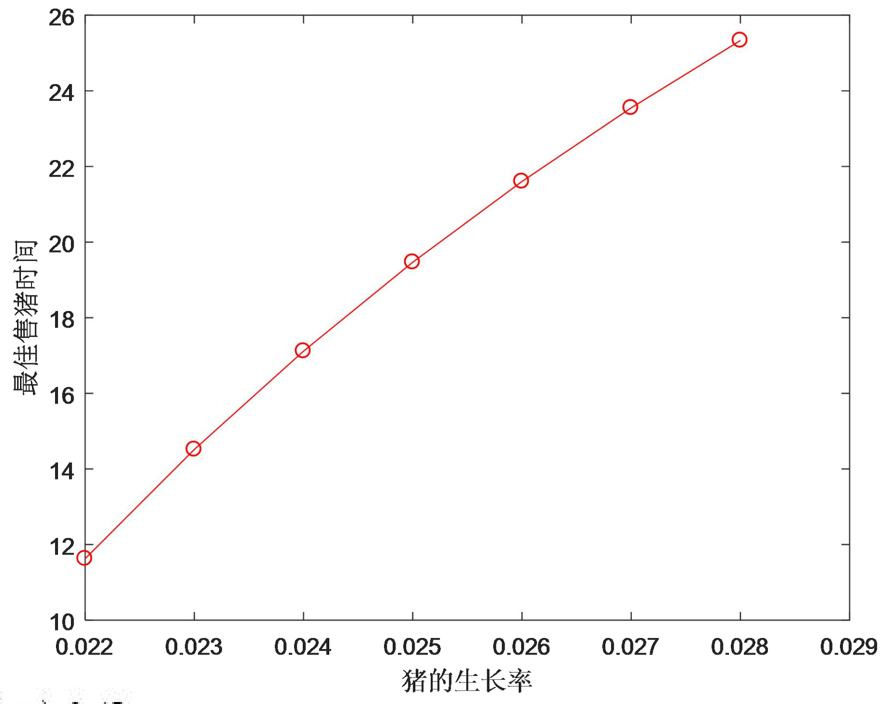
称上式为求方程$f(x)=0$根的Newton**迭代法**，也称为**切线法**。

2. 单变量最优化

Newton法：

```
function [x_star,index,it] = Newton(fun,x,ep,it_max)
%求解非线性方程的牛顿法%第一个分量是函数值，第二个分量是导数值
% x为初始点
% ep为精度,当 | x(k)-x(k-1) |<ep时，终止计算,缺省值为1e-5
% it_max为最大迭代次数,缺省值为100% x_star为当迭代成功时，输出方程的根
%  当迭代失败，输出最后的迭代值% index为指标变量，当index=1时，表明迭代成功
% 当index=0时，表明迭代失败（迭代次数>=it_max）
% it为迭代次数
if nargin<4 it_max=100;end
if nargin<3 ep=1e-5;end
index=0;k=1;
syms t
F = sym(fun);
DF=diff(F,t);
df = inline(DF);
while k<it_max
x1=x;
x=x-fun(x)./df(x);
if abs(x-x1)<ep
       index=1;break;
end
k=k+1;
end
x_star=x;it=k;
```

```
clear;
clc
N=7;
x_s=zeros(N,1);
index=zeros(N,1);
for i=1:N
    c=0.022+0.001*(i-1);
    profit=@(t)200*c*exp(c*t)*(0.65-0.01*t)-2*exp(c*t)-0.45;
    [x_s(i),index(i),it]=Newton(profit,19.5);
end
x=0.022:0.001:0.028;
plot(x,x_s,'ro-');
xlabel('猪的生长率');
ylabel('最佳售猪时间');
```



2. 单变量最优化

Newton法：

取c = 0.02525 (增加1%)，可求得 x = 20.021136，增加了2.84%

即 S(x, c) =2.84。根据 g = 200 c，容易说明

$$S(x, g) = S(x, c) = 2.84$$

若令h为猪的初始重量，由 h = 5/c，易知

$$S(x, h) = -S(x, c) = -2.84$$

3. 多变量最优化

一个城郊的社区计划更新他们的消防站。原来的消防站设置在历史的市中心。城市规划人员要将新的消防站设置得更为科学合理。对响应时间的统计分析给出：对离救火站r英里打来的求救电话，需要的响应时间为 $3.2+1.7r^{0.91}$分钟。下图给出了从消防官员处得到的从城区不同区域打来的紧急求救电话的数量。求新的消防站的最佳位置。

3	0	1	4	2	1
2	1	1	2	3	2
5	3	3	0	1	2
8	5	2	1	0	0
10	6	3	1	3	1
0	2	3	1	1	1

3. 多变量最优化

第一步提出问题:

Variables (符号化问题描述):

x: 消防站横坐标位置（英里）
y: 消防站纵坐标位置（英里）
K: 位置矩阵，K(i,j)表示(i,j)区域位置（英里）
A:呼叫次数矩阵，A(i,j)表示(i,j)区域呼叫次数（次）
f(i,j): (i,j)区域响应时间（分钟）
f_sum:整个城区的响应时间（分钟）

Object (目标):

min f_sum

Assumptions (基本假设):

$f(i,j) = 3.2+1.7*((i-x)^2+(j-y)^2)^{0.455}$

f_sum = Sum (f(i,j)*A(i,j))

第二步选择模型:

多变量最优化，求极值点

3. 多变量最优化

第三步推导数学公式：

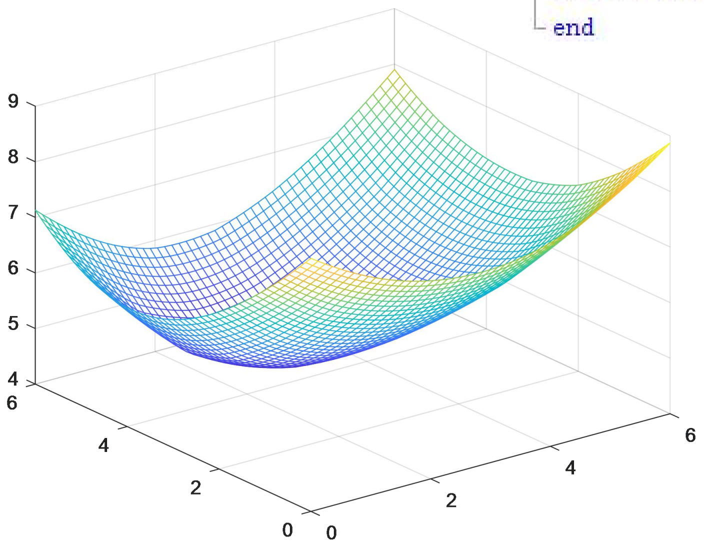
$f(i,j) = 3.2+1.7*((i-x)^2+(j-y)^2)^{0.455}$

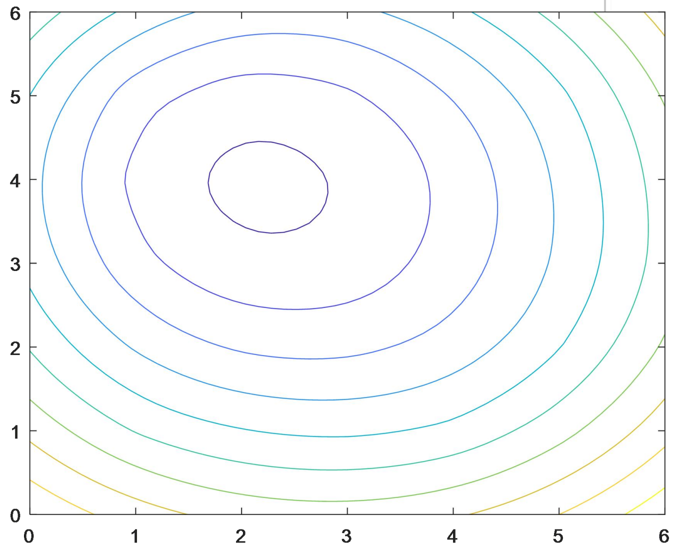
f_sum = Sum (f(i,j)*A(i,j))

第四步求解模型：

```
function y = sfs(x_fs,y_fs)
% Case 3.2  Site of Fire Station
% x_fs: fire station x; y_fs: fire station y
% y: mean value of correspondence time
DX=6;
DY=6;
Dis=zeros(DX,DY);
Time=zeros(DX,DY);
for i=1:DX
    for j=1:DY
        Dis(i,j)=(i-x_fs)^2+(j-y_fs)^2;
    end
end
A=[3,0,1,4,2,1;2,1,1,2,3,2;5,3,3,0,1,2;8,5,2,1,0,0;10,6,3,1,3,1;0,2,3,1,1,1];
sum_num=sum(sum(A));
Time=3.2+1.7*(Dis.^0.455).*A;
y=mean(mean(Time));
end
```

```
clear;
clc;
num=50;
x=0:6/50:6;
y=0:6/50:6;
z=zeros(num+1,num+1);
for i=0:num
for j=0:num
    z(i+1,j+1)=sfs(6*i/num,6*j/num);
end
end
mesh(x,y,z);
```





3. 多变量最优化

第三步推导数学公式：

f(i,j) = 3.2+1.7*((i-x) ^{2}+(j-y)^2)$^{0.455}$

f_sum = Sum (f(i,j)*A(i,j))

第四步求解模型：

```
算法：随机搜索方法
变量：a=x 的下限
      b=x 的上限
      c=y 的下限
      d=y 的上限
      N=迭代次数
      xmin=最小点 x 坐标的近似解
      ymin=最小点 y 坐标的近似解
      zmin=最小点 F(x, y)值的近似解
输入：a, b, c, d, N
过程：开始
      x←Random([a, b])
      y←Random([c, d])
      z min←F(x, y)
      对n=1 到 N 循环
        开始
        x←Random([a, b])
        y←Random([c, d])
        z←F(x, y)
        若 z<z min, 则
        x min←x
        y min←y
        z min←z
        结束
        结束
输出：x min, y min, z min
```

图 3-10　随机搜索方法的伪代码

3. 多变量最优化

例 3.3 一家草坪家具的生产厂生产两种草坪椅. 一种是木架的，一种是铝管架的. 木架椅的生产价格为每把 18 美元，铝管椅为每把 10 美元. 在产品出售的市场上，可以售出的数量依赖于价格. 据估计，若每天欲售出 x 把木架椅，y 把铝管椅，木架椅的出售价格不能超过 $10+31x^{-0.5}+1.3y^{-0.2}$ 美元/把，铝管椅的出售价格不能超过 $5+15y^{-0.4}+0.8x^{-0.08}$ 美元/把. 求最优的生产量.

3. 多变量最优化

例 3.3 一家草坪家具的生产厂生产两种草坪椅. 一种是木架的，一种是铝管架的. 木架椅的生产价格为每把 18 美元，铝管椅为每把 10 美元. 在产品出售的市场上，可以售出的数量依赖于价格. 据估计，若每天欲售出 x 把木架椅，y 把铝管椅，木架椅的出售价格不能超过 $10+31x^{-0.5}+1.3y^{-0.2}$ 美元/把，铝管椅的出售价格不能超过 $5+15y^{-0.4}+0.8x^{-0.08}$ 美元/把. 求最优的生产量.

目标为在生产量的可行域 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$ 上对利润函数 $z=f(x,y)$(美元/天)求最大值. 这里

$$\begin{aligned} z &= x(10+31x^{-0.5}+1.3y^{-0.2})-18x \\ &\quad + y(5+15y^{-0.4}+0.8x^{-0.08})-10y. \end{aligned} \tag{17}$$

3. 多变量最优化

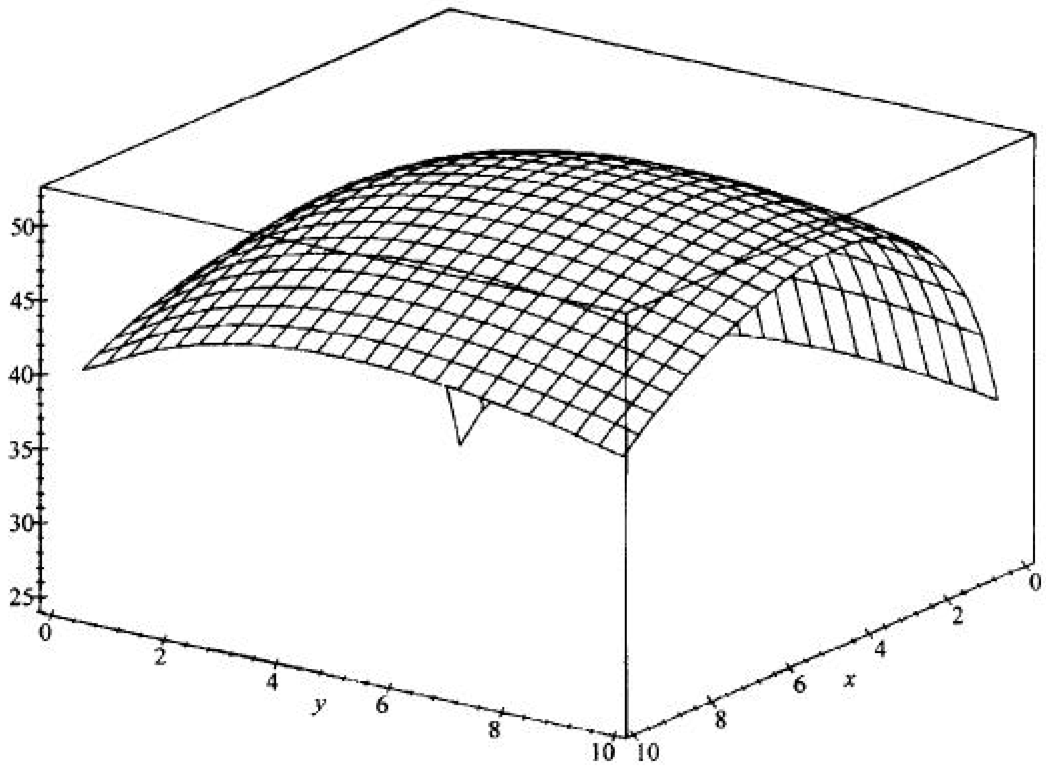


图 3-11 草坪椅问题中利润 $z=f(x,y)$关于每天的木架椅产量 x，铝管椅产量 y 的三维图像
$f(x,y)=x(10+31x^{-0.5}+1.3y^{-0.2})-18x+y(5+15y^{-0.4}+0.8x^{-0.08})-10y$

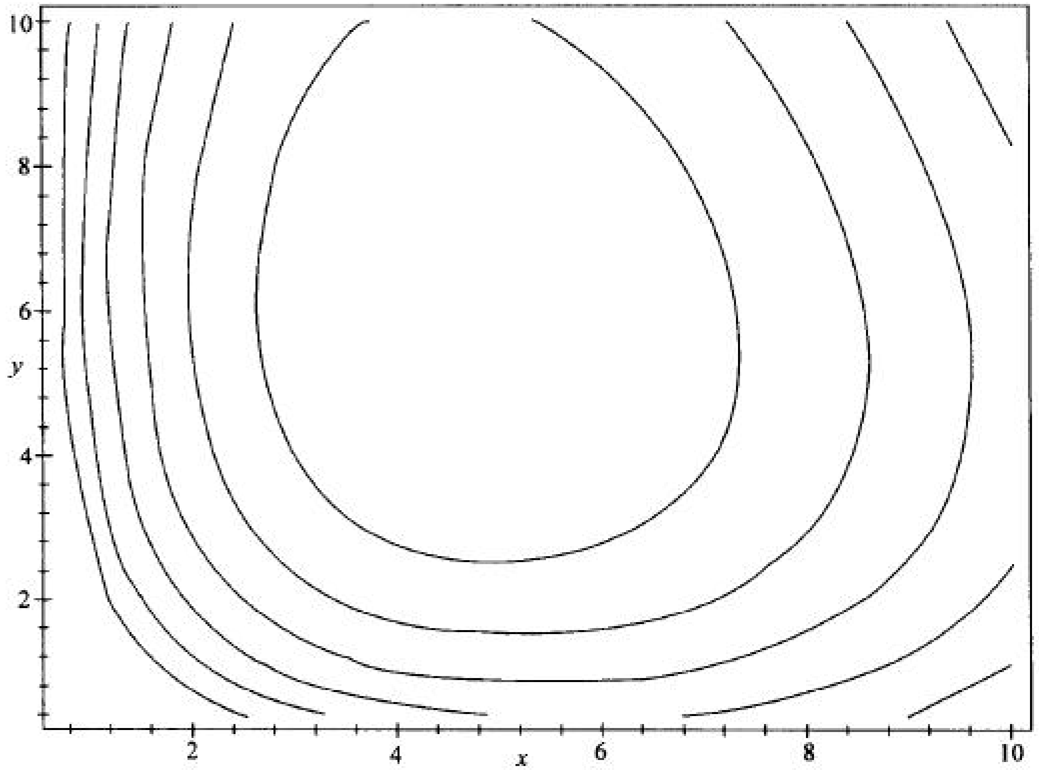


图 3-12 草坪椅问题中利润 $z=f(x,y)$关于每天的木架椅产量 x，铝管椅产量 y 的等值线图
$f(x,y)=x(10+31x^{-0.5}+1.3y^{-0.2})-18x+y(5+15y^{-0.4}+0.8x^{-0.08})-10y$

3. 多变量最优化

图 3-11 给出了 f 的图像. 图像显示 f 有一个惟一的达极大值的内点，此点满足 $\nabla f=0$. 图 3-12 画出了 f 的水平集图. 由图可见，最大值出现在 $x=5$，$y=6$ 附近. 我们计算梯度 $\nabla f(x, y)=(\partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 15.5x^{-0.5}-8+1.3y^{-0.2}-0.064yx^{-1.08}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 9y^{-0.4}-5+0.8x^{-0.08}-0.26xy^{-1.2}.\end{aligned} \tag{18}$$

在区域 $0\leqslant x\leqslant 10$，$0\leqslant y\leqslant 10$ 上应用 $N=1\ 000$ 个点的随机搜索算法，得到生产量为每天生产 $x=4.8$，$y=5.9$ 把椅子时可达每天 52.06 美元的最大利润. 为得到最优值点的一个更精确的数值近似解，我们用多变量函数的牛顿法来求解梯度方程 $\nabla f=0$. 图 3-13 给出了两个变量的牛顿法算法.

```
算法：两个变量的牛顿法
变量：x(n)=n 次迭代后 x 坐标的近似解
      y(n)=n 次迭代后 y 坐标的近似解
      N=迭代次数
输入：x(0)，y(0)，N
过程：开始
      对n=1 到 N 循环
        开始
        q←∂F/∂x(x(n-1)，y(n-1))
        r←∂F/∂y(x(n-1)，y(n-1))
        s←∂G/∂x(x(n-1)，y(n-1))
        t←∂G/∂y(x(n-1)，y(n-1))
        u←-F(x(n-1)，y(n-1))
        v←-G(x(n-1)，y(n-1))
        D←qt-rs
        x(n)←x(n-1)+(ut-vr)/D
        y(n)←y(n-1)+(qv-su)/D
        结束
      结束
输出：x(N)，y(N)
```

图 3-13 两个变量的牛顿法的伪代码

3. 多变量最优化

考虑非线性方程组 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$

$$\begin{cases} f_1(x)\approx f_1(x^{(k)})+(x_1-x_1^{(k)})\dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1}+\cdots+(x_n-x_n^{(k)})\dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n}=0 \\ f_2(x)\approx f_2(x^{(k)})+(x_1-x_1^{(k)})\dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_1}+\cdots+(x_n-x_n^{(k)})\dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_n}=0 \\ \vdots \\ f_n(x)\approx f_n(x^{(k)})+(x_1-x_1^{(k)})\dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_1}+\cdots+(x_n-x_n^{(k)})\dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_n}=0 \end{cases}$$

$$F(x^{(k)})+F'(x^{(k)})(x^{(k+1)}-x^{(k)})=0$$

$$F'(x^{(k)})=\begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \cdots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(x) & \partial_2 f_n(x) & \cdots & \partial_n f_n(x) \end{bmatrix}_{x=x^{(k)}}$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x^{(k)}) \\ f_2(x^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(x^{(k)}) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \cdots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(x) & \partial_2 f_n(x) & \cdots & \partial_n f_n(x) \end{bmatrix}_{x=x^{(k)}}\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)}-x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}-x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)}-x_n^{(k)} \end{bmatrix}=0$$

如果 $F'(x^{(k)})$ 可逆，则得Newton法的迭代公式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-[F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})\quad k=0,1,\cdots$$

3. 多变量最优化

在我们的问题中，有

$$F(x,y)=15.5x^{-0.5}-8+1.3y^{-0.2}-0.064yx^{-1.08}$$
$$G(x,y)=9y^{-0.4}-5+0.8x^{-0.08}-0.26xy^{-1.2}, \tag{20}$$

从而可以计算出

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0.069\ 12yx^{-2.08}-7.75x^{-1.5}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=-0.064x^{-1.08}-0.26y^{-1.2}$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}=-0.064x^{-1.08}-0.26y^{-1.2} \tag{21}$$
$$\frac{\partial G}{\partial y}=0.312xy^{-2.2}-3.6y^{-1.4}.$$

取 $x(0)=5$，$y(0)=5$，用两个变量的牛顿法的计算机程序进行 $N=10$ 次迭代求解，得到

$$x=4.689\ 59$$
$$y=5.851\ 99 \tag{22}$$

作为所求根的近似值. 为保证解的可靠性，再取 $N=15$ 计算一次. 将结果代入到(17)式中，得到 $z=52.072\ 7$. 因此，草坪椅问题的最优解为：每天生产 4.69 把木架椅、5.85 把铝管椅，可得到每天 52.07 美元的利润.

ftp://ftp.synlab.org.cn

3. 多变量最优化

有约束的多变量最优化问题通常总是难于求解的．人们研究了许多计算方法来处理一些特殊类型的多变量最优化问题，但仍缺乏较好的一般性的方法，即使是非常复杂的一般性方法也不存在．讨论这类问题的新的计算方法的研究领域称为非线性规划，这是个非常活跃的领域．

最简单的一类有约束多变量最优化问题的目标函数和约束函数都是线性的，对这类问题的计算方法的研究称为线性规划．线性规划的软件包非常普及，并且经常地被应用于制造业、投资、农业、运输和政府机构．典型的大规模问题包括数千个决策变量和数千个约束．在许多有资料可查的事例中，基于线性规划模型的运筹分析节约了数百万美元的资金．详细的资料可以在运筹学和管理学的文献中找到．

4. 线性规划

一个家庭农场有625英亩的土地可用来种植农作物。这个家庭可考虑种植的农作物有玉米、小麦、燕麦。预计有1000英亩-英尺的灌溉用水，农场工人每周可以投入的工作时间为300小时。其他数据如下表。为获得最大收益，每种作物应各种植多少？[@meerschaert2005]

条件（每英亩）	作物		
	玉米	小麦	燕麦
灌溉用水（英亩-英尺）	3.0	1.0	1.5
劳力（人-小时/周）	0.8	0.2	0.3
收益（美元）	400	200	250

4. 线性规划

第一步提出问题：

Variables (符号化问题描述):

符号	意义
x_1	acres of corn planted
x_2	acres of wheat planted
x_3	acres of oats planted
w	irrigation required (acre-ft)
l	labor required (person-hrs/wk)
t	total acreage planted
y	total yield ($)

Assumptions（基本假设）：

$$
\begin{aligned}
w &= 3.0x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3 \\
l &= 0.8x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \\
t &= x_1 + x_2 + x_3 \\
y &= 400x_1 + 200x_2 + 250x_3 \\
w &\leq 1,000 \\
l &\leq 300 \\
t &\leq 625 \\
x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Objective（目标函数）：

$$\text{Maximize } y$$

4. 线性规划

第二步选择模型：

- 每一个线性规划问题都用一组决策变量(x_1, x_2, ..., x_n)表示某一方案，这组决策变量的值代表一个具体方案。一般这些变量的取值是非负且连续的；
- 都有关于各种资源和资源使用情况的技术数据，创造新价值的数据；
- 存在可以量化的约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示；
- 都有一个达到某一目标的要求，可用决策变量的线性函数(称为目标函数)来表示。按问题的要求不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

4. 线性规划

第三步推导数学表达式：

$$
\begin{aligned}
3.0x_1 + 1.0\,x_2 + 1.5\,x_3 &\le 1,000 \\
0.8x_1 + 0.2\,x_2 + 0.3\,x_3 &\le 300 \\
x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &\le 625
\end{aligned}
$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

maximize the total yield, $y = 400x_1 + 200x_2 + 250x_3$.

4. 线性规划

某工厂在计划期内要安排生产I、 II两种产品，
已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的损耗，如表所示。

表1-1

	I	II	
设备	1	2	8台时
原材料A	4	0	16kg
原材料B	0	4	12kg

该工厂每生产一件产品 I 可获利2元，每生产一件产品 II 可获利3元，问应如何安排计划使该工厂获利最多？

4. 线性规划

用数学关系式描述这个问题

- 设 x_1, x_2分别表示计划生产 I, II产品的数量，称它们为决策变量。
- 生产x_1, x_2的数量多少，受资源拥有量的限制，这是约束条件。即$x_1 + 2x_2 \le 8; 4x_1 \le 16; 4x_2 \le 12$
- 生产的产品不能是负值，即$x_1, x_2 \ge 0$

4. 线性规划

得到本问题的数学模型为:

目标函数 $max\ z = 2x_1 + 3x_2$

$$
约束条件:\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}
$$

这就是一个最简单的线性规划模型。

4. 线性规划

线性规划模型的一般形式

目标函数

$$\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

约束条件

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \le (=,\ge)\, b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \le (=,\ge)\, b_2$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \le (=,\ge)\, b_m$$

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \ge 0$$

4. 线性规划

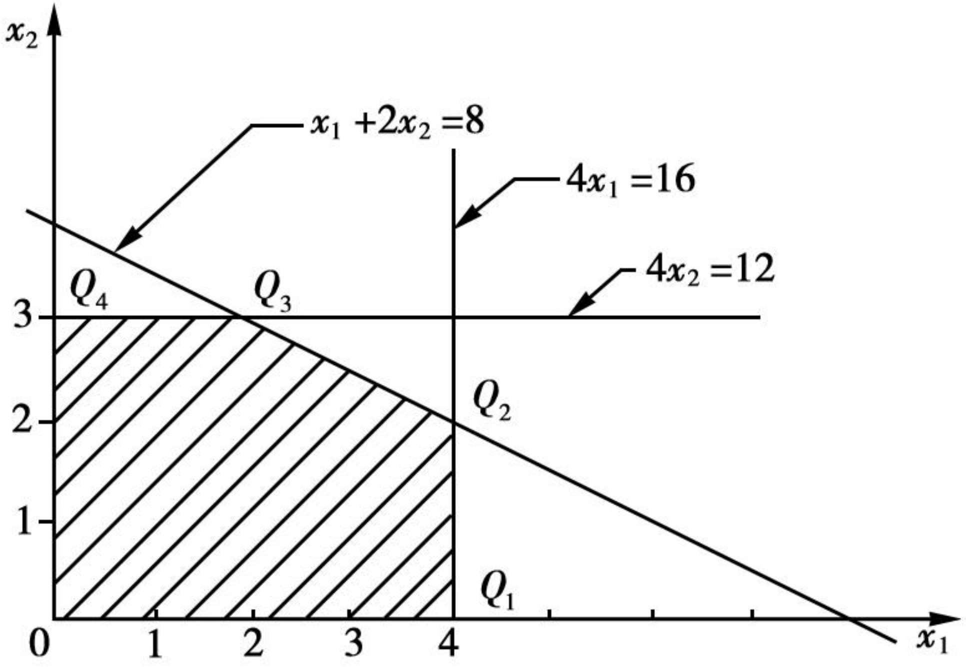
决策变量及各类系数之间的对应关系

		决策变量				资源
		x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
活动	1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
	2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
价值系数		c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

4. 线性规划

图解法

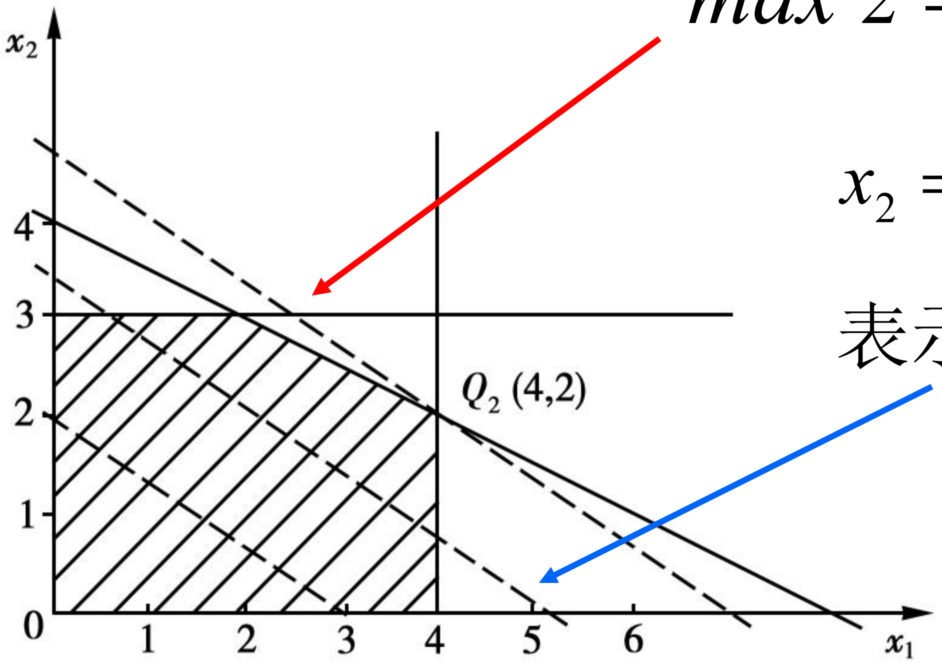
例子是一个二维线性规划问题，因而可用作图法直观地进行求解。



$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. 线性规划



$$max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z}{3}$$

表示一簇平行线

目标值在（4，2）点，达到最大值14

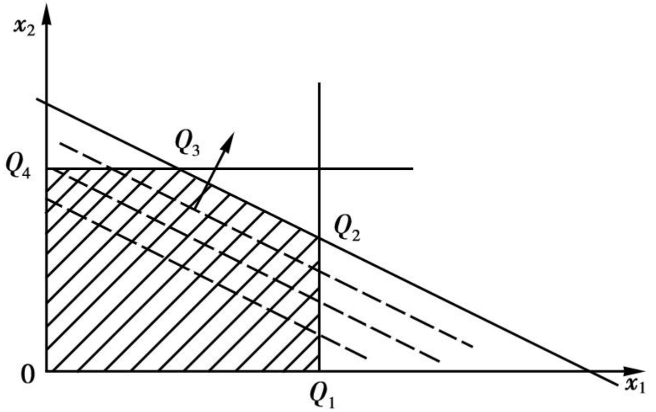
4. 线性规划

通过图解法，可观察到线性规划的解可能出现的几种情况：

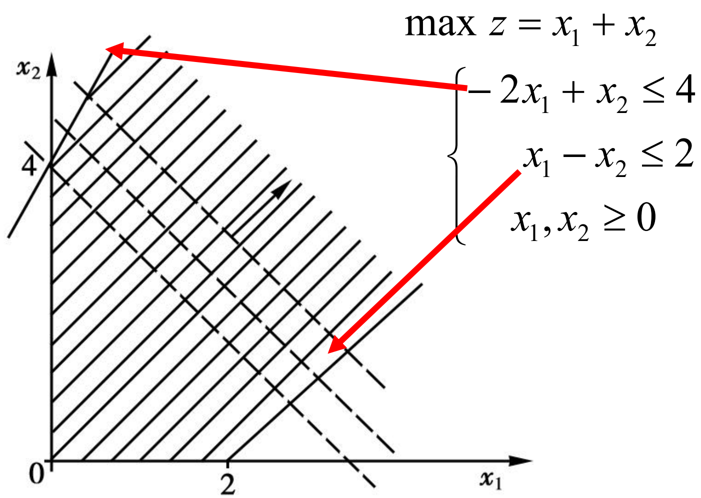
（1）无穷多最优解(多重最优解）。

（2）无界解，见图1-5-1。

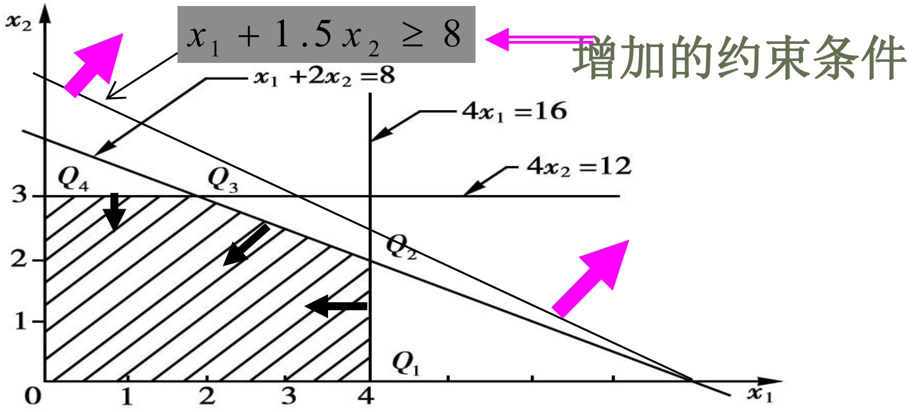
（3）无可行解，见图1-5-2。



无穷多最优解（多重最优解）



无界解



不存在可行域

4. 线性规划

思考：1）线性规划的可行域是一个什么形状？

2）最优解在什么位置获得？

结论： ——多边形，而且是“凸”的多边形

——在边界，而且是在某个顶点上获得

问题：性质2有何重要意义？

4. 线性规划

线性规划问题的标准形式

$$M_1: \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

4. 线性规划

用向量形式表示的标准形式线性规划

$$M_1'' : \max \quad z = CX$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n);$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; j = 1,2,\cdots n$$

4. 线性规划

用矩阵形式表示的标准形式线性规划

M_1'' :目标函数： $\max \quad z = CX$

约束条件： $\begin{cases} AX = b \\ X \ge 0 \end{cases}$

系数矩阵： $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (P_1, P_2, \cdots P_n)$

零向量： $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$； 资源向量： $\mathrm{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{pmatrix}$

决策变量向量： $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

4. 线性规划

如何将一般线性规划转化为标准形式的线性规划

（1）若要求目标函数实现极小化，即 $\min z = CX$。

这时只需将目标函数最小化变换为求目标函数最大化，

即令 $z' = -z$，

于是得到 $\max z' = -CX$

必须注意，尽管以上两个问题的最优解相同，但它们最优解的目标函数值却相差一个符号。

4. 线性规划

（2）约束方程为不等式

有两种情况：一种是约束方程为“≤”不等式，则可在“≤”不等式的左端加入非负松弛变量，把原“≤”不等式变为等式。

设约束条件为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$$

引进一个松弛变量s，把原不等式约束用两个约束来等价地替换

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s = b_i \\ s \ge 0 \end{cases}$$

4. 线性规划

另一种是约束方程为“≥”不等式，则可在“≥”不等式的左端减去一个非负剩余变量（也可称松弛变量），把原“≥”不等式变为等式。

设约束条件为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

引进一个剩余变量s，把原不等式约束用两个约束来等价地替换

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - s = b_i \\ s \geq 0 \end{cases}$$

4. 线性规划

（3）若存在取值无约束的变量 x_k

可以令 $x_k = x_k' - x_k''$，其中 $x_k' \geq 0$，。$x_k'' \geq 0$

即用两个非负变量之差来表示一个无符号限制的变量，当然x_k的符号取决于x_k'和 x_k''的相对大小。

（4）在标准形式中，要求约束条件的右端项b_i>0，否则等式两端乘以-1。

下面举例说明。

4. 线性规划

将前面例子的数学模型化为标准形式的线性规划。
数学模型在加入了松驰变量后变为

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad = 16 \\ \qquad 4x_2 \qquad\qquad + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

4. 线性规划

考虑LP的标准型

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1-4)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i=1,2,\cdots,m) & (1-5) \\ x_j \geq 0 (j=1,2,\cdots,n) & (1-6) \end{cases}$$

1　可行解

满足约束条件（1-5）、（1-6）式的解　$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

称为线性规划问题的可行解，其中使目标函数达到最大值

的可行解称为最优解。

4. 线性规划

2 基

设A是约束方程组的 $m \times n$ 维系数矩阵，其秩为m 。

B是 A 中m 阶非奇异子矩阵(|B|≠0)，则称B是线性规划问题的一个基，这就是说，矩阵B是由A中m个线性无关的列向量组成。为不失一般性,可设B是A中的前m列，即

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$$

称 $P_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为基向量，与基向量 P_j 相对应的变量 $X_j\ (j=1,2,\cdots,m)$ 称为基变量，否则称为非基变量。

4. 线性规划

把约束方程（1-5）式写成

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_mx_m = b - P_{m+1}x_{m+1} - \cdots - P_nx_n$$

令所有非基变量 $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$，得到

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_mx_m = b$$

因B可逆，该方程有唯一解 $X_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$

称 $\mathrm{X} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$为对应于基B的基解。

注：（1）对应于给定的基B，基解是唯一的。
（2）基解中非基变量取零值，非零分量的数目不超过m。
（3）基解一定满足等式约束，但不一定满足非负约束。

4. 线性规划

例 在下述线性规划问题 $\max z = 2x_1 + 3x_2$ 中列出全部的基并确定相应的基解。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad\quad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：将该线性规划问题化为标准形：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

系数矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$$

只要从A的列向量中找出3个线性无关的列向量就组成该线性规划问题的一个基。

4. 线性规划

令非基变量为零，求解线性方程组，就可找出全部基解

取A的第一、二、三列组成子矩阵$B_1 = (P_1, P_2, P_3)$,
易见 $|B_1| \neq 0$ ， 故B_1是该线性规划问题的一个基。

基变量为 x_1, x_2, x_3 ，非基变量 x_4, x_5 。

令非基变量$x_4 = x_5 = 0$，则约束方程变为

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 = 16 \\ 4x_2 = 12 \end{cases}$$

解得

$x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ x_3 = -2,\ X^{(1)} = (4, 3, -2, 0, 0)^T$

这里$X^{(1)}$不满足非负约束，故不是可行解。

4. 线性规划

类似地取A的第一、二、四列得到基 $B_2=(P_1,P_2,P_4)$，相应地基解

$$X^{(2)}=(2,3,0,8,0)^T$$

取A的第一、二、五列得到基 $B_3=(P_1,P_2,P_5)$，相应地基解

$$X^{(3)}=(4,2,0,0,4)^T$$

取A的第一、三、五列得到基 $B_4=(P_1,P_3,P_5)$，相应地基解

$$X^{(4)}=(4,0,8,0,12)^T$$

取A的第一、四、五列得到基 $B_5=(P_1,P_4,P_5)$相应地基解

$$X^{(5)}=(8,0,0,-16,12)^T$$

4. 线性规划

取A的第二、三、四列得到

基$B_6=(P_2,P_3,P_4)$，相应地基解 $X^{(6)}=(0,3,2,16,0)^T$。

取A的第二、四、五列得到

基$B_7=(P_2,P_4,P_5)$，相应地基解 $X^{(7)}=(0,4,0,16,-4)^T$。

取A的第三、四、五列得到

基 $B_8=(P_3,P_4,P_5)$，相应地基解$X^{(8)}=(0,0,8,16,12)^T$。

对于A的第一、三、四列组成的矩阵

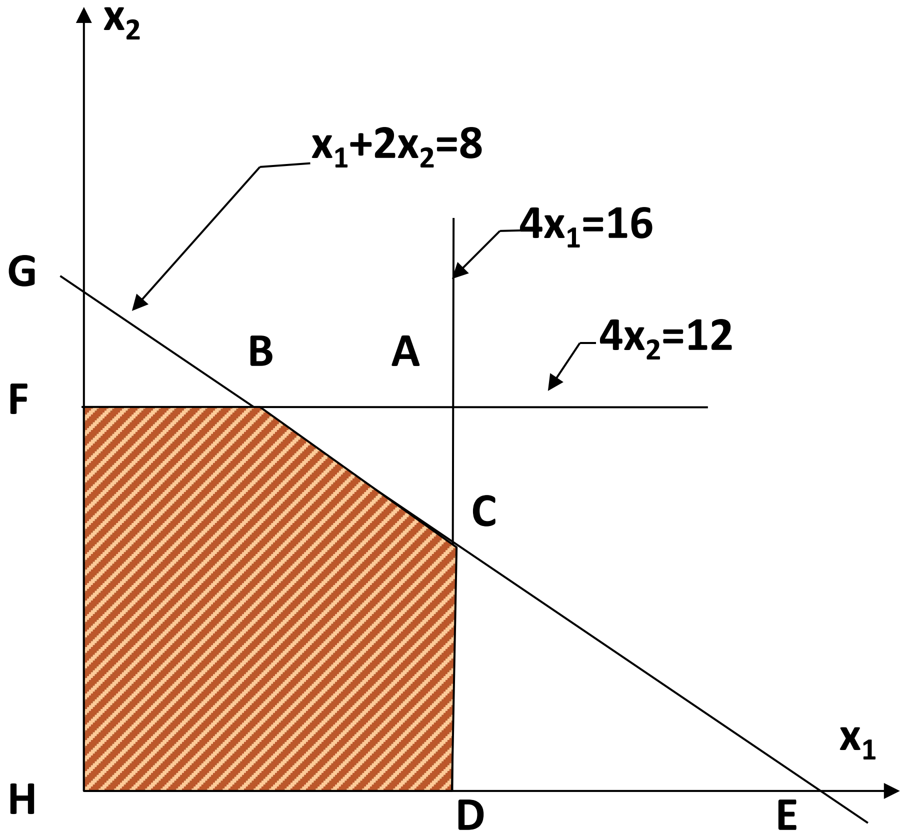
$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

易见$|B|=0$，故 P_1,P_3,P_4 不能作成一组基。

同理，P_2,P_3,P_5 也不能作成一组基。

4. 线性规划

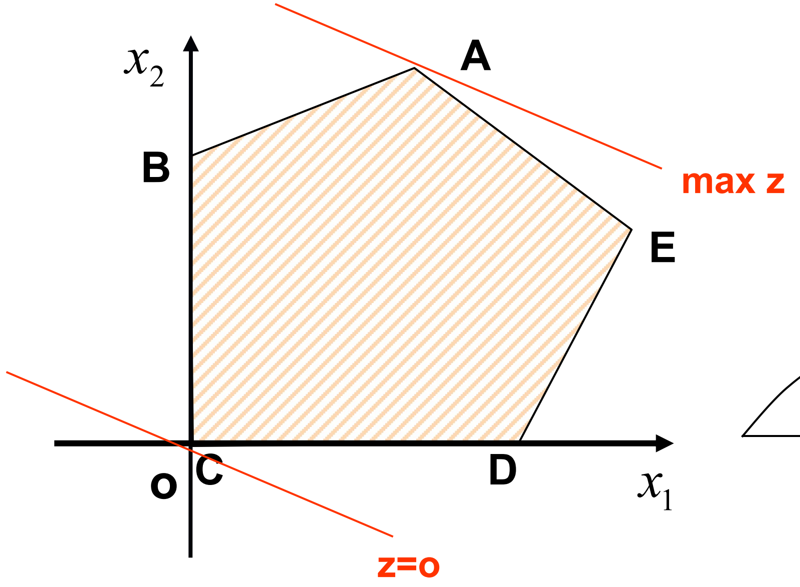
几何上，图中A、B、C、D、E、F、G、H对应$X^{(i)}$（i=1，2，⋯,8）



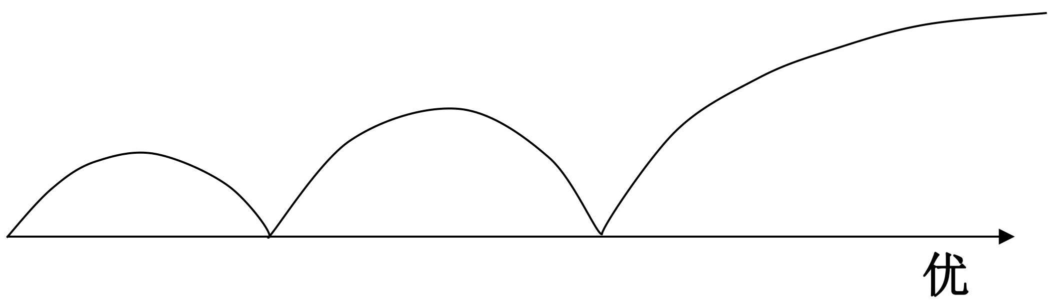
$$X^{(1)}=(4,3,-2,0,0)^T \rightarrow A(4,3)$$
$$X^{(2)}=(2,3,0,8,0)^T \rightarrow B(2,3)$$
$$X^{(3)}=(4,2,0,0,4)^T \rightarrow C(4,2)$$
$$X^{(4)}=(4,0,8,0,12)^T \rightarrow D(4,0)$$
$$X^{(5)}=(8,0,0,-16,12)^T \rightarrow E(8,0)$$
$$X^{(6)}=(0,3,2,16,0)^T \rightarrow F(0,3)$$
$$X^{(7)}=(0,4,0,16,-4)^T \rightarrow G(0,4)$$
$$X^{(8)}=(0,0,8,16,12)^T \rightarrow H(0,0)$$

4. 线性规划

单纯形法(Simplex Algorithm) 先求出一个初始基可行解并判断它是否最优，若不是最优，再换一个基可行解并判断，直到得出最优解或无最优解。它是一种逐步逼近最优解的迭代方法。



跨越式寻找最优解



4. 线性规划

例 试以前例来讨论如何用单纯形法求解。

解：已知本例的标准型为：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \qquad (1-11)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 8 \\ 4x_1 + \qquad\quad + x_4 \qquad &= 16 \\ 4x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 12 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots,5 & \end{aligned} \qquad (1-12)$$

4. 线性规划

约束条件(1-12)式的系数矩阵为

$$A=(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

可看到x_3,x_4,x_5的系数构成的列向量

$$P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ P_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

P_3,P_4,P_5是线性独立的，这些向量构成一个基B。

4. 线性规划

对应于B的变量x_3, x_4, x_5为基变量.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad &= 16 \\ 4x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 12 \end{aligned} \qquad (1-12)$$

从(1-12)式中可以得到（1-13）

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \end{cases} \qquad (1-13)$$

4. 线性规划

将(1-13)式代入目标函数(1-11)：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \qquad (1-11)$$

得到

$$z = 0 + 2x_1 + 3x_2 \qquad (1-14)$$

当令非基变量x_1=x_2=0，便得到z=0。这时得到一个基可行解$X^{(0)}$

$$X^{(0)}=(0,0,8,16,12)^T$$

本基可行解的经济含义是：工厂没有安排生产产品I、II，资源都没有被利用，所以工厂的利润为z=0。

4. 线性规划

$$z = 0 + 2x_1 + 3x_2 \qquad (1-14)$$

从分析目标函数的表达式(1-14)可以看到：

非基变量x_1, x_2(即没有安排生产产品I，II)的系数都是正数，因此将非基变量变换为基变量，目标函数的值就可能增大。从经济意义上讲，安排生产产品I或II，就可以使工厂的利润指标增加。所以只要在目标函数(1-14)的表达式中还存在有正系数的非基变量，这表示目标函数值还有增加的可能，就需要将非基变量与基变量进行对换。

一般选择正系数最大的那个非基变量x_2为换入变量，将它换到基变量中，同时还要确定基变量中哪一个换出来成为非基变量。

4. 线性规划

$$\begin{cases} x_3 = \ \ 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 \qquad\ - 4x_2 \end{cases} \qquad (1-13)$$

分析(1-13)式，当将x_2定为换入变量后，必须从x_3, x_4, x_5中确定一个换出变量，并保证其余的变量仍然非负，即$x_3, x_4, x_5 \geq 0$。

当x_1=0时，由(1-13)式得到

$$\begin{cases} x_3 = 8 - 2x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 \geq 0 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (1-15)$$

4. 线性规划

$$\begin{cases} x_3 = 8 - 2x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 \geq 0 \\ x_5 = 12 - 4x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (1-15)$$

从(1-15)式可看出，只有选择

x_2=min(8/2,-,12/4)=3

时，才能使(1-15)式成立。

因当x_2=3时，基变量x_5=0，这就决定用x_2去替换x_5。

以上数学描述说明，每生产一件产品II，需要用掉各种资源数为(2，0，4)。由这些资源中的薄弱环节，

就确定了产品II的产量。

这里就是由原材料B的数量确定了产品II的产量

x_2=12/4=3件。

4. 线性规划

- 为了求得以x_3, x_4, x_2为基变量的一个基可行解和进一步分析问题，需将(1-13)中x_2的位置与x_5的位置对换，得到

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_5 = 12 \quad\quad - 4x_2 \end{cases} \qquad (1-13)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_3 + 2x_2 = 8 - x_1 & (1) \\ x_4 = 16 - 4x_1 & (2) \\ 4x_2 = 12 \quad\quad - x_5 & (3) \end{cases} \qquad (1-16)$$

4. 线性规划

高斯消去法

- 将(1-16)式中x_2的系数列向量变换为单位列向量。其运算步骤是：
- ③′=③/4；①′=①－2×③′;②′=②,
- 并将结果仍按原顺序排列有：

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 + \frac{1}{2}x_5 & (1)' \\ x_4 = 16 - 4x_1 & (2)' \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 & (3)' \end{cases} \qquad (1-17)$$

4. 线性规划

再将(1−17)式代入目标函数(1−11)式得到

$$z = 9 + 2x_1 - \frac{3}{4}x_5 \qquad (1-18)$$

令非基变量$x_1=x_5=0$，得到目标值$z=9$和另一基可行解

$$X^{(1)}=(0,3,2,16,0)^T$$

从目标函数的表达式**(1-18)**可看到，非基变量x_1的系数是正的，说明目标函数值还可以增大，即$X^{(1)}$还不是最优解。

确定x_1进基，此时非基变量$x_5=0$。

4. 线性规划

由

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 - \dfrac{1}{2}x_5 \\ x_4 = 16 - 4x_1 \\ x_2 = 3 - \dfrac{1}{4}x_5 \end{cases} \qquad (1-17)$$

和x_3， x_4，x_2非负可知， x_1至多增加2个单位。

当$x_1=2$时， 基变量$x_3=0$，确定x_3退基。新的基变量x_1, x_4, x_2，非基变量x_3, x_5， 对（1-17）式作初等变换得

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + \dfrac{1}{2}x_5 \\ x_4 = 8 + 4x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 3 - \dfrac{1}{4}x_5 \end{cases} \qquad (1-17)'$$

4. 线性规划

令非基变量x_3=x_5 =0，得到新的基可行解

$$X^{(2)}=(2,3,0,8,0)^T$$

把目标函数用非基变量x_3，x_5表示

$$z = 13 - 2x_3 + \frac{1}{4}x_5$$

确定x_5进基，x_3=0。

由

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = 8 + 4x_3 - 2x_5 \quad (1-17)' \\ x_2 = 3 - \frac{1}{4}x_5 \end{cases}$$

及x_1，x_4，x_2非负，知x_5至多增加4个单位，此时x_4=0。

x_4退基，新的基变量x_1，x_5，x_2。

4. 线性规划

为了求出新的基可行解，也可考虑对约束$(1-17)$对应的增广矩阵作初等行变换。

约束 $(1-17)'$对应的增广矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3 \end{pmatrix}$

将基变量前的系数矩阵**(P_1,P_5,P_2)**经初等行变换化为单位阵，

只需将$P_5=\begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$化为单位向量$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。

4. 线性规划

新的增广阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

从上面的增广阵可以看到基可行解$X^{(3)}=(4,2,0,0,4)^T$，目标函数用非基变量表示得到

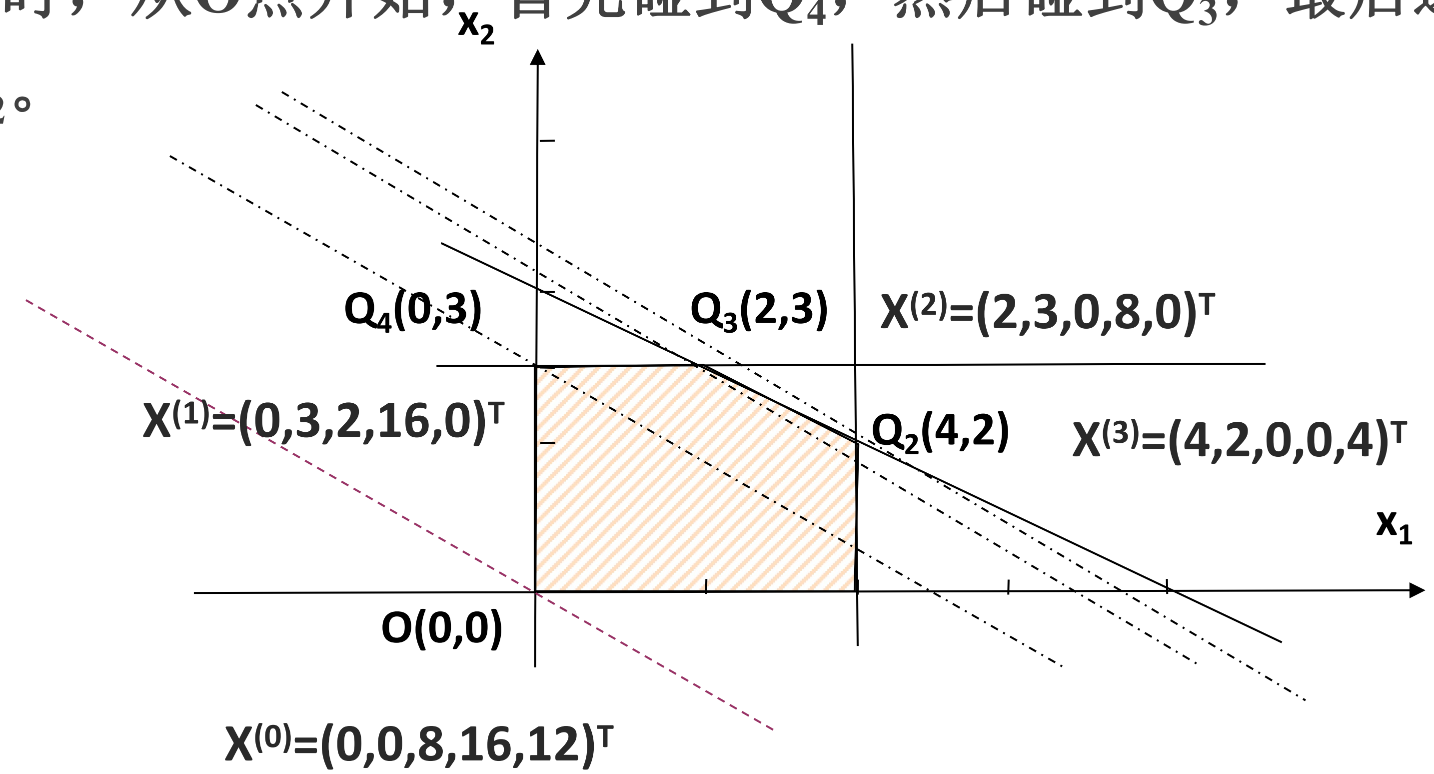
$$z = 14 - 1.5x_3 - 0.125x_4$$

所有非基变量的系数都是负数，所以目标函数达到最大，

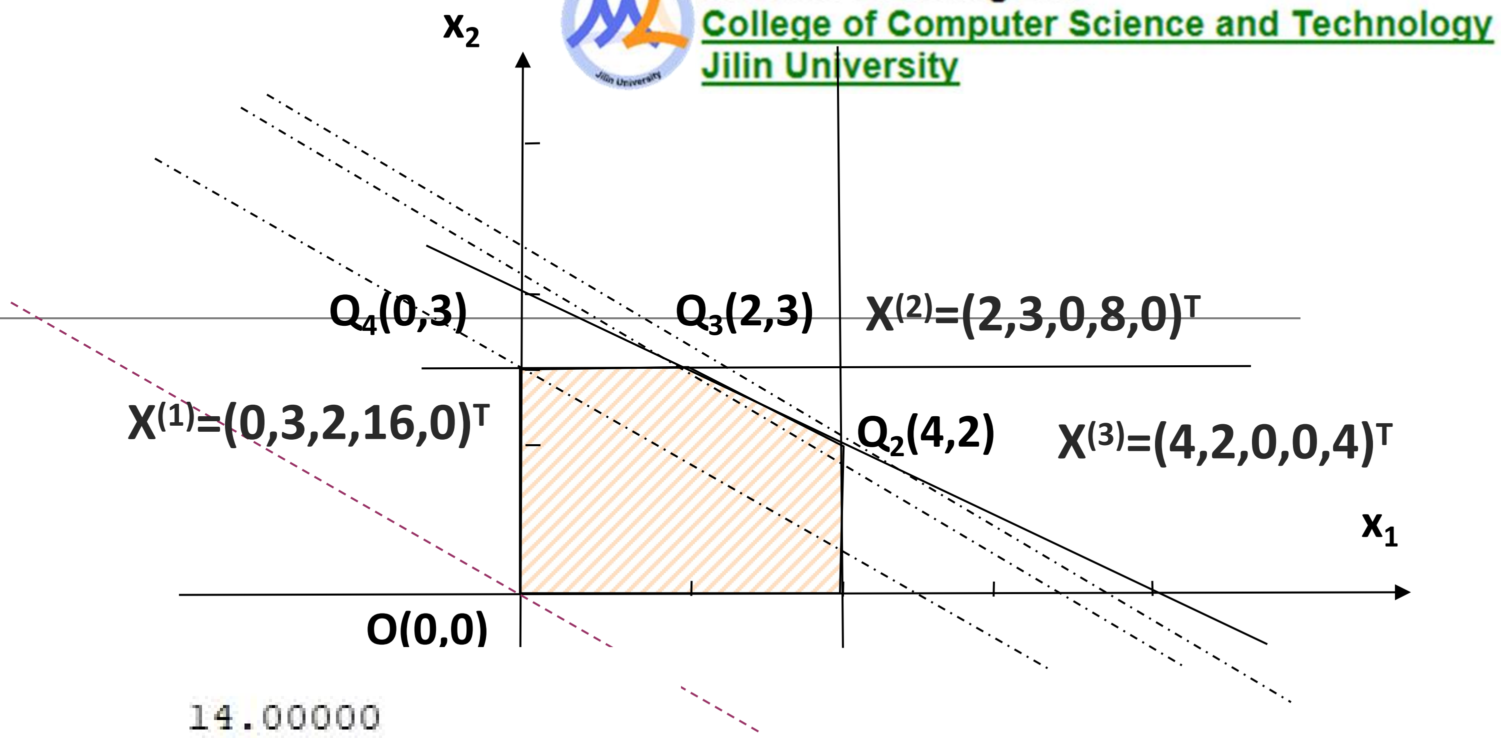
$X^{(3)}$是最优解。即当产品 I 生产4件，产品 II 生产2件时，工厂可以得到最大利润。

4. 线性规划

与图解法比较：单纯形法从初始基可行解$X^{(0)}$开始迭代，依次得到$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，$X^{(3)}$。这相当于图中的目标函数平移时，从O点开始，首先碰到Q_4，然后碰到Q_3，最后达到Q_2。



4. 线性规划




```
max = 2*x1+3*x2;

x1+2*x2<=8;
x1<=4;
x2<=3;
```

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              14.00000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             1
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	4.000000	0.000000
X2	2.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	14.00000	1.000000
2	0.000000	1.500000
3	0.000000	0.5000000
4	1.000000	0.000000

3. 线性规划

第四步求解模型：

```
MAX 400 X1 + 200 X2 + 250 X3
SUBJECT TO
        2) 3 X1 + X2 + 1.5 X3 <= 1000
        3) 0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <= 300
        4) X1 + X2 + X3 <= 625
END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

    OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    1) 162500.000

VARIABLE VALUE REDUCED COST
     X1 187.500000 .000000
     X2 437.500000 .000000
     X3 .000000 -.000015
    ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES
     2) .000000 100.000000
     3) 62.500000 .000000
     4) .000000 99.999980
NO. ITERATIONS= 2
```

4. 线性规划

第五步回答问题：

最优的方案为种玉米**187.5**英亩，种小麦**437.5**英亩，不种燕麦。可以得到**162500**美元的收益。

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

   OBJECTIVE FUNCTION VALUE

   1) 162500.000

VARIABLE VALUE REDUCED COST
    X1 187.500000 .000000
    X2 437.500000 .000000
    X3 .000000 -.000015
   ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES
    2) .000000 100.000000
    3) 62.500000 .000000
    4) .000000 99.999980
NO. ITERATIONS= 2
```

4. 线性规划

灵敏性分析:

对灌溉用水量进行灵敏性分析。

```
MAX      400 X1 + 200 X2 + 250 X3
SUBJECT TO
          2)    3 X1 + X2 + 1.5 X3 <=    1001
          3)    0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <=    300
          4)    X1 + X2 + X3 <=    625
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP        0

          OBJECTIVE FUNCTION VALUE

          1)      162600.000

VARIABLE          VALUE           REDUCED COST
      X1        188.000000           .000000
      X2        437.000000           .000000
      X3           .000000          -.000015

     ROW      SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)           .000000         100.000000
      3)         62.200000            .000000
      4)           .000000          99.999980

NO. ITERATIONS=        0
```

4. 线性规划

灵敏性分析：

对灌溉用水量进行灵敏性分析。

结果显示增加1英亩-英尺的灌溉水量的结果是：

可以多种半英亩玉米，还节约了一点劳力（每

0.3人-小时），净收益增加了100美元。

这100美元即为灌溉用水的影子价格。

三种资源（水、劳力、土地）的影子价格称为

偶价格。容易看出劳力资源已经过剩。

```
MAX      400 X1 + 200 X2 + 250 X3
SUBJECT TO
        2)    3 X1 + X2 + 1.5 X3 <=    1001
        3)    0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <=   300
        4)    X1 + X2 + X3 <=    625
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP        0

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      162600.000

VARIABLE          VALUE              REDUCED COST
      X1        188.000000              .000000
      X2        437.000000              .000000
      X3           .000000            -.000015

     ROW      SLACK OR SURPLUS       DUAL PRICES
      2)           .000000           100.000000
      3)         62.200000              .000000
      4)           .000000            99.999980

NO. ITERATIONS=        0
```

4. 线性规划

灵敏性分析：

对（玉米）产量变化进行灵敏性分析。

结果显示增加50美元的产量后，决策变量没有变化，但是总的收益增加了$50x_1=9375$美元。

同时，灌溉用水的影子价格上升了。

```
MAX     450 X1 + 200 X2 + 250 X3
SUBJECT TO
        2)   3 X1 + X2 + 1.5 X3 <=   1000
        3)   0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <=   300
        4)   X1 + X2 + X3 <=   625
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP        0

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)     171875.000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1      187.500000          .000000
      X2      437.500000          .000000
      X3         .000000        12.500000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)         .000000       125.000000
      3)       62.500000          .000000
      4)         .000000        75.000000

NO. ITERATIONS=        0
```

4. 线性规划

灵敏性分析：

对（燕麦）产量变化进行灵敏性分析。

结果显示增加10美元的产量后，决策变量发生了巨大变化。

```
MAX      400 X1 + 200 X2 + 260 X3
SUBJECT TO
        2)    3 X1 + X2 + 1.5 X3 <=    1000
        3)    0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <=    300
        4)    X1 + X2 + X3 <=    625
END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP        1

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)     168333.300

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1        41.666670          .000000
      X2          .000000        13.333340
      X3       583.333300          .000000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)          .000000        93.333340
      3)        91.666660          .000000
      4)          .000000       120.000000

NO. ITERATIONS=        1
```

4. 线性规划

记 c 为燕麦的收益(美元/英亩)，从而目标函数为 $f(x)=400x_1+200x_2+cx_3$. 注意 c 的值不影响可行域 S 的形状. 取不同的 c 再进行几次计算. 当 $c\leqslant 250$ 时最优解出现在顶点(187.5，437.5，0)处，而当 $c>250$ 时最优解出现在相邻的顶点$(41.6\overline{6}, 0, 583.3\overline{3})$处，这两个点都在由两个平面

$$\begin{aligned} 3.0x_1+1.0x_2+1.5x_3&=1\,000 \\ x_1+x_2+x_3&=625. \end{aligned} \tag{28}$$

相交得到的直线上. 考虑这条直线上任一点处的梯度向量$\nabla f=(400, 200, c)$，当 $c<250$ 时，梯度向量指向 $x_3=0$ 的顶点，当 $c>250$ 时，梯度向量指向 $x_2=0$ 的顶点. 随着 c 的增加，梯度向量从前一个点转向后一个点. 当 $c=250$ 时，梯度向量∇f 与通过这两点的直线垂直. 对这个 c 值，位于这两个顶点之间的线段上的任何一个点都是最优解.

4. 线性规划

模型对参数 c 的灵敏性的实际结果就是我们不知道应该种燕麦还是应该种小麦．收益的一个微小变化就会改变我们的最优决策．根据每英亩的收益会随着天气和市场变化的事实，最好是能给农场主不止一个的选择．任何一种作物的混合种植方式($0 \leqslant t \leqslant 1$)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 187.5t + 41.6\bar{6}(1-t) \\
x_2 &= 437.5t + 0(1-t) \\
x_3 &= 0t + 583.3\bar{3}(1-t),
\end{aligned}
\tag{29}
$$

都会用尽现有的土地和灌溉用水资源．每英亩的收益数据有太多的不确定因素，因此无法说明哪个选择会产生最大利润．

4. 线性规划

有时灵敏性分析要根据将初始的研究结果应用于实际后得到的客户反馈来进行。假设在农场主看到我们的分析结果之后，又接到了有一个新的玉米品种广告的新种子目录。这种新品种玉米较贵，但据称所需灌溉用水量少。图 3-19 为假设种玉米只需要 2.5 英亩-英尺(而不是 3.0)的灌溉用水时的灵敏性计算结果。新品种玉米可多获得 12 500 美元的收益，而在这种情况下，我们当然会比以前种更多的玉米。值得注意的是这时水的影子价格也提高了 33%。

```
MAX      400 X1 + 200 X2 + 250 X3
SUBJECT TO
        2)   2.5 X1 + X2 + 1.5 X3 <=   1000
        3)   0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <=   300
        4)   X1 + X2 + X3 <=   625
END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)    175000.000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1       250.000000         .000000
      X2       375.000000         .000000
      X3          .000000       16.666680

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)          .000000      133.333300
      3)        25.000000         .000000
      4)          .000000       66.666660

NO. ITERATIONS=       1
```

4. 线性规划

最后假设农场主想考虑增加另一种新的作物——大麦．一英亩大麦需要 1.5 英亩-英尺的水和 0.25 人-小时的劳力，预期可获得 200 美元的收益．在我们的模型中用一个新的决策变量 x_4 = 大麦的英亩数来表示这种新的作物．图 3-20 为模型的计算结果．与我们的原问题相比结果基本不变．玉米和小麦的混合种植方案仍是最优解，其原因也很容易看出．虽然大麦和小麦的收益是相同的，但大麦需要更多的水和劳力．

```
MAX      400 X1 + 200 X2 + 250 X3 + 200 X4
SUBJECT TO
          2)    3 X1 + X2 + 1.5 X3 + 1.5 X4 <=    1000
          3)    0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 + 0.25 X4 <= 300
          4)    X1 + X2 + X3 + X4 <=    625
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP       1

          OBJECTIVE FUNCTION VALUE

          1)      162500.000

VARIABLE          VALUE           REDUCED COST
      X1        187.500000           .000000
      X2        437.500000           .000000
      X3           .000000          -.000015
      X4           .000000         49.999980

     ROW     SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
      2)           .000000        100.000000
      3)         62.500000           .000000
      4)           .000000         99.999980

NO. ITERATIONS=        1
```

4. 线性规划

例 3.5 一家大建筑公司正在三个地点开掘．同时又在其他四个地点建筑，这里需要土方的填充．在 1、2、3 处挖掘产生的土方分别为每天 150，400，325 立方码[⊖]．建筑地点 A、B、C、D 处需要的填充土方分别为每天 175，125，225，450 立方码．也可以从地点 4 用每立方码 5 美元的价格获得额外的填充土方．填充土方运输的费用约为一货车容量每英里 20 美元．一辆货车可以搬运 10 立方码的土方．表 3-3 给出了各地点间距离的英里数．求使公司花费最少的运输计划．

表 3-3 例 3.5 中土方问题的英里数：建筑地点间的距离

挖掘地点	接收填充土方的地点			
	A	B	C	D
1	5	2	6	10
2	4	5	7	5
3	7	6	4	4
4	9	10	6	2

4. 线性规划

第一步提出问题：

Variables (符号化问题描述):

变量：

x_{ij} = 从地点 i 运到地点 j 的土方量(立方码)

s_i = 从地点 i 运出的土方量(立方码)

r_j = 运到地点 j 的土方量(立方码)

c_{ij} = 从地点 i 运到地点 j 的土方运输费用(美元/立方码)

d_{ij} = 地点 i 到地点 j 的距离(英里)

C = 总运费(美元)

假设：

$s_1 = x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D}$

$s_2 = x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D}$

$s_3 = x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D}$

$s_4 = x_{4A} + x_{4B} + x_{4C} + x_{4D}$

$r_A = x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A}$

$r_B = x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B}$

$r_C = x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C}$

$r_D = x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} + x_{4D}$

$s_1 \leqslant 150$, $s_2 \leqslant 400$, $s_3 \leqslant 325$

$r_A \geqslant 175$, $r_B \geqslant 125$, $r_C \geqslant 225$, $r_D \geqslant 450$

$c_{ij} = 2d_{ij}$，若 $i = 1, 2, 3$. 或

$c_{ij} = 2d_{ij} + 5$，若 $i = 4$.

其中 d_{ij} 在表 3-3 中给出

其中：

$$
\begin{aligned}
C = {} & c_{1A}x_{1A} + c_{1B}x_{1B} + c_{1C}x_{1C} + c_{1D}x_{1D} \\
& + c_{2A}x_{2A} + c_{2B}x_{2B} + c_{2C}x_{2C} + c_{2D}x_{2D} \\
& + c_{3A}x_{3A} + c_{3B}x_{3B} + c_{3C}x_{3C} + c_{3D}x_{3D} \\
& + c_{4A}x_{4A} + c_{4B}x_{4B} + c_{4C}x_{4C} + c_{4D}x_{4D}
\end{aligned}
$$

$x_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = A, B, C, D$

目标： 求 C 的最小值

4. 线性规划

第二步选择模型：

线性规划

4. 线性规划

第三步推导数学表达式：

Min

$$
\begin{aligned}
y = {} & 10x_{1A} + 4x_{1B} + 12x_{1C} + 20x_{1D} \\
& + 8x_{2A} + 10x_{2B} + 14x_{2C} + 10x_{2D} \\
& + 14x_{3A} + 12x_{3B} + 8x_{3C} + 8x_{3D} \\
& + 23x_{4A} + 25x_{4B} + 17x_{4C} + 9x_{4D}
\end{aligned}
$$

s.b.

$$
\begin{aligned}
& x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} \leqslant 150 \\
& x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} \leqslant 400 \\
& x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} \leqslant 325 \\
& x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A} \geqslant 175 \\
& x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} \geqslant 125 \\
& x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C} \geqslant 225 \\
& x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} + x_{4D} \geqslant 450
\end{aligned}
$$

and $x_{ij} \geqslant 0$, $i=1, 2, 3, 4$; $j=A, B, C, D$.

4. 线性规划

第四步求解模型：

```
Model:
Title TransferModel;

sets:
demand/1..4/:a;
!a is demand vol of each construction point;
supply/1..4/:x,b;
!x is the production vol of each digging point, b is the price of each digging point;
distance(demand,supply):dis,sup;
!dis is the distance of a and x, sup is the transfer vol from x(j) to a(i);
endsets

data:
a=175,125,225,450;
b=0,0,0,5;
x=150,400,325,10000;
dis=5,4,7,9,2,5,6,10,6,7,4,6,10,5,4,2;
enddata

[OBJ] min=@sum(distance(i,j):(b(j)+dis(i,j)*2)*sup(i,j));
@for(demand(i):[DEMANDE_CON]@sum(supply(j):sup(i,j))=a(i));
@for(supply(j):[SUPPLY_CON]@sum(demand(i):sup(i,j))<=x(j));
```

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          7650.000
Infeasibilities:                          0.000000
Total solver iterations:                         5

: TransferModel

      Variable           Value        Reduced Cost
         A( 1)        175.0000            0.000000
         A( 2)        125.0000            0.000000
         A( 3)        225.0000            0.000000
         A( 4)        450.0000            0.000000
         X( 1)        150.0000            0.000000
         X( 2)        400.0000            0.000000
         X( 3)        325.0000            0.000000
         X( 4)        10000.00            0.000000
         B( 1)        0.000000            0.000000
         B( 2)        0.000000            0.000000
         B( 3)        0.000000            0.000000
         B( 4)        5.000000            0.000000
     DIS( 1, 1)       5.000000            0.000000
     DIS( 1, 2)       4.000000            0.000000
     DIS( 1, 3)       7.000000            0.000000
     DIS( 1, 4)       9.000000            0.000000
     DIS( 2, 1)       2.000000            0.000000
     DIS( 2, 2)       5.000000            0.000000
     DIS( 2, 3)       6.000000            0.000000
     DIS( 2, 4)       10.00000            0.000000
     DIS( 3, 1)       6.000000            0.000000
     DIS( 3, 2)       7.000000            0.000000
     DIS( 3, 3)       4.000000            0.000000
     DIS( 3, 4)       6.000000            0.000000
     DIS( 4, 1)       10.00000            0.000000
     DIS( 4, 2)       5.000000            0.000000
     DIS( 4, 3)       4.000000            0.000000
     DIS( 4, 4)       2.000000            0.000000
     SUP( 1, 1)       0.000000            2.000000
     SUP( 1, 2)       175.0000            0.000000
     SUP( 1, 3)       0.000000            7.000000
     SUP( 1, 4)       0.000000            15.00000
     SUP( 2, 1)       125.0000            0.000000
     SUP( 2, 2)       0.000000            6.000000
     SUP( 2, 3)       0.000000            9.000000
     SUP( 2, 4)       0.000000            21.00000
     SUP( 3, 1)       0.000000            3.000000
     SUP( 3, 2)       0.000000            5.000000
     SUP( 3, 3)       225.0000            0.000000
     SUP( 3, 4)       0.000000            8.000000
     SUP( 4, 1)       0.000000            11.00000
     SUP( 4, 2)       0.000000            1.000000
     SUP( 4, 3)       100.0000            0.000000
     SUP( 4, 4)       350.0000            0.000000

            Row    Slack or Surplus      Dual Price
            OBJ        7650.000           -1.000000
DEMANDE_CON( 1)        0.000000           -8.000000
DEMANDE_CON( 2)        0.000000           -4.000000
DEMANDE_CON( 3)        0.000000           -9.000000
DEMANDE_CON( 4)        0.000000           -9.000000
 SUPPLY_CON( 1)        25.00000            0.000000
 SUPPLY_CON( 2)        225.0000            0.000000
 SUPPLY_CON( 3)        0.000000            1.000000
 SUPPLY_CON( 4)        9650.000            0.000000
```


```
     SUP( 1, 1)       0.000000            2.000000
     SUP( 1, 2)       175.0000            0.000000
     SUP( 1, 3)       0.000000            7.000000
     SUP( 1, 4)       0.000000            15.00000
     SUP( 2, 1)       125.0000            0.000000
     SUP( 2, 2)       0.000000            6.000000
     SUP( 2, 3)       0.000000            9.000000
     SUP( 2, 4)       0.000000            21.00000
     SUP( 3, 1)       0.000000            3.000000
     SUP( 3, 2)       0.000000            5.000000
     SUP( 3, 3)       225.0000            0.000000
     SUP( 3, 4)       0.000000            8.000000
     SUP( 4, 1)       0.000000            11.00000
     SUP( 4, 2)       0.000000            1.000000
     SUP( 4, 3)       100.0000            0.000000
     SUP( 4, 4)       350.0000            0.000000

            Row    Slack or Surplus      Dual Price
            OBJ        7650.000           -1.000000
DEMANDE_CON( 1)        0.000000           -8.000000
DEMANDE_CON( 2)        0.000000           -4.000000
DEMANDE_CON( 3)        0.000000           -9.000000
DEMANDE_CON( 4)        0.000000           -9.000000
 SUPPLY_CON( 1)        25.00000            0.000000
 SUPPLY_CON( 2)        225.0000            0.000000
 SUPPLY_CON( 3)        0.000000            1.000000
 SUPPLY_CON( 4)        9650.000            0.000000
```

4. 线性规划

第五步回答问题：

最优解为每天从地点1向地点B运送125立方码的土方；从地点2向地点A运送175立方码的土方；从地点3向地点C运送225立方码的土方，再向地点4运送100立方码的土方；D所需要的其余350立方码土方从地点4购买。总费用为7650美元。

4. 线性规划

灵敏性分析：

地点1和地点2的约束不是关键的，分别有25和225的松弛量；对偶值即为影子价格，由于约束不是关键约束，地点1和地点2的影子价格为0，地点3的影子价格为-1代表此约束如果增加1立方码的话，总运费增加-1美元。

单元	值	约束	是否关键	松弛量	对偶值	增加量	减少量
1	125	<=150	否	25	0	无限制	25
2	175	<=400	否	225	0	无限制	225
3	325	<=325	是	0	−1	350	100
A	175	>=175	是	0	8	225	175
B	125	>=125	是	0	4	25	125
C	225	>=225	是	0	9	100	225
D	450	>=450	是	0	9	无限制	350

5. 离散最优化

例 3.6 仍考虑例 3.4 中讨论的家庭农场问题. 这个家庭有 625 英亩的土地可以用来种植. 有 5 块每块 120 英亩的地和另一块 25 英亩的地. 这家人想在每一块地上只种一种作物：玉米、小麦或燕麦. 与前面一样，有 1000 英亩-英尺可用的灌溉用水，每周农场工人可提供 300 小时的劳力. 其他的数据在表 3-2 中给出. 求应该在每块地中种植哪种作物，从而使总收益达最大.

条件（每英亩）	作物		
	玉米	小麦	燕麦
灌溉用水（英亩-英尺）	3.0	1.0	1.5
劳力（人-小时/周）	0.8	0.2	0.3
收益（美元）	400	200	250

5. 离散最优化

第一步提出问题：

Variables (符号化问题描述):

变量：

x_1 = 种植玉米的 120 英亩地块数目

x_2 = 种植小麦的 120 英亩地块数目

x_3 = 种植燕麦的 120 英亩地块数目

x_4 = 种植玉米的 25 英亩地块数目

x_5 = 种植小麦的 25 英亩地块数目

x_6 = 种植燕麦的 25 英亩地块数目

w = 需要的灌溉用水(英亩—英尺)

l = 需要的劳力(人—小时/周)

t = 种植作物的总英亩数

y = 总收益(美元)

假设：

$w=120(3.0x_1+1.0x_2+1.5x_3)+25(3.0x_4+1.0x_5+1.5x_6)$

$l=120(0.8x_1+0.2x_2+0.3x_3)+25(0.8x_4+0.2x_5+0.3x_6)$

$t=120(x_1+x_2+x_3)+25(x_4+x_5+x_6)$

$y=120(400x_1+200x_2+250x_3)+25(400x_4+200x_5+250x_6)$

$w\leqslant 1\,000$

$l\leqslant 300$

$t\leqslant 625$

$x_1+x_2+x_3\leqslant 5$

$x_4+x_5+x_6\leqslant 1$

$x_1, \cdots, x_6$ 为非负整数

目标： 求 y 的最大值

5. 离散最优化

第二步选择模型：

整数规划

5. 离散最优化

第三步推导数学表达式:

第三步为将问题用公式表示. 在我们的问题中，决策变量为种植玉米、小麦和燕麦的 120 英亩地块的数目及 25 英亩地块的数目. 注意变量 x_4, x_5, x_6 为二值决策变量，取值只能是 0 或 1. 我们的整数规划问题的标准形式为: 在集合

$$
\begin{aligned}
375x_1 + 125x_2 + 187.5x_3 + 75x_4 + 25x_5 + 37.5x_6 &\leqslant 1\,000 \\
100x_1 + 25x_2 + 37.5x_3 + 20x_4 + 5x_5 + 7.5x_6 &\leqslant 300 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 5 \\
x_4 + x_5 + x_6 &\leqslant 1
\end{aligned}
\tag{33}
$$

上对总收益 $y=48\,000x_1+24\,000x_2+30\,000x_3+10\,000x_4+5\,000x_5+6\,250x_6$ 求最大值. 其中 x_1, …, x_6 为非负整数.

5. 离散最优化

第四步求解模型：

```
Model:
Title Farm_DisctreModel;

sets:
land/1..2/:a,n;
!a is the size of the land,n is the number of each type of land;
plant/1..3/:b,c,d,s;
!b is the water demand of  each plant, c is the labor/week of each plant;
!d is the revenue of each plant,s is the total planted size of each plant;
landSelect(land,plant):ls;
!ls is the land selected number of each plant;
endsets

data:
a=120,25;
n=5,1;
b=3,1,1.5;
c=0.8,0.2,0.3;
d=400,200,250;
enddata

@for(plant(j):s(j)=@sum(land(i):ls(i,j)*a(i)));
[OBJ] max=@sum(plant(j):s(j)*d(j));
@for(land(i):[LAND_CON]@sum(plant(j):ls(i,j))<=n(i));
[TotalSize_CON]@sum(plant(j):s(j))<=625;
[Water_CON]@sum(plant(j):s(j)*b(j))<=1000;
[Labor_CON]@sum(plant(j):s(j)*c(j))<=300;
@for(landSelect(i,j):@Gin(ls(i,j)));
```

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              162250.0
Objective bound:                              162250.0
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             0


Model Title: Farm_DisctreModel

                       Variable           Value        Reduced Cost
                          A( 1)        120.0000            0.000000
                          A( 2)        25.00000            0.000000
                          N( 1)        5.000000            0.000000
                          N( 2)        1.000000            0.000000
                          B( 1)        3.000000            0.000000
                          B( 2)        1.000000            0.000000
                          B( 3)        1.500000            0.000000
                          C( 1)       0.8000000            0.000000
                          C( 2)       0.2000000            0.000000
                          C( 3)       0.3000000            0.000000
                          D( 1)        400.0000            0.000000
                          D( 2)        200.0000            0.000000
                          D( 3)        250.0000            0.000000
                          S( 1)        120.0000            0.000000
                          S( 2)        240.0000            0.000000
                          S( 3)        265.0000            0.000000
                      LS( 1, 1)        1.000000           -48000.00
                      LS( 1, 2)        2.000000           -24000.00
                      LS( 1, 3)        2.000000           -30000.00
                      LS( 2, 1)        0.000000           -10000.00
                      LS( 2, 2)        0.000000           -5000.000
                      LS( 2, 3)        1.000000           -6250.000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        0.000000            400.0000
                              2        0.000000            200.0000
                              3        0.000000            250.0000
                            OBJ        162250.0            1.000000
                    LAND_CON( 1)        0.000000            0.000000
                    LAND_CON( 2)        0.000000            0.000000
                  TOTALSIZE_CON        0.000000            0.000000
                      WATER_CON        2.500000            0.000000
                      LABOR_CON        76.50000            0.000000
```

5. 离散最优化

第五步回答问题：

最优方案为在一块120英亩的地块种玉米，两块120英亩的地块种小麦，两块120英亩的地块种燕麦，在一块25英亩的地块种燕麦。总收入为162250美元。这个方案用掉了所有土地，剩余2.5英亩-英尺的水和76.5的劳力。

该方案比混种最优方案（用掉所有土地、水，剩余62.5 劳力）的16250美元少约0.2%。

5. 离散最优化

灵敏性分析：

整数规划的灵敏性分析非常耗时，也没有影子价格，这是因为随着约束条件的改变达到最优解时的目标函数不是光滑的，整数解也不一定恰好出现在约束的边界上。因此，最优解也可能对非关键约束的小变化敏感。

首先讨论可用的灌溉水量为**1100**英亩-英尺。

```
Model:
Title Farm_DisctreModel;

sets:
land/1..2/:a,n;
!a is the size of the land,n is the number of each type of land;
plant/1..3/:b,c,d,s;
!b is the water demand of  each plant, c is the labor/week of each plant;
!d is the revenue of each plant,s is the total planted size of each plant;
landSelect(land,plant):ls;
!ls is the land selected number of each plant;
endsets

data:
a=120,25;
n=5,1;
b=3,1,1.5;
c=0.8,0.2,0.3;
d=400,200,250;
enddata

@for(plant(j):s(j)=@sum(land(i):ls(i,j)*a(i)));
[OBJ] max=@sum(plant(j):s(j)*d(j));
@for(land(i):[LAND_CON]@sum(plant(j):ls(i,j))<=n(i));
[TotalSize_CON]@sum(plant(j):s(j))<=625;
[Water_CON]@sum(plant(j):s(j)*b(j))<=1100;
[Labor_CON]@sum(plant(j):s(j)*c(j))<=300;
@for(landSelect(i,j):@Gin(ls(i,j)));
```

5. 离散最优化

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              172000.0
Objective bound:                              172000.0
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               2
Total solver iterations:                            46


Model Title: Farm_DisctreModel

                    Variable           Value        Reduced Cost
                       A( 1)        120.0000            0.000000
                       A( 2)        25.00000            0.000000
                       N( 1)        5.000000            0.000000
                       N( 2)        1.000000            0.000000
                       B( 1)        3.000000            0.000000
                       B( 2)        1.000000            0.000000
                       B( 3)        1.500000            0.000000
                       C( 1)       0.8000000            0.000000
                       C( 2)       0.2000000            0.000000
                       C( 3)       0.3000000            0.000000
                       D( 1)        400.0000            0.000000
                       D( 2)        200.0000            0.000000
                       D( 3)        250.0000            0.000000
                       S( 1)        145.0000            0.000000
                       S( 2)        120.0000            0.000000
                       S( 3)        360.0000            0.000000
                   LS( 1, 1)        1.000000           -48000.00
                   LS( 1, 2)        1.000000           -24000.00
                   LS( 1, 3)        3.000000           -30000.00
                   LS( 2, 1)        1.000000           -10000.00
                   LS( 2, 2)        0.000000           -5000.000
                   LS( 2, 3)        0.000000           -6250.000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                           1        0.000000            400.0000
                           2        0.000000            200.0000
                           3        0.000000            250.0000
                         OBJ        172000.0            1.000000
                 LAND_CON( 1)       0.000000            0.000000
                 LAND_CON( 2)       0.000000            0.000000
               TOTALSIZE_CON        0.000000            0.000000
                   WATER_CON        5.000000            0.000000
                   LABOR_CON        52.00000            0.000000
```

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              162250.0
Objective bound:                              162250.0
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                               0
Total solver iterations:                             0


Model Title: Farm_DisctreModel

                    Variable           Value        Reduced Cost
                       A( 1)        120.0000            0.000000
                       A( 2)        25.00000            0.000000
                       N( 1)        5.000000            0.000000
                       N( 2)        1.000000            0.000000
                       B( 1)        3.000000            0.000000
                       B( 2)        1.000000            0.000000
                       B( 3)        1.500000            0.000000
                       C( 1)       0.8000000            0.000000
                       C( 2)       0.2000000            0.000000
                       C( 3)       0.3000000            0.000000
                       D( 1)        400.0000            0.000000
                       D( 2)        200.0000            0.000000
                       D( 3)        250.0000            0.000000
                       S( 1)        120.0000            0.000000
                       S( 2)        240.0000            0.000000
                       S( 3)        265.0000            0.000000
                   LS( 1, 1)        1.000000           -48000.00
                   LS( 1, 2)        2.000000           -24000.00
                   LS( 1, 3)        2.000000           -30000.00
                   LS( 2, 1)        0.000000           -10000.00
                   LS( 2, 2)        0.000000           -5000.000
                   LS( 2, 3)        1.000000           -6250.000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                           1        0.000000            400.0000
                           2        0.000000            200.0000
                           3        0.000000            250.0000
                         OBJ        162250.0            1.000000
                 LAND_CON( 1)       0.000000            0.000000
                 LAND_CON( 2)       0.000000            0.000000
                           7        0.000000            0.000000
                           8        2.500000            0.000000
                           9        76.50000            0.000000
```

chnology

5. 离散最优化

灵敏性分析：

接着讨论可用的灌溉水量为950英亩-英尺。

此时，IP问题的最优解为所有地块都种上燕麦，用掉937.5英亩-英尺的水，但有112.5人-小时的劳力剩余。

```
Global optimal solution found.
Objective value:                    156250.0
Objective bound:                    156250.0
Infeasibilities:                    0.000000
Extended solver steps:                     0
Total solver iterations:                   0

Model Title: Farm_DisctreModel
```

Variable	Value	Reduced Cost
A(1)	120.0000	0.000000
A(2)	25.00000	0.000000
N(1)	5.000000	0.000000
N(2)	1.000000	0.000000
B(1)	3.000000	0.000000
B(2)	1.000000	0.000000
B(3)	1.500000	0.000000
C(1)	0.8000000	0.000000
C(2)	0.2000000	0.000000
C(3)	0.3000000	0.000000
D(1)	400.0000	0.000000
D(2)	200.0000	0.000000
D(3)	250.0000	0.000000
S(1)	120.0000	0.000000
S(2)	360.0000	0.000000
S(3)	145.0000	0.000000
LS(1, 1)	1.000000	-48000.00
LS(1, 2)	3.000000	-24000.00
LS(1, 3)	1.000000	-30000.00
LS(2, 1)	0.000000	-10000.00
LS(2, 2)	0.000000	-5000.000
LS(2, 3)	1.000000	-6250.000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	400.0000
2	0.000000	200.0000
3	0.000000	250.0000
OBJ	156250.0	1.000000
LAND_CON(1)	0.000000	0.000000
LAND_CON(2)	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	12.50000	0.000000
9	88.50000	0.000000

5. 离散最优化

灵敏性分析：

接着讨论可用的灌溉水量为950英亩-英尺。

此时，IP问题的最优解为在一块120英亩的地块种玉米，三块120英亩的地块种小麦，一块120英亩的地块种燕麦，在一块25英亩的地块种燕麦。总收入为156250美元。这个方案用掉了所有土地，剩余12.5英亩-英尺的水和88.5人-小时的劳力。

```
Global optimal solution found.
Objective value:                     156250.0
Objective bound:                     156250.0
Infeasibilities:                     0.000000
Extended solver steps:                      0
Total solver iterations:                    0


Model Title: Farm_DisctreModel
```

Variable	Value	Reduced Cost
A(1)	120.0000	0.000000
A(2)	25.00000	0.000000
N(1)	5.000000	0.000000
N(2)	1.000000	0.000000
B(1)	3.000000	0.000000
B(2)	1.000000	0.000000
B(3)	1.500000	0.000000
C(1)	0.8000000	0.000000
C(2)	0.2000000	0.000000
C(3)	0.3000000	0.000000
D(1)	400.0000	0.000000
D(2)	200.0000	0.000000
D(3)	250.0000	0.000000
S(1)	120.0000	0.000000
S(2)	360.0000	0.000000
S(3)	145.0000	0.000000
LS(1, 1)	1.000000	-48000.00
LS(1, 2)	3.000000	-24000.00
LS(1, 3)	1.000000	-30000.00
LS(2, 1)	0.000000	-10000.00
LS(2, 2)	0.000000	-5000.000
LS(2, 3)	1.000000	-6250.000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	400.0000
2	0.000000	200.0000
3	0.000000	250.0000
OBJ	156250.0	1.000000
LAND_CON(1)	0.000000	0.000000
LAND_CON(2)	0.000000	0.000000
TOTALSIZE_CON	0.000000	0.000000
WATER_CON	12.50000	0.000000
LABOR_CON	88.50000	0.000000

6. 习题

例 3.5 一家大建筑公司正在三个地点开掘，同时又在其他四个地点建筑，这里需要土方的填充．在 1、2、3 处挖掘产生的土方分别为每天 150，400，325 立方码[⊖]．建筑地点 A、B、C、D 处需要的填充土方分别为每天 175，125，225，450 立方码．也可以从地点 4 用每立方码 5 美元的价格获得额外的填充土方．填充土方运输的费用约为一货车容量每英里 20 美元．一辆货车可以搬运 10 立方码的土方．表 3-3 给出了各地点间距离的英里数．求使公司花费最少的运输计划．

表 3-3 例 3.5 中土方问题的英里数：建筑地点间的距离

挖掘地点	接收填充土方的地点			
	A	B	C	D
1	5	2	6	10
2	4	5	7	5
3	7	6	4	4
4	9	10	6	2

仍考虑考虑例 3.5 中的土方问题．假设公司只运输整车的土方．

(a)假设公司使用载重 10 立方码的自动倾卸卡车运输，求最优运输方案．采用五步方法，按整数规划模型求解．

(b)假设车的载重量为 5 立方码，重复(a)的计算．

(c)假设车的载重量为 20 立方码，重复(a)的计算．

(d)比较(a)、(b)、(c)的结果，讨论原来线性规划模型的稳健性．例 3.5 中的运输方案是否对任一种卡车都是近似最优的？

6. 习题

一家彩电制造商计划推出两种新产品：一种19英寸立体声彩色电视机，每台可获利80美元，另一种21英寸立体声彩色电视机，每台可获利100美元。据估计，现有的允许生产能力每年可以生产10000台电视，同时由于所需要的电路板供给限制，19英寸彩电年产不能超过5000台，21英寸彩电不能超过8000台。