# 第六章 定 积 分

本章中将讨论积分学的第二个基本问题 —— 定积分, 它在自然科学和工程技术中有着广泛的应用. 我们先从实际问题引出定积分的概念, 然后讨论定积分的性质、微积分学基本定理、定积分的计算方法.

## §1 定积分的概念与性质

### 1.1 定积分问题的引例

**1. 曲边梯形的面积**

在初等几何中, 我们只知道计算多边形及圆形的面积, 而对一般曲线所围成的平面图形的面积是不会计算的, 因此, 这是初等几何没有解决的问题. 显然这个问题的解决有赖于曲边梯形的面积的计算. 所谓曲边梯形, 是指由连续曲线 $y = f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$ 和三条直线 $x = a$, $x = b$, $x$ 轴所围成的平面图形, 如图 6.1.

下面我们来讨论如何求曲边梯形的面积.

第一步: 分割. 将区间 $[a, b]$ 用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

任意分成 $n$ 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

每个小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

用直线 $x = x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 把曲边梯形分为 $n$ 个小的曲边梯形. 这些小的曲边梯形的面积为

$$\Delta A_1, \cdots, \Delta A_i, \cdots, \Delta A_n,$$

则 $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_n$.

第二步: 近似. 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i$, 以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底, 以 $f(\xi_i)$ 为高的小矩形面积作为第 $i$ 个小的曲边梯形的面积 $\Delta A_i$ 的近似值, 即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

第三步: 求和. 把这些小矩形的面积加起来, 得到曲边梯形的面积 $A$ 的近似值, 即

$$\begin{aligned}A&=\Delta A_1+\Delta A_2+\cdots+\Delta A_n\\&\approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n\\&=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.\end{aligned}$$

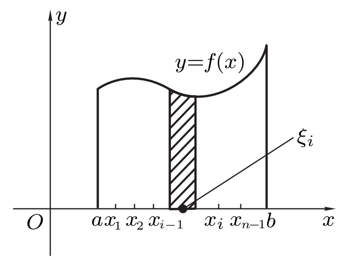

图 6.1

第四步: 取极限. 令 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$, 当 $\lambda\to 0$ 时, 上述和式的极限, 就是曲边梯形的面积, 即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

**2. 变速直线运动的路程**

设运动物体以速度 $v=v(t)$ 作直线运动, 现求时刻 $t=a$ 到 $t=b$ 这段时间内, 物体经过的路程 $s$, 对于匀速运动, 可用公式

$$\text{路程}=\text{速度}\times\text{时间}$$

求路程. 而变速运动求路程的方法步骤与解决曲边梯形面积问题的做法一致.

第一步: 分割, 将区间 $[a,b]$ 用分点

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$$

任意分成 $n$ 个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

第二步: 近似, 在 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一点 $\xi_i$, 令 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. 将时间间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 内的变速运动近似看成速度为 $v(\xi_i)$ 的匀速运动, 则在时间间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 物体走过的路程

$$\Delta s_i\approx v(\xi_i)\Delta t_i \ (i=1,2,\cdots,n).$$

第三步: 求和, 将 $\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的近似值求和, 得到总路程 $s$ 的近似值为

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

第四步: 取极限, 记 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$, 当 $\lambda \to 0$ 时, 取上述和式极限, 就得到路程 $s$ 的精确值, 即

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

上述两个问题的具体含义并不相同, 一个是几何问题, 另一个是物理问题. 但是所求的量表现了相同的数学形式. 在数学上抛开这些问题的实际意义, 抓住它们在数学关系上共同的性质与特性加以概括, 抽象出定积分的概念.

## 1.2　定积分的概念

**定义 1.1**　设 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的有界函数, 在 $(a,b)$ 内任意插入若干分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a,b]$ 分成 $n$ 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \cdots,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$, 作数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 $\Delta x_i$ 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i = 1, 2, \cdots, n)$, 并作和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 如果无论对 $[a,b]$ 怎样分法, 也无论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 $\xi_i$ 怎样取法, 只要当 $\lambda \to 0$ 时, 和 $S_n$ 总趋于确定的极限 $I$, 这时我们称这个极限 $I$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分** (简称积分), 记为 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

其中 $f(x)$ 称为**被积函数**, $f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**, $x$ 称为**积分变量**, $a$ 称为**积分下限**, $b$ 称为**积分上限**, $[a,b]$ 称为**积分区间**. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**积分和**.

根据定积分的定义, 曲边梯形的面积 $A$ 是表示曲边的函数 $y=f(x)$ ($f(x)\geqslant 0$) 在底边对应的区间 $[a,b]$ 上的定积分, 即

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

变速直线运动的路程 $s$ 是速度函数 $v(t)$ ($v(t)\geqslant 0$) 在时间间隔 $[a,b]$ 上的定积分, 即

$$s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

关于定积分的定义作几点说明.

(1) 所谓极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在, 是指无论对区间 $[a,b]$ 怎样划分, 也无论 $\xi_i$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上怎样选取, 只要 $\lambda\to 0$, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 都存在而且相等, 这时称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(2) 定积分只与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关, 而与积分变量使用的记号无关, 所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

(3) 在定积分定义中, 实际上假定了 $a<b$, 当 $a>b$ 时, 我们规定

(a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$. 这表明, 交换定积分的上、下限, 定积分的值改变符号.

(b) 当 $a=b$ 时, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

(4) 从定积分的定义来看, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 则对 $[a,b]$ 的任一分割, 它至少必在某一个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上无界, 使 (1) 中的极限不存在.

关于函数可积性, 我们有如下的两个充分条件:

**定理 1.1** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

**定理 1.2** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 并且只有有限个第一类间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

这两个定理的证明从略.

**例 1.1** 用定积分定义计算 $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x$.

**解** 函数 $y=x$ 在 $[0,1]$ 上连续, 所以在 $[0,1]$ 上可积, 因此积分与区间 $[0,1]$ 的分法及 $\xi_i$ 的取法无关. 为了便于计算, 把区间 $[0,1]n$ 等分, 分点为 $x_i=\dfrac{i}{n}$ ($i=$

$1,2,\cdots,n-1)$, 这样每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 得积分和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\cdot\frac{1}{n}=\frac{n(n+1)}{2n^2},$$

当 $\Delta x\to 0$, 即 $n\to\infty$ 时

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

## 1.3 定积分的几何意义

当 $f(x)\geqslant 0$ 时, 我们已经指出, 定积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲边方程为 $y=f(x)$ 的曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

当 $f(x)\leqslant 0$ 时, 则曲边方程为 $y=f(x)$ 的曲边梯形的面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-A,$$

因此, 当 $f(x)\leqslant 0$ 时, 定积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于曲边梯形面积的负值.

当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负时, 则定积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a,x=b,y=0$ 所围成的几个曲边梯形面积的代数和.

## 1.4 定积分的性质

这一节, 我们来研究定积分的基本性质, 为了使证明过程书写简便, 证明中省略分割、近似、求和的步骤. 并假定各性质中所列的定积分均存在.

**性质 1.1** $\int_a^b [k_1 f(x)+k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

**证明** 由 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 存在, 及极限运算性质, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[k_1 f(\xi_i)+k_2 g(\xi_i)]\Delta x_i\\ =&k_1\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + k_2\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i,\end{aligned}$$

于是

$$\int_a^b [k_1 f(x)+k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $k_1, k_2$ 是常数. 此性质称为定积分的线性性质. □

**性质 1.2** (对积分区间的可加性)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 先设 $a < c < b$. 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 所以无论将区间 $[a, b]$ 怎样划分, 积分和式的极限总是不变的. 因此, 我们在分区间时, 可以使 $c$ 点永远是一个分点. 这样, 区间 $[a, b]$ 上的积分就有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

由此得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

当 $c$ 点在 $[a, b]$ 之外时, 不妨设 $a < b < c$ (当 $c < a < b$ 时可类似地证明), 由于

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

**性质 1.3** 若 $f(x) \leqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

**证明** 因为

$$f(x) \leqslant g(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

所以对区间 $[a,b]$ 的任意分割及任取的 $\{\xi_i\}$, 都有

$$f(\xi_i) \leqslant g(\xi_i) \ \ (i=1,2,\cdots,n),$$

从而

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i,$$

故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

**推论 1.1** 若 $f(x) \geqslant 0$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad (a<b).$$

**推论 1.2** $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \ (a<b).$

**证明** 由绝对值的性质

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

由性质 1.3 及性质 1.1, 得到

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

从而

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \qquad \square$$

**性质 1.4** 设 $M$, $m$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值, 则有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

这一性质称为定积分的估值定理. 证明从略.

**性质 1.5** (积分中值定理) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则在 $[a,b]$ 至少有一点 $\xi$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

**证明** 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上可积, 且有最大值 $M$ 与最小值 $m$, 使得

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

由性质 1.4, 有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

即

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \leqslant M.$$

根据闭区间上连续函数的介值定理, 在 $[a,b]$ 上至少有一点 $\xi$, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b). \qquad \square$$

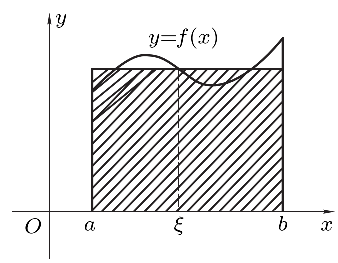


图 6.2

积分中值定理的几何意义是, 以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积, 等于底边相同而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形面积 (图 6.2).

**例 1.2** 比较定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$ 的大小.

**解** 令 $f(x)=\mathrm{e}^x-(1+x), f'(x)=\mathrm{e}^x-1 \geqslant 0\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调不减, 又 $f(0)=0$, 从而

$$f(x) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

即

$$\mathrm{e}^x \geqslant (1+x).$$

由性质 1.3 及 $f(x) \not\equiv 0$ 知

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x > \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x.$$

## 习题 6.1

**(A)**

1. 利用定积分的定义计算:

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

2. 利用定积分的几何意义, 解释下列等式:

(1) $\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = 0$.

3. 估计下列积分值:

(1) $\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

4. 比较下列积分的大小:

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 证明

(1) 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$, 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则在 $[a,b]$ 上, $f(x)\equiv 0$;

(2) 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$, 且 $f(x)\not\equiv 0$. 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$;

(3) 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant g(x)$, 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, 则在 $[a,b]$ 上, $f(x)\equiv g(x)$.

6. 假设可微函数 $f(x)$ 满足条件

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

其中 $a<b<c$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,c)$ 使 $f'(\xi)=0$.

# §2　微积分基本定理

利用定义计算定积分是十分困难的. 在本节我们将揭示定积分与微分的内在联系, 建立定积分的计算公式.

## 2.1　积分上限函数及其导数

**定义 2.1**　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 对 $[a,b]$ 上任意一点 $x, f(x)$ 在

$[a,x]$ 上仍连续, 于是变上限积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 便给出了一个关于上限 $x$ 的函数, 记为 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x\ (a\leqslant x\leqslant b)$, 称为**积分上限函数**.

为了避免积分变量 $x$ 与积分上限 $x$ 的混淆, 根据积分与积分变量的符号无关, 我们用 $t$ 代替积分变量 $x$, 于是 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 可写成

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

这时, $\Phi(x)$ 的几何意义就是区间 $[a,x]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边, 在 $[a,x]$ 范围内曲边梯形的面积 (图 6.3).

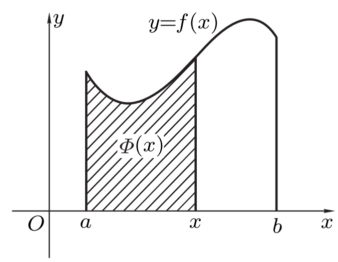

图 6.3

积分上限函数具有下述重要性质:

**定理 2.1** 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上具有导数, 并且

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=f(x)\qquad(a\leqslant x\leqslant b).\end{aligned}$$

**证明** 任取 $x\in(a,b)$, 对 $x$ 给一增量 $\Delta x$, 使 $x+\Delta x\in[a,b]$, 则 $\Phi(x)$ 在 $x$ 处的增量

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x)&=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\\&=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

应用积分中值定理, 有

$$\Delta\Phi(x)=f(\xi)\cdot\Delta x\quad(\xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x+\Delta x \text{ 之间}).$$

令 $\Delta x\to 0$, 则 $\xi\to x$, 由 $f(x)$ 在点 $x$ 连续, 故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x),$$

于是 $\Phi(x)$ 在点 $x$ 处可导, 且 $\Phi'(x)=f(x)$.

若 $x=a$, $\Delta x>0$ 可证得 $\Phi'_+(a)=f(a)$; 若 $x=b$, $\Delta x<0$ 可证得 $\Phi'_-(b)=f(b)$. $\square$

定理 2.1 表明, 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就是被积函数 $f(x)$ 的一个原函数. 这就证明了上一章中所提出的任何连续函数一定存在原函数 (即第五章定理 1.1).

需要指出的是, 积分上限函数是表示函数关系的一种新的方法. 用这种方法表示的函数在物理学、化学、统计学中有着广泛的应用, 使我们可以利用微分学的方法去进一步研究它的一些性质.

有了定理 2.1, 就可以证明重要的微积分学基本定理了.

## 2.2 Newton-Leibniz 公式

**定理 2.2** (微积分学基本定理) *若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 而 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

**证明** 由定理 2.1 可知 $\Phi(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 又已知 $F(x)$ 也是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则

$$\Phi(x)=F(x)+C.$$

令 $x=a$, 由 $\Phi(a)=0$ 得 $C=-F(a)$. 再令 $x=b$, 得

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a). \qquad \square$$

定理 2.2 称为 Newton-Leibniz 公式. 为简便计, $F(b)-F(a)$ 常记为 $[F(x)]_a^b$ 或 $F(x)\big|_a^b$. 于是 Newton-Leibniz 公式又可写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(x)\big|_a^b.$$

Newton-Leibniz 公式揭示了定积分与被积函数的原函数之间的联系, 它表明一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它的任意一个原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量, 因此, 定积分的计算本质上就是计算不定积分. 但是, 由于定积分与不定

积分相比较,定积分具有积分上下限,其值是一个确定的数,所以,定积分的计算更富有技巧性和复杂性.

**例 2.1** 计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

**解** 显然, $\frac{x^3}{3}$ 是 $x^2$ 的一个原函数, 所以

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

**例 2.2** 计算定积分 $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

**解** 当 $x<0$ 时, $\frac{1}{x}$ 的一个原函数是 $\ln|x|$, 所以

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

**例 2.3** 计算正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 $x$ 轴所围成的平面图形的面积 (图 6.4).

**解** 面积 $A=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$. 因 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数, 所以

$$A=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1)-(-1)=2.$$

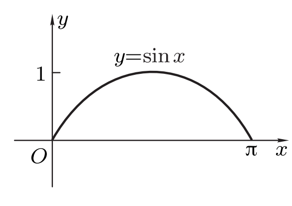

图 6.4

**例 2.4** 计算定积分 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x-1, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

**解** 由于被积函数是一分段函数, 由定积分关于积分区间的可加性, 得

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}.$$

**例 2.5** 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$.

**解** 这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式, 可用 L'Hospital 法则来计算, 分子是以 $\cos x$ 为上限的积分

$$-\int_1^{\cos x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

它可看成以 $u=\cos x$ 为中间变量的复合函数, 由定理 2.1, 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\int_1^{\cos x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right] &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_1^u \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\bigg|_{u=\cos x}(\cos x)' \\ &= -\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x) \\ &= \sin x\ \mathrm{e}^{-\cos^2 x},\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ \mathrm{e}^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

**例 2.6** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 记

$$\varphi(x) = \left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 - (x-a)\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t,$$

试证在 $[a,b]$ 上有 $\varphi'(x)\leqslant 0$, 并证明不等式

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

**证明**

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = {}& 2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t \\ & -(x-a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t \\ = {}& 2f(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t - (x-a)f^2(x).\end{aligned}$$

注意到 $t$ 是积分变量, $x$ 是函数 $\varphi(x)$ 的自变量, 于是

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \int_a^x 2f(x)f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f^2(x)\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^x [f^2(x) - 2f(x)f(t) + f^2(t)]\mathrm{d}t \\ &= -\int_a^x [f(x)-f(t)]^2\mathrm{d}t \leqslant 0,\end{aligned}$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调不增. 于是

$$\varphi(b)=\left[\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right]^2-(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\varphi(a)=0,$$

故

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

## 习题 6.2

**(A)**

1. 计算下列各题:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{\cos x}^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t$;

(2) 设 $x=\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,\ y=\int_0^{t^2}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t}{x^4}$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\sin^{\frac{3}{2}}t\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{x}t(t-\sin t)\mathrm{d}t}$.

2. 计算下列各定积分:

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^2 x(x-1)\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_{-2}^2\min\{1,x^2\}\mathrm{d}x$;

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant1,\\ \dfrac{1}{2}x^2, & x>1,\end{cases}$ 求 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**(B)**

1. 利用定积分求下列各极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

2. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

# §3　定积分的换元法和分部积分法

由 Newton-Leibniz 公式, 可将不定积分的换元积分法和分部积分法推广到定积分.

## 3.1　定积分的换元积分法

**定理 3.1**　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 函数 $x=\varphi(t)$ 满足下列条件:

(1) $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调且有连续导数;

(2) 当 $t$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时 $x=\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变动, 且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

公式 (2) 称为定积分的换元公式.

**证明**　根据原函数存在定理, 存在 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$. 因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

另一方面, $[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, 于是

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t &= F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\\ &= F(b)-F(a),\end{aligned}$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}\,t.$$

当 $\alpha>\beta$ 时, 公式 (2) 仍成立. □

应用换元公式时, 当用 $x=\varphi(t)$ 把原来的积分变量 $x$ 换成新的积分变量 $t$ 时, 积分限也要换成相应于新变量 $t$ 的积分限, 这时积分上限不一定大于下限. 在求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数之后不必像计算不定积分时那样再回到原来的变量 $x$.

**例 3.1** 计算定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

**解** 设 $x=a\sin t$, 则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$, 并且当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=a$ 时, $t=\dfrac{\pi}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi a^2}{4}.\end{aligned}$$

进而由定积分的几何意义可知, 积分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 为半径为 $a$ 的四分之一圆的面积. 故本题证明了圆面积公式: $S=\pi a^2$.

**例 3.2** 计算定积分 $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$.

**解** 设 $x=\sec t\ \left(\dfrac{\pi}{2}<t<\pi\right)$, 则 $\mathrm{d}x=\sec t\tan t\mathrm{d}t$; 且当 $x=-2$ 时, $t=\dfrac{2\pi}{3}$; 当 $x=-\sqrt{2}$ 时, $t=\dfrac{3\pi}{4}$. 于是

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sec t\tan t}{|\tan t|}\mathrm{d}t \\ &= -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \sec t\mathrm{d}t \\ &= -\left[\ln|\sec t+\tan t|\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

把公式 (2) 反过来用, 就有

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**例 3.3** 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\mathrm{d}x$.

**解** 令 $\cos x=t$, 则 $\mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$, 且当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $t=0$. 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\mathrm{d}x = -\int_1^0 t^3\mathrm{d}t = \int_0^1 t^3\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

此例中, 被积函数的原函数可用凑微分法积出, 在计算定积分时可不作换元. 例如

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \mathrm{d}x &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \mathrm{d}\cos x\\ &= -\left[\frac{1}{4}\cos^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

**例 3.4** 计算定积分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x}\mathrm{d}x$.

**解** 因为 $\sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x} = \sqrt{\sin^2 x \cos^2 x} = |\sin x \cos x|$, 当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时,

$$|\sin x \cos x| = \begin{cases} \sin x \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ -\sin x \cos x, & \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi,\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos x \mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\ &= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

**例 3.5** 设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 证明

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时},\\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时}.\end{cases}$$

**证明**

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

对积分 $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 作代换 $x = -t$, 则得

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$ 为偶函数时, $f(-x)=f(x)$, 当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(x)=-f(-x)$, 由此可知

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时}, \\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时}. \end{cases}$$ □

## 3.2 定积分的分部积分

**定理 3.2** 设函数 $u(x)$, $v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 则

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

**证明** 显然 (3) 中的积分存在, 只要证明等式成立即可. 由于

$$(uv)' = u'v + uv',$$

故

$$[uv]_a^b = \int_{a}^{b} u'v\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} uv'\mathrm{d}x,$$

移项, 得

$$\int_{a}^{b} uv'\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_{a}^{b} vu'\mathrm{d}x,$$

或

$$\int_{a}^{b} u\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_{a}^{b} v\mathrm{d}u.$$

公式 (3) 称为定积分的分部积分公式. □

**例 3.6** 计算定积分 $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$.

**解** 设 $u=\ln x,\ v'=x$, 则 $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x,\ v=\dfrac{x^2}{2}$. 代入公式 (3) 得

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.\end{aligned}$$

**例 3.7**　计算定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

**解**　令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=1$ 时, $t=1$. 于是

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t.$$

设 $u=t$, $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$, 则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}t, v=\mathrm{e}^t$, 于是

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = 1,$$

因此

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2.$$

**例 3.8**　证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\ \text{为正偶数}, \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\ \text{为大于 1 的正奇数}. \end{cases}$$

**证明**　设 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; 当 $x=0$ 时, $t=\dfrac{\pi}{2}$, 当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $t=0$, 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$ 由定积分的分部积分公式 (3) 有

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\mathrm{d}\cos x \\ &= -\left[\sin^{n-1} x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x \\ &= (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,\end{aligned}$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad (n\geqslant 2),$$

因为

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

所以, 当 $n$ 为正偶数时, 由递推公式得到

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

又因为

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1,$$

所以当 $n$ 为大于 1 的正奇数时, 由递推公式得

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

因此

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\ \text{为正偶数},\\[2ex]\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}, & n\ \text{为大于 1 的正奇数}.\end{cases}\end{aligned}$$ □

## 习题 6.3

**(A)**

1. 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$;　　(8) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^8\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;　　(10) $\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x$ ($m$ 为自然数).

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$, 并由此计算 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<0, \\ x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t,\ -1\leqslant x\leqslant 1$, 试讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

**(B)**

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x^2}, & x\geqslant 0, \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0, \end{cases}$ 求 $\displaystyle\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

2. 已知 $f(0)=1,\ f(2)=3,\ f'(2)=5$, 求 $\displaystyle\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(x)>0,\ f''(x)>0$. 证明

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2},$$

当 $f(x)>0$ 时从几何上说明该结论成立的理由.

# §4　定积分的应用

定积分来源于丰富的物理背景和几何背景. 因此, 定积分有着广泛的应用, 本节通过几何和物理的定积分应用实例, 展示数学思想方法的运用.

## 4.1　微元法

微元法是定积分应用的基础, 它给出了用定积分解决各种求和问题的一般思想方法.

定积分所要解决的问题是, 求非均匀分布的整体量 $Q$. 这种量 $Q$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 且在该区间上具有可加性, 即当把区间 $[a,b]$ 分成许多小区间时, 整体量 $Q$ 等于各部分量之和, 即

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i.$$

这种方法叫微分法.

几何中的面积、体积、弧长, 物理中的功、引力等量都具有这种特性, 这些量都可用定积分来计算.

用定积分计算量 $Q$, 关键在于把所求量通过定积分表达出来, 所采用的方法就是所谓的"微元法", 为了说明这种方法, 以定积分为例加以说明. 在曲边梯形面积和变速直线运动的路程的分析中, 必须经过以下四个步骤:

第一步. 分割: 将区间分割成局部的 $n$ 个小区间, 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 所求量 $Q$ 被分成 $n$ 个部分 $\Delta Q_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 于是 $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta Q_i$.

第二步. 近似: 求得部分量的近似值

$$\Delta Q_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i),$$

这里要求 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 是 $\Delta Q_i$ 的主部, 即 $\Delta Q_i - f(\xi_i)\Delta x_i$ 是比 $\Delta x_i$ 高阶的无穷小.

第三步. 求和: 求得整体量的近似值

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

第四步. 取极限: 当 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\} \to 0$ 时, 取极限得

$$Q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在实际应用中, 将以上四步简化成实用的两步:

(1) 分割区间 $[a, b]$, 把小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的下标 $i$ 去掉, 写成 $[x, x + \Delta x]$ $(a \leqslant x \leqslant x + \Delta x \leqslant b)$, 然后写出相应于这个小区间的部分量 $\Delta Q$ 的近似值

$$\Delta Q \approx f(x)\Delta x = f(x)\mathrm{d}x,$$

把 $f(x)\mathrm{d}x$ 称为整体量 $Q$ 在区间 $[a, b]$ 上的微元, 记为 $\mathrm{d}Q$, 即

$$\mathrm{d}Q = f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 整体量 $Q$ 的微元 $f(x)\mathrm{d}x$ 记为被积表达式在 $[a, b]$ 上进行积分, 就得到所求量 $Q$ 的积分表达式

$$Q = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

用上述两个步骤解决实际问题的方法称为微元法.

下面我们介绍用微元法应用的一些例子.

## 4.2　平面图形的面积

在第一节中我们知道, 由曲线 $y=f(x)$ ($f(x)\geqslant 0$) 及直线 $x=a, x=b$ ($a<b$) 与 $x$ 轴所围成的曲边梯形的面积 $A$ 是定积分

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这一节中, 我们将应用定积分来计算形状更加一般的, 由曲线所围成的平面区域的面积.

### 4.2.1 直角坐标情形

用微元法将下列图形面积表示为定积分.

(1) 设平面图形是由上、下两条曲线 $y=f(x), y=g(x)$ ($f(x)\geqslant g(x)$) 及 $x=a, x=b$ 所围成的图形 (图 6.5). 面积微元 $\mathrm{d}A=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$, 面积

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$$

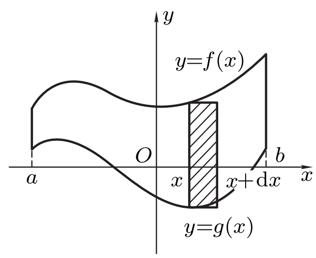


图 6.5

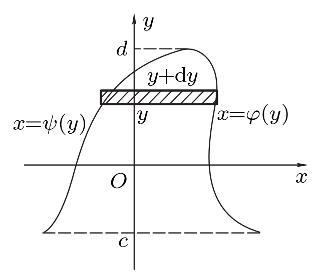


图 6.6

(2) 设平面图形是由左、右两条曲线 $x=\psi(y), x=\varphi(y)$ 及 $y=c, y=d$ 所围成的图形 (图 6.6). 取 $y$ 为积分变量, 面积微元

$$\mathrm{d}A=[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y,$$
$$A=\int_c^d [\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y.$$

**例 4.1**　求由曲线 $y^2=x, y=x^2$ 所围成的图形面积.

**解**　为了确定区域的范围, 先求出两条曲线的交点. 为此解方程即 $\begin{cases} y^2=x, \\ y=x^2, \end{cases}$ 得交点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$, 从而知道图形在直线 $x=0$ 及 $x=1$ 之间 (图 6.7).

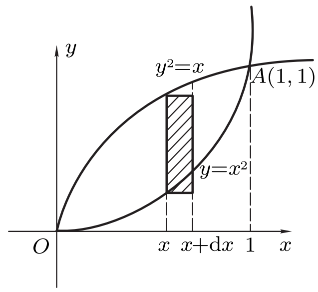


图 6.7

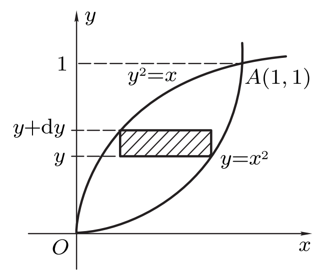


图 6.8

取横坐标 $x$ 为积分变量, 变化区间为 $[0,1]$, 把 $[0,1]$ 分成 $n$ 个小区间, 取出其中一个代表性小区间记为 $[x, x+\mathrm{d}x]$, 其长度为 $\mathrm{d}x$, 与 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 相应的小条的面积近似于高为 $\sqrt{x}-x^2$, 底为 $\mathrm{d}x$ 的小矩形的面积, 我们就得到了所求面积 $A$ 的微元

$$\mathrm{d}A = (\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x,$$

便得到了所求面积为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

本题也可选纵坐标 $y$ 作积分变量, 这时 $y$ 的变化范围是 $y$ 轴上的区间 $[0,1]$, 相应于 $[0,1]$ 上的代表性小区间 $[y, y+\mathrm{d}y]$ 的窄条的面积近似于高为 $\mathrm{d}y$, 底为 $\sqrt{y}-y^2$ 的窄矩形面积 (图6.8), 从而得到面积微元

$$\mathrm{d}A = (\sqrt{y}-y^2)\mathrm{d}y,$$

从而得到所围图形的面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\sqrt{y}-y^2)\mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**例 4.2** 求抛物线 $y^2=2x$ 和直线 $y=-x+4$ 所围成的图形的面积.

**解** 为了确定图形所在的范围, 先求出所给抛物线和直线的交点, 解方程组

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = -x+4 \end{cases}$$

得交点 $(2,2)$ 和 $(8,-4)$. 从而知道这图形在直线 $y=2$ 及 $y=-4$ 之间 (图 6.9).

现在选取纵坐标 $y$ 为积分变量, 则 $y$ 的变化范围为区间 $[-4,2]$, 从中选出代表性小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$, 与它相对应的面积微元为

$$\mathrm{d}A=\left[(4-y)-\frac{y^2}{2}\right]\mathrm{d}y \qquad (-4\leqslant y\leqslant 2),$$

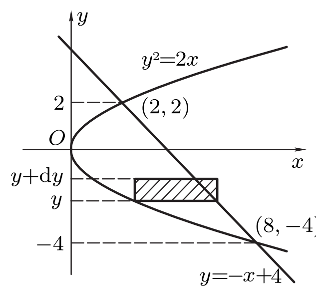


图 6.9

于是所求面积为

$$\begin{aligned}A&=\int_{-4}^{2}\left[(4-y)-\frac{y^2}{2}\right]\mathrm{d}y\\&=\left[4y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}y^3\right]_{-4}^{2}\\&=18.\end{aligned}$$

本题若取 $x$ 为积分变量, 则

$$A=\int_0^2[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})]\mathrm{d}x+\int_2^8[(-x+4)-(-\sqrt{2x})]\mathrm{d}x,$$

计算较麻烦, 所以选择 $y$ 为积分变量为宜.

一般说来在选择积分变量时应综合考查下列因素:

(1) 被积函数的原函数较易求得;

(2) 较少地分割区域;

(3) 积分上、下限比较简单.

另外, 在计算面积时, 若曲线由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出. 假设 $\varphi(t),\psi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$. 那么由曲线 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$, $x$ 轴以及直线 $x=a,x=b$ 所围成的平面图形面积为

$$A=\int_a^b|y|\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta|\psi(t)|\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

**例 4.3** 求椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

所围成的图形的面积.

**解**　若从椭圆方程中解出 $y$, 再代入面积公式

$$S = 4\int_0^a y\mathrm{d}x,$$

即得到椭圆面积. 但是, 这样做将会遇到复杂的积分计算.

若利用椭圆的参数方程

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

则有

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t(-a\sin t)\mathrm{d}t \\ &= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\mathrm{d}t \\ &= 4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

#### 4.2.2 极坐标情形

考虑由极坐标方程 $r = r(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 所给出的平面连续曲线与两个射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围成的图形 (简称曲边扇形) 的面积 $A$. 取极角 $\theta$ 为积分变量, 它的变化区间为 $[\alpha, \beta]$. 相应于任一小区间 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$ 的小曲边扇形的面积可用半径为 $r = r(\theta)$, 中心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的圆扇形的面积来近似代替 (图 6.10), 从而得到小曲边扇形面积的近似值即曲边扇形的面积微元

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

以此为被积表达式, 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上作定积分, 便得所求曲边扇形的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

**例 4.4**　求心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$ 所围成的图形的面积.

**解**　心脏线所围成的图形 (如图 6.11), 这个图形对称于极轴, 因此所求图形的面积 $A$ 是极轴以上部分图形 $A_1$ 的两倍. 按照极坐标下曲边扇形的面积计算公式, 从而得到面积

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^\pi \frac{1}{2}a^2(1 + \cos\theta)^2\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

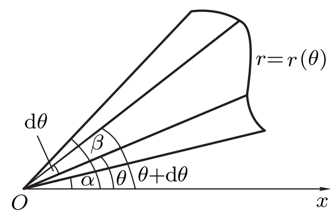


图 6.10

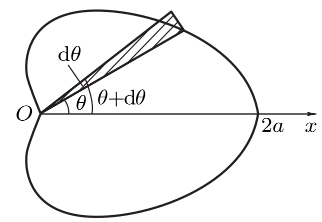


图 6.11

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{3}{4}\pi a^2. \\
A &= 2A_1 = \frac{3}{2}\pi a^2.
\end{aligned}
$$

## 4.3　体积

在这一节里, 我们将简单介绍如何用定积分来计算某些特殊立体的体积问题, 至于更为一般的立体的体积计算问题, 将在下册重积分里介绍.

**1. 平行截面面积为已知的立体体积**

设一空间立体, 是由曲面及垂直于 $x$ 轴的两个平面 $x = a, x = b$ 所围成, 且垂直于 $x$ 轴的平面与该立体相交的截面面积 $A(x)$ 是可求的, 则该立体的体积可用定积分计算 (图 6.12).

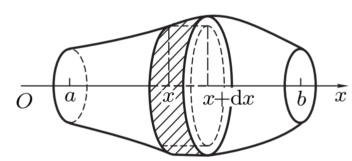


图 6.12

设 $A(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 为了求出体积微元, 在任意微小区间 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [a,b]$ 上视 $A(x)$ 不变, 则相应于区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的立体薄片的体积近似地等于以 $A(x)$ 为底, $\mathrm{d}x$ 为高的柱体的体积, 即体积微元为 $\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x$, 因此, 所求立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

**例 4.5**　一平面经过半径为 $R$ 的圆柱体的底面中心, 并与底面成角 $\alpha$ (图 6.13). 计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

**解**　取这平面与圆柱的底面的交线为 $x$ 轴, 底面上过圆中心且垂直于 $x$ 轴的直线为 $y$ 轴, 则底圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$. 在立体中过 $x$ 轴上 $(x,0)$ 点且垂直于 $x$ 轴的截面是一个直角三角形, 其两条直角边长度分别为 $y$ 和 $y \cdot \tan\alpha$, 即

$\sqrt{R^2-x^2}$ 及 $\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$, 因此, 截面面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha,$$

从而

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\alpha\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$$

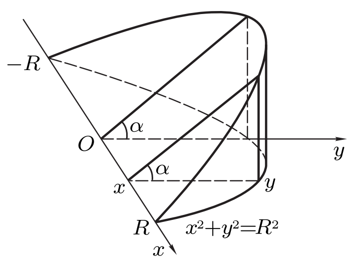


图 6.13

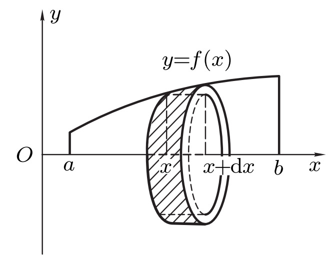


图 6.14

**2. 旋转体的体积**

旋转体就是由一个平面图形绕这个平面内一条直线旋转一周而成的立体, 这条直线称为旋转轴.

设旋转体由 $Oxy$ 平面内连续曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a, y=b$, 及 $x$ 轴所围的曲边梯形绕 $x$ 轴旋转得到, 显然过点 $x$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 且垂直于 $x$ 轴的截面是以 $|f(x)|$ 为半径的圆 (图 6.14), 因而 $A(x)=\pi f^2(x)$, 所以旋转体的体积

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x.$$

同样, 由连续曲线 $x=\varphi(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$, 直线 $y=c, y=d$, 及 $y$ 轴所围曲边梯形绕 $y$ 轴旋转所得旋转体体积是

$$V=\int_c^d \pi\varphi^2(y)\mathrm{d}y.$$

**例 4.6** 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形绕 $x$ 轴旋转而成的旋转体的体积.

**解** 这个旋转体可以看作是由 $Oxy$ 平面内上半椭圆 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 与 $x$ 轴

围成的图形绕 $x$ 轴旋转一周而成的立体. 因此

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^{a} \pi \left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right]^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{4}{3}\pi ab^2.
\end{aligned}
$$

**例 4.7** 求圆 $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a<b)$ 绕 $x$ 轴旋转所成的旋转体的体积 (图6.15).

**解** 将圆方程改写为 $y=b\pm\sqrt{a^2-x^2}$, 上半圆弧方程为 $y_1=b+\sqrt{a^2-x^2}$, 下半圆弧方程为 $y_2=b-\sqrt{a^2-x^2}$, 旋转体是由这两个半圆弧与直线 $x=a, x=-a$ 及 $x$ 轴所围成的曲边梯形绕 $x$ 轴旋转所得体积之差, 于是体积微元

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \pi y_1^2(x)\mathrm{d}x - \pi y_2^2(x)\mathrm{d}x = \pi[y_1^2(x)-y_2^2(x)]\mathrm{d}x \\
&= 4b\pi\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

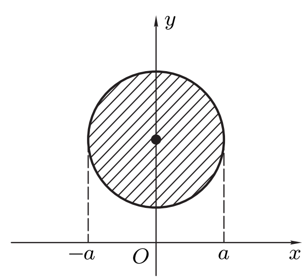

图 6.15

所以旋转体的体积为

$$
V = \int_{-a}^{a} 4b\pi\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = 2\pi^2a^2b.
$$

## 4.4 平面曲线的弧长

本节将分别就曲线方程为直角坐标情形、参数方程情形和极坐标情形来进行讨论, 讨论的方法仍然是微元法.

**1. 直角坐标情形**

设曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出, 其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数, 即曲线 $y=f(x)$ 有连续转动的切线, 这时称曲线 $y=f(x)$ 为光滑曲线弧.

取横坐标 $x$ 为积分变量, 它的变化区间为 $[a,b]$, 分割区间 $[a,b]$, 任取小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[a,b]$, 此小段弧的长度近似等于该曲线在点 $(x,f(x))$ 处的切线上相应的一小段的长度 (图 6.16), 而该小段长度为

$$
\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x,
$$

从而得到弧长微元 (即弧微分)

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x,$$

于是曲线弧 $y=f(x)\ \ (a\leqslant x\leqslant b)$ 的弧长公式

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

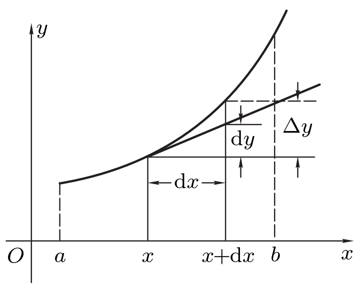


图 6.16

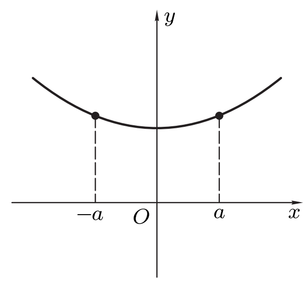


图 6.17

**例 4.8** 两根电线杆之间的电线, 由于其本身的重量而下垂成曲线形, 这一曲线称为悬链线, 求悬链线 $y=a\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}=\dfrac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$ 由 $x=-a$ 到 $x=a$ 的弧长 (图 6.17).

**解** 已知 $y'=\mathrm{sh}\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$, 所以

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\mathrm{d}x=\mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}s&=\int_{-a}^{a}\mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x\\&=2\int_0^a\mathrm{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x\\&=2a\left[\mathrm{sh}\frac{x}{a}\right]_0^a\\&=2a\mathrm{sh}1=a(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}).\end{aligned}$$

**2. 参数方程情形**

曲线由参数方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出, 其中 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 具有连续导数.

取 $t$ 为积分变量, 变化区间为 $[\alpha,\beta]$, 弧微元

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2+\psi'^2(t)(\mathrm{d}t)^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t,$$

于是曲线的弧长为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

**例 4.9** 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的周长.

**解** 为了计算方便, 将椭圆方程表示为参数方程 $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ 的形式.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s&=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\mathrm{d}t\\&=a\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

这里 $k=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 是椭圆离心率.

由于曲线是对称的, 因此

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4a\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\mathrm{d}t.$$

此积分称为椭圆积分. 由于被积函数的原函数不能表示成有限形式, 所以不能用 Newton-Leibniz 公式进行计算, 对于这种情况, 常采用近似计算 (数值积分) 或借助数学软件进行数值积分的方法求曲线的弧长.

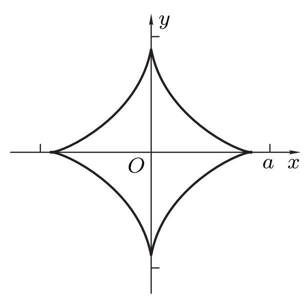

图 6.18

**例 4.10** 求星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的全长 (图 6.18).

**解** 星形线关于两个坐标轴都对称, 因此星形线的全长是它在第一象限部分弧长的 4 倍

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s&=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t\\&=3a\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\mathrm{d}t\\&=3a|\sin t\cos t|\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

于是星形线的全长

$$s=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t\cos t|\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2t\mathrm{d}t\\
&= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\mathrm{d}(2t) = 6a.
\end{aligned}
$$

**3. 极坐标系情形**

设曲线弧由极坐标方程 $r=r(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 给出, $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数.

取 $\theta$ 为参数, 由直角坐标与极坐标系的关系可得曲线弧的参数方程:

$$
\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= [r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta,\\
\mathrm{d}y &= [r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

得弧微元为

$$
\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta,
$$

由此曲线弧长为

$$
s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.
$$

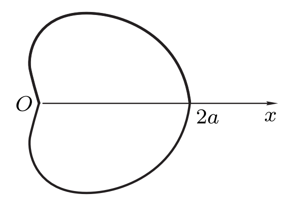

图 6.19

**例 4.11** 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 的全长 (图 6.19).

**解** 心脏线关于极轴对称, 弧微元为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta\\
&= \sqrt{a^2(2+2\cos\theta)}\mathrm{d}\theta\\
&= 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),
\end{aligned}
$$

则心脏线的全长为

$$
\begin{aligned}
s &= 2\int_0^\pi 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta\\
&= 8a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 8a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi\\
&= 8a.
\end{aligned}
$$

## 4.5　定积分在物理上的应用

**1. 变力对物体作功问题**

由物理学知道, 当物体受恒力作用作直线运动时, 如果力的方向与物体的运动方向一致, 则物体移动距离为 $S$ 时, 力 $F$ 对物体所作的功为

$$W = FS.$$

如果物体在变力 $F(x)$ 作用下, 作直线运动, 变力对物体所作的功就是一个非均匀变化问题, 我们可以用定积分的方法来解决. 举例如下:

**例 4.12**　一圆柱形的贮水桶, 高为 5m, 底半径为 3m. 桶内盛满水. 试求要把桶内的水全部吸出时所作的功.

**解**　如图 6.20, 取深度 $x$ 为积分变量, 高的变化区间为 $[0,5]$. $\forall x \in [0,5]$ 则 $[x, x+\mathrm{d}x] \subset [0,5]$. 且薄层 $\mathrm{d}x$ 的水所产生的重力为 $g\pi \cdot 3^2\mathrm{d}x$. 于是将此薄层水吸出桶外需作的功近似于

$$\mathrm{d}W = g\pi 3^2 x\mathrm{d}x,$$

故所求的功为

$$W = \int_0^5 \mathrm{d}W = \int_0^5 g\pi 3^2 x\mathrm{d}x \approx 3\ 462 \text{ kJ}.$$

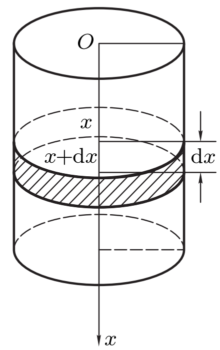

图 6.20

**例 4.13**　自地面垂直向上发射火箭. 如要火箭飞离地面为 $h$ 的高度 (忽略空气阻力), 问火箭的初速度至少应为多少?

**解**　设地球半径为 $R$, 质量为 $M$, 火箭的质量为 $m$. 根据万有引力定律, 当火箭离地面 $x$ 处所受的力为

$$f(x) = \frac{kMm}{(R+x)^2}.$$

注意: 当 $x=0$ 时 $f(0)=mg$. 故 $kM = R^2 g$. 于是

$$f(x) = \frac{R^2 mg}{(R+x)^2},$$

故有

$$\mathrm{d}W = \frac{R^2 mg}{(R+x)^2}\mathrm{d}x,$$

因此

$$W = \int_0^h \frac{R^2 mg}{(R+x)^2}\mathrm{d}x = mg\frac{Rh}{R+h}.$$

由于这些功来自开始时火箭的动能, 因此要设火箭的初速为 $v_0$, 则应有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geqslant mg\frac{Rh}{R+h},$$

即火箭的初速度 $v_0 \geqslant \sqrt{2ghR/(R+h)}$.

**例 4.14** 把一个带有 $+q$ 的点电荷放在 $r$ 轴的原点 $O$ 处, 它产生的电场相对周围的电荷产生作用力. 如果有一个单位正电荷放在这个电场中距 $O$ 点 $r$ 的地方. 那么电场对它的作用力大小为 $F = k\frac{q}{r^2}$ ($k$ 为常数), 如图 6.21. 当这个正电荷在电场中从 $r=a$ 处沿 $r$ 轴移动到点 $r=b$ $(a<b)$ 处时, 计算电场力对它所作的功.

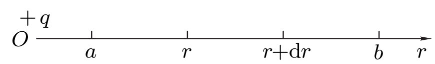


图 6.21

**解** 由题意知电场对单位正电荷的作用力是不断变化的. 取 $r$ 为积分变量, 它的变化区间为 $[a,b]$. 在 $[a,b]$ 上任取一小区间 $[r, r+\mathrm{d}r]$. 当正电荷从 $r$ 移动到 $r+\mathrm{d}r$ 时, 其电场力所作的功近似于

$$\mathrm{d}W = \frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r,$$

于是

$$W = \int_a^b \mathrm{d}W = \int_a^b \frac{kq}{r^2}\mathrm{d}r = kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^b = kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

**2. 液体的静压力问题**

从物理学知道, 在液体深为 $d$ 处的压强为 $p=\mu gd$. 其中 $\mu$ 为液体密度, $g$ 为重力加速度. 如果有一面积为 $A$ 的平板, 水平地置于该液体深度为 $d$ 处, 则平板一侧所受到的压力为 $F=pA$. 如果平板非水平放置于液体中, 那么在不同深度处, 压强不相等. 所以平板一侧所受的压力就不能按上述方法计算. 我们可用定积分的方法来计算. 举例如下:

**例 4.15** 有一等腰梯形闸门, 其上底长为 10m, 下底长为 6m, 高为 20m. 该闸门与水面垂直, 且上底恰好位于水平面上. 求该闸门一侧所受到的水压力 (水的密度$\rho = 1.0\times10^3\mathrm{kg/m^3}$).

**解** 如图 6.22, 此闸门长底边的中点为坐标原点, 垂直向下为 $x$ 轴. 取 $x$ 为积分变量, 其变化区间为 $[0,20]$, 在 $[0,20]$ 上任取一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$. 闸门上相应于该小区间的各点所受到的水压力近似为

$$\mathrm{d}F = gx\left(10-\frac{x}{5}\right)\mathrm{d}x,$$

故所求的压力为

$$F=\int_0^{20} gx\left(10-\frac{x}{5}\right)\mathrm{d}x=g\left[5x^2-\frac{x^3}{15}\right]_0^{20}$$
$$=g\left(2\,000-\frac{1\,600}{3}\right)\approx 1.437\,3\times 10^7\text{N}.$$

**例 4.16** 一个横放着的圆柱形水桶, 桶内装有半桶水. 设桶的底面半径为 $R$, 水的密度为 $\rho$. 求桶的一个截面上受到的压力.

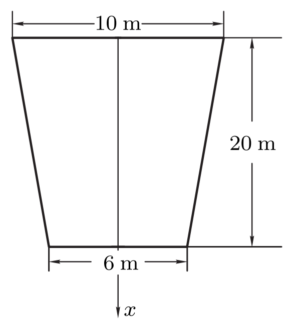


图 6.22

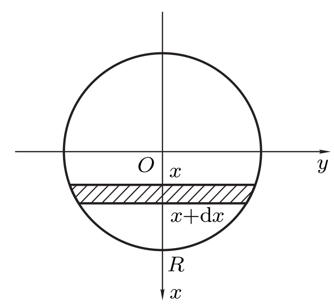


图 6.23

**解** 建立如图 6.23 所示的坐标系, 取 $x$ 为积分变量, 其变化范围是 $[0,R]$. 在 $[0,R]$ 上任取一个小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$, 截面相对于该小区间的各点所受到的压力近似于

$$\mathrm{d}F=2\rho gx\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x,$$

故所求压力为

$$F=\int_0^R 2\rho gx\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\rho g\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R$$
$$=\frac{2}{3}\rho gR^3.$$

**3. 引力问题**

由万有引力定律我们知道, 质量分别为 $m_1,m_2$, 相距为 $r$ 的两个质点之间的引力大小为 $F=k\dfrac{m_1m_2}{r^2}$ ($k$ 为引力常数), 引力方向为沿两质点的连线方向.

对于计算一个物体对一个质点的引力问题, 由于物体上各点的距离是变化的, 所以各点对该质点的引力也在变化, 因此不能直接使用上面的公式计算. 下面我们用定积分的方法来求其力. 举例如下.

**例 4.17** 求星形线 $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ (参数 $\theta$ 为曲线上点向径与 $x$ 轴的正向夹角) 在第一象限弧对位于坐标原点、质量为 $m$ 的质点的引力, 假设曲线上每一点的密度等于这点到原点的距离的立方.

**解** 建立如图 6.24 所示的直角坐标系, 取 $\theta$ 为积分变量, 则 $\theta$ 的变化范围是 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, 对于 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的任何一个小区间 $[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$, 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta \\ &= 3a\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

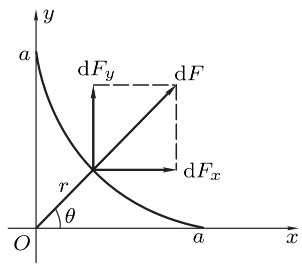


图 6.24

所以该区间对原点的引力近似于

$$\mathrm{d}F_x = km3a^2\cos^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$
$$\mathrm{d}F_y = km3a^2\sin^4\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

其中 $k$ 为引力常数.

故

$$F_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} km3a^2\cos^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = -3a^2\frac{\cos^5\theta}{5}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} km = \frac{3}{5}a^2km,$$
$$F_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} km3a^2\sin^4\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = 3a^2\frac{\sin^5\theta}{5}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} km = \frac{3}{5}a^2km.$$

## 习题 6.4

**(A)**

1. 求下列曲线所围成图形的面积:

(1) 曲线 $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x = 1$;

(2) 曲线 $x = 5y^2$ 与曲线 $x = 1 + y^2$;

(3) 曲线 $x = 2\cos t$ 与曲线 $y = 4\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

(4) 曲线 $r = \sqrt{2}\sin\theta$ 与曲线 $r^2 = \cos 2\theta$.

2. 求抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 及其在点 $(0, -3)$ 和 $(3, 0)$ 处切线所围图形的面积.

3. 已知曲线 $y = a\sqrt{x}$ $(a > 0)$ 与曲线 $y = \ln\sqrt{x}$ 在点 $(x_0, y_0)$ 处有公共切线, 试求:

(1) 常数 $a$ 及切点 $(x_0, y_0)$; (2) 两曲线与 $x$ 轴围成图形的面积.

4. 如图 6.25. 设曲线方程 $y = x^2 + \dfrac{1}{2}$, 梯形 $OABC$ 的面积为 $D$, 曲边梯形 $OABC$ 的面积为 $D_1$, 点 $A$ 的坐标为 $(a, 0), a > 0$. 证明: $\dfrac{D}{D_1} < \dfrac{3}{2}$.

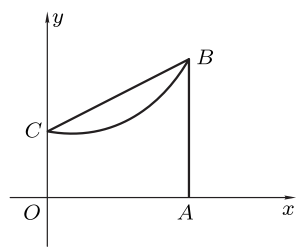


图 6.25

5. 求曲线 $y=x^2$ 及 $x=y^2$ 所围图形绕 $x$ 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

6. 求摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱与 $y=0$ 所围图形绕 $y=2a$ 旋转一周所生成的旋转体的体积.

7. 求圆域 $x^2+(y-5)^2 \leqslant 16$ 绕 $x$ 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

8. 证明: 曲边梯形 $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 绕 $y$ 轴旋转一周所生成的旋转体的体积为 $V=2\pi\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

9. 设一立体垂直于 $x$ 轴的横截面的面积为 $S(x)$, 且 $S(x)=Ax^2+Bx+C$ $(a \leqslant x \leqslant b, A, B, C$ 为常数), 求证立体的体积为

$$V=\frac{b-a}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right].$$

10. 求曲线 $y=\ln x$ 上相应 $\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

11. 求曲线 $y=\displaystyle\int_0^x \tan t\mathrm{d}t$ 相应与 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ 的一段弧的长度.

12. 半径为 $R$ 的球沉入水中, 上顶点与水面相切, 将球从水中取出要作多少功 (球的比重为 1).

13. 某水坝中有一个三角形的闸门, 这闸门顶点朝下笔直竖立在水中, 它的底边与水平面相齐, 已知三角形底边长为 $a$m, 高为 $h$m, 求闸门所受的水压力.

14. 用铁锤将铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 在铁锤击第一次时, 能将铁钉击入木板内 1cm, 如果铁锤每次打击所做的功相等, 问铁锤第二次能把铁钉又击入多少厘米?

## §5 反 常 积 分

反常积分也称为**广义积分**. 我们把它分成两类 —— 无穷积分和无界函数积分来讨论.

## 5.1 无穷积分

**引例** 设在坐标原点 $O$ 处放置一个带电量为 $q$ 的点电荷, 求在其形成的电场中到原点距离为 $a$ 的 $A$ 点处的电势 (也称电位).

**解** 根据物理学知识, 所谓 $A$ 点的电势, 就是单位试验电荷从 $A$ 点移到无穷远处, 电场力对它所作的功. 我们可以先求在 $OA$ 的延长线上单位试验电荷由 $A$ 点移到 $B$ 点电场力所作的功 $W(b)$, 其中 $b$ 是 $B$ 点到原点的距离. 于是

$$W(b)=\int_a^b k\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r,$$

显然功 $W(b)$ 是随 $b$ 的大小而变化的, 很自然地 $A$ 点的电势应为

$$\begin{aligned}V_a=\lim_{b\to+\infty}W(b)&=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b k\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r\\&=\lim_{b\to+\infty}kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\\&=\frac{kq}{a}.\end{aligned}$$

这里我们看到电势 $V_a$ 是由 (变上限) 定积分的极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b k\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r$$

来表示的. 为了方便讨论这类 "定积分的极限" 问题, 我们给出无穷积分的概念.

**1. 无穷积分的定义**

**定义 5.1** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 对于 $\forall b\in(a,+\infty)$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 称

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的**反常积分**或**无穷积分**. 记为

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则称无穷积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

**收敛**, 否则称其**发散**.

类似地, 可以定义 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

及其敛散性.

**定义 5.2** 设 $a$ 是一实数, 称 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分 (或无穷积分), 记为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

当无穷积分 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛时, 称无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

**收敛**, 否则称其**发散**.

由于无穷积分

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

可通过变量代换 $t=-x$ 变为

$$\int_{-a}^{+\infty} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{b}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $b=-a, g(t)=f(-t)$. 故只需讨论 (4) 式中定义的无穷积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 即可.

**例 5.1** 利用定义判断下列无穷积分的敛散性, 如收敛, 则求其值.

(1) $\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$; (3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

**解**

(1)

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b\\ &= 1.\end{aligned}$$

在用定义计算出了反常积分的值的同时, 这个积分自然是收敛的. 计算反常积分时, 为了书写方便, 经常省略极限号, 直接把 $+\infty$ (或 $-\infty$) 作为上 (下) 限代入. 按照此种写法, 本题可改写为:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= -\left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1,\end{aligned}$$

其中将 $+\infty$ 代入原函数中的含义就是对原函数求 $x \to +\infty$ 的极限.

(2) 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \sin x\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x,$$

而

$$\int_0^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} (-\cos x)|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(1-\cos b)$$

不存在, 即 $\int_0^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$ 发散, 从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\mathrm{d}x$$

发散.

(3)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \arctan x|_{-\infty}^{0} + \arctan x|_0^{+\infty} \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 \\ &= \pi.\end{aligned}$$

**例 5.2** 证明无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ $(p>0)$ 当 $p>1$ 时收敛, $p \leqslant 1$ 时发散.

**证** 当 $p=1$ 时,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln b \\ &= +\infty;\end{aligned}$$

当 $p \neq 1$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p<1, \\ \dfrac{1}{p-1}, & p>1, \end{cases}$$

所以, 当 $p \leqslant 1$ 时, 此无穷积分发散; 当 $p>1$ 时, 此无穷积分收敛.

无穷区间上的反常积分有着与定积分相类似的几何意义. 设在 $[a,+\infty)$ 上 $f(x) \geqslant 0$, 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时, 其值等于由 $x=a, x=b\ (b>a), y=0$ 和 $y=f(x)$ 围成的曲边梯形面积 $A(b)$. 当 $b \to +\infty$ 时的极限, 即由 $x=a, y=0$ 及 $y=f(x)$ 围成的无界图形的面积 (如图 6.26). 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时, 则上述无界图形没有有限的面积.

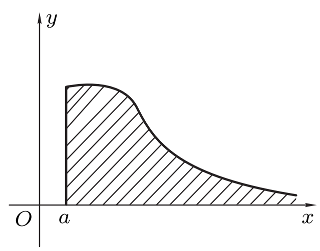


图 6.26

**2. 无穷积分敛散性的判别**

在上一段中我们知道, 根据定义判别一个无穷积分的敛散性, 相当于计算一个变上限定积分的极限. 这种计算有时相当复杂, 甚至很困难, 而同时有些问题涉及的无穷积分只需知道其是否收敛即可, 为此本段讨论反常积分的收敛判别法.

**无穷积分的比较判别法** 设 $f(x), g(x) \in \mathrm{C}[a,+\infty)$, 且当 $x \in [c,+\infty) \subset [a,+\infty)$ 时, 有 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 那么

(1) 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

**证明** (1) 由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 而定积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 是常数, 因此 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 具有同样的敛散性. 对

于 $b>c$, 有

$$I(b) \triangleq \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_c^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_c^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x,$$

这表明 $I(b)$ 是有界的.

由于 $f(x)\geqslant 0$, 故 $I(b)$ 在 $b\in[c,+\infty)$ 上单调增加, 从而

$$\lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在, 即 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 于是 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 可以根据 (1) 的结论并利用反证法推出. □

**例 5.3** 判断无穷积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+\mathrm{e}^{x^2})}$$

的敛散性.

**解** 由于

$$\frac{1}{x^2(1+\mathrm{e}^{x^2})} \leqslant \frac{1}{x^2},$$

并且

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^{+\infty} = 1 \quad (\text{收敛}),$$

再由无穷积分的比较判别法, 于是知无穷积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+\mathrm{e}^{x^2})}$$

收敛.

用比较判别法时, 关键是要找到一个已知其敛散性的无穷积分来进行比较, 我们常用 $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (a>0)$ 作比较. 此积分在 $p>1$ 时收敛, $p\leqslant 1$ 时发散. 另外, 比较法的极限形式可减少寻找不等式的麻烦. 于是可以利用下面的结论来判别一些无穷积分的敛散性.

**比较判别法的极限形式** 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)\ (a>0)$ 上非负连续, 且

$$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = l,$$

则

(1) 当 $0 \leqslant l < +\infty$ 且 $p > 1$ 时, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $0 < l \leqslant +\infty$ 且 $p \leqslant 1$ 时, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

**证明** (1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = l$ 知, 对于 $\varepsilon_0 = 1$ 存在 $X \geqslant a$, 当 $x > X$ 时

$$x^p f(x) < l + \varepsilon_0 = l + 1,$$

即

$$f(x) < \frac{l+1}{x^p},\ x > X.$$

而当 $p > 1$ 时, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{l+1}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, 由比较判别法,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

下面证 (2). 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = l \quad (0 < l \leqslant +\infty)$ 知, 存在常数 $X > a$, 使得当 $x > X$ 时

$$x^p f(x) \geqslant \frac{l}{2},$$

即

$$f(x) \geqslant \frac{l}{2x^p}.$$

而当 $p \leqslant 1$ 时, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{l}{2x^p}\mathrm{d}x$ 发散, 由比较判别法知

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

发散. □

**例 5.4** 判别下列无穷积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\lambda}\ln x}$; (4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$.

**解** (1) 由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}} = 1,$$

且 $p=\dfrac{3}{2}>1$, 根据比较判别法的极限形式, 得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$$

收敛.

(2) 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=1,$$

且 $\dfrac{1}{2}<1$, 根据比较判别法的极限形式, 于是知

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

发散.

(3) 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^p\frac{1}{x^\lambda\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-\lambda}}{\ln x}=\begin{cases}0, & \lambda\geqslant p,\\ +\infty, & \lambda<p,\end{cases}$$

所以, 当 $\lambda>1$ 时, 总存在 $p>1$, 使得 $\lambda\geqslant p>1$, 由比较法的极限形式知, 无穷积分收敛; 当 $\lambda\leqslant 1$ 时, 取 $p=1$ 知此时无穷积分发散. 综上所述, 无穷积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\lambda\ln x}$$

当 $\lambda>1$ 时收敛, $\lambda\leqslant 1$ 时发散.

(4) 由于

$$\lim_{x\to+\infty}x\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

根据比较判别法的极限形式, 得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$$

发散.

比较判别法及其极限形式仅适用于被积函数是非负的情况. 当被积函数不满足非负条件时, 我们可以通过绝对敛散性质来判别某些无穷积分的敛散性.

**定义 5.3** *设对于任何的 $b>a$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 若无穷积分*

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛, 则称无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

为**绝对收敛**.

**定理 5.1** 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则此无穷积分收敛.

**证明** 令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$, 则 $\varphi(x)$ 非负, 对任意的 $b>a$, 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\varphi(x)\leqslant|f(x)|$, 由比较判别法知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. □

**例 5.5** 判断 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x^2\mathrm{d}x$ 的敛散性.

**解** 由于

$$|\mathrm{e}^{-x}\cos x^2|\leqslant \mathrm{e}^{-x},$$

而

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1,$$

由比较判别法知 $\int_0^{+\infty} |\mathrm{e}^{-x}\cos x^2|\mathrm{d}x$ 收敛, 根据定理 5.1, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x^2\mathrm{d}x$ 收敛.

## 5.2 无界函数积分

**1. 无界函数积分的定义**

本节我们讨论另一种反常积分, 其特点是积分区间有界, 而被积函数在积分区间的某些点上无定义, 且在这些点的任何邻域内无界, 称这样的点为**瑕点**.

**定义 5.4** 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义, 在 $x=a$ 点的附近无界 (即 $a$ 点为 $f(x)$ 的瑕点), 并且对 $\forall c\in(a,b), f(x)$ 在 $[c,b]$ 上可积, 则称

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

为无界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的反常积分, 也称**无界函数积分**或**瑕积分**. 记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

若极限 $\lim\limits_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 则称无界函数积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

**收敛**, 否则称其**发散**.

类似地, 可以定义右端点为瑕点的无界函数积分及其敛散性, 即 $b$ 是 $f(x)$ 的瑕点,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有限个瑕点, 且在任何不含瑕点的子区间上均可积时, 我们可以将区间 $[a,b]$ 分成有限个区间, 使每个区间仅有一个瑕点且使其为区间端点. 据此, 在讨论带有瑕点的积分的敛散性时, 只对 (6) 或 (7) 两种情况来讨论即可. 如果讨论的所有瑕积分均收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 否则其发散.

**例 5.6** 判断 $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$ 的敛散性.

**解** 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$, 所以 $x=0$ 是瑕点.

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \ln x\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0^+}[x\ln x - x]_c^1 = -1,$$

因此, $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$ 收敛.

**例 5.7** 判别 $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ 的敛散性.

**解** 显然 $x=1$ 是被积函数

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

的无穷间断点, 此积分是反常积分. 于是

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{\eta\to 0^+}\int_{1+\eta}^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[3(-\varepsilon)^{\frac{1}{3}}+3] + \lim_{\eta\to 0^+}[3\cdot 2^{\frac{1}{3}} - 3\eta^{\frac{1}{3}}] \\
&= 3+3\sqrt[3]{2},
\end{aligned}$$

故此反常积分收敛, 其值为 $3+3\sqrt[3]{2}$.

**例 5.8** 讨论积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}(a<b, p>0)$ 的敛散性.

**解** 显然 $x=b$ 是被积函数

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$$

的瑕点, 此积分是无界函数的积分. 对于 $c\in(a,b)$ 有

$$\int_a^c \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}[(b-a)^{1-p}-(b-c)^{1-p}], & p\neq 1,\\ \ln(b-a)-\ln(b-c), & p=1,\end{cases}$$

于是

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(b-a)^{1-p}, & p<1,\\ +\infty, & p\geqslant 1,\end{cases}$$

因此, 积分 $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p}$ 当 $0<p<1$ 时收敛, $p\geqslant 1$ 时发散.

类似地, 积分 $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}(a<b,q>0)$ 当 $0<q<1$ 时收敛, $q\geqslant 1$ 时发散.

形如 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的积分, 可能是定积分, 也可能是反常积分, 在实际计算时, 需要考察被积函数有无瑕点, 以此来决定如何计算或判别敛散性. 例如, 若把 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 看成普通的定积分, 则有

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^1=-[1-(-1)]=-2,$$

这显然是错误的. 问题发生在 $\dfrac{1}{x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上不可积, 因 $x=0$ 是其无穷间断点, 不能用 Newton–Leibniz 公式计算. 由例 5.8 的结论知, 反常积分 $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 与 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 均发散, 故 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散.

以 $b$ 为瑕点的反常积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 可以通过变换 $y=\dfrac{1}{b-x}$ 成为 $\displaystyle\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(\frac{by-1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$. 即无界函数积分与无穷积分是密切相关的.

**2. 无界函数积分敛散性的判别**

本段中讨论的类似于无穷积分的一些结论, 我们将不加证明地给出. 并且仅针对右端点 $b$ 是瑕点的情况进行讨论.

**无界函数积分的比较判别法**　设 $f(x),g(x)\in \mathrm{C}[a,b)$, $b$ 是它们的瑕点, 且当 $x\in[c,b)\subset[a,b)$ 时, 有

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x),$$

则

(1) 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

最常用的比较判别法的极限形式:

**无界函数积分比较判别法的极限形式** 设 $f(x), g(x) \in \mathrm{C}[a,b), b$ 是它们的瑕点, 且 $g(x)>0$. 又 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, 则

(1) 当 $0\leqslant l<+\infty$ 时, 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 当 $0<l\leqslant+\infty$ 时, 若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

比较判别法的极限形式的方便之处在于当 $0<l<+\infty$ 时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性. 其实, 我们在实际应用时经常取 $g(x)=\dfrac{1}{(b-x)^q}$, 此时, 若

$$\lim_{x\to b^-}(b-x)^q f(x)=l,$$

则当 $0\leqslant l<+\infty$ 时, 若 $q<1$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; 当 $0<l\leqslant+\infty$ 时, 若 $q\geqslant 1$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

当 $a$ 为瑕点时, 也有类似的结论.

**例 5.9** 判别 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\ln(1+x)}$ 的敛散性.

**解** $x=0$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ 的瑕点, 且在 $(0,1]$ 上 $f(x)>0$. 利用 L'Hospital 法则容易求得

$$\lim_{x\to 0^+}(x-0)\frac{1}{\ln(1+x)}=1,$$

所以无界函数积分 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\ln(1+x)}$ 发散.

**例 5.10** 判断 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ 的敛散性, 其中常数 $k$ 满足 $|k|<1$.

**解**　$x=1$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ 的瑕点, 在 $[0,1)$ 上 $f(x)>0$. 又

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}},$$

由比较判别法的极限形式知, 积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ 收敛.

和无穷积分的情况类似, 对于无界函数积分, 当被积函数不满足非负条件时, 我们可以通过绝对敛散性来判别某些无界函数积分的敛散性.

**定义 5.5**　设 $b$ 是 $f(x)$ 的瑕点, 且 $f(x)$ 在 $[a,c]\subset[a,b)$ 上可积, 当无界函数积分

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛时, 称无界函数积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

**绝对收敛**.

**定理 5.2**　若无界函数积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则此无界函数积分收敛.

**例 5.11**　判别 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

**解**　设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{1}{x^2}$, 则 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 而无界函数积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛, 由比较判别法知

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\left|\cos\frac{1}{x^2}\right|\mathrm{d}x$$

收敛, 从而

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

收敛 (绝对收敛).

还有一类反常积分如:

$$\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\quad\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^q(1+x^p)},$$

当 $s<1,q<0$ 时它们分别既是无穷积分又是无界函数积分, 因此称此类反常积分为混合型积分. 一般总可以把混合型积分拆成两项, 每项各是一种反常积分, 以前者为例

$$\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,$$

等式右端第一项为无界函数积分, 第二项为无穷积分, 当它们均收敛时, 则称等式左端的混合型积分收敛.

## 习题 6.5

**(A)**

1. 用定义判断下列无穷积分的敛散性, 如果收敛则计算积分值:

(1) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+3)}$;　(2) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x(a>0)$;

(3) $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$;　(4) $\int_1^{+\infty}\dfrac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$;　(6) $\int_{-\infty}^{0}\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{+\infty}\sin y\mathrm{d}y$;　(8) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2+25}$;

(9) $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;　(10) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$;

(11) $\int_3^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$.

2. 当 $k$ 为何值时, 反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 收敛? 又当 $k$ 为何值时, 该反常积分发散?

3. 判断下列无穷积分的敛散性:

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$;　(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$;　(4) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x(n\geqslant 0, m\geqslant 0)$.

4. 判别积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性时, 下列两种做法哪一种是错误的? 为什么?

**解法一**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_{-a}^{a}\\&=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}\{\ln(1+a^2)-\ln[1+(-a)^2]\}=0,\end{aligned}$$

故该积分收敛.

**解法二**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_0^b,\end{aligned}$$

由于两个极限都不存在, 所以该积分发散.

5. 判别积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x$ 的敛散性时, 下列两种做法哪一种是错误的? 为什么?

**解法一**

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to+\infty} \ln \left.\frac{x}{1+x}\right|_1^b = \ln 2,\end{aligned}$$

因而收敛.

**解法二**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \ln x|_1^b - \lim_{b\to+\infty} \ln(1+x)|_1^b,$$

两个极限都不存在, 因而发散.

6. 用定义判断下列无界函数积分的敛散性, 如果收敛, 则计算积分值:

(1) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

(3) $\int_0^1 \frac{x^4+1}{x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_4^{20} \frac{1}{y^2-16}\mathrm{d}y$;

(5) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-x^2}}$;

(7) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　(8) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;　　(10) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

7. 判断下列无界函数积分的敛散性:

(1) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;　　(2) $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}}$;

(3) $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

## (B)

1. 已知 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} A\mathrm{e}^{-x^2-x}\mathrm{d}x = 1$, 求 $A$.

*2. 讨论反常积分

$$\int_1^{+\infty} \cos x \sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

的绝对敛散性.

3. 讨论下列无界函数积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}(p,q>0)$; (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}(p,q>0)$.

*4. 讨论反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p\sin x}{1+x^q}\mathrm{d}x \quad (q\geqslant 0)$$

的绝对敛散性.