第七章　空间解析几何

空间解析几何主要是用代数的方法研究几何问题, 讨论各种空间图形几何关系的代数表达、计算和判别等问题, 为学习多元函数微积分提供直观的几何背景.

本章内容包括: 向量代数、平面与直线、曲面与曲线等.

§1　空间直角坐标系

1.1　空间点的直角坐标

为了确定空间一点的位置, 需要建立空间的点与有序实数组之间的对应关系. 我们将平面直角坐标系的概念推广到空间的情形.

过空间一个定点 O, 作三条互相垂直的数轴, 分别称为 x **轴** (横轴)、y **轴** (纵轴), z **轴** (竖轴); 这三条数轴都以 O 为原点且有相同的长度单位, 它们的正方向符合右手法则, 即以右手握住 z 轴, 当四个手指从 x 轴的正向转过 $\dfrac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时, 竖起的大拇指的指向为 z 的正向 (图 7.1), 如此就建立了空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ **直角坐标系**, 点 O 称为**坐标原点** (简称原点).

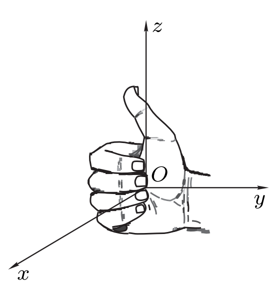

图 7.1

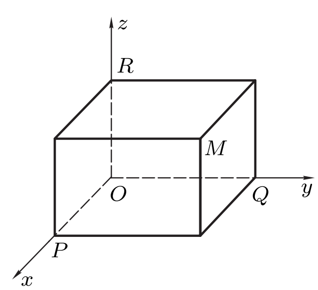

图 7.2

取定了空间直角坐标系后, 就可以建立起空间的点与有序实数组之间的对

应关系. 设 M 是空间的一点, 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴, 并交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 P, Q, R (图 7.2). 设 P, Q, R 三点在三个坐标轴上的坐标依次为 x, y, z, 这样, 空间的一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 x, y, z, 称为点 M 的**坐标**, 其中 x 称为点 M 的**横坐标**, y 称为**纵坐标**, z 称为**竖坐标**, 记为 $M(x,y,z)$. 反过来, 任给一有序数组 x,y,z, 依次在 x 轴、y 轴、z 轴上取与 x,y,z 相应的点 P,Q,R, 再过点 P,Q,R 各作平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴, 这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x,y,z 惟一确定的点. 这样空间的点与有序数组 x,y,z 之间就建立了一一对应的关系.

任意两条坐标轴可以确定一个平面, 称为**坐标面**. 如 x 轴和 y 轴确定的坐标面简称为 Oxy 面, 类似地还有 Oyz 面和 Oxz 面. 这三个坐标面将空间分成八个部分, 每一部分称为一个卦限 (图 7.3). 在 Oxy 面的上方 ($z>0$), 按逆时针方向依次为Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ卦限, 在 Oxy 面的下方 ($z<0$), 按逆时针方向依次为 Ⅴ, Ⅵ, Ⅶ, Ⅷ卦限.

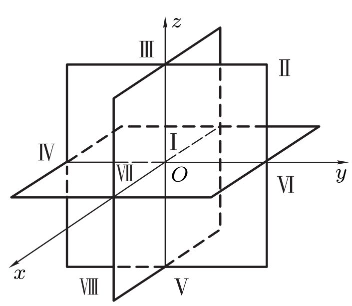

图 7.3

容易看到这八个卦限中点的坐标特点, 如: Ⅰ卦限点的坐标 (x,y,z), 满足 $x>0,y>0,z>0$, Ⅶ卦限点的坐标 (x,y,z), 满足 $x<0,y<0,z<0$, 等等.

1.2　空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点, 我们可用两点的坐标来表达它们之间的距离 d.

过 M_1,M_2 分别作垂直于三条坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (图 7.4), 各棱的长度分别是

$$|x_2-x_1|,\ |y_2-y_1|,\ |z_2-z_1|.$$

于是得对角线 M_1M_2 的长度, 即空间两点 M_1, M_2 的距离公式为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

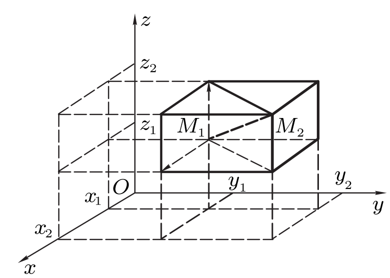

图 7.4

例 1.1　在 Oz 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解　因所求的点在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0,0,z)$, 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\sqrt{4^2+1^2+(z-7)^2} = \sqrt{3^2+5^2+(z+2)^2},$$

两边平方, 解得 $z = \dfrac{14}{9}$. 于是所求点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

例 1.2　空间中所有与原点的距离为常数 R 的点的坐标 x, y, z 应满足什么方程? 并将这些点用集合表示出来.

解　设满足题设条件的点为 $M(x,y,z)$, 依题意有

$$|OM| = R,$$

即　$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = R$, 或　$x^2+y^2+z^2 = R^2$.

这就是所求的方程.

记所有与原点距离为 R 的点组成的集合为 A, 则

$$A = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 = R^2\},$$

它是球心在原点, 半径为 R 的球面.

习题 7.1

(A)

1. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置: $A(0,0,2)$, $B(2,3,0), C(0,-1,0), D(0,2,3)$.

2. 在空间直角坐标系中, 作出下列各点:

   $(1,2,3)$, $(-1,3,-2)$, $(0,-1,1)$, $(2,0,0)$, $(0,1,-1)$, $(-1,-2,-3)$.

3. 自点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

4. 求点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 关于坐标面, 坐标轴和坐标原点对称的点.

5. 求点 $M_1(2,-1,3)$ 和点 $M_2(-3,2,5)$ 之间的距离.

6. 求证以 $A(4,3,1), B(7,1,2), C(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

7. 在 Oyz 面上求与三点 $M_1(3,1,2), M_2(4,-2,-2), M_3(0,5,1)$ 等距离的点.

§2 向量及其运算

2.1 向量的概念

在研究物理学以及其他应用科学时, 常会遇到两种不同类型的量, 一类是只有大小的量, 例如质量、温度、体积、密度等, 通称为**标量**或**数量**; 另一类是既有大小, 又有方向的量, 例如力、速度、加速度等, 通称为**向量**或**矢量**.

在数学中往往用一个有方向的线段来表示向量. 如果线段的起点是 M_0, 终点是 M, 那么这个有向线段记为 $\overrightarrow{M_0M}$, 它表示一个确定的向量. 线段的长度表示向量的大小, 线段的方向表示向量的方向. 为以后讨论问题的方便, 我们对向量和表示它的有向线段不加区分, 即把有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 说成向量 $\overrightarrow{AB}$ 或把向量 $\boldsymbol{a}$ 看成有向线段. 向量有时也用黑体字母来表示, 如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{i}$ 或用上方加箭头的字母来表示, 如 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{i}$ 等等. 向量的大小称为向量的**模**, 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}$, $\vec{a}$ 的模依次记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, $|\boldsymbol{a}|$, $|\vec{a}|$. 模为零的向量称为**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$; 规定零向量的方向是任意的. 模为 1 的向量称为**单位向量**, 用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

在讨论向量时, 我们只考虑大小和方向, 而不考虑它的始点位置, 这样的向量称为**自由向量**, 简称向量. 我们以后只讨论自由向量, 即向量可以由一个位置平移到另一个位置, 而其性质不变, 所以, 如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模相等, 方向相同, 则称这两个向量**相等**, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

以坐标原点 O 为起点, 向已知点 M 引的向量 $\overrightarrow{OM}$, 称为点 M 对于点 O 的**向径**, 常用黑体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示, 即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$.

2.2 向量的加减法, 向量与数的乘法

1. 向量的加减法

(1) 向量的加法

向量的加法是用**平行四边形法则**定义的.

设两个不在同一直线上的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 O, 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 以 OA, OB 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线为 OC (图 7.5), 则向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

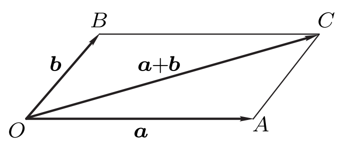

图 7.5

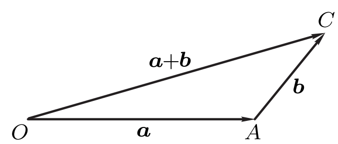

图 7.6

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在同一直线上, 那么, 我们规定它们的和向量是: 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同时, 和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与原来两个向量的方向相同, 其模等于两向量的模的和; 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反时, 和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与模较大的向量的方向相同, 其模等于两向量的模的差.

根据向量相等的定义, 由图 7.5 显然有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$, 因此

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC},$$

这样, 我们可以用**三角形法则**定义向量加法.

若有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 O, 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, 再以 A 为起点, 作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, 连接 OC, 则向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (图 7.6).

向量加法满足下列运算律:

1° 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2° 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

由向量加法的运算律,n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ $(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量加法的三角形法则, 可得 n 个向量相加的法则: 即用前一个向量的终点作为后一个向量的起点, 相继作向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$, 由第一个向量 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点至最后一个向量 $\boldsymbol{a}_n$ 终点的有向线段, 就是 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n$. 由图 7.7 有

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4.$$

(2) 向量的减法

若向量 $\boldsymbol{b}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等, 方向相反, 则称 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**, 记为 $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a}$. 也可以说 $\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的负向量, 即有 $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$.

显然 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**规定为

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

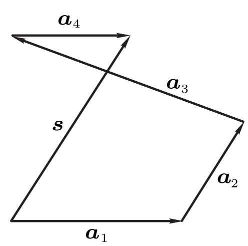

图 7.7

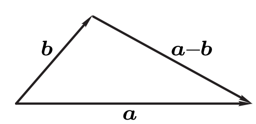

图 7.8

由图 7.8 可见, 将两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的始点重合, 则自向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点所引的向量就是 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与任意实数 λ 的乘积记为 $\lambda\boldsymbol{a}$, $\lambda\boldsymbol{a}$ 是这样一个向量: 它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向: 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向 ; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向 ; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

容易证明, 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是任意向量, λ, μ 是任意实数, 向量与数的乘法满足下列运算律:

(1) 数乘分配律 $\quad (\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$;

$\qquad\qquad\qquad \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$;

(2) 数乘结合律 $\quad \lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{e_a}$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 则有

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e_a},$$

或

$$\boldsymbol{e_a} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

这说明任何非零向量可以表示为它的模与同方向单位向量的数乘.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向或反方向, 称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行** (或共线), 记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.

由于零向量的方向是任意的, 故可认为零向量与任何向量平行.

几何直观上, $\lambda\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量, 只是把 $\boldsymbol{a}$ 伸缩了 $|\lambda|$ 倍 (图 7.9).

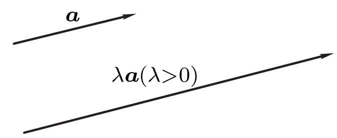

图 7.9

定理 2.1　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 且 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件是: 存在惟一实数 λ, 使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

证明　充分性显然成立.

必要性　设 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 若 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, 则取 $\lambda = 0$, 有 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} = 0 \cdot \boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$, 故结论成立. 若 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, 由 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 取 $|\lambda| = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时, λ 取正值, 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时, λ 取负值, 即有 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

再证数 λ 是惟一的. 设 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$, 又设 $\boldsymbol{b} = \mu\boldsymbol{a}$, 两式相减, 得

$$(\lambda - \mu)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, 故 $\lambda - \mu = 0$, 即 $\lambda = \mu$. □

例 2.1　证明三角形两边中点的连线 (中位线) 平行于第三边, 其长度等于第三边长度的一半 (图7.10).

证明　在三角形 ABC 中, 设 $CD = DA$, $CE = EB$. 由向量的减法法则

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\\ &= 2\,\overrightarrow{CE} - 2\,\overrightarrow{CD}\\ &= 2(\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD}),\end{aligned}$$

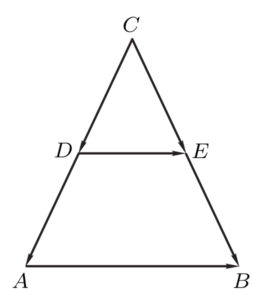

图 7.10

因此

$$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{DE}.$$

即 $\overrightarrow{DE}$ 平行于 $\overrightarrow{AB}$, 且 $|\overrightarrow{DE}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$. □

2.3　向量的坐标

1. 向量的坐标

在空间直角坐标系中, 分别与 x 轴、y 轴和 z 轴正向相同的单位向量, 称为**基本单位向量**, 记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$, 均有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e_a}$, 与此相似, 当向量平行于坐标轴时, 有如下结论: 设 $P_1(x_1,y_0,z_0),P_2(x_2,y_0,z_0)$, 即 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 平行于 x 轴, 易得 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$; 设 $Q_1(x_0,y_1,z_0),Q_2(x_0,y_2,z_0)$, 即 $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 平行于 y 轴, 有 $\overrightarrow{Q_1Q_2}=(y_2-y_1)\boldsymbol{j}$; 设 $R_1(x_0,y_0,z_1),R_2(x_0,y_0,z_2)$, 即 $\overrightarrow{R_1R_2}$ 平行于 z 轴, 有 $\overrightarrow{R_1R_2}=(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$.

设空间直角坐标系中任一向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 记 $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}$. 其起点坐标为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 终点坐标为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$, 我们把 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1 分别称作向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影, 并记为

$$x_2-x_1=a_x,y_2-y_1=a_y,z_2-z_1=a_z.$$

由图 7.11 知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R}\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.\end{aligned}\tag{1}$$

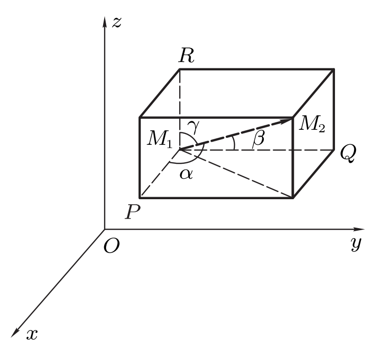

图 7.11

(1) 式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的**分解表达式**, 其中向量 $a_x\boldsymbol{i},a_y\boldsymbol{j},a_z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的**分向量**. 称 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影构成

的有序数组 a_x, a_y, a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**, 并将向量 $\boldsymbol{a}$ 记为

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \tag{2}$$

(2) 式称为向量的**坐标表达式**.

特别地, 从原点到点 $M(x, y, z)$ 的向径

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z).$$

即如果向量的起点在坐标原点, 那么这个向量的坐标与它的终点的坐标一致.

由此可知, 每个向量可以惟一确定一组坐标；反之, 每一个有序数组, 都能惟一地确定一个向量, 这样向量与它的坐标是一一对应的.

2. 向量运算的坐标表示

利用向量的坐标, 可得向量的加减法、数与向量的乘法的运算如下:

设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = (a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} = (b_x, b_y, b_z)$, 则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} &= (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k} \\ &= (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z). \\ \lambda\boldsymbol{a} &= (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k} \\ &= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \end{aligned}$$

这样, 向量的加、减及数乘运算, 只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算.

由定理 2.1, 当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$. 按照向量的坐标表示式即为

$$(b_x, b_y, b_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

因此, 当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件为对应坐标成比例,

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda^*. \tag{3}$$

* 当 a_x, a_y, a_z 有一个为零时, 如 $a_x = 0, a_y,\ a_z \neq 0$, 这时 (3) 式应理解为 $\begin{cases} b_x = 0, \\ \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z}; \end{cases}$ 当 a_x, a_y, a_z 有两个为零时, 如 $a_x = a_y = 0,\ a_z \neq 0$, 这时 (3) 式应理解为 $\begin{cases} b_x = 0, \\ b_y = 0. \end{cases}$

2.4 向量的方向余弦

设非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ (如图 7.11), 可得向量 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{4}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可用它与 x, y, z 轴正向之间的夹角 α,β,γ 来确定 (规定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$), α,β,γ 称为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**. 方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**, 由向量坐标的定义

$$\begin{cases} a_x=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \\ a_y=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta, \\ a_z=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma, \end{cases} \tag{5}$$

即

$$\begin{aligned} \cos\alpha&=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\beta&=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

这样向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦可由其坐标完全确定.

显然, 方向余弦满足下面关系式:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量坐标表示式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{a}}&=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x,a_y,a_z) \\ &=\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\right) \\ &=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma), \end{aligned}$$

即 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 以坐标表示式 (2) 式给出后, 由 (4) 式和 (6) 式, 它的模与方向角 (即大小与方向) 就确定了. 反之, 当 $\boldsymbol{a}$ 的模与方向角已知时, 由 (6) 式或 (5) 式可以求得它的坐标表示式 (2).

例 2.2　已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模, 方向余弦和方向角.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$;

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$;

$$\cos\alpha=\frac{-1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=\frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 2.3　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴正向的夹角相等, 求它的方向余弦.

解　设 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角为 α,β,γ, 则 $\alpha=\beta=\gamma$, 因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 所以

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2.5　向量的乘积运算

1. 向量的数量积

如果某物体在外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下移动一段距离, 位移向量为 $\boldsymbol{s}$, 则力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

式中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角 (图 7.12). 由此实际问题出发, 我们来定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 (又称点积或内积).

首先, 我们定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角: 将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移使它们的起点重合后, 它们所在的射线之间的夹角 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 (图 7.13), 记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

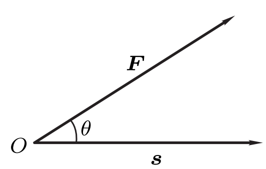

图 7.12

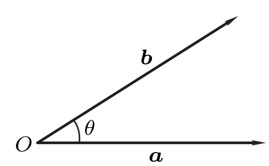

图 7.13

定义 2.1　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模和它们之间的夹角 θ 余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**, 记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{7}$$

根据数量积的定义, 上述问题中力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功就可以表示为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

(7) 式中的因子 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影, 记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, 即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

同理, 因子 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影, 记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, 即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta.$$

如果把 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 看作有向线段, 当 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 是锐角时, $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 是线段 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 所在直线上的投影线段的长度 (图 7.14); 当 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 是钝角时, $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 是该投影线段长度的相反数.

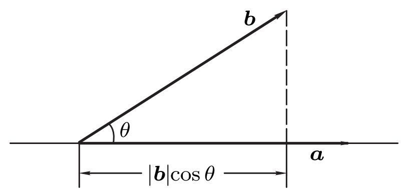

图 7.14

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时, (7) 式可用投影表示. 于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

(1) 数量积的性质

1° $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直 (或正交), 记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

2° 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

事实上, 如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 所以 $\theta=\dfrac{\pi}{2},\cos\theta=0$, 于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$; 反之, 如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0,|\boldsymbol{b}|\neq 0$, 所以 $\cos\theta=0$, 从而 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, 即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由于零向量的方向是任意的, 所以可以认为零向量与任何向量都垂直, 因此上述结论可叙述为: 向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

向量的数量积常用来判定两个向量是否垂直.

3° 数量积符合下列运算律:

交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

数乘结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (λ,μ为数).

由数量积的定义, 上面结论容易验证.

(2) 数量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 互相垂直, 且 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的模均为 1. 由数量积的性质 $1^\circ,2^\circ$, 有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

由上式及 (7) 式可知, 两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角满足公式

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).\tag{8}$$

例 2.4 已知点 $M(1,1,1),A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.

解 $\angle AMB$ 为向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角, 而

$$\overrightarrow{MA}=(1,1,0),\qquad\overrightarrow{MB}=(1,0,1),$$

故

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times1+1\times0+0\times1=1,$$

$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\quad|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},$$

由公式 (8) 得

$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{2}.$$

所以 $\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$.

2. 向量的向量积

在力学中已知力 $\boldsymbol{F}$ 对于定点 O 的力矩可用一个向量 $\boldsymbol{M}$ 来表示 (图 7.15), 它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{OQ}|=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{OP}|\sin\theta.$$

式中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角. 力矩的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 确定的平面. $\overrightarrow{OP},\boldsymbol{F},\boldsymbol{M}$ 三者的方向符合右手法则. 即当右手的四个手指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 时, 大拇指的指向就是 $\boldsymbol{M}$ 的方向 (图 7.16).

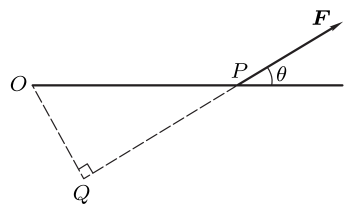

图 7.15

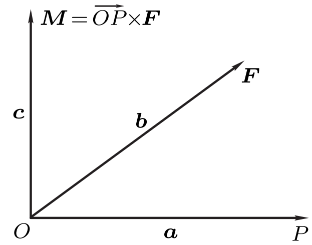

图 7.16

由此实际问题出发, 我们来定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 (又称为叉积或外积).

定义 2.2 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**是一个向量, 记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 其定义如下:

$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$, 其中 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$; $\boldsymbol{c}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 符合右手法则 (图7.16).

$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 的几何意义是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

根据向量积的定义, 上述力学问题中的力矩 $\boldsymbol{M}$ 就可以表示为 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

(1) 向量积的性质

1° $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

因为夹角 $\theta=0$, 所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin\theta=0$.

2° 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

事实上, 当 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 时, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta=0$ 或 π, 于是 $\sin\theta=0$, 故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 反之, 当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时, 而 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 得

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0,$$

而 $|\boldsymbol{a}|\neq\boldsymbol{0},|\boldsymbol{b}|\neq\boldsymbol{0}$, 故 $\sin\theta=0$, 从而 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.

3° 向量积符合下列运算律:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

说明向量积不满足交换律, 当交换两向量的顺序时, 向量积变号.

分配律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

数乘结合律: $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\ \ (\lambda\in\mathbf{R})$.

以上两个运算律证明从略.

(2) 向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

由向量积的性质, 有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

为方便记忆, 引用行列式表示, 上式可以写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

例 2.5　求以向量 $\boldsymbol{a}=(8,4,1),\boldsymbol{b}=(2,-2,1)$ 为邻边的平行四边形的面积.

解　根据向量积的几何意义, 平行四边形的面积为

$$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$

由于

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\8&4&1\\2&-2&1\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k},$$

于是所求面积为

$$S=|6\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}|=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-24)^2}=18\sqrt{2}.$$

例 2.6　设 l 是空间过点 $A(1,2,3)$, $B(2,-1,5)$ 的直线, $C(3,2,-5)$ 是空间一点, 试求点 C 到直线 l 的距离 d.

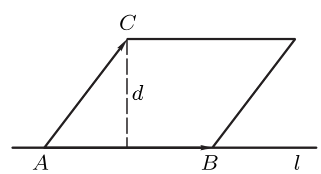

图 7.17

解　作向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ (图 7.17), C 到 l 的距离 d 是以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 为邻边的平行四边形的高, 而 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ 表示该平行四边形的面积, 所以

$$d=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

因为 $\overrightarrow{AB}=(1,-3,2),\overrightarrow{AC}=(2,0,-8)$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -8\end{vmatrix}=24\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k},$$

于是 $$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24^2+12^2+6^2}=6\sqrt{21},$$

又 $$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{14},$$

故所求的距离为 $$d=\frac{6\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=3\sqrt{6}.$$

***3. 向量的混合积**

设三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 先作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 再作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的数量积, 得到的数 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**混合积**, 记为 $[\boldsymbol{abc}]$.

(1) 混合积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$, 因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z.$$

或 $$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

(2) 混合积有如下的置换规律:

$$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}].$$

由于行列式经过两次交换行不改变行列式的值, 故可得上面式子.

混合积的几何意义: $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体 (图 7.18) 的体积. 事实上, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 是该平行六面体的底面积, 其高为 $|\boldsymbol{c}||\cos\theta|$, θ 是 $\boldsymbol{c}$ 与

$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的夹角, 于是

$$\begin{aligned} V &= |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}||\cos\theta| \\ &= |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|. \end{aligned}$$

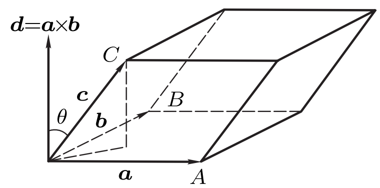

图 7.18

当 $[\boldsymbol{abc}]=0$ 时, 平行六面体的体积为零, 即该六面体的三个棱落在一个平面上, 也就是说, 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面, 反之亦然. 由此可得三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

例 2.7 给定三个向量 $\boldsymbol{a}=(3,4,2),\boldsymbol{b}=(3,5,-1),\boldsymbol{c}=(2,3,5)$, 计算 $[\boldsymbol{abc}]$.

解

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=14.$$

例 2.8 问点 $A(1,1,1),B(4,5,6),C(2,3,3)$ 和 $D(10,15,17)$ 四点是否在同一平面上?

解 只需验证向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 是否共面.

由于

$$\overrightarrow{AB}=(3,4,5),\overrightarrow{AC}=(1,2,2),\overrightarrow{AD}=(9,14,16),$$

而

$$[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix}=0,$$

因此 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 共面, 即 A, B, C, D 四点在同一平面上.

习题 7.2

(A)

1. 证明: 三点 $A(1,0,-1), B(3,4,5), C(0,-2,-4)$ 共线.

2. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线为 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$, 求向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$.

3. 已知点 $A(1,2,-4), \overrightarrow{AB}=(-3,2,1)$, 求点 B 的坐标.

4. 已知 $|\overrightarrow{AB}|=11$, 点 $A(4,-7,1)$, 点 $B(6,2,z)$, 求 z 的值.

5. 证明: 以点 $A(4,1,9), B(10,-1,6), C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

6. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点 $B(2,-1,7)$, 它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7, 求 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 的坐标.

7. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,7,8), \boldsymbol{b}=(3,-4,6), \boldsymbol{c}=(-6,-9,-5)$, 求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模和方向余弦.

8. 设向量与 y 轴和 z 轴各成 60° 和 120° 的角, 求它与 x 轴所成的角.

9. 点 M 的向径与 x 轴成 45° 角, 与 y 轴成 60° 角, 它的模为 6, 如果点 M 的坐标中 $z<0$, 试求 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

10. 已知向径 $\overrightarrow{OM}$ 与各坐标轴成相等的锐角, 如果其长度为 $2\sqrt{3}$, 求 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

11. 利用向量的方法证明直径所对的圆周角是直角.

12. 分别用单位向量 $\boldsymbol{e_a}$, $\boldsymbol{e_b}$, $\boldsymbol{e_c}$ 来表示向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}, \boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

13. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

14. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$. 求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

15. 说明下列结果是否正确?

(1) $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$;　　(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$;

(3) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$;　　(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$;

(5) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

16. 已知 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$, 且 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=4$, 求下列各值:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;　(2) $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$;　(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;　(4) $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;　(5) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$.

17. 求证向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})$ 互相垂直.

18. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, 求:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;　(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;　(3) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$;　(4) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$;　(5) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

19. 求以 $A(7,3,4), B(1,0,6), C(4,5,-2)$ 为顶点的三角形的面积.

*20. 设 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1), \boldsymbol{b}=(1,-2,0), \boldsymbol{c}=(-1,2,1)$. 求:

(1) $[\boldsymbol{abc}]$;　(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

(B)

1. 设 $A(1,2,-3), B(2,-3,5)$ 为平行四边形相邻两个顶点, 而 $M(1,1,1)$ 为对角线的交点. 求其余两顶点的坐标.

2. 化简下列各式:

(1) $\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})+\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}$;

(3) $(\boldsymbol{2a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

(4) $2\boldsymbol{i}\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+3\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+4\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})$.

3. 已知 $A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1)$, 求

(1) 同时与 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 垂直的单位向量 ;

(2) $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 从顶点 B 到边 AC 的高的长度.

4. 设质量为 100kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$, 计算重力所作的功 (长度单位为 m, 重力方向为 z 轴负方向).

5. 已知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$. 求证: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

6. 设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}, |\boldsymbol{b}|=1, (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{6}$, 求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

7. 设 $|\boldsymbol{a}|=4, |\boldsymbol{b}|=3, (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{6}$, 求以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{2b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{3b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

*8. 证明向量 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ 是共面的.

9. 设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2), \boldsymbol{b}=(1,1,z)$, 问 z 为何值时 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 最小? 并求此最小值.

*10. 四面体的三条棱从点 $O(0,0,0)$ 连至点 $A(2,3,1)$, $B(1,2,2)$ 和 $C(3,-1,4)$, 求四面体的体积.

§3 平面及其方程

从本节开始, 我们研究空间的几何图形及其方程. 空间的几何图形包括平面、曲面、直线和曲线. 现以曲面为例, 介绍曲面及其方程的概念.

在空间解析几何中, 任意曲面都可以看作动点 M 按照一定规律运动而形成的轨迹, 并由此建立曲面方程. 因为空间动点 M 可以用坐标 (x,y,z) 表示, 所以动点 M 所满足的规律通常表示为含有 x,y,z 的方程

$$F(x,y,z)=0. \tag{9}$$

如果曲面 Σ 上任一点的坐标都满足方程 (9), 不在曲面 Σ 上的点坐标都不满足方程 (9), 则方程 (9) 称为曲面 Σ 的方程, 而曲面 Σ 称为方程 (9) 的图形 (图 7.19).

下面我们在空间直角坐标系中讨论最简单但却十分重要的曲面方程 —— 平面的方程.

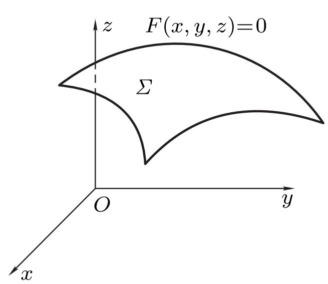

图 7.19

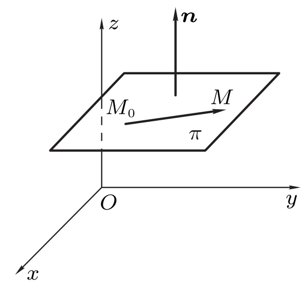

图 7.20

3.1 平面的方程

1. 平面的点法式方程

垂直于平面 π 的非零向量称为该平面的法向量, 记为 $\boldsymbol{n}$. 显然平面上任意一个向量都与该平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直. 因为过空间的一个已知点, 只能作一个平面 π 垂直于已知直线, 所以, 当平面 π 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及其法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为已知时, 平面 π 的位置就完全确定了. 下面根据上述已知条件来建立平面 π 的方程.

设 $M(x,y,z)$ 是平面 π 上的任意一点, 则 $\overrightarrow{M_0M}\perp \boldsymbol{n}$, 即有 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$ (图 7.20). 由于 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$, 故有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{10}$$

平面上的任意一点 $M(x,y,z)$ 的坐标满足方程 (10), 而当点 $M(x,y,z)$ 不在平面 π 上时, $\overrightarrow{M_0M}$ 不垂直 $\boldsymbol{n}$. 因此点 $M(x,y,z)$ 的坐标不满足方程 (10). 所以 (10) 式就是平面 π 的方程. 因为方程 (10) 由平面 π 上的已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 确定, 故把方程 (10) 称为**平面的点法式方程**.

例 3.1 求过点 $(1,1,2)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$ 为法向量的平面方程.

解 由点法式方程 (10), 得所求平面的方程为

$$1\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)+1\cdot(z-2)=0,$$

即
$$x+2y+z-5=0.$$

例 3.2 平面 π 过点 $(2,-1,4)$ 且与不共线的两个向量 $\boldsymbol{a}=(-3,4,-6)$, $\boldsymbol{b}=(-2,3,-1)$ 相平行, 求平面 π 的方程.

解 先求平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$. 由于 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{b}$, 故可取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=14\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

由点法式方程 (10), 得所求平面方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

即
$$14x+9y-z-15=0.$$

例 3.3 求过三点 $M_1(1,1,1),M_2(-2,1,2),M_3(-3,3,1)$ 的平面方程.

解 所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$, 且 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_1M_3}$, 可取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$, 其中 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,0,1),\overrightarrow{M_1M_3}=(-4,2,0)$, 故

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 0 & 1\\ -4 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},$$

根据点法式方程 (10), 得所求平面的方程

$$-2(x-1)-4(y-1)-6(z-1)=0,$$

即

$$x+2y+3z-6=0.$$

一般地, 如果平面 π 过不共线的三点 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3)$, 并设 $M(x,y,z)$ 为平面 π 上的任意一点, 则向量 $\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}$ 共面, 因此

$$\left[\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3}\right]=0,$$

即
$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0,$$

上式称为平面的**三点式方程**.

2. 平面的一般方程

在平面的点法式方程 (10) 中, 若把 $-(Ax_0+By_0+Cz_0)$ 记为 D, 则 (10) 式就是三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{11}$$

反过来, 对给定的三元一次方程 (11)(其中 A,B,C 不同时为零), 设 x_0,y_0,z_0 是满足方程 (11) 的一个解, 即 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, 把它与 (11) 式相减得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

由此可见, 方程 (11) 是过点 (x_0,y_0,z_0) 并以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程, 我们把方程 (11) 称为平面的**一般方程**. 因此, 三元一次方程的图形是平面.

下面根据一些特殊的三元一次方程, 讨论平面图形的特点.

(1) 当 $D=0$ 时, 方程 (11) 为 $Ax+By+Cz=0$, 它表示一个过原点的平面;

(2) 当 $A=0$ 时, 方程 (11) 为 $By+Cz+D=0, \boldsymbol{n}=(0,B,C)$ 垂直于 x 轴, 方程表示一个平行于 x 轴的平面.

同理 $B=0, C=0$ 时, 方程 $Ax+Cz+D=0, Ax+By+D=0$ 分别表示平行于 y 轴、z 轴的平面.

(3) 当 $A=B=0$ 时, 方程 (11) 为 $Cz+D=0$, 或 $z=-\dfrac{D}{C}, \boldsymbol{n}=(0,0,C)$, 法向量同时垂直于 x 轴和 y 轴, 方程表示一个平行于 Oxy 面的平面.

同理 $B=C=0, A=C=0$ 时, 方程 $Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示一个平行于 Oyz 面和 Oxz 面的平面.

例 3.4 求过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$ 的平面方程.

解 由于所求平面过 z 轴, 故设平面的一般方程为

$$Ax+By=0.$$

所求平面过点 $(-3,1,-2)$, 得

$$-3A+B=0.$$

即

$$B=3A.$$

代入方程 $Ax+By=0$ 并消去 A, 得所求平面方程

$$x+3y=0.$$

例 3.5 求与 x, y, z 轴分别交于 $P(a,0,0), Q(0,b,0), R(0,0,c)$ (a,b,c 均不为零) 的平面方程.

解 设所求平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

因为平面不过原点, 所以 $D\neq 0$. 将点 P, Q, R 代入上面方程, 得

$$aA+D=0,\ bB+D=0,\ cC+D=0.$$

即　$A=-\dfrac{D}{a},\ B=-\dfrac{D}{b},\ C=-\dfrac{D}{c}.$

代入平面的一般方程并消去 D, 得所求的平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

此方程称为平面的**截距式方程**, a,b,c 依次称为平面在 x,y,z 轴上的**截距**.

3.2　两平面的夹角

两平面的法向量的夹角称为两平面的夹角. 当两平面互相不垂直或不平行时, 两平面的夹角通常取锐角 (图 7.21).

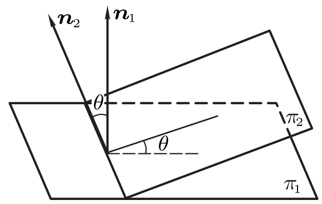

图 7.21

设两平面 π_1 和 π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$, 由于两平面的夹角 θ 是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角且取锐角, 故

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{12}$$

例 3.6　求平面 $2x-y+z-6=0$ 与平面 $x+y+2z-5=0$ 的夹角.

解　由公式 (12), 有

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|2\times1+(-1)\times1+1\times2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2},$$

所以
$$\theta=\frac{\pi}{3}.$$

根据两个向量垂直或平行的充要条件, 可得下列结论:

(1) 平面 π_1 和 π_2 互相垂直的充要条件是:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

(2) 平面 π_1 和 π_2 互相平行的充要条件是:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

特别地, 当 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ 时, 两平面重合.

例 3.7 求过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面 $x+y+z=0$ 的平面方程.

解法一 设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 则 $\boldsymbol{n}$ 垂直于已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$, 也垂直于所求平面上的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$, 于是

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(2,-1,-1).$$

再根据平面的点法式方程, 得所求平面的方程

$$2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0,$$

即
$$2x-y-z=0.$$

解法二 设所求平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

它过点 M_1,M_2, 即

$$\begin{aligned}A+B+C+D&=0,\\ B-C+D&=0,\end{aligned}$$

所求平面垂直于已知平面, 即两平面的法向量互相垂直, 于是

$$A+B+C=0,$$

从而解得
$$D=0,\ B=-\frac{A}{2},\ C=-\frac{A}{2}.$$

取 $A=2$, 则 $B=C=-1$, $D=0$.
所求平面方程为
$$2x-y-z=0.$$

3.3 点到平面的距离

设平面 π 的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 π 外的一点, 任取 π 上一点 $M_1(x_1, y_1,z_1)$, 并作向量 $\overrightarrow{M_1M_0}$ (图 7.22), 则点 M_0 到平面 π 的距离

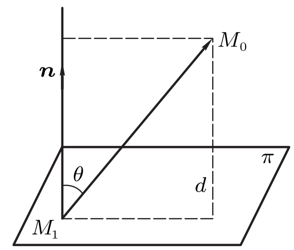

图 7.22

$$d=\left|\mathrm{P_{rj}}_{\boldsymbol{n}}\ \overrightarrow{M_1M_0}\right|=\frac{|\ \overrightarrow{M_1M_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

由于

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\boldsymbol{n}&=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\cdot(A,B,C)\\&=Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1),\end{aligned}$$

而点 M_1 在平面 π 上, 有

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$

即 $D=-(Ax_1+By_1+Cz_1)$. 于是

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{13}$$

例 3.8 求点 $M(1,1,1)$ 到平面 $3x-4y+12z+14=0$ 的距离.

解 由公式 (13), 所求距离为

$$d=\frac{|3\times1+(-4)\times1+12\times1+14|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}}=\frac{25}{13}.$$

习题 7.3

(A)

1. 指出下列各平面的特殊位置, 并画出各平面:

(1) $z=0$; (2) $3y-4=0$;

(3) $y+z=1$; (4) $6x+2y=0$;

(5) $2x-3y-6=0$; (6) $6x+5y-z=0$.

2. 求下列平面方程:

(1) 过点 $M_0(1,2,3)$, 法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$;

(2) 过三点 $M_1(1,3,5),M_2(6,-1,4),M_3(4,2,1)$;

(3) 过坐标原点, 并通过点 $M_1(1,3,2),M_2(2,-1,-1)$;

(4) 通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$;

(5) 过点 $(1,-2,3)$ 且平行于平面 $7x-3y+z-5=0$;

(6) 过点 $(4,-1,6)$ 和 y 轴;

(7) 过点 $(1,2,3)$ 且平行于两向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2,3), \boldsymbol{b}=(1,3,4)$;

(8) 三个坐标轴上的截距分别为 $-1,2,3$.

3. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

4. 判断下列各对平面的位置关系:

(1) $x+2y-z+3=0$ 与 $2x+4y-2z-1=0$;

(2) $2x-3y+z-1=0$ 与 $5x+y-7z=0$.

5. 分别求出点 $(1,2,3),(-1,7,6)$ 到平面 $2x-2y+z-3=0$ 的距离.

(B)

1. 求通过 x 轴, 且点 $(5,4,-3)$ 到该平面的距离等于 3 的平面方程.

2. 求过两点 $(0,-1,0),(0,0,-1)$, 且与平面 $y+z=7$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的平面方程.

3. 求过两点 $(0,4,-3),(6,-4,3)$, 且三个坐标轴上截距之和为零的平面方程.

§4 空间直线及其方程

4.1 空间直线的方程

1. 直线的对称式方程与参数方程

平行于直线的非零向量称为直线的**方向向量**, 记为 $\boldsymbol{s}$. 因为过空间的一个已知点且与一已知非零向量平行, 可以惟一确定一条空间直线, 所以当直线 L 上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及其方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为已知时, 直线 L 的位置就完全确定 (图 7.23), 下面我们根据上述已知条件建立直线 L 的方程.

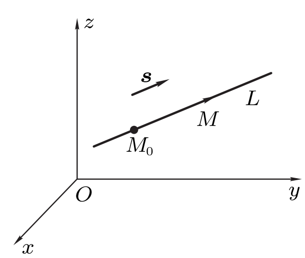

图 7.23

设 $M(x,y,z)$ 是直线 L 上的任意一点, 于是 $\overrightarrow{M_0M}$ $//\boldsymbol{s}$, 根据两向量平行的充分必要条件, $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 对应坐标成比例, 由于 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0), \boldsymbol{s}=(m,n,p)$, 从而

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{14}$$

反过来, 如果点 M 不在直线 L 上, 那么 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 不平行, 这两个向量的对应坐标就不成比例. 因此 (14) 式就是直线 L 的方程, 称为直线的**对称式** (**或标

准式) 方程*. 我们把直线 L 的任一方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标 m,n,p 称为该直线的**方向数**.

由直线的对称式方程, 我们可以导出直线的参数方程. 若设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

则有
$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases} \quad (t\text{ 为参数}), \tag{15}$$

(15) 式称为直线 L 的**参数方程**.

例 4.1　求过点 $(1,-2,4)$ 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线方程.

解　因为所求的直线垂直于已知平面, 所以可取平面的法向量作为直线的方向向量, 即取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}=(2,-3,1)$, 由公式 (14), 得所求直线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

2. 直线的一般方程

空间直线 L 可以看做不平行的两平面

$$\pi_1: \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2: \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的交线 (图 7.24). 如果点 $M(x,y,z)$ 在直线 L 上, 则它的坐标 x,y,z 同时满足 π_1 和 π_2 的方程, 即满足方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{16}$$

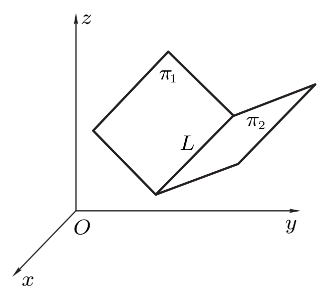

图 7.24

*当 m,n,p 中有一个为零, 如 $m=0$, 而 $n,p\neq 0$ 时, 方程组 (14) 应理解为:

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}. \end{cases}$$

当 m,n,p 中两个为零, 如 $m=n=0$, 而 $p\neq 0$ 时, 方程组 (14) 应理解为:

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

反过来, 不在直线 L 上的点的坐标不能满足方程组 (16). 因此直线 L 可以用 (16) 式来表示, 方程组 (16) 称为直线的**一般方程**.

由于通过一条直线的平面有无穷多个, 因此, 由其中任意两个平面方程联立的方程组均可表示此直线.

直线的一般方程可转化为对称式方程与参数方程, 其方法是: 先由 (16) 式找出直线上的一个点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 再求直线的一个方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$, 代入 (14) 式即可. 由于 $\boldsymbol{s}$ 平行于 (16) 式中两平面的交线, 所以 $\boldsymbol{s}$ 同时垂直于两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. 因此可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2.$$

例 4.2 用对称式方程和参数方程表示直线

$$L:\qquad \begin{cases}3x+2y+4z-11=0,\\ 2x+y-3z-1=0.\end{cases}$$

解 先找出直线上的一点, 不妨取 $x=1$, 代入直线方程, 得

$$\begin{cases}2y+4z=8,\\ y-3z=-1,\end{cases}$$

解上面二元一次方程组, 得 $y_0=2,z_0=1$. 则点 $M_0(1,2,1)$ 为直线上一点. 再求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$.

由于两平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(3,2,4),\boldsymbol{n}_2=(2,1,-3)$, 所以可取直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&2&4\\2&1&-3\end{vmatrix}=-10\boldsymbol{i}+17\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

于是直线 L 的对称式方程为

$$\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}.$$

令
$$\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}=t,$$

得直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=1-10t,\\ y=2+17t,\\ z=1-t.\end{cases}$$

4.2　点、直线、平面之间的关系

1. 两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角称为两直线的夹角. 当两条直线互相不垂直或不平行时, 两直线的夹角通常取锐角.

给定两直线 L_1 和 L_2

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$L_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$, 根据两向量夹角的余弦公式, 直线 L_1 和 L_2 的夹角 θ 可由下式确定

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

由两个向量垂直与平行的充分必要条件可得下列结论:

(1) 两直线 L_1 和 L_2 互相垂直的充分必要条件:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

(2) 两直线 L_1 和 L_2 互相平行的充分必要条件:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

例 4.3　求直线 L_1 与 L_2 的夹角.

$$L_1: \quad \begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x-2y+z+1=0; \end{cases}$$

$$L_2: \quad \begin{cases} x-y-z-1=0, \\ x-y+2z+1=0. \end{cases}$$

解　由于 L_1 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(4,0,-4),$$

L_2 的方向向量为

$$s_2 = n_3 \times n_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, -3, 0),$$

于是, 直线 L_1 与 L_2 夹角的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|4\times(-3)+0\times(-3)+(-4)\times 0|}{\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}} = \frac{1}{2},$$

故
$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

2. 直线与平面的夹角

过直线 L 且垂直于平面 π 的平面与平面 π 的交线 L', 称为直线 L 在平面 π 上的投影直线 (图 7.25).

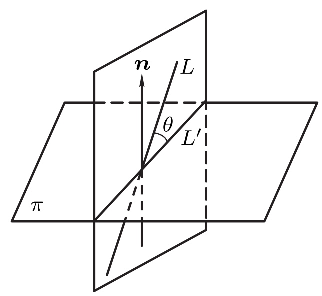

图 7.25

直线 L 和它在平面 π 上的投影直线 L' 的夹角 θ (规定 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$) 称为直线 L 与平面 π 的夹角.

因为直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ 与平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 夹角为 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 或 $\frac{\pi}{2} + \theta$, 又因为

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right|,$$

根据两向量夹角的余弦公式, 有

$$\begin{aligned} \sin\theta &= |\cos(\widehat{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}})| \\ &= \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \end{aligned} \tag{17}$$

由上式可确定直线 L 与平面 π 的夹角.

根据两向量垂直、平行的充分必要条件可得下列结论:

(1) 直线与平面垂直的充分必要条件: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$;

(2) 直线与平面平行的充分必要条件: $Am + Bn + Cp = 0$.

例 4.4 求过点 $(1, 2, 3)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{s} = (1, -4, 1)$ 的直线与平面 $x+y+z=1$ 的交点和夹角 θ.

解　直线的方程为
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{1},$$
写成参数方程
$$x=1+t,\ y=2-4t,\ z=3+t,$$
代入已知平面方程中, 得
$$(1+t)+(2-4t)+(3+t)=1,$$
解得 $t=\dfrac{5}{2}$. 将求得的 t 值代入直线的参数方程中, 得
$$x=\frac{7}{2},\ y=-8,\ z=\frac{11}{2},$$
所以直线与平面的交点的坐标为 $\left(\dfrac{7}{2},-8,\dfrac{11}{2}\right)$. 下面求夹角 θ. 由公式 (17), 有
$$\sin\theta=\frac{|1\times1+(-4)\times1+1\times1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{9},$$
得所求的夹角为
$$\theta=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

例 4.5　求过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解　先作一过点 $(2,1,3)$ 且垂直于已知直线的平面, 则这平面的方程为
$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0. \tag{$*$}$$
再求已知直线与这平面的交点, 已知直线的参数方程为
$$x=-1+3t,\ y=1+2t,\ z=-t,$$
将上式代入 $(*)$ 式中, 求得 $t=\dfrac{3}{7}$, 从而求得交点为 $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$.

以点 $(2,1,3)$ 为起点, 点 $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$ 为终点的向量为 $-\dfrac{6}{7}(2,-1,4)$, 是所求直线的一个方向向量, 故所求直线的方程为
$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

3. 点到直线的距离

用向量的运算法则, 可以求出点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ 的距离.

由于直线过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 所以设向量 $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$ 与直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 的夹角为 θ, 则点 M_0 到直线 L 的距离 (图 7.26) 为

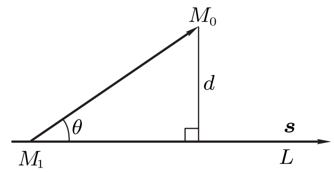

图 7.26

$$d=|\overrightarrow{M_1M_0}|\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}||\boldsymbol{s}|\sin\theta}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}. \tag{18}$$

例 4.6 求点 $M_0(3,-4,4)$ 到直线 L: $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ 的距离.

解 由于 $\overrightarrow{M_1M_0}=(-1,-9,2)$, $\boldsymbol{s}=(2,-2,1)$, 所以

$$\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & -9 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k},$$

于是, 由 (18) 式得点 M_0 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{\sqrt{(-5)^2+5^2+20^2}}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}}=5\sqrt{2}.$$

4.3 过直线的平面束方程

设直线 L 的方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

其中 (A_1,B_1,C_1) 和 (A_2,B_2,C_2) 不成比例. 由此建立方程

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{19}$$

其中 λ,μ 为不同时取零的任意实数. 经整理得

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0,$$

因为 A_1,B_1,C_1 和 A_2,B_2,C_2 不成比例, 所以上式中前三项系数不同时为零, 可见 (19) 式是平面方程. 直线 L 上的点 $M(x,y,z)$ 的坐标满足方程 (19), 即 L 在此平面上, 或者说, 平面 (19) 过直线 L. 又由 λ, μ 的任意性, 则每一对实数 λ,μ

就给出一个过直线 L 的平面. 反过来, 过 L 的任一平面, 都有一对 λ,μ, 且方程由 (19) 式确定. 故方程 (19) 是过直线 L 的所有平面方程. 过定直线 L 的所有平面, 称为平面束. 因此, 方程 (19) 是过直线 L 的平面束方程. 常用的过直线 L 的平面束方程为

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

及

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

例 4.7　求直线 L: $\begin{cases}x+y-z-1=0,\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 π: $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

解　如果能求出过直线 L 且垂直于已知平面 π 的平面 π_1, 则平面 π 和 π_1 的交线, 即为所求的投影直线. 过已知直线 L 的平面束方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z-1+\lambda=0.$$

又平面 π_1 垂直于已知平面 π, 则有

$$(1+\lambda)\times 1+(1-\lambda)\times 1+(-1+\lambda)\times 1=0,$$

解得 $\lambda=-1$. 将 $\lambda=-1$ 代入平面束方程, 即得投影平面 π_1 的方程为

$$y-z-1=0,$$

因此, 所求投影直线的方程为

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\ y-z-1=0.\end{cases}$$

习题 7.4

(A)

1. 求满足下列条件的直线的方程:

(1) 过点 $M_0(2,-3,1)$ 且与平面 $3x-y+4z-1=0$ 垂直;

(2) 过点 $M_0(4,-1,3)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$;

(3) 过点 $M_0(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z-1=0$ 及 $y-3z-2=0$ 都平行;

(4) 过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$.

2. 用对称式方程及参数方程表示下列直线:

(1) $\begin{cases}2x+3y-z-4=0,\\3x-5y+2z+1=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+2y-z-6=0,\\2x-y+z-1=0.\end{cases}$

3. 求直线 L_1 : $\begin{cases}5x-3y+3z-9=0,\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$ 与直线 L_2 : $\begin{cases}2x+2y-z+23=0,\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$ 之间的夹角.

4. 求直线 L: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ 与平面 π: $x-y+2z=3$ 之间的夹角.

5. 求点 $(3,-4,4)$ 到直线 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ 的距离.

6. 试确定下列各组中两条直线的位置关系:

(1) $\begin{cases}x+2y-z-7=0,\\-2x+y+z+7=0,\end{cases}$ $\begin{cases}3x+6y-3z-8=0,\\2x-y-z=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x-2y-1=0,\\2y-z-1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x-y-1=0,\\x-2y-3=0.\end{cases}$

7. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

(1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$, $4x-2y-2z-3=0$;

(2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$, $3x-2y+7z-8=0$;

(3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$, $x+y+z-3=0$.

8. 求点 $M(1,2,-3)$ 在平面 $2x-y+3z+3=0$ 上的投影.

9. 求点 $(2,3,1)$ 在直线 $x=-7+t, y=-2+2t, z=-2+3t$ 上的投影.

10. 一直线过点 $B(1,2,3)$, 且与向量 $\boldsymbol{s}=(6,6,7)$ 平行, 求点 $A(3,4,2)$ 到这条直线的距离.

(B)

1. 求过点 $(0,1,2)$ 且与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 垂直相交的直线方程.

2. 求过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

3. 求过点 $(1,2,1)$ 而与两直线

$$\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\x-y+z-1=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}2x-y+z=0,\\x-y+z=0\end{cases}$$

平行的平面方程.

4. 求通过直线 $x=2y=-z$ 且与平面 $x-y+z=8$ 相交成 60° 角的平面方程.

5. 自点 $(1,2,-1)$ 向平面 π: $3x-5y+4z=5$ 作垂线, 求垂线的方程、垂足坐标、垂线(段) 的长.

6. 试求通过点 $(-1,2,4)$, 平行于平面 π: $3x-4y+z-10=0$, 且和直线

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$$

相交的直线方程.

7. 试求通过直线 L_1: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, 且平行于直线 L_2: $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 的平面方程.

8. 求直线 $\begin{cases}2x-3y+4z-12=0,\\ x+4y-2z-10=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z-1=0$ 上的投影直线方程.

§5 曲面及其方程

5.1 曲面方程

在本章第三节我们介绍了曲面方程的概念, 本节介绍一些常见的曲面, 主要讨论以下两个问题:

(1) 已知曲面上动点的几何轨迹, 建立这个曲面的方程;

(2) 已知曲面的方程, 研究这个方程所表示的曲面的形状.

例 5.1 *建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 半径为 R 的球面方程.*

解 设 $M(x,y,z)$ 为球面上的任意一点, 则

$$|M_0M|=R.$$

于是

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{20}$$

因为球面上的点 $M(x,y,z)$ 的坐标都满足方程 (20), 不在球面上的点坐标不满足方程 (20), 所以 (20) 式是所求的以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心,R 为半径的球面方程.

一般地, 设有三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0, \tag{21}$$

这个方程式的特点是平方项的系数相同且缺少 xy, yz, zx 各项, 将 (21) 式经过配方可以化成方程 (20) 的形式, 方程 (21) 的图形就是一个球面.

5.2 柱面

一动直线 L 沿着给定的曲线 C 且平行于定直线移动所形成的曲面称为**柱面** (图 7.27). 动直线 L 称为柱面的母线, 定曲线 C 称为柱面的准线.

下面我们建立母线平行于 z 轴的柱面方程. 设准线 C 是 Oxy 面上的一条曲线, 其方程为

$$F(x,y)=0.$$

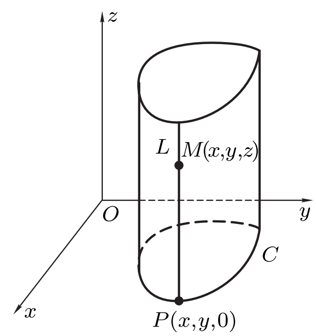

图 7.27

以平行于 z 轴的直线 L 沿曲线 C 移动, 就得到一个柱面 (图 7.27). 在柱面上任取一点 $M(x,y,z)$, 过点 M 作平行于 z 轴的直线 L 与 Oxy 面上的曲线 C 的交点为 $P(x,y,0)$. 注意到 P 点的 x , y 坐标满足方程 $F(x,y)=0$. 因此 M 的坐标满足方程 $F(x,y)=0$. 反之, 点 $M(x,y,z)$ 满足方程 $F(x,y)=0$, 即点 $M(x,y,z)$ 必在过准线 C 上一点 $P(x,y,0)$ 且平行于 z 轴的直线 L 上. 故点 $M(x,y,z)$ 在柱面上, 因此不含变量 z 的方程 $F(x,y)=0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行 z 轴的柱面.

类似地, 不含变量 y 的方程 $G(x,z)=0$ 与不含变量 x 的方程 $H(y,z)=0$, 在空间直角坐标系中分别表示母线平行 y 轴和 x 轴的柱面.

例如, 方程 $x^2+y^2=a^2$ 表示准线是 Oxy 面上的圆 $x^2+y^2=a^2$, 母线平行于 z 轴的柱面, 称为**圆柱面** (图 7.28). 方程 $x^2=2z$ 表示准线是 Oxz 面上的抛物线 $x^2=2z$, 母线平行 y 轴的柱面, 称为**抛物柱面** (图 7.29).

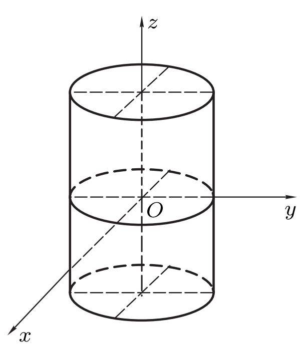

图 7.28

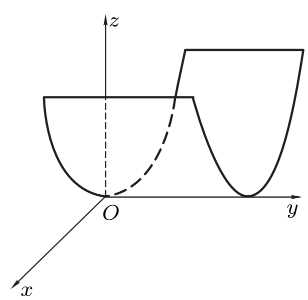

图 7.29

5.3　旋转曲面

平面曲线 L 绕该平面上的一条定直线旋转所生成的曲面称为**旋转曲面**. 定直线称为旋转曲面的轴, 平面曲线 L 称为旋转曲面的母线.

下面我们建立旋转曲面的方程.

设 Oxz 面上的已知曲线 L 的方程为

$$F(x,z)=0.$$

将平面曲线 L 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面如图 7.30 所示. 在此旋转曲面上任取一点 $M(x,y,z)$, 并设 $M_0(x_0,0,z_0)$ 为 L 上的点, 因此满足方程 $F(x,z)=0$, 即 $F(x_0,z_0)=0$. 当 L 绕 z 轴旋转时, 点 M_0 转到点 $M(x,y,z)$, 此时 $z=z_0$, 点 M 到 z 轴的距离

$$d=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z_0)^2}=|x_0|.$$

即

$$x_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

将 $x_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, $z=z_0$ 代入方程 $F(x_0,z_0)=0$, 得

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

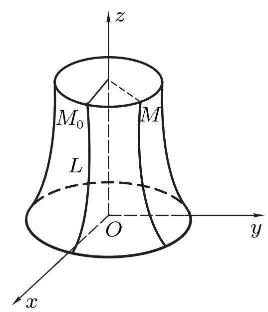

图 7.30

上式为 Oxz 面上的曲线 L 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面方程.

类似地, 可得 Oxz 面上的曲线 L 绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面的方程

$$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0.$$

例 5.2　(1) Oxz 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴、z 轴旋转而成的旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1 \qquad 及 \qquad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

上面方程所表示的两个曲面称为**旋转椭球面**.

(2) Oyz 面上的直线 $z=ay$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面方程为

$$z=\pm a\sqrt{x^2+y^2},$$

即 $z^2=a^2(x^2+y^2)$. 上面方程所表示的曲面称为**圆锥面** (图 7.31).

(3) Oyz 面上的抛物线 $y^2=2pz$ $(p>0)$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面方程为

$$x^2+y^2=2pz,$$

这个方程所表示的曲面称为**旋转抛物面** (图 7.32).

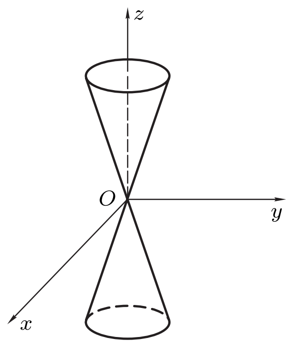

图 7.31

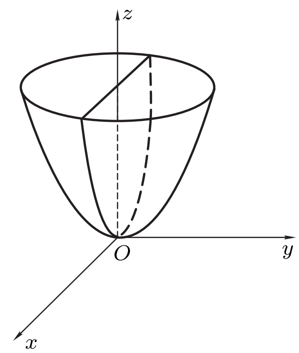

图 7.32

5.4 曲面的参数方程

首先我们建立球心在原点, 半径为 R 的球面的参数方程.

设 $M(x,y,z)$ 为球面上的任意一点, 点 $P(x,y,0)$ 为 M 在 Oxy 面上的投影, φ 为 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向所夹的角 $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$, θ 为 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向所夹的角 $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ (图 7.33), 则点 M 可由 φ, θ 完全确定, 有

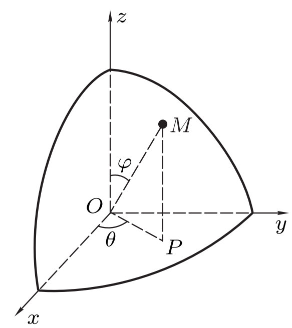

图 7.33

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi). \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

上式称为球面的参数方程, 其中 φ, θ 为参数.

如果我们在球面的参数方程中消去参数 φ, θ, 即得球面的直角坐标方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

一般地, 设方程组

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \qquad (u,v) \in G, \\ z = z(u,v) \end{cases} \tag{22}$$

对于 G 内的每一对 u, v, 由 (22) 式惟一确定的 x, y, z 值与之对应, 且点 $M(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上; 反之, 曲面上每一点的坐标 x, y, z 都由 G 内的一对值 u, v 通过 (22) 式来表示, 所以 (22) 式为曲面 Σ 的参数方程, u, v 称为参数.

例如, 圆锥面 $z^2=a^2(x^2+y^2)$ $(a>0)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=u\cos v, \\ y=u\sin v, \\ z=\pm au \end{cases} \qquad (0\leqslant u<+\infty, 0\leqslant v\leqslant 2\pi).$$

圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos u, \\ y=R\sin u, \\ z=v \end{cases} \qquad (0\leqslant u\leqslant 2\pi, -\infty<v<+\infty).$$

习题 7.5

(A)

1. 求下列球面的球心和半径:

(1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$;

(2) $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$;

(3) $x^2+y^2+z^2+8x=0$.

2. 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心, 且通过坐标原点的球面方程.

3. 一动点与两定点 $(2,3,1)$ 和 $(4,5,6)$ 等距离, 求这动点的轨迹方程.

4. 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中的不同意义:

(1) $x=2$;　(2) $y=x+1$;　(3) $x^2+y^2=4$;　(4) $y^2=2x$.

5. 画出下列各方程所表示的曲面:

(1) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$;　　(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$;

(3) $z=2-x^2$;　　(4) $y^2-2z=0$.

6. 将 Oxz 面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

7. 将 Oxz 面上的椭圆 $9x^2+z^2=4$ 分别绕 x 轴及 z 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

8. 将 Oxy 面上的双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

9. 说明下列旋转曲面是怎样形成的.

(1) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$;　　(2) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$;

(3) $x^2-y^2-z^2=1$;　　(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$.

10. 求母线平行于 x 轴, 且准线为 Oyz 面上的抛物线 $y^2=2z$ 的抛物柱面的方程.

11. 求母线平行于 z 轴, 且准线为 Oxy 面的椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的椭圆柱面的方程.

§6 曲线及其方程

6.1 曲线方程

1. 曲线的一般方程

空间曲线可以看做是两个曲面的交线. 若曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交线为 $\varGamma$, 则 $\varGamma$ 上的点 $M(x,y,z)$ 同属于两个曲面, 即该点的坐标 x,y,z 同时满足这两个方程; 反过来, 坐标 x,y,z 同时满足这两个方程的点, 必在这两个曲面上, 因此以 x,y,z 为坐标的点 $M(x,y,z)$ 必在交线 $\varGamma$ 上. 所以, 方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{23}$$

表示交线 $\varGamma$, (23) 式称为空间曲线 $\varGamma$ 的一般方程.

注意: 因为通过空间一条曲线的曲面有无穷多个, 因此, 表示空间曲线的方程是不惟一的. 例如, 方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=2, \\ z=0 \end{cases}$$

都表示 Oxy 面上以原点为圆心的单位圆周.

例 6.1 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 第一个方程表示的是球心在原点, 半径为 a 的上半球面. 第二个方程表示的是母线平行于 z 轴, 以 Oxy 面上的圆周 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ 为准线的圆柱面, 因此方程组所表示的曲线是上半球面与圆柱面的交线如图 7.34 所示.

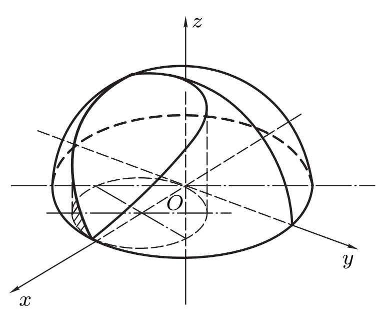

图 7.34

2. 空间曲线的参数方程

空间直线可用参数方程表示, 空间曲线也可以用参数方程来表示, 即把曲线的动点的坐标 x,y,z 分别表示成参数 t 的函数

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{24}$$

对于每一个 t 值, 就有一组数 x,y,z 对应于曲线上一点 M; 当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续变动时, 就得到曲线 $\varGamma$ 上的全部点, 方程 (24) 称为**曲线的参数方程**.

例 6.2　*设一动点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速率 ω 绕 z 轴等速旋转, 同时又以线速率 v 沿平行于 z 轴的正方向匀速上升, 则动点 M 运动的轨迹称为***圆柱螺旋线** *(图 7.35), 试求它的参数方程.*

解　以时间 t 为参数, 设在初始时刻 $t=0$ 时, 动点位于 $M_0(a,0,0)$, 经过时间 t, 动点位于点 $M(x,y,z)$, M 在 Oxy 面上的投影为 $P(x,y,0)$. 由于经过时间 t 的角位移为 ωt, 所以

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t, \\ y=a\sin\omega t. \end{cases}$$

因为动点同时以线速率 v 沿平行于 z 轴的方向匀速上升, 所以 $z=PM=vt$. 因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t, \\ y=a\sin\omega t, \\ z=vt. \end{cases}$$

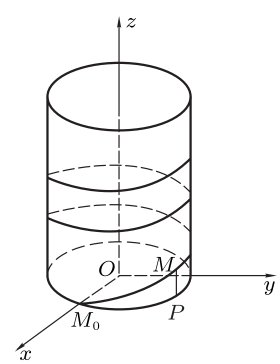

图 7.35

如果令 $\theta=\omega t$, 以 θ 为参数, 则螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta, \end{cases}$$

其中 $b=\dfrac{v}{\omega}$, θ 是动点转过的角度.

6.2　空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 $\varGamma$ 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases} \tag{25}$$

由方程组 (25) 中消去 z, 得

$$H(x,y)=0. \tag{26}$$

方程 (26) 表示一个母线平行于 z 轴的柱面, 这个柱面必定包含曲线 Γ, 所以它是一个以曲线 Γ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面, 称此柱面为曲线 Γ 关于 Oxy 面上的**投影柱面**. 此投影柱面与 Oxy 面的交线

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$$

称为曲线 Γ 在 Oxy 面上的**投影曲线**.

同理, 如果从方程组 (25) 中消去 x 或 y, 分别得到 $R(y,z)=0$ 或 $T(x,z)=0$, 则曲线 Γ 在 Oyz 面和 Oxz 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} R(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} T(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

例 6.3 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4a^2, \\ x^2+y^2=2ax \end{cases}$ 关于 Oxy 面和 Oxz 面的投影柱面的方程以及在 Oxy 面上和 Oxz 面上的投影曲线的方程.

解 因为曲线是球面和母线平行于 z 轴, 准线为 $x^2+y^2=2ax$ 的圆柱面的交线, 因此, 曲线关于 Oxy 面的投影柱面的方程就是

$$x^2+y^2=2ax.$$

投影曲线为 Oxy 面上的圆周

$$\begin{cases} x^2+y^2=2ax, \\ z=0. \end{cases}$$

从曲线方程中消去 y, 即得曲线关于 Oxz 面的投影柱面的方程为

$$z^2+2ax-4a^2=0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2a).$$

投影曲线方程为 Oxz 面上的一段抛物线

$$\begin{cases} z^2+2ax-4a^2=0, \\ y=0 \end{cases} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2a).$$

例 6.4 求由曲线 $\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面在平面 $z=2$ 与平面 $z=8$ 之间的部分 Σ, 在 Oxy 面上的投影区域 D.

解　旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2=2z \qquad (2 \leqslant z \leqslant 8),$$

两个平面与旋转曲面的交线是 $z=2$ 与 $z=8$ 两个平面上的圆:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=2 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=8. \end{cases}$$

这两条交线在 Oxy 面上的投影曲线分别是 Oxy 面上的圆:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x^2+y^2=16, \\ z=0, \end{cases}$$

故所求曲面 Σ 在 Oxy 面上的投影区域 D 是 Oxy 面上圆环形区域

$$4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 16, z=0.$$

如图 7.36 所示.

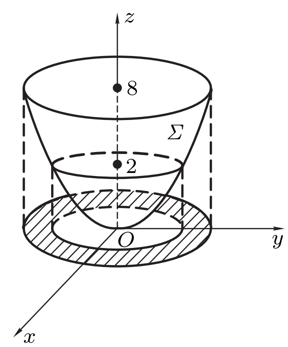

图 7.36

习题 7.6

(A)

1. 下列方程组在平面直角坐标系和空间直角坐标系中分别表示什么图形:

(1) $\begin{cases} x-5=0, \\ y-2=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ y=2. \end{cases}$

2. 求下列空间曲线关于 Oxy 面的投影柱面和投影曲线的方程.

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ x+z=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1. \end{cases}$

3. 求空间曲线 $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x+2y=1 \end{cases}$ 在 Oyz 面上的投影曲线的方程.

4. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴, 且通过曲线

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$$

的柱面方程.

5. 求下列曲线的参数方程:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=x; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9, \\ z=5. \end{cases}$

6. 求螺旋线

$$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \\ z=3t \end{cases}$$

与平面 $z=\pi$ 的交点坐标.

7. 求曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=x \end{cases}$$

在各坐标面上的投影曲线的方程, 并求该曲线的参数方程.

(B)

1. 求螺旋线

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt \end{cases}$$

在各坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

2. 求两个球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线在三个坐标面上的投影曲线方程.

3. 将曲线的一般方程 $\varGamma$: $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$ 化成参数方程.

4. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在各坐标面上的投影区域.

5. 求由上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 柱面 $x^2+y^2-ax=0$, 及平面 $z=0$ 所围成的立体在 Oxy 面和 Oxz 面上的投影.

§7　常见的二次曲面

三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面. 我们将用坐标面和平行于坐标面的平面与二次曲面相截, 考察其截痕的形状和性质, 从而了解二次曲面的图形, 这种方法称为截痕法.

7.1 椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{27}$$

所表示的曲面称为**椭球面**, 其中 a,b,c 均为正数.

由于椭球面方程只含 x,y,z 的平方项, 因此, 椭球面关于原点、坐标面、坐标轴都是对称的, 原点称为椭球面的中心.

由方程 (27) 可知,

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

即 $|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b,\ |z|\leqslant c$. 这说明球面包含在六个平面 $x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$ 所围成的长方体内, 故称椭球面为有界曲面. a,b,c 称为椭球面的半轴.

由截痕法, 椭球面与三个坐标面的交线分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

它们分别为 Oxy 面、Oyz 面、Oxz 面上的椭圆.

用平行于 Oxy 面的平面 $z=z_0$ $(-c<z_0<c)$ 截椭球面, 其交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{z_0^2}{c^2},\\ z=z_0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{z_0^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{z_0^2}{c^2}\right)}=1,\\ z=z_0,\end{cases}$$

它是平面 $z=z_0$ 上的椭圆, 中心位于点 $(0,0,z_0)$, 两个半轴分别为 $a\sqrt{1-\dfrac{z_0^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1-\dfrac{z_0^2}{c^2}}$, 当 z_0 从 0 逐渐增大到 c 时, 椭圆由大到小逐渐缩成一点 $(0,0,c)$.

用平行于其他两个坐标面的平面去截椭球面, 同样有类似的结果.

综上所述, 可得椭球面的形状 (图 7.37).

当 $a=b$ 时, 方程 (27) 变为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

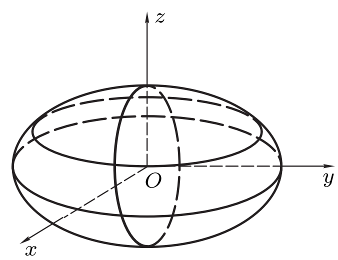

图 7.37

它是 Oxz 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 或是 Oyz 面上的椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转椭球面.

当 $a=b=c$ 时, 方程 (27) 变为 $x^2+y^2+z^2=a^2$. 即是球心在原点, 半径为 a 的球面.

7.2 二次锥面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{28}$$

所表示的曲面称为**二次锥面**, 其中 a,b,c 均为正数.

因为 (28) 式只有 x,y,z 的平方项, 故该曲面关于原点、坐标面、坐标轴都是对称的.

二次锥面是无界曲面. 因为满足 (28) 式的 x,y,z 的绝对值可以无限大.

由截痕法, 二次锥面 (28) 和 Oxy 面只相交于一点, 即原点. 用 $z=z_0$ $(-\infty<z_0<+\infty)$ 平面截二次锥面, 交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{az_0}{c}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{bz_0}{c}\right)^2}=1, \\ z=z_0\end{cases} \qquad (z_0\neq 0),$$

这是 $z=z_0$ 平面上的椭圆, 两半轴长分别为 $\left|\dfrac{az_0}{c}\right|,\left|\dfrac{bz_0}{c}\right|$.

用平面 $y=y_0$ 去截二次锥面, 交线为

$$\begin{cases}\dfrac{z^2}{\left(\dfrac{cy_0}{b}\right)^2}-\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{ay_0}{b}\right)^2}=1, \\ y=y_0,\end{cases}$$

它是 $y=y_0$ 面上的双曲线. 同理, 用 $x=x_0$ 去截二次锥面, 交线也是双曲线.

该二次锥面与 Oyz 面和 Oxz 面的交线是两条过原点的对称直线

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0, \\ x=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0, \\ x=0, \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\ y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\ y=0. \end{cases}$$

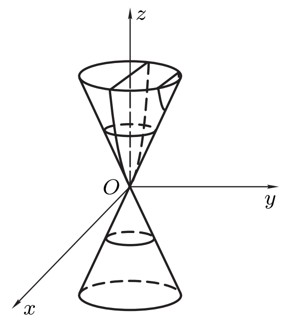

图 7.38

综上所述, 可得二次锥面的形状 (图 7.38).

7.3 双曲面

1. 单叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a,b,c>0) \tag{29}$$

所表示的曲面称为**单叶双曲面**.

曲面 (29) 关于原点、坐标轴和坐标面都对称.

由于曲面 (29) 上的点 $M(x,y,z)$, 其 $|x|,|y|,|z|$ 皆可无限大, 故单叶双曲面是无界曲面.

由截痕法, 用平面 $z=z_0$ 去截曲面 (29), 得

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{z_0^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{z_0^2}{c^2}\right)}=1, \\ z=z_0. \end{cases}$$

这是中心在 $(0,0,z_0)$ 点, 半轴长分别为 $a\sqrt{1+\dfrac{z_0^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\dfrac{z_0^2}{c^2}}$ 的椭圆. 当 $z_0=0$ 时, 是半轴长分别为 a,b 的椭圆; 当 $|z_0|$ 无限增大时, 椭圆两半轴长也无限增大.

用平面 $x=x_0$ 去截曲面 (29), 得

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)}=1, \\ x=x_0. \end{cases}$$

这是中心在 $(x_0,0,0)$ 点的双曲线. 当 $|x_0|<a$ 时, 双曲线实轴平行 y 轴; 当 $|x_0|>a$ 时, 实轴平行 z 轴; 当 $x_0=\pm a$ 时, 交线为相交于 $(\pm a,0,0)$ 点的两对直线

$$\begin{cases}\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0,\\ x=a;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0,\\ x=a.\end{cases}$$

以及

$$\begin{cases}\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0,\\ x=-a;\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0,\\ x=-a.\end{cases}$$

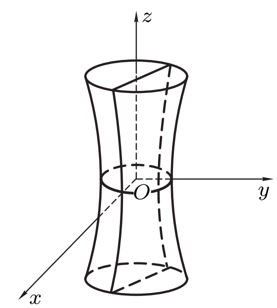

图 7.39

用平面 $y=y_0$ 去截曲面 (29), 其结果类似.

综上分析, 单叶双曲面的图形如图 7.39.

2. 双叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1\qquad (a,b,c>0)\tag{30}$$

所表示的曲面称为**双叶双曲面**.

曲面 (30) 是关于原点、坐标轴和坐标面对称的无界曲面.

显然, 曲面 (30) 上的点 $M(x,y,z)$ 必满足不等式 $\dfrac{y^2}{b^2}-1\geqslant 0$, 即曲面位于平面 $y=b$ 的右侧与 $y=-b$ 的左侧.

用平面 $y=y_0$ 去截曲面 (30), 得

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{y_0^2}{b^2}-1\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{y_0^2}{b^2}-1\right)}=1,\\ y=y_0\end{cases}\qquad (|y_0|>b),$$

它们是中心为 $(0,y_0,0)$, 两半轴长分别为 $a\sqrt{\dfrac{y_0^2}{b^2}-1},c\sqrt{\dfrac{y_0^2}{b^2}-1}$ 的椭圆. 当 $y_0=\pm b$ 时, 截痕缩为点 $(0,\pm b,0)$, 当 $|y_0|$ 逐渐增大时, 椭圆两半轴长也不断增大.

用平面 $z=z_0$ 去截曲面 (30), 得

$$\begin{cases}-\dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{z_0^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{z_0^2}{c^2}\right)}=1,\\ z=z_0,\end{cases}$$

这是实轴为平行于 y 轴, 中心在点 $(0,0,z_0)$ 的双曲线.

用平面 $x=x_0$ 去截曲面 (30), 其结果类似.

综上分析, 双叶双曲面的图形如图 7.40.

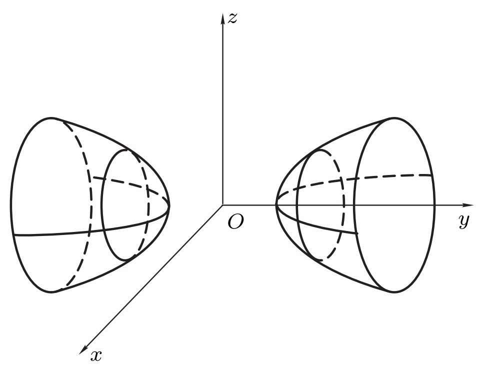

图 7.40

y 轴称为双叶双曲面 (30) 的实轴.

同样, 方程

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

也都是双叶双曲面, 它们的实轴分别为 x 轴和 z 轴.

7.4　抛物面

1. 椭圆抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (pq>0) \tag{31}$$

所表示的曲面称为**椭圆抛物面**. 现仅就 $p>0,q>0$ 情况讨论, 同理可讨论 $p<0$, $q<0$ 情况.

曲面 (31) 位于 Oxy 面上方, 且过原点. 它是关于 z 轴、坐标面 Oyz,Oxz 对称的无界曲面.

用平面 $z=z_0$ 去截曲面 (31), 得

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_0}+\dfrac{y^2}{2qz_0}=1, \\ z=z_0\end{cases} \qquad (z_0>0),$$

这是中心在 $(0,0,z_0)$, 两半轴长分别为 $\sqrt{2pz_0},\sqrt{2qz_0}$ 的椭圆. 当 $z_0=0$ 时, 截痕缩为原点, 当 z_0 逐渐增大时, 椭圆两半轴长也不断增大.

用平面 $x=x_0$ 去截曲面 (31), 得

$$\begin{cases} y^2=2qz-\dfrac{q}{p}x_0^2, \\ x=x_0, \end{cases}$$

这是顶点在 $\left(x_0,0,\dfrac{x_0^2}{2p}\right)$, 对称轴平行于 z 轴, 开口朝上的抛物线.

用平面 $y=y_0$ 去截曲面 (31), 其结果类似.

综上分析, 椭圆抛物面的图形如图 7.41 所示.

特别地, 当 $p=q$ 时, 曲面 (31) 称为旋转抛物面, 由 Oyz 面上的抛物线 $y^2=2qz$, 或 Oxz 面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕 z 轴旋转而成.

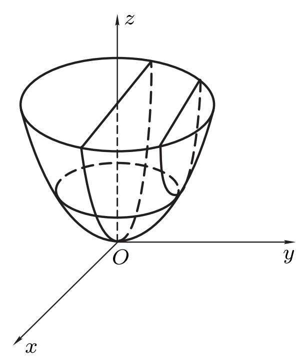

图 7.41

2. 双曲抛物面

由方程

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z \quad (pq>0) \tag{32}$$

所表示的曲面称为**双曲抛物面**. 现仅就 $p>0,q>0$ 情况讨论.

曲面 (32) 过原点, 它是关于 z 轴和 Oxz 面, Oyz 面对称的无界曲面.

用平面 $z=z_0$ 去截曲面 (32), 得

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2pz_0}-\dfrac{y^2}{2qz_0}=1, \\ z=z_0. \end{cases}$$

这是 $z=z_0$ 面上的双曲线或直线. 当 $z_0>0$ 时, 双曲线的实轴平行于 x 轴; 当 $z_0<0$ 时, 双曲线的实轴平行于 y 轴; 当 $z=0$ 时, 截痕为平面 $z=0$ 上的一对直线

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2p}}+\dfrac{y}{\sqrt{2q}}=0, \\ z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2p}}-\dfrac{y}{\sqrt{2q}}=0, \\ z=0. \end{cases}$$

用平面 $x=x_0$ 去截曲面 (32), 得

$$\begin{cases} y^2=-2q\left(z-\dfrac{x_0^2}{2p}\right), \\ x=x_0, \end{cases}$$

这是 $x = x_0$ 面上的抛物线, 顶点在 $\left(x_0, 0, \dfrac{x_0^2}{2p}\right)$, 对称轴平行于 z 轴, 开口朝下.

用平面 $y = y_0$ 去截曲面 (32), 其结果类似.

综上分析, 双曲抛物面的图形如图 7.42 所示.

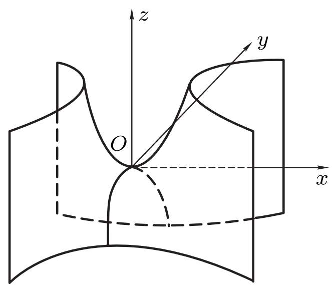

图 7.42

因为双曲抛物面的图形酷似马鞍, 故又称为马鞍面.

习题 7.7

(A)

1. 指出下列方程所表示的曲面, 并作图.

(1) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$;　　(2) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = z$;

(3) $16x^2 + 4y^2 - z^2 = 64$;　　(4) $y^2 + z^2 - x^2 = 0$.

2. 画出下列各曲面所围成的立体的图形:

(1) $x + 2y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

(2) $z = x^2 + y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

(3) $x^2 + y^2 = 1, y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ (在第一卦限内).

3. 求曲线 $\begin{cases} y^2 + z^2 - 2x = 0, \\ z = 3 \end{cases}$ 在 Oxy 面上的投影曲线的方程, 并指出原曲线是什么曲线.

4. 指出下列方程所表示的曲线:

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x = 2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36, \\ y = 1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} y^2 + z^2 - 4x + 8 = 0, \\ y = 4. \end{cases}$

(B)

1. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

2. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) 圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$;

(2) 抛物柱面 $2y^2=x$, 平面 $z=0$ 及 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=1$;

(3) 抛物柱面 $x^2=1-z$, 平面 $y=0, z=0$ 及 $x+y=1$.