保密★启用前

2017-2018 学年第二学期期末考试

《高等数学 AⅡ》

考生注意事项

1．答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生**教学号**和考生姓名；在答题卡指定位置上填写考试科目、考生姓名和考生**教学号**，并涂写考生**教学号**信息点。
2．选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3．填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4．考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生教学号								
考生姓名								

一、选择题：1～6 小题，每小题 3 分，共 18 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

1. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}, y=x$ 及 $x=2$ 所围成的图形面积为 S，则 $S=$（ B ）.

（A）$\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-x\right)\mathrm{d}x$ （B）$\int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

（C）$\int_1^2\left(2-\dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}y+\int_1^2(2-y)\mathrm{d}y$ （D）$\int_1^2\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x$

2. 如果反常积分 $\int_1^{+\infty}x^p(\mathrm{e}^{-\cos\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{-1})\,\mathrm{d}\,x$ 收敛，则常数 p 的取值范围是（ B ）.

（A） $p\in(-\infty,2)$ （B） $p\in(-\infty,1)$

（C） $p\in(-1,+\infty)$ （D） $p\in(1,+\infty)$

3．母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程是（ C ）.

（A）椭圆柱面 $3x^2+2z^2=16$. （B）椭圆柱面 $x^2+2y^2=16$.

（C）双曲柱面 $3y^2-z^2=16$. （D）抛物柱面 $3y^2-z=16$.

4. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（ D ）.

（A）连续，且偏导数存在 （B）连续，但偏导数不存在

（C）不连续，但偏导数存在 （D）不连续，且偏导数不存在

5. 函数 $z=x^2-y^2+2y+7$ （ C ）.

（A）没有驻点，也没有极值点 （B）有驻点，也有极值点

（C）有驻点，但没有极值点 （D）没有驻点，但有极值点

6. 过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为（ B ）.

（A） $z=0$ 与 $x+y-z=1$ （B） $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

（C） $y=x$ 与 $x+y-z=1$ （D） $y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

二、填空题：7～12 小题，每小题 3 分，共 18 分．请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效．

7. 曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le\frac{1}{2}$ 的一段弧的长度等于___ $\ln 3-\frac{1}{2}$ ___.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=$____ $\frac{1}{2}$ ___.

9. 如果向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,5)$ 与 $\boldsymbol{b}=(3,m,-2)$ 互相垂直，则常数 $m=$___ $-\frac{4}{3}$ __.

10. Oyz 面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面方程为 $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$ _.

11. 设 $z=f\left(x+y,xy\right)$，其中 f 是 $C^{(1)}$ 类函数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$_____ $f_1'+yf_2'$ ______.

12. 函数 $u=x^2+y^2-xyz$ 在点 $(1,1,1)$ 处的方向导数的最大值是___ $\sqrt{3}$ _______.

三、解答题：13～19 小题，共 64 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

13.（本题满分 10 分）

计算 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{y\mathrm{e}^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y$.

【解】区域 $\mathrm{D}:0\le x\le 1,0\le y\le x^2$，即 $\mathrm{D}:0\le y\le 1,\sqrt{y}\le x\le 1$

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{y\mathrm{e}^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{y\mathrm{e}^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 y\mathrm{d}\mathrm{e}^y=y\mathrm{e}^y\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{e}-\mathrm{e}^y\Big|_0^1=1.$$

14.（本题满分 10 分）

求过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z=1$ 及 $y-3z=2$ 都平行的直线的对称式方程和参数方程.

【解】由题意，所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=(-2,3,1),$$

所以过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z=1$ 及 $y-3z=2$ 都平行的直线方程

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}.$$

参数方程为

$$\begin{cases} x=-2t,\\ y=2+3t,\\ z=4+t.\end{cases}$$

15.（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x=z\cdot \mathrm{e}^{y+z}$ 所确定的隐函数，求 $\mathrm{d}z\big|_{(\mathrm{e},0)}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\Big|_{(\mathrm{e},0)}$.

【解】当 $x=\mathrm{e},y=0$ 时，$z(\mathrm{e},0)=1$.

设 $F=z\cdot\mathrm{e}^{y+z}-x$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{-1}{\mathrm{e}^{y+z}(1+z)}=\frac{1}{\mathrm{e}^{y+z}(1+z)}=\frac{z}{x(1+z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\mathrm{e},0)}=\frac{1}{2\mathrm{e}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{z\mathrm{e}^{y+z}}{\mathrm{e}^{y+z}(1+z)}=-\frac{z}{(1+z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\mathrm{e},0)}=-\frac{1}{2},$$

故 $\mathrm{d}z\big|_{(\mathrm{e},0)}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{z}{1+z}\right)$$

$$=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(1+z)-z\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+z)^2}$$

$$=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+z)^2}$$

$$=-\frac{z}{x(1+z)^3},$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\Big|_{(\mathrm{e},0)}=-\frac{1}{8\mathrm{e}}.$$

16. （本题满分 10 分）

计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由 $x^2+y^2=z^2$ 和 $z=1$ 所围成的闭区域.

【解法一】 利用柱面坐标计算.

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\int_r^1\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1 r^2(1-r)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{6}.$$

【解法二】 利用“先二后一”法.

$$I=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{z^3}{3}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{6}.$$

17. （本题满分 8 分）

求圆域 $x^2+(y-5)^2\le 16$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

【解】$V=\pi\int_{-4}^{4}\left(5+\sqrt{16-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-4}^{4}\left(5-\sqrt{16-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_{-4}^{4}20\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=40\pi\int_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=40\pi\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 4^2$$

$$=160\pi\ .$$

18. （本题满分 8 分）

利用 Lagrange 乘数法求函数 $f\left(x,y\right)=2x-y+1$ 满足约束条件 $x^2+y^2=5$ 下的最大值和最小值.

【解】设 Lagrange 函数

$$L=2x-y+1+\lambda(x^2+y^2-5)\text{，}$$

令

$$\begin{cases} L_x=2+2\lambda x=0,\\ L_y=-1+2\lambda y=0,\\ L_\lambda=x^2+y^2-5=0,\end{cases}$$

解得驻点 $(-2,1),(2,-1)$

又 $f(-2,1)=-4$, $f(2,-1)=6$, 所以函数 $f\left(x,y\right)$ 满足约束条件 $x^2+y^2=5$ 下的最大值为 $f(2,-1)=6$, 最小值为 $f(-2,1)=-4$.

19.（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 满足

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\mathrm{d}t+\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

其中区域 D 是以 $(-1,-1)$，$(1,-1)$，$(1,1)$ 为顶点的三角形区域，且 $f(1)=0$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

【解】 因为 $\int_0^{x^2} f(x^2-t)\mathrm{d}t \overset{x^2-t=u}{=} \int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u$，

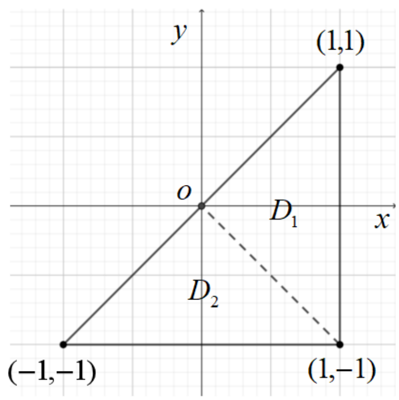
故 $f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u+\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

所以

$$f(xy)=(xy)^2+xy\int_0^{(xy)^2} f(u)\mathrm{d}u+\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

令 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k$，两边同时在 D 上积分得：

$$k=\iint_D (xy)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left[xy\int_0^{(xy)^2} f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$



如图所示：$D=D_1\cup D_2$，显然 D_1 关于 x 轴对称，D_2 关于 y 轴对称.

$$\iint_D (xy)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-1}^x x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{9}\,.$$

而 $xy\int_0^{(xy)^2} f(u)\mathrm{d}u$ 关于 x，关于 y 分别为奇函数，故 $\iint\limits_D\left[xy\int_0^{(xy)^2} f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

因为 $\iint\limits_D k\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2k$ （三角形的面积为 2），所以

$$k=\frac{2}{9}+0+2k,\ k=-\frac{2}{9}\,.$$

于是

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u-\frac{2}{9}.$$

令 $x=1$，得 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{9}$.