微积分作业

AII

吉林大学公共数学教学与研究中心

2022 年 2 月

第一次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}, y=x$ 及 $x=2$ 所围成的图形面积为 S, 则 $S=(\quad)$.

(A) $\displaystyle\int_1^2\left(2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$; (B) $\displaystyle\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$; (C) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2(2-y)\,\mathrm{d}y$; (D) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2\left(2-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$.

2. 设点 $A(x,\sin x)$ 是曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 上一点,记 $S(x)$ 是直线 OA (O 为原点)与曲线 $y=\sin x$ 所围成图形的面积, 则当 $x\to 0^+$ 时, $S(x)$ 与$(\quad)$.

(A) x 为同阶无穷小; (B) x^2 为同阶无穷小;

(C) x^3 为同阶无穷小; (D) x^4 为同阶无穷小.

3. 设 $0<g(x)<f(x)<m$(常数), 则由 $y=f(x), y=g(x)x=a, x=b$ 所围成图形绕直线 $y=m$ 旋转所形成的立体的体积等于$(\quad)$.

(A) $\displaystyle\int_a^b\pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(B) $\displaystyle\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(C) $\displaystyle\int_a^b\pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(D) $\displaystyle\int_a^b\pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

4. 下列反常积分发散的是$(\quad)$.

(A) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (B) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (C) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$; (D) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e},\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant\mathrm{e},\end{cases}$ 若反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则$(\quad)$.

(A) $\alpha<-2$; (B) $\alpha>2$; (C) $0<\alpha<2$; (D) $-2<\alpha<0$.

二、填空题

1. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[1,\sqrt{3}]$ 上的平均值为______________.

2. 抛物线 $y^2=ax(a>0)$ 与 $x=1$ 所围图形面积为 $\dfrac{4}{3}$, 则 $a=$ ______________.

3. 曲线 $y=x^2,x=y^2$ 围成图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积为______________.

4. 已知反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{ax^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 且值为 1 ,则 $a=$ ______________.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$ ______________.

三、计算题

1. 计算由 x 轴,曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 及其经过原点的切线围成的平面图形面积及该图形绕 x 轴旋转一周所得立体体积.

2. 设 $A>0,D$ 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0,x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域. V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转而成旋转体的体积, 若 $V_1=V_2$, 求 A 的值.

3. 求曲线 $r^2 = \cos 2\theta$ 所围成图形的面积.

4. 求摆线 $\begin{cases} y = 1 - \cos t, \\ x = t - \sin t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ 的弧长.

5. 某水坝中有一个三角形的闸门,这闸门笔直竖立在水中,它的底边与水平面相齐,已知三角形底边长为10米,高8米,求闸门所受的水压力.

四、判断下列反常积分的收敛性

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

第二次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 共线, 且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$, 则 $\boldsymbol{x}=(\quad)$.

(A) $(6,-3,3)$; (B) $(-6,3,-3)$; (C) $(6,3,-3)$; (D) $(-6,3,3)$.

2. 设有直线 $L:\left\{\ x+3y+2z+1=0, 2x-y-10z+3=0\right.$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 $L(\quad)$.

(A) 平行于 π; (B) 在 π 上; (C) 垂直于 π; (D) 与 π 斜交.

3. 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的交线在 Oxy 平面上的投影曲线是$(\quad)$.

(A) 抛物线; (B) 双曲线; (C) 椭圆; (D) 圆.

4. 过两曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与 $x^2-y^2-z^2=0$ 的交线,母线平行于 z 轴的柱面方程为$(\quad)$.

(A) $5x^2-3y^2=1$; (B) $5x^2+3y^2=1$; (C) $3x^2-5y^2=1$; (D) $3x^2+5y^2=1$.

5. 方程 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=z$ 所表示的曲面为$(\quad)$.

(A) 椭球面; (B) 柱面; (C) 双曲抛物面; (D) 旋转抛物面.

二、填空题

1. 若 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间夹角为 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$______________, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$______________.

2. 过点 $(1,1,-1),(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 三点的平面方程为______________.

3. 与向量 $\boldsymbol{a}=(2,4,-1)$ $\boldsymbol{b}=(0,-2,2)$ 同时垂直的单位向量为______________.

4. 点 $(2,1,3)$ 到直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 的距离为______________.

5. 曲线 $\begin{cases} z=6-x^2-y^2, \\ 2y+z-3=0 \end{cases}$ 在 Oxy 面上的投影曲线方程为____________.

三、计算题

1. 设直线 L_1 的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$, 直线 L_2 的方程为 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

(1)证明 L_1 与 L_2 为异面直线; (2) 计算 L_1与 L_2 的距离.

2. 求过直线 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{-2}$, 且平行于直线 $L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ 的平面 π 的方程.

3. 求过点 $(0,1,2)$ 且与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 垂直相交的直线方程.

4. 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

第三次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{x+y}$ =(　　)

(A) 1;　　(B) 0;　　(C) $\dfrac{1}{2}$;　　(D) 不存在.

2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(　　).

(A) 不连续, 偏导数存在;　　(B) 不连续, 偏导数不存在;

(C) 连续, 偏导数存在;　　(D) 连续, 偏导数不存在.

3. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2), \\ y=4 \end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{0}$ 之间的夹角为(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$;　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$;　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$;　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

4. 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-y}$, 则(　　).

(A) $f'_x-f'_y=0$;　　(B) $f'_x+f'_y=0$;　　(C) $f'_x-f'_y=f$;　　(D) $f'_x+f'_y=f$.

5. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$;

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$;

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, ;

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

二、填空题

1. 函数 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$ 连续区域是______________

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} =$ ______________.

3. 设函数 $z=\sqrt{x^4+y^4}$, 则 $z'_x(0,0)=$ ______________.

4. 设函数 $z=\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})} =$ ______________.

5. 设 $z=\mathrm{e}^{\sin(xy)}$, 则 $\mathrm{d}z=$______________.

三、计算题

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$, 证明:当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在.

2. 设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 设 $z = \ln\left(\tan\dfrac{y}{x}\right)$, 求 $\mathrm{d}z$.

4. 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 证明:当 $r \neq 0$ 时, 有 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \dfrac{2}{r}$.

5. 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内连续, 问:

(1) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件时, 才能使偏导数 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在?

(2) 在 $\varphi(x,y)$ 满足上述条件时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微?

第四次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设隐函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right) = 0$ 所确定,其中 F 为可微函数, 且 $F_2' \neq 0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$

(A) x;　　(B) $-x$;　　(C) z;　　(D) $-z$.

2. 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是(　　).

(A) $\dfrac{1}{2}, 0$;　　(B) $0, \dfrac{1}{2}$;　　(C) $-\dfrac{1}{2}, 0$;　　(D) $0, -\dfrac{1}{2}$.

3. 设函数 $u(x,y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \psi(t)\mathrm{d}t$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数. 则必有(　　).

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;　　(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

4. 函数 $u = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处沿任一方向的方向导数都存在是它在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数都存在的(　　)条件.

(A) 充分必要;　(B) 必要非充分;　(C) 充分非必要;　(D) 既非充分又非必要.

5. 函数 $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$ 在 $(0,1)$ 处的梯度等于(　　).

(A) $\boldsymbol{i}$;　　(B) $\boldsymbol{j}$;　　(C) $-\boldsymbol{j}$;　　(D) $-\boldsymbol{i}$.

二、填空题

1. 已知 $f(1,2) = 4, \mathrm{d}f(1,2) = 16\mathrm{d}x + 4\mathrm{d}y, \mathrm{d}f(1,4) = 64\mathrm{d}x + 8\mathrm{d}y$, 则 $z = f(x, f(x,y))$ 在点 $(1,2)$ 处对 x 的偏导数为______________.

2. 设隐函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $xy - yz + xz = \mathrm{e}^z$ 确定, 则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)} =$ ______________.

3. 设 $z = yf(x^2 - y^2)$, 其中 $f(u)$ 可微, 则 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ______________.

4. 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处沿 x 轴正向的方向导数为______________.

5. 函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{b}=$ ______________的方向导数最大,最大值为______________.

三、计算题

1. 设 $z=f(x-y,xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 所确定, 且 f 可微, 求 $\mathrm{d}z$.

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(y-x,yz)=0$ 所确定的隐函数, 其中函数 f 对各个变量具有连续的二阶偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

4. 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

5. 求函数 $z = \ln(x+y)$ 在点 $(1,2)$ 处沿着抛物线 $y^2 = 4x$ 在该点切线方向的方向导数.

第五次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设 $f(1,1)=-1$ 为函数 $f(x,y)=ax^3+by^3+cxy$ 的极值, 则 a,b,c 分别等于(　　).

(A) $1,1,-3$;　　(B) $1,1,3$;　　(C) $1,1,-1$;　　(D) $-1,-1,3$.

2. $z'_x(x_0,y_0)=0$ 与 $z'_y(x_0,y_0)$ 同时存在是函数 $z=z(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值的(　　).

(A) 必要条件但非充分条件;　　(B) 充分条件但非必要条件;

(C) 充分必要条件;　　(D) 既非必要也非充分条件.

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$, 则点 $(0,0)$ (　　).

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点;　　(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点;

(C) 是 $f(x,y)$ 的极小值点;　　(D) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

4. 曲面 $z=x+f(y-z)$ 的任一点处的切平面(　　)

(A) 垂直于一定直线;　　(B) 平行于一定平面;

(C) 与一定坐标面成定角;　　(D) 平行于一定直线.

5. 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是(　　).

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$;　　(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$;

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$;　　(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

二、填空题

1. 如果曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 在点 $M(x,y,z)$ 处的切线平行于平面 $x+3y+3z=4$, 则切点 M 的坐标为______________.

2. 曲面 $\ln z + \mathrm{e}^{z-1} = xy$ 在点 $\left(2, \dfrac{1}{2}, 1\right)$ 处的切平面方程为______________.

3. 函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲面 $2z = x^2 + y^2$ 在该点的外法线方向的方向导数为______________.

4. 曲面 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$ 在对应于 $u = 1, v = \dfrac{\pi}{2}$ 的点处的切平面方程为____________________________.

5. 函数 $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$ 在点 $(0,1)$ 处具有Peano余项的二阶Taylor公式为

____.

三、计算题

1. 求曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{2} = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

2. 过直线 $\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$ 的切平面, 求其方程.

3. 求函数 $u = x + y + z$ 在 $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$ 上的最大值和最小值.

4. 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

5. 抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一个椭圆, 求原点到该椭圆的最长距离和最短距离

6. 将长为 l 的细铁丝剪成三段, 分别用来围成圆、正方形和正三角形, 问怎样剪法才能使它们围成的面积之和为最小, 并求出最小值.

第六次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1是 D 的第一象限部分, 则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$ 等于(　　).

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma$;　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma$;

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$;　　(D) 0.

2. 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a,b 为常数, 则 $\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$(　　).

(A) $ab\pi$;　(B) $\dfrac{ab\pi}{2}$;　(C) $(a+b)\pi$;　(D) $\dfrac{(a+b)\pi}{2}$.

3. 设平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, $M=\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$, $N=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2\mathrm{d}\sigma$, $P=\iint\limits_D [\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}-1]\mathrm{d}\sigma$, 则有(　　).

(A) $M>N>P$;　(B)$N>M>P$;　(C) $M>P>N$;　(D) $N>P>M$.

4. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 可以写成(　　).

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$;　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

5. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$ 化为极坐标形式的累次积分为(　　).

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2)\mathrm{d}r$;　　(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 f(r^2)r\mathrm{d}r$;

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2) r\mathrm{d}r$;　　(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r^2) r\mathrm{d}r$;

二、填空题

1. $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{-x}^{2-x^2} (1-xy)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{2-x^2} (1-xy)\mathrm{d}y =$ ______________.

2. 积分 $\int_0^8 \mathrm{d}x \int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{1}{1+y^4}\mathrm{d}y =$ ______________.

3. 设平面区域 $D = \{(x,y) | 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, 则 $\iint\limits_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma =$ ______________.

4. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t \mathrm{d}y \int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2) =$ ______________.

5. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leqslant t^2\}$. 则 $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{\pi t^2} \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma =$ ______________.

三、解答题

1. 设平面区域 D 由直线 $x=3y, y=3x, x+y=8$ 围成, 计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma$.

2. 设平面区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$, 计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}\sigma$.

3. 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, \sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant \sqrt{4-x^2}\}$.

4. 设平面区域 D 由两条双曲线 $xy=1, xy=2$ 和两条直线 $y=x, y=4x$ 所围成的在第 I 象限内的闭区域, 计算 $\iint\limits_{D} x^2y^2\mathrm{d}\sigma$.

5. 设连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\mathrm{d}t+\iint\limits_{D} f(xy)\mathrm{d}\sigma,$$

其中区域 D 是以 $(-1,-1),(1,-1),(1,1)$ 为顶点的三角形区域, 且 $f(1)=0$, 求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

第七次作业

学院__________ 班级__________ 姓名__________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设有空间区域 $\Omega_1 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0\}$ 及 $\Omega_2 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant\}$，则 (　　).

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$;　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$;

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$;　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}V$.

2. 设 Ω 由平面 $x+y+z+1=0, x+y+z+2=0, x=0, y=0, z=0$ 围成, $I_1 = \iiint\limits_{\Omega} [\ln(x+y+z+3)]^2\mathrm{d}V, I_2 = \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)^2\mathrm{d}V$, 则 (　　).

(A) $I_1 < I_2$;　　(B) $I_1 > I_2$;　　(C) $I_1 \leqslant I_2$;　　(D) $I_1 \geqslant I_2$.

3. 曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = 2-x^2-y^2$ 所围成的立体体积为(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{2}$;　　(B) $\dfrac{5\pi}{6}$;　　(C) $\dfrac{2\pi}{3}$;　　(D) π.

4. 设空间区域 $\Omega = \{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}\}$，$f(x,y,z)$ 为连续函数, 则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V =$(　　).

(A) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z$;

(B) $4\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z$;

(C) $\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{1}\mathrm{d}r\int_{r}^{2-r^2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathrm{d}z$;

(D) $\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{\sqrt{2}} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$.

5. 设空间区域 $\Omega = \{(x,y,z)|0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x, 0 \leqslant z \leqslant x+y\}$，$f(x,y,z)$为连续函数, 则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V =$(　　).

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}z \int_0^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{d}z \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x$;

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{z}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r$;

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta+\cos\theta} \mathrm{d}r \int_0^{r(\sin\theta+\cos\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}z$;

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta}} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r$.

二、填空题

1. 设 $\varOmega$ 为 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$, 则 $\iiint\limits_{\varOmega} (x+y+z)\mathrm{d}V =$ ______________.

2. 设 $\varOmega$ 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的空间闭区域, 则三重积分 $\iiint\limits_{\varOmega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为柱面坐标下的先 z 再 r 后 θ 顺序的三次积分为______________.

3. 设 $\varOmega$ 为 $x^2+y^2+z \leqslant 1, z \geqslant 0$, 则 $\iiint\limits_{\varOmega} (x+1)(y+z)(z+1)\mathrm{d}V =$ ______________.

4. 设 $F(t) = \iiint\limits_{\varOmega_t} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, 其中 $\varOmega_t = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2\}$, f 为连续函数, 则 $F'(t) =$ ______________.

5. 设 $\varphi(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x}\mathrm{d}x (y \neq 0)$, 则 $\varphi'(1) =$ ______________.

三、计算题

1. 设 $\varOmega$ 是由 $x+y=1, y=x, y=0, z=0$ 和 $z=\pi$ 所围成的空间闭区域, 计算 $\iiint\limits_{\varOmega} (x+y)\sin z\mathrm{d}V$.

2. 设 Ω 为 $x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 1$ 所确定的空间闭区域, 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$.

3. 设 Ω 由旋转抛物面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=1, z=2$ 所围成的空间闭区域, 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$.

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} |z-x^2-y^2|\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega: 0 \leqslant z \leqslant 1, x^2+y^2 \leqslant 1$.

5. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \left(x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}\right)^2 \mathrm{d}V$, 其中 $\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1,\ a>0, b>0, c>0\right\}$.

6. 利用 $\boldsymbol{\Gamma}$ 函数, $\mathbf{B}$ 函数计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}$.