第 1 章 力学基础知识

在物质多种多样的运动形式中，最简单而又最基本的运动是物体位置的变化，称为机械运动（mechanical motion）。行星绕太阳的转动，宇宙飞船的航行，机器的运转，水、空气等流体的流动等都是机械运动。力学（mechanics）的研究对象就是机械运动的客观规律及其应用。

本章主要介绍描述物体做机械运动的物理量，以及物体做机械运动所遵循的基本定律。

1.1 描述机械运动的基本物理量

1.1.1 质点、参考系与坐标系

一、质点

任何物体都有大小和形状，且在运动过程中会受到各种因素的影响，致使运动的形式错综复杂。为使问题简化，在物理学中常采用理想模型来代替实际物体。

在研究的问题中，如果物体的大小、形状产生的影响甚小，可以忽略不计，则物体的运动可以用一个点的运动来代替。这种大小形状可以忽略不计的理想模型，称为质点（material point）。

质点是一个相对概念，能否把物体视为质点，并非单纯地看它的大小，而是看它的大小形状在所研究的问题中是否起显著的作用。

把实物抽象成质点这一研究方法在实践上和理论上都具有重要意义。当我们进一步研究复杂的运动时，虽然不能把整个物体视为质点，却可以把它视为许许多多个质点的集合，这样，从质点的运动规律入手，就可以进一步研究整个质点系统即整个物体的运动规律。所以，研究质点的运动是研究物体运动的基础。

二、参考系与坐标系

物体运动本身是绝对的。然而，人们要认识物体的运动，了解物体的变化，定量地把一个物体的运动或运动的变化描绘出来，就必须选择一个物体或物体系统作为观察、研究的客观参考标准。物理学中把被选作标准的参考物体或物体系称之为参照系（reference system）。

参照系的选择不同，对同一物体的运动描述也就不同。为了定量地表示物体在空间的位置，还需要建立一个适当的坐标系（coordinate system），固定于作为参照系的物体上。坐标系的选择也要视问题的性质和研究问题的方便而定。常用的坐标系有直角坐标系、自然坐标系、球坐标系等。应该明确的是，参照系一经确定，所描述的物体的运动性质也就确定了。

1.1.2 描述质点运动的线量

一、位置矢量及运动方程

为了定量地描述质点其位置和位置的变化，首先应该在选定的参照系上固定一个坐标系。在如图 1.1 所示的直角坐标系中，t 时刻质点 P 在坐标系中的位置除了用坐标（x，y，z）表示之外，还可以用一矢量 $\vec{r}$ 表示。定义 $\vec{r}$ 是由坐标原点指向质点所在位置的矢量，称为位置矢量（position vector），简称位矢，也叫矢径。

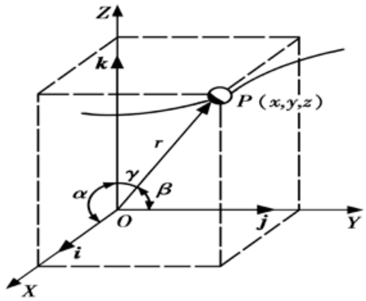

图 1. 1 位置矢量

矢径可表示为

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.1}$$

式中 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 为沿 x、y、z 轴的单位矢量。矢径的大小为

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.2}$$

方向可由方向余弦来确定，即

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}，\ \cos\beta = \frac{y}{r}，\ \cos\gamma = \frac{z}{r} \tag{1.3}$$

位置矢量随时间的变化规律 $\vec{r} = \vec{r}(t)$，称为运动方程（equation of motion)，也可以写成分量式

$$x = x(t)，\quad y = y(t)，\quad z = z(t) \tag{1.4}$$

消去时间参量 t，便可得到轨道方程（equation of orbit） $f(x, y.z) = C$。

二、位移矢量

如图 1.2 所示， t 时刻质点位于 P 点，它的位置矢量是 $\vec{r}(t)$，t+△t 时刻质点运动到 Q 点，相应的位置矢量是 $\vec{r}$ (t+△t)。质点由 P 到 Q 的有向线段，称为质点在△t 时间内的位移（displacement）矢量，用△ $\vec{r}$ 表示。有

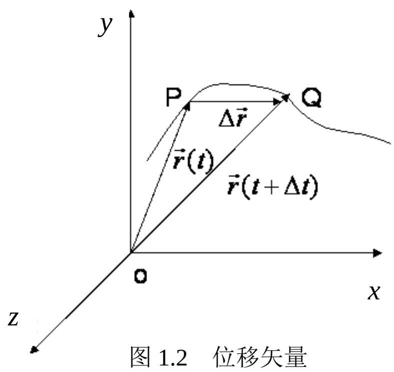

图 1.2 位移矢量

$$\overrightarrow{PQ} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

由式（1.1）可得

$$\vec{r}(t) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

于是，位移矢量可以表示为

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k} \tag{1.5}$$

位移的大小是

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

位移与路程（path）是两个截然不同的概念。路程△s 是质点运动路径的长度，是标量；位移△ $\vec{r}$ 是矢量。一般情况下，二者的大小并不相等。

位置矢量和位移矢量都是长度量，在其国际单位制中，其单位均用米（m)。

三、速度矢量

描述质点运动快慢和方向的物理量是速度（velocity）。

（1）平均速度

在图 1.3 中，如果质点在△t 时间内发生的位移为△$\vec{r}$，则△$\vec{r}$ 与△t 比值称为△t 时间内的平均速度（average velocity），用符号$\overline{\upsilon}$表示，即

$$\overline{\upsilon} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{1.6}$$

平均速度是矢量，其方向与△$\vec{r}$ 相同，大小为$|\Delta\vec{r}|$与时间Δt的比值。

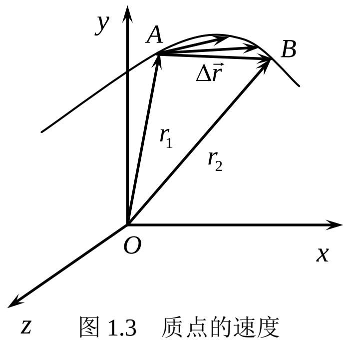

图 1.3　质点的速度

（2）瞬时速度

为了准确地描述质点在某一时刻的真实运动状态，可以把时间△t 取得很短。当△t 趋近于零时，$\Delta\vec{r}/\Delta t$趋于一极限值，这个极限值能够确切地描述质点在 t 时刻运动的快慢和方向。我们把它定义为质点在 t 时刻的瞬时速度（instaneous velocity），简称速度，常用符号$\vec{\upsilon}$表示，有

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.7}$$

可见，速度是位置矢量对时间 t 的一阶导数。从物理意义上讲，速度就是位置矢量$\vec{r}$对时间的变化率。

速度是矢量，其方向就是位移矢量△$\vec{r}$ 的极限方向，如图 l.3 所示。显然，它就是质点所在处轨道的切线方向，并指向前进的方向。

在直角坐标系中，速度矢量可表示为

$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k} \tag{1.8}$$

即

$$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad \upsilon_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \upsilon_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

速度的大小，即$\vec{\upsilon}$的模

$$|\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z^2} \tag{1.10}$$

一般说来，速度是随时间变化的，通常表示为$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$。

在描述质点运动时，常引入“速率”的概念。速率等于质点在单位时间内行径的路程。瞬时速率等于瞬时速度的大小，即

$$|\vec{\upsilon}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

速度和速率的单位相同。在国际单位制中，均为米·秒$^{-1}$(m·s^{-1})。

四、加速度矢量

加速度（acceleration）是描述质点运动速度变化的物理量。

（1）平均加速度

设质点做曲线运动， t 时刻到达 P 点，速度为$\vec{\upsilon}(t)$，t＋Δt 时刻到达 Q 点，速度为$\vec{\upsilon}(t+\Delta t)$，如图 1.4 所示。在 Δt 时间内速度的变化称为平均加速度（average acceleration），即

$$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \qquad (1.12)$$

（2）瞬时加速度

当△t→0 时，平均加速度的极限值叫做瞬时加速度（instaneous acceleration），用 $\vec{a}$ 表示，有

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \qquad (1.13)$$

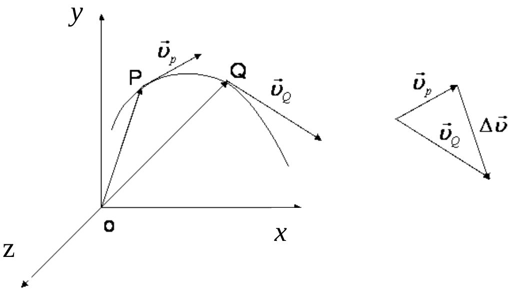

图 1.4 加速度矢量

上式表明，加速度 $\vec{a}$ 是速度矢量对时间的一阶导数，又是位置矢量对时间的二阶导数。

加速度是矢量，其方向为速度增量△$\vec{\upsilon}$ 的方向，与速度的方向一般不同。在直线运动中，加速度的方向与速度的方向平行，故可用正负表示，即与坐标轴正向相同为正，反之为负。在曲线运动中，如图 1.4 所示，加速度的方向总是指向曲线的凹面。

加速度的计算可用分量求导合成法完成。在直角坐标系中，加速度可写成

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \qquad (1.14a)$$

而

$$a_x=\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \qquad (1.14b)$$

则这些分量和加速度大小的关系式为

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \qquad （1.15）$$

研究质点作曲线运动时，常将加速度矢量沿自然坐标分解为切向加速度（tangential acceleration）和法向加速度（normal acceleration）。就是把一对正交坐标轴建立在质点运动的轨道上，切线方向的单位矢量用 $\vec{\tau}$ 表示，法线方向的单位矢量用 $\vec{n}$ 表示，如图 1.5 所示。加速度在两个方向上的分矢量分别叫做切向加速度和法向加速度。它们之间的关系为

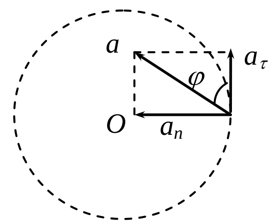

图 1.5 切向加速度和法向加速度

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n} \qquad （1.16）$$

式中ρ为该点处的曲率半径。

总加速度的大小和方向分别为

$$a=|\vec{a}|=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2} \qquad (1.17a)$$

$$\tan\varphi = \frac{a_n}{a_\tau} \tag{1.17b}$$

加速度的自然坐标表示法具有鲜明的物理意义：切向加速度反映了速度大小的变化，而法向加速度反映了速度方向的变化。在国际单位制中，加速度的单位采用米·秒$^{-2}$(m·s^{-2})。

运动学的问题可归结为两类问题。第一类问题：已知运动方程求速度、加速度，数学上属于微分问题；第二类问题：已知加速度或速度，根据初始条件，确定运动方程，数学上属于积分问题。

例 1.1 已知质点的运动方程为$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases}$，式中 R、ω 均为常数。试求：

（1）质点的轨道方程；

（2）质点在任意时刻 t 的位置矢量、速度矢量和加速度矢量及其大小。

$x = R\cos\omega t$，$y = R\sin\omega t$

解 （1）由运动方程消去 t 参量得

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} = -2R\omega t\sin(\omega t^2)\vec{i} + 2R\omega t\cos(\omega t^2)\vec{j}$$

可见，质点以坐标原点为圆心做圆周运动，其半径为 R。

（2）任意时刻的位置矢量及大小为

$$\vec{r} = R\cos\omega t\vec{i} + R\sin\omega t\vec{j}$$

$$|\vec{r}| = R$$

速度矢量及大小分别为

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} = -R\omega\sin\omega t\vec{i} + R\omega\cos\omega t\vec{j}$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = R\omega$$

加速度矢量及大小分别为

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = -R\omega^2\cos\omega t\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t\vec{j}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$$

例 1.2 一质点从原点由静止出发，它的加速度在 x 轴和 y 轴上的分量分别为 a_x=2 和 a_y=3t（SI）。试求：t=4s 时质点速度的大小和位置矢量。

解 （1）由 $a_x = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}$，$a_y = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}$，

可得 $\mathrm{d}\upsilon_x = a_x\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}\upsilon_y = a_y\mathrm{d}t$

对二式分别积分，并代入初始条件及 a_x、a_y，得

$$\int_0^{\upsilon_x}\mathrm{d}\upsilon_x=\int_0^t 2\mathrm{d}t\text{，}\quad\int_0^{\upsilon_y}\mathrm{d}\upsilon_y=\int_0^t 3t\mathrm{d}t$$

所以 $$\upsilon_x=2t\quad;\quad\upsilon_y=\frac{3}{2}t^2$$

当 $t=4\mathrm{s}$ 时， $$|\vec{\upsilon}|=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=8\sqrt{10}\ \ \mathrm{ms}^{-1}$$

（2）由 $\upsilon_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 得

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t\upsilon_x\mathrm{d}t=\int_0^t 2t\mathrm{d}t$$

$$x=t^2$$

由 $\upsilon_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 得

$$\int_0^y\mathrm{d}y=\int_0^t\upsilon_y\mathrm{d}t=\int_0^t\frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t$$

$$y=\frac{t^3}{2}$$

则位置矢量 $$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=t^2\vec{i}+\frac{t^3}{2}\vec{j}$$

当 $t=4\mathrm{s}$ 时 $$\vec{r}=16\vec{i}+32\vec{j}$$

1.1.3 刚体

在某些问题中，物体的形状和大小不能忽略，但其形状和大小的改变可以忽略，我们把这样一类物体抽象成另一理想模型——刚体（rigid body）。所谓刚体，就是在外力作用下保持其大小形状不变的物体。

刚体是从实物中抽象出来的理想模型。实际上，任何物体在外力作用下，其体积和形状都会或多或少地改变。但是，如果在我们所研究的问题中，物体的微小形变对运动过程的影响可以忽略不计时，我们就可以把物体看作刚体，从而简化问题。

当刚体上所有质点都绕同一直线作圆周运动时，称此运动为转动（rotation），这条直线叫做转轴（rotational axis）。转轴始终固定不动的转动称为定轴转动（fixed-axis rotation）。定轴转动是一种最为简单的转动，是大学物理讨论的主要内容，其主要运动特征可归纳为：

（1）刚体上各质点都做着半径不同的圆周运动，故各点的线量不同；

（2）各点的圆周运动平面垂直于转轴，圆心在轴线上，该平面称转动平面；

（3）各点的位置矢量在相同时间内转过相同的角度。

1.1.4 描述刚体运动的角量

一、 角位置　角位移

（1）角位置

描述刚体的定轴转动时，常以垂直于转轴的转动平面为参照系，并以转轴与平面的交点为原点。沿平面取 Ox 轴为参考方向，如图 1.6 所示。设刚体上任一点在 t 时刻到达 P 点,刚体的方位可以由 $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ 与 Ox 轴之夹角 θ 来确定，称为 t 时刻的角位置（angular position），亦称为角坐标（angular coordinate）。

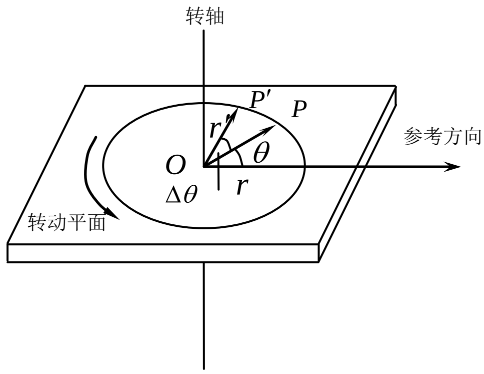

图 1.6　角位置坐标

角位置是用来确定刚体位置的量，其大小随参考方向选择有关。通常规定自参考方向 Ox 轴逆时针转到 P 点的矢径时 θ 为正，反之为负。

当刚体绕轴转动时，角位置随时间 t 在改变，即 $\theta=\theta(t)$，称为角运动方程（angular equation of motion）。

（2）角位移

若 t 时刻刚体的角位置为 θ，$t+\triangle t$ 时刻角位置为 $\theta+\triangle\theta$，则$\triangle\theta$ 称为刚体在 Δt 时间内的角位移（angular displacement）。与线位移相似，该量是反映刚体转动状态变化的物理量，其正负规定与角位置相同。当刚体逆时针转动时，则$\triangle\theta>0$，反之$\triangle\theta<0$。

角位置与角位移的单位用弧度 (rad) 表示。

二、角速度

与速度相类似，反映刚体转动快慢的物理量称为角速度（angular velocity）。

（1）平均角速度

设刚体在$\triangle t$时间内产生的角位移是$\triangle\theta$,则单位时间内发生的角位移称为平均角速度。即

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.18}$$

（2）瞬时角速度

当$\triangle t\to 0$ 时，平均角速度的极限值称为瞬时角速度。即

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.19}$$

国际单位制中，速度的单位为弧度·秒$^{-1}$（rad·min^{-1}），也可简写为秒$^{-1}$（s^{-1})。

三、角加速度

（1）平均角加速度

与线加速度相似，角加速度是反映刚体转动的角速度变化的物理量。设 t 时刻刚体的角速度为ω，$t+\Delta t$ 刻为 $\omega+\triangle\omega$，则单位时间内角速度的变化称为平均角加速度。即

$$\overline{\beta}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.20}$$

（2）瞬时角加速度

当$\triangle t\to 0$ 时，平均角加速度的极限值称为瞬时角加速度，简称角加速度（angular acceleration）。有

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.21}$$

在国际单位制中，角加速度的单位为弧·秒$^{-2}$(rad·s^{-2})，可简写为秒$^{-2}$(s^{-2})。

在物理学中规定，（瞬时）角速度与角加速度均为矢量。角速度的方向服从右手定则，即四指沿转动方向弯曲，拇指伸直所指的方向就是角速度 $\vec{\omega}$ 的方向，如图 1.7 所示。当刚体作定轴转动时，角速度只有两个方向，故可用正、负表示之。在定轴转动时，角加速度 $\vec{\beta}$ 的方向与 $\vec{\omega}$ 方向平行。当 $\vec{\omega}$、$\vec{\beta}$ 方向一致时，刚体作加速转动；反之，刚体作减速转动。

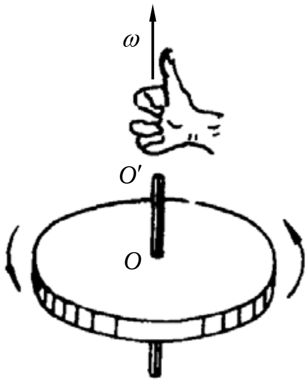

图 1.7 角速度方向

对于刚体定轴转动的运动学问题，同样可以分成两类问题。第一类问题：已知刚体定轴转动的运动方程，确定刚体的角速度、角加速度，数学上属于微分问题。第二类问题：已知刚体定轴转动的角加速度（或角速度），求刚体的角运动方程，数学上属于积分问题。

例 1.3 已知一刚体作定轴转动的角运动方程为 $\theta = 2t^3$，试求 $t = 2s$ 时的角速度和角加速度。

解 根据角速度的定义，用标量计算，得

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 6t^2$$

根据角加速度的定义，得

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 12t$$

将 $t = 2$s 带入，得出

$$\omega = 24(\mathrm{s}^{-1}) \qquad \beta = 24(\mathrm{s}^{-2})$$

例 l.4 已知一刚体按 $\beta=2t$ 作变速定轴转动。$t=0$ 时，初位置 $\theta_0=\pi$，初速度 $\omega_0=0$，求刚体转动的速度方程和角运动方程。

解 根据角加速度的定义

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

两边积分

$$\int_0^\omega \mathrm{d}\omega = \int_0^t 2t\mathrm{d}t$$

整理得出

$$\omega = t^2$$

根据角速度的定义

$$\mathrm{d}\theta = \omega\mathrm{d}t = t^2\mathrm{d}t$$

两边积分

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \int_0^t t^2\mathrm{d}t$$

整理得出

$$\theta = \pi + \frac{1}{3}t^3$$

四、角量与线量的关系

利用角量可以通过刚体上任一质点的运动来了解整个刚体的运动情况。仅就一质点而言，其运动也可以用线量来描述，所以角量和线量之间必然存在着内在的联系。

在图 l.8 中，刚体在$\triangle t$ 时间内转过的角位移为$\triangle\theta$，则刚体上 P 点沿半径为 r 的圆周走过的路程为 Δs。根据几何关系，有

$$\triangle s = r\triangle\theta$$

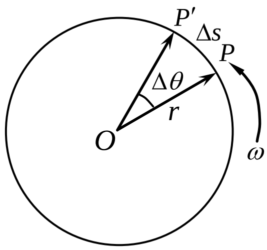

图 1.8　弧和角的关系

且有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

则

$$\upsilon = r\omega \tag{1.22}$$

将（1.22）式对时间求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

即

$$a_\tau = r\beta \tag{1.23}$$

把式(1.22)代入法向加速度表达式，可得

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = r\omega \tag{1.24}$$

式（1.23）中给出的是切向加速度与角加速度的关系，而不是总的加速度与角加速度的关系。

1.2 质点运动的基本定律

牛顿定律及其力学体系的建立，是人类认识客观世界的一次飞跃。美国科学史家库恩（T. S. Kuhn）把它称为科学革命。在牛顿的科学革命之后大约一百年，出现了 18 世纪末至 19 世纪初的工业革命或产业革命。牛顿在《自然哲学的数学原理》中提出了力学的三大定律和万有引力定律，把地面上物体运动和太阳系内行星运动统一在相同的物理定律之中，从而完成了人类文明史上第一次自然科学的大综合。它是 16 至 17 世纪科学革命和人类文明进步的划时代标志，不仅总结和发展了之前物理学的几乎全部重要成果，而且对以后三百年来自然科学的发展产生了深远的影响。

1.2.1 牛顿运动定律

一、牛顿运动定律的内容

（1）牛顿第一定律

任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，直到其它物体的作用迫使它改变这种状态为止。

第一定律表明，任何物体都具有保持其运动状态不变的性质，这一性质叫做惯性。惯性是物体的固有属性，因此第一定律亦称为惯性定律（inertial law）。

第一定律还表明，由于物体具有惯性，所以要使物体的运动状态发生变化，一定要有其它物体对它发生作用，这种作用被称作力。力是使物体运动状态发生变化（即产生加速度）的原因。

（2）牛顿第二定律

物体受到外力作用时，物体获得的加速度的大小与作用在物体上的合外力的大小成正比，与物体的质量（mass）成反比；加速度的方向与合外力的方向相同。

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.25}$$

由于 $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}$，且现代物理学已断定，对于低速($\upsilon << c$)运动的物体，质量 m 可视为常数。

故上式

也可以表示为

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t} \tag{1.26}$$

牛顿第二定律是牛顿力学的核心，是定量处理质点力学问题的重要依据。

对牛顿第二定律应明确：

（a）迭加性

牛顿第二定律概括了力的迭加原理（superposition principle of force），也称力的独立性原理。 即几个力同时作用在一个物体上所产生的加速度，等于每个力单独作用时产生的加速度的矢量和。

（b）矢量性

在直角坐标系中，式（1.25）和式（1.26）可以写成分量形式，即

$$\left.\begin{aligned} F_x &= ma_x = m\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\upsilon_x)}{\mathrm{d}t} \\ F_y &= ma_y = m\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\upsilon_y)}{\mathrm{d}t} \\ F_z &= ma_z = m\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\upsilon_z)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

在自然坐标系中，有

$$
\left.\begin{aligned}
F_\tau &= ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \\
F_n &= ma_n = m\frac{\upsilon^2}{\rho}
\end{aligned}\right\} \tag{1.28}
$$

（c）瞬时性

式（1.25）和式（1.26）给出的是一种瞬时关系。$\vec{F}$ 为某一时刻物体受的合外力，$\vec{a}$ 为该时刻对应的加速度。力改变加速度也相应改变，二者同时出现，同时消失，是一一对应的关系。

（3）牛顿第三定律

当物体 A 以力 $\vec{F}_1$ 作用在物体 B 上时，物体 B 也必定同时以力 $\vec{F}_2$ 作用在物体 A 上，$\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 在同一直线上，大小相等而方向相反。

牛顿第三定律（Newton′s third laws of motion）是对第二定律的重要补充，是我们正确分析物体受力的重要根据。因此，正确理解其内容是很重要的。

（a）作用力和反作用力没有主次、先后之分，二者同时存在，同时消失，任何一方都不能孤立地存在，都以对方作为自己存在的条件。

（b）作用力和反作用力分别作用在两个物体上，它们不是平衡力，因此二者不能互相抵消。

（c）作用力和反作用力必属于同一性质的力。

二、牛顿运动定律的适用范围

运动的描述具有相对性，依参照系的选择而定。从运动学的角度来看，完全可以依据研究问题的方便来任意选择参照系。 例如研究一个在加速运动的火车车厢中运动的物体，在求它的速度和加速度时，以火车或地面为参照系均可。虽然在这两个不同的参照系中所得的速度和加速度各不相同，但二者都是正确的。

牛顿运动定律是描述质点机械运动规律的，因此在应用牛顿定律时，也必须选择参照系。然而牛顿运动定律并不是在任何参照系中都适用，下面以一个实例来说明。

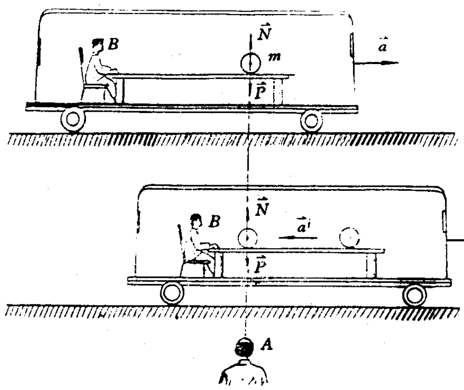

图 1.9 惯性系与非惯性系

如图 1.9 所示，在车厢上有一固定的光滑桌面，上面放置一小球，让车厢沿直线加速行驶，讨论小球的运动情况。以地面为参照系的观察者看来，小球在水平方向不受力，所以静止在原处不动，与牛顿定律相符（水平方向没有加速度，小球保持静止状态）。而以车厢为参照系的观察者看来，小球在水平方向并未受力，但却具有加速度，显然与牛顿定律不符。

从上述例子可以看出，在有些参照系中牛顿定律是成立的，而在有些参照系中牛顿定律却不成立。我们把牛顿定律能成立的参照系叫作惯性参照系（inertial reference frame），

简称惯性系；而把牛顿定律不能成立的参照系叫作非惯性参照系（non-inertial reference frame），简称非惯性系。

综上所述，牛顿运动定律只适用于惯性系。此外还应强调的是，牛顿定律只适用作低速、平动的宏观物体。

例 1.5 一个质量为 m 的物体，在有粘性的流体中运动，受到的阻力与速度大小成正比，方向相反，即 $f=-\beta\upsilon$ ，式中 β 为常数。若物体只受阻力作用，当 $t=0$ 时，物体以初速度 υ_0 开始在流体中运动，试求物体的速度方程。

解 以物体为研究对象，其受力 $f=-\beta\upsilon$。根据牛顿第二定律，则有

$$-\beta\upsilon=m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}=-\frac{\beta}{m}\mathrm{d}t$$

两边积分

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\upsilon}=\int_0^t-\frac{\beta}{m}\mathrm{d}t$$

整理后得出

$$\upsilon=\upsilon_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

这就是物体的速度方程。

1.2.2 动量　动量守恒定律

一、动量、动量定理

根据牛顿第二定律

$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\tag{1.29}$$

式中，$\vec{p}=m\vec{\upsilon}$，称为质点的动量（momentum）。动量是描述物体运动状态的量，是矢量，其方向与质点速度的方向相同。在 SI 中，单位是千克·米·秒$^{-1}$($\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$)。

式（1.29）还可以写成

$$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}=\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})$$

力 $\vec{F}(t)$ 在作用时间 $\Delta t=t_2-t_1$ 内，使物体的速度由 $\vec{\upsilon}_1$ 变到 $\vec{\upsilon}_2$，对上式积分：

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m\vec{\upsilon}_2-m\vec{\upsilon}_1\tag{1.30}$$

令

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt\tag{1.31}$$

称 $\vec{I}$ 为力的冲量（impulse），表示力在时间过程中的累积效应。在 SI 中，冲量的单位为牛顿·秒（N·s）。

式（1.30）可以简化为

$$\vec{I}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\Delta\vec{p}\tag{1.32}$$

这就是质点的动量定理（theorem of momentum）。其物理意义是：在作用时间内，合外力作用在质点上的冲量等于质点在此时间内动量的增量。

应用动量定理时，应当注意：

（1）对于恒力作用有

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1$$

（2）动量定理是矢量式，应用时可化成分量式，在直角坐标系中，有

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = m\upsilon_{2x} - m\upsilon_{1x} \\ \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = m\upsilon_{2y} - m\upsilon_{1y} \\ \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = m\upsilon_{2z} - m\upsilon_{1z} \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

由分量式表明，任何冲量分量只改变在它自己方向上的动量分量，不能改变在它垂直方向上的动量分量。

（3）动量定理适用于惯性参照系中的一切力学过程，在打击、碰撞过程中使用尤为方便。

例1.6 一质量为m的质点在xoy平面上运动，其位置矢量为：$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$。求：在$t$＝0 到$t = \pi/2\omega$时间内，质点所受合力的冲量和质点动量的改变量。

解 由定义得
$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = -a\omega^2\cos\omega t\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\vec{j}$$

根据牛顿定律
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

合外力的冲量为
$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}\mathrm{d}t = m\int_0^t (-a\omega^2\cos\omega t\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\vec{j})\mathrm{d}t = -m\omega(a\vec{i} + b\vec{j})$$

质点动量的改变量为
$$\Delta\vec{P} = m(\vec{\upsilon}_t - \vec{\upsilon}_0) = -m\omega(a\vec{i} + b\vec{j})$$

二、动量守恒定律

在处理力学问题时，常常需要把几个相互作用的物体作为一个整体加以考虑，如果其中的每一物体都可看作质点，称这些物体的集合为质点系（system of particles），简称系统。系统内各物体之间的相互作用力称为内力（internal force），而系统以外的物体对系统内任何物体的作用力则称为系统所受的外力（external force）。可见，系统的内力是成对出现的作用力与反作用力。下面从牛顿定律出发，推导系统的动量定理。

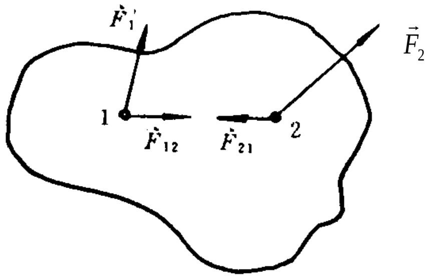

图 1.10 系统受力示意图

如图 1.10 所示，在系统中有两个质点m_1、m_2，

两者之间除了有相互作用力 $\vec{F}_{12}$ 和 $\vec{F}_{21}$ 之外，还分别受到外力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 的作用。根据质点的动量定理，在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内，两质点所受力的冲量和动量的增量分别为

$$\left.\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{\upsilon}_1 - m_2\vec{\upsilon}_{10}\\ \int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{\upsilon}_2 - m_2\vec{\upsilon}_{20}\end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

将上面两式相加，有

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t = (m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2) - (m_1\vec{\upsilon}_{10} + m_2\vec{\upsilon}_{20})$$

由牛顿第三定律知：$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$。所以系统内力之和为零，上式可以写成

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t = (m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2) - (m_1\vec{\upsilon}_{10} + m_2\vec{\upsilon}_{20}) \tag{1.35}$$

上式表明，作用于两质点构成系统的合外力之冲量等于系统内两质点的总动量之增量。

上述结论也可以推广到由 n 个质点组成的系统。由于内力总是成对出现，且等值而反向，对于含有 n 个质点的系统而言，式（1.35）可以改写成

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外}\right)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i - \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_{i0} \tag{1.36a}$$

$$\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0 \tag{1.36b}$$

上式表明，作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量，这就是质点系的动量定理。

如果外力的矢量和 $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i外} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = 0$，则有

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \quad 或 \quad \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i = 恒矢量 \tag{1.37}$$

这就是动量守恒定律（law ofconservation of momentum）。它表明，当系统所受的合外力为零时，系统的总动量将保持不变。

由动量守恒定律可以看出，只有外力作用才能改变系统的总动量，而系统的内力可以使其内部物体的动量发生转移，但不能使系统总动量发生变化，这就是动量守恒定律的物理实质。

近代物理研究表明，在牛顿定律失效的高速和微观粒子领域里，动量守恒定律仍然适用。因此，动量守恒定律是自然界中最重要、最普遍的定律之一。

1.2.3 功 动能定理

一、功、功率

（1）恒力的功

设恒力 $\vec{F}$ 作用于质点，质点的位移是 $\Delta\vec{r}$，如图 1.11 所示。在这段位移上，力 $\vec{F}$ 做功（work）为

$$A = F\cos\alpha|\Delta\vec{r}| \tag{1.38}$$

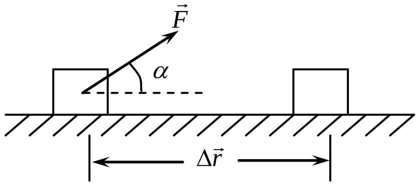

图 1.11 恒力作功

式中，α 为力 $\vec{F}$ 和位移 $\Delta\vec{r}$ 的夹角。因此功的定义是：

力沿质点位移方向分量的大小和质点位移大小的乘积。功也可用力 $\vec{F}$ 和位移 $\Delta\vec{r}$ 的标量积表示

$$A=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \tag{1.39}$$

这里应当明确，功是一个标量，而且是一个代数量，可正可负，其正负由 $\vec{F}$ 与 $\Delta\vec{r}$ 的夹角 α 来决定。

（2）变力的功

如图 1.12 所示，质点 m 在变力 $\vec{F}$ 的作用下，沿曲线由 a 运动到 b，考察力 $\vec{F}$ 对质点所做的功。这时不能直接应用式(1.38)。我们把曲线分成许多足够小的元段 $\Delta\vec{r}_i$，则在任一微小元段 $\Delta\vec{r}_i$ 中，力 $\vec{F}_i$ 可以近似地看作恒力，可按式(1.38)计算元功 ΔA_i 为

$$\Delta A_i=F_i\cos\alpha\left|\Delta\vec{r}_i\right|=\vec{F}_i\cdot\Delta\vec{r}_i$$

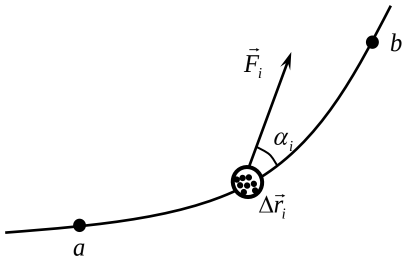

图 1.12 变力作功

质点沿路径由 a 到 b 的整个过程中，力 $\vec{F}$ 的总功应是各段小位移上元功之和，即

$$A=\sum_{i=1}^{n}F_i\cos\alpha_i\left|\Delta\vec{r}_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\Delta\vec{r}_i$$

当 $\Delta\vec{r}_i\to 0$ 时，上式变为积分式

$$A=\int_a^b \mathrm{d}A_i=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \tag{1.40a}$$

这就是变力功的一般表达式。

在直角坐标系中，由于

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}$$

所以式（1.40a）也可写成

$$A=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z) \tag{1.40b}$$

功也可以用图示法来计算，这种计算方法比较简便。如图 1.13 所示，纵坐标代表作用在质点上的力沿位移方向的分量 $F\cos\alpha$，横坐标代表质点沿曲线运动的路程。图中的曲线表示为 $F\cos\alpha$ 随路径变化的函数关系，曲线下的面积等于变力所做的功。

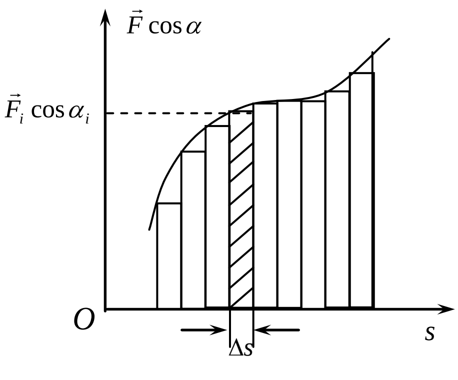

图 1.13 示功图

当几个力 $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3\cdots,\vec{F}_n$ 同时作用于质点时，则合力的功为

$$A=\int_a^b\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

根据矢量标积的分配律，上式为

$$A=\int_a^b\vec{F}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_a^b\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\cdots+\int_a^b\vec{F}_n\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \tag{1.41}$$

上式表明，合外力对质点所做的功，等于每个分力所做功的代数和。

（3）功率

为了描述做功的快慢，引入功率的概念。我们定义单位时间内所做的功，称为功率（power），用 N 表示，有

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \tag{1.42}$$

将功的定义带入式（1.42），得

$$N = \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} \tag{1.43}$$

在 SI 中，功的单位名称是焦耳（ J ），功率的单位是瓦特（ W ）。

例 1.7 质量为 2kg 的物体在变力 $\vec{F} = 12t\vec{i}$ (N) 作用下，由静止出发沿 x 轴作直线运动，试求：（ 1 ）前 2s 内变力的功；（ 2 ）第 1s 末和第 2s 末的功率。

解 （ 1 ）根据变力做功的计算公式，结合题意有

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F \cdot \mathrm{d}x = \int_a^b 12t \cdot \upsilon \mathrm{d}t$$

为求出 υ 与 t 的关系，可由牛顿第二定律得

$$a = \frac{F}{m} = \frac{12t}{m} = \frac{12t}{2} = 6t$$

利用 $\mathrm{d}\upsilon = a\mathrm{d}t = 6t\mathrm{d}t$，两边积分

$$\int_0^{\upsilon} \mathrm{d}\upsilon = \int_0^t 6t\mathrm{d}t$$

得出 $\upsilon = 3t^2$

所以 $A = \int_0^2 12t \times 3t^2 \mathrm{d}t = 144\,\mathrm{J}$

（ 2 ）物体在变力作用下作变速直线运动，其瞬时功率是

$$N = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} = F\upsilon = 12t \times 3t^2 = 36t^3$$

将数据带入有 $t = 1\mathrm{s} \quad N = 36 \times 1^3 = 36\mathrm{W}$

$t = 2\mathrm{s} \quad N = 36 \times 2^3 = 288\mathrm{W}$

二、 动能定理

如图 1.14 所示，质量为 m 的质点在合外力 $\vec{F}$ 作用下，沿曲线从点 a 运动到点 b，对应的速度分别为 $\vec{\upsilon}_a$ 和 $\vec{\upsilon}_b$。考察任意一段位移元 $\mathrm{d}\vec{r}$，合外力 $\vec{F}$ 对质点所做的元功是

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha \mathrm{d}r$$

根据牛顿第二定律的切向分量式

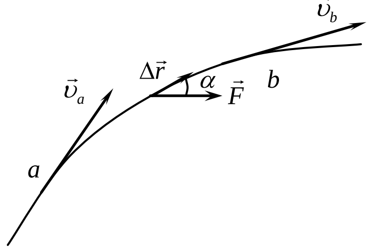

图 1.14 变力作用下质点运动轨道

$$F\cos\alpha = ma_{\tau} = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$$

于是，元功为

$$\mathrm{d}A = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}s = m\upsilon \mathrm{d}\upsilon$$

将此元功沿曲线 *ab* 积分，得

$$\begin{aligned} A &= \int_{\upsilon_a}^{\upsilon_b} m\upsilon \mathrm{d}\upsilon = \frac{1}{2}m\upsilon_b^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_a^2 \\ &= E_{k_b} - E_{k_a} = \Delta E_k \end{aligned} \tag{1.44}$$

式中，$E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ 称为物体的动能（kinetic energy）。该量是描述物体由于运动而具有的能量，是状态的单值函数，又是标量，其单位与功的单位一致，均用焦耳（J）表示。

式（1.44）表明：合外力对质点所做的功，等于质点动能的增量，这个结论叫做质点的动能定理（theorem of kinetic energy）。

功和动能两个概念的关系可由动能定理看出：只有动能发生变化时，才有做功可言，故功是能量变化的量度。功是与过程密切相关的过程量，而动能与质点的运动状态密切相关，是运动状态的函数。

例 1.8 用铁锤将一铁钉击入木板内。设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板内的深度成正比（$f=-kx$），铁钉第一次被击入板内深度为 2cm，问第二次能击入多深？（设两次锤击钉速度相同）。

解 第一击入深度为 x 时，阻力所做的功

$$A = \int_0^x F\mathrm{d}x = \int_0^x -kx\mathrm{d}x = -\frac{kx^2}{2}$$

当击入深 $x = 2$cm 时，$A = -2k$。当第二次锤击钉时，阻力所做的功是

$$A' = \int_2^x -kx\mathrm{d}x = -\frac{kx^2}{2} + 2k$$

因为两次锤击钉速度 υ 相同，由动能定理可得

$$A = A' = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

则有

$$-\frac{kx^2}{2} + 2k = -2k$$

从中求出两次打击铁钉进入的深度是

$$x = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$$

而第二次击入深度为

$$\Delta x = (2\sqrt{2} - 2)\,\mathrm{cm}$$

1.2.4 势能 机械能守恒定律

在机械运动中，除了动能之外，还有一种形式的能量——势能。为了给出势能的概念，

我们首先分析一下几种力做功的特点，从而给出保守力和势能的概念及相关的定理。

一、保守力的功

（1）重力的功

如图 1.15 所示，质量为 m 的物体，在重力 $\vec{P}$ 作用下由 a 沿路径 acb 至点 b，a 和 b 相对地面的高度分别为 h_a 和 h_b 。为了计算重力的功，在路径 acb 上任取一段位移元 $\mathrm{d}\vec{r}$，则重力的元功为

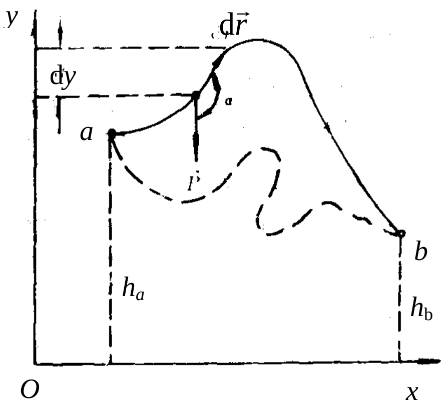

图 1.15 重力作功

$$\mathrm{d}A = \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

若物体在平面上运动，按上图所建的坐标，并取地面一点 O 为坐标原点，则有

$$\mathrm{d}A = -mg\vec{j} \cdot (\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j}) = -mg\mathrm{d}y$$

在 acb 过程中，重力的总功为

$$A = \int_a^b \mathrm{d}A = -mg\int_{h_a}^{h_b} \mathrm{d}y = -(mgh_b - mgh_a) \tag{1.45}$$

上式表明，重力做功只与物体的始、末位置有关，而与物体所经历的路径无关，这是重力做功的特点。

重力做功的特点也可表述为：物体沿任一闭合路径运动一周，重力所做的总功为零，用数学式表示为

$$A_{\text{重}} = \oint_L \vec{p} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

（2）弹性力的功

将轻弹簧的一端固定，另一端连接着质量为 m 的小球，当水平方向没有外力作用时，小球处在平衡位置。以 O 为坐标原点，x 方向如图 1.16 所示。现将物体拉至 a 点处，然后释放，则物体在弹性力作用下运动。计算一下物体由 a 至 b 点过程中，弹性力所做的功。

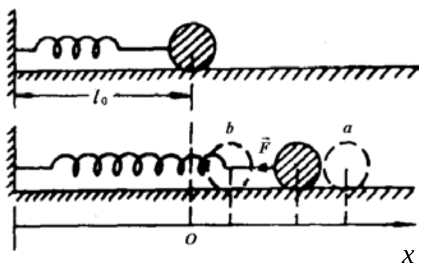

图 1.16 弹力的功

根据胡克定律，在弹性限度内，有

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

式中，k 为弹簧的倔强系数。可见，弹性力是变力。

任取一段位移元， $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i}$ ，弹性力的元功为

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -kx \cdot \mathrm{d}x\vec{i} \cdot \vec{i}$$

因 $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$，有

$$\mathrm{d}A = -kx\mathrm{d}x$$

当弹簧伸长量由 x_a 变到 x_b 时，弹性力所做的总功为

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=-\int_{x_a}^{x_b} kx\mathrm{d}x=-(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2) \tag{1.46}$$

从式（1.46）不难看出，弹性力与重力在做功方面具有同样的特点，即弹性力做功也只与始、末位置有关，而与路径无关。

综上所述，重力和弹性力所做的功与路径无关，仅与物体的始、末位置有关，具备这种特点的力称为保守力（conservative force）。除了这两种力之外，可以证明，万有引力、分子间的相互作用力、静电力也是保守力，也具备做功与路径无关的特点。该特点可以用一个统一的数学形式来表示

$$A_{保}=\oint_L \vec{F}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0 \tag{1.47}$$

上式表明，保守力沿任意闭合路径一周所做的功恒为零。

应当注意，并非所有的力都具备做功与路径无关的特点。例如，摩擦力所做的功不仅与物体的始、末位置有关，而且与经历的路径密切相关，即始、末位置一定时，经过的路径不同，所做的功也不同。我们把这类做功与路径有关的力称为非保守力。

二、势能

由于保守力的功仅与始、末状态有关，可以引入状态函数，称之为势能（potential energy），用 E_p 表示。势能是由系统内的质点相对位置决定的一种机械运动的能量。

由前面讨论知到，两种保守力做功为

$$A_{重}=-(mgh_b-mgh_a)$$

$$A_{弹}=-(\frac{1}{2}kx_b^2-\frac{1}{2}kx_a^2)$$

上述两个式子的右侧都是位置坐标的两个相同形式的函数之差，可以采用共同的形式表示，有

$$A_{保}=-(E_{pb}-E_{pa})=-\Delta E_p \tag{1.48}$$

从而得到两种势能的形式为

$$E_p=\begin{cases} mgh & \text{重力势能} \\ \frac{1}{2}kx^2 & \text{弹性势能} \end{cases} \tag{1.49}$$

由此可见，不同的保守力有着各自不同的势能表示形式。但无论是哪种保守力做功，均可用势能的变化来衡量。表示这二者之间的关系式（1.48）称为势能定理，其含义为：保守力的功等于系统势能增量的负值。

上述讨论表明，只有对保守力才能引入势能的概念。对势能概念作如下强调：

（1）势能是属于系统的

势能是由于物体间有着相互作用的保守力而存在，所以势能属于相互作用的物体系统。譬如，重力势能属于重物和地球构成的系统，而弹性势能则属于受弹性作用的质点和弹簧构成的系统。因此说势能均指系统的势能，通常说的“物体的势能”只是一种简称而已。

（2）势能值具有相对性

由于势能是位置的单值函数，而位置本身具有相对意义，与坐标原点的选取有关，这就导致势能的相对性，即势能的值与势能零点（zero-point potential energy）的选取有关。通常为研究问题方便，把地面取为重力势能的零点；把水平放置的弹簧振子的平衡位置取为弹性势能的零点。然而，势能之差与零点选取无关，具有绝对意义。

三、机械能守恒定律

在动能定理和势能定理的基础上，可以推出质点系的功能定理以及它的重要推论——机械能守恒定律。

（1）质点系的功能原理

由前面讨论知道，对于任意质点，合外力的功等于质点动能的增量。该结论可以推广到由 n 个质点构成的系统，有

$$\begin{aligned} A_1 &= E_{k1} - E_{k10} \\ A_2 &= E_{k2} - E_{k20} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ A_n &= E_{kn} - E_{kn0} \end{aligned} \tag{1.50}$$

将上述方程两侧分别相加，得到

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = (E_{k1} + E_{k2} + \cdots + E_{kn}) - (E_{k10} + E_{k20} + \cdots + E_{kn0})$$

或者写成

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} - \sum_{i=1}^{n} E_{ki0} \tag{1.51}$$

式中，$E_{k0} = \sum_{i=1}^{n} E_{ki0}$ 代表系统内 n 个质点的初动能之和；$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_{ki}$ 代表系统内 n 个质点的末动能之和；$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ 则代表作用在 n 个质点上全部力所做的功之代数和。式（1.51）可简写为

$$A = E_k - E_{k0} = \Delta E_k \tag{1.52}$$

上式称为系统的动能定理。其物理意义是：作用于质点系的力所做的功，等于该质点系的动能增量。

对于一个系统而言，力可有外力和内力之分，而内力又有保守力与非保守力之分，因此式(1.52)可以写成

$$A = A_{外} + A_{内} = A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = \Delta E_k$$

根据式（1.48）保守内力的功可以表示为

$$A_{保内} = -\Delta E_p$$

则有

$$\begin{aligned} A_{外} + A_{非保内} &= \Delta E_k + \Delta E_p = (E_{k2} - E_{k1}) + (E_{p2} - E_{p1}) \\ &= (E_{k2} + E_{P2}) - (E_{k1} + E_{k2}) = E_2 - E_1 \end{aligned}$$

简写为

$$A_{外} + A_{非保内} = E_2 - E_1 = \Delta E \tag{1.53}$$

式中，$E = E_k + E_P$ 代表系统的机械能（mechanical energy）。上式称为质点系的功能原理，其物理意义为：质点系机械能的增量，等于所有外力的功与非保守内力的功之总和。

（2）机械能守恒定律

从质点系的功能原理可以看出，当 $A_{外} + A_{非保内} > 0$ 时，系统机械能增加；当 $A_{外} + A_{非保内} < 0$ 时，系统机械能减少；当 $A_{外} = 0$ 且 $A_{非保内} = 0$ 时，有

$$E = E_0 = 常量$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = 常量 \tag{1.54}$$

即只有保守内力做功时，系统的总机械能守恒。这就是机械能守恒定律（law of conservation of mechanical energy）。

式（1.54）也可写成

$$E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2}$$

或者表示为

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \tag{1.55}$$

上式表明，在机械能守恒的情况下，系统内部的动能与势能是可以等量地相互转换，而且转换的形式也是多种多样的，可以是一个质点的动能传递给系统内的另一质点；也可以是一种形式的势能转化为另一种形式的势能或转化为质点的动能，而这些转换和传递，都是保守力做功实现的。因此，亦称式（1.55）为机械能守恒与转换定律。

利用机械能守恒定律研究系统的机械运动是很方便的，只要明确系统运动过程中机械能守恒的条件：$A_{外} = 0$ 且 $A_{非保内} = 0$，就可以不必追究运动过程中间的细节而得出系统始、末态机械能相等的结论。

四、能量转换与守恒定律

从功能原理可知，在机械运动中，系统机械能的增量等于外力和非保守内力对系统所做的功。如果外力对系统不做功，只有非保守内力做功，系统的机械能也要改变。在这种情况下，系统内必有其它形式能量的增减，系统的机械能就将与其它形式的能量发生转换。

事实证明，一种形式能量的增加或减少的同时，必然有等值的其它形式的能量的减少或增加。这表明：能量不能消失，也不能创造，只能从一种形式转化为另一种形式，这个结论称为能量转换与守恒定律（law of conservation of energy）。能量转换与守恒定律就是人类在长期的生产和实践中总结得出的一条重要结论。

自然界中物质运动的各种形式（机械的、热的、电磁的；分子、原子内部及核内部的等等）都有相应的能量，当运动形式发生转化时，物质的能量也相应地转化。例如电流通过灯泡时既能发光又同时发热，使电能转化为光能和热能；又如汽车刹车时，摩擦力做功，使系统的温度升高，致使机械能减少，并且减少的部分转化为热运动形式的能量。在能量转化过程中，做功是实现能量传递或转化的形式，但是不是唯一的一种形式。

能量转化与守恒定律证明了物质世界的统一性，它是自然界中最重要、最基本的定律

之一；不仅适用于宏观现象，而且适用于分子、原子乃至原子内部过程，也适用于相对论力学范围的现象；不仅适用于物理学，而且适用于化学、生物学等各门自然科学。

1.3 刚体定轴转动的基本定律

前面讨论了质点和质点系的动力学规律，对处理各类具体问题给出了普遍原理。然而在实际问题中，往往物体的大小和形状不可忽略，而大小和形状随时间的改变又微乎其微，这时就可以将物体作为刚体进行处理。在讨论刚体运动及其规律时，一般的做法是：把质量连续分布的刚体分成许多部分，每一部分称为刚体的质元，可以看作是一个质点，且各个质点间的距离保持不变。这时把刚体看成是由无数个质点构成的不变质点系，借助质点系所遵从的运动规律，通过积分求和的方法，得出刚体的运动规律。

刚体的运动包括平动、定轴转动(fixed-axis rotation)和其它较复杂的运动形式。在这一节里，我们主要讨论刚体定轴转动的基本规律。

1.3.1 刚体定轴转动定律

一、 力对轴的力矩

如图 1.17 所示，设刚体所受的外力 $\vec{F}$ 在转动平面内，$\vec{r}$ 表示由轴到力的作用点 P 的矢径，$\vec{r}$ 与 $\vec{F}$ 之间的夹角为φ。d 为力的作用线到转轴的垂直距离，叫力臂。则力 $\vec{F}$ 对转轴的力矩为

$$M = rF\sin\varphi = Fd \qquad (1.56)$$

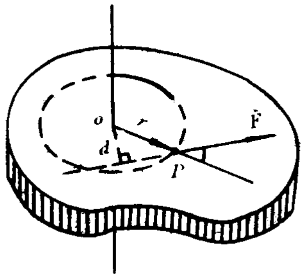

图 1.17 力对轴的力矩

力矩不仅有大小，而且有方向。力矩的定义可由矢量式表示为

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (1.57)$$

在定轴转动中，力矩的方向总是沿着转轴的，当转轴的正方向确定之后，力矩的方向可由正、负号来决定。

如果几个力同时作用于刚体上，而且这几个力均在转动平面内，则它们对轴的合力矩为

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i \qquad (1.58)$$

由于只讨论定轴转动的情况，此式也可写成

$$M = \sum_i M_i \qquad (1.59)$$

如果作用在刚体上的力 $\vec{F}$ 不在转动平面内，在计算力对轴的力矩时，可以把力 $\vec{F}$ 分解成两个相互垂直的分力，与转轴平行的分力对刚体的转动不起作用，只有与轴垂直的分力（即在转动平面内的分力）才对轴的力矩有贡献。

例 1.9 如图 1.18 所示，长为 l、质量为 m 的匀质细直杆，放在粗糙的水平面上，杆可绕通过其中心且与平面垂直的固定轴转动。已知杆与平面间的摩擦系数为 μ，求杆绕竖直轴转动时所受的摩擦力矩。

解　杆转动时，所受摩擦力沿杆长连续分布，且杆上不同部位的摩擦力臂不等，故需用积分法求摩擦力的总力矩。

如图 1.18，建立 ox 坐标轴，杆上任一元段 dx，质量为 $\mathrm{d}m=\lambda \mathrm{d}l=\frac{m}{l}\mathrm{d}x$，所受的摩擦力为

$$\mathrm{d}F=\mu g\mathrm{d}m=\mu g\frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

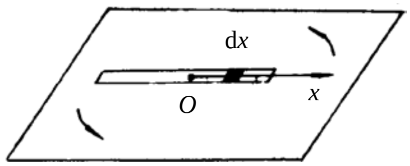

图 1.18　例 1.9 题图

对转轴的阻力矩大小为

$$\mathrm{d}M=x\mathrm{d}F=\mu g\frac{m}{l}x\mathrm{d}x$$

由于各元段所受的阻力矩方向一致，则总的阻力矩大小为

$$M=\int_r \mathrm{d}M=2\int_0^{\frac{l}{2}}\mu g\frac{m}{l}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mu mgl$$

二、 转动定律

刚体做定轴转动时，组成刚体的各个质点在垂直于轴的平面内作圆周运动。在转动平面内，考虑刚体任意一个质点 i，设其质量为 Δm_i，其到轴的距离为 r_i，所受到的合外力为 $\vec{F}_i$，不失一般性，假定 $\vec{F}_i$ 在转动平面内，受到的合内力为 $\vec{f}_i$，它们沿着圆周切线方向的分力分别为 F_{it} 和 f_{it}。在切线方向上应用牛顿第二定律有

$$F_{it}+f_{it}=\Delta m_i a_{it}=\Delta m_i r_i\beta$$

其中，β 为刚体转动的角加速度。方程两边分别乘以 r_i，然后对所有质点求和有

$$\sum_i r_i F_{it}+\sum_i r_i f_{it}=\left[\sum_i \Delta m_i r_i^2\right]\beta$$

上式左边第二项为内力矩，由于内力总是成对出现的，且等值反向，所以其值为零。上式左边第一项是合外力矩，用 M 表示，右边括号内部分用 J 表示，则上式可写为

$$M=J\beta$$

写成矢量式为

$$\vec{M}=J\vec{\beta} \tag{1.60}$$

式中，J 定义为转动惯量(moment inertia)。此式表明，刚体在合外力矩 M 作用下所获得的角加速度的大小与合外力矩的大小成正比，并与转动惯量 J 成反比。这一关系称为刚体的定轴转动定律（law of rotation of a rigid body about a fixed axis）。

刚体的定轴转动定律在刚体动力学中的地位与牛顿第二定律在平动中的地位相当，它是定量研究刚体定轴转动问题的基本定律。为此，做如下说明。

（1）$\vec{M}$ 代表所有外力对轴的力矩的矢量和，即合外力矩；$\vec{\beta}$ 为合外力矩引起刚体定轴转动的角加速度。

（2）瞬时性。转动定律给出的是一种瞬时关系，$\vec{M}$ 为某一时刻刚体所受的合外力矩，$\vec{\beta}$ 为该时刻刚体产生的角加速度，二者同时存在，同时消失

（3）同轴性。这一点很重要，力矩 $\vec{M}$、转动惯量 J 和角加速度 $\vec{\beta}$ 都是对同一确定轴而言的。

例 1.10 一转动惯量为 J 的圆盘，绕一固定轴转动，起初角速度为 ω_0，设它所受阻力矩与转动角速度成正比，即 $M=-k\omega$（k 为常数），试求角速度从 ω_0 变为 $\omega_0/2$ 时所需的时间。

解 由转动定律

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{M}{J}=-\frac{K}{J}\omega$$

所以

$$-\frac{K}{J}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}$$

两边取定积分

$$\int_0^t-\frac{K}{J}\mathrm{d}t=\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}$$

计算得出

$$t=\frac{J}{K}\ln 2$$

三、转动惯量

由转动惯量的定义式

$$J=\sum_i\Delta m_i r_i^2 \tag{1.61}$$

可以看出，转动惯量 J 与下列因素有关：（1）刚体的质量；（2）在质量一定的情况下，还与质量的分布有关，亦即与刚体的形状、大小和各部分的密度有关。例如，同质料的质量相等的空心圆柱与实心圆柱，对于圆柱的轴而言，前者的转动惯量较大。（3）转动惯量与转轴的位置有关。所以只有明确转轴，转动惯量才有明确的意义。

在 SI 中，转动惯量 J 的单位为千克·米^2($\mathrm{kg\cdot m^2}$)。

由刚体定轴转动定律知，在作用于刚体上的力矩一定的情况下，转动惯量越大，刚体的角加速度越小，刚体转动状态改变越小。因此，刚体转动惯量是刚体转动惯性大小的量度。

一般刚体的质量是连续分布的，式（1.61）可以写成积分形式

$$J=\int r^2\mathrm{d}m \tag{1.62}$$

式中，$\mathrm{d}m$ 为任取的质元的质量，视刚体质量分布情况，$\mathrm{d}m$ 可分别表示为

$$\mathrm{d}m=\begin{cases}\rho\mathrm{d}V\\ \sigma\mathrm{d}S\\ \lambda\mathrm{d}l\end{cases} \tag{1.63}$$

其中 ρ、σ、λ 分别为体积元 $\mathrm{d}V$、面积元 $\mathrm{d}S$ 和线元 $\mathrm{d}l$ 的体密度、面密度和线密度。
下面举例计算几种具有简单对称形状的刚体的转动惯量。

例 1.11 求质量为 m、长为 l 的均质细杆对下列各轴的转动惯量：(1)轴通过杆的中心并与杆垂直；(2)轴通过杆的一端并与杆垂直；(3)轴通过杆上离中心为 h 的一点并与杆垂直。

解 如图 1.19 所示，在杆上任取一质量元，设它到轴的垂直距离为 x，长度为 $\mathrm{d}x$，这质量元的质量 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}x$，其中 $\lambda=m/l$，故根据转动惯量定义式（1.62）有

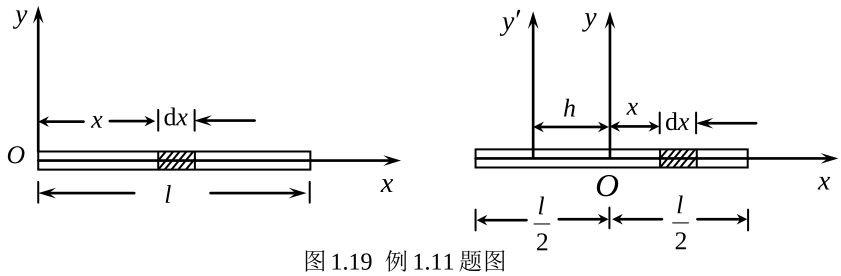

图 1.19 例 1.11 题图

（1）轴通过杆的中心并与杆垂直 $J=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2\lambda \mathrm{d}x=\dfrac{1}{12}ml^2$

（2）当轴通过杆的一端并与杆相垂直时 $J=\int_0^l x^2\lambda \mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}ml^2$

（3）当轴通过杆上离中心为 h 的一点并与杆垂直时

$$J=\int_{-\frac{l}{2}+h}^{\frac{l}{2}+h} x^2\lambda \mathrm{d}x=\frac{1}{12}ml^2+mh^2$$

例 1.12 求质量为 m、半径为 R 的细圆环及均质薄圆盘通过中心并与圆面垂直的转轴的转动惯量。

解 （1）如图 1.20 所示。对于细圆环，则有 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}x$，其中 $\mathrm{d}l$ 为圆环上的线元，所以

$$J=\int_m R^2\mathrm{d}m=\int_0^{2\pi R}\lambda R^2\mathrm{d}l=mR^2$$

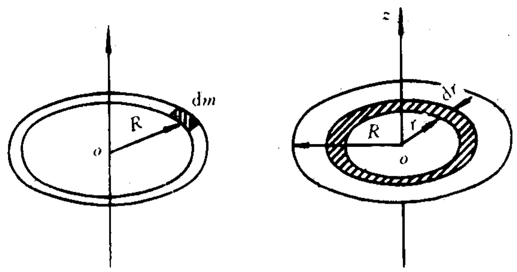

图 1.20 例 1.12 题图

由此可求得半径为 R、质量为 m 的均质薄圆筒对其几何中心轴的转动惯量亦为 mR^2。

(2) 对于薄圆盘，取一半径为 r 和 $r+\mathrm{d}r$ 的小圆环，其面积为 $\mathrm{d}S=2\pi r\mathrm{d}r$，设薄圆盘的质量面密度为 σ，则小圆环的质量 $\mathrm{d}m=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$，于是有小圆环对转轴 o 的转动惯量为

$$\mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m=2\pi\sigma r^3\mathrm{d}r$$

因此，圆盘对轴 O 的转动惯量为

$$J=\int_0^R \mathrm{d}J=\int_0^R 2\pi\sigma r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi\sigma R^4$$

将 $\sigma=m/\pi R^2$ 代入上式，便得

$$J=\frac{1}{2}mR^2$$

同样道理可求出半径为 R,质量为 m 的实心匀质圆柱体对柱中心轴的转动惯量也是 $mR^2/2$。

1.3.2 动量矩定理与动量矩守恒定律

在讨论质点运动时，从力对时间的累积作用出发，引出了冲量和动量的概念，并得到了动量定理和动量守恒定律。本节也将从力矩对时间的累积作用出发，给出对定轴的动量矩定理和动量矩守恒定律。

一、动量矩定理

刚体做定轴转动时，转动定律可表示为标量形式，即

$$M = J\beta = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

或
$$M\mathrm{d}t = J\mathrm{d}\omega$$

对于固定的刚体，J 是不变量。刚体的转动角速度从 t_1 时刻的ω_1改变为 t_2时刻的ω_2，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t = \int_{\vec{\omega}_1}^{\vec{\omega}_2}\mathrm{d}(J\vec{\omega}) = J\vec{\omega}_2 - J\vec{\omega}_1 \tag{1.64}$$

式中 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$ 反映了力矩 $\vec{M}$ 对时间的累积作用，称作力矩 $\vec{M}$ 对转动刚体的冲量矩。令 $\vec{L} = J\vec{\omega}$ 称为刚体对轴的动量矩，它是描述刚体转动状态的物理量，是矢量，其方向与角速度 $\vec{\omega}$ 的方向一致。在讨论定轴转动时，其方向可用正、负号来表示。

式（1.64）可以简化为

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t = \int_{\vec{\omega}_1}^{\vec{\omega}_2}\mathrm{d}(J\vec{\omega}) = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \tag{1.65}$$

式(1.65)表明，在定轴转动中，刚体所受的冲量矩，等于刚体在这段时间内动量矩的增量。这就是定轴转动动量矩定理的积分形式。

在 SI 中，冲量矩的单位是牛顿·米·秒（N·m·s），动量矩的单位是千克·米 ^{2}·秒 $^{-1}$($\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$)。

二、 动量矩守恒定律

由式(1.65)可知，当作用在物体上合外力矩为零时，则

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{恒矢量} \tag{1.66}$$

上式说明，当物体所受合外力矩等于零时，物体的动量矩保持不变。这个结论称为动量矩守恒定律。

动量矩守恒的情形可能有两种：一种是转动惯量和角速度均保持不变，即刚体绕定轴作匀速转动。例如，静止的陀螺很难靠螺尖站立不倒，但旋转着的陀螺如果处在直立情况下，就能保持这个状态而不倾倒。这是由于在转动过程中，螺尖受地面的摩擦力矩可以忽略，即在相当长的一段时间内保持恒定的动量矩的缘故。动量矩守恒的另一种情况是转动惯量和角速度同时改变，但二者的乘积保持不变，即 $J_1\vec{\omega}_1 = J_2\vec{\omega}_2$。若是一个非刚体物体的转动，当转动惯量增大时，其角速度变小；而当转动惯量变小时，其角速度增大。这样的例子是很多的。例如，芭蕾舞演员和溜冰运动员等在旋转的时候，往往先把两臂张开旋转，然后迅速把两臂收回靠拢身体，使自己的转动惯量减小，因而旋转速度加快。

若是一个力学系统，当满足动量矩守恒定律时，即 $\vec{M}_{\text{合外力}}=0$，有

$$\sum_i \vec{L}_i = \sum_i J_i\vec{\omega}_i = \text{恒矢量} \tag{1.67}$$

上式称为系统对某一定轴的动量矩守恒定律。

1.3.3 刚体定轴转动的动能定理与机械能守恒定律

从力矩对空间的累积作用，给出力矩的功、刚体的转动动能及将它们联系在一起的动能定理，进而给出刚体重力势能的计算公式，最后给出刚体机械能守恒定律。

一、刚体定轴转动的动能定理

（1）力矩的功

刚体在外力的作用下发生了定轴转动，力做了功，对这种情形也可以描述为，刚体在外力矩作用下绕定轴转动产生了角位移，力矩做了功，力矩的功只是力的功一种替代说法。

如图 1.21，设一刚体在外力 $\vec{F}$ 的作用下，绕轴 *OZ* 转动，在 d*t* 时间内，转过一极小的角位移 dθ，这时力 $\vec{F}$ 的作用点的位移大小 $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta$，根据功的定义，力 $\vec{F}$ 所做的元功为（设 $\vec{F}$ 与 $\mathrm{d}\vec{r}$ 之间的夹角为 α ）

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\mathrm{d}s = Fr\cos\alpha\mathrm{d}\theta$$

因为 $\alpha+\varphi=90^{\circ}$，所以 $\cos\alpha = \sin\beta$，于是

$$\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta \tag{1.68}$$

由此，力对刚体所做的功，可以用力矩和转动的角位移来表示，称式(1.68)为力矩的元功。

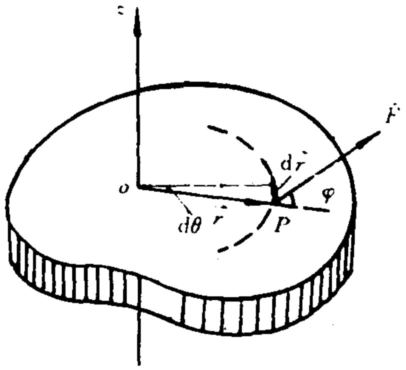

图 1.21 力矩的功

当刚体在变力矩的作用下转过角 θ 时，力矩的功为

$$A = \int_0^{\theta} M\mathrm{d}\theta \tag{1.69}$$

当力矩不变时，则它对刚体所做的功为

$$A = M\theta \tag{1.70}$$

如果刚体同时受到几个外力矩的作用，当式(1.68)和式(1.69)中的 *M* 为合外力矩时，*A* 则是合外力矩的功。

对于刚体而言，内力是成对出现的，且大小相等，方向相反，作用在同一直线上，故所有内力矩的总和为零。因此，刚体转动具有一个特点，即内力矩的总功为零。

力矩做功的快慢，称为力矩的功率，由式(1.68)可得

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega \tag{1.71}$$

在刚体做定轴转动时，力矩和角速度的方向或者相同，或者相反。当力矩与角速度的方向相同时，力矩的功率为正；当力矩与角速度的力向相反时，力矩的功率为负。

在 SI 中，力矩的功与功率的单位也为焦耳（J）和瓦特（W）。

（2）转动动能

刚体的动能等于组成刚体的全部质元（质点）做圆周运动的动能。当刚体以角速度 ω 绕定轴转动时，刚体上各个质点的角速度相等而线速度不等。任取第 *i* 个质点，设其质量为$\triangle m_{\mathrm{i}}$. 距转轴距离为 r_{i}.，则线速度 $\upsilon_i = \omega r_i$，相应的动能为

$$E_{ki}=\frac{1}{2}\Delta m_i\upsilon_i^2$$

对全部质点求和得刚体的总动能为

$$E_k=\sum_i\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2=\frac{1}{2}\omega^2\sum_i\Delta m_i r_i^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

即

$$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2 \tag{1.72}$$

上式是刚体转动动能的表达式。

（3）刚体定轴转动的动能定理

根据力矩的功的表达式及转动定律，可以得出刚体定轴转动的动能定理，即

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}J\beta\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2}J\omega\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2 \tag{1.73}$$

式中，M 为刚体所受的合外力矩，ω_1、ω_2表示刚体初位置θ_1处和末位置θ_2处的角速度。此式即是刚体定轴转动的动能定理，亦可简写为

$$A_{\text{合外力矩}}=E_{k2}-E_{k1}=\Delta E_k \tag{1.74}$$

其物理含义为：合外力矩对定轴转动刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。

二、 刚体定轴转动的机械能守恒定律

（1）刚体的重力势能

刚体的重力势能是指刚体与地球共有的势能，它等于各质元与地球共有的重力势能之和。设刚体任意质元的质量为 m_i，距势能零点的高度为 $h_i=y_i$，如图 1.22 所示，则此质元的重力势能为

$$E_{p_i}=m_i g h_i=m_i g y_i$$

整个刚体的重力势能为

$$E_p=\sum m_i g y_i=mg\frac{\sum m_i y_i}{m}=mgy_C \tag{1.75}$$

即刚体重力势能决定于刚体质心距势能零点的高度 h_C。

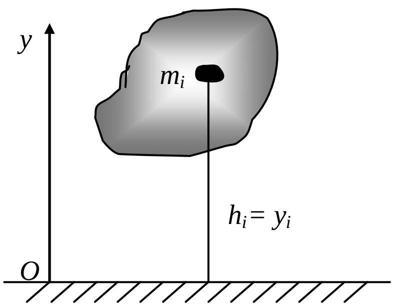

图 1.22 刚体的重力势能

（2）机械能守恒定理

在保守力场中定轴转动的刚体，对于包含有刚体的系统，如果在运动的过程中，只有保守内力做功，则系统的机械能守恒。即

$$E_k+E_p=\text{常量}$$

式中的动能 E_k 应当包括刚体的转动动能$\frac{1}{2}J\omega^2$，势能 Ep 中刚体的重力势能由（1.75）决定。

例 1.13 如图 1.23 所示，一根质量为 m、长为 l 的均匀细棒 OA 可绕通过其一端的光滑轴 O 在竖直平面内转动，今使棒从水平位置开始自由下摆，试求：(1)细棒摆到竖直位置时重力矩的功；(2)细棒摆到竖直位置时的角速度；(3)细棒摆到竖直位置时中心点 C 和端点 A 的

线速度。

解 （1）由于重力对转轴的力矩是随 θ 而变化的，棒转过一极小的角位移 $\mathrm{d}\theta$ 时，重力矩所做的元功是

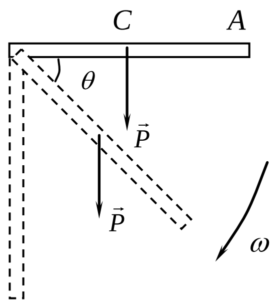

图 1.23 例 1.13 题

$$\mathrm{d}A = mg\frac{l}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

棒从水平位置下降到竖直位置的过程中，重力矩所做的总功为

$$A = \int_s \mathrm{d}A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\frac{l}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = mg\frac{l}{2}$$

（2）根据刚体定轴转动的动能定理：$A = E_k - E_{k_0}$，得

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}J\omega^2 - 0$$

整理并将棒的转动惯量 $J = ml^2/3$ 代入上式，得出

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

（3）细棒在竖直位置时，端点 A 和中心点 C 的线速度分别为

$$\upsilon_A = l\omega = \sqrt{3gl}\,,\quad \upsilon_C = \frac{l}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$