



数学建模 第五章 动态模型分析

机器学习研究室

时小虎, 张禹

目录

1. 五步方法
2. 特征值方法
3. 离散系统的特征值方法
4. 相图
5. 习题



1. 五步方法

① Ask the question.

② Select the modeling approach.

③ Formulate the model.

④ Solve the model.

⑤ Answer the question.

① 提出问题

② 选择建模方法

③ 推导模型的数学表达式

④ 求解模型

⑤ 回答问题



第1步，提出问题

- | | |
|---|---------------------------|
| ① Make a list of all the variables in the problem, including appropriate units. | ① 列出问题中涉及的变量，包括适当的单位。 |
| ② Be careful not to confuse variables and constants. | ② 注意不要混淆变量和常量。 |
| ③ State any assumptions you are making about these variables, including equations and inequalities. | ③ 列出你对变量所做的全部假设，包括等式和不等式。 |
| ④ Check units to make sure that your assumptions make sense. | ④ 检查单位从而保证你的假设有意义。 |
| ⑤ State the objective of the problem in precise mathematical terms. | ⑤ 用准确的数学术语给出问题的目标。 |



第2步，选择建模方法

- | | |
|--|-----------------------------|
| ① Choose a general solution procedure to be followed in solving this problem. | ① 选择解决问题的一个一般的求解方法. |
| ② Generally speaking, success in this step requires experience, skill, and familiarity with the relevant literature. | ② 一般地，这一步的成功需要经验、技巧和熟悉相关文献. |
| ③ In this book we will usually specify the modeling approach to be used. | ③ 在授课中，我们通常会给定要用的建模方法. |



第3步，推导模型的数学表达式

- ① Restate the question posed in step 1 in the terms of the modeling approach specified in step 2.
 - ② You may need to relabel some of the variables specified in step 1 in order to agree with the notation used in step 2.
 - ③ Note any additional assumptions made in order to fit the problem described.
- ① 将第一步中得到的问题重新表达成第二步选定的建模方法所需要的形式.
 - ② 你可能需要将第一步中的一些变量名改成与第二步所用的记号一致.
 - ③ 记下任何补充假设，这些假设是为了使第一步中描述的问题与第二步中选定的数学结构相适应而做出的.



第4步，求解模型

- ① Apply the general solution procedure specified in step 2 to the specific problem formulated in step 3.
 - ② Be careful in your mathematics. Check your work for math errors. Does your answer make sense?
 - ③ Use appropriate technology. Computer algebra systems, graphics, and numerical software will increase the range.
- ① 将第二步中所选的方法应用于第三步得到的表达式.
 - ② 注意你的数学推导，检查是否有错误，你的答案是否有意义.
 - ③ 采用适当的技术.计算机代数系统、图形工具、数值计算的软件等都能扩大你能解决问题的范围，并能减少计算错误.



第5步，回答问题

- ① Rephrase the results of step 4 in nontechnical terms.
 - ② Avoid mathematical symbols and jargon.
 - ③ Anyone who can understand the statement of the question as it was presented to you should be able to understand your answer.
- ① 用非技术性的语言将第四步的结果重新表述.
 - ② 避免数学符号和术语.
 - ③ 能理解最初提出的问题的人就应该能理解你给出的解答.



2. 特征值方法

当一个动态模型的方程是线性的时，我们可以获得精确的解析解。尽管在实际生活中线性动态系统几乎不存在，但多数动态系统至少在局部上可以被线性系统逼近。这样的线性逼近，特别是在一个孤立平衡点的邻域内，为许多最重要的适合于动态建模的分析技巧提供了基础。

例 5.1 再次考虑例题 4.1 的树木问题。假设硬材树每年增长率为 10%，软材树每年增长率为 25%。一英亩林地可以提供大约 10 000 吨的硬木或 6 000 吨的软木。竞争的程度还未从数值上确定。两种类型的树能否共存于一个稳定的平衡态？

2. 特征值方法

第一步提出问题:

Variables (符号化问题描述):

变量:

H = 硬材树种群(吨/英亩)

S = 软材树种群(吨/英亩)

g_H = 硬材树的生长率(吨/英亩/年)

g_S = 软材树的生长率(吨/英亩/年)

c_H = 与硬材树竞争的损失(吨/英亩/年)

c_S = 与软材树竞争的损失(吨/英亩/年)

假设:

$$g_H = r_1 H - a_1 H^2$$

$$g_S = r_2 S - a_2 S^2$$

$$c_H = b_1 SH$$

$$c_S = b_2 SH$$

$$H \geq 0, S \geq 0$$

$r_1, r_2, a_1, a_2, b_1, b_2$ 是正实数

目标: 确定是否有 $H \rightarrow 0$ 或 $S \rightarrow 0$.

变量:

2. 特征值方法

第一步提出问题:

Variables (符号化问题描述):

$$r_1 = 0.10$$

$$r_2 = 0.25$$

$$a_1 = \frac{0.10}{10\,000}$$

$$a_2 = \frac{0.25}{6\,000}$$

假设:

H = 硬材树种群(吨/英亩)

S = 软材树种群(吨/英亩)

g_H = 硬材树的生长率(吨/英亩/年)

g_S = 软材树的生长率(吨/英亩/年)

c_H = 与硬材树竞争的损失(吨/英亩/年)

c_S = 与软材树竞争的损失(吨/英亩/年)

$$g_H = r_1 H - a_1 H^2$$

$$g_S = r_2 S - a_2 S^2$$

$$c_H = b_1 SH$$

$$c_S = b_2 SH$$

$$H \geq 0, S \geq 0$$

$r_1, r_2, a_1, a_2, b_1, b_2$ 是正实数

目标: 确定是否有 $H \rightarrow 0$ 或 $S \rightarrow 0$.



2. 特征值方法

第二步选择模型：通过特征值方法分析非线性动态系统。

假设我们有一个动态系统 $x' = F(x)$ ，其中 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 是状态空间 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 的一个元素，而且 $F = (f_1, \dots, f_n)$ 。一个点 $x_0 \in S$ 是一个平衡态或稳定态当且仅当 $F(x_0) = 0$ 。已有定理表明如果矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1(x_0) & \cdots & \partial f_1 / \partial x_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1(x_0) & \cdots & \partial f_n / \partial x_n(x_0) \end{bmatrix} \quad (1)$$

的特征值全都具有负实部，则平衡点是渐近稳定的。如果有一个特征值具有正实部，则这个平衡点是不稳定的。对其他情况（纯虚特征值）这种检验是不确定的



2. 特征值方法

第二步选择模型：通过特征值方法分析非线性动态系统。

特征值方法基于线性逼近。尽管 $x' = F(x)$ 是非线性的，在平衡点的邻域内我们将有

$$F(x) \approx A(x - x_0)$$

除了现在 F 的导数由一个矩阵表示外，这与在单变量微积分中所看到的线性逼近是同样的。有些作者称矩阵 DF 为单变量导数的类推。线性逼近可以使得当原点是 $x' = Ax$ 的稳定的平衡态时（即， x_0 是 $x' = A(x - x_0)$ 的稳定的平衡态）， x_0 同样也是 $x' = F(x)$ 的稳定的平衡态。因此只要了解线性系统情形的特征值检验即可。



2. 特征值方法

第二步选择模型：通过特征值方法分析非线性动态系统。

毫无疑问，在微分方程的入门课程中你曾经解过某些线性微分方程，并且你可能也知道解与特征值之间的关系。例如，如果 $Au = \lambda u$ (即 u 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量)，则 $x(t) = ue^{\lambda t}$ 是初值问题

$$x' = Ax, \quad x(0) = u.$$

的一个解。事实上可以写出 $n \times n$ 线性微分方程组的通解，虽然这样做相当复杂并且需要大量的线性代数知识。但是，这样做的好处是可以对解的性质有个一般的描述。这个定理说明微分方程 $x' = Ax$ 的任意解 $x(t)$ 的每个分量都是形如

$$t^k e^{at} \cos(bt), \quad t^k e^{at} \sin(bt)$$

的函数的线性组合，其中 $a \pm ib$ 是 A 的特征值 (如果特征值是实的，则 $b=0$)，并且 k 是一个小于 n 的非负整数。从这个一般性的描述容易得到，原点是方程组 $x' = Ax$ 的渐近稳定的平衡态当且仅当每一个特征值 $a \pm ib$ 都有 $a < 0$ (参考 [Hirsch 和 Smale, 1974], p. 135)。



2. 特征值方法

第二步选择模型：通过特征值方法分析非线性动态系统。

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.33)$$

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^m}{m!} + \cdots \quad (5.34)$$

$$\exp \mathbf{A}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \quad (5.35)$$

定理 9 矩阵

$$\Phi(t) = \exp \mathbf{A}t \quad (5.41)$$

是(5.33)的基解矩阵, 且 $\Phi(0) = \mathbf{E}$.



2. 特征值方法

第二步选择模型：通过特征值方法分析非线性动态系统。

我们试图寻找 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (5.33)

形如 $\varphi(t) = e^{\lambda t} \mathbf{c}, \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ (5.43)

的解。其中常数 λ 和向量 \mathbf{c} 是待定的。为此，将(5.43)代入到(5.33)式，有

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{c} = \mathbf{A} e^{\lambda t} \mathbf{c} \quad (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

这样一来，根据上面的讨论， $e^{\lambda t} \mathbf{c}$ 是(5.33)的解，当且仅当 λ 是 \mathbf{A} 的特征值，且 \mathbf{c} 是对应于 λ 的特征向量。



2. 特征值方法

第二步选择模型：通过特征值方法分析非线性动态系统。

定理 10 如果矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量 v_1, v_2, \dots, v_n , 它们对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (不必各不相同), 那么矩阵

$$\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, e^{\lambda_n t} v_n], \quad -\infty < t < +\infty$$

是常系数线性微分方程组

$$x' = Ax \quad (5.33)$$

的一个基解矩阵.



2. 特征值方法

第二步选择模型：通过特征值方法分析非线性动态系统。

一般来说, 定理 10 中的 $\Phi(t)$ 不一定是 $\exp At$. 然而, 根据 5.2.1 的推论 2*, 我们可以确定它们之间的关系. 因为 $\exp At$ 和 $\Phi(t)$ 都是 (5.33) 的基解矩阵, 所以存在一个非奇异的常数矩阵 C , 使得

$$\exp At = \Phi(t)C.$$

在上式中, 令 $t=0$, 我们得到 $C = \Phi^{-1}(0)$. 因此

$$\exp At = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) \quad (5.47)$$

根据公式 (5.47), $\exp At$ 的计算问题相当于方程组 (5.33) 的任一基解矩阵的计算问题. 注意, 公式 (5.47) 还有一个用途, 这就是下面的附注所指出的.



2. 特征值方法

第二步选择模型：通过特征值方法分析非线性动态系统。

附注 1 我们知道, 如果 A 是实的, 那么 $\exp At$ 也是实的. 因此, 当 A 是实时, 公式(5.47)给出一个构造实的基解矩阵的方法.



2. 特征值方法

第二步选择模型：通过特征值方法分析非线性动态系统。

定理 11 给定常系数线性微分方程组

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.33)$$

那么, 1° 如果 \mathbf{A} 的特征值的实部都是负的, 则(5.33)的任一解当 $t \rightarrow +\infty$ 时都趋于零.

2° 如果 \mathbf{A} 的特征值的实部都是非正的, 且实部为零的特征值都是简单特征值, 则(5.33)的任一解当 $t \rightarrow +\infty$ 时都保持有界.

3° 如果 \mathbf{A} 的特征值至少有一个具有正实部, 则(5.33)至少有一个解当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于无穷.



2. 特征值方法

第三步是构造模型的公式. 记 $x_1 = H$, $x_2 = S$ 为两个状态变量, 定义在状态空间

$$\{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

定常态方程为

$$\begin{aligned} r_1 x_1 - a_1 x_1^2 - b_1 x_1 x_2 &= 0 \\ r_2 x_2 - a_2 x_2^2 - b_2 x_1 x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

我们对这个方程组在状态空间的解感兴趣. 这些解表示动态模型的平衡点.



2. 特征值方法

我们得到四个解；三个解

$$(0,0)$$

$$\left(0, \frac{r_2}{a_2}\right)$$

$$\left(\frac{r_1}{a_1}, 0\right)$$

在坐标轴上，第四个在这两条直线

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = r_1$$

$$b_2 x_1 + a_2 x_2 = r_2.$$

$$x_1 = \frac{r_1 a_2 - r_2 b_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2}$$

$$x_2 = \frac{a_1 r_2 - b_2 r_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2}.$$



2. 特征值方法

第四步求解模型：

$$x_1 = \frac{r_1 a_2 - r_2 b_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{a_1 r_2 - b_2 r_1}{D}$$

有一个平衡态，其中

$$D = (a_1 a_2 - b_1 b_2).$$

我们已经确定了 a_1 , a_2 , r_1 和 r_2 的值，但没有给定 b_1 和 b_2 的值. 我们仍假设 $b_i < a_i$. 此时取 $b_i = a_i/2$. 则平衡点的坐标是 $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, 其中

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \frac{28\,000}{3} \approx 9\,333 \\ x_2^0 &= \frac{4\,000}{3} \approx 1\,333. \end{aligned} \tag{2}$$



2. 特征值方法

第四步求解模型：

动态系统方程是 $x' = F(x)$ ，其中 $F = (f_1, f_2)$ 且

$$f_1(x_1, x_2) = 0.10x_1 - \frac{0.10}{10\,000}x_1^2 - \frac{0.05}{10\,000}x_1x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0.25x_2 - \frac{0.25}{6\,000}x_2^2 - \frac{0.125}{6\,000}x_1x_2.$$

偏导数是

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{20\,000 - x_2}{200\,000} - \frac{x_1}{50\,000}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{-x_1}{200\,000}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{-x_2}{48\,000}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{-x_1}{48\,000} - \frac{x_2}{12\,000} + \frac{1}{4}.$$



2. 特征值方法

第四步求解模型： 计算偏导数(4)在平衡态点(2)的值，且将其代回(1)式，我们得到

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-7}{75} & \frac{-7}{150} \\ \frac{-1}{36} & \frac{-1}{18} \end{bmatrix}.$$

这个 2×2 矩阵的特征值是方程

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{7}{75} & \frac{7}{150} \\ \frac{1}{36} & \lambda + \frac{1}{18} \end{vmatrix} = 0.$$

的根。计算行列式我们得到方程

$$\frac{1\,800\lambda^2 + 268\lambda + 7}{1\,800} = 0,$$

从而得到

$$\lambda = \frac{-67 \pm \sqrt{1\,339}}{900}.$$

因为两个特征值都具有负实部，所以这个平衡态是稳定的。



2. 特征值方法

第四步求解模型：

$$r1 := 0.1 : r2 := 0.25 : a1 := \frac{0.1}{10000} : a2 := \frac{0.25}{6000} : b1 := \frac{a1}{2} : b2 := \frac{a2}{2} :$$

$$gH := r1 \cdot H - a1 \cdot H^2 :$$

$$gS := r2 \cdot S - a2 \cdot S^2 :$$

$$cH := b1 \cdot S \cdot H :$$

$$cS := b2 \cdot S \cdot H :$$

$$fH := gH - cH :$$

$$fS := gS - cS :$$

$$ahh := \text{diff}(fH, H) :$$

$$ahs := \text{diff}(fH, S) :$$

$$ash := \text{diff}(fS, H) :$$

$$ass := \text{diff}(fS, S) :$$

$$A := \langle ahh, ash | ahs, ass \rangle :$$

$$eq1 := fH = 0 :$$

$$eq2 := fS = 0 :$$

$$s := \text{solve}(\{eq1, eq2\}, \{H, S\})$$

$$\{H=0., S=0.\}, \{H=0., S=6000.000000\}, \{H=10000., S=0.\}, \{H=9333.333334, S=1333.333331\}$$



2. 特征值方法

第四步求解模型：

$$r1 := 0.1 : r2 := 0.25 : a1 := \frac{0.1}{10000} : a2 := \frac{0.25}{6000} : b1 := \frac{a1}{2} : b2 := \frac{a2}{2} :$$

$$gH := r1 \cdot H - a1 \cdot H^2 :$$

$$gS := r2 \cdot S - a2 \cdot S^2 :$$

$$cH := b1 \cdot S \cdot H :$$

$$cS := b2 \cdot S \cdot H :$$

$$fH := gH - cH :$$

$$fS := gS - cS :$$

$$ahh := \text{diff}(fH, H) :$$

$$ahs := \text{diff}(fH, S) :$$

$$ash := \text{diff}(fS, H) :$$

$$ass := \text{diff}(fS, S) :$$

$$A := \langle ahh, ash | ahs, ass \rangle :$$

$$eq1 := fH = 0 :$$

$$eq2 := fS = 0 :$$

$$s := \text{solve}(\{eq1, eq2\}, \{H, S\})$$

$$\{H=0., S=0.\}, \{H=0., S=6000.000000\}, \{H=10000., S=0.\}, \{H=9333.333334, S=1333.333331\}$$

$$\text{assign}(s)$$

$$A$$

eigenvalues →

$$\begin{bmatrix} -0.09333333336 & -0.04666666667 \\ -0.02777777774 & -0.05555555554 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.03378627886 \\ -0.1151026099 \end{bmatrix}$$



2. 特征值方法

第五步回答问题：

最后我们进行第五步。我们已经发现硬材树与软材树可以共存于一个平衡态。在一个成熟的、稳定的树林中每英亩大约有 9 300 吨硬木树和 1 300 吨软木树。这个结论基于对两类树种之间竞争程度的近似合理的假设。灵敏性分析的推导将确定这些假设对我们初步结论的影响。



2. 特征值方法

灵敏性分析:

为做灵敏性分析, 我们仍假设 $b_i = ta_i$, 且将放松假设 $t = 1/2$. 条件

$$b_i < a_i$$

$$\left(\frac{r_i}{a_i}\right) < \left(\frac{r_j}{b_j}\right)$$

隐含着 $0 < t < 0.6$. 平衡点的坐标 (x_1^0, x_2^0) 是

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \left(\frac{10\,000 - 6\,000t}{(1-t^2)} \right) \\ x_2^0 &= \left(\frac{6\,000 - 10\,000t}{(1-t^2)} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

这个系统的微分方程是 $x'_i = f_i(x_1, x_2)$, 其中

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0.10x_1 - \frac{0.10x_1^2}{10\,000} - \frac{0.10tx_1x_2}{10\,000} \\ f_2(x_1, x_2) &= 0.25x_2 - \frac{0.25x_2^2}{6\,000} - \frac{0.25tx_1x_2}{6\,000}. \end{aligned} \tag{7}$$



2. 特征值方法

灵敏性分析:

且偏导数是

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{10\,000 - tx_2}{100\,000} - \frac{x_1}{50\,000} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \frac{-tx_1}{100\,000} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{-tx_2}{24\,000} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \frac{-tx_1}{24\,000} - \frac{x_2}{12\,000} + \frac{1}{4}.\end{aligned}\tag{8}$$

计算在平衡点(6)的偏导数值(8)并将其代回(1)式得到

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5-3t}{50(t^2-1)} & \frac{t(5-3t)}{50(t^2-1)} \\ \frac{t(3-5t)}{12(t^2-1)} & \frac{3-5t}{12(t^2-1)} \end{pmatrix}.\tag{9}$$



2. 特征值方法

灵敏性分析:

为找特征值我们必须求解的特征方程是

$$\left[\lambda - \frac{5-3t}{50(t^2-1)}\right]\left[\lambda - \frac{3-5t}{12(t^2-1)}\right] - \left[\frac{t(3-5t)}{12(t^2-1)}\right]\left[\frac{t(5-3t)}{50(t^2-1)}\right] = 0, \quad (10)$$

解方程(10)得到 λ 的两个根

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{143t - 105 + \sqrt{9\,000t^4 - 20\,400t^3 + 20\,449t^2 - 9\,630t + 2\,025}}{600(1-t^2)} \\ \lambda_2 &= \frac{143t - 105 - \sqrt{9\,000t^4 - 20\,400t^3 + 20\,449t^2 - 9\,630t + 2\,025}}{600(1-t^2)}. \end{aligned} \quad (11)$$



2. 特征值方法

灵敏性分析:

```
[ > with(linalg):
> f1:=x1/10-(x1^2/10)/10000-(t*x1*x2/10)/10000;
      f1 :=  $\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{100000}x_1^2 - \frac{1}{100000}tx_1x_2$ 
> f2:=25*x2/100-(25*x2^2/100)/6000-(25*t*x1*x2/100)/6000;
      f2 :=  $\frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{24000}x_2^2 - \frac{1}{24000}tx_1x_2$ 
> df1dx1:=diff(f1,x1);
      df1dx1 :=  $\frac{1}{10} - \frac{1}{50000}x_1 - \frac{1}{100000}tx_2$ 
> df1dx2:=diff(f1,x2);
      df1dx2 :=  $-\frac{1}{100000}tx_1$ 
> df2dx1:=diff(f2,x1);
      df2dx1 :=  $-\frac{1}{24000}tx_2$ 
> df2dx2:=diff(f2,x2);
      df2dx2 :=  $\frac{1}{4} - \frac{1}{12000}x_2 - \frac{1}{24000}tx_1$ 
> s:=solve({f1/x1=0,f2/x2=0},{x1,x2});
      s := {x2 = 2000  $\frac{-3+5t}{-1+t^2}$ , x1 = 2000  $\frac{-5+3t}{-1+t^2}$ }
[ > assign(s);
> A:=array([ [df1dx1,df1dx2], [df2dx1,df2dx2] ]);
      A :=  $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} - \frac{1}{25} \frac{-5+3t}{-1+t^2} - \frac{1}{50} \frac{t(-3+5t)}{-1+t^2} & -\frac{1}{50} \frac{t(-5+3t)}{-1+t^2} \\ -\frac{1}{12} \frac{t(-3+5t)}{-1+t^2} & \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \frac{-3+5t}{-1+t^2} - \frac{1}{12} \frac{t(-5+3t)}{-1+t^2} \end{bmatrix}$ 
> eigenvals(A);
       $\frac{1}{2} \frac{-286t + 210 + 2\sqrt{20449t^2 - 9630t + 2025} - 20400t^3 + 9000t^4}{600t^2 - 600}$ 
       $\frac{1}{2} \frac{-286t + 210 - 2\sqrt{20449t^2 - 9630t + 2025} - 20400t^3 + 9000t^4}{600t^2 - 600}$ 
```




2. 特征值方法

灵敏性分析:

图 5-3 显示了 λ_1 和 λ_2 随 t 在区间 $0 < t < 0.6$ 上的变化. 从这个图我们可以看到, λ_1 和 λ_2 总是负的, 因此不论竞争程度如何, 平衡态总是稳定的. (如果你做第 4 章的练习 1, 从图的分析你大概会得出相同的结论.)

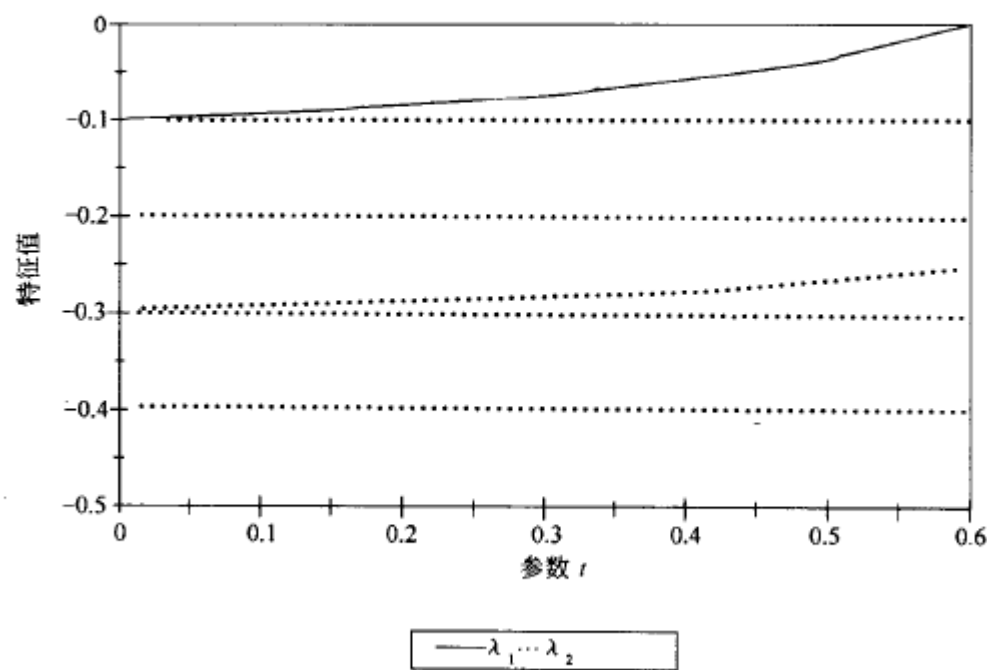


图 5-3 在树木问题中特征值 λ_1 和 λ_2 依赖于参数 t 的变化的图



3. 对离散系统的特征值方法

例 4.3 宇航员在训练中要求用手动控制做对接演习。作为这个演习的一部分，要求保持一个正在运行的太空船与另一个正在运行的太空船的相对位置。手控制器提供了不同的加速度和减速度，并且在太空船上有一个装置测量这两个飞船的接近速度。建议使用如下的策略进行飞船对接。首先观察接近速度。如果为零，则不用再做任何事。否则，记住这个接近速度，再看加速度控制器，控制加速度使得它与接近速度相反，（即如果接近速度是正值，则放慢，如果是负的，则加快。）且正比于这个差值（即如果发现接近速度达到两倍时，我们将以两倍的速度刹车）。经过一段时间，再观察接近速度并重复上面步骤。在什么环境下这个策略是有效的？

例 5.2 重新考虑例题 4.3 的对接问题。现在假设需要 5 分钟进行控制调节和外加 10 分钟从其他工作再次转向观测速度指示器。在这些条件下，我们的调整速度的策略将会成功吗？

变量：

t_n = 第 n 次观测速度的时间（秒）

v_n = 在 t_n 时刻的速度（米/秒）

c_n = 执行第 n 次控制调节的时间（秒）

a_n = 第 n 次调节后的加速度（米/秒²）

w_n = 等待到第 $n+1$ 次观测前的等待时间（秒）

假设：

$$t_{n+1} = t_n + c_n + w_n$$

$$v_{n+1} = v_n + a_n c_n + a_n w_n$$

$$a_n = -k v_n$$

$$c_n > 0$$

$$w_n \geq 0$$

目标：确定是否有 $v_n \rightarrow 0$



3. 对离散系统的特征值方法

例 4.3 宇航员在训练中要求用手动控制做对接演习。作为这个演习的一部分，要求保持一个正在运行的太空船与另一个正在运行的太空船的相对位置。手控制器提供了不同的加速度和减速度，并且在太空船上有一个装置测量这两个飞船的接近速度。建议使用如下的策略进行飞船对接。首先观察接近速度。如果为零，则不用再做任何事。否则，记住这个接近速度，再看加速度控制器，控制加速度使得它与接近速度相反，（即如果接近速度是正值，则放慢，如果是负的，则加快。）且正比于这个差值（即如果发现接近速度达到两倍时，我们将以两倍的速度刹车）。经过一段时间，再观察接近速度并重复上面步骤。在什么环境下这个策略是有效的？

例 5.2 重新考虑例题 4.3 的对接问题。现在假设需要 5 分钟进行控制调节和外加 10 分钟从其他工作再次转向观测速度指示器。在这些条件下，我们的调整速度的策略将会成功吗？

变量：

t_n = 第 n 次观测速度的时间（秒）

v_n = 在 t_n 时刻的速度（米/秒）

c_n = 执行第 n 次控制调节的时间（秒）

a_n = 第 n 次调节后的加速度（米/秒²）

w_n = 等待到第 $n+1$ 次观测前的等待时间（秒）

假设：

$$t_{n+1} = t_n + c_n + w_n$$

$$v_{n+1} = v_n + a_n c_n + a_n w_n$$

$$a_n = -k v_n$$

$$c_n > 0$$

$$w_n \geq 0$$

目标：确定是否有 $v_n \rightarrow 0$

$$c_n = 5, w_n = 10.$$

$k = 0.02$ ；后面我们将进行对 k 的灵敏性分析。



3. 对离散系统的特征值方法

第二步选择模型：特征值方法

给定一个离散时间的动力系统，

$$\Delta x = F(x)$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 和 $F = (f_1, \dots, f_n)$ ，我们定义一个迭代函数，

$$G(x) = x + F(x).$$

序列 $x(0), x(1), x(2), \dots$ 是该差分方程组的解，当且仅当对所有的 n 有

$$x(n+1) = G(x(n))$$

一个平衡点 x_0 由它是函数 $G(x)$ 的不动点这一事实刻画，即 $G(x_0) = x_0$ 。

已有定理说明一个平衡点 x_0 是(渐近)稳定的如果偏导数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \partial g_1 / \partial x_1(x_0) & \cdots & \partial g_1 / \partial x_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial g_n / \partial x_1(x_0) & \cdots & \partial g_n / \partial x_n(x_0) \end{bmatrix} \quad (12)$$

的每一个特征值的绝对值小于 1. 如果特征值是复数 $a \pm ib$ ，我们提到的复数的绝对值是 $(a^2 + b^2)^{1/2}$. 对稳定性的这种简单检验类似于展示在前一小节对连续时间动力系统的特征值检验(参见[Hirsch 和 Smale, 1974], p. 280).



3. 对离散系统的特征值方法

第二步选择模型：特征值方法

与连续情况一样，对离散时间动态系统的特征值检验也基于线性逼近。尽管迭代函数 $G(x)$ 是非线性的，在平衡点 x_0 的邻域内，我们有

$$G(x) \approx A(x - x_0)$$

换句话说迭代函数 G 在平衡点 x_0 的邻域内的性质近似于线性函数 Ax 在原点附近的性质。因此原来非线性系统在平衡点 x_0 的邻域内的性质近似于线性离散时间动力系统，它由迭代函数

$$x(n+1) = Ax(n)$$

在原点邻域内确定。这个线性逼近保证了如果原点是线性系统的稳定的平衡态，则 x_0 是原非线性系统的稳定的平衡态。因此只需要讨论线性系统的稳定性条件。



3. 对离散系统的特征值方法

第二步选择模型：特征值方法

一个矩阵被称为一个线性压缩，如果对每个 x 有 $A^n x \rightarrow 0$ 。已有定理表明如果矩阵 A 的每个特征值的绝对值小于 1，则 A 是一个线性压缩（参见 [Hirsch 和 Smale, 1974], p. 279）。因此，当 A 的所有特征值的绝对值小于 1 时，原点是由 A 迭代生成的离散时间动力系统的稳定的平衡态。我们用一个简单的情况解释这个结果的证明。假设对所有的 x 有 $Ax = \lambda x$ ，则 λ 是 A 的一个特征值，且每个非零向量 x 是属于 λ 的特征向量。对这种简单情况我们总有

$$x(n+1) = Ax(n) = \lambda x(n)$$

于是原点是稳定的平衡态当且仅当 $|\lambda| < 1$ 。



3. 对离散系统的特征值方法

第三步推导模型:

此时我们已有一个以 $x_0 = (0,0)$ 为平衡态的动力系统。

其中

$$G(x_1, x_2) = x + F(x_1, x_2) = (g_1, g_2)$$

$$g_1(x_1, x_2) = 0.8x_1 - 0.1x_2$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_1.$$

$$(v_{n+1} - v_n) = -kv_{n-1}c_n - kv_nw_n.$$

因此, 第 n 步速度的变化依赖于 v_n 和 v_{n-1} . 为简化分析, 对所有的 n 假设 $c_n = c$ 和 $w_n = w$. 则时间步长为

$$\Delta t = c + w$$

我们并不需要将时间作为状态变量. 但是, 我们确实应该同时考虑 v_n 和 v_{n-1} . 设

$$x_1(n) = v_n$$

$$x_2(n) = v_{n-1}.$$

计算

$$\Delta x_1 = -kwx_1 - kc x_2$$

$$\Delta x_2 = x_1 - x_2. \quad (12)$$

状态空间是 $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.



3. 对离散系统的特征值方法

第四步求解模型：

$$\begin{vmatrix} \lambda - 0.8 & 0.1 \\ -1 & \lambda - 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 0.8\lambda + 0.1 = 0$ ，由此我们获得

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{10}.$$

这是 $n=2$ 个不同的特征值，两者都是实数且位于 -1 和 $+1$ 之间。因此这个平衡态 $x_0=0$ 是稳定的，对任意的初值我们将得到 $x(t) \rightarrow (0, 0)$ 。



3. 对离散系统的特征值方法

第五步回答问题：

第五步是用通俗的语言叙述我们的结果。我们假设控制调整的时间间隔为 15 秒钟：5 秒钟调整和 10 秒钟松弛。运用一个 1 : 50 的修正因子，我们可以保证我们控制比例方法成功。实际上，1 : 50 的修正因子是指如果速度指示器读数为 50 米/秒我们将设加速度控制为 -1 米/秒²。如果读数是 25 米/秒，我们设控制为 -0.5 米/秒²，等等。



3. 对离散系统的特征值方法

灵敏性分析：对参数 k

$$g_1(x_1, x_2) = (1 - 10k)x_1 - 5kx_2$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_1$$

由此导出特征方程

$$\lambda^2 - (1 - 10k)\lambda + 5k = 0.$$

特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{(1 - 10k) + \sqrt{(1 - 10k)^2 - 20k}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{(1 - 10k) - \sqrt{(1 - 10k)^2 - 20k}}{2}.\end{aligned}\tag{13}$$

在(13)式中根号下的量在

$$k_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{20} \approx 0.027$$

和

$$k_2 = \frac{4 + \sqrt{12}}{20} \approx 0.373.$$

之间取负值



3. 对离散系统的特征值方法

灵敏性分析：对参数 k

当 $k_1 < k < k_2$ 时两个特征值都是复数，稳定性条件为

$$\left[\frac{(1-10k)^2}{4} \right] + \left[\frac{20k - (1-10k)^2}{4} \right] < 1 \quad (14)$$

由此导出 $k < 1/5$.

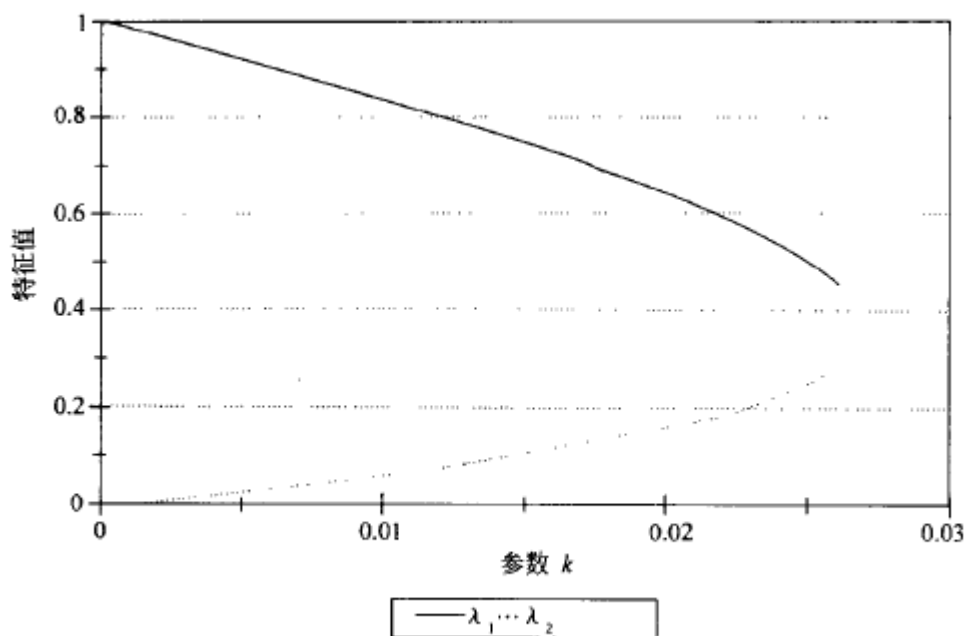


图 5-4 在对接问题中特征值 λ_1 和 λ_2 对应于控制参数 k 变化的图： $0 < k \leq k_1$ 情形

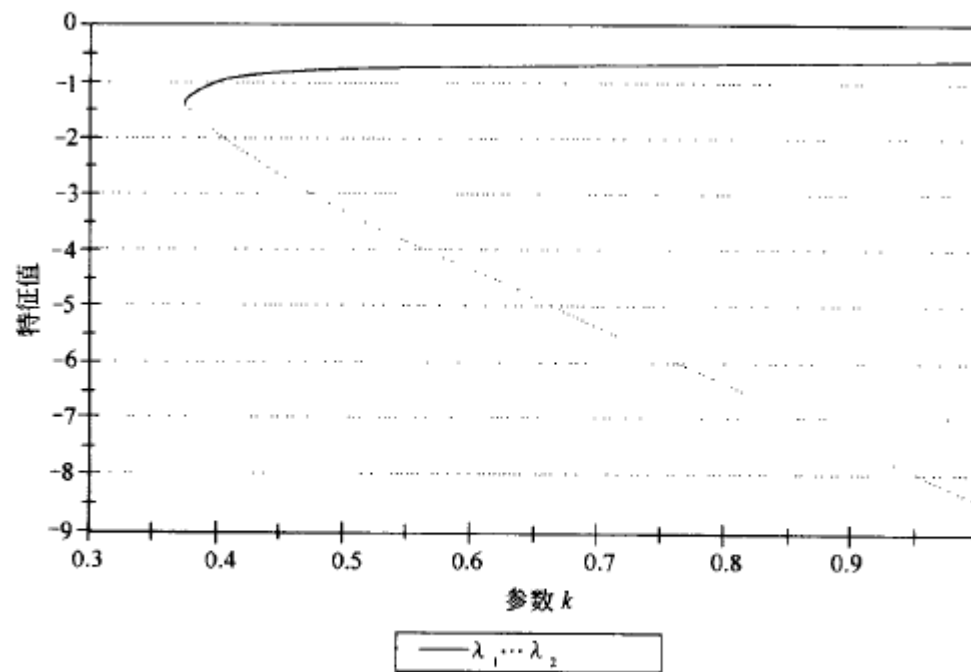


图 5-5 在对接问题中特征值 λ_1 和 λ_2 对应于控制参数 k 变化的图： $k \geq k_2$ 情形



3. 对离散系统的特征值方法

灵敏性分析：对参数 k

总之，只要 $k < 0.2$ 或者至少有一个 $1:5$ 的修正因子，这个方法就能够成功地调节速度。



4. 相图

在 5.1 节我们引入了特征值检验考察连续时间动态系统的稳定性。这个检验基于在一个孤立的平衡点的邻域内的线性逼近的想法。本节我们将说明这个简单的想法如何用于获得一幅描述动态系统在平衡点附近的性质的图像。然后该信息与向量场的勾画一起运用，从而获得在整个状态空间上动态行为的图形描述，称此图为相图。相图在非线性动态系统分析中是重要的，因为在多数情况下不可能获得精确的解析解。在这一节的结尾我们将对离散时间动态系统类似技巧给出简短讨论，这些技巧同样是基于线性逼近的想法。



4. 相图

例 5.3 考虑图 5-6 中的电路图。电路由一个电容，一个电阻和一个电感器构成一个简单闭路。电路中每个元件的作用由在这个回路中的电流和电压之间的关系表示。一个理想的物理模型给出这个关系

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C (\text{电容})$$

$$v_R = f(i_R) (\text{电阻})$$

$$L \frac{di_L}{dt} = v_L (\text{电感})$$

其中 v_C 表示电容上的电压， i_R 表示经过电阻的电流，等等。称函数 $f(x)$ 为电阻的 v - i 特征。在古典的 RLC 电路理论中我们假设 $f(x) = Rx$ ，其中 R 表示电阻。基尔霍夫电流律说明进入一个节点的电流之和等于流出电流之和。基尔霍夫电压律说明闭路上所有电压差之和为零。对情形 $L=1$ ， $C=1/3$ 和 $f(x) = x^3 + 4x$ 确定这个电路随时间变化的行为。

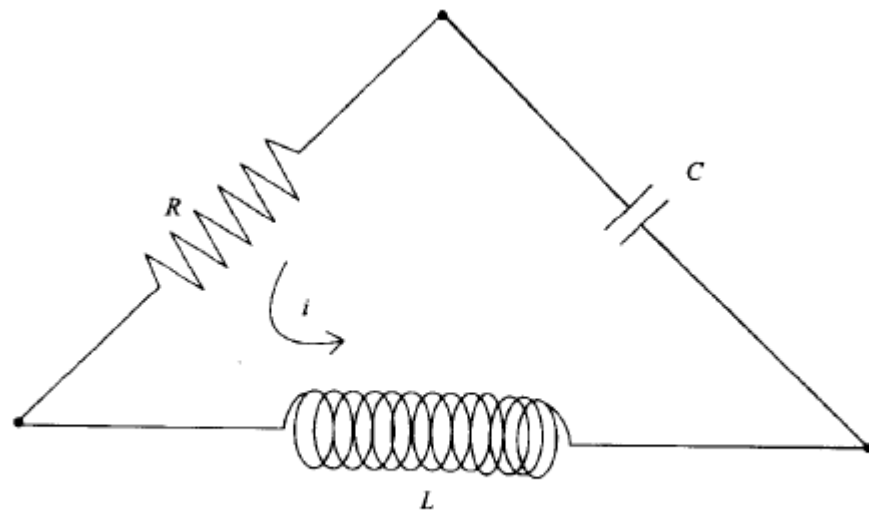


图 5-6 例题 5.3 的 RLC 电路图



4. 相图

第一步：提出问题

变量：

v_C = 电容上的电压

i_C = 过电容的电流

v_R = 电阻上的电压

i_R = 过电阻的电流

v_L = 电感器上的电压

i_L = 过电感器的电流

假设：

$$Cdv_C/dt = i_C$$

$$v_R = f(i_R)$$

$$Ldi_L/dt = v_L$$

$$i_C = i_R = i_L$$

$$v_C + v_R + v_L = 0$$

$$L = 1$$

$$C = 1/3$$

$$f(x) = x^3 + 4x$$

目标：确定六个变量随时间变化的性质

图 5-7 RLC 电路问题的第一步



4. 相图

第二步：选择模型

运用连续时间动态系统为此问题建模，并对其通过勾画完整的相图进行分析。

设我们有一个动态系统 $x' = F(x)$ 其中 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 且 F 在平衡点 x_0 的邻域内有一阶连续导数。设 A 是一阶偏导数矩阵在平衡点 x_0 的值就像(1)式所定义的那样。前面我们已经提到，当 x 在 x_0 附近时系统 $x' = F(x)$ 的行为与线性系统 $x' = A(x - x_0)$ 相似。现在我们将更具体地说明。

一个连续时间动态系统的相图就是一个呈现了代表性地选择的解曲线的状态空间草图。对线性系统不难画出其相图(至少在 \mathbb{R}^2 上)，因为对线性微分方程组我们总能得到其解的表达式。因此我们只需要对几个初始条件画出解曲线，从而得到相图。我们建议读者参考任何一本微分方程的教科书以详细了解如何求解线性微分方程。对非线性系统我们可以应用线性逼近的方法在孤立的平衡点邻域内画出一个近似的相图。

同胚是一个具有连续逆映射的连续函数。同胚的概念必须与形状及其一般性质联系起来理解。例如考虑平面内的一个圆。这个圆在同胚映射

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

下的像可以是另一个圆，或椭圆，或甚至是一个方形或一个三角形。但它不会是一条线段。那会破坏连续性。它也不会是一个形如数字 8 的图像，因为那样会破坏 G 有逆映射的性质(它必须是一一对应的)。已有定理说明如果 A 的特征值的实部都不为零，则存在一个同胚 G ，它把系统 $x' = Ax$ 的相图映射为 $x' = F(x)$ 的相图，使得 $G(0) = x_0$ (参见 [Hirsch 和 Smale, 1974], p. 314)。这个定理指出，除了某些扭曲外， $x' = F(x)$ 在 x_0 附近的相图看起来像线性系统的相图。就好像我们在一张橡皮的纸上画线性系统的相图，我们可以任意地拉伸，但不能扯破。这是一个非常强的结果。它意味着，仅通过分析线性逼近，我们可以得到一个非线性动态系统在孤立的平衡态附近的行为的真实的图像，(适于几乎所有的实际目的)。为了完成在状态空间其他部分的相图，我们要将已经知道的关于解在平衡态附近的性质与向量场草图所包含的信息结合起来。



4. 相图

第三步：推导模型

第三步是构造模型. 从考虑状态空间开始. 开始有 6 个状态变量, 我们可以利用基尔霍夫定律将自由度的数目 (独立状态变量的个数) 从六个减到两个. 设 $x_1 = i_R$, 注意到同样有 $x_1 = i_L = i_C$. 设 $x_2 = v_C$ 则我们得到

$$\begin{aligned}\frac{x_2'}{3} &= x_1 \\ v_R &= x_1^3 + 4x_1 \\ x_1' &= v_L \\ x_2 + v_R + v_L &= 0.\end{aligned}$$

代入得到

$$\begin{aligned}\frac{x_2'}{3} &= x_1 \\ x_2 + x_1^3 + 4x_1 + x_1' &= 0,\end{aligned}$$

重新排列得到

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_1^3 - 4x_1 - x_2 \\ x_2' &= 3x_1.\end{aligned}\tag{15}$$

现在如果我们设 $x = (x_1, x_2)$, 则 (15) 式可以写成形式 $x' = F(x)$, 其中 $F = (f_1, f_2)$ 且

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2) &= -x_1^3 - 4x_1 - x_2 \\ f_2(x_1, x_2) &= 3x_1.\end{aligned}\tag{16}$$



4. 相图

第四步：求解模型

单的。速度向量在曲线 $x = x_1$ 上是水平的，这里 $x_2' = 0$ ，而在曲线 $x_2 = -x_1^3 - 4x_1$ 上是垂直的，这里 $x_1' = 0$ 。在两条曲线的交点 $(0, 0)$ 是平衡点。由向量场难以断定这个平衡点是否稳定。为了获得更多的信息，我们将分析在平衡点 $(0, 0)$ 附近，性质接近(15)的线性系统。

根据(16)式求偏导数，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= -3x_1^2 - 4 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 3 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

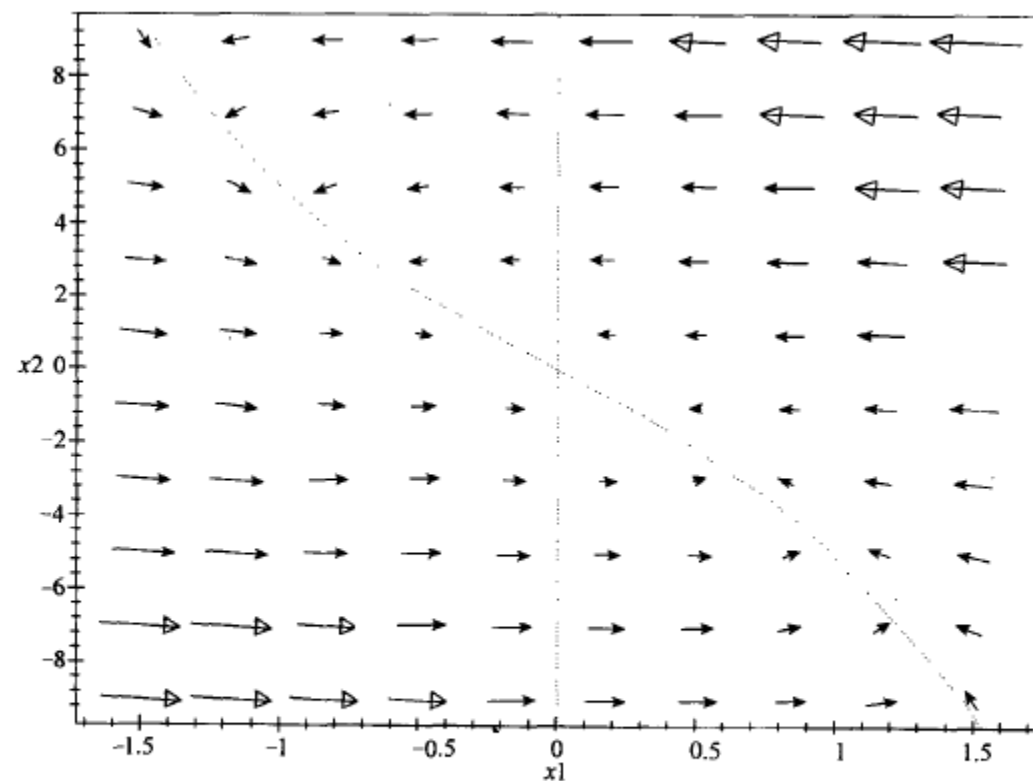


图 5-8 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了例 5.3RLC 电路问题的向量场

$$f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 - 4x_1 - x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = 3x_1$$

4. 相图

第四步：求解模型

```

##### Code for fig5.8 #####
clear all, clc
M = 10; % grid number
syms x1 x2; % The populations of Blue Wales and Krill
dx1 = -x1^3-4*x1-x2; % x1-component
dx2 = 3*x1+0*x2;% x2-component
x1min = -2; x1max =2; % domain specification
x2min = -10; x2max = 10;
[X1, X2] = meshgrid(x1min:(x1max - x1min) / M:x1max, x2min:(x2max - x2min) / M:x2max);
vdx1 = inline(dx1);
vdx2 = inline(dx2);
dX1 = vdx1(X1, X2);% x1-component
dX2 = vdx2(X1);% x2-component
quiver(X1, X2, dX1, dX2,0.2);% matlab routine
title('Figure5.8');
hold on
xlabel('x1');
ylabel('x2');
ezplot(vdx1,[x1min x1max x2min x2max]);
hold on
plot([0 0], [x2min x2max], '-');

```

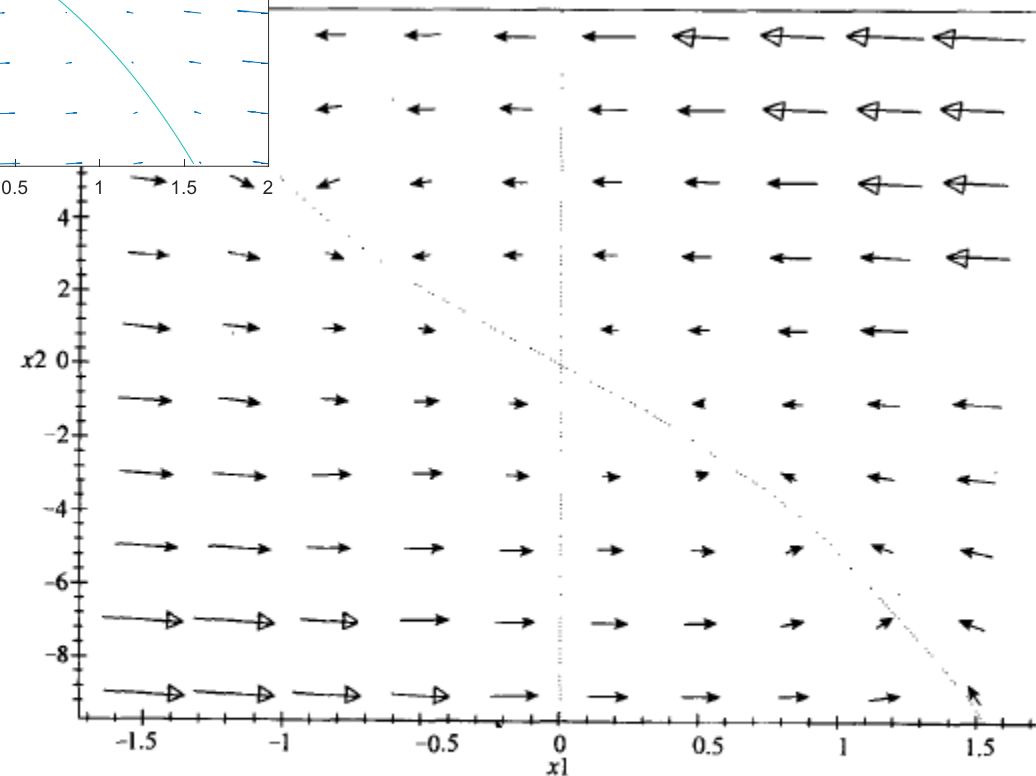
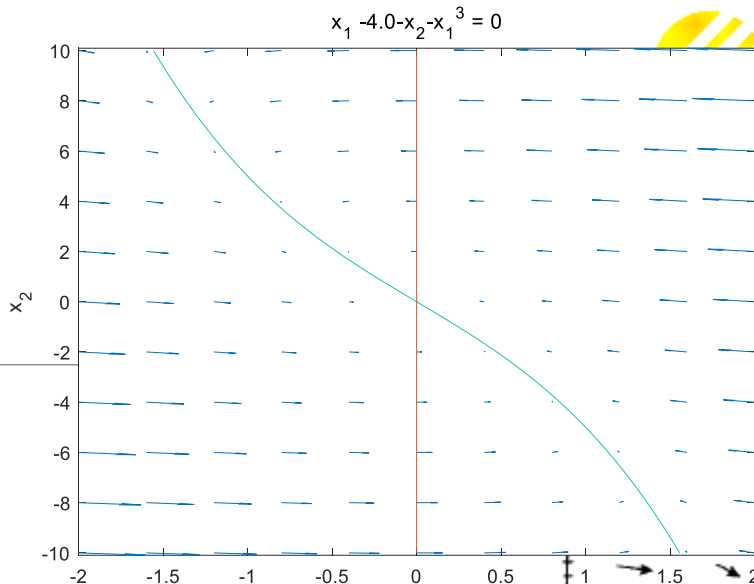


图 5-8 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了例 5.3 RLC 电路问题的向量场

$$f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 - 4x_1 - x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = 3x_1$$



4. 相图

第四步：求解模型

计算偏导数(17)在平衡点(0, 0)的值，并将其代回(1)式，我们得到

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

这个 2×2 矩阵的特征值是方程

$$\begin{vmatrix} \lambda + 4 & 1 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

的根。计算行列式，我们得到方程

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,$$

于是有

$$\lambda = -3, -1.$$

因为两个特征值都是负的，所以平衡态是稳定的。

为获得更多的信息我们将解线性系统 $x' = Ax$ 。此时有

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

利用特征值和特征向量解此方程。我们已经求得特征值 $\lambda = -3, -1$ 。为了求相应于特征值 λ 的特征向量我们必须求方程

$$\begin{pmatrix} \lambda + 4 & 1 \\ -3 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

的非零解。对 $\lambda = -3$ 我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由此得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

是线性系统(18)的一个解。对 $\lambda = -1$ 我们有

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由此得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

是线性系统(18)的另一个解。则(18)的一般解可以写成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$



4. 相图

第四步：求解模型

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

其中 c_1 和 c_2 是任意实常数。图 5-9 显示了线性系统(18)的相图。这个图通过对选择的几对常数值 c_1, c_2 画解曲线(19)而获得。例如，当 $c_1=1$ 和 $c_2=1$ 时，画出

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -e^{-3t} - e^{-t} \\ x_2(t) &= e^{-3t} + 3e^{-t}. \end{aligned}$$

的图。我们还附加上一个线性向量场的图以便确定解曲线的方向。画一个相图时必须用箭头标明流的方向。

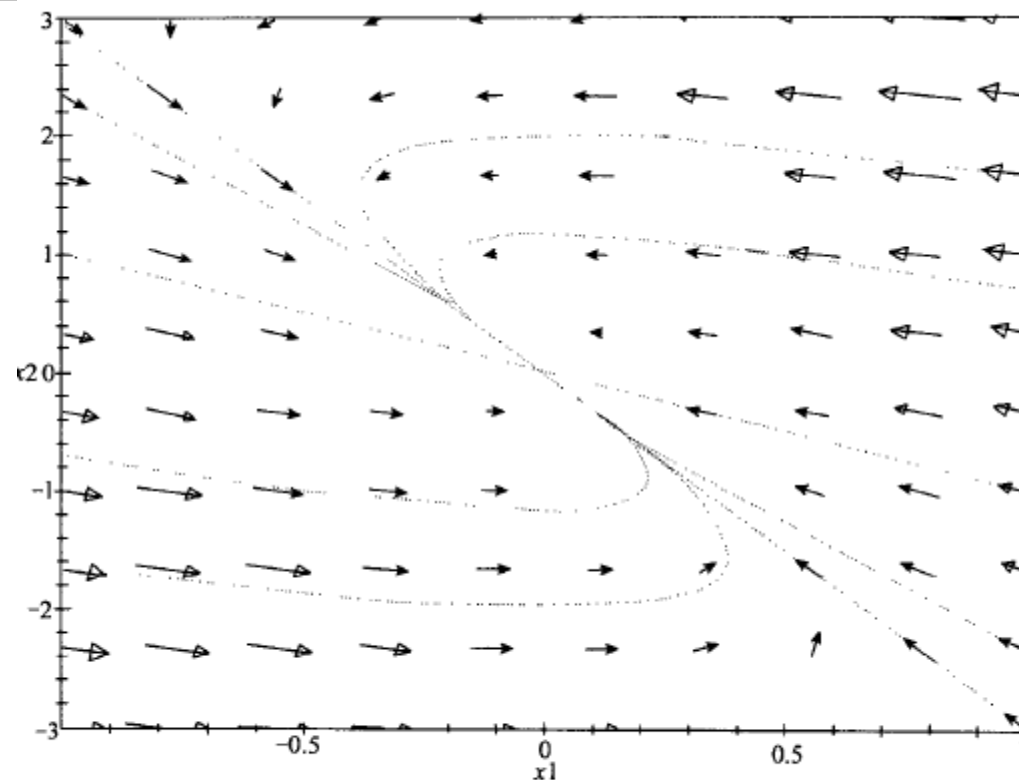
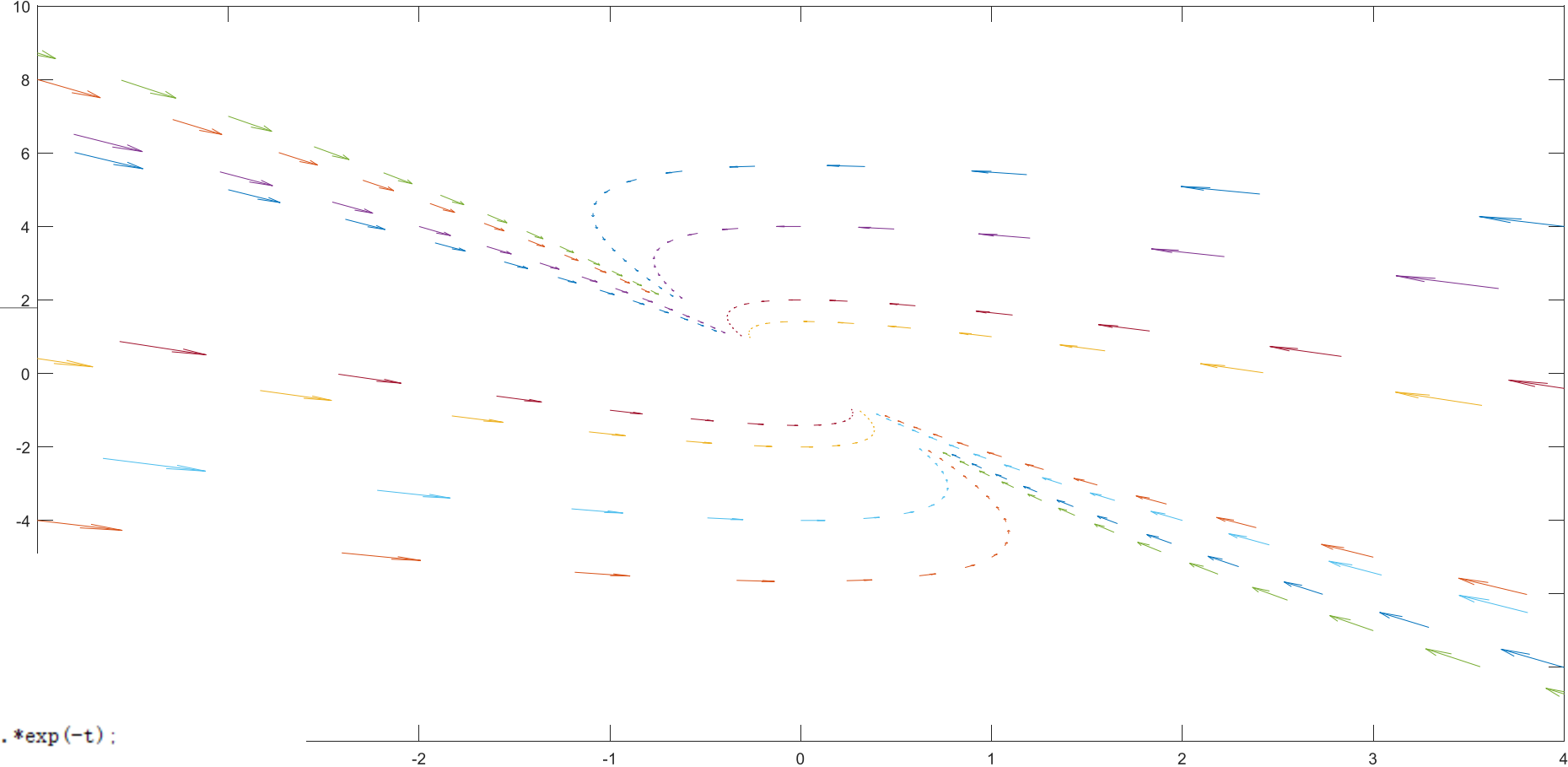


图 5-9 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了对例 5.3 RLC 电路问题在 $(0, 0)$ 附近的相图的线性逼近

4. 相图



```
clear; clc
syms t;
%[C_1,C_2]=meshgrid(linspace(-5,5,10));
for c1=[-2, -1, 1,2]
    for c2=[-2, -1, 1,2]
        x=c1*[-1,1]'.*exp(-3*t)+c2*[-1,3]'.*exp(-t);
        dx=diff(x,t);
        tt=-1:0.1:1;
        vx=inline(x);
        vdx=inline(dx);
        val_x=vx(tt);
        val_dx=vdx(tt);
        quiver(val_x(1,:),val_x(2,:),val_dx(1,:),val_dx(2,:),0.5);
        hold on
    end
end
```

4. 相图

第四步：求解模型

图 5-10 给出了原非线性动态系统(15)的完整的相图。这个图的获得是通过综合图 5-8 和 5-9 的信息，并且利用了非线性系统(15)的相图与线性系统(18)的相图同胚的事实。在这个例子中线性的和非线性的系统之间没有太多本质上的差异。

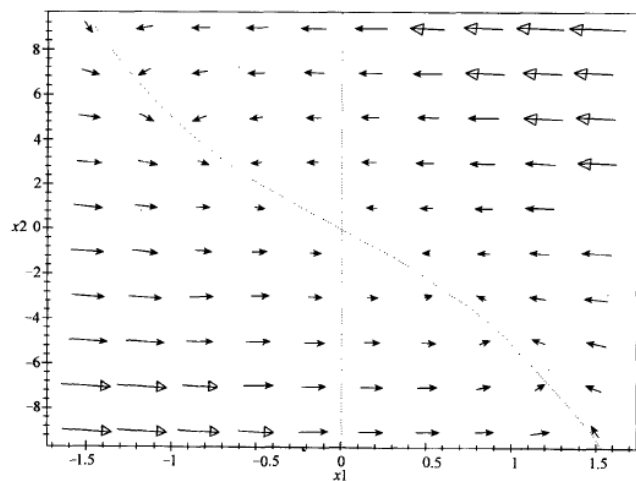


图 5-8 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了例 5.3RLC 电路问题的向量场
 $f_1(x_1, x_2) = -x_1^2 - 4x_1 - x_2$
 $f_2(x_1, x_2) = 3x_1$

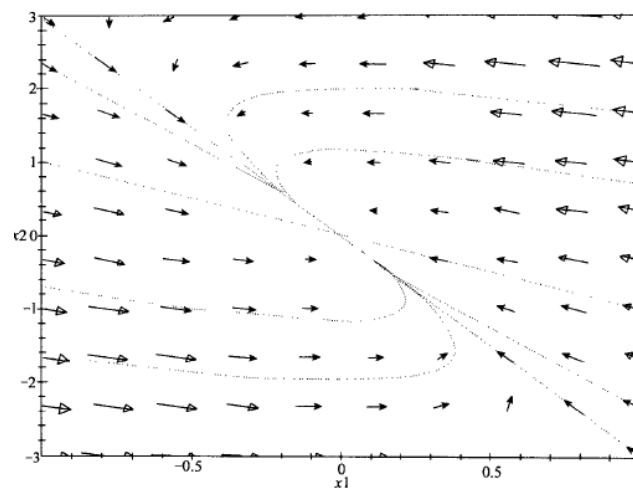


图 5-9 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了对例 5.3RLC 电路问题在 $(0, 0)$ 附近的相图的线性逼近

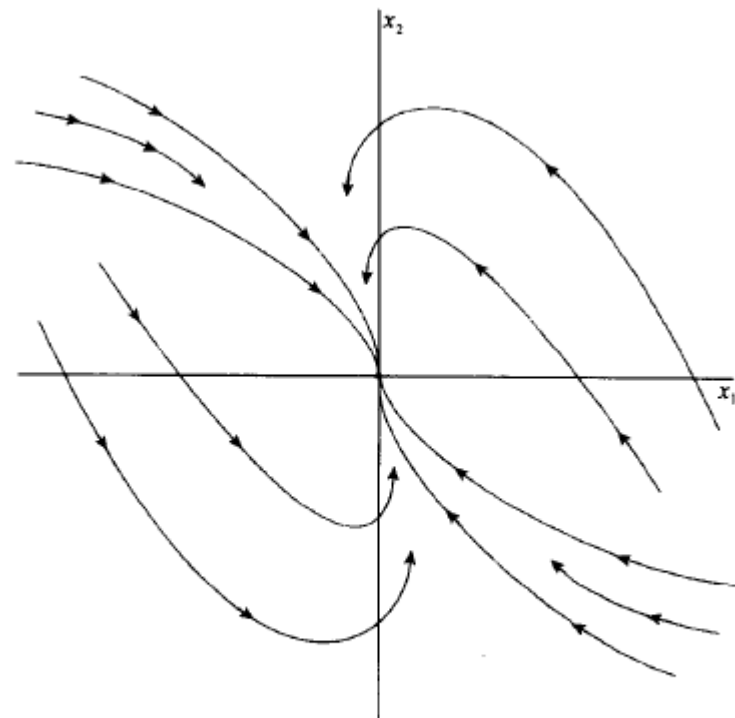


图 5-10 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了例 5.3RLC 电路问题的完整相图



4. 相图

第五步是回答问题。问题是描述 RLC 电路的行为。整体的性质可以用两个量描述：通过电阻的电流和电容上的电压降。不论电路的初始状态如何，这两个量最终将趋于零。进一步，最终或者电压是正的且电流是负的，或者反之。电流和电压随时间变化的完整的描述见图 5-10，其中 x_1 表示电流， x_2 表示电压。其他感兴趣的变量的性质可以由这两个变量表示。（图 5-7 给出了详细的关系。）例如， x_1 实际上表示了这个回路上每个分支通过的电流。

4. 相图

例 5.3 考虑图 5-6 中的电路图。电路由一个电容，一个电阻和一个电感器构成一个简单闭路。电路中每个元件的作用由在这个回路中的电流和电压之间的关系表示。一个理想的物理模型给出这个关系

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C (\text{电容})$$

$$v_R = f(i_R) (\text{电阻})$$

$$L \frac{di_L}{dt} = v_L (\text{电感})$$

其中 v_C 表示电容上的电压， i_R 表示经过电阻的电流，等等。称函数 $f(x)$ 为电阻的 $v-i$ 特征。在古典的 RLC 电路理论中我们假设 $f(x) = Rx$ ，其中 R 表示电阻。基尔霍夫电流律说明进入一个节点的电流之和等于流出电流之和。基尔霍夫电压律说明闭路上所有电压差之和为零。对情形 $L=1$ ， $C=1/3$ 和 $f(x) = x^3 + 4x$ 确定这个电路随时间变化的行为。

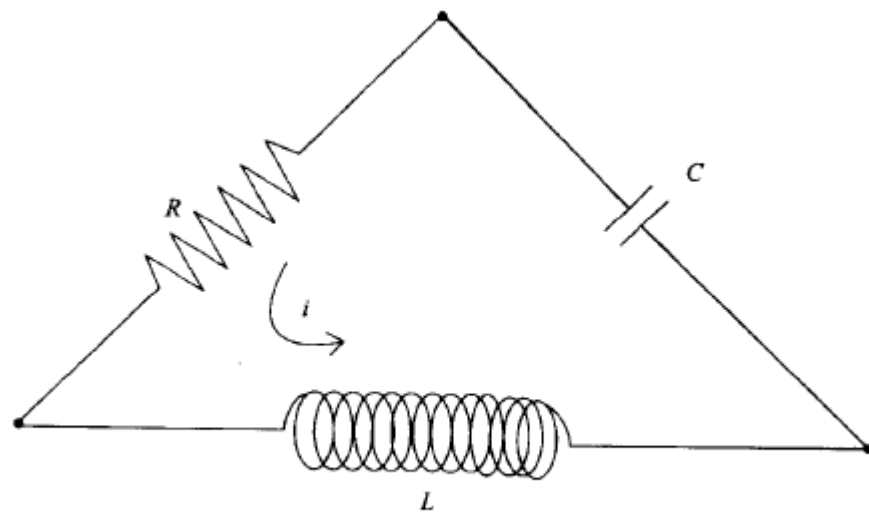


图 5-6 例题 5.3 的 RLC 电路图

例 5.4 考虑非线性 RLC 电路， $L=1$ ， $C=1$ 且 $v-i$ 特征 $f(x) = x^3 - x$ 。确定这个电路随时间变化的行为。

4. 相图

第一步：提出问题

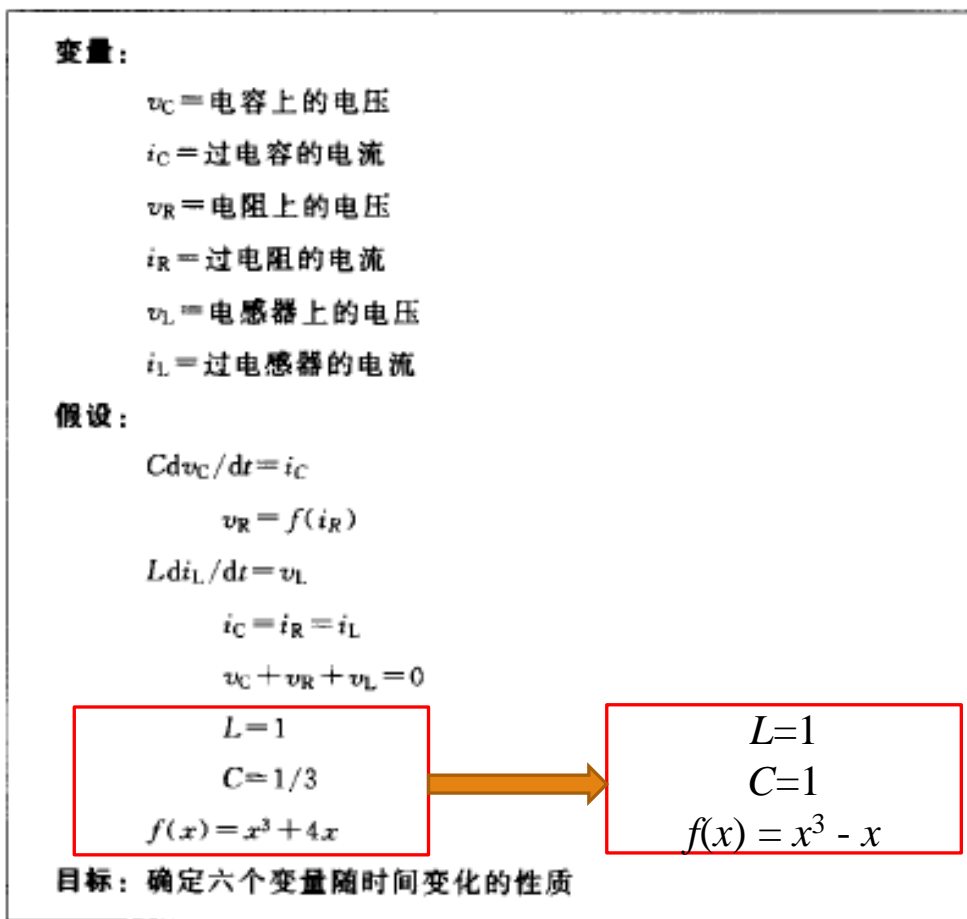


图 5-7 RLC 电路问题的第一步

4. 相图

第二步：选择模型

相图分析



4. 相图

第三步：推导模型

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= -x_1^3 - 4x_1 - x_2 \\ f_2(x_1, x_2) &= 3x_1. \end{aligned}$$



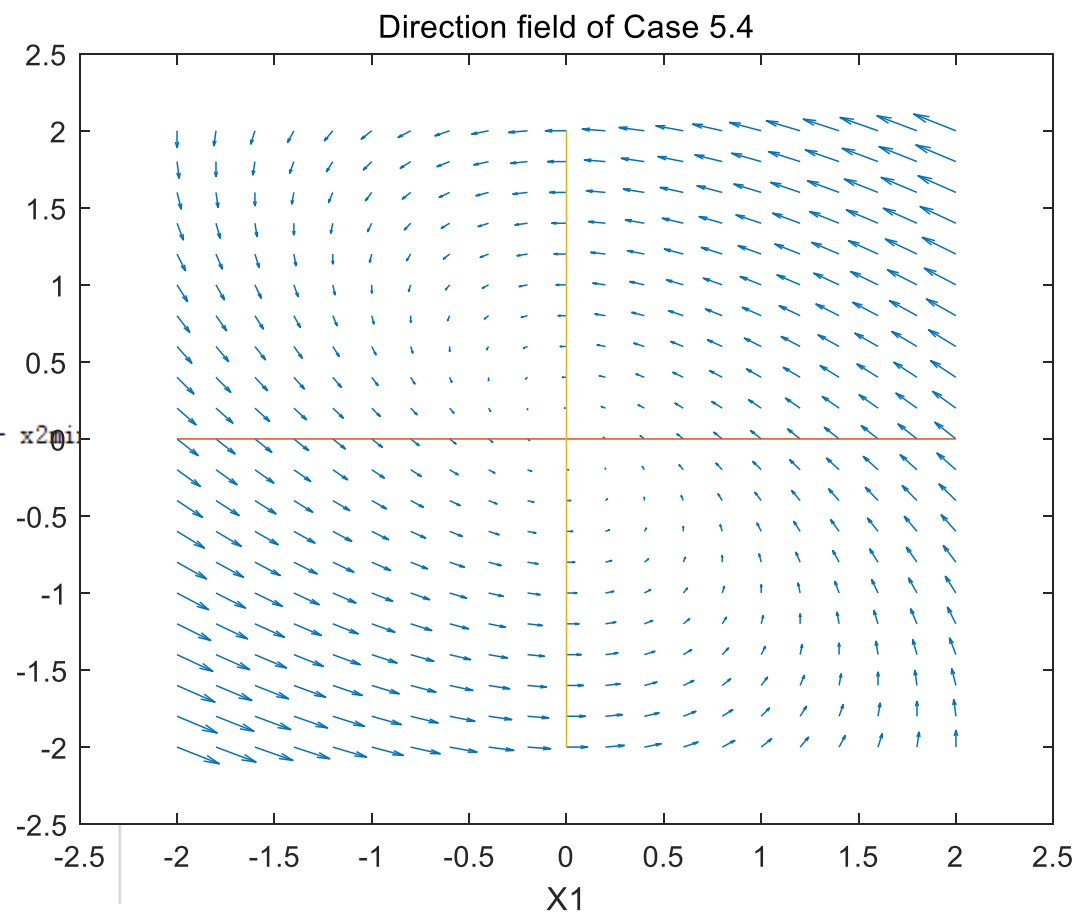
$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - x_1^3 - x_2 \\ x'_2 &= x_1. \end{aligned}$$

4. 相图

第四步：求解模型

唯一的平衡点是 $(0, 0)$

```
clear all, close all, clc
M = 20; % number of sample points
lamda = 5;
x1min = -2; x1max = 2; % domain specification
x2min = -2; x2max = 2;
[X1, X2] = meshgrid(x1min:(x1max - x1min) / M:x1max, x2min:(x2max - x2min) / M:x2max);
dX1 = -X1-X1^3-X2;% x1-component
dX2 = X1;% x2-component
quiver(X1, X2, dX1, dX2);% matlab routine
hold on
plot([x1min,x1max],[0,0]);
hold on
plot([0,0],[x2min,x2max]);
title('Direction field of Case 5.4');
hold on
xlabel('X1');
ylabel('X2');
```





4. 相图

第四步：求解模型

偏导数矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 3x_1^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算在点 $x_1=0$, $x_2=0$ 处的值, 得线性系统

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

它逼近非线性系统在原点附近的特性. 为求特征值我们必须求解

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 0 \end{vmatrix} = 0$$

或者 $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. 特征值为

$$\lambda = 1/2 \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

因为特征值的实部是正的, 原点是不稳定的平衡态.

4. 相图

第四步：求解模型

求解所对应的特征向量

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eigenvectors →

Γ1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{I} \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{I} \sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{I} \sqrt{3} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{I} \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 相图

第四步：求解模型

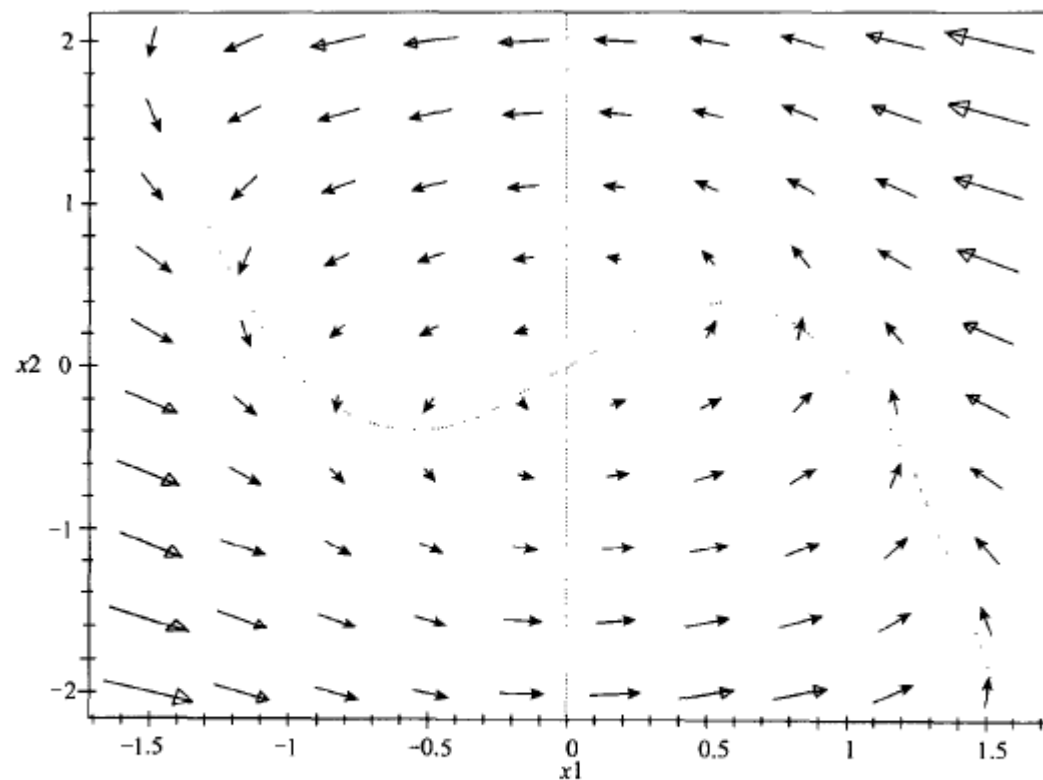


图 5-11 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了例题 5.4 的 RLC 电路问题的向量场

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_1^3 - x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1$$

4. 相图

第四步：求解模型

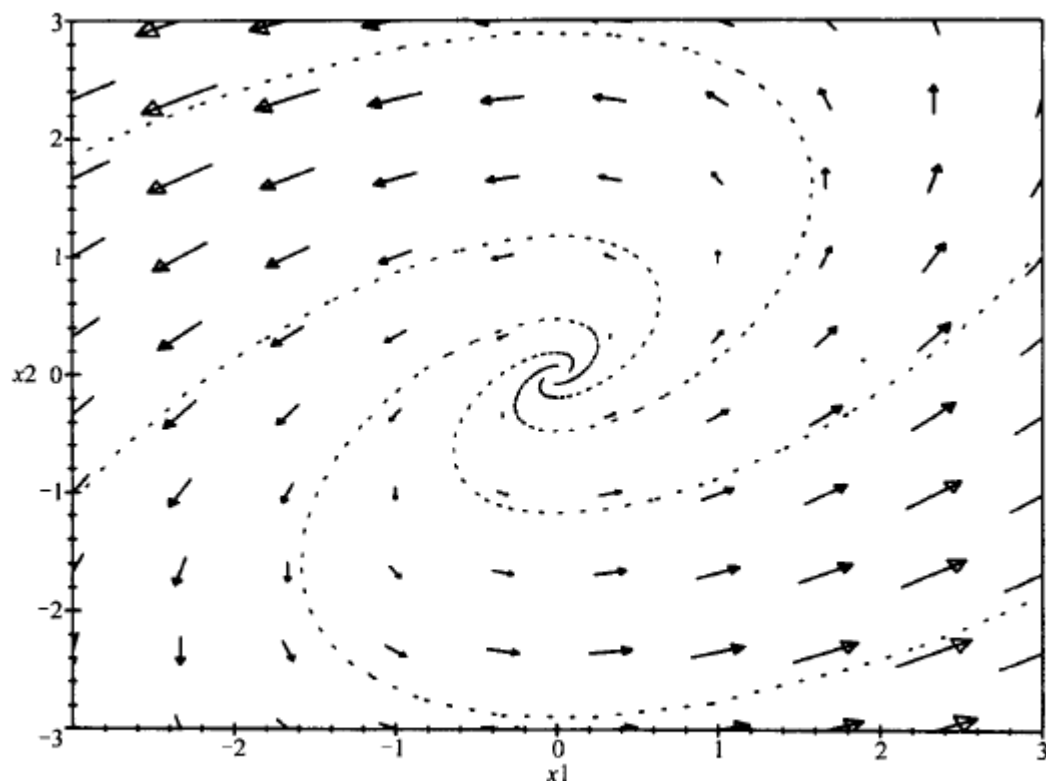


图 5-12 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了对例题 5.4 的 RLC 电路问题在 $(0, 0)$ 附近的相图的线性逼近

的特征向量，求解

$$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 + i\sqrt{3}/2 & 1 \\ -1 & 1/2 + i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得到

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

于是我们求得复数解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{(1/2 + i\sqrt{3}/2)t}.$$

取实部和虚部得到两个线性无关的实值解 $u = (x_1, x_2)$ ，其中

$$x_1(t) = 2e^{t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x_2(t) = e^{t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}e^{t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$$

且 $v = (x_1, x_2)$ 其中

$$x_1(t) = 2e^{t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x_2(t) = e^{t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3}e^{t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right).$$

通解为 $c_1 u(t) + c_2 v(t)$ 。这个线性问题的相图显示在图 5-12。这幅图画出了相应于几个选择不同的参数值 c_1 和 c_2 的解。我们附上向量场的图以显示流的方向。

4. 相图

第四步. 求解模型

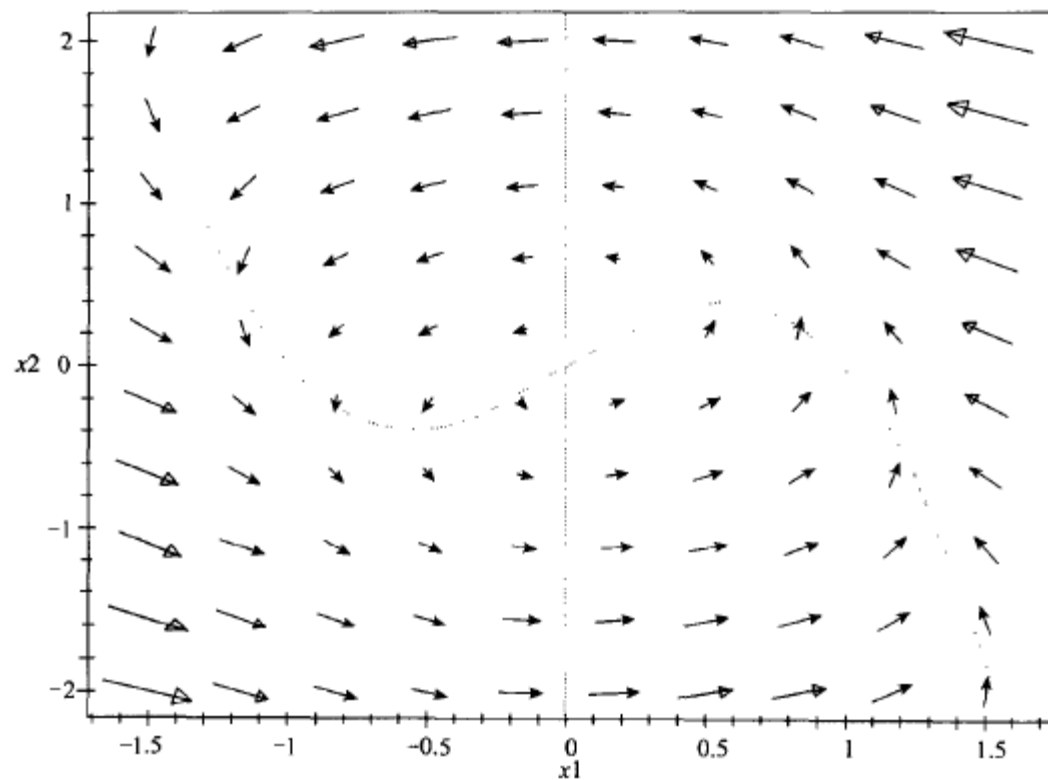


图 5-11 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了例题 5.4 的 RLC 电路问题的向量场

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_1^3 - x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1$$

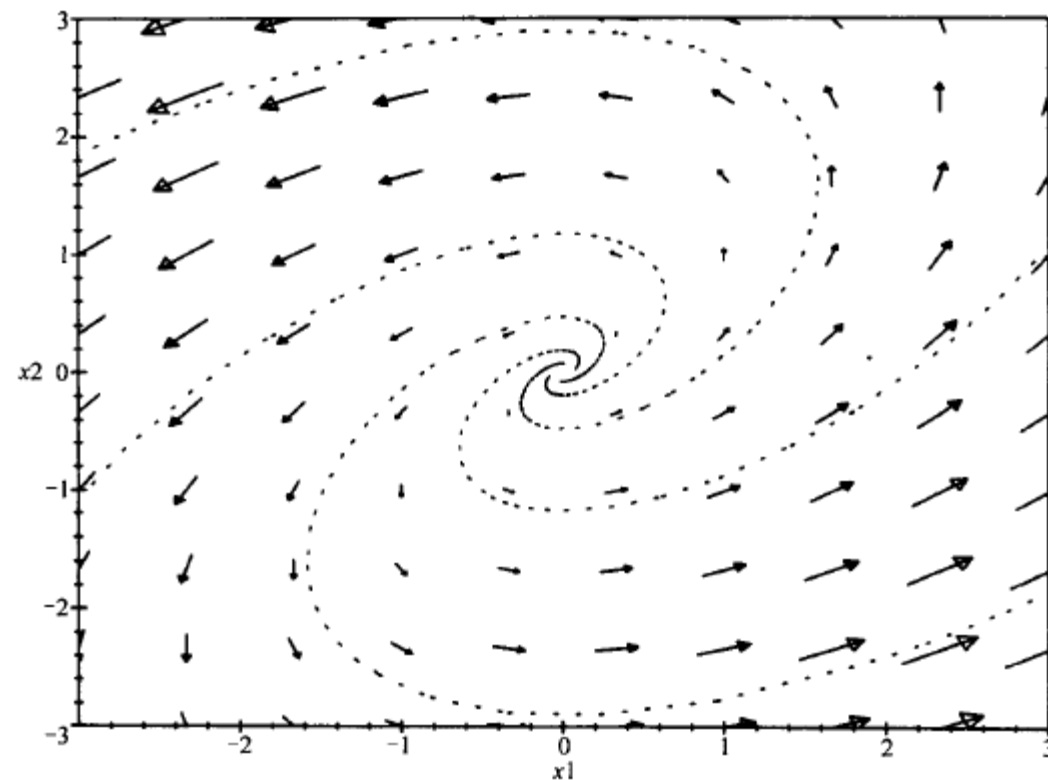


图 5-12 电压 x_2 关于电流 x_1 变化的图显示了对例题 5.4 的 RLC 电路问题在 $(0, 0)$ 附近的相图的线性逼近

例 4.2 蓝鲸和长须鲸是两个生活在同一海域的相似的种群，因此认为它们之间存在竞争。蓝鲸的内禀增长率每年估计为 5%，长须鲸为每年 8%。环境承载力（环境能够支持的鲸鱼的最大数量）估计蓝鲸为 150 000 条，长须鲸为 400 000 条。鲸鱼竞争的程度是未知的。在过去的 100 年剧烈的捕捞已经使鲸鱼数量减少，蓝鲸大约 5 000 条，长须鲸大约 70 000 条。蓝鲸是否会灭绝？

重新考虑第 4 章习题 4.

- (a) 画出这个模型的向量场。确定状态空间中每个平衡点的位置。从这个向量场你是否能指出哪些平衡点是稳定的。
- (b) 应用特征值方法检验状态空间中每个平衡点的稳定性。
- (c) 对每个平衡点确定在这个平衡点邻域内逼近原动态系统行为的线性系统，然后画出线性系统的相图。
- (d) 利用你刚从 (a) 和 (c) 获得的结果，画出这个系统的完整的相图。
- (e) 目前估计有 5 000 蓝鲸和 70 000 长须鲸，这个模型对这两个生物种的未来的预言是什么？

蓝鲸和长须鲸是两个生活在同一海域的相似种群，因此认为它们之间存在竞争。蓝鲸的内禀增长率估计为每年5%，长须鲸的内禀增长率估计为每年8%。在例4.2中我们应用了种群增长的Logistic模型，即在种群之间竞争的条件下种群增长率为 $g(P) = rP(1-P/K)$ ，其中K为环境最大承载量。下面我们考虑较简单的增长模型，即线性增长， $g(P) = rP$ 。

- (a) 画出这个模型的向量场。确定状态空间中每个平衡点的位置。从这个向量场你是否能指出哪些平衡点是稳定的。
- (b) 应用特征值方法检验状态空间中每个平衡点的稳定性。