第四章　第一型曲线积分与曲面积分

本章讨论的两种积分是定积分与重积分的推广, 其差别仅仅在于: 在这里 "积分域" 分别是坐标系中的曲线段 (平面曲线或空间曲线) 及有界曲面; 被积函数是定义在相应 "积分域" 上的有界函数.

§1　第一型曲线积分

1.1　第一型曲线积分的概念与性质

引例　设有一条物质曲线, 在平面直角坐标系 Oxy 中所占的位置是一段曲线弧 L, 它的端点是 A, B, 它的线密度为 $\rho(x,y)$, 其中 $\rho(x,y)$ 是定义在 L 上的非负连续函数, 求 L 的质量 m.

如果 $\rho(x,y)$ 等于常数, 即此曲线质量分布是均匀的, 则质量为

$$m=\rho(x,y)\cdot s,$$

其中 s 为曲线 L 的弧长. 但一般情况下 $\rho(x,y)$ 不是常数 (质量分布非均匀), 这时可以本着化整为零, 在局部以不变代变的思想, 利用质量的可加性, 以极限为手段来计算 m. 具体方法如下. 用 L 上的点 $A=M_0,M_1,\cdots,M_{i-1},M_i,\cdots,M_n=B$ 把 L 分成 n 个小弧段, 记第 i 个小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的长度为 Δs_i, 质量为 $\Delta m_i(i=1,2,\cdots,n)$. 当 Δs_i 充分小时可以将弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的质量分布看成是均匀的, 任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\widehat{M_{i-1}M_i}$ (图 4.1), 由 $\rho(x,y)$ 的连续性,

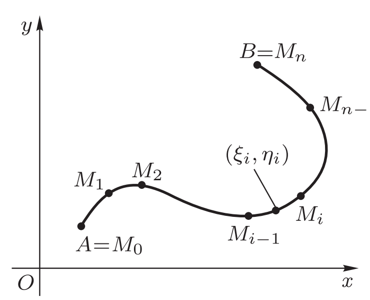

图 4.1

$$\Delta m_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i,$$

从而

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i,$$

易见当分割越细时, 近似程度越好. 于是令 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$, 当 $d\to 0$ 时, 有

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

根据引例中的具体问题, 我们抽象出第一型曲线积分的概念.

定义 1.1　设 $f(x,y)$ 是定义在 Oxy 面上的有界光滑曲线 L 上的有界函数, 其中 L 的两个端点为 A,B. 用 L 上 $n+1$ 个不同的点 $A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_{n-1},M_n=B$, 把 L 分成 n 个小弧段, 第 i 个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的长度记为 Δs_i, 任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}(i=1,2,\cdots,n)$, 作和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

记 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$, 如果极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上的**第一型曲线积分**, 记作

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s,$$

即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

并称 $f(x,y)$ 为**被积函数**, L 为**积分弧段** (或**积分曲线**), $\mathrm{d}s$ 为**弧长元素**.

第一型曲线积分有时也称为**第一类曲线积分**, **对弧长的曲线积分**或**数量值函数的曲线积分**.

由定义 1.1 知, 引例中的物质曲线的质量应为

$$m=\int_L\rho(x,y)\mathrm{d}s.$$

可以证明, 当 $f(x,y)\in C(L)$ 时, $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在, 其中 L 为有界光滑曲线, 或分段光滑曲线.

第一型曲线积分具有与定积分、重积分相类似的性质, 举例如下.

(1) 线性性质. $\forall k_1,k_2\in\mathbf{R}$, 有

$$\int_L [k_1f_1(x,y)+k_2f_2(x,y)]\,\mathrm{d}s=k_1\int_L f_1(x,y)\mathrm{d}s+k_2\int_L f_2(x,y)\mathrm{d}s.$$

如果 L 是分段光滑的, 则 L 上的第一型曲线积分可以利用下述性质 (2) 计算.

(2) 对积分曲线的可加性性质. 设积分曲线 L 由曲线 L_1 及 L_2 连接而成 (可记作 $L=L_1+L_2$), 则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

(3) 当 $f(x,y)\equiv 1$ 时, $\int_L \mathrm{d}s=s(L)$ (弧 L 的长度).

如果 L 是闭曲线, 即 L 的两个端点重合, 则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 经常记为 $\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$.

第一型曲线积分有明显的几何意义. 设有一张柱面, 它以 Oxy 面上的有界光滑曲线 L 为准线, 母线平行于 z 轴, 其高度为 $f(x,y),(x,y)\in L$, 如图 4.2 所示. 显然, 如果 L 是一条直线, 则此柱面的形状为曲边梯形. 因此我们可以用求曲边梯形面积的方法 (分割、替代、求和、取极限) 求出该柱面的面积为

$$A=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s.$$

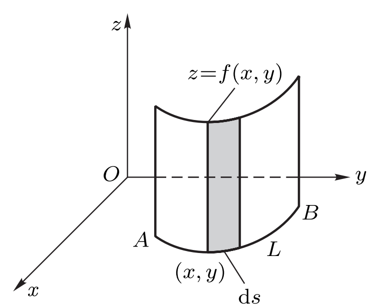

图 4.2

在定义 1.1 中, 如果 $\varGamma$ 是空间的光滑曲线, 被积函数 $f(x,y,z)$ 是定义在 $\varGamma$ 上的有界函数, 则可定义空间曲线 $\varGamma$ 上的第一型曲线积分为

$$\int_\varGamma f(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

1.2　第一型曲线积分的计算

假设 L 由参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出, 其中 $x(t),y(t)\in C^{(1)}[\alpha,\beta]$, 且 $x'^2+y'^2\neq 0$, 即 L 是光滑曲线, $f(x,y)\in C(L)$.

$f(x,y)$ 在 L 上的连续性保证了第一型曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在. 在上述假设下, 我们推导计算 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 的公式.

在区间 $[\alpha,\beta]$ 中插入分点

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=\beta,$$

并记 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. 相应于这种对 $[\alpha,\beta]$ 的分割, 得到 L 的一种分割. 设 $[t_{i-1},t_i]$ 对应的弧段为 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, 其弧长为 $\Delta s_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 则由弧长公式及积分中值定理知

$$\Delta s_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=\sqrt{x'^2(\tau_i)+y'^2(\tau_i)}\Delta t_i,$$

其中 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$. 取 $\xi_i=x(\tau_i),\eta_i=y(\tau_i)$, 于是 $(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$. 由于 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在, 故对以上的特殊分割及取点应有

$$\begin{aligned}\int_L f(x,y)\mathrm{d}s&=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\\&=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n f(x(\tau_i),y(\tau_i))\sqrt{x'^2(\tau_i)+y'^2(\tau_i)}\Delta t_i.\end{aligned}$$

显然, 最后一式的右端是连续函数

$$f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的特殊分割、取点的积分和的极限, 而连续函数一定是可积分的, 故此积分和的极限应是定积分

$$\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

于是我们便得到了计算第一型曲线积分的公式

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

公式 (1) 可以这样记忆: 将积分曲线方程中的 $x=x(t),y=y(t)$ 及弧微分公式 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$ 代入 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 的被积表达式, 然后从 α 到 β 作

定积分, 这里必须注意化第一型曲线积分为定积分时, 积分的下限 α 一定小于上限 β.

如果 L 的方程为 $y=y(x), a\leqslant x\leqslant b$, 我们可以把这种情形看成参数方程:$x=x, y=y(x), a\leqslant x\leqslant b$, 其中 x 是参数, 则公式 (1) 成为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

类似地, 如果 L 的方程为 $x=x(y), c\leqslant y\leqslant d$, 则有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2(y)}\mathrm{d}y.$$

与此相似, 在计算空间第一型曲线积分时, 若空间曲线 $\varGamma$ 的方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta), \\ z=z(t) \end{cases}$$

其中 $x(t),y(t),z(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, 且 $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\neq 0$, 则有

$$\int_\varGamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

例 1.1 计算 $\displaystyle\int_L y\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}s$, 其中 L 为曲线 $x=a\ln(1+t^2), y=2a\arctan t-at$ 上对应于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的一段弧 $(a\neq 0)$.

解 由于

$$x'(t)=\frac{2at}{1+t^2},\quad y'(t)=\frac{2a}{1+t^2}-a=\frac{a-at^2}{1+t^2},$$
$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=\sqrt{a^2}\mathrm{d}t=|a|\mathrm{d}t,$$

于是

$$\begin{aligned}\int_L y\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\mathrm{d}s&=\int_0^1\frac{2a\arctan t-at}{1+t^2}|a|\mathrm{d}t\\&=a|a|\left[(\arctan t)^2-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1\\&=a|a|\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2\right).\end{aligned}$$

例 1.2 计算 $\displaystyle\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$.

解　L 的方程可以表示为

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

如图 4.3 所示, 其参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos\theta, \\ y=\dfrac{a}{2}\sin\theta, \end{cases} \qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

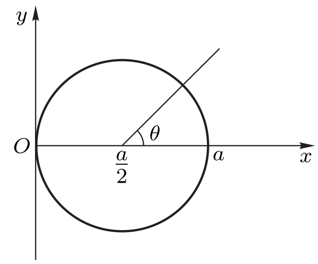

图 4.3

由于

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{a^2}{4}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\mathrm{d}\theta=\frac{a}{2}\mathrm{d}\theta.$$

于是

$$\begin{aligned}\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\cos\theta)}\frac{a}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta-\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta\right]=2a^2.\end{aligned}$$

注意, 本例中参数 θ 如图 4.3 所示, 如果 θ 为极角, 则 L 的参数方程如下

$$\begin{cases} x=a\cos^2\theta, \\ y=a\cos\theta\sin\theta \end{cases} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)^*.$$

建议读者用此方程将例 1.2 再作一遍.

例 1.3　计算 $\displaystyle\int_\Gamma\sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 与平面 $x=y$ 的交线, $z\geqslant 0$ 部分.

解　Γ 是平面 $y=x$ 上的半圆弧, 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 消去 x, 得到 Γ 在 Oyz 面的投影曲线方程

$$\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$$

---

*按极角规定, 这里 θ 的变化范围应是 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 及 $\dfrac{3}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, 为了表达方便, 也可以表为 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

由此可知, 空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \\ y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \\ z = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

由于

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t = a\mathrm{d}t,$$

于是

$$\int_\Gamma \sqrt{2y^2 + z^2}\mathrm{d}s = \int_0^\pi a \cdot a\mathrm{d}t = \pi a^2.$$

例 1.4 求柱面

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

介于平面 $z = 0, z = y$ 之间且在 Oxy 平面之上部分 (图 4.4) 的面积.

解 此柱面是以 Oxy 面上曲线 L 为准线, 母线平行于 z 轴, 顶部曲线方程为此柱面与 $z = y$ 的交线, 其中 L 为 Oxy 面上的上半椭圆

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (y \geqslant 0),$$

其参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{5}\cos\theta, \\ y = 3\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

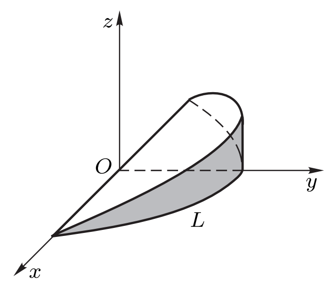

图 4.4

由第一型曲线积分的几何意义知, 所求面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_L y\mathrm{d}s = \int_0^\pi 3\sin\theta\sqrt{5\sin^2\theta + 9\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= -3\int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\theta + 5}\ \mathrm{d}\cos\theta = 6\int_0^1 \sqrt{4u^2 + 5}\ \mathrm{d}u \\ &= 9 + \frac{15}{4}\ln 5. \end{aligned}$$

习 题 4.1

(A)

1. 计算下列第一型曲线积分:

(1) $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$, 其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$, 直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

(2) $\int_L y^2 ds$, 其中 L 为摆线的一拱: $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

(3) $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds$, 其中 Γ 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$ 上相应于 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 的一段弧;

(4) $\int_L |y|ds$, 其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), a>0$.

(5) $\oint_\Gamma \dfrac{z^2}{\sqrt{2x^2+y^2}}ds$, 其中 Γ 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与平面 $z=y$ 的交线;

(6) $\oint_L (x+y)ds$, 其中 L 为以 $(0,0),(1,0)$ 和 $(0,1)$ 为顶点的三角形的周界;

(7) $\oint_\Gamma (z+y^2)ds$, 其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

2. 有一铁丝呈半圆形 $x=a\cos t, y=a\sin t \ (0 \leqslant t \leqslant \pi)$, 其上每一点的密度等于该点的纵坐标, 求铁丝的质量.

3. 计算圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于 Oxy 平面及柱面 $z=R+\dfrac{x^2}{R}$ 之间的面积, 其中 $R>0$.

(B)

1. 计算 $\int_\Gamma x ds$, 其中 Γ 为曲线 $x^2+y^2+z^2=1, y=x \ (z \geqslant 0)$ 上从 $A\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$ 到 $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的一段.

2. 计算平面 $x+y=1$ 上被坐标面与曲面 $z=xy$ 截下的在第 I 卦限部分的面积.

3. 计算 $\oint_\Gamma (x^2+y^2+2x-z-4)ds$, 其中 Γ 为 $z=\sqrt{x^2+5y^2}$ 与 $z=1+2y$ 的交线.

4. 计算 $\oint_\Gamma (x^2+xy+y^2)ds$, 其中闭曲线 Γ 为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0 \end{cases} \text{(常数 } a>0\text{)}.$$

5. 计算 $\oint_{\Gamma}(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 它的周长为 a.

6. 计算 $\oint_{\Gamma}(\sqrt{2y^2+z^2}+y^2)\mathrm{d}s$, 其中闭曲线 Γ 为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x=y. \end{cases}$$

§2　第一型曲面积分

2.1　第一型曲面积分的概念与性质

引例　设某物质曲面, 它在空间直角坐标系中所占的位置是一块有界曲面 Σ, 其密度函数为 $\rho(x,y,z)$, $\rho(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的非负连续函数, 求 Σ 的质量 m.

求 m 的方法与上一节引例类似: 将 Σ 任意分割成 n 块小曲面 ΔS_i (ΔS_i 同时也表示该小曲面的面积), $\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$, 记 ΔS_i 的质量为 Δm_i, 有

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

于是

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

显然, 分割越细, 近似程度越好, 于是令 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$, 其中 d_i 是 ΔS_i 的直径, 当 $d\to 0$ 时,

$$m=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

根据引例中的具体问题, 我们抽象出第一型曲面积分的概念.

定义 2.1　设 $f(x,y,z)$ 是定义在有界光滑曲面 Σ 上的有界函数, 将 Σ 分割成 n 块小曲面 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$, 同时 ΔS_i 也表示第 i 块小曲面的面积, $\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$, 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 并作和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

记 $d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$, 其中 d_i 是 ΔS_i 的直径, 如果极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上的**第一型曲面积分**, 记作

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS,$$

即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i,$$

并称 $f(x,y,z)$ 为**被积函数**, Σ 为**积分曲面**, $\mathrm{d}S$ 为**面积元素**.

第一型曲面积分, 也称为**第一类曲面积分**, **对面积的曲面积分**或**数量值函数的曲面积分**.

由定义 2.1 知, 引例中的物质曲面的质量可以表示为

$$m = \iint\limits_{\Sigma} \rho(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

可以证明, 当 $f(x,y,z)\in C(\Sigma)$ 时, $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 存在, 其中 Σ 为有界光滑曲面, 或分块光滑曲面.

第一型曲面积分有与前面学过的积分类似的性质, 如线性性质、对积分曲面具有可加性等.

如果 Σ 是有界分片光滑闭曲面, 即存在空间有界闭区域 Ω, 使得 Σ 恰好是 Ω 的边界曲面, 此时曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 也可以写成 $\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

2.2　曲面面积的计算

在讨论第一型曲面积分的计算时, 我们先讨论一种简单情况, 即被积函数 $f(x,y,z)\equiv 1$, 由积分性质知

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S = S(\Sigma), \tag{2}$$

其中 $S(\Sigma)$ 是 Σ 的面积. 于是计算 $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S$ 只需求曲面 Σ 的面积.

设 Σ 是一块有界光滑曲面, 其方程为

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy},$$

其中 D_{xy} 为 Σ 在 Oxy 面上的投影域, $f(x,y) \in C^{(1)}(D_{xy})$.

用我们常用的方法: 将 D_{xy} 分割成 n 个小区域, 相应地, Σ 也分割成了 n 个小曲面, 且第 i 块小曲面 ΔS_i 以第 i 个小区域 $\Delta\sigma_i$ 为投影域, 同时也用相同的记号分别记它们的面积 $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 如图 4.5 所示. $\forall(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, 则相对应的第 i 块小曲面 ΔS_i 上的点为 $M_i(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$. 过 M_i 点的切平面记为 π_i, 在 π_i 上取与小曲面 ΔS_i 具有相同投影域 $\Delta\sigma_i$ 的小块切平面, 设其面积为 ΔA_i. 由于 Σ 光滑, 所以当 $\Delta\sigma_i$ 的直径很小时有 $\Delta S_i \approx \Delta A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 从而有

$$S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i,$$

而 π_i 的法向量 $\boldsymbol{n} = (-f_x(\xi_i, \eta_i), -f_y(\xi_i, \eta_i), 1)$, 显然 π_i 与 Oxy 面的夹角就是法

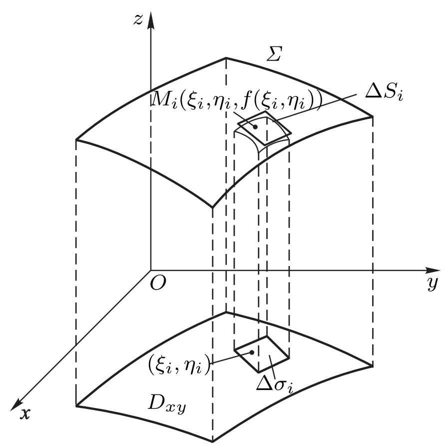

图 4.5

向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向单位向量 $\boldsymbol{k}$ 的夹角 γ_i. 于是 π_i 上小块切平面的面积 ΔA_i 与其投影域的面积 $\Delta\sigma_i$ 之间有关系 $\Delta\sigma_i = \Delta A_i \cos\gamma_i$. 我们已经知道

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)}},$$

于是

$$\Delta A_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i} = \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)}\,\Delta\sigma_i.$$

记 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$, 其中 d_i 为小区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径. 当 $d\to 0$ 时, 若极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

存在, 则将其定义为曲面 $\varSigma$ 的面积. 而在上述假设下

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x^2(\xi_i,\eta_i)+f_y^2(\xi_i,\eta_i)}\Delta\sigma_i. \tag{3}$$

其右端恰好是函数 $g(x,y)\equiv\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}$ 在区域 D_{xy} 上积分和的极限, 由于 $f(x,y)\in C^{(1)}(D_{xy})$, 所以 $g(x,y)\in C(D_{xy})$, 从而 $g(x,y)$ 在 D_{xy} 上可积, 即 (3) 式极限存在, 并且

$$S(\varSigma)=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4}$$

根据前面的分析, 比较 (2) 式与 (4) 式, 得到类似于弧长元素公式 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x$ 的曲面面积元素公式

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

同理, 当曲面方程为 $x=\varphi(y,z)$, $(y,z)\in D_{yz}$ 时, 其中 $\varphi(y,z)\in C^{(1)}(D_{yz})$, 曲面的面积

$$S=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

当曲面方程为 $y=\psi(z,x)$, $(z,x)\in D_{zx}$ 时, 其中 $\psi(z,x)\in C^{(1)}(D_{zx})$, 曲面的面积

$$S=\iint\limits_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

例 2.1 求上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 介于两个圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 及 $x^2+y^2=b^2$ $(0<a<b<R)$ 之间部分的面积 (图 4.6).

解 由 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, 容易求得

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

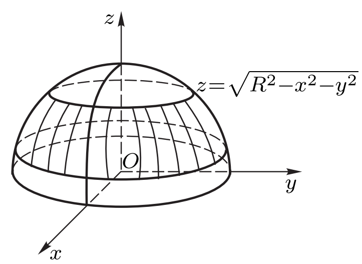

图 4.6

再由公式 (4), 并利用极坐标计算式中的二重积分, 得

$$S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$=2\pi R\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]_a^b=2\pi R(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{R^2-b^2}).$$

在上例中令 $a\to 0, b\to R$, 则得到半球面的面积为 $2\pi R^2$, 从而整个球面的面积为

$$S=4\pi R^2.$$

2.3 第一型曲面积分的计算

正如第一型曲线积分可以化成定积分来计算一样, 第一型曲面积分也可以化成二重积分来计算.

设 $f(x,y,z)\in C(\varSigma)$, 其中 $\varSigma$ 的方程为

$$z=z(x,y),\quad (x,y)\in D_{xy},$$

且 $z(x,y)\in C^{(1)}(D_{xy})$, 其中 D_{xy} 为 $\varSigma$ 在 Oxy 面上的投影域, 是有界的.

利用曲面面积的计算公式, 采用与讨论第一型曲线积分化为定积分的公式类似的方法, 可以推出下面的第一型曲面积分化为二重积分的计算公式 (推导过程从略):

$$\iint\limits_{\varSigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5}$$

公式 (5) 可以这样记忆: 将曲面方程 $z=z(x,y)$ 及曲面面积元素 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 代入 $\iint\limits_{\varSigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 的被积表达式, 然后在 D_{xy} 作二重积分.

当 Σ 的方程为 $x=x(y,z)$ $((y,z)\in D_{yz})$ 或 $y=y(z,x)$ $((z,x)\in D_{zx})$ 时, 分别有与 (5) 式相类似的计算公式

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{6}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{zx}} f(x,y(z,x),z)\sqrt{1+y_z^2+y_x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x. \tag{7}$$

例 2.2 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第 I 卦限的部分.

解 将 Σ 的方程写为 $z=1-x-y$, 则 Σ 在 Oxy 面上的投影域为 $D_{xy}=\{(x,y)|x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, 如图 4.7 所示, 且

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3},$$

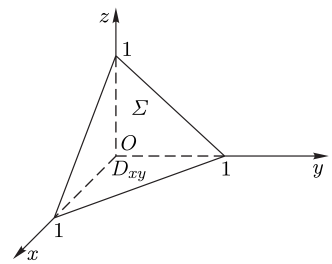

图 4.7

于是根据公式 (5)

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}S&=\iint\limits_{D_{xy}} x(1-x-y)\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sqrt{3}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{24}.\end{aligned}$$

例 2.3 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在平面 $y=h$ $(0<h<a)$ 右方的部分.

解 将 Σ 的方程写为 $y=\sqrt{a^2-z^2-x^2}$, 则 Σ 在 Ozx 面上的投影域为 $D_{zx}=\{(z,x)|z^2+x^2\leqslant a^2-h^2\}$, 且

$$\sqrt{1+y_z^2+y_x^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2-x^2}},$$

于是根据公式 (7)

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{y}=\iint\limits_{D_{zx}}\frac{a\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{a^2-z^2-x^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{a^2-r^2}=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

例 2.4　计算 $\displaystyle\oiint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1, z=2$ 所围成的立体的表面.

解　构成 Σ 的三块曲面分别表示为

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2} && (D_1: 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4),\\
&\Sigma_2: z=1 && (D_2: x^2+y^2\leqslant 1),\\
&\Sigma_3: z=2 && (D_3: x^2+y^2\leqslant 4),
\end{aligned}$$

根据积分的性质

$$\oiint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}S=\left(\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}\right)z^2\mathrm{d}S.$$

而

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} z^2\mathrm{d}S&=\iint_{D_1}(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{15\sqrt{2}\pi}{2},\\
\iint_{\Sigma_2} z^2\mathrm{d}S&=\iint_{D_2}1^2\sqrt{1+0^2+0^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,\\
\iint_{\Sigma_3} z^2\mathrm{d}S&=\iint_{D_3}2^2\sqrt{1+0^2+0^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=16\pi,
\end{aligned}$$

于是

$$\oiint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}S=\frac{15\sqrt{2}}{2}\pi+\pi+16\pi=\left(17+\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)\pi.$$

习　题　4.2

(A)

1. 计算下列第一型曲面积分:

(1) $\displaystyle\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

(2) $\displaystyle\iint_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第 I 卦限中的部分;

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{r^2}$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的部分, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

(4) $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x+y^2+z^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为 Oyz 平面上的圆域: $y^2+z^2\leqslant 1$;

(5) $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, 其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 及三个坐标面围成的四面体的表面;

(6) $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=1$ 及 $z=2$ 所围成的空间区域的边界曲面,

$$f(x,y,z)=\begin{cases}0, & x^2+y^2>1,\\ x^2+y^2+z^2, & x^2+y^2\leqslant 1.\end{cases}$$

2. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

3. 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

4. 求抛物面壳 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(z\leqslant 1)$ 的质量, 此壳的面密度为 $\rho=z$.

(B)

1. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 在平面 $z=1$ 下面的部分.

2. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}|y|\sqrt{z}\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma: z=x^2+y^2$ $(z\leqslant 1)$.

3. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}s$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上以 $A(1,0,0), B(0,1,0), C\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 三点为顶点的球面三角形 ($\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ 均为大圆弧).

4. 计算 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z+1)^2\mathrm{d}s$, 其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ ($z\geqslant 0$, 常数 $R>0$).

5. 计算 $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}s$, 其中 Σ 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$.

*§3　几何形体上的积分及其应用

本节将定积分、重积分、第一型曲线积分和曲面积分的定义和性质加以总结, 将它们统一归结为几何形体上的积分, 并介绍了几何形体上的积分的应用.

3.1 几何形体上的积分概念

我们将区间 I、平面区域 D、空间区域 Ω、曲线弧 L 及曲面 Σ 等统称为**几何形体**, 并记为 G. 在这里我们总是假设 G 是有界的, 并且它们是可度量的 (即可求长度、面积或体积).

纵观以上所讨论的二重积分、三重积分、第一型曲线积分、曲面积分以及一元微积分中讨论过的定积分, 它们在本质上具有共同之处: 积分范围均是有界的几何形体; 被积函数均是定义在相应的几何形体上的有界函数; 定义式均是相同结构的积分和式的极限.

因此, 为了更好地理解和应用上述积分的概念、性质和计算, 我们把此类积分统一地表述如下.

定义 3.1 设 $f(M)$ 是定义在可度量的有界几何形体 G 上的有界函数. 将 G 任意分割成 n 个小的几何形体 $\Delta G_i(i=1,2,\cdots,n)$, 同时以 ΔG_i 表示其度量 (长度、面积或体积), 令 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta G_i \text{ 的直径 }\}$. 任取 $M_i\in\Delta G_i$, 作积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta G_i,$$

如果不论对 G 怎样分割, 也不管 M_i 在 ΔG_i 上如何选取, 只要 $d\to 0$, 上述积分和都趋于同一常数 I, 则称 $f(M)$ 在 G 上**可积**, 并把 I 称为 $f(M)$ **在几何形体** G **上的积分**, 记作 $\int_G f(M)\mathrm{d}G$, 即

$$I=\int_G f(M)\mathrm{d}G=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta G_i,$$

其中 $f(M)$ 称为**被积函数**, G 称为**积分区域**, $\mathrm{d}G$ 称为**度量元素**, $f(M)\mathrm{d}G$ 称为**被积表达式**, $\int$ 称为**积分号**.

在定义 3.1 中, 当 G 分别是区间 $[a,b]$、平面区域 D、空间区域 Ω、曲线 L 和曲面 Σ 时, $\int_G f(M)\mathrm{d}G$ 则分别表示定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$、二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$、三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V$、第一型曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 和第一型曲面积分 $\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

3.2　几何形体上积分的性质

如果 $f(M)$ 在 G 上连续, 则 $f(M)$ 在几何形体 G 上积分存在.

下面我们在被积函数可积, 积分域有界可度量的条件下讨论几何形体上积分的性质.

性质 1 (线性性质)

$$\int_G [af(M)+bg(M)]\,\mathrm{d}G = a\int_G f(M)\mathrm{d}G + b\int_G g(M)\mathrm{d}G,$$

其中 a,b 为常数.

性质 2　若被积函数 $f(M)\equiv 1$, 则

$$\int_G \mathrm{d}G = m(G),$$

其中 $m(G)$ 是积分域 G 的度量.

性质 3 (对积分域的可加性)　设 $G_1\bigcup G_2=G$, 且 G_1 与 G_2 除边界点外无公共部分, 则

$$\int_G f(M)\mathrm{d}G = \int_{G_1} f(M)\mathrm{d}G + \int_{G_2} f(M)\mathrm{d}G.$$

性质 4 (积分不等式)

若在 G 上 $f(M)\leqslant g(M)$, 则有

$$\int_G f(M)\mathrm{d}G \leqslant \int_G g(M)\mathrm{d}G.$$

特别地

$$\left|\int_G f(M)\mathrm{d}G\right| \leqslant \int_G |f(M)|\mathrm{d}G.$$

性质 5 (估值定理)　若 $b\leqslant f(M)\leqslant B$, $M\in G$, 则

$$bm(G)\leqslant \int_G f(M)\mathrm{d}G \leqslant Bm(G).$$

性质 6 (中值定理)　设 $f\in C(G)$, 则至少存在一点 $P\in G$, 使得

$$\int_G f(M)\mathrm{d}G = f(P)m(G).$$

3.3 几何形体上的积分应用举例

在利用定积分计算实际问题时, 微元法是一个有利的工具, 下面讨论的积分应用问题也将采用微元法来作. 微元法的关键是求出被求量 Q 的微元 $\mathrm{d}Q$ 的表达式. 对于几何形体 G 来说, G 上的可加量 Q 的微元的一般表达式为 $f(M)\mathrm{d}G$, 即

$$\mathrm{d}Q = f(M)\mathrm{d}G,$$

其中 $\mathrm{d}G$ 是 G 的度量元素, $f(M) \in C(G)$. 于是

$$Q = \int_G f(M)\mathrm{d}G.$$

1. 几何应用举例

根据几何形体上积分的性质 $\displaystyle\int_G \mathrm{d}G = m(G)$. 当 G 分别是区间 $[a,b]$, 平面区域 D, 空间区域 Ω, 曲线 L, 曲面 Σ 时, 则 $\displaystyle\int_G \mathrm{d}G$ 分别是

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a \quad (\text{区间 } [a,b] \text{ 的长度}),$$

$$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \sigma(D) \quad (D \text{ 的面积}), \quad \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V = V(\Omega) \quad (\Omega \text{ 的体积}),$$

$$\int_L \mathrm{d}s = s(L) \quad (L \text{ 的长度}), \qquad \iint\limits_\Sigma \mathrm{d}S = S(\Sigma) \quad (\Sigma \text{ 的面积}).$$

这类问题我们已经讨论过, 在此我们再举几个例子.

例 3.1 求双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$ 围出图形的面积.

解 容易求得在极坐标系下双纽线的方程为

$$r = a\sqrt{\cos 2\theta}.$$

由对称性 (图 4.8), 设图形在第一象限的面积为 A_1, 则

$$\begin{aligned} A = 4A_1 = 4\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\mathrm{d}r \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= a^2. \end{aligned}$$

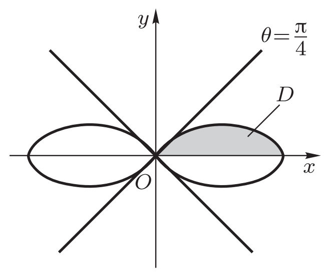

图 4.8

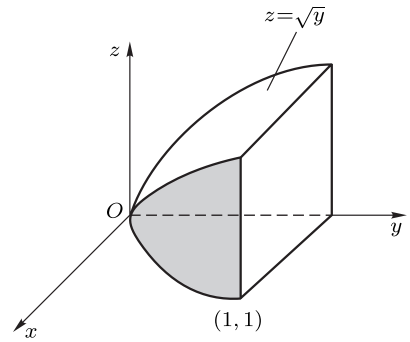

图 4.9

例 3.2　计算以 Oxy 平面上的曲线 $L: y=x^2$ (介于点 $(0,0)$ 与点 $(1,1)$ 之间的一段弧) 为准线, 母线平行于 z 轴且高度为 $z=\sqrt{y}$ 的柱面 (图 4.9) 的面积.

解　由第一型曲线积分的几何意义, 易知所求面积为

$$A=\int_L \sqrt{y}\mathrm{d}s=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}.$$

例 3.3　求抛物面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=6-2x^2-y^2$ 所围立体 Ω 的体积.

解　联立 $z=x^2+2y^2, z=6-2x^2-y^2$ 可求出 Ω 在 Oxy 坐标面的投影域为 $D: x^2+y^2\leqslant 2$. 于是

$$\begin{aligned}V&=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\iint\limits_{D}\left[\int_{x^2+2y^2}^{6-2x^2-y^2}\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D}(6-3x^2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(6-3r^2)r\mathrm{d}r\\&=6\pi.\end{aligned}$$

2. 物理应用举例

(1) 质心问题

设 $P(x,y,z)$ 为空间质点, 其质量为 m, 则称

$$M_{yz}=x\cdot m,\quad M_{zx}=y\cdot m,\quad M_{xy}=z\cdot m$$

分别为质点 P 对坐标面 Oyz, Ozx, Oxy 的**静力矩**, 简称**静矩**.

设 $P_s=\{P_i(x,y,z)|i=1,2,\cdots,n\}$ 为一个空间质点系 (n 个质点构成的集合), 其中 P_i 的质量为 m_i. 规定质点系对三个坐标面的静力矩分别为

$$M_{yz}=\sum_{i=1}^{n}x_im_i,\quad M_{zx}=\sum_{i=1}^{n}y_im_i,\quad M_{xy}=\sum_{i=1}^{n}z_im_i,$$

即静力矩对质点具有可加性.

我们想象有那样一个质点 $\overline{P}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, 它的质量为质点系 P_s 的质量 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$, 并且它对三个坐标面的静矩为质点系 P_s 对三个坐标面的静矩, 即

$$M_{yz}=\overline{x}\cdot m=\sum_{i=1}^{n}x_im_i,\ M_{zx}=\overline{y}\cdot m=\sum_{i=1}^{n}y_im_i,\ M_{xy}=\overline{z}\cdot m=\sum_{i=1}^{n}z_im_i.$$

容易求得

$$\overline{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_im_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i},\ \overline{y}=\frac{M_{zx}}{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_im_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i},\ \overline{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}z_im_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}.$$

我们称点 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ 为质点系 P_s 的**质心**.

也就是说, 质点系 P_s 的某些性质, 如静矩, 与位于质心的具有与 P_s 相同质量的质点相当.

现在假设具有质量 m 的某物体, 占有空间几何形体 G, 其密度 $\rho=\rho(x,y,z)$ 是 G 上点 (x,y,z) 的函数, 下面我们讨论求该物体的质心问题.

采用微元法, 首先求该物体对三个坐标面的静力矩. 在 G 中任取一个直径很小的小几何形体 $\mathrm{d}G$ (它同时表示度量), 近似地将 $\mathrm{d}G$ 看成一个质点, 其质量元素为 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}G$, 从而其对三个坐标面的静矩元素分别为

$$\mathrm{d}M_{yz}=x\mathrm{d}m=x\rho\mathrm{d}G,\ \mathrm{d}M_{zx}=y\mathrm{d}m=y\rho\mathrm{d}G,\ \mathrm{d}M_{xy}=z\mathrm{d}m=z\rho\mathrm{d}G.$$

于是由微元法知

$$M_{yz}=\int_G x\rho\mathrm{d}G,\ M_{zx}=\int_G y\rho\mathrm{d}G,\ M_{xy}=\int_G z\rho\mathrm{d}G.$$

而该物体的质量

$$m=\int_G\rho(x,y,z)\mathrm{d}G.$$

于是其质心 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ 三个坐标分别为

$$\overline{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\int_G x\rho\mathrm{d}G}{\int_G \rho\mathrm{d}G},\ \overline{y}=\frac{M_{zx}}{m}=\frac{\int_G y\rho\mathrm{d}G}{\int_G \rho\mathrm{d}G},\ \overline{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{\int_G z\rho\mathrm{d}G}{\int_G \rho\mathrm{d}G}. \tag{8}$$

当上面式子中的 G 分别为平面区域 D、空间区域 Ω、曲线 L 或曲面 Σ 时，则式子中的积分分别为二重积分、三重积分、第一型曲线积分或第一型曲面积分. 我们应该注意当 G 是平面区域 D 或平面曲线 L 时, (8) 式中的式子只有前两个, 其中的 $\rho=\rho(x,y)$ 是二元函数, 且静矩也应是对 y 轴和 x 轴的 (不是对坐标面的), 分别记为 M_y 和 M_x.

如果在 (8) 式中 ρ 为常数, 即物体的质量分布在 G 上是均匀分布的, 则此时分子与分母中 ρ 可同时提到积分号外面并约掉. 于是 (8) 式变为

$$\overline{x}=\frac{1}{m(G)}\int_G x\mathrm{d}G,\ \overline{y}=\frac{1}{m(G)}\int_G y\mathrm{d}G,\ \overline{z}=\frac{1}{m(G)}\int_G z\mathrm{d}G, \tag{9}$$

其中 $m(G)$ 是几何形体的度量, 由 (9) 式给出的质心 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ 称为几何形体 G 的**形心**.

例 3.4　求由曲面 $y^2=4x-2z^2$ 与平面 $x=2$ 所围成的立体的质心, 假设密度 ρ 为常数, 即质量分布是均匀的.

解　所围立体 Ω 如图 4.10 所示. 由于 ρ 为常数, 这时质心即是形心, 设其坐标为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$. 由对称性易知 $\overline{y}=\overline{z}=0$, 故只需求 $\overline{x}$.

$$M_{yz}=\iiint\limits_{\Omega} x\rho\mathrm{d}V,\qquad m=\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}V.$$

我们采用 “先二后一” 法计算这两个积分.

Ω 在 x 轴上的投影区间为 $[0,2]$, 在该区间上任取一点 x, 过点 $(x,0,0)$ 作平行于 Oyz 面的平面 π_x, 此平面截空间区域 Ω 得到 π_x 上的平面区域 D_x:

$$\frac{y^2}{(\sqrt{4x})^2}+\frac{z^2}{(\sqrt{2x})^2}\leqslant 1.$$

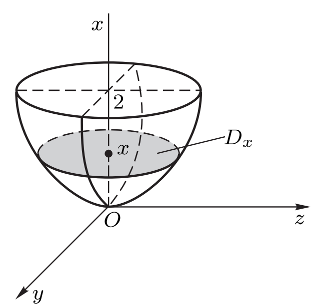

图 4.10

D_x 为椭圆形区域, 其面积是 $\pi\sqrt{4x}\sqrt{2x}$, 于是

$$\begin{aligned}M_{yz}&=\iiint\limits_{\Omega}\rho x\mathrm{d}V=\int_0^2\rho x\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\int_0^2\rho x\pi\sqrt{4x}\sqrt{2x}\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\pi\rho\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi\rho.\end{aligned}$$

$$m=\iiint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}V=\rho\int_0^2\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\int_0^2\pi\sqrt{4x}\sqrt{2x}\mathrm{d}x$$
$$=2\sqrt{2}\pi\rho\int_0^2x\mathrm{d}x=4\sqrt{2}\pi\rho.$$

从而

$$\overline{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi\rho}{4\sqrt{2}\pi\rho}=\frac{4}{3}.$$

因此, 所求的质心为 $\left(\dfrac{4}{3},0,0\right)$.

例 3.5 求心形线 $r=a(1-\cos\theta)$ 所围平面图形的形心.

解 如图 4.11 所示, 由对称性知所围平面图形 D 的形心必在 x 轴上, 设形心坐标为 $(\overline{x},\overline{y})$, 则 $\overline{y}=0$, 只需求 $\overline{x}$. 由 (9) 式

$$\overline{x}=\frac{1}{m(D)}\iint\limits_{D}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D 的面积

$$m(D)=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1-\cos\theta)}r\mathrm{d}r$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a^2,$$

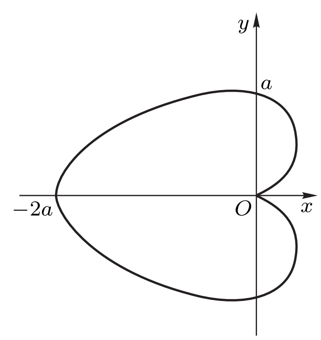

图 4.11

二重积分

$$\iint\limits_{D}x\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{a(1-\cos\theta)}r^2\mathrm{d}r$$
$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\cos\theta(1-\cos\theta)^3\mathrm{d}\theta=-\frac{5}{4}\pi a^3,$$

于是

$$\overline{x}=\frac{-\dfrac{5}{4}\pi a^3}{\dfrac{3}{2}\pi a^2}=-\frac{5}{6}a,$$

从而, D 的形心为 $\left(-\dfrac{5}{6}a,0\right)$.

(2) 转动惯量问题

假设质量为 m 的质点 P 绕定轴 l 旋转, P 到 l 的距离为 r, 力学上称 $I=mr^2$ 为质点 P 对轴 l 的**转动惯量**. 由于转动惯量具有可加性, 故质量为 m_i 的质点

$P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 构成的质点系 P_s 对轴 l 的转动惯量为 $I=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, 其中 r_i 为 P_i 到 l 的距离.

现在假设某物体, 占有空间几何形体 G, 其密度 $\rho=\rho(x,y,z)$ 是 G 上点 (x,y,z) 的函数. 利用微元法容易得到其对 x,y,z 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\int_G (y^2+z^2)\rho \mathrm{d}G,\ I_y=\int_G (z^2+x^2)\rho \mathrm{d}G,\ I_z=\int_G (x^2+y^2)\rho \mathrm{d}G. \tag{10}$$

当 G 为空间区域 Ω、空间曲线 L、曲面 Σ 时, 则 (10) 中的积分分别是三重积分、第一型曲线积分、第一型曲面积分.

例 3.6 设某物体质量分布均匀, 密度 $\rho=1$, 占有空间区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$. 求该物体对三个坐标轴的转动惯量.

解 根据公式 (10) 知

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}V,\ I_y=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2)\mathrm{d}V,\ I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V.$$

由对称性知

$$I_x=I_y=I_z=I,$$

于是

$$3I=I_x+I_y+I_z=\iiint\limits_{\Omega}2(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V.$$

利用球面坐标计算

$$\begin{aligned}I&=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r\\&=\frac{2}{3}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^5}{5}=\frac{8}{15}\pi R^5.\end{aligned}$$

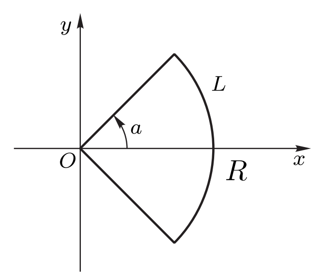

图 4.12

例 3.7 计算半径为 R, 圆心角为 2α 的圆弧 L 对其对称轴的转动惯量. L 的线密度为 $\rho=\rho_0$.

解 如图 4.12 所示, 建立坐标系, 此时问题变成求 L 对 x 轴的转动惯量 I_x. L 的方程为

$$\begin{cases}x=R\cos\theta,\\ y=R\sin\theta,\end{cases}\quad -\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha.$$

于是

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_L \rho_0 y^2 \mathrm{d}s = \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_0 R^2 \sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \rho_0 R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \rho_0 R^3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha).
\end{aligned}
$$

(3) 引力等问题

设有两个质点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$, 它们的质量分别是 m_1, m_2. 由牛顿万有引力定律知 P_1 对 P_2 的引力为

$$
\boldsymbol{F} = K\frac{m_1 m_2}{r^2}\ \overrightarrow{P_2P_1}^{0},
$$

其中 K 为引力常数, $r = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$ 是 P_2 到 P_1 的距离. $\overrightarrow{P_2P_1}^{0}$ 是以 P_2 为起点 P_1 为终点的单位向量, 即

$$
\overrightarrow{P_2P_1}^{0} = \frac{1}{r}\ \overrightarrow{P_2P_1} = \frac{1}{r}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).
$$

于是

$$
\boldsymbol{F} = K\frac{m_1 m_2}{r^3}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).
$$

假设某物体, 占有空间几何形体 G, 其密度函数 $\rho = \rho(x, y, z)$ 是 G 上点 (x, y, z) 的函数. 另有质点 $P(x_0, y_0, z_0)$, 具有质量 m. 利用微元法容易求得该物体对 P 的引力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$, 其中

$$
F_x = \int_G \frac{Km(x-x_0)}{r^3}\rho\mathrm{d}G,\ F_y = \int_G \frac{Km(y-y_0)}{r^3}\rho\mathrm{d}G,\ F_z = \int_G \frac{Km(z-z_0)}{r^3}\rho\mathrm{d}G. \tag{11}
$$

例 3.8 设面密度为常数 ρ 的均匀截圆锥曲面

$$
\varSigma : x^2 + y^2 = z^2 \quad (0 < b \leqslant z \leqslant a),
$$

求对位于圆锥顶点 $O(0,0,0)$ 处的具有质量 m 的质点的引力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$.

解 由曲面的对称性及其质量分布的均匀性知

$$
F_x = 0, \quad F_y = 0.
$$

利用 (11) 式得

$$
\begin{aligned}
F_z &= \iint\limits_{\varSigma} \frac{Km\rho z\mathrm{d}S}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint\limits_{b^2\leqslant x^2+y^2\leqslant a^2} \frac{Km\rho\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2\sqrt{2}(x^2+y^2)} \\
&= \frac{1}{2}Km\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_b^a \frac{\mathrm{d}r}{r} = \pi Km\rho\ln\frac{a}{b}.
\end{aligned}
$$

例 3.9　假设静电荷分布在球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 上, 其分布密度为 $\rho=k\cos^2\varphi$. 求球面上电荷总量, 其中 k 为常数, φ 是向径 $\overrightarrow{OP}$ 与 z 轴的夹角, $P(x,y,z)$ 是 Σ 上的点.

解　任取 Σ 上一个微元 $\mathrm{d}S$, 其所具有的电量微元

$$\mathrm{d}Q=\rho\mathrm{d}S=k\cos^2\varphi\mathrm{d}S,$$

于是由微元法知, Σ 上的总电量为

$$Q=\iint\limits_{\Sigma}k\cos^2\varphi\mathrm{d}S.$$

球面 Σ 的参数方程

$$\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta, \\ y=R\sin\varphi\sin\theta, \\ z=R\cos\varphi, \end{cases}\qquad \begin{array}{l} 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \end{array} \tag{12}$$

如果曲面由参数方程

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v), \end{cases}\qquad (u,v)\in D_{uv} \tag{13}$$

给出, 其中 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)\in C^{(1)}(D_{uv})$, 则可以推出其面积元素为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{14}$$

当曲面方程由 $z=z(x,y)$ 给出时, 可以看成是 (13) 式的特例, 即 (x,y) 相当于参数 (u,v), 方程是 $x=x,y=y,z=z(x,y)$. 于是 (14) 式就变成了我们熟知的

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在本例中利用公式 (14) 可得到

$$\mathrm{d}S=\sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right]^2+\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\right]^2+\left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}\right]^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=R^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

从而

$$Q=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}k\cos^2\varphi R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{3}kR^2\pi.$$

习　题　4.3

(A)

1. 求下列均匀物体的质心 (即形心), 物体所占的空间区域为:

(1) $\Omega=\{(x,y,z)|0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$;

(2) $\Omega=\{(x,y,z)|z\leqslant x^2+y^2,x+y\leqslant a(a>0),x,y,z\geqslant 0\}$.

2. 求由下列曲线所围成的均匀平面薄片的质心坐标:

(1) $y=\sqrt{2px},x=a,y=0(a>0)$;

(2) $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi,a>0),y=0$;

(3) $r=2\sin\theta,r=4\sin\theta$.

3. 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 内, 各点处的密度等于该点到坐标原点的距离的平方, 试求该球体的质心.

4. 求下列占有平面闭区域 D 的均匀薄片 (面密度为 1) 对指定轴的转动惯量:

(1) D 由 $x+y=1,\dfrac{x}{3}+y=1,y=0$ 所围成, 求 I_x;

(2) D 由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成, 求 I_y.

5. 求由曲面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $x^2+y^2=z^2$ 所围部分正 z 轴的均匀物体对 z 轴的转动惯量.

6. 求底半径为 R, 高为 H 的均匀正圆柱体对于底的直径的转动惯量.

(B)

1. 设 $f(M),g(M)$ 在有界闭几何形体 G 上连续, 证明

$$\int_G[af(M)+bg(M)]\,\mathrm{d}G=a\int_G f(M)\mathrm{d}G+b\int_G g(M)\mathrm{d}G,$$

其中 a,b 是常数.

2. 设 $f(M)$ 在有界闭几何形体 G 上连续, 且对 G 的任何子区域 G', 均有

$$\int_{G'}f(M)\mathrm{d}G=0,$$

试证明在 G 上 $f(M)\equiv 0$.

3. 若 $|f(M)|$ 在 G 上可积, 那么 $f(M)$ 在 G 上是否可积? 可考察函数

$$d(x)=\begin{cases}1, & x\ \text{为有理数},\\ -1, & x\ \text{为无理数}.\end{cases}$$

4. 求质量为 M 的非均匀球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 对于其直径的转动惯量, 该球体内点 $P(x,y,z)$ 处的密度为 $\rho=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (k 为正常数).

5. 设由曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的球锥的密度为 ρ_0 (常数), 试求该物体对于其顶点的单位质点的引力.

6. 设物体对轴 l 的转动惯量为 I_l, 对通过质心且平行于轴 l 的轴 l_0 的转动惯量为 I_0, 试证明

$$I_l=I_0+md^2,$$

其中 m 为物体的质量, d 为轴 l 与轴 l_0 的距离. 此结论称为平行轴定理.

7. 利用平行轴定理求半径为 R 的球体对于任一条切线 T 的转动惯量 I_T.

8. 试求某均匀半圆周 $(\mu=1)$ 对位于其圆心处的单位质点的引力.

9. 利用曲线积分求圆柱面 $x^2+y^2=ay$ 介于平面 $z=0$ 及锥面 $az=h\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0,h>0)$ 之间部分的曲面面积.

10. 有一个形状为 $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$ 的均匀物体, 放置在水平的桌面上, 当物体静止时, 问物体的轴线与桌面的夹角 θ 是多少?

11. 由曲面 $z=2-x^2-y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的立体 Ω, 其密度为 1, 求 Ω 绕直线 $l:x=y=z$ 旋转的转动惯量.