

第 5 章 稳恒磁场

在静止电荷周围存在着电场。如果电荷在运动，那么它的周围不仅有电场，而且还会产生磁场。当电荷运动形成稳恒电流时，在它的周围就会产生稳恒磁场。磁场也是物质的一种形态。本章主要研究恒定电流及其产生的稳恒磁场的性质，以及磁场对电流（运动电荷）的作用。在引入表征磁场性质的基本物理量——磁感应强度的基础上，着重讨论毕奥-萨伐尔定律，以及描述磁场基本规律的高斯定理和安培环路定律。

通过本章学习，理解磁感应强度和磁通量的概念，掌握磁感应强度和磁通量的计算方法；理解磁场的高斯定理，掌握毕奥-萨伐尔定律、安培环路定理及其应用；掌握磁场对载流导线的作用和运动电荷在磁场中受力及运动的规律；了解物质的磁化，掌握有磁介质时的安培环路定理及其应用。

5.1 恒定电流

电荷的定向运动形成电流，在导电介质中电荷的定向运动产生的电流叫传导电流（conduction current），而带电体的机械运动产生的电流叫运流电流（convection current）。电荷在导体中运动是由于导体中存在着电场，电场对电荷的作用力引起电荷的宏观定向运动。若导体内各点电流的方向和大小不随时间改变，称为恒定电流（steady current），相应导体内的电场称为稳恒电场（steady electric field）。

5.1.1 电流和电流密度

根据电流（current）的定义，在导电介质中产生电流有两个条件：（1）存在可以自由移动的电荷；（2）导体内存在电场。形成电流的带电粒子称为载流子（current carrier）。在金属导体内，载流子是自由电子；在电解液导体中，载流子是正、负离子；在电离气体中，载流子是正、负离子和自由电子。

电流的强弱用电流 I 来描述，定义为单位时间内通过导体任一截面的电荷量。如果在 dt 时间内通过导体某截面的电荷量为 dq ，则通过该截面的电流为

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (5.1)$$

电流是七个基本物理量之一，其国际单位是安培（A）。电流是标量，习惯所说的“电流方向”是指正电荷的流动方向。

电流只能描述通过导体某一截面电流的整体特征，不涉及载流子通过该截面的分布情况。如果电流通过粗细不均匀的导体，在大、小截面上载流子的分布和流向显然不同。因此仅有电流的概念是不够的，还必须引入能够描述电流分布的物理量——电流密度矢量（current density vector）。电流密度矢量的方向为正电荷在该点的运动方向，其数值等于通过该点单位垂直截面的电流。

如图 5.1 所示，在某点做一与电流方向垂直的截面 dS_{\perp} ，其法线单位矢量为 \vec{e}_n ，通过电流为 dI ，则电流密度 \vec{J} 的大小可表示为

$$J = \frac{dI}{dS_{\perp}} \quad (5.2)$$

由此可得

$$dI = JdS_{\perp}$$

若 dS 面与该处电流线不垂直，即 dS 面的法线方向与该处的电流密度方向成 θ 角，则通过 dS 面的电流为

$$dI = JdS \cos \theta = \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.3)$$

于是，通过任一曲面 S 的电流 I 可表示为

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (5.4)$$

可见，电流密度 \vec{J} 和电流 I 的关系就是一个矢量场和它的通量的关系。

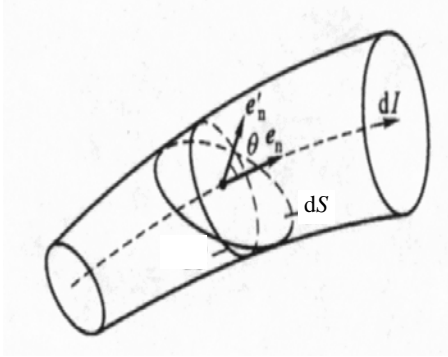


图 5.1 电流密度矢量

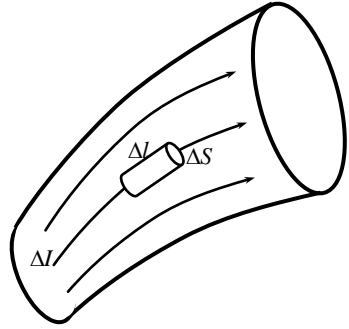


图 5.2 电流密度计算

在大块导电介质中，各点 \vec{J} 有不同的数值和方向， \vec{J} 构成一个矢量场，即电流场。如同电场分布用电场线形象地描绘一样，电流场也可以用电流线来描绘。电流线就是这样一些曲线，其上每点的切线方向与该点电流密度矢量方向一致，通过单位垂直面积的电流线条数等于该点电流密度的数值。电流线围成的管状区域称为电流管，在恒定情况下，通过同一电流管任一截面的电流相同。

在导体内取一长为 Δl 、垂直截面积为 ΔS 的小电流管，如图 5.2 所示。在 Δt 时间内穿过面元 ΔS 的电荷应等于小柱体内的电荷量，即

$$\Delta I = \frac{\rho_e \Delta l \Delta S}{\Delta t} = \rho_e v \Delta S$$

写成矢量式

$$\vec{J} = \rho_e \vec{v} \quad (5.5)$$

式中， ρ_e 为该点电荷密度， \vec{v} 是该点电荷运动速度的平均值，称为迁移速度。

如果单位体积内的载流子数目为 n ，载流子电荷量为 e ，则上式可写成

$$\vec{J} = ne\vec{v} \quad (5.6)$$

若导体内存在几种不同的电荷，且具有不同的电荷密度和速度，则该点电流密度是它们各自在该点电流密度的矢量和，即

$$\vec{J} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i \quad (5.7)$$

5.1.2 稳恒电场 欧姆定律

当导体内不存在电场时，导体中的载流子只做无规则的热运动，因此导体中不出现电流场，这就是导体处于静电平衡的情形。若要使导体中的载流子做定向运动形成电流，则导体内必须有电场。当电荷的分布使得导体内的电场不为零时，就会建立起电流场。若导体中电荷的这种分布不随时间变化，所激发的电场就是稳恒电场。

稳恒电场和静电场一样，都满足环路定理，同样可以引入电势差（electric potential difference）的概念。当导体内有电流流过时，两端必有一定电压。德国物理学家欧姆（G.S. Ohm）通过实验发现，通过一段导体的电流与导体两端的电压成正比，这个结论称为欧姆定律（Ohm law）。欧姆定律可以写成

$$I = \frac{U}{R} \quad (5.8)$$

比例系数 R 称为电阻（resistance），在国际单位制中，电阻单位是欧姆（ Ω ）。欧姆定律不仅适用于金属导体，也适用于电解液。图 5.3 分别给出金属导体、半导体和气态导体的伏安特性曲线，其斜率等于电阻的倒数。

电阻的倒数称为电导（conductance），用 G 表示。在国际单位制中，电导的单位是西门子（S），它等于 Ω^{-1} 。

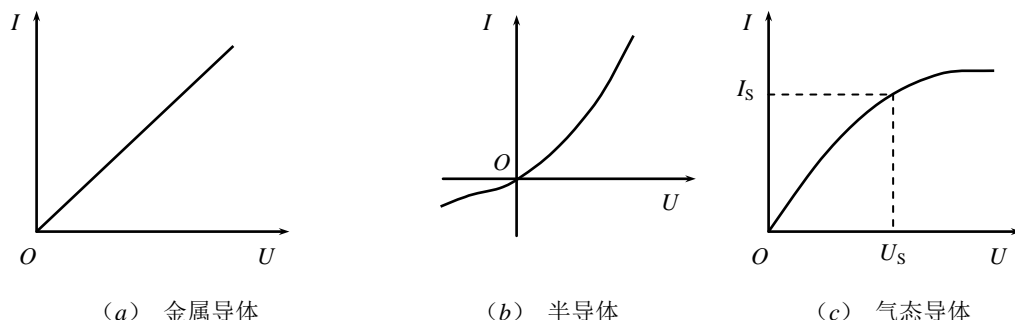


图 5.3 伏安特性曲线

实验表明，电阻的大小与导体的材料和几何形状有关。对横截面均匀的导体材料，其电阻 R 与长度 l 成正比，与横截面 S 成反比，有

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (5.9)$$

式中， ρ 称为材料的电阻率（resistivity），单位是欧姆·米（ $\Omega \cdot \text{m}$ ），表示单位长度、单位面积的导体所具有的电阻。

当导体的电阻率 ρ 或横截面积 S 不均匀时，式（5.9）应写以成如下积分形式

$$R = \int \frac{\rho dl}{S} \quad (5.10)$$

电阻率 ρ 的倒数称为电导率 (conductivity), 用 σ 表示, 即

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (5.11)$$

在国际单位制中, 电导率的单位是西门子·米⁻¹ (S·m⁻¹)。

当导体的温度升高时, 电子与晶体点阵的热运动都将加强, 它们之间的碰撞进一步剧烈, 致使电子的定向运动易于破坏, 电阻率增加。实验表明, 电阻率与温度有如下关系

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) \quad (5.12)$$

式中, α 称为电阻温度系数。表 5.1 给出一些材料的 ρ_0 和 α 值。

表 5.1 一些材料的 ρ_0 和 α 值

材料	$\rho_0 / \Omega \cdot \text{m}$	$\alpha / ^\circ\text{C}^{-1}$
银	1.49×10^{-8}	4.3×10^{-3}
铜	1.55×10^{-8}	4.3×10^{-3}
铝碳 (非晶态)	2.50×10^{-8}	4.7×10^{-3}
镍铬合金	3500×10^{-8}	-4.6×10^{-4}
(60%Ni, 15%Cr, 25%Fe)	110×10^{-8}	1.6×10^{-4}

下面, 我们给出欧姆定律的微分形式。设想在导体中取一小电流管, 如图 5.2 所示, 其横截面积为 ΔS , 长为 Δl , 通过电流为 ΔI , 两端电压为 ΔU , 利用欧姆定律得出

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{R}$$

式中, $\Delta I = J \Delta S$, $R = \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}$, $\Delta U = E \Delta l$, 于是有

$$J = \sigma E$$

式中, E 是该点处的电场。由于 J 和 E 方向一致, 上式可写成矢量形式

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (5.13)$$

上式称为欧姆定律的微分形式, 它给出导体内每一点 \vec{J} 和 \vec{E} 的对应关系。尽管该式是在稳恒情况下倒出的, 但对非稳恒情况下也适用, 具有更大的普遍性。

5.1.3 电动势

在一段导体中, 欲获得稳恒电流, 需要一个稳恒不变的电场, 或者是在导体两端维持恒定不变的电势差。那么如何实现这样要求呢? 下面我们以电容器放电时产生电流为例, 说明如何实现这一要求。

如图 5.4 所示, 用导线将充电电容器的正负极板连接后, 正电荷在静电场力的作用下, 从正极板 A 沿导线向负极板 B 流动, 形成电流。两极板上的正负电荷逐渐中和而减少, 极板间的电势差也逐

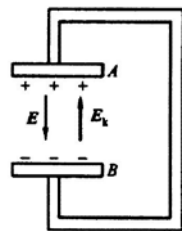


图 5.4 电源电动势

渐减小而趋于零，导线中电流也会逐渐减小而趋于零。这种情况下的电流是暂时的，所以仅靠静电力是不能形成稳恒电流。为了形成稳恒电流，需要存在着一种使正电荷从负极向正极运动的力，能够不断的分离正负电荷以补充两极板上减少的电荷，保持两极板间的电势差不变。显然，这个力是与静电力性质不同的非静电力（non-electrostatic force）。我们将能够提供这种非静电力的装置称为电源（power source）。

若在电源内部存在着一种使正电荷从负极向正极运动的非静电力 \vec{F}_k ，则相应存在一个非静电场，其非静电场强（non-electrostatic field strength）定义为

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_k}{q} \quad (5.14)$$

在 \vec{E}_k 的作用下，电源的正板聚积着正电荷，负板聚积着负电荷，在两板间出现电势差，在导体回路内产生电场，推动电荷做定向运动，形成电流。在推动电荷做功同时，在导体内的载流子会发生碰撞，产生焦耳热，减少电场的能量。电源要补充电场的能量，所以电源是形成稳恒电流的能量。

在电源内部存在着两种场 \vec{E}_k 和 \vec{E} ，前者是非静电场，后者是静电场。考察电荷 q 从负板出发沿回路绕行一周，电场力所做的功是

$$A = q \int_B^A (\vec{E} + \vec{E}_k) \cdot d\vec{l} + q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_B^A \vec{E}_k \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

由于

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

故

$$A = q \int_B^A \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

因为在电源外 $\vec{E}_k = 0$ ，所以上式可写成

$$A = q \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

令

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} \quad (5.15)$$

\mathcal{E} 称为电动势（electromotive force）。在国际单位制中，电动势的单位为伏（V）。

电动势的物理意义是：在非静电场作用下，使单位正电荷绕行一周时非静电力所做的功。电动势的大小反映电源将其它形式能量转变为电能的本领，是电源本身的特征量。

电动势是标量，我们规定从负极经电源内部到正极的方向为电动势的方向。

5.2 基本磁现象

5.2.1 基本磁现象

磁现象和电现象一样，很早以前就被人们发现了。我国是发现天然磁铁最早的国家。11 世纪（北宋）时，我国科学家沈括研制出航海用的指南针，并发现了地磁偏角。这些创造和发现都比西方科学家还早，是我国祖先在科学领域的荣誉。

对于磁性基本现象的认识，可以综合如下：

（1）天然磁铁能吸引铁、钴、镍等物质，这一性质称为磁性（magnetism）。磁铁的两端磁性最强，称为磁极（magnetic pole）。把一条磁铁（magnet）或磁针（magnetic needle）自由的悬挂起来，它将自动地转向南北方向，指北的一极称为指北级，简称北极（用 N 表示）；指南的一极称为指南极，简称南极（用 S 表示）。这一事实说明地球本身是一个巨大的磁体，地球的磁 N 极在地理南极附近，磁 S 极在地理北极附近。

（2）磁极之间有相互作用力，同性磁极相斥，异性磁极相吸引。

（3）磁铁的两个磁极不能分割成独立的 N 极或 S 极。在自然界中没有发现独立的 N 极或 S 极，但是有独立存在的正电荷和负电荷，这是磁极和电荷的基本区别。

（4）1819 年丹麦物理学家奥斯特（H.C.Oersted）发现在载流导线周围的磁针，会受到力的作用而偏转，如图 5.5 所示。1820 年法国物理学家安培（A.M.Ampere）发现在磁铁附近的载流导线或载流线圈，也会受到磁力的作用而发生运动，如图 5.6 所示。

（5）安培进一步的实验发现，载流导线间或载流线圈间也有相互作用。两根平行载流导线，当两电流的流向相同时，会相互吸引，相反则会相互排斥。

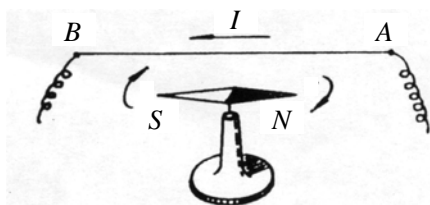


图 5.5 载流导线附近磁针受力作用偏转

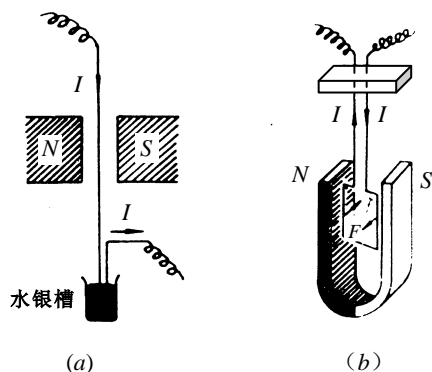


图 5.6 载流导线和线圈受力现象

上述事实说明磁性与电流有着密切的联系。为了解释磁性问题，1822 年安培提出了有关物质磁性本质的假说，他认为一切磁现象的根源是电流。磁性物质的分子中存在着回路电流，称为分子电流（molecular current）。分子电流相当于基元磁铁，物质的磁性决定于物质中的分子电流。根据安培假说，很容易说明两极不能单独存在的原因。因为基元磁铁的两个磁极对应分子电流的正反两个面，这两个面显然是无法单独存在的。安培假说与现代对物质磁性的理解是相当符合的。分子电流相当于分子中电子绕原子核的转动和电子本身的自旋运动。分子电流假说能很好地解释磁体的磁现象，所以至今仍采用这一假说来说明各种磁现象。

5.2.2 磁场

磁体与磁体之间，磁体与电流之间，以及电流与电流之间都有磁力相互作用，但是它们之间并没有直接接触，这种相互作用的磁力是靠磁场来传递的，即一个电流（或磁体）在它的周围空间激发磁场，当第二个电流（或磁体）处在该磁场中时，就要受到该磁场对它的作用力。

磁场与电场一样是客观存在的物质，磁场物质性的重要表现是磁场对载流导体或运动电荷有力的作用。当载流导体在磁场中移动时，磁场力对它做功，表明磁场具有能量。

5.2.3 磁感应强度

在静电场中，曾用电场对试探电荷的作用，引入了描述电场本身性质的物理量——电场强度 \vec{E} 。与此相似，为了描述磁场本身的性质，引入一个重要的物理量——磁感应强度 \vec{B} （magnetic induction intensity），它既有大小，又有方向，是一个矢量。

实验发现，电荷量为 q 的试验点电荷以速度 \vec{v} 运动时，在磁场中某点所受的力 \vec{F} 与电荷量 q 、运动速度 \vec{v} 以及磁场在该点的性质有关。当电荷 q 沿某一特定方向运动时，该运动电荷在磁场中所受的磁场力为零，且此方向恰为小磁针 N 极的指向，我们称该特殊方向为磁感应强度 \vec{B} 的方向；当电荷 q 沿着与磁场垂直的方向运动时，所受的磁力为最大，以 F_{\max} 表示， F_{\max} 正比于运动电荷的电荷量 q 与运动速度 v ，但比值 F_{\max}/qv 对磁场中一给定点是一常量，对磁场中不同点一般不同，由此可见，比值 F_{\max}/qv 反映了该点磁场的强弱，因此，我们把比值 F_{\max}/qv 定义为该点的磁感应强度 \vec{B} 的大小，即

$$B = \frac{F_{\max}}{qv} \quad (5.16)$$

这就是说，描述磁场性质的物理量——磁感应强度 \vec{B} 可定义如下：磁场中某点的磁感应强度 \vec{B} 的大小，等于电荷 q 以速度 v 沿与磁场方向垂直的方向运动时，所受的最大磁力 F_{\max} 与乘积 qv 的比值；而磁感应强度 \vec{B} 的方向就是运动电荷所受磁力为零且与小磁针 N 极指向相同的方向。

在国际单位制中，按式 (5.16)，力的单位为牛顿 (N)，电荷的单位为库仑 (C)，速度的单位为米每秒 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)，则磁感应强度的单位是特斯拉 (T)。

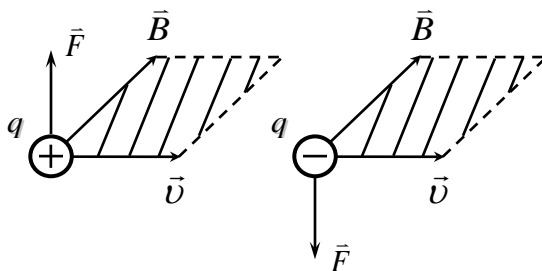


图 5.7 磁感应强度定义

5.3 毕奥—萨伐尔定律

5.3.1 毕奥—萨伐尔定律

1823 年, 法国科学家毕奥 (J.B.Biot) 和萨伐尔 (F.Savart) 通过实验证明了长直载流导线在其周围任一点产生的磁感应强度 \vec{B} 的大小与导线中的电流 I 成正比, 与该点到载流直导线的距离 r 成反比。从数学角度上考虑, 可以把任意载流导线看作由许多电流同为 I 的线元 $d\vec{l}$ 组成, 把矢量 $I d\vec{l}$ 称为电流元, 并规定其方向与电流的流向相同, 如图 5.8 所示。

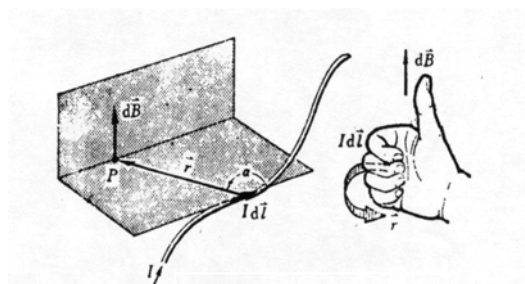


图 5.8 电流元磁场

在研究和分析了大量实验资料的基础上, 毕奥和萨伐尔最后总结出一条有关电流元 $I d\vec{l}$ 在空间某点产生的磁感应强度 $d\vec{B}$ 的结论, 称为毕奥-萨伐尔定律。其数学形式为

$$d\vec{B} = k \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

式中 k 为比例系数, 其值与其中各量的单位选取有关。在国际单位制中, $k = \mu_0 / 4\pi = 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$, 则 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ 为真空的磁导率。因此, 在国际单位制中, 上式应为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (5.17)$$

根据场的叠加性, 任意形状的载流导线所激发的磁场 \vec{B} 应为

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (5.18)$$

这里积分号下的 L 表示沿电流分布的曲线 L 进行积分。

5.3.2 运动电荷的磁场

电流源于电荷的定向运动, 所以电流的磁场实质是运动电荷产生磁场的叠加。设在电流元内运动粒子的电量是 q , 速度是 \vec{v} , 单位体积内的粒子数是 n , 则

$$I d\vec{l} = J dS d\vec{l} = nq \vec{v} d\vec{l} dS = Nq \vec{v}$$

式中, dS 是电流元的横截面积, N 是电流元内的带电粒子总数。将上式带入式 (5.17), 得出

$$d\vec{B} = N \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

于是, 一个带电粒子的磁感应强度是

$$\vec{B}_1 = \frac{d\vec{B}}{N} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \quad (5.19)$$

应该注意, 式 (5.18) 为矢量积分。具体计算时, 首先要分析载流导线上各电流元所

产生的 $d\vec{B}$ 方向是否一致。若 $d\vec{B}$ 方向相同，则上述矢量积分即化为代数量的普通积分。如果各 $d\vec{B}$ 的方向不同，应该先将 $d\vec{B}$ 沿选定的各坐标轴投影，再对 $d\vec{B}$ 的各坐标分量进行积分。积分遍及整个载流导线。

5.3.3 毕奥-萨伐尔定律的应用

(1) 载流直导线的磁场

设在真空中有一条长为 L 、通有电流为 I 的载流直导线，计算邻近直导线一点 P 处的磁感应强度。

在直导线上任取电流元 $I d\vec{l}$ ，如图 5.9 所示。按毕奥—萨伐尔定律，电流元在 P 点所产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$$

$d\vec{B}$ 的方向由 $I d\vec{l} \times \vec{r}$ 确定，即垂直纸面向内，在图中用 \otimes 表示，这相当于看到箭的尾端（如果是垂直纸面向外，则用 \odot 表示，相当于看到箭的尖端）。由于长直导线 L 上每一电流元在 P 点的磁感应强度 $d\vec{B}$ 的方向都是相同的（即均垂直纸面向内），所以 P 点的磁感应强度是

$$B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \sin \alpha}{r^2} \quad (5.20)$$

作 \overline{PO} 直线垂直直导线 L ，且令 $\overline{PO} = a$ ，取 \overline{PO} 与 \vec{r} 的夹角 β 作为新的变量，则由图可知

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta \quad \sin \alpha = \cos \beta \quad r = \frac{a}{\cos \beta}$$

$$l = a \tan \beta$$

微分最后一式，得

$$dl = \frac{a}{\cos^2 \beta} \cdot d\beta$$

将各式代入式 (5.20) 中，并取积分下限为 β_1 ，上限为 β_2 ，得

$$\begin{aligned} B &= \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta \cdot d\beta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \end{aligned} \quad (5.21)$$

式中，角 β_1 是由垂线 \overline{PO} 转向直电流 L 的起点形成的角度；而角 β_2 是由 \overline{PO} 转向直电流 L 的终点形成的角度。如果 \overline{PO} 是顺着电流的流向转向电流起点或终点，则相应的角度取正值，反之，取负值（如图 5.9 所示， β_1 ， β_2 皆取正值）。

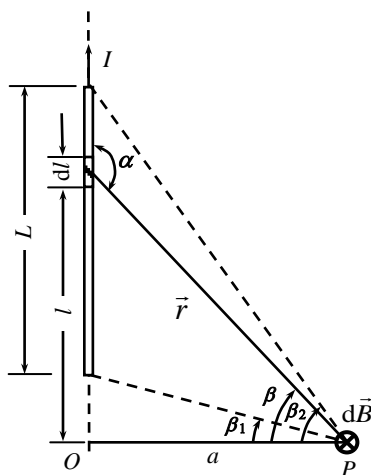


图 5.9 载流直导线的磁场

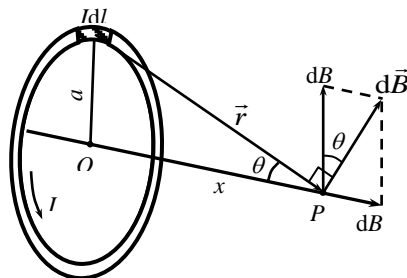


图 5.10 载流圆形线圈的磁场

如果所求点 P 靠近直导线的中部, 而且 $a \ll L$ 时, 则直导线可视为“无限长”, 这时 $\beta_1 \approx -\pi/2$, $\beta_2 \approx \pi/2$ 。因此, 无限长直导线的磁场是

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (5.22)$$

(2) 载流圆形线圈的磁场

设真空中有半径为 R 、通有电流为 I 的圆线圈, 计算其轴线上一点 P 的磁感应强度。

取轴线为 Ox 轴, 圆心 O 为原点。在圆线圈上任取电流元 $I d\vec{l}$, 如图 5.10 所示。根据毕奥-萨伐尔定律, 该电流元在 P 点的磁感应强度 $d\vec{B}$ 的大小是

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

这里电流元 $I d\vec{l}$ 与矢径 \vec{r} 的夹角 $\alpha = 90^\circ$, $d\vec{B}$ 的方向如图 5.10 所示。显然, 线圈上各电流元在 P 点产生的磁感应强度方向是不同的。为此将 $d\vec{B}$ 分解成两个分量: 垂直于轴线的分量 dB_\perp 和平行于轴线的分量 dB_\parallel 。由于对称关系, dB_\perp 互相抵消, 而 dB_\parallel 互相加强, 所以 P 点的磁感应强度为

$$B = \int_L dB_\parallel = \int_L dB \sin \theta = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta}{r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta}{r^2} 2\pi R$$

利用

$$r^2 = R^2 + x^2 \quad \sin \theta = \frac{R}{r}$$

所以

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.23)$$

\vec{B} 的方向沿 x 轴正向。

对圆电流中心处 O 点, 令 $x=0$, O 点磁感应强度的量值是

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (5.24a)$$

如果圆电流是由 N 匝导线组成, 通过每匝的电流强度 I , 则圆心 O 点处磁感应强度的量值为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \quad (5.24b)$$

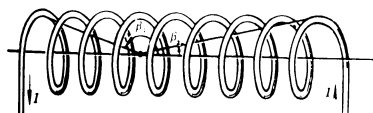
(3) 载流直螺线管内部的磁场

设真空中有一半径为 R 、通有电流 I 、每单位长度有 n 匝线圈的螺线管 (solenoid)。确定螺线管内部轴线上某点的磁感应强度。

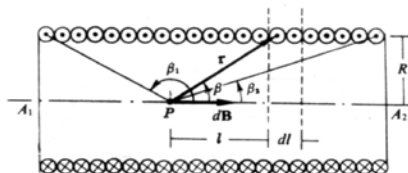
螺线管就是绕在直圆柱面上的螺旋线圈 (如图 5.11 (a)), 一般各匝线圈绕得很紧密, 每匝线圈相当于一个圆形线圈。载流直螺线管在某点处所产生的磁感应强度等于各匝线圈在该点所产生的磁感应强度的总和。任取一小段 dl , 则这小段上有线圈 ndl 匝, 相当于电

流强度为 $I n dl$ 的一个圆形电流。应用公式 (5.23) 的结果，这小段上的线圈在轴线上 P 点所产生的磁感应强度是

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I n dl}{(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$



(a) 直螺线管



(b) 直螺线管的截面图

图 5.11 长直螺线管轴上各点磁感应强度计算

式中, l 是 P 点离 dl 处这一小段螺线管线圈的距离, 磁感应强度的方向沿轴线向右。

螺线管各小段在 P 点产生的磁感应强度的方向都相同, 因此整个螺线管产生的总磁感应强度是

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I n dl}{(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

为了便于积分, 我们引入参变量 β , 是螺线管轴线从 P 点到 dl 处小段线圈上任一点矢径之间的夹角。从图 5.11 (b) 看出: $l = R \tan \beta$, $dl = -R \csc^2 \beta d\beta$, 利用 $R^2 + l^2 = R^2 \csc^2 \beta$, 有

$$B = \int -\frac{\mu_0}{2} n I \sin \beta d\beta$$

β 的上下限分别为 β_2 和 β_1 , 代入上式得

$$B = \frac{\mu_0}{2} n I \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\sin \beta d\beta = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (5.25)$$

磁感应强度的方向沿轴线向右。 β_1 和 β_2 分别表示 P 点到螺线管两端的连线与轴线的夹角。

对无限长螺线管, $\beta_1 \rightarrow \pi$, $\beta_2 \rightarrow 0$, 管内轴线上的磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I \quad (5.26)$$

这一结果说明, 任何绕得很紧密的长直螺线管内部的磁场是匀强的。轴线上各处 B 的量值变化情况如图 5.12 所示。

对长直螺线管端点(例如 A_1 点)来说, $\beta_1 \rightarrow \pi/2$, $\beta_2 \rightarrow 0$; 该处磁感应强度恰是内部磁感应强度的一半

$$B = \mu_0 n I / 2$$

长直螺线管所产生的磁感应强度的方向沿螺线管轴线, 指向可按右手定则确定, 右手四指表示电流的方向, 拇指就是磁场的指向。

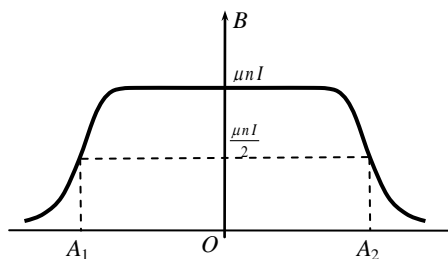


图 5.12 长直螺线管产生的磁场

5.4 磁通量 磁场中的高斯定理

5.4.1 磁感应线

类比电力线描绘电场，可以引入磁感应线描绘磁场。在磁场中画出一些曲线，使曲线上每一点的切线方向和该点的磁感应强度 \vec{B} 的方向一致，并规定垂直于 \vec{B} 的单位面积上穿过的磁感应线的数量等于该点 \vec{B} 的大小，即

$$\frac{dN}{dS_{\perp}} = B$$

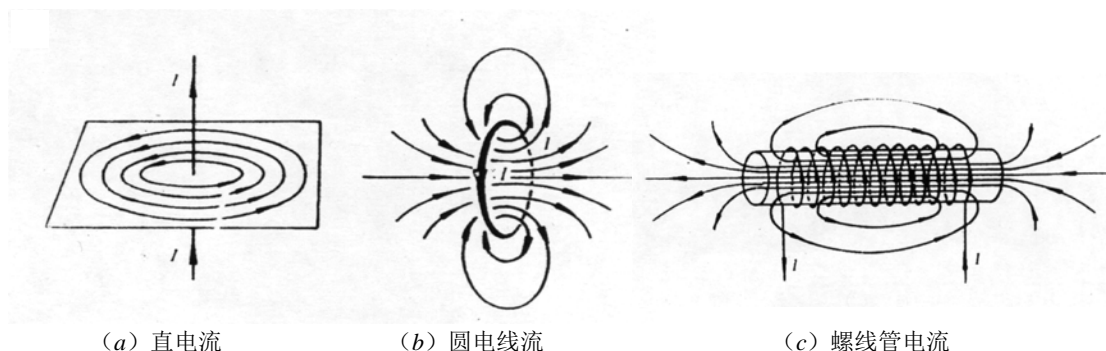


图 5.13 磁感应线

图 5.13 示出几种常见的不同形状的电流产生磁场的磁感应线。从磁感应线的图示中可以得出如下结论：

- (1) 任意两条磁感应线不会相交。因为磁场中某点的磁场方向是唯一确定的。
- (2) 磁感应线是无头无尾的闭合线，和闭合电路相互套合，与静电场中的有头有尾的不闭合的电力线是截然不同的。这一情况是与正负电荷可以被分离，而 N 、 S 极不能被分离的事实相联系的。磁感应线是闭合线，因此磁场是涡旋场。

应该指出，电流方向与磁场方向是密切相关的，磁感应线的回转方向和电流方向可用右手定则来确定。而且，磁场较强的地方，磁感应线较密；反之，磁感应线较疏。

5.4.2 磁通量 磁场中的高斯定理

在磁场中通过任一给定曲面的磁感应线的数量，称为通过该面的磁感应通量或磁通量 (magnetic flux)，用 Φ_m 表示。在国际单位制中，磁通量的单位为韦伯 (Wb)。1Wb = 1T×1m²，所以 1T 也可用 1Wb·m⁻² 表示。

关于磁通量 (简称 \vec{B} 通量) 的计算与静电场中电通量 (\vec{D} 通量) 的计算类似。对放置在磁场 \vec{B} 中的某一曲面 S ，在 S 上任取面积元 $d\vec{S}$ ， $d\vec{S}$ 的法线方向与该点处磁感应强度之间的夹角为 θ ，如图 5.14 所示。通过面积元 $d\vec{S}$ 的磁通量为

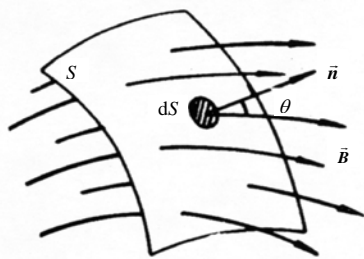


图 5.14 磁通量计算

$$d\Phi_m = B \cos \theta dS = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

所以, 通过有限曲面 S 的通量为

$$\Phi_m = \int_S d\Phi_m = \int_S B \cos \theta dS = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.27)$$

对闭合曲面来说, 一般取向外的指向为正法线的方向。这样, 从闭合曲面穿出的磁通量为正, 穿入的磁通量为负。由于磁感应线是闭合线, 因此穿入闭合曲面的磁感应线数必然等于穿出闭合曲面磁感应线数, 所以通过任一闭合曲面的总磁通量必为零, 即

$$\oint_S B \cos \theta dS = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (5.28)$$

上式与静电学中的高斯定理很相似, 但两者却有本质区别。在静电场中, 由于自然界有独立存在的正负自由电荷, 因此通过闭合曲面的电通量可以不等于零。而在磁场中, 由于自然界没有独立存在的 N 、 S 极, 所以通过任意闭合曲面的磁通量必等于零。由此可见, 式 (5.28) 是表示磁场重要特性的公式, 称为磁场中的高斯定理 (Gauss theorem in magnetic field)。它说明磁场是无源场。

例 5.1 如图 5.15 所示, 在通有电流为 I 的无限长直导线附近有一矩形回路, 且二者共面。试计算通过该回路所包围面积的磁通量。

解 取直电流处为坐标原点, 向右为 x 轴, 在 S 面内任一点的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (\text{方向垂直纸面向内})$$

在 S 面内取一长为 l , 宽为 dx 的面积元 $dS = ldx$, 则通过面积元的磁通量为

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot l dx$$

所以通过回路所包围面积 S 的磁通量为

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

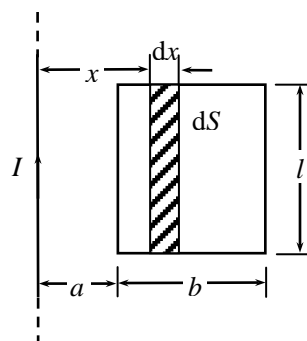


图 5.15 例 5.1 图

*5.5 磁介质 磁化过程

5.5.1 磁介质及其磁化

在外磁场的作用下能够显示出磁性的物质称为磁介质 (magnetic medium)。事实上, 任何实物性物质在外磁场的作用下都能呈现出不同程度的磁性 (magnetic property), 所以任何实物性物质都是磁介质。

使原来不显磁性的物体在外磁场中获得磁性的物理过程叫做磁化 (magnetization)。处于磁化状态的磁介质会产生附加磁场 \vec{B}' , 反过来影响原来磁场 \vec{B}_0 的分布。所以有磁介质

存在时，空间任一点的磁感应强度 \vec{B} 应该是原有磁场 \vec{B}_0 和附加的磁场 \vec{B}' 的矢量和

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \tag{5.29}$$

磁介质对磁场的影响可以通过图 5.16 所示的实验来观察。在管内为真空或空气的长直螺线管中通以电流 I ，这时测出管内的磁感应强度是 \vec{B}_0 。在保持电流 I 不变的条件下，给管内充满某种各向同性的磁介质，这时测出管内磁介质中的磁感应强度 \vec{B} 。实验结果表明，磁介质中的磁场和真空中的磁场具有如下关系

$$B = \mu_r B_0 \tag{5.30}$$

式中，比例系数 μ_r 称为磁介质的相对磁导率(relative permeability)，是一个无量纲的数值量，其数值随磁介质的种类或状态的不同而不同。在常温常压下，几种磁介质的相对磁导率见表 5.2。

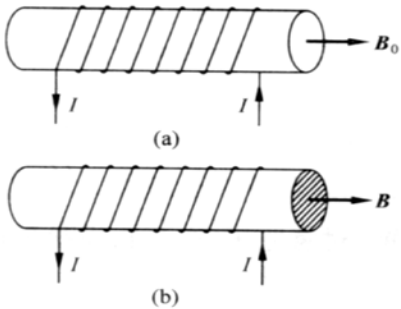


图 5.16 磁介质对磁场的影响

表 5.2 几种磁介质的相对磁导率

顺磁质		抗磁质		铁磁质	
磁介质	μ_r	磁介质	μ_r	磁介质	μ_r
空气	$1+3.6\times10^{-7}$	氢气	$1-2.5\times10^{-9}$	纯 铁	$2.0\times10^2\sim2.0\times10^5$
氧气	$1+1.9\times10^{-6}$	铜	$1-1.0\times10^{-5}$	硅 钢	8.0×10^4 （最大值）
铝	$1+1.7\times10^{-5}$	汞	$1-2.9\times10^{-5}$	坡莫合金	1.5×10^5 （最大值）
镁	$1+1.2\times10^{-5}$	铋	$1-1.6\times10^{-5}$	铁氧体	$3.0\times10^2\sim5.0\times10^3$

根据 μ_r 的大小不同，也就是根据磁化效果的不同，可将磁介质分为三类。

顺磁质 (paramagnetic substance): μ_r 略大于 1 的磁介质称为顺磁质，顺磁质磁化后所产生的附加磁场 \vec{B}' 与原磁场 \vec{B}_0 的方向相同。铝、铬、锰、钛、氧、氮等都属于顺磁质。

抗磁质 (diamagnetic substance): μ_r 略小于 1 的磁介质称为抗磁质，抗磁质磁化后所产生的附加磁场 \vec{B}' 与原磁场 \vec{B}_0 的方向相反。金、银、铜、锌、铅、水银、氢、氯等都属于抗磁质。

铁磁质 (ferromagnetic substance): $\mu_r \gg 1$ 的磁介质称为铁磁质，铁磁质磁化后所产生的附加磁场 \vec{B}' 与原磁场 \vec{B}_0 的方向相同，且 $B' \gg B_0$ 。铁、钴、镍、钆、镨以及它们与其他元素的合金，还有铁氧体等物质都属于铁磁质。

由于顺磁质和抗磁质的 $\mu_r \approx 1$ ，磁化效应很弱，磁化后的介质对原

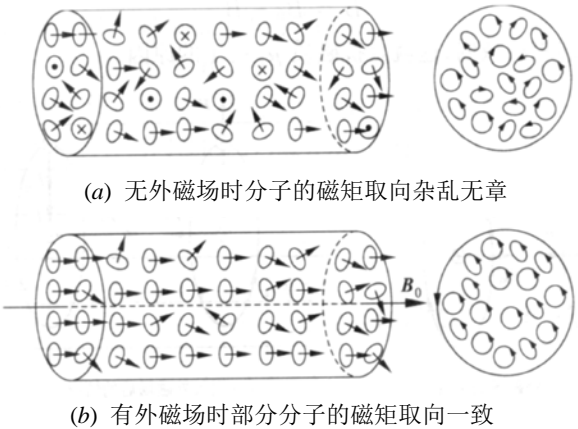


图 5.17 顺磁质机理

来磁场的影响不显著，所以，顺磁质和抗磁质统称为弱磁质。铁磁质的 $\mu_r \gg 1$ ，磁化后对原磁场影响很大，这类磁介质能显著地增强磁场，是强磁性物质，称为强磁质。

处于外磁场中的磁介质会被磁化，三类不同磁介质呈现出不同的磁化特性，这种宏观特性上的差异，可以从物质的微观结构上得到解释。磁介质种类不同，磁化机理也就不相同。运用分子电流学说就可以简要说明顺磁质和抗磁质磁化的微观机制，而铁磁质的磁化机理则需要用磁畴理论去解释，对此我们在后面另做介绍，这里对顺磁质和抗磁质的磁化机理做如下介绍。

(1) 顺磁质的磁化机理

在物质的分子中，每个电子都绕原子核做轨道运动，从而使之具有轨道磁矩，另外，电子本身还有自旋，因而也会具有自旋磁矩。一个分子内所有电子全部磁矩的矢量和称为分子的固有磁矩，简称分子磁矩 (molecular magnetic moment)，用 \vec{p}_m 表示。分子磁矩可等效于一个圆电流（称为分子电流）的磁矩。

顺磁质的分子中各电子磁矩不完全抵消，所以分子磁矩 $\vec{p}_m \neq 0$ ；每个分子都具有固有磁矩。

在没有外磁场存在的常态下，由于分子的热运动使得各分子磁矩的取向是杂乱无章。故在顺磁质中任意宏观小体积内所有分子磁矩的矢量和为零，即 $\sum \vec{p}_m = 0$ ，所以对外不显磁性，如图 5.17 (a) 所示。

当有外磁场存在时，分子磁矩都要受到磁力矩的作用，使各分子磁矩的取向都具有转到与外磁场方向相同的趋势。分子的热运动却阻碍这种取向作用。在一定温度下，这两种作用将会达到平衡，此时，分子磁矩将不同程度地沿着外磁场方向排列起来，于是在宏观小体积元内所有分子磁矩的矢量和不等于零，即 $\sum \vec{p}_m \neq 0$ ，在宏观上产生附加磁场 \vec{B}' 与外磁场 \vec{B}_0 有相同的方向，如图 5.17 (b) 所示。所以顺磁质内的磁感应强度的大小为

$$B = B_0 + B'$$

这就是顺磁质 $\mu_r > 1$ 的原因。

(2) 抗磁质的磁化机理

抗磁质的分子内，各电子磁矩的矢量和为零，每个分子的固有磁矩为零，即 $\vec{p}_m = 0$ 。所以在无外磁场时，抗磁质不显磁性。

当有外磁场存在时，分子中每个电子的轨道运动将受到影响。在洛伦兹力的作用下，附加产生一个以外磁场方向为轴线的转动，称为电子的进动，如图 5.18 所示。不论电子原来的运动情况如何，面对着 \vec{B}_0 方向看，进动的转向（即电子角速度改变量 $\Delta\vec{\omega}_0$ 的方向）总是趋同于外磁场的方向。电子进动也相当于一个圆电流，由于电子带负电，这个等效圆电流的磁矩的方向与

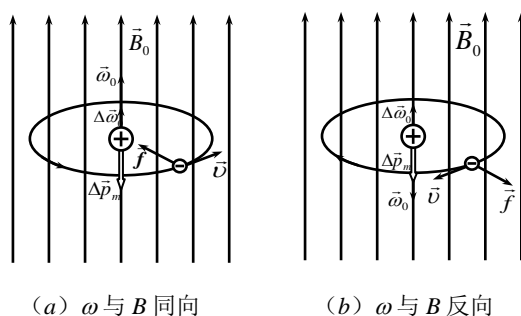


图 5.18 抗磁质机理

外磁场的方向相反。分子中各个电子由于进动而产生的磁效应的总和，可以用一个等效的分子电流的磁矩表示，这种由于进动而产生磁矩称为附加磁矩，用 $\Delta\vec{p}_m$ 表示。因为附加磁

矩与外磁场 \vec{B}_0 方向相反，宏观上便显现出抗磁性，这就是抗磁质 $\mu_r < 1$ 的原因。

应当指出，任何物质都具有抗磁性，因为任何物质原子中的电子都绕原子核做轨道运动，在外磁场作用下都会产生和外磁场方向相反的附加磁矩，但是附加磁矩要比轨道磁矩小很多（理论计算指出，附加磁矩仅是轨道磁矩的百万分之几），所以当物质分子磁矩不为零时，在外磁场作用下的取向效应掩盖了和外磁场方向相反的附加磁矩，显现出顺磁性（paramagnetism），这种物质就是顺磁质。只有分子磁矩为零的物质，外磁场引起的附加磁矩才能显现出抗磁性（diamagnetism），这种物质就是抗磁质。

5.5.2 磁化强度和磁场强度

对于上述各种磁介质，在一定温度和外磁场作用下，都表现出一定的宏观磁性，这就是磁化。一般用磁化强度矢量来表征这种宏观磁性。磁介质单位体积内分子磁矩的矢量和定义为磁化强度（magnetization intensity），用 \vec{M} 表示，并写成

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{P}_m}{\Delta V} \quad (5.31)$$

式中， $\sum \vec{P}_m$ 是 ΔV 内分子磁矩和附加磁矩之矢量和。如果磁介质内各处的磁化强度矢量都相同，称为均匀磁化。我们讨论的都是均匀磁化的情形。

在载有电流 I 的长直螺线管内充满某种磁介质，在螺线管磁场 \vec{B}_0 的作用下使磁介质沿轴向磁化，磁化强度为 \vec{M} ，如图 5.19 (a) 所示。在磁介质内任意一点总有多多个成对而方向相反的分子电流流过，彼此抵消，在磁介质的边缘形成大的分子电流，如图 5.19 (b) 所示。这种由于磁化而在磁介质表面出现的电流 I' ，称为磁化电流（magnetization current）。对于顺磁质，磁化电流的方向与螺线管中的传导电流方向相同；对于抗磁质，磁化电流的方向与螺线管中的传导电流方向相反。由于磁化电流的出现，磁介质内产生附加磁场的磁感应强度 \vec{B}' 。介质中任一点的磁感应强度 \vec{B} 应该是原有磁场 \vec{B}_0 和附加的磁场 \vec{B}' 的矢量和，即式 (5.29)。对于顺磁质 \vec{B}' 与 \vec{B}_0 同方向，因而 $B > B_0$ ；对于抗磁质， \vec{B}' 与 \vec{B}_0 反方向，所以 $B < B_0$ 。

令上述长直圆柱状磁介质的长为 l ，横截面积为 S ，表面单位长度的磁化电流为 i' ，表面总磁化电流则为 $I' = i'l$ ，磁介质总磁矩的数值可以表示为

$$|\sum P_m| = I'S = i'lS$$

磁化强度的数值为

$$M = \frac{|\sum P_m|}{lS} = \frac{i'lS}{lS} = i' \quad (5.32)$$

根据上面的分析，我们可以把由于磁化而在其内部产生的附加磁场 \vec{B}' 看作是有单位长度上电流 i' 的长直螺线管在其内部产生的磁场。有

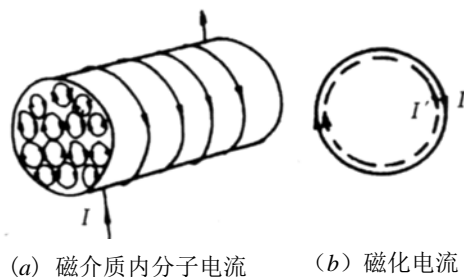


图 5.19 磁介质的磁化电流

$$B' = \mu_0 i' = \mu_0 M$$

\vec{B}' 的方向和 \vec{M} 的方向一致，可将上式写成矢量式

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{M} \quad (5.33)$$

将式 (5.33) 代入式 (5.29)，得到螺线管内被均匀磁化的磁介质中任意一点的磁感应强度为

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} \quad (5.34)$$

由于磁介质在外磁场中被磁化而产生磁化电流，磁化电流在产生磁场方面与传导电流是等价的，这就如同在电介质中自由电荷与极化电荷产生电场是等价的一样。由于磁化电流的分布常常是未知的复杂问题，它给磁介质中的磁场问题的求解带来困难。类比在静电场中引入辅助量——电位移矢量的作法，在磁场中我们也引入一个辅助量——磁场强度 \vec{H} (magnetic field intensity)。它定义为

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (5.35)$$

若磁介质是各向同性的，将式 (5.34) 带入上式，并考虑式 (5.30)，有以下关系

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad \text{或} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (5.36)$$

式中， $\mu = \mu_0 \mu_r$ 称为介质的磁导率 (permeability)。

比较 (5.35) 和 (5.36) 两式，得出如下关系

$$\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = x_m \vec{H} \quad (5.37)$$

式中， x_m 称为磁介质的磁化率 (magnetic susceptibility)，它与相对磁导率 μ_r 的关系是

$$\mu_r = 1 + x_m \quad (5.38)$$

对于顺磁质 $\mu_r > 1$ ， $x_m > 0$ ；对于抗磁质 $\mu_r < 1$ ， $x_m < 0$ ，而对于铁磁质 $\mu_r \gg 1$ ， $x_m \gg 0$ 。在国际单位制中，磁场强度和磁化强度的单位都是 $A \cdot m^{-1}$ 。

引入磁场强度 \vec{H} 之后，可以类比磁力线引入磁场线形象地描述磁场。即在磁场线上任点的切线方向与该点 \vec{H} 方向一致，通过与磁场线相垂直的单位面积上磁场线的条数表示该处磁场强度 \vec{H} 的大小。通过某给定曲面的磁场线的条数称为通过该曲面的磁场强度通量或 \vec{H} 通量。由于 $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ ，所以 \vec{H} 通量是 \vec{B} 通量的 μ 倍。磁场强度是一个辅助量，没有直接的物理意义。

5.5.3 铁磁质

铁磁质的磁导率和磁化率都很大，比其他两种磁介质的磁性强大得多，具有一系列特殊性质。这类材料在科学研究、工农业生产、军事技术等多种领域都有广泛应用。过渡族元素铁、钴、镍，稀土族元素镧、钆等都属于铁磁质。常用的多是它们的合金，如铁碳、铁钴、铝镍钴、钕铁硼等；铁氧体如锰铁氧体、钡铁氧体等；氧化物如二氧化铬、三氧化二铁等。

铁磁质具有以下主要性质：

(1) 铁磁质具有很大的磁导率，其相对磁导率大到几千、几万甚至几十万。

(2) 磁导率 μ 不是常数，而是磁场强度 \vec{H} 的函数。磁化强度 \vec{M} 与磁场强度 \vec{H} ，磁感应强度 \vec{B} 与磁场强度 \vec{H} 不成简单的线性关系。

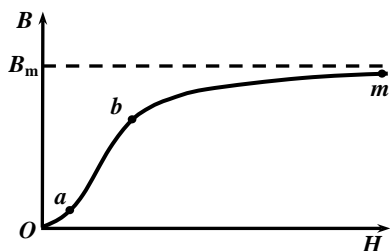


图 5.20 铁磁材料的磁化曲线

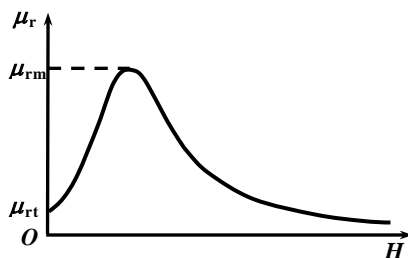


图 5.21 $\mu \sim H$ 曲线

设想在长直螺线管内放入长直圆柱铁芯，改变螺线管内传导电流的大小和方向，即可改变管内磁场强度 \vec{H} 。实验测试表明：开始时，外磁场 $H=0$ ，铁磁质材料未被磁化，因此 $B=0$ ，在 $B-H$ 曲线上这一点即坐标原点 O 。当电流逐渐增大， H 也增大时， B 增加较慢，如图 5.20 Oa 段；继续增加 H 时， B 增加的很快，见图中曲线的 ab 段；再继续增大 H 时， B 的增加又变缓，图中 bm 段曲线所示；此后虽然继续增大 H ， B 几乎不再增大，这意味着铁磁质已达到饱和磁化状态。相应的磁感应强度 B_m 叫作该材料的饱和磁感应强度。由 $B-H$ 曲线可以得出 $\mu-H$ 曲线。显然， μ 不再是常数，如图 5.21 所示。

(3) 磁滞现象 (hysteresis) 与磁滞回线 (hysteresis loop)。由图 5.20 的饱和磁感应强度 B_m 对应的 m 点开始，减小螺线管内传导电流强度直到零，曲线不按 MO 反向折回到达原点 O ，而是按另一条曲线到达 R ， B 不再为零而等于 B_r ，称为剩余磁感应强度（俗称剩磁）。当沿反方向增大电流时，反向磁化逐渐增强，当反向 $H=H_C$ 时， $B=0$ ，剩磁完全消除。 H_C 称为这种材料的矫顽力 (coercive force)，其大小反映了铁磁材料保持剩余磁化的能力。当反向磁场逐渐增强时，曲线到达 M' 点，材料达到反向饱和磁化状态。若使反向磁场 H 减小， $B-H$ 曲线将沿 $M'R'$ 到达 R' 点，该点对应的是反向剩磁。当逐渐增大正向电流，正向磁场强度逐渐增大，曲线由 R' 到达 M 点，形成一闭合曲线。该曲线称为铁磁质的磁滞回线，如图 5.22 所示。

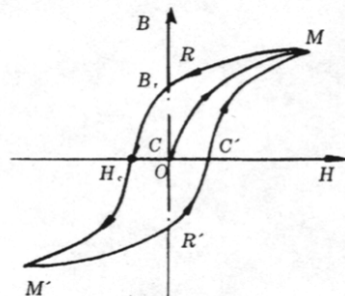
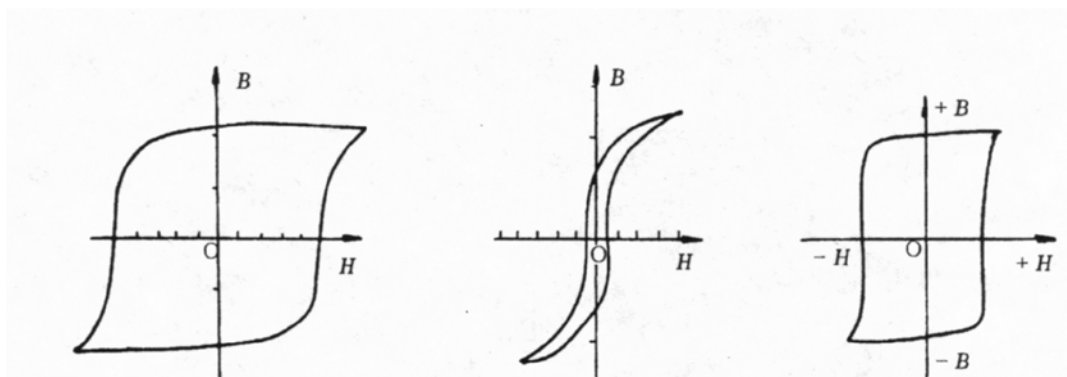


图 5.22 磁滞回线

实验表明，不同种类的铁磁材料有不同形状的磁滞回线。作为永磁体的材料必须具有较大的矫顽力 H_C ，其磁滞回线形状宽大，这种铁磁质称硬磁材料 (hard magnetic material)，如图 5.23 (a) 所示。如碳钢，铝镍钴，稀土—钴，钕铁硼和钕铁氧体等。

软磁材料 (soft magnetic material) 则正相反，它的磁滞回线形状狭窄，矫顽力小，因而磁滞损耗小，如图 5.23 (b) 所示。适用于交变磁场中，如用作变压器的硅钢片

矩磁材料的磁滞回线呈矩形，如图 5.23 (c) 所示。电子计算机中作为存贮元件的环形磁芯就是用矩磁铁氧体制成的。计算机中的“二进制”，只有“0”和“1”两种数码，可分别用矩磁材料的两种剩磁 $+B_r$ 和 $-B_r$ 来表示。若以一定方向的磁场使磁芯磁化，则在磁场取消后，磁芯将永远保持着相应的磁化状态，起到“记忆”作用。



(a) 硬磁材料“铝镍钴”磁滞回线 (b) 软磁材料“硅钢片”磁滞回线 (c) 矩磁材料的磁滞回线

图 5.23 磁滞回线

铁磁质具有上述特殊性质的主要原因是铁磁质具有磁畴 (magnetic domain) 结构, 如图 5.24 所示。磁畴是存在于铁磁质内部自发磁化的小区域 (其体积极约 10^{-12}m^3 , 含有 $10^{12} - 10^{15}$ 个原子), 磁畴之间由磁畴壁隔开。磁畴内的原子之间存在着非常强的电子“交换耦合作用”, 使相邻原子的磁矩形成坚固的平行排列。虽然每个磁畴中的原子磁矩排列整齐, 但在没有外磁场时, 这些大量的磁畴的取向是杂乱的, 所以任何宏观区域的平均磁矩为零, 铁磁质对外也不呈现磁性。

当作用到铁磁质的外磁场逐渐增强时, 自发磁化方向与外磁场方向一致或接近一致的磁畴体积扩大, 而自发磁化方向与外磁场方向相反或接近相反的磁畴体积将缩小。当外磁场增强到一定程度时, 磁畴的自发磁化方向将转向外磁场方向, 直到全部磁畴方向都转向外磁场方向, 达到饱和磁化状态为止。

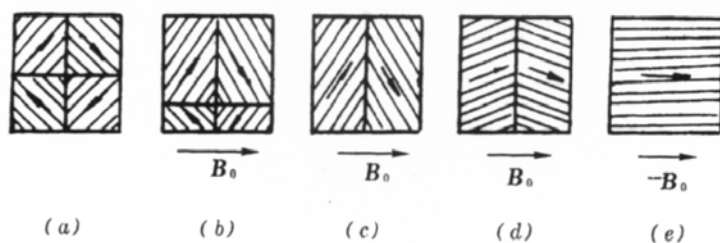


图 5.24 外磁场自零逐渐增加时铁磁质的磁畴运动及磁畴转向

材料处于交变磁场中时, 其磁畴取向跟随 \vec{H} 不断变化。为了克服磁畴之间的“摩擦力”, 外磁场作功, 并转换成热能耗损。这种在反复磁化过程中的能量损耗称为“磁滞损耗 (magnetic hysteresis loss)”, 它正比于磁滞回线所包围的“面积”。

热运动对磁畴中原子 (或离子) 磁矩的平行排列总是起破坏作用。当温度较高时, 热运动的能量足以与原子磁矩间交换作用能量相当时, 铁磁质的磁性明显降低。当温度超过某一临界温度时, 原子磁矩的交换作用突然消失, 铁磁质就变成了一般的顺磁质。这一临界温度称为铁磁质的居里温度或居里点 (Curie point)。不同的铁磁质有不同的居里点, 如铁的居里点是 770°C , 铁硅合金的居里点是 690°C 等等。

5.6 安培环路定律

5.6.1 安培环路定律

在静电场中, 电场强度 \vec{E} 的环流为零, 即 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, 这反映出静电场是一个保守场。同理, 在磁场中, 磁场强度 \vec{H} 沿任意闭合路径的积分 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$, 称为磁场强度 \vec{H} 的环流。我们来分析这个环流的性质。为便于理解, 先从特殊性出发进行讨论, 然后得出一般的结论。

在一“无限长”载流直导线的磁场中, 取一个与该载流直导线垂直的平面, 如图 5.25 所示。以平面与导线交点 O 为圆心, 在平面上作一半径为 r 的圆, 在圆周上任一点 P 的磁感应强度是

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

相应的磁场强度是

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{I}{2\pi r}$$

它的方向为该点的切线方向。

磁场强度 \vec{H} 沿该圆周闭合路径 $L = 2\pi r$ 进行积分, 积分中取 $d\vec{l}$ 与 \vec{H} 同向, 得

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L H dl = \frac{I}{2\pi r} \oint_L dl = \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = I$$

上式表明, 这一线积分的量值只与包围在闭合路径 L 内的传导电流 I 有关。

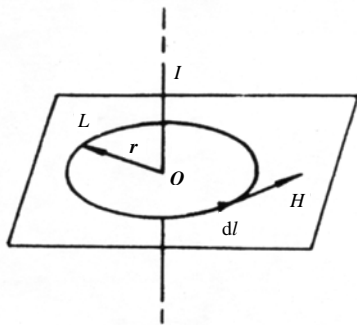


图 5.25 磁场强度 \vec{H} 的环流

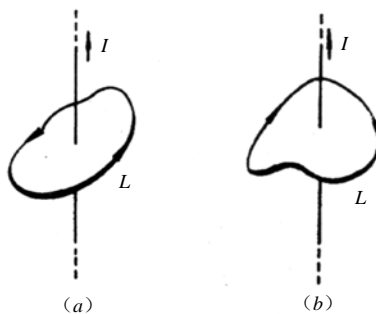


图 5.26 电流的正、负与积分路径回转方向关系

如果上述积分在图 5.25 中沿同一闭合路径反方向积分, 因 $d\vec{l}$ 与 \vec{H} 方向相反, 则有

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L H \cos \pi dl = -\oint_L H dl = -I$$

积分结果为负值, 即在计算 \vec{H} 沿闭合路径积分时, 闭合路径 L 包围的电流有正、负之分。电流的正、负与积分时在闭合路径上所取的回转方向有关, 是按右手螺旋定则决定的。取螺旋的旋转方向为积分的回转方向, 那么与螺旋前进方向相同的电流为正, 相反的电流为负。如图 5.26 所示, 图 (a) 中电流为正, 图 (b) 中电流为负。

上述讨论可以推广到任意回路的情况。在稳恒磁场中，磁场强度 \vec{H} 沿任意闭合路径的线积分（或 \vec{H} 矢量沿任意闭合路径的环流），等于这闭合路径所包围的各传导电流强度的代数和。其数学表达式为

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L H \cos \theta dl = \sum I_i \quad (5.39)$$

上式称为安培环路定律（Ampère circuital theorem）

由此可见，不管闭合路径外面电流如何分布，只要闭合路径内没有包围电流，或者所包围电流的代数和等于零，就有 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ 。但是，应当注意， \vec{H} 矢量的环流为零，一般并不意味着闭合路径 L 上的 \vec{H} 都为零。

安培环路定律说明稳恒磁场和静电场不同，静电场是保守场，而磁场是非保守场。

5.6.2 安培环路定律应用

应用安培环路定律可以计算某些具有一定对称性的电流分布的磁场，我们下面讨论几种典型电流分布的载流体的磁场。

一、长直螺线管内的磁场

设有绕得均匀紧密的长直螺线管，长度为 l ，共有 N 匝，通有电流为 I ，如图 5.27 所示。由于螺线管相当长，所以管内中央部分的磁场是均匀的，其方向与管的轴线平行。管的外侧磁场很微弱，可以忽略不计。

为了计算管内中央部分一点 P 的磁感应强度，可通过 P 点作一矩形的闭合路径 $abcd$ ，磁场强度 \vec{H} 沿此闭合路径的积分可以分成四段路径上来进行，即

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{bc} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{da} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

在路径 cd 上以及在路径 bc 和 da 的管外部分上 $H = 0$ 。在路径 bc 和 da 管内部分上虽然 $H \neq 0$ ，但是 $d\vec{l}$ 与 \vec{H} 垂直，即 $\cos(\vec{H} \cdot d\vec{l}) = 0$ 。所以沿路径 bc 、 cd 、 da 的积分均为零。在 ab 路径上磁场是均匀的，而且 \vec{H} 与 $d\vec{l}$ 同向，所以上述积分可写成

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot \overline{ab}$$

通过每匝线圈电流为 I ，其流向与闭合路径 $abcd$ 积分的回转方向符合右手螺旋关系，故取正值。所以闭合路径 $abcd$ 所包围的传导电流的代数和为

$$\sum I_i = \overline{ab} \cdot n \cdot I$$

式中， $n = N/l$ 是螺线管每单位长度匝数。根据安培环路定律，得出

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot \overline{ab} = \overline{ab} \cdot n \cdot I$$

所以

$$H = nI \quad B = \mu H = \mu nI \quad (5.40)$$

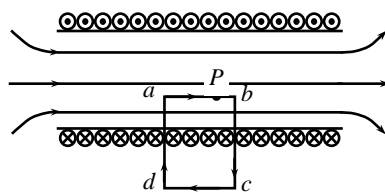


图 5.27 螺线管的剖面 and 磁力线的分布

二、环形螺线管内的磁场

均匀紧密地绕在圆环形磁介质上的一组圆形线圈，形成环形螺线管，如图 5.28 所示。由于线圈密绕，因此磁场几乎全部集中在管内，管内的磁感应线都是同心圆，在同一条磁感应线上，磁感应强度量值相等。而螺线管外的磁场是很微弱的。

现在计算环内任一点 P 的磁感应强度。我们取通过 P 点的磁感应线作为积分的闭合路径 L ，则在闭合路径上， \vec{H} 与 $d\vec{l}$ 同方向，而且 \vec{H} 的量值相等，故 \vec{H} 矢量的环流是

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \oint_L dl = H \cdot 2\pi r$$

式中， r 为该闭合路径的半径。

设环形螺线管共有 N 匝线圈，电流为 I ，则闭合路径 L 包围的传导电流的代数和 $\sum I_i = NI$ ，由安培环路定律，得

$$H \cdot 2\pi r = NI$$

所以

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \quad B = \frac{\mu NI}{2\pi r} \quad (5.41)$$

由此可见，环形螺线管内的磁感应强度的量值与所求点到环心的距离 r 有关。

如果环形螺线管的截面积很小，管内各点的磁感应强度可看作相同。这时取圆环的平均长度为 l ，环内各点的磁感应强度表示为

$$B = \frac{\mu NI}{l} = \mu n I \quad (5.42)$$

式中， $n = N/l$ 是环形螺线管单位长度上的匝数。

三、“无限长”载流圆柱导体内外的磁场

设有一圆柱形导体，其半径为 R ，电流 I 沿轴线方向流动且均匀分布在圆柱导体截面上。如果圆柱体很长，靠近圆柱体中部而且离轴线不远处的磁场对轴线具有对称性。局限在上述区域内的磁场称为无限长圆柱电流的磁场。

考虑圆柱导体外一点 P 的磁感应强度，如图 5.29 (a) 所示。 P 点离轴线距离为 r ($r > R$)，通过 P 点作半径为 r 的圆作为闭合路径 L 。由于对称性，闭合路径 L 上的 \vec{H} 量值相等，方向处处与闭合路径 L 相切，则 H 环流为

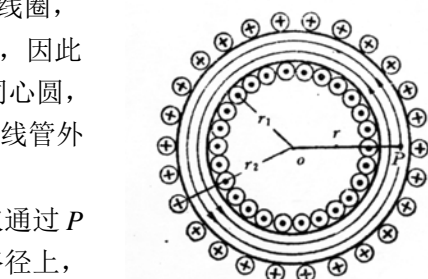


图 5.28 环形螺线管内的磁场

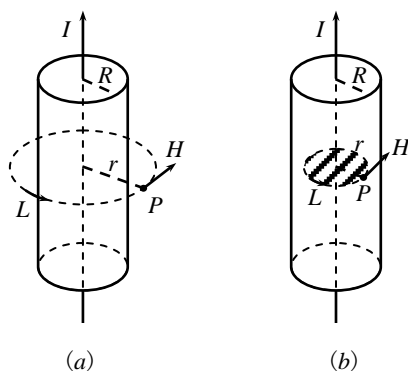


图 5.29 “无限长”载流圆柱导体内外的磁场

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \oint_L dl = H \cdot 2\pi r$$

闭合路径 L 包围传导电流代数和 $\sum I_i = I$ ，由安培环路定律有

$$H \cdot 2\pi r = I$$

无限长载流圆柱导体外一点的磁场为

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (5.43)$$

式中， μ 为圆柱导体外磁介质的磁导率。

其次求载流圆柱导体内一点 P 的磁场，如图 5.29 (b) 所示。设 P 点到轴线距离仍为 r ，此时 $r < R$ 。计算步骤与计算圆柱外的磁场相同，不过此时闭合路径 L 包围的传导电流为

$$\sum I_i = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \frac{Ir^2}{R^2}$$

由此得

$$H \cdot 2\pi r = \frac{Ir^2}{R^2}$$

所以，载流圆柱导体内的磁场是

$$H = \frac{Ir}{2\pi R^2} \quad B = \frac{\mu Ir}{2\pi R^2} \quad (5.44)$$

式中， μ 为圆柱体内磁介质的磁导率。

综上所述，计算电流的磁场，除了利用毕奥—萨伐尔定律外，还可利用安培环路定律。但是，我们应当指出，应用毕奥—萨伐尔定律，原则上可以计算任一闭合电路以及任意一段电路电流的磁场；而安培环路定律中的 \vec{H} 却是闭合电路中的电流整体所产生的磁场，并不是一段电路中电流的磁场。因此，不能错误地把安培环路定律应用到一段电路所产生的磁场上。而且从上面的计算中也可看到用安培环路定律来计算磁场的方法，只在电流分布具有一定对称性时才是方便的。尽管如此，安培环路定律仍然不仅具有重大的理论意义，而且还具有很大的实用价值。例如电工学中的磁路定律就是以安培环路定律为基础的。

5.7 磁场对载流导线的作用

5.7.1 安培力

实验表明，载流导线在磁场中要受到磁场的作用力，关于磁场对载流导线作用力的定律，是安培从实验结果中总结出来的，称为安培定律。其内容为：电流元 $I d\vec{l}$ 在磁场中某点所受的磁场作用力 $d\vec{F}$ 为

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (5.45)$$

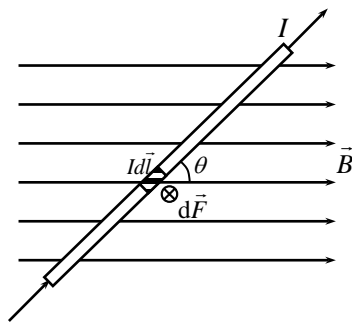


图 5.30 载流直导线在均匀磁场 \vec{B} 中受力

式中 \vec{B} 为电流元 $I d\vec{l}$ 所在处的磁感应强度。

磁场对载流导线的这种作用力常称为安培力。计算一给定载流导线所受的磁场作用力时，必须对各电流元所受的力 $d\vec{F}$ 求矢量和，即

$$\vec{F} = \int_L d\vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (5.46)$$

这是矢量积分，积分号下的 L 表示积分时应考虑整个载流导线的长度。

如果在均匀磁场 \vec{B} 中放置长为 l 的载流直导线，如图 5.30 所示。这时每个电流元 $I d\vec{l}$ 的受力大小和方向均相同，所以作用在直导线上的合力是各电流元所受分力的简单求和，即

$$F = BIl \sin \theta \quad (5.47)$$

方向垂直纸面向里。显然，导线与磁场平行时，导线所受磁力为零；导线与磁场垂直时，导线所受磁力最大为 $F_{\max} = BIl$ 。

如果各电流元的受力方向不一致，就必须把各个力分解成分量，再对整个导线取积分。

5.7.2 磁场对载流线圈的作用

如图 5.31 所示，在均匀磁场 \vec{B} 中放置刚性矩形载流线圈（current-carrying coils） $abcd$ ，边长分别为 l_1 和 l_2 ，电流为 I 。线圈平面与磁场方向成任意角 θ ，对边 ab 、 cd 与磁场垂直。

由式 (5.47) 知，导线 bc 和 da 所受磁场作用力分别为

$$F_1 = BI l_1 \sin \theta$$

$$F'_1 = BI l_1 \sin(\pi - \theta) = BI l_1 \sin \theta$$

如图 5.31 (a) 所示，这两个力 F_1 和 F'_1 在同一直线上，大小相等而方向相反，互相抵消，合力为零。

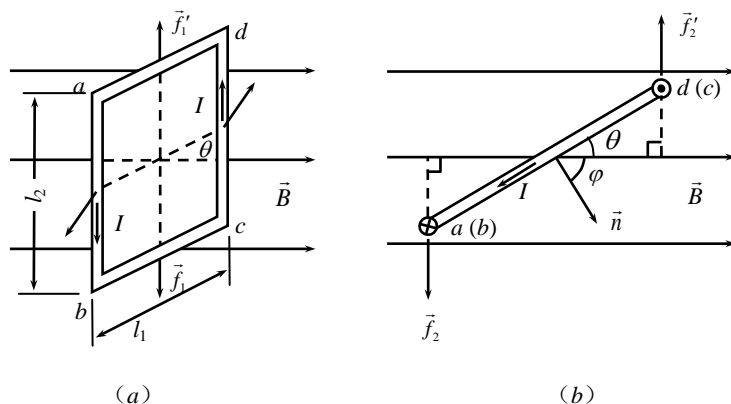


图 5.31 磁场对载流线圈的作用

同理，导线 ab 和 cd 所受的磁场作用力是

$$F_2 = F'_2 = BI l_2$$

这两力大小相等，方向相反，但力的作用线不再同一直线上，因此形成一力偶，力臂为 $l_1 \cos \theta$ 。所以磁场作用在载流线圈上的力矩大小为

$$M = F_2 \cdot l_1 \cos \theta = BI_2 l_1 \cos \theta = BIS \cos \theta$$

式中, $S = l_1 l_2$ 为矩形线圈面积。

通常用线圈平面的法线方向来表示线圈的方位。线圈平面的正法线方向 \vec{n} 与载流线圈电流方向符合右手螺旋定则, 即电流流向表示螺旋的旋转方向, 则螺旋前进方向是载流线圈的正法线方向, 如图 5.31 (b) 所示。若线圈平面的正法线方向 \vec{n} 和磁场方向 \vec{B} 的夹角是 φ , $\theta + \varphi = \pi/2$, 有

$$M = BIS \sin \varphi$$

如果线圈是 N 匝, 那么线圈所受力矩的大小为

$$M = NBIS \sin \varphi$$

在此力矩作用下, 使载流线圈按逆时针方向转动。式中 NIS 是反映载流线圈性质的物理量, 是载流线圈的磁矩 (magnetic moment) 的大小, 用 p_m 表示, 而且它是一个矢量, 其方向就是载流线圈的正法线方向。因此, 载流线圈的磁矩定义为

$$\vec{p}_m = NIS \cdot \vec{n} \quad (5.48)$$

所以, 载流线圈在均匀磁场中所受的磁力矩 (magnetic moment of force) 是

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} \quad (5.49)$$

上式不仅对矩形载流线圈成立, 对处在均匀磁场中任意形状的平面载流线圈也同样成立。

由式 (5.49) 可知, 当 $\varphi = \pi/2$ 时, 载流线圈磁矩 \vec{p}_m 与磁场方向垂直, 线圈所受磁力矩为最大 $M_{\max} = p_m \cdot B$, 该磁力矩有使 φ 减小的趋势; 当时 $\varphi = 0$, 即载流线圈磁矩 \vec{p}_m 的方向与磁场方向相同, 线圈所受磁力矩为零 ($M = 0$), 这是载流线圈稳定平衡的位置; 当 $\varphi = \pi$ 时, 即 \vec{p}_m 的方向与磁场方向相反, 线圈所受磁力矩也为零, 但这是不稳定平衡位置。

综上所述, 均匀磁场中的平面载流线圈, 在磁力矩的作用下, 将发生转动而不会发生整个线圈的平动。而且, 载流线圈在均匀磁场中的转动促使载流线圈的磁矩 \vec{p}_m 的方向与外磁场 \vec{B} 的方向相同, 使线圈达到稳定平衡。

磁场对载流线圈作用力矩的规律是制造各种电动机和电流计的基本原理。

例 5.2 如图 5.32 所示, 在一长直电流 I_1 附近放置长为 l , 电流为 I_2 的水平直导线, 求载流直导线 I_2 所受的磁力。

解 在 I_2 的导线上离 I_1 为 x 处取一电流元 $I_2 dx$, 该电流元所在处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

其方向垂直纸面向里。因此, 电流元所受磁力的大小为

$$dF = BI_2 dx = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 dx$$

方向为垂直 I_2 向上。

由于直线电流 I_2 上任意电流元所受磁力的方向都是相同的, 因此整个直电流 I_2 所受的磁力为

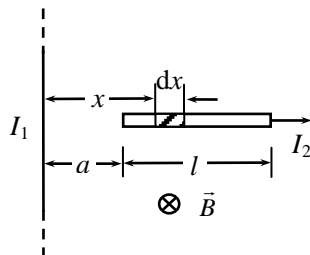


图 5.32 例 5.2 图

$$F = \int dF = \int_a^{a+l} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}$$

方向为垂直向上。

例 5.3 如图 5.33 所示，在均匀磁场 \vec{B} 中放置正三角形载流线圈，其边长为 l ，电流为 I ，且磁场方向与线圈平面平行。求载流线圈所受的磁力矩。

解 由于载流线圈处在均匀磁场中，可以直接用磁力矩

公式 $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ 计算线圈所受磁力矩。

载流线圈的面积是

$$S = \frac{1}{2} l^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

载流线圈的磁矩为

$$\vec{p}_m = IS = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 I \quad \text{方向为 } \odot$$

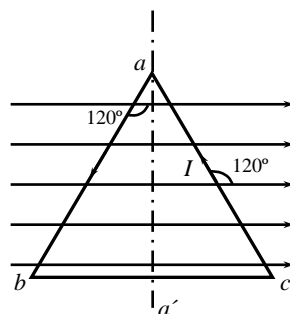


图 5.33 例 5.3 图

\vec{p}_m 的方向与磁场 \vec{B} 的方向垂直，即 $\varphi = \pi/2$ 。因此，载流线圈所受磁力矩为

$$M = p_m B \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 I B \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} B I l^2 \quad \text{方向为 } \uparrow$$

5.8 磁场对运动电荷的作用 霍尔效应

5.8.1 洛伦兹力

实验表明，运动电荷在磁场中受到力的作用，此力称为洛伦兹力（Lorentz force）。由图 5.34 所示，当电荷 q 以速度 \vec{v} 垂直于磁感应强度 \vec{B} 运动时，受到磁场作用力最大，且由式（5.16）可知

$$F_{\max} = qvB$$

力的方向垂直于 \vec{v} 和 \vec{B} 组成的平面。如果 \vec{v} 和 \vec{B} 平行，则运动电荷不受磁力的作用，即洛伦兹力为零。

现在讨论当 \vec{v} 与 \vec{B} 成任意角 θ 时（如图 5.34），运动电荷的受力情况。为此，将速度分解成两个分量，一个是平行于磁场方向的速度分量 v_{\parallel} ，另一个是垂直于磁场方向的分量 v_{\perp} ，有

$$v_{\parallel} = v \cos \theta$$

$$v_{\perp} = v \sin \theta$$

运动电荷在磁场中所受的力仅取决于速度的垂直分量 v_{\perp} ，因此，电荷 q 以速度 \vec{v} 运动时所受的磁场作用力为

$$F = qv_{\perp} B = qvB \sin \theta$$

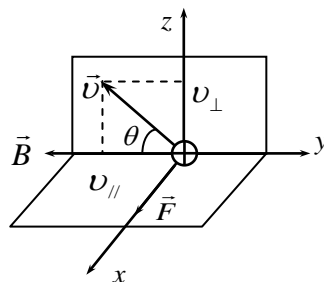


图 5.34 洛伦兹力示意图

如果写成矢量式应为

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (5.50)$$

此式即为洛伦兹力的数学表达式，称为洛伦兹力公式。力 \vec{F} 的方向除与电荷的运动方向和磁场方向有关外，还与电荷的正负有关。如果是正电荷， $q > 0$ ，由矢积的右手螺旋法则可确定正电荷受力 \vec{F} 与 $(\vec{v} \times \vec{B})$ 同方向；如果是负电荷， $q < 0$ ，则 \vec{F} 与 $(\vec{v} \times \vec{B})$ 的方向相反，如图 5.35 所示。

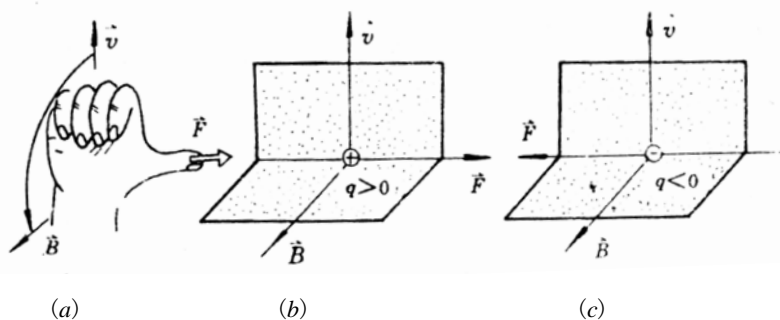


图 5.35 洛伦兹力

由式 (5.50) 可知

- (1) 当电荷运动方向与磁场方向平行时，则 $\vec{F} = 0$ ，此时运动电荷不受磁场作用力；
- (2) 当电荷运动方向和磁场方向垂直时，则 $\vec{F}_{\max} = qvB$ 。磁感应强度 \vec{B} 的定义就是由此得出的；

(3) 因为洛伦兹力 \vec{F} 总垂直于 \vec{v} ，因此洛伦兹力不作功，也不能改变运动电荷速度的大小，只能改变运动方向，使路径发生弯曲。

当导线载有电流时，其内部便有定向的运动电荷，每一个运动电荷在磁场中都将受到洛伦兹力的作用，宏观上就表现为导线在磁场中受到的安培力作用。

5.8.2 带电粒子在磁场中的运动

设在磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中，有一电量为 q 、质量为 m 的带电粒子，以初速度 \vec{v}_0 进入磁场中运动：

(1) 如果 \vec{v}_0 与 \vec{B} 同向，则由式 (5.50) 知，带电粒子所受洛伦兹力为零，带电粒子仍作匀速直线运动，不受磁场的影响。

(2) 如果 \vec{v}_0 与 \vec{B} 垂直（如图 5.36 所示），这时粒子受到与运动方向垂直的洛伦兹力 \vec{F} ，其值为

$$F = qv_0B$$

方向垂直 \vec{v}_0 及 \vec{B} 。所以粒子的速度大小不变，只改变方向，带电粒子将作匀速率圆周运动，而洛伦兹力起着向心力的作用，因此

$$qv_0B = m \frac{v_0^2}{R}$$

圆形轨道半径为

$$R = \frac{m v_0}{q B} \quad (5.51)$$

由此可知，轨道半径与带电粒子的运动速度成正比；而与磁感应强度成反比。速度愈小，或磁感应强度愈大，轨道就弯曲的愈厉害。

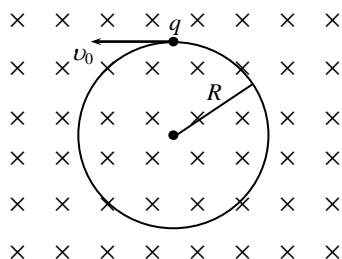


图 5.36 电荷受的洛仑兹力

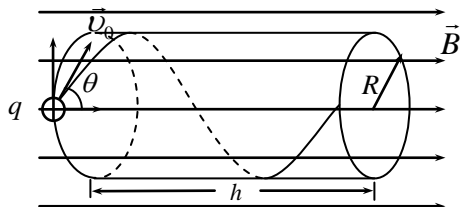


图 5.37 电荷的螺旋运动

带电粒子绕圆形轨道一周所需时间（即周期）为

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi \frac{m}{q} \cdot \frac{1}{B} \quad (5.52a)$$

这一周期只与磁感应强度 B 成反比，而与带电粒子的运动速度无关。

(3) 如果 \vec{v}_0 与 \vec{B} 斜交成 θ 角（如图 5.37），我们可把 \vec{v}_0 分解成两个分量：平行于 \vec{B} 的分量 $v_{0||} = v_0 \cos \theta$ 和垂直于 \vec{B} 的分量 $v_{0\perp} = v_0 \sin \theta$ 。由于磁场的作用，垂直于 \vec{B} 的速度分量不改变其大小，而只改变方向，也就是说，带电粒子在垂直于磁场的平面内作匀速圆周运动。但是，由于同时有平行于 \vec{B} 的速度分量 $v_{0||}$ （ $v_{0||}$ 不受磁场的影响，保持不变），所以带电粒子的轨道是一螺旋线。螺旋线的半径由式 (5.51) 有

$$R = \frac{m v_0 \sin \theta}{q B}$$

旋转一周的时间为

$$T = \frac{2\pi R}{v_0 \sin \theta} = \frac{2\pi m}{q B} \quad (5.52b)$$

螺距是

$$h = v_0 \cos \theta T = \frac{2\pi m v_0 \cos \theta}{q B} \quad (5.53)$$

由此可见，我们可以用磁场来控制带电粒子的运动。显然，也可以通过电场来控制带电粒子的运动。带电粒子在电磁场中的运动规律，在近代科学技术中极为重要。例如，在电子光学技术（如电子射线示波管、电子显微镜等）和基本粒子的加速器技术中，已经广泛应用。

5.8.3 霍耳效应

1879 年美国物理学家霍耳 (E.H. Hall) 发现，在均匀磁场 \vec{B} 中放一块金属板，金属板

面与 \vec{B} 的方向垂直, 如图 5.38 (a) 所示, 在金属板中沿着与磁场 \vec{B} 垂直的方向通以电流 I 时, 在金属板上下两表面之间就出现横向的电势差 U_H , 这种现象称为霍耳效应 (Hall effect), 电势差 U_H 称为霍耳电势差 (Hall voltage)。

实验表明, 霍耳电势差 U_H 的大小与磁感应强度 \vec{B} 的大小和电流 I 都成正比, 而与金属板的厚度 b 成反比, 即

$$U_H \propto \frac{IB}{b} \quad \text{或} \quad U_H = R_H \cdot \frac{IB}{b} \quad (5.54)$$

式中, R_H 只是与导体材料有关的常数, 称为霍耳系数 (Hall coefficient)。

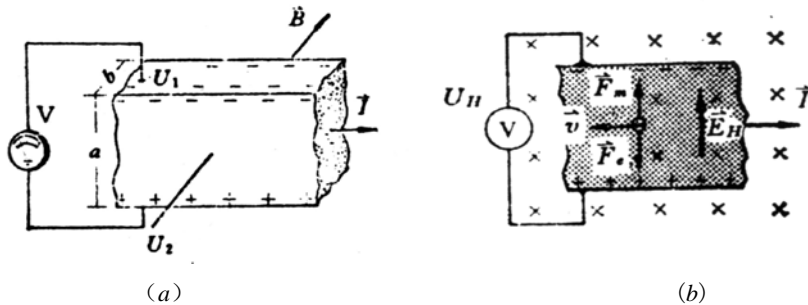


图 5.38 霍耳效应

霍耳效应可用金属的电子理论和洛伦兹力来解释。金属中的电流就是电子的定向运动, 运动的电子在磁场中受洛伦兹力作用。设电子以定向速度 \vec{v} 运动 (如图 5.38 (b)), 电子在磁场 \vec{B} 中受洛伦兹力 $\vec{f} = -e\vec{v} \times \vec{B}$ 作用, 电子沿 \vec{f} 方向漂移, 使导体上表面积累过多的电子而带负电, 下表面出现电子不足而带正电, 在导体内产生方向向上的电场 \vec{E}_H 。当电场对电子作用力 $\vec{f}_e = -e\vec{E}_H$ 正好与磁场的作用力 \vec{f} 相平衡时, 达到稳定状态。这时有

$$eE_H = e\nu B$$

所以

$$E_H = \nu B$$

由此可求出导体上下两表面之间的电势差 $U_H = U_1 - U_2 = -aE_H = -a\nu B$ 。

设金属导体内电子数密度 (即单位体积内的电子数) 为 n , 于是有 $I = en\nu ab$, 由此解出 ν , 再代入上式, 可得

$$U_H = \left(-\frac{1}{ne} \right) \frac{IB}{b}$$

与式 (5.54) 比较, 可得金属导体的霍耳系数

$$R_H = -\frac{1}{ne} \quad (5.55)$$

式中的负号正好说明金属导体内的载流子是带负电的电子。

霍耳系数的正负决定于载流子的正负性质, 通过霍耳系数的测定, 就可以判定载流子的正负。对于半导体, 可以通过这个方法来判断是半导体是空穴型的 (载流子为带正电的

空穴)，还是电子型的（载流子为带负电的自由电子）。根据霍尔系数的大小，还可测定载流子的浓度，即单位体积中的载流子数 n 。

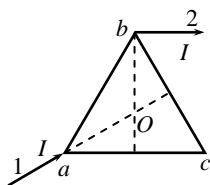
应当指出，霍尔效应不仅在金属导体中会产生，在半导体和导电流体（如等离子体）中也会产生。霍尔效应在工业生产中已有广泛应用。例如，根据霍尔效应的电势差来测量磁感应强度和电流，在自动控制和计算技术方面也有越来越多的应用。

习题与思考题

5.1 如果通过导体中各处的电流密度并不相同, 那么电流能否是稳恒电流?

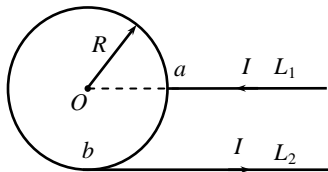
5.2 磁场与电场有什么类似处? 又有什么区别?

5.3 真空中电流 I 由长直导线 1 沿垂直 bc 边方向经 a 点流入一电阻均匀分布的正三角形金属线框, 再由 b 点沿平行于 ac 方向流出, 经长直导线 2 返回电源, 如图所示, 三角形线框每边长 l , 求在三角形框中心 O 点处磁感应强度大小。



题 5.3 图

5.4 用两根彼此平行的半无限长直导线 L_1 、 L_2 把半径为 R 的均匀导体圆环联到电源上, 如图所示。已知直导线上的电流为 I , 求圆环中心 O 点的磁感应强度。



题 5.4 图

5.5 半径为 R 的圆环, 均匀带电, 单位长度所带的电量为 λ , 以每秒 n 转绕通过环心并与环面垂直的轴作等速转动。求:

(1) 环心的磁感应强度;

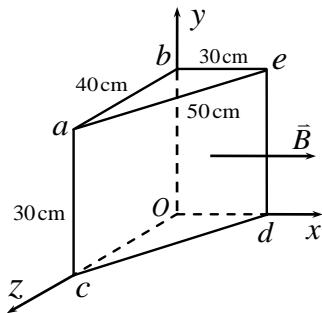
(2) 在轴线上距环心为 x 处的任一点 P 的磁感应强度。

5.6 已知一均匀磁场, 其磁感应强度 $B = 2.0 \text{ wb} \cdot \text{m}^{-2}$, 方向沿 x 轴方向, 如图所示, 试求:

(1) 通过图中 $aboc$ 面的磁通量;

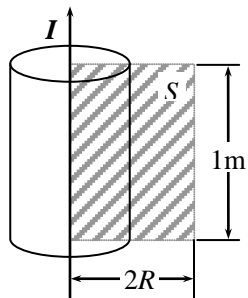
(2) 通过图中 $bedo$ 面的磁通量;

(3) 通过图中 $acde$ 面的磁通量。



题 5.6 图

5.7 一无限长圆柱形铜导体 (磁导率 μ_0), 半径为 R , 通有均匀分布的电流 I 。今取一矩形平面 S (长为 1 m 、宽为 $2R$), 位置如图中画斜线部分所示, 求通过该矩形平面的磁通量。



题 5.7 图

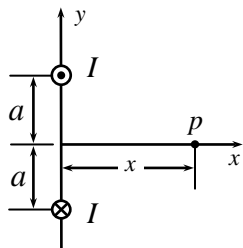
5.8 图示为两条穿过 y 轴且垂直于 x 、 y 平面的平行长直导线的俯视图, 两条导线皆通有电流 I , 但方向相反, 它们到 x 轴的距离皆为 a 。求:

(1) x 轴上 P 点处的磁感应强度 $\vec{B}(x)$ 的表达式;

(2) x 轴上何处的磁感应强度有最大值。

5.9 在一半径 $R = 1.0 \text{ cm}$ 的无限长半圆筒形金属薄片, 沿长度方向有电流 $I = 5.0 \text{ A}$ 通过, 且横截面上电流分布均匀。求圆柱轴线任意一点的磁感应强度。

5.10 将半径为 R 的无限长导体管壁 (厚度忽略) 沿轴向割去一定宽度 h ($h \ll R$) 的无限长狭缝后, 再沿轴向均匀地通上电流, 面电流密度为 i , 求管轴线上磁感应强度大



题 5.8 图

小是多少？

5.11 电流均匀地流过无限大平面导体薄板，面电流密度为 \vec{J} ，设板的厚度可以忽略不计，试求板外的任意一点的磁感应强度。

5.12 无限长载流空心圆柱导体的内外半径分别为 a 、 b ，电流在导体截面上均匀分布，设场点到圆柱中心轴线距离为 r ，试求空间各处 \vec{B} 的大小。

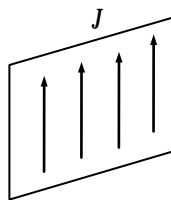
5.13 三条无限长直导线等距地并排放置，导线 I、II、III 分别载有 1 A、2 A、3 A 同方向的电流。由于磁相互作用的结果，导线 I、II、III 单位长度上分别受力 F_1 、 F_2 和 F_3 ，如图所示。则 F_1 与 F_2 的比值为多少？

5.14 一半径为 $R = 0.1\text{m}$ 的半圆形闭合线圈，载有电流 $I = 10\text{A}$ ，放在均匀外磁场中，磁场方向与线圈平行，磁感应强度 $B = 0.50\text{T}$ ，求：

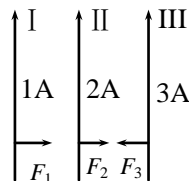
- (1) 线圈的磁矩；
- (2) 线圈所受力矩的大小；

5.15 一线圈由半径为 0.2m 的 $1/4$ 圆弧和相互垂直的二直线组成，通以电流 2A，把它放在磁感应强度为 0.5T 的均匀磁场中（磁感应强度 \vec{B} 的方向如图所示）。求：

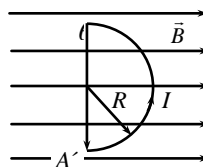
- (1) 线圈平面与磁场垂直时，圆弧 AB 所受的磁力。
- (2) 线圈平面与磁场成 60° 角时，线圈所受的磁力矩。



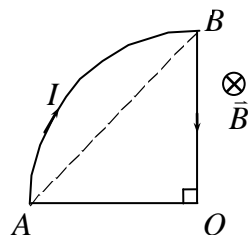
题 5.11 图



题 5.13 图



题 5.14 图



题 5.15 图