第二章　多元函数的微分学及其应用

本章介绍多元函数的偏导数与全微分的概念, 学习多元函数的微分法以及多元函数微分学的应用.

偏导数与全微分是多元微分学的最重要的基本概念. 在学习中, 应当把重点放在理解多元微分学与一元微分学的联系与区别、掌握函数可微的必要条件与充分条件上.

在偏导数和全微分的计算中, 多元复合函数的链锁规则 (又称为链式法则) 处于中心地位, 应当熟练运用该法则并能准确地用它来进行多元微分学的计算.

应用部分的主要内容是空间曲线的切线和法平面方程、空间曲面的切平面和法线方程以及多元函数的极值和条件极值. 从中我们可以学习到利用多元函数微分学来解决与多元函数有关的实际问题的基本方法.

§1　偏　导　数

1.1　偏导数

1. 偏导数的定义

对于一元函数, 导数就是函数增量与自变量增量的比值的极限, 它刻画了函数对于自变量的变化率. 对于多元函数, 如果我们突出某个自变量, 而把其余自变量固定 (暂时看作常数), 来考察多元函数对某个自变量的变化率, 这就是偏导数.

定义 1.1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内有定义. 令 $y=y_0$, 自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx, 相应地函数 z 的增量为

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\ \ (\text{称为}\textbf{偏增量}).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处关于自变量 x 的**偏导数**, 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad z_x(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\quad 或\quad f_x(x_0,y_0).$$

类似地, 如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在, 则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处关于自变量 y 的偏导数, 记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\quad z_y(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\quad 或\quad f_y(x_0,y_0).$$

当函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处关于 x 和 y 的偏导数都存在时, 我们称它在点 P_0 处**可偏导**.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在某区域 D 内的每一点都可偏导, 那么 $f(x,y)$ 关于 x 与关于 y 的偏导数仍然是 x 和 y 的二元函数, 称它们为 $f(x,y)$ 的**偏导函数**, 记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y};\quad z_x,z_y;\quad \frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\quad 或\quad f_x(x,y),f_y(x,y).$$

为了简便, 偏导函数也简称为**偏导数**.

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数, 例如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处关于 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

从偏导数的定义可知, 求 $f_x(x,y)$, 实际上就是把 $f(x,y)$ 中的 y 看作常数, 将 $f(x,y)$ 当作 x 的一元函数求导. 因此, 只要运用一元函数的导数公式和求导法则, 就可以求多元函数的偏导数.

例 1.1 求 $f(x,y)=xy+x^2+y^3$ 在点 (1,0) 的偏导数.

解 把 y 看作常数, 对 x 求导得

$$f_x(x,y)=y+2x,\quad f_x(1,0)=2.$$

把 x 看作常数, 对 y 求导得

$$f_y(x,y)=x+3y^2,\quad f_y(1,0)=1.$$

例 1.2 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解 把 y 和 z 都看作常数, 对 x 求导得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$

根据自变量 x,y,z 在函数表达式中的对称性, 可得

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

例 1.3 已知理想气体的状态方程为 $PV=RT$ (R 为常数). 证明

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证明 因为

$$P=\frac{RT}{V},\quad \frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2},$$
$$V=\frac{RT}{P},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P},$$
$$T=\frac{PV}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R},$$

所以 $\dfrac{\partial P}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial P}=-\dfrac{RT}{V^2}\cdot\dfrac{R}{P}\cdot\dfrac{V}{R}=-\dfrac{RT}{PV}=-1.$ □

这个例子表明, 偏导数的符号 $\dfrac{\partial P}{\partial V},\dfrac{\partial V}{\partial T},\dfrac{\partial T}{\partial P}$ 等都是一个整体符号, 不能看作分子与分母的商, 这一点与一元函数不同.

2. 偏导数的几何意义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可偏导.

如图 2.1 所示, 设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上一点, 过 M_0 作平面 $y=y_0$, 此平面与曲面相交得一曲线, 其方程为

$$C_1:\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=y_0.\end{cases}$$

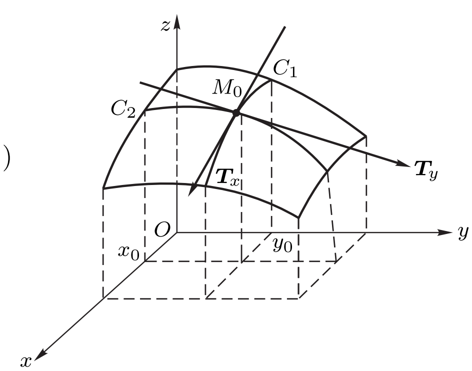

图 2.1

由于偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 即为一元函数 $f(x,y_0)$ 的导数 $f'(x,y_0)|_{x=x_0}$, 所以由一元函数导数的几何意义可知, $f_x(x_0,y_0)$ 就是曲线 C_1 在点 M_0 处的切线对 x 轴的

斜率. 这样, 便得到曲线 C_1 在点 M_0 处的一个切向量 $\boldsymbol{T}_x$. 设它在 x 轴上的坐标为 1, 则它在 z 轴上的坐标为 $f_x(x_0,y_0)$, 并且它在平面 $y=y_0$ 上, 所以切向量 $\boldsymbol{T}_x=(1,0,f_x(x_0,y_0))$.

同样, 偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 是曲线 $C_2:\begin{cases} z=f(x,y), \\ x=x_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线对 y 轴的斜率, 曲线 C_2 在点 M_0 处的切向量 $\boldsymbol{T}_y=(0,1,f_y(x_0,y_0))$.

3. 函数连续性与可偏导性的关系

一元函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续是它在该点可导的必要条件, 那么二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续是否为它在该点可偏导的必要条件呢?

我们知道, $f_x(x_0,y_0)$ 存在, 即 $f'(x,y_0)|_{x=x_0}$ 存在, 从而 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于变量 x 连续; 同理, 若 $f_y(x_0,y_0)$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于变量 y 连续. 但是, 由 $f(x,y)$ 在一点处关于两个变量分别连续, 并不能推出它在该点连续.

例如, 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时, 由偏导数的定义得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可偏导, 但由第一章例 2.2 可知, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的极限不存在, 从而在该点不连续.

这个例子表明, 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可偏导, 并不能保证它在该点连续, 这是多元函数与一元函数的一个重大区别. 反过来, 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 也不能保证它在该点可偏导, 这一点与一元函数是相似的.

例如, 设函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 显然有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0),$$

即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续. 但是, 由于

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

当 $\Delta x\to 0$ 时极限不存在, 所以 $f_x(0,0)$ 不存在.

1.2 高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内处处存在偏导数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$, 如果这两个偏导数仍可偏导, 则称它们的偏导数为 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**. 二阶偏导数共有 4 种, 分别记作

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=z_{xx}=f_{xx}(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)&=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=z_{xy}=f_{xy}(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)&=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=z_{yx}=f_{yx}(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)&=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=z_{yy}=f_{yy}(x,y),
\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 称为 z 对 x 的二阶偏导数, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 称为 z 对 y 的二阶偏导数, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 称为 z 先对 x 后对 y 的二阶混合偏导数, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称为 z 先对 y 后对 x 的二阶混合偏导数.

类似地, 可定义多元函数的二阶以上的高阶偏导数. 二元函数的 n 阶偏导数共有 2^n 个.

例 1.4 求 $z=x\mathrm{e}^x\sin y$ 的二阶偏导数.

解

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=(x+1)\mathrm{e}^x\sin y, &\qquad \frac{\partial z}{\partial y}&=x\mathrm{e}^x\cos y,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=(x+2)\mathrm{e}^x\sin y, &\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=(x+1)\mathrm{e}^x\cos y,\\
\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}&=(x+1)\mathrm{e}^x\cos y, &\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-x\mathrm{e}^x\sin y.
\end{aligned}$$

例 1.5 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.

解 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 有

$$f_x(x,y)=y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y)=x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时, 由定义, 有

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0,$$

再根据二阶偏导数定义, 有

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1,$$
$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

我们看到, 在例 1.4 中 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, 而在例 1.5 中 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$. 这说明混合偏导数与求偏导数的次序有关, 下面不加证明给出一个二阶混合偏导数相等的充分条件.

定理 1.1 若函数 $f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f_{xy}(x,y),f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x,y) 处连续, 则

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y).$$

定理 1.1 可推广到更高阶的偏导数, 例如, 当 $z=f(x,y)$ 的所有三阶偏导数都连续时, 有

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}.$$

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内处处存在直到 k 阶的所有偏导数, 且所有这些偏导数都在 D 内连续, 则可记为 $f\in C^{(k)}(D)$ *. 若 $f\in C^{(k)}(D)$, 则 $f(x,y)$ 在 D 内的 k 阶混合偏导数与求偏导的次序无关.

*$C^{(k)}(D)$ 表示区域 D 上的全体直到 k 阶偏导数都连续的函数的集合.

习 题 2.1

(A)

1. 用定义求下列函数在点 (0,0) 的偏导数:

(1) $z=|x|+|y|$; (2) $z=\sqrt{x^4+y^4}$.

2. 求下列函数的一阶偏导数:

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$; (2) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$;

(3) $z=x^y\cdot y^x$; (4) $u=\sin\dfrac{xy^2}{1+z}$.

3. 求下列函数在指定点处的一阶偏导数:

(1) $z=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, 点 $(0,1)$;

(2) $z=x^2\mathrm{e}^y+(x-1)\arctan\dfrac{y}{x}$, 点 $(1,0)$.

4. 求下列函数的所有二阶偏导数:

(1) $z=\cos\dfrac{x^2}{y}$; (2) $z=\ln(x^4+y^4)$;

(3) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$; (4) $z=y^x$.

5. 求曲线

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2),\\ y=4 \end{cases}$$

在点 $(2,4,5)$ 处的切线与 x 轴正向之间的夹角.

6. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 证明: 当 $r\neq 0$ 时,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}.$$

(B)

1. 求下列函数的一阶偏导数:

(1) $u=\arctan(x-y)^z$; (2) $u=x^{y^z}$; (3) $u=\displaystyle\int_{xz}^{yz}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

证明: $f(x,y)$ 在点 (0,0) 处连续且可偏导.

3. 求下列函数的指定的高阶偏导数:

(1) $z = x\ln(xy)$,　$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$,　$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$;

(2) $u = x^a y^b z^c$,　$\dfrac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$;

(3) $u = xyz\mathrm{e}^{x+y+z}$,　$\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$.

4. 证明 $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 当 $x^2+y^2+z^2 \neq 0$ 时, 满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

5. 设 $u(x,t) = t^n \exp\left\{-\dfrac{x^2}{4t}\right\}$, 试确定常数 n 的值, 使 u 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

§2　全　微　分

2.1　微分中值定理

对于一元的可微函数 $y = f(x)$, 我们有 Lagrange 中值定理:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x)\Delta x \quad (0 < \theta < 1).$$

这是一元函数微分学中最重要的结果之一. 现在来考虑二元函数 $z = f(x,y)$ 的情况.

设二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内可偏导, 令自变量 x,y 分别取得增量 $\Delta x, \Delta y$, 且 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in U(P_0)$, 则相应的函数有增量

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0),$$

称 Δz 为函数 $z = f(x,y)$ 在点 P_0 处的**全增量**.

若把全增量 Δz 改写成

$$\begin{aligned} \Delta z = \ & [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + \\ & [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)], \end{aligned} \tag{1}$$

则右面两个括号中的项都是一元函数的增量, 再分别对这两项应用一元函数的 Lagrange 中值定理, 就得到下面的定理.

定理 2.1 (微分中值定理) 设函数 $z = f(x,y)$ 在矩形域 $D = \{(x,y) \mid |x - x_0| < r_1, |y - y_0| < r_2\}$ 内有定义. 若 $f(x,y)$ 在 D 内可偏导, 则对任何 $|\Delta x| < r_1, |\Delta y| < r_2$, 都有

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y,\end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$.

证明 先看 (1) 式右端的第一个括号, 不妨设 $\Delta x > 0$. 显然, 线段

$$\{(x, y_0 + \Delta y) \mid x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \Delta x\}$$

在区域 D 内, 因此, 一元函数

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$$

对 x 的导数在 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上处处存在, 由 Lagrange 中值定理,

$$\begin{aligned}&f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) \\ =\ &\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) \\ =\ &\varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\Delta x \\ =\ &f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x \quad (0 < \theta_1 < 1).\end{aligned}$$

对 (1) 式右端的第二个括号, 同样可得

$$\begin{aligned}&f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ =\ &f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y \quad (0 < \theta_2 < 1).\end{aligned}$$

把上述结论代入 (1) 式, 便证明了定理. □

微分中值定理建立了函数增量与偏导数之间的联系, 从而使我们可以利用偏导数的性质讨论函数本身的性质.

推论 2.1 设函数 $z = f(x,y)$ 在矩形域 $D = \{(x,y) \mid |x - x_0| < r_1, |y - y_0| < r_2\}$ 内可偏导, 且两个偏导数都恒等于零, 则在 D 内 $f(x,y)$ 为一个常数.

证明 注意到 D 内任何一点 (x,y) 都可以表示成 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, 根据微分中值定理, 有

$$\begin{aligned}
&f(x,y)-f(x_0,y_0)\\
=\ &f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\
=\ &f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y \quad (0<\theta_1,\theta_2<1).
\end{aligned}$$

再由偏导数恒为零的假设, 对任何 $(x,y)\in D$, 都有

$$f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

即在 D 内 $f(x,y)$ 为一个常数. □

在 §1, 我们看到可偏导的函数不一定连续, 但是如果把条件加强为偏导数有界, 则可以得到函数连续的结论.

推论 2.2 设函数 $z=f(x,y)$ 在矩形域 $D=\{(x,y)|\,|x-x_0|<r_1, |y-y_0|<r_2\}$ 内可偏导, 且两个偏导数都有界, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

证明 由假设, $\exists M>0$, 使在 D 内

$$|f_x(x,y)|\leqslant M, \quad |f_y(x,y)|\leqslant M.$$

$\forall(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$, 由微分中值定理及三角不等式, 有

$$\begin{aligned}
&|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\
\leqslant\ &|f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x|+|f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y|\\
\leqslant\ &M|\Delta x|+M|\Delta y|.
\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|=0,$$

即

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0).$$

所以 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续. □

2.2 全微分

1. 全微分的定义

对于一元函数 $y=f(x)$, 若在点 x_0 处该函数的增量可以表示成

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

我们称 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微, 其微分为

$$\mathrm{d}y=A\Delta x.$$

对于某些二元函数 $z=f(x,y)$, 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

比较复杂, 不易计算. 对比一元函数的情形, 人们希望能用自变量增量的线性函数近似地表达全增量, 于是产生了全微分的概念.

定义 2.1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义. 如果函数在点 P_0 处的全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A,B 是不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 的常数 (但一般与 x_0,y_0 有关), $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) **可微**, 称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的**全微分**, 记作 $\mathrm{d}z$, 即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

当函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都可微时, 称 $z=f(x,y)$ 为 D 内的**可微函数**.

例如, 设 $z=xy$, 在点 (x_0,y_0) 处

$$\begin{aligned}\Delta z&=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0y_0\\&=y_0\Delta x+x_0\Delta y+\Delta x\Delta y,\end{aligned}$$

其中

$$\left|\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

从而

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,$$

即

$$\Delta x\Delta y=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}).$$

所以 $z=xy$ 在点 (x_0,y_0) 可微, 并且

$$\mathrm{d}z=y_0\Delta x+x_0\Delta y.$$

2. 函数可微性条件

下面给出多元函数可微与连续、可微与可偏导的关系, 并由此给出求全微分的公式.

定理 2.2 (可微的必要条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微, 则

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

(2) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可偏导, 且有 $A=f_x(x_0,y_0),B=f_y(x_0,y_0)$, 即

$$\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

证明 因为函数 $z=f(x,y)$ 可微, 由定义

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).\end{aligned}\tag{2}$$

(1) 在 (2) 式中, 令 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$, 有

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=0,$$

从而

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0),$$

即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

(2) 特别地, 取 $\Delta y=0$, 则 (2) 式成为

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+o(|\Delta x|),$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A,$$

同理

$$\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=B.$$

即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可偏导, 且 $f_x(x_0,y_0)=A, f_y(x_0,y_0)=B$. 从而

$$\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y. \qquad \square$$

与一元函数一样, 我们规定, 自变量的微分 $\mathrm{d}x=\Delta x, \mathrm{d}y=\Delta y$. 于是, 当 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微时, 有

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

或

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

这就是二元函数全微分的计算公式.

与一元函数一样, 多元函数在一点连续是它在该点可微的必要条件, 但不是充分条件. 这是因为连续不能保证可偏导, 从而就不能保证可微.

值得注意的是, 一元函数在一点可导是它在该点可微的充分必要条件, 但是, 多元函数在一点可偏导只是它在该点可微的必要条件, 而不是充分条件.

例如, 函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 (0,0) 处连续且可偏导 (习题 2.1(B)2), $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但由于

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\Big/\rho=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时, 上式不趋于零 (见第一章例 2.2), 从而 $\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$ 不是 ρ 的高阶无穷小量, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

下面给出可微的充分条件.

定理 2.3 (可微的充分条件) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内可偏导. 若偏导数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 都在点 (x_0,y_0) 处连续, 则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微.

证明 由微分中值定理, 对充分小的 Δx 和 Δy 有

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\ \ (0<\theta_1,\theta_2<1).\end{aligned}$$

再由 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续, 有

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = f_x(x_0,y_0)+\alpha,$$
$$f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) = f_y(x_0,y_0)+\beta.$$

其中 α,β 是 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时的无穷小量, 从而

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

由于

$$\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right| \leqslant |\alpha|\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| + |\beta|\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant |\alpha|+|\beta|,$$

所以

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}=0, \quad 即\ \alpha\Delta x+\beta\Delta y = o(\rho),$$

从而

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho),$$

即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微. □

根据这一定理, 若 $z=f(x,y)$ 是区域 D 内的 $C^{(1)}$ 类函数, 则 $f(x,y)$ 是 D 内的可微函数.

到目前为止, 我们讨论了多元函数在一点连续、可偏导及可微这些概念之间的关系, 总结如下.

多元函数在一点连续与可偏导没有蕴含关系, 即连续不一定可偏导, 可偏导也不一定连续.

多元函数在一点连续与可偏导都是它在该点可微的必要条件, 但不是充分条件, 即可微一定连续且可偏导, 但连续且可偏导不一定可微.

多元函数在一点偏导数连续是它在该点可微的充分条件, 但是, 有例子表明 (见习题 2.2(B)1) 偏导数连续不是可微的必要条件, 即偏导数连续一定可微, 但可微不一定偏导数连续.

例 2.1 求函数 $z=x^2y+xy^2$ 在点 (1,2) 的全微分.

解 因为

$$z_x = 2xy+y^2, \qquad z_y = x^2+2xy,$$

所以

$$\mathrm{d}z = z_x(1,2)\mathrm{d}x + z_y(1,2)\mathrm{d}y = 8\mathrm{d}x+5\mathrm{d}y.$$

例 2.2 求函数 $u=\mathrm{e}^{x+z}\sin(x+y)$ 的全微分.

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\mathrm{e}^{x+z}[\sin(x+y)+\cos(x+y)],\\\frac{\partial u}{\partial y}&=\mathrm{e}^{x+z}\cos(x+y),\\\frac{\partial u}{\partial z}&=\mathrm{e}^{x+z}\sin(x+y),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\\&=\mathrm{e}^{x+z}[(\sin(x+y)+\cos(x+y))\mathrm{d}x+\cos(x+y)\mathrm{d}y+\sin(x+y)\mathrm{d}z].\end{aligned}$$

从全微分的定义可知, 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微, 并且 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 很小时, 就有近似等式

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

即

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

例 2.3 计算 $\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)$ 的近似值.

解 设 $f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)$, 有

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)},\\f_y(x,y)&=\frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)}.\end{aligned}$$

令 $x_0=1,y_0=1,\Delta x=0.03,\Delta y=-0.02$, 有

$$f(x_0,y_0)=0,\quad f_x(x_0,y_0)=\frac{1}{3},\quad f_y(x_0,y_0)=\frac{1}{4}.$$

$$\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)\approx\frac{1}{3}\times0.03-\frac{1}{4}\times0.02=0.005.$$

*2.3 高阶全微分

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微, 则

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}x=\Delta x, \mathrm{d}y=\Delta y$ 是自变量 x, y 的增量, 它们是不随 x, y 而变化的实数. 如果 $\mathrm{d}z$ 作为 (x, y) 的函数仍可微, 则说函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处**二阶可微**, 并称 $\mathrm{d}z$ 的微分为 $z=f(x, y)$ 的**二阶全微分**, 记作 $\mathrm{d}^2 z$, 即

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 z &= \mathrm{d}(\mathrm{d}z) \\
&= \mathrm{d}[f_x(x, y)\mathrm{d}x+f_y(x, y)\mathrm{d}y] \\
&= \mathrm{d}f_x(x, y)\cdot \mathrm{d}x+\mathrm{d}f_y(x, y)\cdot \mathrm{d}y \\
&= [f_{xx}(x, y)\mathrm{d}x+f_{xy}(x, y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x+[f_{yx}(x, y)\mathrm{d}x+f_{yy}(x, y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

当 $f_{xy}(x, y)$ 和 $f_{yx}(x, y)$ 都连续时, 便有

$$
\mathrm{d}^2 z=f_{xx}(x, y)\mathrm{d}x^2+2f_{xy}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f_{yy}(x, y)\mathrm{d}y^2.
$$

这里 $\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}x)^2, \mathrm{d}y^2=(\mathrm{d}y)^2$. 上式可写成

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 z &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 \\
&= \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y).
\end{aligned}
$$

这里使用了偏导算子符号, 并且约定 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 它们作用于 $f(x, y)$ 上, 表示对 $f(x, y)$ 求相对应的偏导数.

一般地, 若 $z=f(x, y)$ 的 $n-1$ 阶全微分 $\mathrm{d}^{n-1}z$ 仍可微, 则说函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处 n **阶可微**, 并称 $n-1$ 阶全微分 $\mathrm{d}^{n-1}z$ 的微分为 $z=f(x, y)$ 的 n **阶全微分**, 记作 $\mathrm{d}^n z$. 当 $z=f(x, y)$ 的所有 n 阶偏导数都连续时, 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^n z &= \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}y^{n-k}.
\end{aligned}
$$

例 2.4 设 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 求 $\mathrm{d}^2 z$.

解 因为

$$
z_x=\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad z_y=\frac{y}{x^2+y^2},
$$

$$
z_{xx}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad z_{xy}=z_{yx}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad z_{yy}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},
$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2z &= z_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2z_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + z_{yy}\mathrm{d}y^2\\ &= \frac{(y^2-x^2)\mathrm{d}x^2 - 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}y^2}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

习 题 2.2

(A)

1. 求下列函数在给定点的全微分:

(1) $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2,\quad P_0(1,1)$;

(2) $z = x\sin(x+y) + \mathrm{e}^{x-y},\quad P_0\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. 求下列函数的全微分:

(1) $z = xy + \dfrac{x}{y}$; (2) $z = \mathrm{e}^{xy}\ln x$;

(3) $z = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$; (4) $u = x\sin yz$.

3. 证明函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处不可微.

4. 利用全微分求下列各数的近似值:

(1) $(25.003)^{\frac{1}{2}} \cdot (1\ 000.1)^{\frac{1}{3}}$; (2) $\sin 29^\circ \cdot \tan 46^\circ$.

(B)

1. 证明函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 (0,0) 处可微, 但偏导数在点 (0,0) 处不连续.

*2. 求下列函数的二阶全微分:

(1) $z = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$; (2) $z = xy\ln xy$.

3. 设有一无盖圆柱形容器, 容器的壁与底的厚度均为 0.1 cm, 内高为 20 cm, 内半径为 4 cm, 求容器外壳体积的近似值.

§3 复合函数的微分法

3.1 链锁规则

在一元函数微分学中, 复合函数求导的链锁规则起到极其重要的作用. 本节将这一重要法则推广到多元函数. 由于多元复合函数的中间变量和自变量的个数较多, 情况较为复杂, 为了讨论简便, 先讨论中间变量都是一元函数的情况, 然后再推广到其他形式的复合函数.

定理 3.1 设函数 $z=f(u,v)$ 及 $u=\varphi(t), v=\psi(t)$ 可以构成复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$. 若 $u=\varphi(t), v=\psi(t)$ 都在点 t 处可导, $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微, 则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 处可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

证明 令自变量 t 取得增量 Δt, 相应地使中间变量 u,v 分别取得增量

$$\Delta u=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t),$$
$$\Delta v=\psi(t+\Delta t)-\psi(t).$$

从而也使 $z=f(u,v)$ 取得增量 Δz. 由于函数 $z=f(u,v)$ 可微, 所以有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}$. 上式两端同除以 Δt, 得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t}.$$

由于 $u=\varphi(t), v=\psi(t)$ 都在点 t 可导, 所以当 $\Delta t\to 0$ 时, $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}\to\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}\to\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, 又由于 $\Delta t\to 0$ 时, $\Delta u\to 0, \Delta v\to 0$, 从而 $\rho\to 0$, 于是

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2}\cdot\frac{|\Delta t|}{\Delta t}=0,$$

所以

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

从而证明了复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导, 且公式 (3) 成立. □

公式 (3) 中的导数称为**全导数**.

定理对其他形式的复合函数仍成立, 比如当中间变量都是多元函数时, 有

推论 3.1 设函数 $z=f(u,v)$ 及 $u=\varphi(s,t), v=\psi(s,t)$ 可以构成复合函数 $z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$. 若 $u=\varphi(s,t)$ 和 $v=\psi(s,t)$ 都在点 (s,t) 处可偏导, $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微, 则复合函数 $z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$ 在点 (s,t) 处可偏导. 并且

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s},\quad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{4}$$

这个结论之所以成立, 是因为在求 $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ 时, 把 s 看作常数, 从而 u,v 乃至 z 都是变量 t 的一元函数, 问题成为定理 3.1 的情形, 于是得到了类似于 (3) 式的 (4) 式的第二个公式. 不过, 由于是求偏导数, (3) 式中的 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 现在依次换写成 $\dfrac{\partial z}{\partial s},\dfrac{\partial u}{\partial s},\dfrac{\partial v}{\partial s}$. 类似地可以得到 (4) 式的第一个公式.

作为定理 3.1 的推论, 还有其他情况, 比如, 当中间变量既有一元函数, 又有多元函数时, 有如下结论.

推论 3.2 设函数 $z=f(u,v)$ 及 $u=\varphi(s,t), v=\psi(t)$ 可以构成复合函数 $z=f[\varphi(s,t),\psi(t)]$. 若 $u=\varphi(s,t)$ 在点 (s,t) 处可偏导, $v=\psi(t)$ 在点 t 处可导, $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 可微, 则复合函数 $z=f[\varphi(s,t),\psi(t)]$ 在点 (s,t) 处可偏导, 并且

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s},\quad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{5}$$

这里, 只需注意到变量 v 与 s 无关, 并且在一元函数求导时, 将 ∂ 改作 d, 就能从 (4) 式得到 (5) 式.

例 3.1 设 $u=\dfrac{y}{x}, y=\sqrt{1-x^2}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\\&=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

例 3.2 求函数 $z=(x^2+y^2)^{xy}$ 的偏导数.

解 设 $u=x^2+y^2, v=xy$, 则 $z=u^v$, 从而

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\cdot 2x+u^v\ln u\cdot y\\
&= xy(x^2+y^2)^{xy-1}\cdot 2x+(x^2+y^2)^{xy}\ln(x^2+y^2)\cdot y\\
&= (x^2+y^2)^{xy}\left[\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+y\ln(x^2+y^2)\right].
\end{aligned}
$$

同理,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= vu^{v-1}\cdot 2y+u^v\ln u\cdot x\\
&= (x^2+y^2)^{xy}\left[\frac{2xy^2}{x^2+y^2}+x\ln(x^2+y^2)\right].
\end{aligned}
$$

例 3.3 设函数 $z=f(x,y)$ 可微, $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 证明:

$$
\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.
$$

证明 因为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\\
=&\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\right)^2\\
=&\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta\sin\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta+\\
&\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\cos\theta+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta\\
=&\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.
\end{aligned}
$$

□

注意, 定理 3.1 中的条件与一元函数微分学中的链锁规则的条件不完全相同. 这里要求 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 可微.

能否将条件减弱成 $f(u,v)$ 在点 (u,v) 可偏导呢? 一般来说, 这是不行的. 例如, 函数

$$z=f(u,v)=\begin{cases}\dfrac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}, & u^2+v^2\neq 0,\\ 0, & u^2+v^2=0.\end{cases}$$

我们已经证明过 $f_u(0,0)=0, f_v(0,0)=0$ (习题 2.1(B)2), 但 $f(u,v)$ 在点 (0,0) 不可微.

现在, 特别地设 $u=t, v=t$, 直接代入, 得

$$z=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}|t|, & t\neq 0,\\ 0, & t=0,\end{cases}\qquad \text{即}\ \ z=\frac{1}{\sqrt{2}}|t|.$$

于是, 当 $t=0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 不存在.

然而, 如果套用链锁规则就会得到, 当 $t=0$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=f_u(0,0)\cdot 1+f_v(0,0)\cdot 1=0.$$

这显然是不正确的. 由此可见, 链锁规则中 $f(u,v)$ 的可微性条件是必要的.

但是, 由于函数可微的充分条件是其偏导数连续, 所以可以在函数有连续偏导数的条件下来应用链锁规则. 由于许多常见的函数至少是 $C^{(1)}$ 类的, 所以只要能够复合, 那么就可以运用链锁规则. 另外, 当用于复合的各个函数都是 $C^{(k)}$ 类的, 那么可以通过反复运用链锁规则来求复合函数的 k 阶偏导数 (或导数).

例 3.4　设 $z=f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 f 是 $C^{(2)}$ 类函数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解　这里 $z=f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$ 是复合函数的一种记法, 没有明显写出中间变量.

令 $u=xy, v=\dfrac{y}{x}$, 则复合函数由 $z=f(u,v), u=xy, v=\dfrac{y}{x}$ 复合而成.

为了书写简便, 我们用 $f_i'\ \ (i=1,2)$ 表示 $f(u,v)$ 对第 i 个中间变量的偏导数, 用 $f_{ij}''(i,j=1,2)$ 表示 $f(u,v)$ 先对第 i 个中间变量再对第 j 个中间变量的二阶偏导数. 由链锁规则, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=yf_1'-\frac{y}{x^2}f_2'.$$

注意到 f_1' 和 f_2' 仍为 u 和 v 的函数, 再由链锁规则, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_1'+y\frac{\partial}{\partial y}f_1'-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}f_2'\\&=f_1'+y\left[f_{11}''\cdot x+f_{12}''\cdot\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}\left[f_{21}''\cdot x+f_{22}''\cdot\frac{1}{x}\right],\end{aligned}$$

因为 $f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数, 所以 $f''_{12}=f''_{21}$, 故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xyf''_{11}-\frac{y}{x^3}f''_{22}+f'_1-\frac{1}{x^2}f'_2.$$

在应用链锁规则时, 有时会出现复合函数的某些中间变量本身又是复合函数的自变量的情况, 这时要特别防止记号出现混淆.

例如, 设 $z=f(u,v,t)$ 可微, 而 $u=\varphi(s,t), v=\psi(s,t)$ 可偏导, 则按公式 (5), 复合函数 $z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t),t]$ 对 t 的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right).$$

这里有意识地将等式右边的最后一项写成 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)$, 为的是避免混同于等式左边的 $\dfrac{\partial z}{\partial t}$. 因为左边的 $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ 是在复合函数 $z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t),t]$ 中把 s 看作常数而对 t 的偏导数, 而右边的 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)$ 是在未经复合的函数 $z=f(u,v,t)$ 中把 u,v 看作常数, 而对 t 的偏导数. 一般地, 在这种情况下, 可以写成

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t},$$

或写成

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}.$$

例 3.5 设 $z=f(x,y), y=\varphi(x)$, 其中 f 和 φ 为 $C^{(2)}$ 类函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\varphi'(x),$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}&=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\varphi'(x)\right]+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\varphi'(x)\right]\varphi'(x)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\varphi''(x)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\varphi'(x)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\varphi'^2(x)+\frac{\partial f}{\partial y}\varphi''(x).\end{aligned}$$

例 3.6 设 $u=f(x,y,z), y=\varphi(x,t), t=\psi(x,z)$ 都是 $C^{(1)}$ 类函数, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解 经中间变量的代入知, 复合函数为

$$\begin{aligned}u&=f(x,y,z)=f(x,\varphi(x,t),z)\\&=f[x,\varphi(x,\psi(x,z)),z].\end{aligned}$$

由链锁规则, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}.$$

3.2 一阶全微分形式不变性

设以 u 和 v 为自变量的函数 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 可微, 则其全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

如果 u,v 又是 x,y 的函数 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 也可微, 则它们的全微分分别为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

由全微分的定义, 容易证明, 此时, 复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 可微, 再由复合函数求导的链锁规则, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

由此可见, 与一元函数一样, 在多元函数 $z=f(u,v)$ 中, 无论 u,v 为自变量还是中间变量, 一阶全微分具有形式不变性.

多元函数的二阶全微分不具有形式不变性.

在 $z=f(u,v)$ 中, 如果 u,v 为自变量, 则它的二阶全微分

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2z&=\left(\mathrm{d}u\frac{\partial}{\partial u}+\mathrm{d}v\frac{\partial}{\partial v}\right)^2z\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\mathrm{d}u)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\mathrm{d}v)^2.\end{aligned}$$

而当 u,v 是中间变量, 如 $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 时, 二阶全微分

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2z &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v\right)\\
&= \mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}^2u+\mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}v+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}^2v\\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\mathrm{d}u)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\mathrm{d}v)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}^2u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}^2v,
\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{d}^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2,$$

$$\mathrm{d}^2v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2.$$

之所以得到不同的结果, 是因为对于中间变量, 其二阶微分一般不为零.

利用一阶全微分形式不变性, 容易证明, 无论 u,v 为自变量, 还是中间变量, 都有如下微分法则:

(1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;

(2) $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$;

(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\quad(v\neq 0)$.

当运用链锁规则来求复合函数的偏导数时, 首先要分清自变量和中间变量, 现在有了一阶全微分形式不变性, 就可以不必考虑这些, 从而使计算显得比较方便.

例 3.7 设 $u=\dfrac{x}{y}+\sin\dfrac{y}{x}+\mathrm{e}^{yz}$, 求 $\mathrm{d}u$.

解

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)+\cos\frac{y}{x}\cdot\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)+\mathrm{e}^{yz}\cdot\mathrm{d}(yz)\\
&= \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}+\mathrm{e}^{yz}(z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z)\\
&= \left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+z\mathrm{e}^{yz}\right)\mathrm{d}y+y\mathrm{e}^{yz}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

本例如果改为求函数 u 的偏导数, 也可以先求出它的全微分, 最后得出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+z\mathrm{e}^{yz},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=y\mathrm{e}^{yz}.$$

例 3.8 求 $z=(x^2+y^2)^{xy}$ 的全微分.

在例 3.2 中我们曾用链锁规则求过 z 的偏导数, 现在用一阶全微分的形式不变性重新求解, 请大家对两种方法作一下比较.

解 设 $u=x^2+y^2, v=xy$, 则 $z=u^v$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=vu^{v-1}\mathrm{d}u+u^v\ln u\mathrm{d}v\\
&=xy(x^2+y^2)^{xy-1}\mathrm{d}(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^{xy}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}(xy)\\
&=xy(x^2+y^2)^{xy-1}(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)+(x^2+y^2)^{xy}\ln(x^2+y^2)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)\\
&=(x^2+y^2)^{xy}\left\{\left[\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+y\ln(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x+\right.\\
&\quad\left.\left[\frac{2xy^2}{x^2+y^2}+x\ln(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}y\right\}.
\end{aligned}$$

从本例可以看出, 对形如 $z=u^v$ 的幂指函数求全微分, 可以先把它看作幂函数, 再把它看作指数函数, 分别求全微分, 然后两项相加.

例 3.9 设 $u=f(x,y,z), y=\varphi(x,t), t=\psi(x,z)$ 都是 $C^{(1)}$ 类函数, 求 $\mathrm{d}u$.

这是例 3.6, 现在用一阶全微分形式不变性来计算.

解

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u&=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\mathrm{d}t\right]+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \psi}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\right]+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\\
&=\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\right]\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

结果与例 3.6 相同, 可以看出全微分的算法确实方便, 并且不易出错.

习 题 2.3

(A)

1. 求下列函数的导数或偏导数:

(1) $z=\mathrm{e}^{x-2y},\quad x=\sin t,\quad y=t^3,\quad$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$;

(2) $z=\arcsin(x-y),\quad x=3t,\quad y=4t^3,\quad$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$;

(3) $z=x^2y-xy^2,\quad x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad$ 求 $\dfrac{\partial z}{\partial r},\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$;

(4) $z=u^2\ln v,\quad u=\dfrac{x}{y},\quad v=3x-2y,$ 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 f 为可微函数, 验证:

(1) 若 $u=\sin x+f(\sin y-\sin x)$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos x+\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos y=\cos x\cos y$;

(2) 若 $u=xy+xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 则 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u+xy$;

(3) 若 $u=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$, 则 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{y^2}$;

(4) 若 $u=\dfrac{y^2}{3x}+f(xy)$, 则 $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-xy\dfrac{\partial u}{\partial y}+y^2=0$.

3. 设 f 为可微函数, 求下列函数的偏导数:

(1) $u=f(x^2+y^2-z^2)$; (2) $z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$;

(3) $u=f(x,xy,xyz)$; (4) $u=f(x-y+z,x^2+y^2-z^2)$.

4. 设 f 为 $C^{(2)}$ 类函数, 在下列问题中, 求所指出的偏导数:

(1) $z=f(x^2+y)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

(2) $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(3) $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(B)

1. 设 $z=\displaystyle\int_{2u}^{v^2+u}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,\quad u=\sin x,\quad v=\mathrm{e}^x,$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

2. 设 $z=(3x-2y)^{3x-2y}$, 试用两种不同的方法计算 z 的偏导数和全微分.

3. 设 $z=f(xy,x^2+y^2),\quad y=\varphi(x),$ 其中 f,φ 均可微, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

4. 设 f 为 $C^{(2)}$ 类函数, 在下列问题中, 求所指出的偏导数:

(1) $z=f(x,xy),$ 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(2) $z=f(x+y,y^2),$ 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(3) $z=f(\mathrm{e}^{xy},x^2-y^2),$ 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$, f,φ 二阶可导, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6. 设 f,φ 为 $C^{(2)}$ 类函数, $z=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 证明:

(1) $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$; (2) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

§4　隐函数微分法

4.1　由方程式确定的隐函数的微分法

在一元函数微分学中, 我们曾经用举例的方式指出由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的一元隐函数的求导方法. 本节我们借助偏导数的概念, 继续讨论这一问题, 并给出隐函数存在定理及隐函数求导的一般计算公式.

设有方程

$$F(x,y)=0.$$

需要解决的问题是: 在什么条件下, 此方程可以唯一地确定隐函数 $y=f(x)$, 并且这个函数是可导的?

例如, 设有方程

$$x^2+y^2-1=0,$$

在几何上, 它表示一个单位圆. 可以看出, 除了左、右两个顶点 $(-1,0)$ 和 (1,0) 外, 圆周上的其他任何一点 (x_0,y_0) 都可以找到适当的邻域, 在该邻域内确定唯一一个隐函数 $y=f(x)$, 并且这个函数在 $x=x_0$ 附近连续, 还具有连续导数. 但在点 $(-1,0)$ 和点 (1,0) 的任何邻域内却不具有这样的性质, 对于 $x=-1$ 的右邻域或 $x=1$ 的左邻域内任何一个 x, 由 "满足方程 $x^2+y^2-1=0$" 为对应法则, 将有两个 y 值

$$y_1=\sqrt{1-x^2},\qquad y_2=-\sqrt{1-x^2}$$

与之对应, 从而破坏了函数概念中关于函数值的唯一性要求.

下面的定理指出, 如何用二元函数 $F(x,y)$ 的性质来断定在满足方程 $F(x,y)=0$ 的点的某邻域内存在着隐函数, 以及该隐函数所具有的性质. 这个定理以及以下的几个定理, 统称为**隐函数存在定理**.

定理 4.1　设二元函数 $F(x,y)$ 满足

(1) 在包含点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某区域 D 内是 $C^{(1)}$ 类函数;

(2) $F(x_0,y_0)=0,\quad F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则有下述结论:

(1) 方程 $F(x,y)=0$ 在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset D$ 内唯一确定一个函数 $y=f(x)$, 它满足

$$F[x,f(x)]\equiv 0,\qquad f(x_0)=y_0;$$

(2) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内是 $C^{(1)}$ 类函数, 并且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}. \tag{6}$$

定理的证明较繁, 这里略去.

应当指出, 在很多情况下, 直接从方程 $F(x,y)=0$ 中解出 $y=f(x)$ (即所谓隐函数的显化) 是十分困难甚至是无法办到的事. 隐函数存在定理的重要意义就在于, 它根本不涉及隐函数的显化, 从理论上解决了隐函数的存在问题, 同时还给出了直接从方程本身求隐函数导数的计算公式.

下面我们在承认定理 4.1 前半部分结论的前提下来推导隐函数求导的公式 (6).

隐函数 $y=f(x)$ 满足恒等式

$$F[x,f(x)]\equiv 0,$$

其中 F 是 D 上的 $C^{(1)}$ 类函数, $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内可导. 由链锁规则, 在恒等式两边对 x 求导, 得

$$F_x(x,y)+F_y(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

又由于在点 P_0 的某邻域内 $F_y(x,y)\neq 0$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

隐函数存在定理可以推广到三元以及三元以上方程的情形.

定理 4.2 设三元函数 $F(x,y,z)$ 在包含点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某区域内是 $C^{(1)}$ 类函数, 且满足

$$F(x_0,y_0,z_0)=0, \qquad F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0,$$

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 P_0 的某邻域内唯一确定一个 $C^{(1)}$ 类的二元函数 $z=f(x,y)$, 它满足条件

$$f(x_0,y_0)=z_0,$$

且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}. \tag{7}$$

下面在隐函数存在的前提下, 推导公式 (7).

在恒等式

$$F[x,y,f(x,y)]\equiv 0$$

两边分别对 x,y 求偏导数, 由链锁规则, 有

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

由于 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 及 $F_z(x,y,z)$ 连续, 所以存在 P_0 的某邻域 $U(P_0)$, 使在该邻域内 $F_z(x,y,z)\neq 0$, 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 4.1　验证方程 $x^2+y^2=1$ 在点 (0,1) 的某邻域内能唯一确定一个 $C^{(1)}$ 类隐函数 $y=f(x)$, 并求 $f'(x),f''(x)$.

解　设 $F(x,y)=x^2+y^2-1$, 则 $F(x,y)$ 是 $C^{(1)}$ 类函数, 且 $F(0,1)=0$, $F_y(0,1)=2\neq 0$. 由隐函数存在定理知, 方程 $x^2+y^2=1$ 在点 (0,1) 的某邻域内能唯一确定一个 $C^{(1)}$ 类隐函数 $y=f(x)$, 并且

$$f'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{x}{y}.$$

由 $f'(x)$ 的表达式可知, 它在点 (0,1) 的某邻域内仍是 $C^{(1)}$ 类函数, 可以继续求导, 即

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y-x(-\frac{x}{y})}{y^2}\\&=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}.\end{aligned}$$

在实际应用中, 我们常常将验证隐函数存在定理的步骤加以省略或简化.

例 4.2　设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解　设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$, 当 $F_z=2z-4\neq 0$ 时,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{2z-4}=\frac{x}{2-z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2-z}\right)=\frac{(2-z)+x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

在具体求隐函数的导数或偏导数时, 有时也可以不套用公式.

例 4.3　设 $F(x,y,x-z,y^2-u)=0$, 其中 F 是 $C^{(2)}$ 类函数, 且 $F_4'\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解 在题中所给方程中, 视 u 为 x,y,z 的函数, 对该方程两端关于 y 求偏导数, 得

$$F_2'+F_4'(2y-u_y)=0, \tag{8}$$

从而

$$u_y=2y+\frac{F_2'}{F_4'}.$$

在 (8) 式两端再对 y 求偏导数, 注意到 F_2',F_4' 仍是 $x,y,x-z,y^2-u$ 的函数, 得

$$F_{22}''+F_{24}''(2y-u_y)+[F_{42}''+F_{44}''(2y-u_y)](2y-u_y)+F_4'(2-u_{yy})=0,$$

其中 $2y-u_y=-\dfrac{F_2'}{F_4'}, F_{24}''=F_{42}''$, 从而

$$F_{22}''-2\frac{F_2'}{F_4'}F_{24}''+\left(\frac{F_2'}{F_4'}\right)^2F_{44}''+F_4'(2-u_{yy})=0,$$
$$u_{yy}=2+\frac{1}{F_4'}F_{22}''-2\frac{F_2'}{F_4'^2}F_{24}''+\frac{F_2'^2}{F_4'^3}F_{44}''.$$

4.2 由方程组确定的隐函数的微分法

隐函数不仅可产生于方程式, 也可以产生于方程组中.

设有方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

我们的问题仍然是: 在什么条件下, 此方程组可以唯一地确定一对隐函数 $y=y(x),z=z(x)$, 并且如何直接从方程组本身求这对隐函数的导数?

定理 4.3 设三元函数 $F(x,y,z),G(x,y,z)$ 满足

(1) 在包含点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某区域 Ω 内是 $C^{(1)}$ 类函数;

(2) $F(x_0,y_0,z_0)=0,\ \ G(x_0,y_0,z_0)=0$;

(3) 在点 P_0 处, 行列式

$$J=\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}\neq 0.$$

则有下述结论:

(1) 方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在点 P_0 的某邻域内唯一确定一对一元函数

$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases}$ 它们满足

$$\begin{aligned} &F(x, y(x), z(x)) \equiv 0, \quad &&G(x, y(x), z(x)) \equiv 0, \\ &y(x_0) = y_0, &&z(x_0) = z_0; \end{aligned}$$

(2)　函数 $y = y(x), z = z(x)$ 在点 x_0 的某邻域内是 $C^{(1)}$ 类函数, 并且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

定理中出现的行列式称为**函数行列式**, 或 **Jacobi** (**雅可比**) **行列式**, 例如行列式 $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}$ 就是函数 F, G 关于变量 y, z 的 Jacobi 行列式, 习惯上记为

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}.$$

这样, 公式 (9) 可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}.$$

我们同样略去定理中隐函数存在性的证明, 而仅推导公式 (9).

在恒等式

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) \equiv 0, \\ G(x, y(x), z(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

两边分别对 x 求导, 由链锁规则, 有

$$\begin{cases} F_x + F_y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \\ G_x + G_y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + G_z \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0. \end{cases}$$

这是关于 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 的线性方程组, 其系数行列式为

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}.$$

由于在点 P_0 处 $J\neq 0$, 并且 F_y,F_z,G_y,G_z 连续, 所以在点 P_0 的某邻域内 $J\neq 0$, 再根据线性代数中的 Cramer (克莱姆) 法则, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}.$$

对由方程组确定的隐函数存在定理可作如下推广.

定理 4.4 设四元函数 $F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$ 在包含点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某区域内是 $C^{(1)}$ 类函数, 它们满足

$$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,\quad G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,$$

且在点 P_0 处行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在点 P_0 的某邻域内唯一确定一对 $C^{(1)}$ 类二元函数 $\begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y),\end{cases}$ 它们满足条件

$$u(x_0,y_0)=u_0,\quad v(x_0,y_0)=v_0,$$

且有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, &\qquad \frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}, &\qquad \frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.\end{aligned}$$

隐函数存在定理还可以推广到更一般的由 m 个 $n+m$ 元方程组成的方程组的情形.

例 4.4 设 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial r}{\partial x},\dfrac{\partial r}{\partial y},\dfrac{\partial \theta}{\partial x},\dfrac{\partial \theta}{\partial y}$.

解法 1 令

$$F(x,y,r,\theta)=r\cos\theta-x,$$
$$G(x,y,r,\theta)=r\sin\theta-y,$$

则 Jacobi 行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,\theta)}=\begin{vmatrix}-1 & -r\sin\theta\\ 0 & r\cos\theta\end{vmatrix}=-r\cos\theta,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,\theta)}=\begin{vmatrix}0 & -r\sin\theta\\ -1 & r\cos\theta\end{vmatrix}=-r\sin\theta,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,x)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -1\\ \sin\theta & 0\end{vmatrix}=\sin\theta,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,y)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ \sin\theta & -1\end{vmatrix}=-\cos\theta,$$

于是, 当 $J=r\neq 0$ 时,

$$\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,\theta)}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,\theta)}=\sin\theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,x)}=-\frac{\sin\theta}{r},\qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(r,y)}=\frac{\cos\theta}{r}.$$

解法 2 在方程组两端关于 x 求偏导数, 并注意 r,θ 是 x,y 的函数, 得

$$\begin{cases}1=\cos\theta\dfrac{\partial r}{\partial x}-r\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x},\\ 0=\sin\theta\dfrac{\partial r}{\partial x}+r\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}.\end{cases}$$

解此方程组, 当 $r\neq 0$ 时, 得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r}.$$

再在方程组两端关于 y 求偏导数, 类似地可解得

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta,\qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}.$$

解法 3 在方程组两端求全微分, 由一阶微分形式不变性, 得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta,\\ \mathrm{d}y=\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta.\end{cases}$$

解这个关于 $\mathrm{d}r,\mathrm{d}\theta$ 的线性方程组, 当 $r\neq 0$ 时, 得

$$\mathrm{d}r=\cos\theta\mathrm{d}x+\sin\theta\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}\theta=-\frac{\sin\theta}{r}\mathrm{d}x+\frac{\cos\theta}{r}\mathrm{d}y,$$

从而

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta,$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r},\qquad \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}.$$

例 4.5 设 $\begin{cases} x=-u^2+v+z, \\ y=u+vz, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解 由题意知, 方程组确定了 u,v 是 x,y,z 的函数. 在方程组的两端求全微分并加以整理, 得

$$\begin{cases} 2u\mathrm{d}u-\mathrm{d}v=-\mathrm{d}x+\mathrm{d}z, \\ \mathrm{d}u+z\mathrm{d}v=\mathrm{d}y-v\mathrm{d}z, \end{cases}$$

解这个关于 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的线性方程组, 当 $2uz+1\neq 0$ 时,

$$\mathrm{d}u=\frac{1}{2uz+1}[-z\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+(z-v)\mathrm{d}z],$$
$$\mathrm{d}v=\frac{1}{2uz+1}[\mathrm{d}x+2u\mathrm{d}y-(2uv+1)\mathrm{d}z],$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{z}{2uz+1},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2uz+1},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z-v}{2uz+1}.$$

例 4.6 设 $y=f(x,t)$, t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 确定的 x,y 的函数, 其中 f,F 是 $C^{(1)}$ 类函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解法 1 设 $t=\varphi(x,y)$, 则有方程式

$$y=f[x,\varphi(x,y)],$$

两端对 x 求导, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_x+f_t\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

其中

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_t},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_t},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_x+f_t\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{1-f_t\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}.$$

解法 2　联立题中两式, 得方程组

$$\begin{cases} f(x,t)-y=0, \\ F(x,y,t)=0. \end{cases}$$

由题意知, 该方程组确定了 t,y 是 x 的函数, 在方程组两端关于 x 求导, 得

$$\begin{cases} f_x+f_t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0, \\ F_x+F_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0, \end{cases}$$

解此方程组, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}.$$

*4.3　Jacobi 行列式的性质

Jacobi 行列式不仅在关于方程组的隐函数存在定理中有着重要作用, 在以后重积分的变量替换公式、曲面积分的计算等方面, 它还将有重要应用. 下面介绍它的几个基本性质.

性质 1　设函数

$$z_i=f_i(u_1,u_2,\cdots,u_n)\ (i=1,2,\cdots,n)$$

在区域 $U\subset\mathbf{R}^n$ 内是 $C^{(1)}$ 类函数, 而

$$u_j=\varphi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ (j=1,2,\cdots,n)$$

在区域 $X\subset\mathbf{R}^n$ 内是 $C^{(1)}$ 类函数, 且当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X$ 时, 对应点 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in U$, 则有

$$\frac{\partial(z_1,z_2,\cdots,z_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\frac{\partial(z_1,z_2,\cdots,z_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}\cdot\frac{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.$$

这个性质, 可以看作是复合函数 $z=f(u),u=\varphi(x)$ 求导公式

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

的推广.

证明 为简单起见, 仅对 $n=2$ 的情形加以证明. 由链锁规则及矩阵行列式的性质, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(x_1,x_2)}&=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial z_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial u_2}\\ \dfrac{\partial z_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}\\ &=\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(u_1,u_2)}\cdot\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(x_1,x_2)}.\end{aligned}$$ □

性质 2 设函数

$$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

在区域 $X\subset\mathbf{R}^n$ 内是 $C^{(1)}$ 类函数, 且

$$J=\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\neq 0,$$

则存在它们的 $C^{(1)}$ 类反函数

$$x_j=\varphi_j(y_1,y_2,\cdots,y_n)\quad(j=1,2,\cdots,n),^*$$

并且

$$\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\cdot\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=1.$$

这个性质可以看作反函数求导公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1$$

的推广.

证明 由隐函数存在定理, 函数组

$$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

唯一地确定一组隐函数

$$x_j=\varphi_j(y_1,y_2,\cdots,y_n)\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

*即映射 $y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 的逆映射.

它们就是性质 2 中给出的函数组的反函数.

将 y_i 看作以 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为中间变量, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为自变量的复合函数, 由性质 1, 有

$$1 = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}.$$

□

例如, 由直角坐标 (x, y) 化为极坐标的变换为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

它们是 r, θ 的 $C^{(1)}$ 类函数, 并且 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

由性质 2, 除极点 $r = 0$ 外, 变换的逆变换存在, 并且 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}} = \frac{1}{r}.$$

习 题 2.4

(A)

1. 求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数:

(1) $\sin y - \mathrm{e}^x - xy^2 = 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(2) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$;

(3) $z^3 - 3xyz = 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(4) $\mathrm{e}^{x+y+z} - xyz = 1$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的 $C^{(1)}$ 类函数, 证明

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

3. 设 $\varphi(u,v)$ 是 $C^{(1)}$ 类函数, 证明由方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定, F 是可微函数, 证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

5. 求下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数:

(1) $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+2y^2+3z^2=20, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$;

(2) $\begin{cases} x=\mathrm{e}^u+u\sin v, \\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

(B)

1. 设二元函数 F 是 $C^{(1)}$ 类函数, 它的两个偏导数 F_x,F_y 不同时为零, 函数 $u(x,y)$ 是 $C^{(2)}$ 类函数且满足 $F\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0$. 证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

2. 设函数 $z=f(u)$, 方程 $u=\varphi(u)+\displaystyle\int_y^x p(t)\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x,y 的函数, 其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微, 且 $\varphi'(u)\neq 1,p(t)$ 连续, 求

$$p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

3. 设 $u=f(x,y)$ 是 $C^{(2)}$ 类函数, 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 试将 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 变换成极坐标系下的形式.

4. 设 $u=\dfrac{1}{2}(x+y),v=\dfrac{1}{2}(x-y),\omega=z\mathrm{e}^y$, $\omega=\omega(u,v)$ 是 $C^{(2)}$ 类函数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2w$, 证明

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z.$$

§5　方向导数和梯度

5.1　方向导数

1. 方向导数的定义

我们知道, 二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数就是函数对自变量的变化率, 这种变化发生在与坐标轴平行的直线上. 在实际问题中, 有时要讨论函数沿某一方向或任意方向的变化率, 这就需要引入方向导数的概念.

设 $\boldsymbol{l}$ 为平面上非零向量, 其方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\boldsymbol{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与 $\boldsymbol{l}$ 同方向的单位向量, L 是平面上过点 $P_0(x_0,y_0)$ 且以 $\boldsymbol{l}$ 为方向向量的射线, 其参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\cos\beta, \end{cases} \qquad 0\leqslant t<+\infty.$$

现在讨论函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化情况. 设 $P(x,y)=(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)$ 为 L 上任意一点 (图 2.2), 如果函数的增量 $f(P)-f(P_0)$ 与点 P_0 和点 P 的距离 t 的比值

$$\frac{f(P)-f(P_0)}{t}$$

当点 P 沿射线趋于 P_0 (即 $t\to0^+$) 时极限存在, 那么该极限反映了函数在点 P_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率.

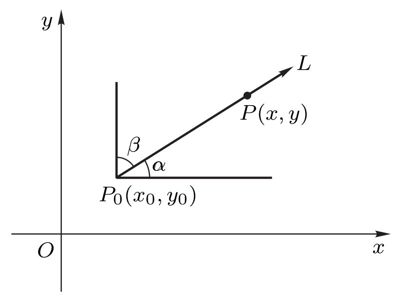

图 2.2

定义 5.1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义, $\boldsymbol{l}$ 是非零向量, $\boldsymbol{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与 $\boldsymbol{l}$ 同方向的单位向量. 如果极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在, 则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**, 记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$, 即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

应当特别指出, 这里的极限是单侧极限, 这一点与偏导数概念是有区别的.

设函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可偏导. 若取 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{l}_1}=\boldsymbol{i}=(1,0)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial l_1}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x};$$

若取 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{l}_2}=-\boldsymbol{i}=(-1,0)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial l_2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t,y)-f(x,y)}{t}=-\frac{\partial f}{\partial x}.$$

也就是说, 沿 x 轴正向的方向导数为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, 沿 x 轴负向的方向导数为 $-\dfrac{\partial f}{\partial x}$. 同理沿 y 轴正向的方向导数为 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, 沿 y 轴负向的方向导数为 $-\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

反之, 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿 x 轴正向及负向的方向导数都存在, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 也不一定存在; 沿 y 轴正向及负向的方向导数都存在, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 也不一定存在. 更一般地, 即使沿任何方向的方向导数都存在, 也不一定可偏导.

例如, 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 (0,0) 处沿任何方向 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{l}}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\alpha,t\cos\beta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t}=1.$$

但 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 处的两个偏导数不存在 (本章 §1 的例子).

2. 方向导数的计算

上例中 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 处沿任何方向的方向导数都存在. 值得注意的是, 该函数在原点不可微. 可见, 可微不是方向导数存在的必要条件. 但是, 以下定理表明, 可微是方向导数存在的充分条件, 并且方向导数可以通过偏导数来计算.

定理 5.1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微, $\boldsymbol{l}$ 为任一非零向量, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{l}}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与 $\boldsymbol{l}$ 同方向的单位向量, 则函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在, 且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta. \tag{10}$$

证明 由于 $f(x,y)$ 在点 P_0 可微, 所以有

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\=&f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0),\end{aligned}$$

当点 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 在以 (x_0,y_0) 为始点以 $\boldsymbol{l}$ 为方向的射线上时, 有 $\Delta x = t\cos\alpha, \Delta y = t\cos\beta$, 则

$$\begin{aligned}&f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)\\=\ &f_x(x_0,y_0)t\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)t\cos\beta+o(t).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}\\=\ &f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta,\end{aligned}$$

即 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 存在, 且公式 (10) 成立. □

方向导数的定义和计算公式可以推广到三元及三元以上的函数. 以三元函数为例, 叙述如下.

设 $\boldsymbol{l}$ 为空间上非零向量, 其方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 则函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta, z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}.$$

如果 $f(x,y,z)$ 在点 P_0 可微, 则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma.$$

例 5.1　求 $u=x^2y+y^2z+z^2x$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(1,-2,1)$ 的方向导数.

解　$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \ \cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{6}},\ \ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{6}},$$

而

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.2xy+z^2\right|_M=3,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.x^2+2yz\right|_M=3,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\left.y^2+2xz\right|_M=3.$$

由于函数 u 在点 M 处可微, 所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=3\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}-3\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}+3\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=0.$$

5.2 梯度

函数在给定点处沿不同方向的方向导数一般是不一样的, 那么函数沿什么方向的方向导数最大呢? 为此, 引入梯度的概念.

定义 5.2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 有连续的偏导数, 称向量

$$f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$$

为函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处的**梯度**(gradient), 记作 $\mathbf{grad}f(x_0,y_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0)$ *, 即

$$\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}.$$

利用梯度的概念, 方向导数的计算公式 (10) 可写成

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e_l},$$

即函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数等于函数在该点的梯度与单位向量 $\boldsymbol{e_l}$ 的数量积. 由于

$$\nabla f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e_l}=|\nabla f(x_0,y_0)|\cdot|\boldsymbol{e_l}|\cdot\cos\theta=|\nabla f(x_0,y_0)|\cos\theta,$$

其中 θ 是向量 $\nabla f(x_0,y_0)$ 与向量 $\boldsymbol{l}$ 的夹角. 可以看出, 当 $\boldsymbol{l}$ 与 $\nabla f(x_0,y_0)$ 方向一致时, $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=|\nabla f(x_0,y_0)|$, 当 $\boldsymbol{l}$ 与 $\nabla f(x_0,y_0)$ 方向相反时, $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=-|\nabla f(x_0,y_0)|$.

因此函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处沿梯度 $\nabla f(x_0,y_0)$ 方向的方向导数最大, 最大值为 $|\nabla f(x_0,y_0)|$; 而沿梯度相反方向 (负梯度方向) 的方向导数最小, 最小值等于 $-|\nabla f(x_0,y_0)|$.

梯度概念及上述结论可以推广到三元函数.

设函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 有连续的偏导数, 则它在点 P_0 处的梯度

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0,z_0)&=\nabla f(x_0,y_0,z_0)\\&=f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

当 $f(x,y,z)$ 在点 P_0 可微时, 它在点 P_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\boldsymbol{e_l}.$$

*算子 ∇ 也称为 Hamilton (哈密顿) 算子, 读作 nabla.

三元函数的梯度也是这样一个向量, 其方向是方向导数取得最大值的方向, 其模为方向导数的最大值.

例 5.2 设某金属板上的电压分布为 $V=50-x^2-4y^2$, 在点 $(1,-2)$ 处, 沿哪个方向电压升高得最快? 沿哪个方向电压下降得最快? 其速率各为多少? 沿哪个方向电压变化最慢?

解 函数沿梯度方向的方向导数最大, 即函数值上升得最快, 沿负梯度方向导数最小, 即函数值下降得最快. 由

$$\nabla V(1,-2)=(-2x,-8y)|_{(1,-2)}=(-2,16),$$
$$-\nabla V(1,-2)=(2,-16)$$

知, 在点 $(1,-2)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=(-2,16)$ 方向电压上升得最快, 沿 $\boldsymbol{l}=(2,-16)$ 方向电压下降得最快, 其上升或下降的速率都是 $\sqrt{2^2+16^2}=\sqrt{260}$.

函数沿与梯度垂直方向的方向导数为零. 与 $\nabla V(1,-2)=(-2,16)$ 垂直的方向为 (16,2) 或 $(-16,-2)$, 故在点 $(1,-2)$ 处沿这两个方向电压变化最慢.

不难证明, 梯度具有下列性质:

(1) $\nabla(c_1u+c_2v)=c_1\nabla u+c_2\nabla v,\quad c_1,c_2$ 为常数;

(2) $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$;

(3) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2},\quad v\neq 0$;

(4) $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u,\quad f$ 是可微函数.

例 5.3 设位于原点 O 处有一电量为 q 的点电荷, 其周围形成一电场, 它在空间任一点 $P(x,y,z)$ 处产生的电位 $u=\dfrac{q}{r}$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求电场强度 $\boldsymbol{E}$.

解 记 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, 根据物理学知,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=-\nabla u=-\left(\frac{q}{r}\right)'\nabla r=\frac{q}{r^2}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right)\\&=\frac{q}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\frac{q}{r^3}\boldsymbol{r},\end{aligned}$$

从而有

$$|\boldsymbol{E}|=\frac{q}{r^3}|\boldsymbol{r}|=\frac{q}{r^2}.$$

这说明点电荷的场强, 其方向是向径 $\boldsymbol{r}$ 的方向, 其大小反比于 r^2, 且在以原点为中心的同心球面上数值相等.

习　题　2.5

(A)

1. 求下列函数在指定点沿指定方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数:

(1) $z = x\arctan\dfrac{y}{x}$, $\quad (1,1)$, $\qquad \boldsymbol{l} = (2,1)$;

(2) $u = \mathrm{e}^x \cos yz$, $\quad (0,1,0)$, $\quad \boldsymbol{l} = (2,1,-2)$;

(3) $u = \ln r$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\ (3,4,12), \boldsymbol{l} = (3,6,-2)$.

2. 计算 $z = x^2 - xy + y^2$ 在点 (1,1) 沿 $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 方向的方向导数, 并求:

(1) 在哪个方向上方向导数最大, 最大值是多少;

(2) 在哪个方向上方向导数最小, 最小值是多少;

(3) 在哪个方向上方向导数为零.

3. 求下列函数在指定点的梯度:

(1) $f(x,y) = \ln(x^2+xy+y^2)$, $\quad (1,-1)$;

(2) $f(x,y,z) = z^3 - 3xyz + y^3$, $\quad (1,2,3)$.

4. 设 $u = u(x,y,z), v = v(x,y,z)$ 及 $f(u)$ 均为可微函数, 证明:

(1) $\nabla(c_1u + c_2v) = c_1\nabla u + c_2\nabla v$, $\quad c_1, c_2$ 为任意常数;

(2) $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$;

(3) $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$.

5. 一个登山者在山坡上点 $\left(-\dfrac{3}{2}, -1, \dfrac{3}{4}\right)$ 处, 山坡的高度为 $z = 5 - x^2 - 2y^2$, 他决定沿最陡的道路向上攀登, 问他应当选什么方向?

6. 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 证明 ∇u 为常向量的充分必要条件是 u 为线性函数

$$u = ax + by + cz + d \quad (a,b,c,d\text{为常数}).$$

§6　多元微分学的几何应用

6.1　空间曲线的切线和法平面

设 $\varGamma$ 是空间一条曲线, M_0 是 $\varGamma$ 上一定点, M 是 $\varGamma$ 上任意一点, 过 M_0, M 两点的直线 M_0M 称为曲线 $\varGamma$ 的割线. 如果当点 M 沿曲线 $\varGamma$ 趋于点 M_0 时, 割线 M_0M 存在极限位置 M_0T, 则称直线 M_0T 为曲线 $\varGamma$ 在点 M_0 的**切线**, 过点 M_0 且与切线 M_0T 垂直的平面 π 称为曲线 $\varGamma$ 在点 M_0 的**法平面** (图 2.3).

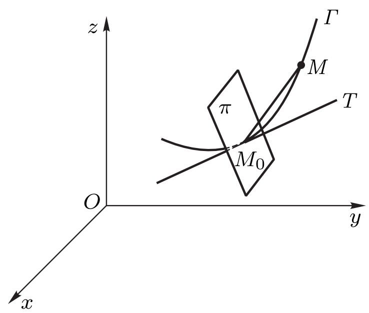

图 2.3

下面就不同形式的曲线方程来讨论曲线存在切线的条件, 并建立切线与法平面的方程.

(1) 设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),$$

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$ 对应于参数 $t=t_0$. 函数 $x(t),y(t),z(t)$ 在 t_0 处的导数均存在, 并且

$$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\neq\mathbf{0}.$$

设动点 $M(x,y,z)\in\Gamma$ 对应于参数 $t=t_0+\Delta t\ (\Delta t\neq 0)$, 则割线 M_0M 的方向向量为

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=(\Delta x,\Delta y,\Delta z).$$

上式中乘以 $\dfrac{1}{\Delta t}$, 得

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right),$$

它仍然是割线 M_0M 的方向向量. 令 $\Delta t\to 0$, 即 $M\to M_0$ 取极限, 割线 M_0M 的方向向量的极限即为切线 M_0T 的方向向量, 称之为**切向量**, 记为 $\boldsymbol{s}$, 则

$$\boldsymbol{s}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)).$$

由空间解析几何知, 曲线 Γ 在点 M_0 的切线 M_0T 的方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)};$$

曲线 Γ 在点 M_0 的法平面 π 的方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

例 6.1 求曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点(1,1,1)处的切线与法平面方程.

解 $$(x'(t),y'(t),z'(t))=(1,2t,3t^2),$$
点 (1,1,1) 对应于参数 $t=1$, 故曲线在点 (1,1,1) 处的切向量

$$\boldsymbol{s}=(x'(1),y'(1),z'(1))=(1,2,3).$$

所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3};$$

法平面方程为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

即

$$x+2y+3z-6=0.$$

(2) 设空间曲线 $\varGamma$ 的方程为

$$y=y(x),\qquad z=z(x),$$

它是两柱面 $y=y(x)$ 与 $z=z(x)$ 的交线. 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\varGamma$, 其中 $y_0=y(x_0),z_0=z(x_0)$, 并且导数 $y'(x_0),z'(x_0)$ 都存在.

我们取 x 为参数, 就得到 $\varGamma$ 的参数方程

$$x=x,\quad y=y(x),\quad z=z(x).$$

根据情形 1 的结论知, 曲线 $\varGamma$ 在点 M_0 的切向量为

$$\boldsymbol{s}=(1,y'(x_0),z'(x_0));$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)};$$

法平面方程为

$$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0.$$

(3) 设空间曲线 $\varGamma$ 的一般方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

点 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$. 函数 $F(x,y,z), G(x,y,z)$ 在点 M_0 的某邻域内是 $C^{(1)}$ 类函数, 且在点 M_0 处 Jacobi 行列式

$$m = \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}, n = \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}, p = \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}$$

不全为零.

不妨设 $m = \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0} \neq 0$, 由隐函数存在定理, 所给方程组在点 M_0 的某个邻域内唯一确定一组隐函数 $y = y(x), z = z(x)$, 并且

$$y'(x_0) = \frac{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0}}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}} = \frac{n}{m}, \quad z'(x_0) = \frac{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0}}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}} = \frac{p}{m}.$$

根据情况 2 的结论知, 曲线 Γ 在点 M_0 的切向量为

$$(1, y'(x_0), z'(x_0)) = \left(1, \frac{n}{m}, \frac{p}{m}\right),$$

或者取为

$$\boldsymbol{s} = (m, n, p).$$

故切线方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p};$$

法平面方程为

$$m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0.$$

为了便于记忆, 可以用行列式将 $\boldsymbol{s}$ 记为

$$\boldsymbol{s} = \left.\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_{M_0}.$$

例 6.2 求曲线 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 10, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $M_0(1, -2, 1)$ 处的切线和法平面方程.

解 令 $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 10, G(x,y,z) = x + y + z$, 则在点 $M_0(1, -2, 1)$ 处

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s} &= \left.\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}\right|_{M_0} = \left.\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2x & 4y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|_{M_0} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -10(1, 0, -1). \end{aligned}$$

故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1};$$

法平面方程为

$$(x-1)+0(y+2)-(z-1)=0,$$

即

$$x-z=0.$$

最后我们指出, 当空间曲线 Γ 由参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

给出时, 若 $x'(t),y'(t),z'(t)$ 连续且不同时为零, 则在曲线 Γ 上每一点处都有切线, 并且切线随着切点的移动而连续地变动, 我们称 Γ 是**光滑曲线**.

当空间曲线 Γ 由方程

$$y=y(x),\qquad z=z(x)$$

给出时, 若 $y'(x),z'(x)$ 连续, 则 Γ 是光滑曲线.

当空间曲线 Γ 由一般方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

给出时, 若 F,G 是 $C^{(1)}$ 类函数且 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$$

不同时为零, 则 Γ 是光滑曲线.

6.2 曲面的切平面与法线

我们仍根据不同形式的曲面方程来讨论曲面的切平面和法线.

情形 1 设曲面 Σ 的方程为

$$F(x,y,z)=0,$$

$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$. 函数 $F(x,y,z)$ 在点 M_0 的某邻域内是 $C^{(1)}$ 类函数, 且 $F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)$ 不同时为零.

在曲面 Σ 上过点 M_0 任做一条曲线 Γ, 设 Γ 的参数方程为

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 对应于参数 t_0. 函数 $x(t), y(t), z(t)$ 在点 t_0 的导数存在, 并且

$$(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq \mathbf{0}.$$

由于曲线 Γ 在曲面 Σ 上, 所以

$$F[x(t), y(t), z(t)] \equiv 0.$$

在恒等式两端对 t 求导数, 并令 $t = t_0$, 由链锁规则, 有

$$F_x(M_0)x'(t_0) + F_y(M_0)y'(t_0) + F_z(M_0)z'(t_0) = 0.$$

若记 $\boldsymbol{n} = (F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)), \boldsymbol{s} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$, 则上式可写成

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s} = 0,$$

即向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\boldsymbol{s}$ 垂直.

$\boldsymbol{s}$ 是曲线 Γ 在点 M_0 的切向量, Γ 是曲面 Σ 上经过点 M_0 的任意一条曲线, 所有这些曲线在点 M_0 的切线都与同一向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直, 因此这些切线共面. 这个平面称为曲面 Σ 在点 M_0 的**切平面**, $\boldsymbol{n}$ 为切平面的法向量, 也称为曲面 Σ 在点 M_0 的**法向量**. 过点 M_0 且垂直于切平面的直线称为曲面 Σ 在点 M_0 的**法线**, 显然 $\boldsymbol{n}$ 又是法线的方向向量 (图 2.4).

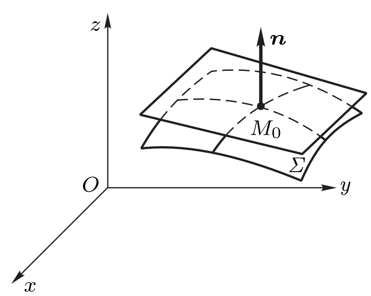

图 2.4

我们看到, 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在点 M_0 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 恰好是函数 $F(x, y, z)$ 在点 M_0 的梯度

$$\boldsymbol{n} = \nabla F(M_0) = (F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)).$$

曲面 Σ 在点 M_0 的切平面和法线方程分别为

$$F_x(M_0)(x - x_0) + F_y(M_0)(y - y_0) + F_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{F_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(M_0)}.$$

例 6.3 求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在其上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面和法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$, 则

$$\boldsymbol{n}=\nabla F(M_0)=\left(\frac{2}{a^2}x_0,\frac{2}{b^2}y_0,\frac{2}{c^2}z_0\right).$$

于是所求切平面方程为

$$\frac{1}{a^2}x_0(x-x_0)+\frac{1}{b^2}y_0(y-y_0)+\frac{1}{c^2}z_0(z-z_0)=0.$$

由于 M_0 在椭球面上, 即 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$, 所以切平面方程可化简为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1;$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}.$$

情形 2 设曲面 Σ 的方程为

$$z=f(x,y),$$

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, 其中 $z_0=f(x_0,y_0)$. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内是 $C^{(1)}$ 类函数.

我们把曲面 Σ 的方程写成 $f(x,y)-z=0$, 并令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$. 根据情形 1 的结论知, 曲面 Σ 在点 M_0 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1);$$

切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0;$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

例 6.4 求椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 在点 $M_0(1,-1,3)$ 处的切平面方程和法线方程.

解　因 $\boldsymbol{n}=(z_x,z_y,-1)|_{(1,-1)}=(2,-4,-1)$, 故所求切平面方程为

$$2(x-1)-4(y+1)-(z-3)=0,$$

即

$$2x-4y-z-3=0;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-1}.$$

*__情形 3__　设曲面 Σ 的参数方程为

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),$$

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ 对应于参数 $u=u_0,v=v_0$. 函数 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 在点 $P_0(u_0,v_0)$ 的某邻域内是 $C^{(1)}$ 类函数, 并且

$$\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}\right|_{P_0}=\left.\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|_{P_0}\neq\mathbf{0}.$$

记 $A=\left.\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0},B=\left.\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0},C=\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}$, 不妨设 $C\neq 0$. 由隐函数存在定理, 方程组

$$x=x(u,v),\qquad y=y(u,v)$$

在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某邻域唯一确定一组隐函数

$$u=u(x,y),\qquad v=v(x,y),$$

并且在 (x_0,y_0) 处,

$$u_x=\frac{y_v}{C},\quad v_x=-\frac{y_u}{C},\quad u_y=-\frac{x_v}{C},\quad v_y=\frac{x_u}{C}.$$

将 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 代入 $z=z(u,v)$ 得

$$z=z(u(x,y),v(x,y)).$$

在 (x_0,y_0) 处对 x,y 求偏导数, 由链锁规则, 有

$$\begin{aligned}z_x&=z_u\cdot u_x+z_v\cdot v_x=\frac{1}{C}(z_uy_v-z_vy_u)=-\frac{A}{C},\\ z_y&=z_u\cdot u_y+z_v\cdot v_y=\frac{1}{C}(-z_ux_v+z_vx_u)=-\frac{B}{C}.\end{aligned}$$

根据情形 2 的结论知, 曲面 Σ 在点 M_0 的法向量为

$$(z_x, z_y, -1) = \left(-\frac{A}{C}, -\frac{B}{C}, -1\right),$$

或者取为

$$\boldsymbol{n} = (A, B, C).$$

切平面方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

例 6.5 求曲面 $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$ 在对应于 $u = 1, v = -1$ 的点处的切平面方程.

解 曲面 Σ 上对应于 $u = 1, v = -1$ 的点为 $M(0, 2, 0)$, 在该点

$$\left.\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}\right|_{(1,-1)} = \left.\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2u & 3u^2 \\ 1 & 2v & 3v^2 \end{vmatrix}\right|_{(1,-1)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (12, 0, -4),$$

曲面 Σ 在点 M 处的法向量可取为

$$\boldsymbol{n} = (3, 0, -1).$$

故所求切平面方程为

$$3x + 0 \cdot (y - 2) - z = 0,$$

即

$$3x - z = 0.$$

最后与曲线类似地我们指出, 当曲面 Σ 由方程

$$F(x, y, z) = 0$$

给出时, 若 F_x, F_y, F_z 连续且不同时为零, 则在曲面 Σ 上每一点处都有切平面和法线, 并且法线随着切点的移动而连续变动, 我们称 Σ 是**光滑曲面**.

习　题　2.6

(A)

1. 求下列曲线在指定点处的切线与法平面方程:

(1) $x=2\sin^2 t,\quad y=2\sin 2t,\quad z=4\cos^2 t,\quad t=\dfrac{\pi}{6}$;

(2) $x=\dfrac{t}{1+t},\quad y=\dfrac{1+t}{t},\quad z=t^2,\quad t=1$;

(3) $y^2=2mx,\quad z^2=m-x,\quad (x_0,y_0,z_0)$;

(4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y-z=0, \end{cases}\quad (1,1,2)$.

2. 求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点, 使曲线在该点的切线与平面 $x+2y+z=4$ 平行.

3. 求下列曲面在指定点处的切平面和法线方程:

(1) $\mathrm{e}^z-z+xy=3,\quad (2,1,0)$;

(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x},\quad \left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $x=\mathrm{e}^{2y-z},\quad (1,1,2)$;

*(4) $x=(2-\sin\varphi)\cos\theta,\quad y=(2-\sin\varphi)\sin\theta,\quad z=\cos\varphi,\quad \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. 在椭球面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{z^2}{36}=1$ 上求一点 M, 使该点处的切平面平行于平面 $3x-3y+z=0$.

5. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=x$ 的切平面, 使其垂直于平面 $x-y-z=2$ 和 $x-y-\dfrac{1}{2}z=2$.

(B)

1. 过直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面, 求其方程.

2. 证明曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 上任意点处的切平面与坐标平面围成的体积是定值.

3. 证明曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 上任意点处的切平面在各坐标轴上截距的平方和等于 a^2.

4. 证明所有与曲面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 相切的平面都相交于一点.

5. 两曲面称为是正交的, 如果它们在交线上任一点处的法向量互相垂直. 证明曲面 $z^2=x^2+y^2$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 正交.

§7　多元函数的 Taylor (泰勒) 公式与极值问题

7.1　多元函数的 Taylor 公式

在微积分的理论研究和实际应用中, Taylor 公式有十分重要的作用, 其基本想法是在一点的附近用一个多项式来近似地替代原来的函数. 对于一元函数, 我们已经了解了它的两种常用形式: 带有 Lagrange (拉格朗日) 余项及 Peano (佩亚诺) 余项的 Taylor 公式. 在此基础上, 可以推导出二元函数的 Taylor 公式, 进一步推广, 便得到 n 元函数的 Taylor 公式.

定理 7.1　设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内是 $C^{(n+1)}$ 类函数, $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 是该邻域内任一点, 则至少存在一个 $\theta\in(0,1)$, 使

$$\begin{aligned} & f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \\ = \ & f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+R_n, \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y). \tag{12}$$

(12) 式称为 **Lagrange 余项**, (11) 式称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**带有 Lagrange 余项的 n 阶 Taylor 公式**, 这里约定

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i(\Delta x)^{k-i}(\Delta y)^i\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\quad(k=1,2,\cdots,n+1).$$

证明　连接点 (x_0,y_0) 和点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 得一条线段, 其参数方程为

$$x=x_0+t\Delta x,\quad y=y_0+t\Delta y,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

作辅助函数

$$\varphi(t)=f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

则

$$\varphi(0)=f(x_0,y_0),\quad \varphi(1)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y).$$

由于 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内是 $C^{(n+1)}$ 类函数, 根据复合函数求导的链锁规则, $\varphi\in C^{(n+1)}[0,1]$. 再由一元函数的 Taylor 公式有

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta),\quad 0<\theta<1. \tag{13}$$

应用链锁规则, 得

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= f_x(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x + f_y(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta y\\ &= \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y),\\ \varphi''(t) &= f_{xx}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)(\Delta x)^2 + f_{yy}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)(\Delta y)^2+\\ &\quad 2f_{xy}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x\Delta y\\ &= \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y).\end{aligned}$$

由数学归纳法, 可得

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y),\quad k=1,2,\cdots,n+1.$$

代入 (13) 式, 定理得证. □

定理 7.2　设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内是 $C^{(n)}$ 类函数, 则当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\\ &= f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+R_n,\end{aligned}\tag{14}$$

其中 $R_n=o(\rho^n)$ 称为 **Peano 余项**, (14) 式称为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**带有 Peano 余项的 n 阶 Taylor 公式**.

定理的证明从略.

$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+\\ &\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(\Delta x)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right]+o(\rho^2),\end{aligned}\tag{15}$$

注意, $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的梯度

$$\nabla f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right),$$

再引入矩阵

$$\boldsymbol{H}(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\end{pmatrix},$$

称其为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的 **Hesse (黑塞) 矩阵**. 如果记

$$\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0),\quad \Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x,\Delta y),$$

则 (15) 式可以写成

$$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+o(\rho^2).$$

由于 $f(x,y)$ 是 $C^{(2)}$ 类函数, 二阶混合偏导数与求导次序无关, 所以 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ 是二阶实对称矩阵, 且

$$\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$$

是关于 $\Delta x,\Delta y$ 的实二次型, 其正定性、负定性由矩阵 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ 的正定性、负定性确定, 这一性质对讨论二元函数的极值问题十分重要.

例 7.1　求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ 带有 Lagrange 余项的 Maclaurin (麦克劳林) 公式.

解　对 $k=1,2,\cdots,n+1$, 有

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}=\mathrm{e}^{x+y}\quad (i=0,1,\cdots,k),$$

所以 $\dfrac{\partial^k f(0,0)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}=1$, 由 (11),(12) 式有

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+R_n,$$

其中

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}\mathrm{e}^{\theta(x+y)},\quad 0<\theta<1.$$

7.2　多元函数的极值问题

在实际问题中, 我们经常会遇到多元函数的极值问题. 作为多元函数微分学的一个重要应用, 本段先将一元函数极值问题的概念推广到多元函数, 然后建立多元函数极值问题的必要条件和充分条件, 并讨论多元函数的最大值、最小值问题.

1. 极值

定义 7.1　设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的某邻域 $U(\boldsymbol{x}_0)$ 内有定义, 若 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathring{U}(\boldsymbol{x}_0)$, 恒有

$$f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{x}_0)\quad (f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}_0)),$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 取得**极大值** (**极小值**), 点 $\boldsymbol{x}_0$ 称为 $f(\boldsymbol{x})$ 的**极大值点** (**极小值点**). 极大值、极小值统称为**极值**, 极大值点、极小值点统称为**极值点**.

例如, 二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 (0,0) 取极小值 $z(0,0)=0$, 而 $z=1-x^2-y^2$ 在点 (0,0) 取得极大值 $z(0,0)=1$.

定理 7.3 (函数取极值的必要条件)　设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可偏导, 并取得极值, 则

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,n),\quad 即\ \nabla f(\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}.$$

证明　以二元函数情况加以证明. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可偏导, 并取得极值, 则固定 $y=y_0$ 时, 一元函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在点 x_0 可导, 并取得极值. 由一元函数取极值的必要条件, 有

$$\varphi'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0.$$

同理, 有

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$$ □

称满足 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$ 的点 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的**驻点** (或**稳定点**).

定理 7.3 表明, 对可偏导的 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$, 极值点必为驻点. 但是, 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的驻点未必是它的极值点. 例如二元函数 $z=x^2-y^2$, 由解析几何知它的图形是双曲抛物面, 点 (0,0) 不是极值点, 但 $z_x|_{(0,0)}=2x|_{(0,0)}=0$, $z_y|_{(0,0)}=-2y|_{(0,0)}=0$.

此外还要指出, 函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的偏导数不存在的点也可能是它的极值点, 例如二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 取得极小值, 但它的两个偏导数在点 $(0,0)$ 处不存在.

下面给出验证二元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的驻点是否为它的极值点的充分条件.

定理 7.4 (函数取极值的充分条件)　设二元函数 $f(\boldsymbol{x})\in C^{(2)}(U(\boldsymbol{x}_0))$, $\boldsymbol{x}_0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的驻点, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 Hesse 矩阵, 则

(1) 若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ 为正定矩阵, $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 取得极小值;

(2) 若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ 为负定矩阵, $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 取得极大值;

(3) 若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ 为不定矩阵, $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 无极值;

(4) 若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)$ 为半正定或半负定矩阵, $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可能有极值, 也可能无极值.

将二元函数 $f(x,y)$, 在 (x_0,y_0) 处的 Hesse 矩阵记为

$$\boldsymbol{H}(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}.$$

根据线性代数理论, 知

(1) 当 $A>0$, 且 $AC-B^2>0$ 时, $\boldsymbol{H}(x_0,y_0)$ 为正定矩阵;

(2) 当 $A<0$, 且 $AC-B^2>0$ 时, $\boldsymbol{H}(x_0,y_0)$ 为负定矩阵;

(3) 当 $AC-B^2<0$ 时, $\boldsymbol{H}(x_0,y_0)$ 为不定矩阵;

(4) 当 $AC-B^2=0$ 时, $\boldsymbol{H}(x_0,y_0)$ 为半正定或半负定矩阵.

从而有如下结论.

推论 7.1 设二元函数 $f(x,y)\in C^{(2)}(U(x_0,y_0)),(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点, 记

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f_{yy}(x_0,y_0),$$

则

(1) 当 $AC-B^2>0$, 且 $A>0$ 时, $f(x_0,y_0)$ 是极小值;

(2) 当 $AC-B^2>0$, 且 $A<0$ 时, $f(x_0,y_0)$ 是极大值;

(3) 当 $AC-B^2<0$ 时, $f(x_0,y_0)$ 不是极值;

(4) 当 $AC-B^2=0$ 时, 不能确定 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值.

下面证明定理 7.4.

证明 由带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式及 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$, 当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ &= \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+o(\rho^2)\\ &= \frac{1}{2}[A(\Delta x)^2+2B\Delta x\Delta y+C(\Delta y)^2]+o(\rho^2).\end{aligned}$$

设 $\Delta x=\rho\cos t,\Delta y=\rho\sin t$, 并记

$$\varphi(t)=A\cos^2 t+2B\cos t\sin t+C\sin^2 t,\quad t\in[0,2\pi],$$

则

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{2}\rho^2(A\cos^2 t+2B\cos t\sin t+C\sin^2 t)+o(\rho^2)\\ &= \frac{1}{2}\rho^2\varphi(t)+o(\rho^2),\\ \frac{\Delta f}{\rho^2} &= \frac{1}{2}\varphi(t)+o(1)\quad(\rho\neq 0).\end{aligned}$$

(1) 当 $\boldsymbol{H}(x_0, y_0)$ 正定时, $\forall t \in [0, 2\pi], \varphi(t) > 0$. 因为 $\varphi(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上连续, 故必有最小值 $\varphi(t_0) > 0$. 由

$$\frac{\Delta f}{\rho^2} \geqslant \frac{1}{2}\varphi(t_0) + o(1) \to \frac{1}{2}\varphi(t_0) > 0 \quad (\rho \to 0)$$

知 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < \rho < \delta$ 时, $\dfrac{\Delta f}{\rho^2} > 0$, 从而

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) > 0,$$

即 $f(x_0, y_0)$ 为极小值;

(2) 同理, 当 $\boldsymbol{H}(x_0, y_0)$ 负定时, $f(x_0, y_0)$ 为极大值;

(3) 当 $\boldsymbol{H}(x_0, y_0)$ 不定时, $\varphi(t)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上变号, 设 $\varphi(t_1) > 0, \varphi(t_2) < 0$.

由 $\dfrac{\Delta f}{\rho^2} = \dfrac{1}{2}\varphi(t) + o(1)$ 知, 当 $(\Delta x, \Delta y)$ 沿直线 $\Delta y = \tan t_1 \Delta x$ 趋于 $(0, 0)$ 时,

$$\frac{\Delta f}{\rho^2} = \frac{1}{2}\varphi(t_1) + o(1) \to \frac{1}{2}\varphi(t_1) > 0 \quad (\rho \to 0).$$

从而在点 (x_0, y_0) 的任何邻域内总有点使 $\Delta f > 0$. 同理, 在点 (x_0, y_0) 的任何邻域内也总有点使 $\Delta f < 0$, 即 $f(x_0, y_0)$ 不是极值.

(4) 当 $\boldsymbol{H}(x_0, y_0)$ 半正定或半负定时, 例如

$$f(x, y) = x^4 + y^4, \qquad g(x, y) = x^4 - y^4.$$

在原点 (0,0) 都有 $AC - B^2 = 0$. 而 $f(0, 0)$ 是极小值, $g(0, 0)$ 不是极值. □

为了更好地理解定理 7.4, 我们给出如下的几何解释.

设 (x_0, y_0) 是二元函数 $f(x, y)$ 的驻点. 由 Taylor 公式, 在点 $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 附近, 曲面 $z = f(x, y)$ 可以由二次曲面

$$\begin{aligned} z &= g(x, y) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}[A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2] \end{aligned}$$

近似替代.

当 $\boldsymbol{H}(x_0, y_0)$ 为正定矩阵时, $z = g(x, y)$ 为顶点在 P_0、开口向上的椭圆抛物面, $f(x_0, y_0)$ 是 $g(x, y)$ 及 $f(x, y)$ 的极小值; 当 $\boldsymbol{H}(x_0, y_0)$ 为负定矩阵时, $z = g(x, y)$ 为顶点在 P_0、开口向下的椭圆抛物面, $f(x_0, y_0)$ 为 $g(x, y)$ 及 $f(x, y)$ 的极大值; 当 $\boldsymbol{H}(x_0, y_0)$ 为不定矩阵时, $z = g(x, y)$ 为双曲抛物面, $f(x_0, y_0)$ 不是 $g(x, y)$ 及 $f(x, y)$ 的极值.

例 7.2　求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解　令 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0, \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0, \end{cases}$ 解得驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$. 而

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\quad f_{xy}(x,y)=0,\quad f_{yy}(x,y)=-6y+6.$$

在点 $(1,0)$ 处, $AC-B^2=72>0,\ A=12>0$, 故 (1,0) 为极小值点, 极小值为 $f(1,0)=-5$;

在点 $(1,2)$ 和点 $(-3,0)$ 处, $AC-B^2=-72<0$, 故 (1,2), $(-3,0)$ 不是极值点;

在点 $(-3,2)$ 处, $AC-B^2=72>0,\ A=-12<0$, 故 $(-3,2)$ 为极大值点, 极大值为 $f(-3,2)=31$.

2. 最大值与最小值

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭区域, n 元函数 $f(\boldsymbol{x})\in C(\Omega)$, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上必有最大值和最小值, 它们在 Ω 的内部或 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上取得. 如果 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 内的点 $\boldsymbol{x}_0$ 取得最大值或最小值, 则点 $\boldsymbol{x}_0$ 必是 $f(\boldsymbol{x})$ 的极值点. 因此, 我们可以用下述方法求 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上的最大值、最小值:

(1) 先求出 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 内的可能极值点的函数值;

(2) 再求出 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\partial\Omega$ 上的最大值, 最小值;

(3) 将这些函数值相比较, 其中最大的就是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上的最大值, 最小的就是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上的最小值.

例 7.3　设 D 是由 x 轴, y 轴及直线 $x+y=6$ 围成的三角形区域, 求函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在 D 上的最大值与最小值 (图 2.5).

解　解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0, \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0, \end{cases}$$

得 $f(x,y)$ 在 D 内唯一的驻点 (2,1), $f(2,1)=4$.

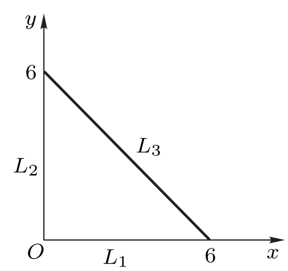

图 2.5

考虑 $f(x,y)$ 在 D 的边界 ∂D 上取值情况. 如图 2.5 所示, ∂D 由三条线段 L_1,L_2,L_3 组成.

在 $L_1: y=0, 0\leqslant x\leqslant 6$ 上 $f(x,y)=0$; 在 $L_2: x=0, 0\leqslant y\leqslant 6$ 上 $f(x,y)=0$; 在 $L_3: y=6-x, 0\leqslant x\leqslant 6$ 上

$$z=\varphi(x)=f(x,6-x)=2x^3-12x^2,\quad x\in[0,6].$$

令 $z' = 6x^2 - 24x = 0$, 得 $\varphi(x)$ 在 (0,6) 内唯一驻点 $x = 4$, 从而 $z = \varphi(x)$ 在 [0,6] 上的最大值为 0, 最小值为 $\varphi(4) = -64$, 即 $f(x,y)$ 在 L_3 上最大值为 0, 最小值为 $f(4,2) = -64$.

比较这些函数值, 知 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 $f(2,1) = 4$, 最小值为 $f(4,2) = -64$.

在实际问题中, Ω 不一定是闭区域, 也不一定是有界的. 这时, 由 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上连续这一条件不能保证 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上必有最大值、最小值. 但是, 如果我们根据问题的性质可以知道 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上存在最大 (或最小) 值, 并且可以判定最大 (或最小) 值在 Ω 的内部取得, 那么当 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 的内部有唯一的可能极值点 $\boldsymbol{x}_0$ 时, $f(\boldsymbol{x}_0)$ 就是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上的最大 (或最小) 值.

例 7.4　某工厂要用钢板做成一个体积为 V (单位: m^3) 的无盖长方体水箱, 问怎样选取长、宽、高, 才能最省用料?

解　设水箱的长、宽、高为 x, y, z (单位: m). 由题设 $z = \dfrac{V}{xy}$, 于是水箱的表面积

$$S = S(x,y) = xy + 2(x+y)z = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \quad (x > 0, y > 0).$$

问题成为求函数 $S(x,y)$ 在区域 $D: x > 0, y > 0$ 的最小值问题. 解方程组

$$\begin{cases} S_x(x,y) = y - \dfrac{2V}{x^2} = 0, \\ S_y(x,y) = x - \dfrac{2V}{y^2} = 0, \end{cases}$$

得 $S(x,y)$ 在 D 内的唯一驻点 $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}$. 根据问题的实际意义, $S(x,y)$ 在 D 内的最小值一定存在, 故可断定 $S(x_0, y_0)$ 就是最小值.

因此取长和宽为 $\sqrt[3]{2V}$, 高为 $\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$ 时, 水箱的用料最省.

7.3　条件极值问题

1. 条件极值

上面讨论的多元函数极值问题, 对于函数的自变量, 除了限制在函数的定义域内并无其他的要求, 这种极值称为**无条件极值**.

在实际问题中, 我们还经常要讨论另一种类型的极值问题, 即对于函数的自变量, 除了限制在函数的定义域内, 自变量还受到其他条件的约束. 这种带有**约束条件**的函数极值称为**条件极值**.

例如前面的例 7.4 (无盖水箱问题), 就是求函数 (称为**目标函数**)

$$f(x,y,z) = xy + 2(x+y)z$$

在定义域 $x>0,y>0,z>0$ 中满足约束条件 (或称**约束方程**)

$$xyz=V$$

的极值问题.

解决这类问题的基本思想是将条件极值转化为无条件极值来处理. 例 7.4 的做法是, 先从约束方程 $xyz=V$ 解出 $z=\dfrac{V}{xy}$, 代入 $f(x,y,z)$, 再求 $S(x,y)=f\left(x,y,\dfrac{V}{xy}\right)=xy+2V\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ 在其定义域 $x>0,y>0$ 内的无条件极值.

这种方法的实质是将有约束方程所确定的隐函数加以显化, 而这并非总是可行的. 为此, 下面介绍一种有效的求解条件极值问题的方法 —— Lagrange 乘数法.

2. Lagrange 乘数法

我们从较为简单的三元函数的情况开始讨论, 先讨论极值点所应满足的条件.

定理 7.5 *设 $P_0(x_0,y_0,z_0),P(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, 函数 $f(P),\varphi(P)\in C^{(1)}(U(P_0))$, 且 $\nabla\varphi(P_0)\neq\mathbf{0}$. 若 P_0 是目标函数 $f(P)$ 在约束条件 $\varphi(P)=0$ 下的极值点, 则存在常数 λ, 使得*

$$\begin{cases} f_x(P_0)+\lambda\varphi_x(P_0)=0, \\ f_y(P_0)+\lambda\varphi_y(P_0)=0, \\ f_z(P_0)+\lambda\varphi_z(P_0)=0, \end{cases} \tag{16}$$

即

$$\nabla f(P_0)+\lambda\nabla\varphi(P_0)=\mathbf{0}.$$

证明 记由方程 $\varphi(P)=0$ 所确定的曲面为 Σ, 则点 $P_0\in\Sigma$. 设 Γ : $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 是 Σ 上过点 P_0 的任意一条光滑曲线, 且点 P_0 所对应的参数 $t=t_0$, 则由假设 $f[x(t),y(t),z(t)]$ 必在点 t_0 取得极值, 从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f[x(t),y(t),z(t)]\Big|_{t=t_0}=0,$$

即

$$f_x(P_0)x'(t_0)+f_y(P_0)y'(t_0)+f_z(P_0)z'(t_0)=0.$$

记 $\boldsymbol{s}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$, 它是曲线 Γ 上在点 P_0 的切向量. 上式又可写成

$$\nabla f(P_0)\cdot\boldsymbol{s}=0,\quad 即\ \nabla f(P_0)\perp\boldsymbol{s}.$$

由 Γ 的任意性知, 向量 $\nabla f(P_0)$ 垂直于曲面 Σ 在点 P_0 的切平面.

又因为 $\nabla\varphi(P_0)\neq\mathbf{0}$ 知,

$$\boldsymbol{n}=\nabla\varphi(P_0)=(\varphi_x(P_0),\varphi_y(P_0),\varphi_z(P_0))$$

是曲面 Σ 在点 P_0 的切平面的法向量. 所以向量 $\nabla f(P_0)$ 与 $\nabla\varphi(P_0)$ 平行, 故存在常数 λ, 使得

$$\nabla f(P_0)=-\lambda\nabla\varphi(P_0),\ \text{即}\ \ \nabla f(P_0)+\lambda\nabla\varphi(P_0)=\mathbf{0}.$$

□

根据以上得到的条件极值问题取得极值的必要条件, 人们通常引入辅助函数

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z), \tag{17}$$

称该函数为 **Lagrange 函数**, 参数 λ 称为 **Lagrange 乘子**. 不难看出, 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 满足 (16) 式, 即为满足方程组 $L_x=0,L_y=0,L_z=0$. 而由于是条件极值问题, 点 P_0 当然还应满足

$$\varphi(x_0,y_0,z_0)=0.$$

由此, 我们得到如下结论.

在定理 7.5 的条件下, 作 Lagrange 函数 (17). 如果 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是方程组

$$\begin{cases} L_x=f_x(x,y,z)+\lambda\varphi_x(x,y,z)=0,\\ L_y=f_y(x,y,z)+\lambda\varphi_y(x,y,z)=0,\\ L_z=f_z(x,y,z)+\lambda\varphi_z(x,y,z)=0,\\ L_\lambda=\varphi(x,y,z)=0\end{cases}$$

的解, 那么 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是目标函数 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的可能极值点.

这种求条件极值问题的可能极值点的方法称为 **Lagrange 乘数法**. 这里, 我们把条件极值问题转化为 Lagrange 函数的无条件极值问题. 应当指出, Lagrange 乘数法只给出条件可能极值点 P_0 的求法, 至于 P_0 是否为条件极值点, 还需要进一步讨论, 在实际问题中可以根据问题的性质来判定.

例 7.5 求函数 $f(x,y,z)=ax+by+cz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=d^2$ 下的极值点 $(a,b,c\neq 0,d>0)$.

解 引入 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=ax+by+cz+\lambda(x^2+y^2+z^2-d^2),$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x = a + 2\lambda x = 0, \\ L_y = b + 2\lambda y = 0, \\ L_z = c + 2\lambda z = 0, \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - d^2 = 0. \end{cases}$$

由前三个方程得 $x = -\dfrac{a}{2\lambda}, y = -\dfrac{b}{2\lambda}, z = -\dfrac{c}{2\lambda}$, 代入约束方程可得

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4\lambda^2} = d^2, \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2d}.$$

$\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2d}$ 时, 驻点为

$$P_1(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{-ad}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{-bd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{-cd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right);$$

$\lambda_2 = -\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2d}$ 时, 驻点为

$$P_2(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{ad}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{cd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right).$$

根据问题的实际意义知, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 为条件极小值点, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为条件极大值点.

例 7.6 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$ 的第一卦限部分上求一点 P, 使过点 P 的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积 V 最小.

解 设点 P 的坐标为 (x, y, z), 则过点 P 的切平面为

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) + \frac{z}{c^2}(Z - z) = 0,$$

即

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1 \ \ (x > 0, y > 0, z > 0).$$

它在三个坐标轴上的截距分别为 $\dfrac{a^2}{x}, \dfrac{b^2}{y}, \dfrac{c^2}{z}$. 从而切平面与三个坐标面围成的四面体体积为

$$V = \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}.$$

要使 V 最小, 只要 xyz 最大. 又因为点 P 在椭球面上, 故引入 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x = yz + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L_y = xz + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L_z = xy + \dfrac{2\lambda z}{c^2} = 0, \\ L_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

由前三个方程得 $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, 代入约束方程得 $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}, y = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$ (λ 的值已不必求出). 这是问题的唯一可能条件极值点, 根据问题的实际意义知所求最小体积必存在, 所以使所求体积为最小的点为

$$P\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right).$$

除了以上讨论的三元函数情形外, Lagrange 乘数法对二元函数情形以及一般的 n 元函数情形也适用. 定理 7.5 的一般形式如下.

定理 7.5′ 设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x}) \in C^{(1)}(U(\boldsymbol{x}_0))$, 且 $\nabla\varphi(\boldsymbol{x}_0) \neq \mathbf{0}$. 若 $\boldsymbol{x}_0$ 是目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在约束条件 $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ 下的极值点, 则存在常数 λ, 使得

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) + \lambda \nabla\varphi(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}.$$

依据本定理, 我们在约束函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的梯度 $\nabla\varphi(\boldsymbol{x}_0) \neq \mathbf{0}$ 的基础 (这也是乘子存在的基础) 上, 将条件极值问题转化为无条件极值问题. 因此使得 $\nabla\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ 并满足方程 $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ 的点 $\boldsymbol{x}_0$ 也有可能是条件极值点.

例 7.7 求坐标原点到曲线 $(x-1)^3 - y^2 = 0$ 的最短距离.

解 记 $\varphi(x,y) = (x-1)^3 - y^2$, 点 $P(x,y)$ 为曲线 $\varphi(x,y) = 0$ 上的点. 原点到点 P 的距离 $d = \sqrt{x^2+y^2}$.

要使 d 最小, 只要 x^2+y^2 最小. 又因为点 P 在曲线上, 故引入 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda[(x-1)^3 - y^2].$$

方程组

$$\begin{cases} L_x = 2x + 3\lambda(x-1)^2 = 0, \\ L_y = 2y - 2\lambda y = 0, \\ L_\lambda = (x-1)^3 - y^2 = 0 \end{cases}$$

无解. 因为由第二个方程得 $y=0$ 或 $\lambda=1$. 若 $y=0$, 则由约束方程得 $x=1$, 而 $x=1$ 不满足第一个方程; 若 $\lambda=1$, 则第一个方程无解.

为此, 我们解另一个方程组

$$\begin{cases} \varphi_x(x,y)=3(x-1)^2=0, \\ \varphi_y(x,y)=-2y=0, \\ \varphi(x,y)=(x-1)^3-y^2=0. \end{cases}$$

解得唯一可能极值点 $x=1, y=0$. 由于坐标原点到曲线 $\varphi(x,y)=0$ 的最短距离必存在, 故所求最短距离为

$$d_{\min}=d(1,0)=1.$$

Lagrange 乘数法还可以推广到多个约束条件的情形. 例如, 求三元函数

$$f(x,y,z)$$

在约束条件

$$\varphi(x,y,z)=0 \quad 和 \quad \psi(x,y,z)=0$$

下的极值. 可以先作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z),$$

其中 λ,μ 为 Lagrange 乘子, 然后解方程组

$$L_x=0 \quad L_y=0, \quad L_z=0, \quad L_\lambda=0, \quad L_\mu=0,$$

可求得可能极值点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

例 7.8 求椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 的长半轴和短半轴之长.

解 椭圆的长半轴与短半轴之长即为椭圆的中心点 (本题为坐标原点) 到椭圆上的点 (x,y,z) 的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值与最小值.

引入 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+z^2-1\right)+\mu(x+y+z).$$

解方程组

$$\begin{cases} L_x = 2x + \dfrac{2}{3}\lambda x + \mu = 0, \\ L_y = 2y + \lambda y + \mu = 0, \\ L_z = 2z + 2\lambda z + \mu = 0, \\ L_\lambda = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} + z^2 - 1 = 0, \\ L_\mu = x + y + z = 0. \end{cases}$$

前三个方程分别乘以 x, y, z 再相加, 得

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda\left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + z^2\right) + \mu(x + y + z) = 0.$$

再由两个约束方程, 得

$$x^2 + y^2 + z^2 = -\lambda.$$

为求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的极值, 只需求 λ.

由前三个方程又有

$$\left(2 + \frac{2}{3}\lambda\right)x = (2 + \lambda)y = (2 + 2\lambda)z.$$

把它们设为 t, 代入最后一个方程, 得

$$\left(\frac{1}{2 + \dfrac{2}{3}\lambda} + \frac{1}{2 + \lambda} + \frac{1}{2 + 2\lambda}\right)t = 0.$$

显然 $t \neq 0$, 经整理, 上式变为

$$3\lambda^2 + 11\lambda + 9 = 0.$$

解得 $\lambda = \dfrac{-11 \pm \sqrt{13}}{6}$. 从而

$$d_{\max} = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{13}}{6}}, \quad d_{\min} = \sqrt{\frac{11 - \sqrt{13}}{6}},$$

此即所求椭圆的长半轴与短半轴之长.

习 题 2.7

(A)

1. 写出函数 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 的带有 Peano 余项的三阶 Maclaurin 公式.

2. 求函数 $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(1,-2)$ 的 Taylor 公式.

3. 求下列函数的极值:

(1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$;

(2) $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$;

(3) $f(x,y)=x^3+x^2-y^3+y^2$.

4. 求函数 $f(x,y)=x^2-2xy+2y$ 在矩形区域 $D=\{(x,y)|\ 0\leqslant x\leqslant 3, 0\leqslant y\leqslant 2\}$ 上的最大值和最小值.

5. 求表面积为 12 m^2 的无盖长方形水箱的最大容积.

6. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

7. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一个椭圆, 求原点到该椭圆的最长距离和最短距离.

(B)

1. 求下列函数的极值:

(1) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$;

(2) $f(x,y)=(1+\mathrm{e}^x)\cos y-x\mathrm{e}^x$;

(3) $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定.

2. 求函数 $f(x,y,z)=x^my^nz^p$ 在条件 $x+y+z=a$ 下的极值, 其中 $x>0,y>0,z>0$; m,n,p,a 为正常数.

3. 求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $x+y+z=0$ 和 $x^2+y^2+z^2=1$ 约束下的最大值和最小值.

4. 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k$ 在方程组 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2=1,\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2=1$ 约束下的最大值.