第1章 力学基础知识

第1部分 机械运动的描述

提示

- 力学研究：机械运动的规律及其应用。
- 机械运动：物体之间（或物体各部分之间）相对位置的变动。

主要内容：

1. 线量描述：
   位置、位移、速度、加速度；
2. 角量描述：
   角位置、角位移、角速度、角加速度。

1.1 描述机械运动的基本概念

1.1.1 质点与刚体

一、质点（material point）

具有一定质量，大小、形状可以忽略的点。

分析思考问题

- 质点具有相对性。例如：地球， 电子
- 是一个理想模型。

二、刚体（rigid body）

在外力作用下保持其大小形状不变的物体。

刚体是由大量质点组成，在力作用下，组成物体的所有质点之间的距离始终保持不变。

动画演示 地球与质点 电子与质点

1.1.2 参照系与坐标系

物理学中把被选作标准的参考物体或物体系称之为**参照系**。

为了定量地表示物体在空间的位置，在参照系的物体上选择坐标系。

分析思考问题

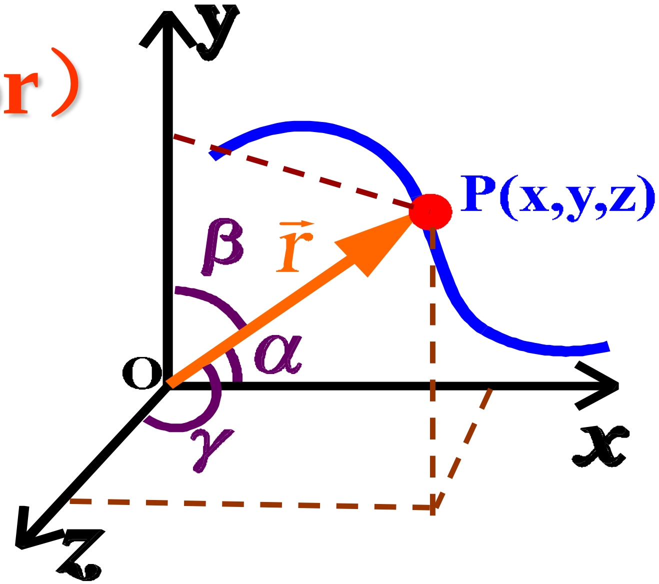
1^0 参照系选择不同，对同一物体的运动描述也就不同。

2^0 应该明确：参照系一经确定，所描述物体的运动性质就确定了。

3^0 常用的坐标系有直角坐标系、自然坐标系、球坐标系等。

1.2 描述质点运动的线量

1.2.1 位置矢量（Position Vector）



原点到考察点的有向线段

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos\alpha &= \frac{x}{r} \quad \cos\beta = \frac{y}{r} \quad \cos\gamma = \frac{z}{r} \end{aligned} \right.$$

瞬时性：位置随时间 t 变化关系——运动方程

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ $x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$

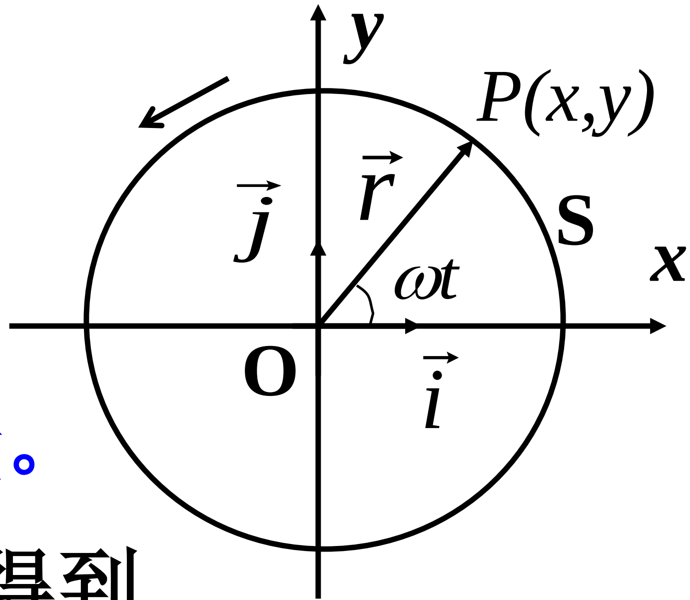
$f(x, y, z) = 0$ ——轨道方程

例1.1 一质点运动方程为

$$x = 2\sin 5t$$

$$y = 2\cos 5t$$

确定其轨道方程和位置矢量。



解：由上两式消去时间t后得到

$$x^2 + y^2 = 4$$

该质点是在xy平面上作以原点为圆心、半径为2m的圆周运动。

位置矢量是 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$= 2\sin 5t\vec{i} + 2\cos 5t\vec{j}$$

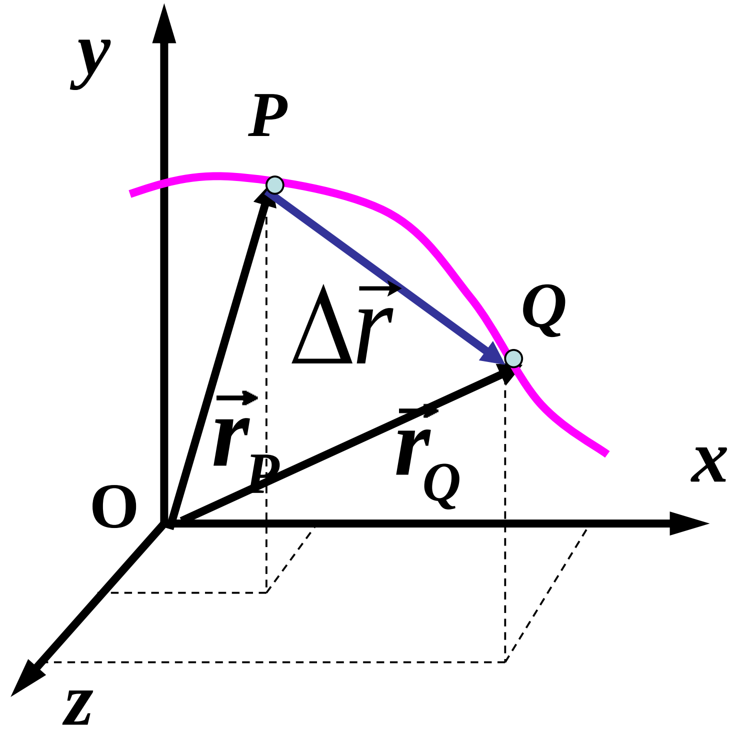
1.2.2 位移和路程

(Displacement and Distance Travelled)

一、位移

由初位置 P 指向末位置 Q 的矢量。

表示质点的位置变化。



$$\vec{r}_P = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

$$\vec{r}_Q = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

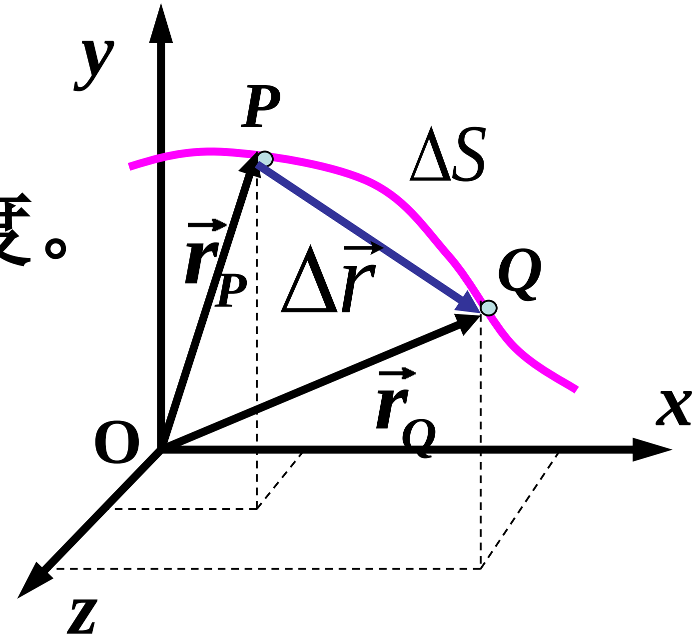
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

二、路程

质点通过实际路径的总长度。

$$\Delta S = \overset{\frown}{PQ}$$



分析思考问题　位移与路程比较

- 位移只决定于始末位置，与过程无关，状态量；
  路程是实际通过的路径，与过程有关，过程量；
- 位移是矢量，路程是标量。

一般 $\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta S$　　仅当 $\Delta t \to 0$, $\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta S$

即：微分情况下，$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \left|\mathrm{d}S\right|$　思考：dr 是什么？

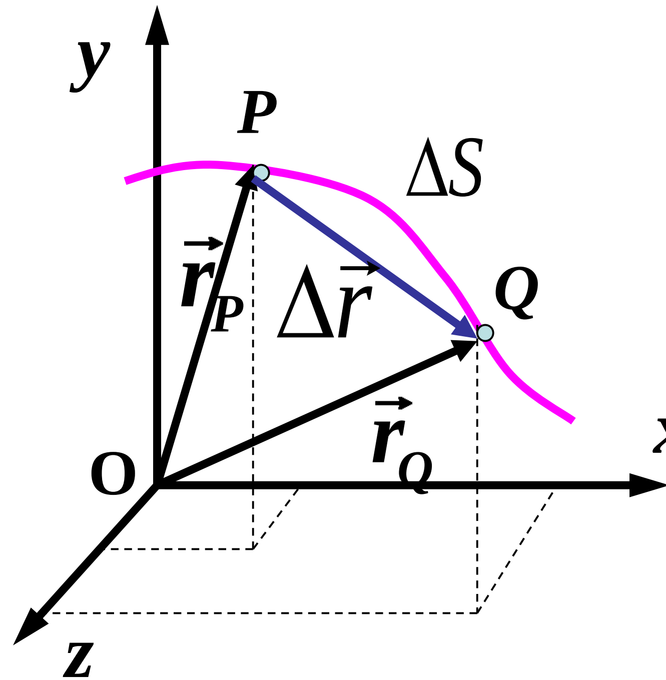
1.2.3 速度和速率（Velocity and Speed）

一、速度

描述质点位置变化快慢和运动方向矢量。

（1）平均速度

在Δt时间内：$\bar{\vec{\upsilon}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$



（2）瞬时速度

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

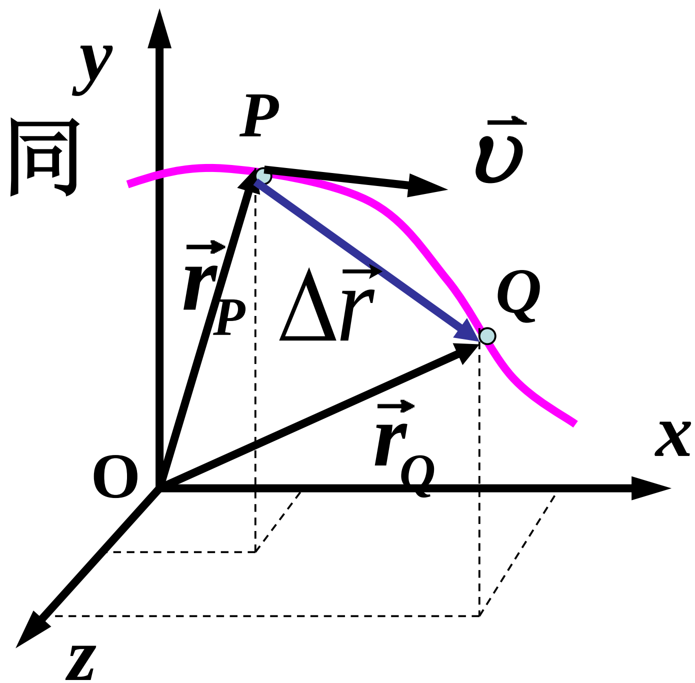
在直角坐标系中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad x = x(t) \; y = y(t) \; z = z(t)$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt}$$

分析思考问题



- 平均速度与瞬时速度意义不同

平均速度：

方向：割线 $\Delta\vec{r}$ 方向。

大小：$|\bar{\upsilon}| = \dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$

瞬时速度：

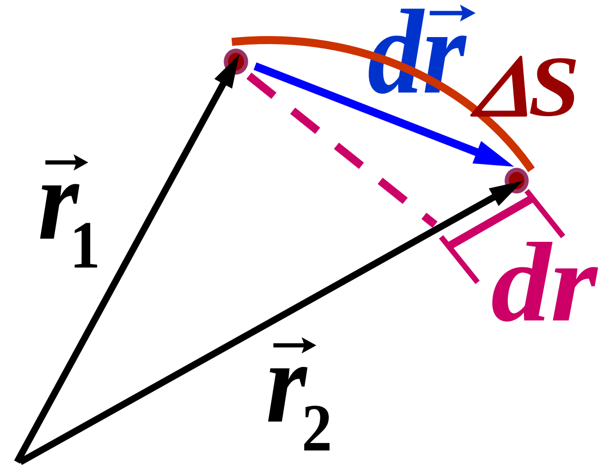
方向：切线方向。大小：$|\vec{\upsilon}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$

动画演示 瞬时速度

方向、大小之一变化，速度即发生变化。

而且与参照系有关。

注意 $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \neq \frac{dr}{dt}$



二、速率

(1) 平均速率 $\bar{\upsilon}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

(2) 瞬时速率 $\upsilon=\dfrac{ds}{dt}=\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$

速率与速度意义不同，前者是路程变化，后者是位移变化；前者是标量，后者是矢量。

平均速度的数值一般不等于平均速率，

但瞬时速度的大小等于瞬时速率。

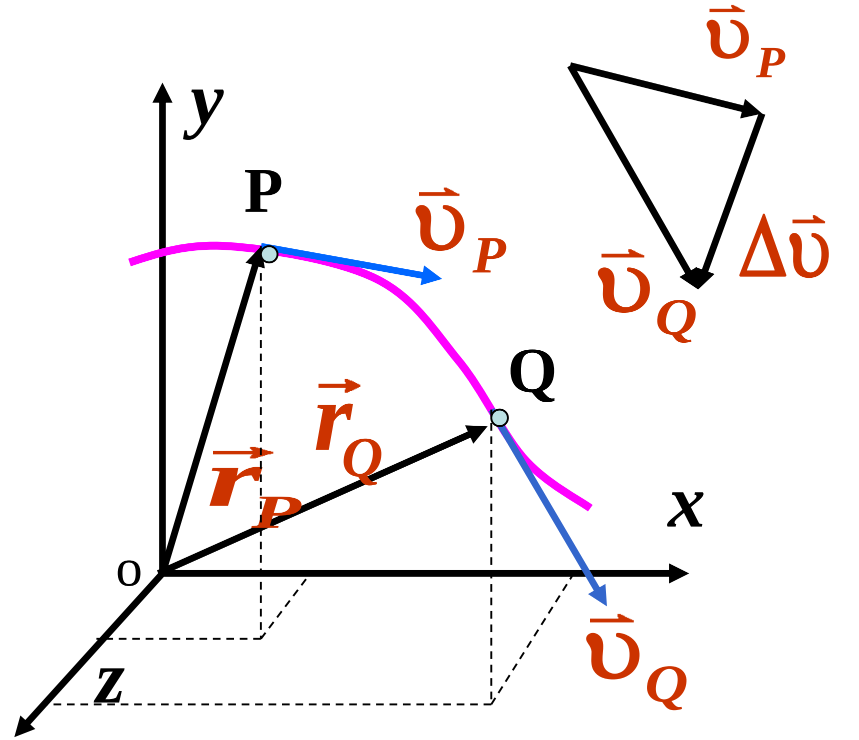
1.2.4 加速度(acceleration)

描述速度在大小和方向上随时间变化快慢的物理量。

一、定义

平均加速度 $\bar{a}=\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$

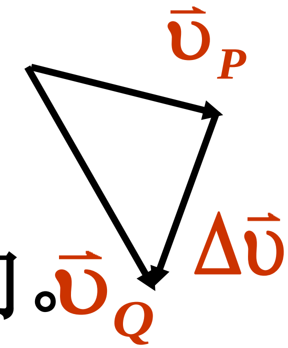
是矢量，其方向为$\Delta\vec{\upsilon}$的方向。



瞬时加速度

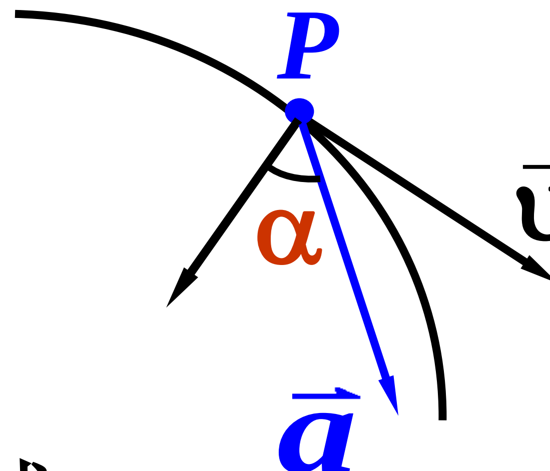
$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

分析思考问题



1^0. $\vec{a}$ 的方向：

- $\Delta t \to 0$　$\Delta\vec{\upsilon}$ 的极限方向即 $d\vec{\upsilon}$ 的方向。与同一时刻速度 $\vec{\upsilon}$ 方向一般是不同的。
- 质点作曲线运动时，$\vec{a}$ 的方向总是指向轨迹曲线凹的一面.



2^0. $\vec{a}$的大小

$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right| \quad \text{一般} \ |\vec{a}| \neq \left|\frac{d\upsilon}{dt}\right|$$

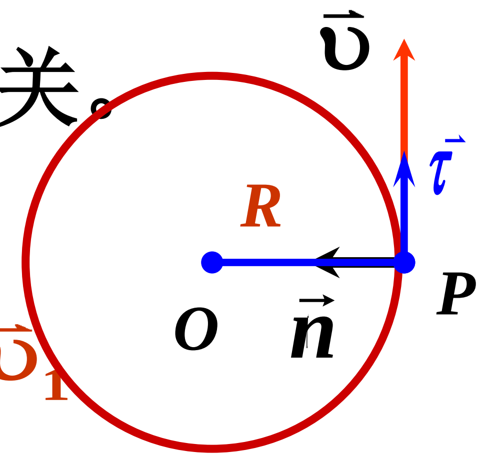
3^0. 在直角坐标系中，$\vec{a}$的分量式

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

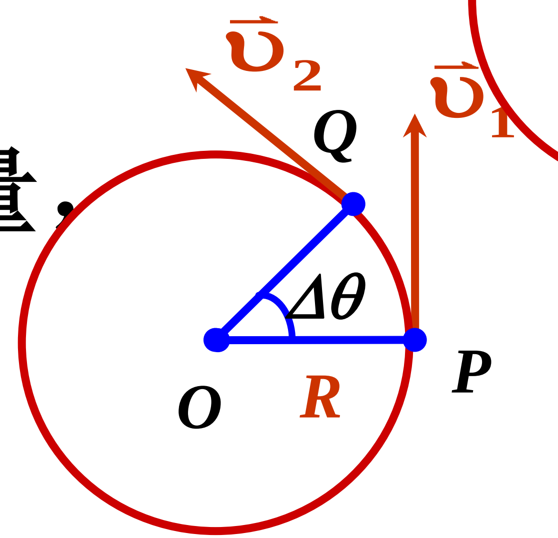
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

4^0. $\vec{a}$的相对性：与参考系的选择有关。



2. 切向加速度和法向加速度

变速率圆周运动



$\vec{n}$ 法向单位矢量，

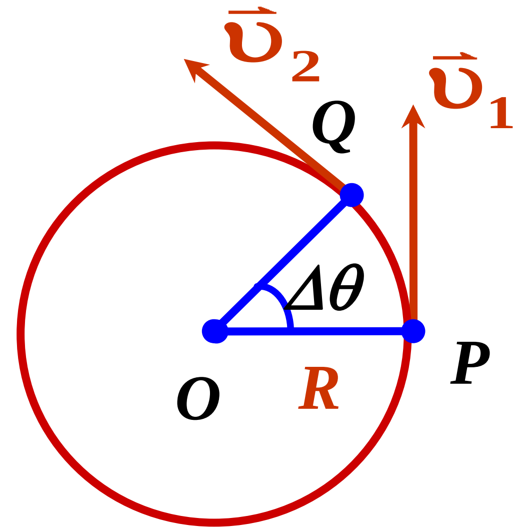
$\vec{\tau}$ 切向单位矢量，

$$|\vec{n}| = |\vec{\tau}| = 1$$

t时刻：P点 $\vec{\upsilon}_1$　　t+Δt时刻：Q点 $\vec{\upsilon}_2$

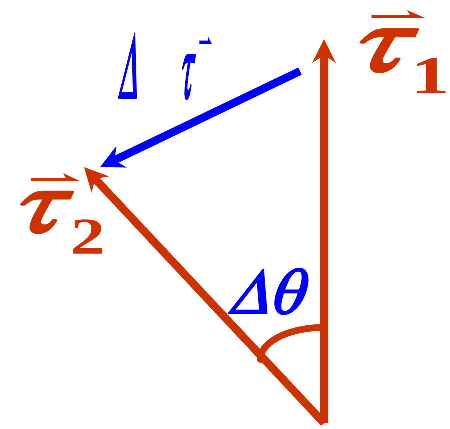
$$\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau}$$

$$\vec{a} = \frac{d(\upsilon\vec{\tau})}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$



其中: $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{\tau d\theta}{dt}\vec{n} = \dfrac{1}{R}\dfrac{ds}{dt}\vec{n} = \dfrac{\upsilon}{R}\vec{n}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$$



$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}$$ (切向加速度)

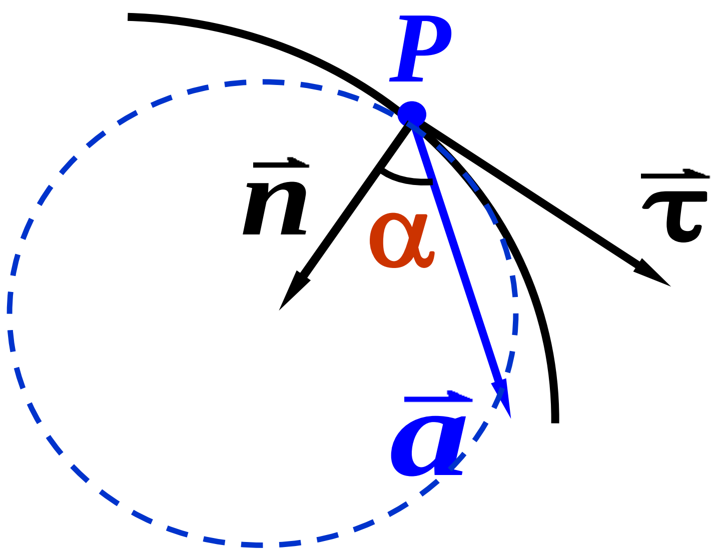
$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}$$ (法向加速度)

向心加速度

一般曲线运动

$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$

$$\vec{a}_\tau=\frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau}\qquad \vec{a}_n=\frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$$



ρ是P点的曲率半径。 这时有：

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{\left(\frac{\upsilon^2}{\rho}\right)^2+\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2}$$

$$\alpha=arctg\frac{a_\tau}{a_n}$$

加速度小结

1. 在直角坐标系中，$\vec{a}$的分量式

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

2. 在自然坐标系中，$\vec{a}$的分量式

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} \qquad \vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}$$

例1.1 一质点的运动方程为$\vec{r}=2\sin 5t\vec{i}+2\cos 5t\vec{j}$，求质点在任意时刻的加速度矢量及加速度大小。

解： 由运动方程 $\vec{r}=2\sin 5t\vec{i}+2\cos 5t\vec{j}$

得 $$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=10\cos 5t\vec{i}-10\sin 5t\vec{j}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=-50\sin 5t\vec{i}-50\cos 5t\vec{j}$$

$$a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}=-50\sin 5t,\qquad a_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}=-50\cos 5t$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=50\mathrm{m/s^{-2}}$$

运动学问题分类:

一、已知物体的运动方程，求任一时刻的速度、加速度。

在数学上为微分问题。 练习

二、已知物体的加速度[或速度]及初始条件，求运动方程。

在数学上为积分问题。

[例] 一质点从原点由静止出发，它的加速度在x轴和y轴上的分量分别为$a_x=2$和$a_y=3t$ (SI),试求$t=4$s时质点速度的大小和位移矢量。

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = 2 \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = 3t$$

$$d\upsilon_x = 2dt \qquad d\upsilon_y = 3tdt$$

$$\int_0^{\upsilon_x} d\upsilon_x = \int_0^t 2dt \qquad \int_0^{\upsilon_y} d\upsilon_y = \int_0^t 3tdt$$

$$\upsilon_x = 2t \qquad \upsilon_y = \frac{3}{2}t^2$$

当t=4s时，$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$

[例]　一质点从原点由静止出发，它的加速度在x轴和y轴上的分量分别为a_x=2和a_y=3t (SI),试求t=4s时质点速度的大小和位移矢量。

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = 2t \qquad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}t^2$$

$$dx = 2tdt \qquad dy = \frac{3}{2}t^2dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t 2tdt \qquad \int_0^y dy = \int_0^t \frac{3}{2}t^2dt$$

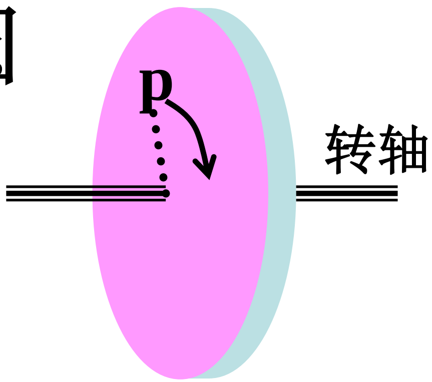
$$x = t^2 \qquad y = \frac{1}{2}t^3$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = t^2\vec{i} + \frac{1}{2}t^3\vec{j} \qquad \vec{r}\Big|_{t=4} = 16\vec{i} + 32\vec{j}$$

1.4 描述刚体运动的角量

定轴转动：转轴的位置和方向固定不变的转动。

- 各个质元绕一固定直线（轴）作圆周运动，各转动平面垂直于转轴。

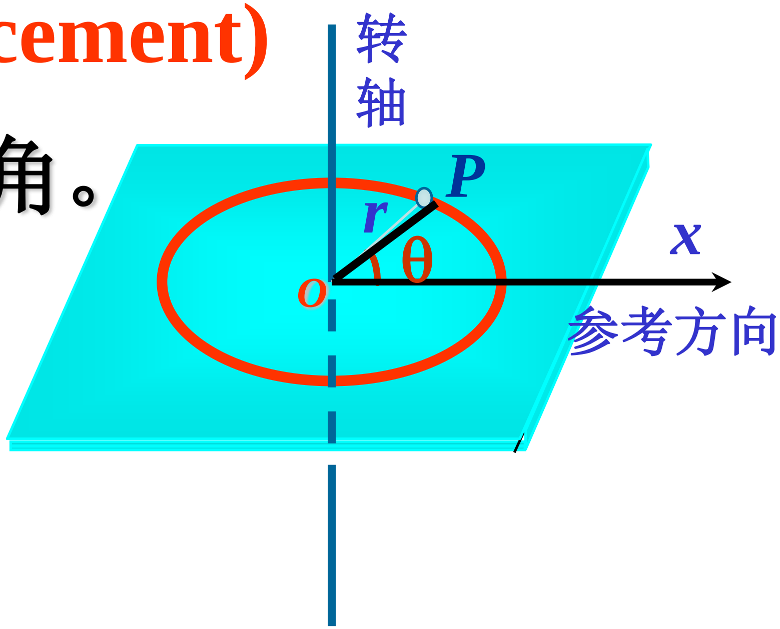


角量：角位移、角速度、角加速度。

1.4.1 角位置和角位移

（Angle and Angular Displacement)

角位置θ： $\vec{r}$与Ox轴间的夹角。

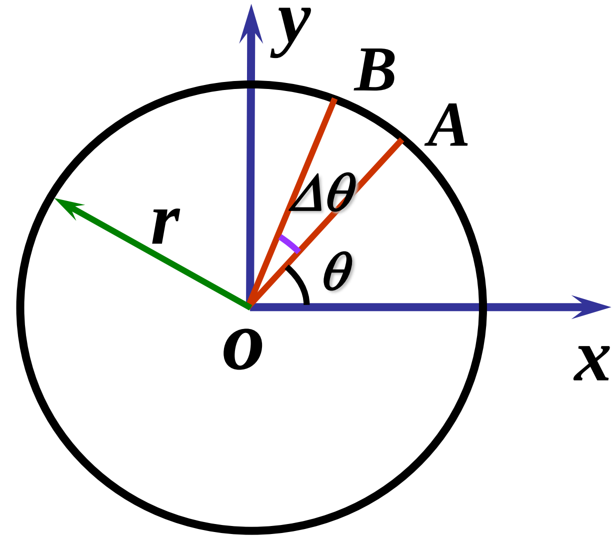


角位移$\Delta\theta$： θ的增量。

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

动画演示 定轴转动

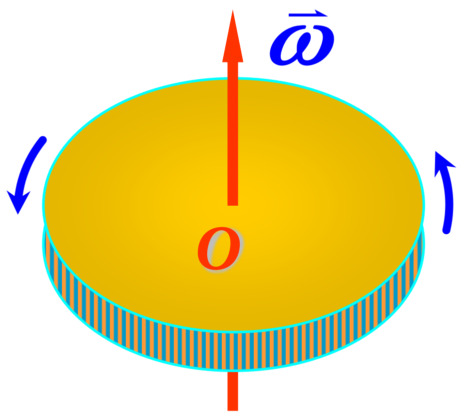
1.4.2 角速度(Angular Velcity)

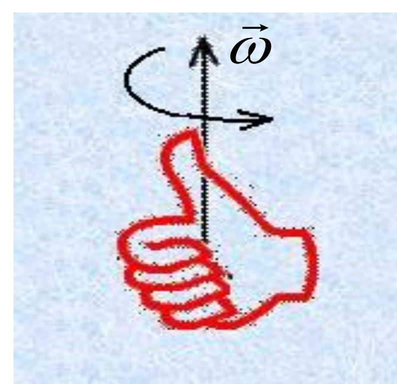


平均角速度: $\Rightarrow \bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

瞬时角速度: $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$

注意 角速度ω可以定义为矢量， 以 $\vec{\omega}$表示，其方向为转轴方向，采用右手法则确定





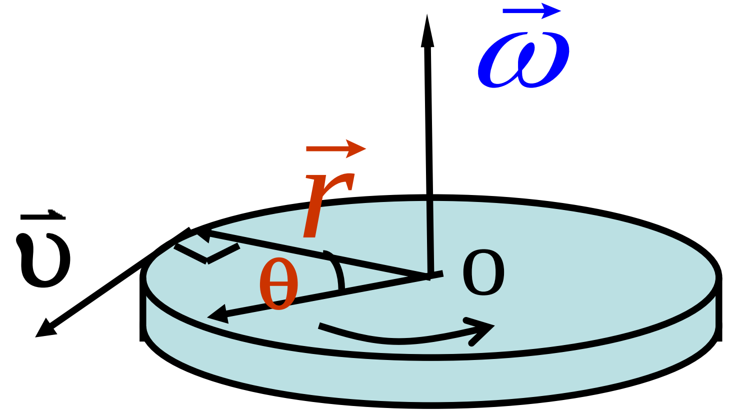
现象演示 角速度方向演示

1.4.3 角加速度(Angular Acceration)

平均角加速度： $\bar{\beta}=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

瞬时角加速度： $\beta=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}=\dfrac{d\omega}{dt}$

1.4.4 角量和线量的关系



利用关系：$s=\mathrm{r}\,\theta$ 得出

$$\upsilon=\frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}=r\,\omega$$

$$a_n=\frac{\upsilon^2}{r}=r\omega^2 \qquad a_\tau=\frac{d\upsilon}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}=r\,\beta$$

例 已知一刚体作定轴转动的角运动方程为 $\theta=2t^3$； 试求 $t=2$s时的角速度和角加速度。

解 根据定义，用标量计算，得

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=6t^2 \qquad \beta=\frac{d\omega}{dt}=12t$$

当 $t=2$s时

$$\omega=24\,(s^{-1})$$

$$\beta=24\,(s^{-2})$$

例 已知一刚体按$\beta = 2t$ 作变速转动，且 $t = 0$时初位置$\theta_0 = \pi$，初速度$\omega_0 = 0$；求刚体转动的速度方程和角运动方程。

解：

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} \qquad d\omega = \beta dt = 2tdt$$

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{t} 2tdt \qquad \omega = t^2$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \int_{\pi}^{\theta} d\theta = \int_0^{t} t^2 dt$$

$$\theta = \pi + \frac{1}{3}t^3$$