

# 第三章 重 积 分

我们在一元函数微积分中讨论了定积分, 其被积函数是一元函数, 积分范围是区间, 因而积分一般只能用来研究分布在某一区间上的具有可加性的量的求和问题. 但是在实际问题中, 往往还会遇到很多非均匀分布在平面、空间区域或曲线、曲面上的可加量的求和问题, 这时就需要讨论多元函数的积分.

本章主要研究二重积分和三重积分的概念、性质、计算及其应用. 本章的重点是重积分的概念和计算方法.

## §1 二重积分的概念与性质

### 1.1 二重积分的概念

为了直观起见, 通过下面的引例来引入二重积分的概念.

**引例 1** 曲顶柱体的体积

由曲面  $z = f(x, y)$ ,  $Oxy$  平面上的有界闭区域  $D$  和以  $D$  的边界曲线为准线而母线平行于  $z$  轴的柱面围成的空间体, 叫做**曲顶柱体**, 如图 3.1 所示. 其中  $f(x, y)$  是定义在  $D$  上的非负连续函数.

如何计算此曲顶柱体的体积呢? 最简单的情况是  $f(x, y) = \text{常数}$ , 这时曲顶柱体就是普通的 (平顶) 柱体, 其体积 = 底面积  $\times$  高, 即

$$V = \sigma(D) \times f(x, y),$$

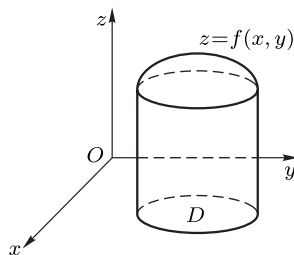


图 3.1

其中  $\sigma(D)$  是区域  $D$  的面积. 一般地,  $f(x, y)$  是随  $(x, y)$  在  $D$  内位置不同而变化的变量, 因此不能用上式来计算. 我们可以用类似于计算曲边梯形面积的方法来求曲顶柱体的体积, 即采用化整为零, 在局部以不变代变的思想, 利用体积的可加性, 以极限为手段来计算. 具体做法如下:

(1) 分割 用一组平行于  $x$  轴,  $y$  轴的直线把区域  $D$  分割成  $n$  个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n,$$

它们之间除边界外无公共点. 在此分割下, 曲顶柱体被分割成  $n$  个小的曲顶柱体. 以小区域  $\Delta\sigma_i$  为底的小曲顶柱体 (图 3.2) 的体积记为  $\Delta V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),

显然, 所求曲顶柱体的体积  $V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$ .

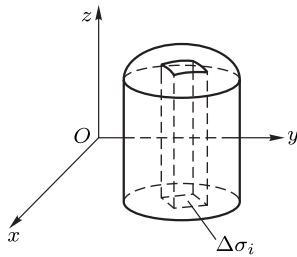


图 3.2

(2) 代替 现在的关键是求  $\Delta V_i$ . 实际上求  $\Delta V_i$  与求  $V$  是一样的, 但是我们将小区域  $\Delta\sigma_i$  的范围限制得很小, 即当  $\Delta\sigma_i$  的直径很小时 (不仅仅是面积很小! 为了叙述方便, 称闭区域  $D$  内任意两点距离的最大值为  $D$  的直径), 由于  $f(x, y)$  连续, 所以在小区域  $\Delta\sigma_i$  上  $f(x, y)$  变化不会很大, 这时可将相对应的小曲顶柱体近似地看成平顶柱体, 其高度可取该小区域内任意一点的函数值, 即

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中  $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$ ,  $\Delta\sigma_i$  的面积也借用  $\Delta\sigma_i$  来表示.

(3) 求和 将各小曲顶柱体的近似值相加, 即得所求曲顶柱体的近似值

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

(4) 取极限 容易看出当分割越细并且每个小区域的直径也都越小时, 上式的近似程度也就越好. 记  $d_i$  为  $\Delta\sigma_i$  的直径, 令  $d = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ , 当  $d$  趋于零, 上述和式的极限便是所求曲顶柱体的体积, 即

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

### 引例 2 平面薄片的质量

设有一个平面薄片在  $Oxy$  面上占有有界闭区域  $D$ , 它在点  $(x, y)$  处的面密度为  $\rho(x, y)$ , 这里  $\rho(x, y) > 0$  并且连续. 现欲求该平面薄片的质量  $m$ .

当  $\rho(x, y)$  不为常数时, 即平面薄片的质量分布非均匀时, 采取引例 1 中的思想和方法进行计算.

(1) 分割 把区域  $D$  分割成  $n$  个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n,$$

其中  $\Delta\sigma_i$  的面积也用  $\Delta\sigma_i$  来记.  $d$  为  $n$  个小区域直径的最大者.

(2) 代替 由于面密度函数  $\rho(x, y)$  是连续的, 只要  $d$  很小,  $\rho(x, y)$  在每个小区域上的变化不会很大, 从而小平面薄片  $\Delta\sigma_i$  的质量

$$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中  $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$ .

(3) 求和 此平面薄片的质量近似表达式为

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

(4) 取极限 为了求得平面薄片质量的精确值, 可让分割越来越精细, 即当  $d \rightarrow 0$  时, 求得上述和式的极限, 于是

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

这样就计算出了非均匀分布的平面薄片的质量.

上面两个引例的实际意义虽然不同, 但是它们最后的数学表达式的结构是完全相同的, 都归结为求同一形式的和的极限. 在许多工程技术和科学技术问题中, 都会遇到所求的量需要用上述这样结构的和的极限来进行计算, 因此, 有必要系统地研究这种结构的和的极限——二重积分.

**定义 1.1** 设  $f(x, y)$  是平面有界闭区域  $D$  上的有界函数. 将区域  $D$  任意分割成  $n$  个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n,$$

其中  $\Delta\sigma_i$  既表示第  $i$  个小区域, 也表示它的面积, 任意两个小区域  $\Delta\sigma_i$  与  $\Delta\sigma_j$  ( $i \neq j$ ) 除边界外无公共点. 任取一点  $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

以  $d_i$  表示  $\Delta\sigma_i$  的直径,  $d = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ . 如果当  $d \rightarrow 0$  时, 和的极限

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

存在, 并且这个极限与区域的分割方法及点  $(\xi_i, \eta_i)$  的取法无关, 则称函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上是可积的, 并称此极限为函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上的二重积分,

记为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma,$$

即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

其中  $f(x, y)$  叫做被积函数,  $f(x, y)d\sigma$  叫做被积表达式,  $d\sigma$  叫做面积元素,  $D$  叫做积分区域,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$  叫做积分和,  $x$  及  $y$  叫做积分变量.

在直角坐标系中通常把面积元素  $d\sigma$  写成  $dx dy$ , 即二重积分可以记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

根据二重积分的定义, 引例 1 中的曲顶柱体的体积可以表示成函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上的二重积分

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

引例 2 中的平面薄片的质量可以表示成面密度函数  $\rho(x, y)$  在闭区域  $D$  上的二重积分

$$m = \iint_D \rho(x, y) d\sigma.$$

关于二重积分的可积性, 我们不加证明地给出下面的充分条件.

**定理 1.1** 如果函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 则其在  $D$  上可积.

## 1.2 二重积分的几何意义和性质

### 1. 二重积分的几何意义

由二重积分的定义及引例 1 知, 如果被积函数  $f(x, y) \geq 0$ , 且在有界闭区域  $D$  上连续, 则二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  在数值上恰好是以曲面  $z = f(x, y)$  为曲顶,

以区域  $D$  为底的曲顶柱体的体积. 这就是二重积分的几何意义.

### 2. 二重积分的性质

从定义来看二重积分和定积分在本质上是一样的, 其差别仅在于被积函数的二元与一元之区别; 积分范围的区域 (二维点集) 与区间 (一维点集) 之区别. 因此二重积分有与定积分完全类似的性质.

**性质 1** 如果  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上可积,  $k$  为常数, 则  $kf(x, y)$  在  $D$  上可积, 并且

$$\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

即被积函数中的常数因子可以提到积分号外面.

**性质 2** 如果  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上可积, 则  $f(x, y) \pm g(x, y)$  在  $D$  上可积, 并且

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma,$$

即函数代数和二重积分等于每个函数的二重积分的代数和.

性质 1 与性质 2 合起来说明二重积分的运算具有线性性质. 可以等价地叙述为: 设  $k_i$  为常数,  $f_i(x, y)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 在闭区域  $D$  上可积, 则有

$$\iint_D \left[ \sum_{i=1}^n k_i f_i(x, y) \right] d\sigma = \sum_{i=1}^n k_i \iint_D f_i(x, y) d\sigma.$$

**性质 3** 设有界闭区域  $D = D_1 \cup D_2$ ,  $D_1$  与  $D_2$  均为闭区域, 且它们除边界外无公共点. 如果  $f(x, y)$  在  $D_1, D_2$  上可积, 则  $f(x, y)$  在  $D$  上可积, 并且

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

此性质说明二重积分对于积分区域具有可加性.

**性质 4** 若  $\sigma$  是有界闭区域  $D$  的面积, 则

$$\iint_D d\sigma = \sigma.$$

**性质 5** 如果  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上可积, 且  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

特别地, 由于

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|,$$

从而

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

**性质 6** 设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上可积, 且  $M, m$  分别是  $f(x, y)$  在  $D$  上的最大值和最小值, 当  $\sigma$  是  $D$  的面积时, 则有不等式

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma.$$

**证明** 因为  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 所以由性质 5 得

$$\iint_D m d\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D M d\sigma,$$

再对上式的左、右两端利用性质 1 和性质 4 便得所要证明的不等式.  $\square$

性质 6 又称为**估值定理**.

**性质 7** (二重积分的中值定理) 设函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续,  $\sigma$  是  $D$  的面积, 则存在  $(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma.$$

**证明** 由于  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 由最值定理, 设其最小值为  $m$ , 最大值为  $M$ . 将性质 6 中不等式的三端同时用  $\sigma$  去除, 得

$$m \leq \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M.$$

此式表明常数  $\frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma$  介于  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上的最大值和最小

值之间, 根据介值定理知, 在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$ , 使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma,$$

于是

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma.$$

$\square$

二重积分中值定理具有明显的几何意义: 当  $f(x, y) \geq 0$  时, 以  $f(x, y)$  为曲顶,  $D$  为底的曲顶柱体的体积必与以  $D$  中某一点  $(\xi, \eta)$  处的函数值  $f(\xi, \eta)$  为高,  $D$  为底的平顶柱体的体积相等.

## 习 题 3.1

(A)

1. 利用二重积分的定义证明:

(1)  $\iint_D d\sigma = \sigma$ , 其中  $\sigma$  为有界闭区域  $D$  的面积;(2)  $\iint_D kf(x, y)d\sigma = k \iint_D f(x, y)d\sigma$ , 其中  $k$  为常数.

2. 利用二重积分表示下列各量:

(1) 某薄板位于  $Oxy$  平面上, 占有闭区域  $D$ , 其上分布有面密度为  $\mu = \mu(x, y)$  的电荷, 且  $\mu(x, y)$  在  $D$  上连续, 试写出此薄板上电荷总量  $Q$  的表达式;(2) 上半球  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$  的体积  $V$ ;(3) 有界闭区域  $D$  的面积  $\sigma$ .

3. 利用二重积分的性质比较下列积分的大小:

(1)  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$  与  $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ , 其中  $D$  是由  $x$  轴,  $y$  轴及直线  $x+y=1$  围成的闭区域;(2)  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$  与  $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ , 其中  $D$  是由圆周  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}$  所围成的闭区域;(3)  $\iint_D \ln(x+y)d\sigma$  与  $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$ .

4. 利用二重积分的性质, 估计下列积分值:

(1)  $I = \iint_D \sqrt{4+xy} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ ;(2)  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

(B)

1. 设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 且  $f(x, y) \geq 0$ . 证明当  $f(x, y) \not\equiv 0$  时

$$\iint_D f(x, y) d\sigma > 0.$$

2. 设  $f(x, y), g(x, y)$  都在有界闭区域  $D$  上连续, 且  $g(x, y) \geq 0$ , 证明必有一点  $(\xi, \eta) \in D$

使得

$$\iint_D f(x, y)g(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y)d\sigma.$$

\*3. 证明 Dirichlet (狄利克雷) 函数

$$D(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x, y \text{ 均为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x, y \text{ 至少有一个是无理数时} \end{cases}$$

在任何有界闭区域  $D$  上均不可积.

## §2 二重积分的计算

由二重积分的定义可知, 利用定义计算二重积分相当繁琐. 通常计算二重积分的方法是将其化为两次定积分来计算.

### 2.1 在直角坐标系下计算二重积分

为了叙述方便, 我们称形如

$$D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

的闭区域为  $x$  型域, 其中  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C[a, b]$ , 如图 3.3(a) 所示.  $x$  型域的特点是: 任何平行于  $y$  轴且穿过区域  $D$  的内部的直线与  $D$  的边界的交点不多于两个. 称形如

$$D = \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

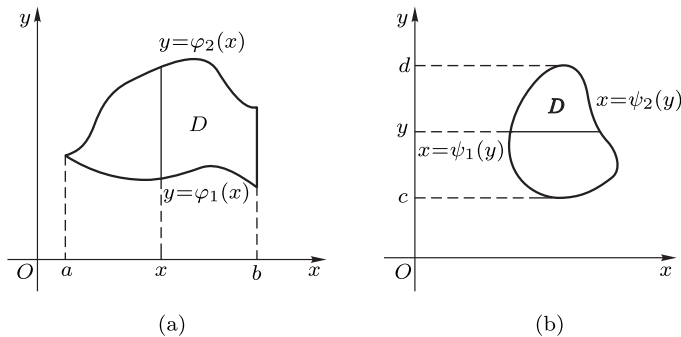


图 3.3



的闭区域为  $y$  型域, 其中  $\psi_1(y), \psi_2(y) \in C[c, d]$ , 如图 3.3(b) 所示.  $y$  型域的特点是: 任何平行于  $x$  轴且穿过区域  $D$  的内部直线与  $D$  的边界的交点不多于两个.

我们从二重积分的几何意义出发, 讨论

$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

的计算问题. 不妨假设  $f(x, y) \geq 0, f(x, y) \in C(D)$ . 由二重积分的几何意义知,

$\iint_D f(x, y) d\sigma$  的值等于以  $D$  为底, 以曲面  $z = f(x, y)$  为顶的曲顶柱体的体积.

设  $D$  是如图 3.3(a) 中所示的  $x$  型域. 下面计算曲顶柱体 (图 3.4) 的体积  $V$ . 为此, 在区间  $[a, b]$  上任取一点  $x$  (暂时看成固定的), 过点  $(x, 0, 0)$  作平行于  $Oyz$  坐标面的平面  $x = x$ , 它截曲顶柱体的截面 (图 3.4 的阴影部分) 面积记为  $S(x)$ . 如图 3.4, 易见这个截面是以区间  $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$  为底, 曲线  $z = f(x, y)$  (注意  $x$  是固定的) 为曲边的曲边梯形, 因此它的面积  $S(x)$  可以由定积分

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

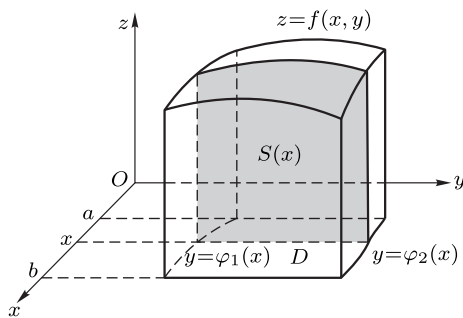


图 3.4

求得, 于是曲顶柱体现在成为了“平行截面面积为已知的立体”, 根据定积分应用的结论, 体积

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

又因为体积  $V = \iint_D f(x, y) d\sigma$ , 于是便得到

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx, \quad (1)$$

即二重积分的计算已化为计算两次定积分, 我们称上式的右端为先对  $y$  后对  $x$  的二次积分或累次积分. 在具体计算时, 先将  $x$  看成常数,  $f(x, y)$  看成只是变量  $y$  的一元函数, 在区间  $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$  上对  $y$  求定积分; 第一次积分的结果是  $x$  的一元函数, 再在区间  $[a, b]$  上对  $x$  求定积分, 便得最后结果. 也可以把这个先对  $y$  后对  $x$  的二次积分记作

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

于是, (1) 式又可以写为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (2)$$

在以上的讨论中, 我们假定  $f(x, y) \geq 0$ , 但实际上公式 (1), (2) 的成立并不受此限制.

类似地, 当积分区域  $D$  是如图 3.3(b) 所示的  $y$  型域时, 二重积分可化为先对  $x$  后对  $y$  的二次积分来计算, 即

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (3)$$

当积分区域  $D$  不是  $x$  型域也不是  $y$  型域 (例如图 3.5 所示的区域) 时, 可将  $D$  化成除边界外无公共点的几个子区域, 使得每个子区域或者是  $x$  型域, 或者是  $y$  型域, 然后利用公式 (2) 或公式 (3) 计算积分, 最后再由二重积分的性质 3, 在  $D$  上的二重积分等于每个子区域上二重积分之和. 于是对一般的积分区域上的二重积分计算原则上就解决了. 如果积分区域  $D$  既是  $x$  型域, 又是  $y$  型域时, 公式 (1), (2) 可以选择一个来用, 此时显然有

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

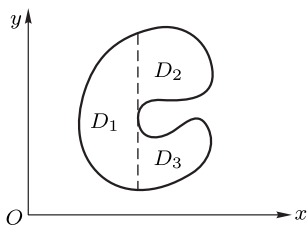


图 3.5

究竟选择何种积分次序, 以计算简捷为首选. 当然在实际计算中我们可以体会到, 选择积分次序对于计算量而言是很关键的.

**例 2.1** 计算  $\iint_D xy^2 dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = x, y = 1, x = 2$  围成.

**解** 积分区域如图 3.6 所示, 显然  $D$  既是  $x$  型域又是  $y$  型域. 若将  $D$  看成  $x$  型域, 则  $D$  可表示为

$$D: 1 \leq y \leq x, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

于是, 先对  $y$  积分后对  $x$  积分, 得

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 dx dy &= \int_1^2 dx \int_1^x xy^2 dy = \int_1^2 x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_1^x dx \\ &= \int_1^2 \left( \frac{x^4}{3} - \frac{x}{3} \right) dx = \frac{47}{30}. \end{aligned}$$

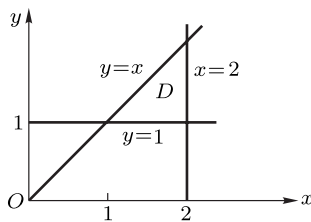


图 3.6

若将  $D$  看成  $y$  型域, 则  $D$  可表示为

$$D: y \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq 2.$$

于是, 先对  $x$  积分后对  $y$  积分, 得

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 dx dy &= \int_1^2 dy \int_y^2 xy^2 dx = \int_1^2 y^2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_y^2 dy \\ &= \int_1^2 \left( 2y^2 - \frac{y^4}{2} \right) dy = \frac{47}{30}. \end{aligned}$$

这两种不同次序的积分的计算量差不多.

**例 2.2** 计算  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由双曲线  $xy = 1$ , 直线  $y = x$  及  $x = 2$  围成.

**解** 积分区域  $D$  如图 3.7(a) 所示, 显然它既是  $x$  型域又是  $y$  型域. 如果将  $D$  看成  $x$  型域, 则  $D$  可表示成

$$D: \frac{1}{x} \leq y \leq x, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

于是先对  $y$  积分后对  $x$  积分, 得

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 \left[ -\frac{1}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^x dx \\ &= \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

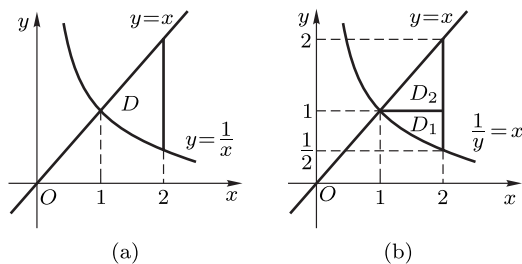


图 3.7

如果将  $D$  看成  $y$  型域, 则因  $D$  的左边曲线是由  $y = \frac{1}{x}$  和  $y = x$  两条曲线组成, 应该用  $y = 1$  将  $D$  分成  $D_1$  和  $D_2$ , 如图 3.7(b) 所示.  $D_1$  和  $D_2$  可分别表示成

$$\begin{aligned} D_1: & \quad \frac{1}{y} \leq x \leq 2, \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \\ D_2: & \quad y \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq 2. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma &= \iint_{D_1} \frac{x^2}{y^2} d\sigma + \iint_{D_2} \frac{x^2}{y^2} d\sigma \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y^2} dy \int_{\frac{1}{y}}^2 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy \int_y^2 x^2 dx \\ &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

显然, 这种次序比先对  $y$  后对  $x$  积分要麻烦很多, 计算量多出几乎一倍, 因此, 选择积分次序是很重要的.

**例 2.3** 计算  $\iint_D x^2 e^{-y^2} d\sigma$ , 其中  $D$  由直线  $x=0, y=1$  及  $y=x$  围成.

**解** 区域  $D$  如图 3.8 所示, 如果先对  $y$  后对  $x$  积分, 则

$$\iint_D x^2 e^{-y^2} d\sigma = \int_0^1 x^2 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy,$$

这样就遇到了计算  $\int_x^1 e^{-y^2} dy$ , 而我们知道  $e^{-y^2}$  的原函数是不能表示成初等函数的, 故“积不出来”.

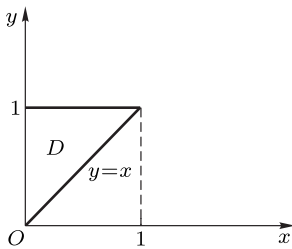


图 3.8

下面我们采用另外一种积分次序, 于是

$$I = \iint_D x^2 e^{-y^2} d\sigma = \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y x^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy,$$

利用变量代换  $t = y^2$ , 然后由分部积分法容易求出

$$I = \frac{1}{6} - \frac{1}{3e}.$$

本题的积分区域  $D$  虽然既是  $x$  型域又是  $y$  型域, 但是却只能选择后一种积分次序. 由此可见积分次序的选择不仅是繁简的问题, 有时还涉及能否计算出结果的问题. 因此, 在计算二重积分时, 应根据被积函数的性质和积分区域的形状选择好积分次序.

**例 2.4** 计算  $\iint_D |y - x^2| d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

**解** 积分区域  $D$  如图 3.9 所示, 由于被积函数带绝对值号不便计算. 作抛物线  $y = x^2$ , 将区域  $D$  分为  $D_1$  和  $D_2$  上下两部分, 显然在  $D_1$  内有  $y - x^2 > 0$ , 在  $D_2$  内有  $y - x^2 < 0$ , 于是有

$$\begin{aligned} \iint_D |y - x^2| d\sigma &= \iint_{D_1} (y - x^2) d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 - y) d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (y - x^2) dy + \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 - y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx = \frac{4}{15} + \frac{1}{10} = \frac{11}{30}. \end{aligned}$$

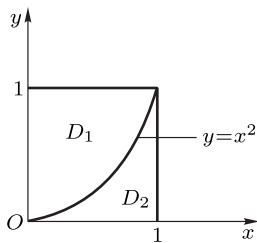


图 3.9

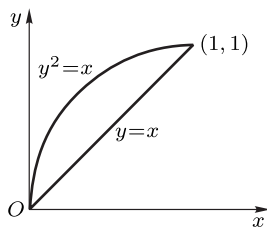


图 3.10

**例 2.5** 交换下面二次积分的次序, 并计算其值:

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy.$$

**解** 由二次积分可知, 与其相对应的二重积分为

$$\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy,$$

积分区域为

$$D = \{(x, y) | x \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\},$$

其中  $D$  是由曲线  $y = \sqrt{x}$  及  $y = x$  围成, 如图 3.10 所示.

由于先对  $y$  积分  $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ , 遇到“积不出来”的  $\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$ , 故本题只能交换积分次序来求. 于是

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (1 - y) \sin y dy = 1 - \sin 1.$$

**例 2.6** 求两个圆柱面

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = a^2$$

所围立体的体积.

**解** 由对称性, 所求立体的体积  $V$  是该立体位于第一卦限部分的体积  $V_1$  的 8 倍.

立体位于第一卦限的部分可看成是曲顶柱体, 如图 3.11 所示. 它的底为

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq x \leq a\},$$

曲顶是柱面  $z = \sqrt{a^2 - x^2}$  的一部分, 于是

$$\begin{aligned} V &= 8V_1 = 8 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} dx dy \\ &= 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy \\ &= 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} a^3. \end{aligned}$$

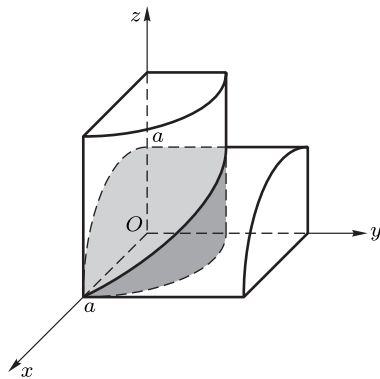


图 3.11

## 2.2 在极坐标系下计算二重积分

有些二重积分, 积分区域的边界曲线用极坐标方程表示比较方便, 并且被积函数在极坐标系下的表达式也比较简单, 此时利用极坐标计算这些二重积分常常很简捷.

### 1. 极坐标系下的二重积分

设  $f(x, y) \in C(D)$ ,  $D$  是  $Oxy$  面上的有界闭区域. 现在, 我们用极坐标网分割  $D$ . 极坐标网是以极点为中心的一族同心圆  $r = \text{常数}$  (当常数取不同正值时得一族同心圆), 发自极点的一族射线  $\theta = \text{常数}$  (当常数取不同正值时得一族射线) 组成的网格, 它们把  $D$  分成许多小的闭区域, 如图 3.12(a) 所示. 我们利用元素法的观点, 考察一个有代表性的小区域, 如图 3.12(b) 所示. 此小区域可以看成是一个矩形微元, 它的面积 (面积元素) 为

$$d\sigma = dr \cdot (rd\theta) = r dr d\theta,$$

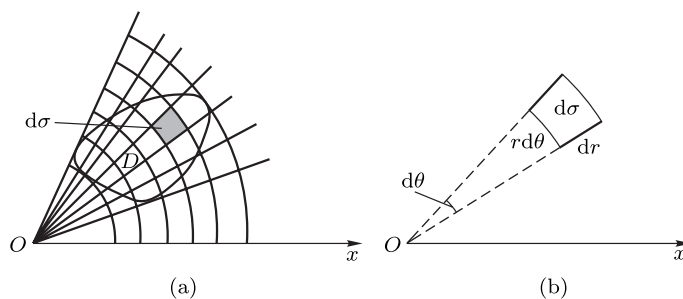


图 3.12

再根据直角坐标与极坐标的关系

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad (4)$$

于是

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

这样就将直角坐标系下的二重积分转换成了极坐标系下的二重积分, 这本质上是一种二重积分的变量代换——**极坐标变换**, 该变换由 (4) 式给出.

### 2. 化极坐标系下的二重积分为二次积分

设积分区域  $D$  可以用极坐标表示为

$$D = \{(r, \theta) | r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\},$$

如图 3.13 所示, 其中  $r_1(\theta), r_2(\theta) \in C[\alpha, \beta]$ . 这种区域的特点是发自极点的任意一条射线  $\theta = \theta_0$  ( $\theta_0 \in$

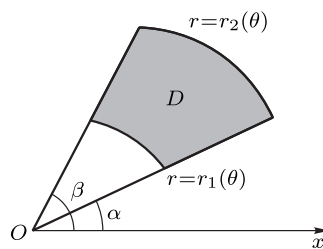


图 3.13

$(\alpha, \beta)$  与  $D$  的边界的交点不多于两点. 类似于直角坐标系下的讨论, 可将极坐标系下的二重积分化为先对  $r$  后对  $\theta$  的二次积分

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr. \quad (5)$$

当  $r_1(\theta) = 0$  时, 曲线  $r = r_1(\theta)$  退缩为极点  $O$  (图 3.14) 时, 公式 (5) 的下限  $r_1(\theta)$  变为 0. 特别地, 当极点为  $D$  的内点 (图 3.15) 时, 公式 (5) 可写成

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr,$$

其中  $r = r(\theta)$  是  $D$  的边界曲线方程.

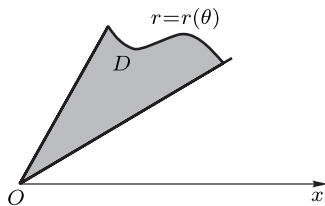


图 3.14

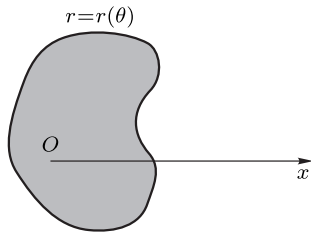


图 3.15

**例 2.7** 计算  $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , 其中  $D$  为圆环型域  $D = \{(x, y) | \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ .

**解** 区域  $D$  如图 3.16 所示, 在极坐标系下  $D$  的内圆边界方程为  $r = \pi$ , 外圆边界方程为  $r = 2\pi$ ,  $D$  可以表示为

$$D = \{(r, \theta) | \pi \leq r \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

因此

$$\begin{aligned} & \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi}^{2\pi} \sin r \cdot r dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -r \cos r \Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos r dr \right) d\theta \\ &= -6\pi^2. \end{aligned}$$

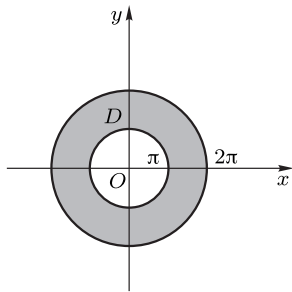


图 3.16



此题若在直角坐标系下化成二次积分, 计算将会相当麻烦.

**例 2.8** 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

**解**  $D$  是半径为  $a$  的四分之一圆域, 如图 3.17 所示,  $D$  在极坐标系下可表示为

$$D = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

于是有

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-a^2}) d\theta = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

此题若在直角坐标下化成二次积分, 由于  $\int e^{-x^2} dx$  不能用初等函数表示, 所以算不出来.

利用例 2.8 所得结果, 我们可以计算一个重要的反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ . 这一反常积分在概率论中有着重要的作用, 称为**概率积分**.

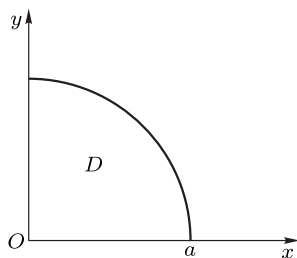


图 3.17

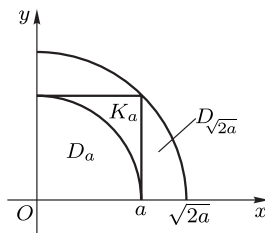


图 3.18

首先, 由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ , 根据比较判别法的极限形式知, 概率积分收敛. 记

$$I(a) = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}) \quad (a > 0),$$

其中  $D_a = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ , 再记  $K_a = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq$

$y \leq a\}$ . 显然有  $D_a \subset K_a \subset D_{\sqrt{2}a}$  (图 3.18). 又因为  $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ , 于是

$$I(a) < \iint_{K_a} e^{-x^2-y^2} dx dy < I(\sqrt{2}a).$$

而

$$\iint_{K_a} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy = \left( \int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2,$$

因此, 有

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) < \left( \int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2a^2}),$$

令  $a \rightarrow +\infty$ , 上式两端极限值同为  $\frac{\pi}{4}$ , 从而概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**例 2.9** 求以  $Oxy$  面上圆域  $x^2 + y^2 \leq 2ax$  为底, 以旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  为顶的曲顶柱体的体积  $V$ .

**解** 所求体积如图 3.19 所示, 设  $Oxy$  面上的区域 (图 3.20)

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2ax, a > 0\},$$

在极坐标系下

$$D = \left\{ (r, \theta) | 0 \leq r \leq 2a \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

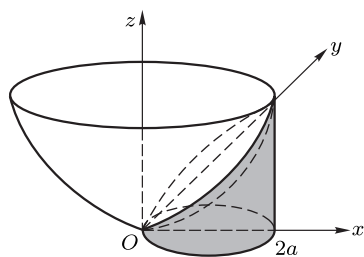


图 3.19

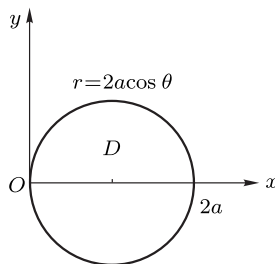


图 3.20

于是所求曲顶柱体的体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} r^2 \cdot r dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta = 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \\ &= 8a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{2} \pi a^4. \end{aligned}$$

一般来说, 当积分区域  $D$  是圆或圆的一部分, 且被积函数特别简单或被积函数可以写成  $z = f(x^2 + y^2)$  的形式时, 二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  采用极坐标计算可能比较简捷.

**例 2.10** 将直角坐标系下的二次积分化为极坐标形式下的二次积分, 并计算积分

$$I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dy.$$

**解** 在直角坐标系中,  $I$  的积分区域为

$$D = \{(x, y) | 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\},$$

它是由圆弧  $y = \sqrt{1-x^2}$  与直线  $y = 1-x$  所围成, 如图 3.21 所示. 可用极坐标表示如下:

$$D = \left\{ (r, \theta) \left| \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right. \right\},$$

圆弧方程为  $r = 1$ , 直线方程为  $r = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$ . 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 \frac{r dr}{r^3} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^1 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta + \cos \theta - 1) d\theta = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

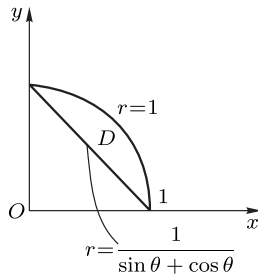


图 3.21

### 2.3 二重积分的换元法

在计算定积分时, 换元积分法对于一些特定的积分是十分方便的, 二重积分也有类似的换元积分法. 譬如, 上面一段中用极坐标计算二重积分, 就是用  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  进行换元积分的, 是二重积分换元法的一种特殊情形. 下面我们讨论一般的二重积分换元积分法.

**定理 2.1** 设  $f(x, y) \in C(D)$ ,  $D$  是  $Oxy$  面上的有界闭区域. 作变换

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D', \quad (6)$$

其中  $D'$  是  $O'uv$  平面上的有界闭区域,  $x(u, v), y(u, v) \in C^{(1)}(D')$ . 如果变换 (6) 把  $D'$  一对一地变换成  $D$ , 且在  $D'$  上 Jacobi 行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv. \quad (7)$$

**证明** 由假设知, (7) 式两端的积分都存在, 因此只需证明等式成立. 由于 (7) 式右端的积分存在, 我们可采用特殊的曲线网对  $D'$  进行分割, 在分割后的小区域内采用特殊的取点, 然后作积分和.

用平行于坐标轴的两组直线形式的网格来分割  $D'$ , 在  $D'$  内任取一个小矩形域, 它的 4 个顶点为  $M'_1(u, v), M'_2(u + \Delta u, v), M'_3(u + \Delta u, v + \Delta v)$  和  $M'_4(u, v + \Delta v)$ . 该小区域的面积  $\Delta\sigma' = \Delta u \Delta v$  (这里为了书写简单和具有代表性, 略去了下标  $i$ ), 如图 3.22(a) 所示. 由于变换 (6) 一对一地把  $D'$  变到  $D$ , 故它把  $D'$  内的小矩形域  $M'_1 M'_2 M'_3 M'_4$  变到  $D$  内的小曲边四边形区域, 相对应的顶点为  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , 如图 3.22(b) 所示, 其面积为  $\Delta\sigma$ .

当记点  $M_i$  坐标为  $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3, 4)$  时, 由微分公式知, 4 个顶点的坐标

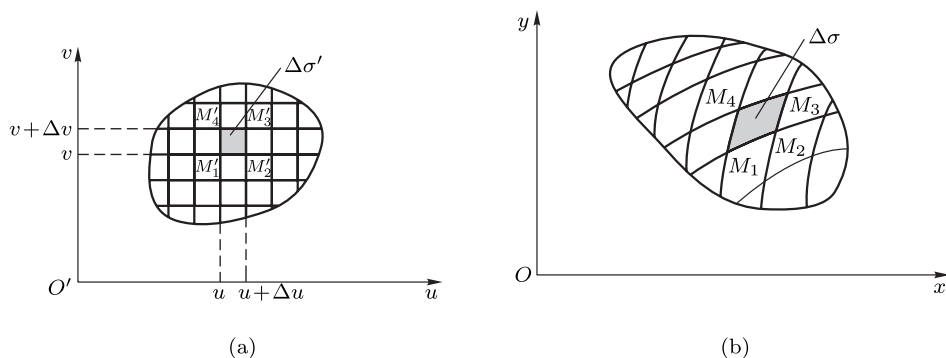


图 3.22

分别为

$$\begin{aligned}
 M_1(x_1, y_1) : \quad & x_1 = x(u, v), \\
 & y_1 = y(u, v); \\
 M_2(x_2, y_2) : \quad & x_2 = x(u + \Delta u, v) = x(u, v) + x_u(u, v)\Delta u + o(\Delta u), \\
 & y_2 = y(u + \Delta u, v) = y(u, v) + y_u(u, v)\Delta u + o(\Delta u); \\
 M_3(x_3, y_3) : \quad & x_3 = x(u + \Delta u, v + \Delta v) = x(u, v) + x_u(u, v)\Delta u + \\
 & \quad \quad \quad x_v(u, v)\Delta v + o(\rho), \\
 & y_3 = y(u + \Delta u, v + \Delta v) = y(u, v) + y_u(u, v)\Delta u + \\
 & \quad \quad \quad y_v(u, v)\Delta v + o(\rho); \\
 M_4(x_4, y_4) : \quad & x_4 = x(u, v + \Delta v) = x(u, v) + x_v(u, v)\Delta v + o(\Delta v), \\
 & y_4 = y(u, v + \Delta v) = y(u, v) + y_v(u, v)\Delta v + o(\Delta v),
 \end{aligned} \tag{8}$$

其中  $\rho = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$ , 上述式中的高阶无穷小都是关于  $\rho \rightarrow 0$  这一过程的.

记曲边四边形  $M_1M_2M_3M_4$  的面积为  $\Delta\sigma$ , 直边四边形  $M_1M_2M_3M_4$  的面积为  $\Delta\sigma_1$ , 则由 (8) 式可知当忽略高阶无穷小时, 有

$$\begin{aligned}
 x_2 - x_1 &= x_3 - x_4, \quad y_2 - y_1 = y_3 - y_4, \\
 x_4 - x_1 &= x_3 - x_2, \quad y_4 - y_1 = y_3 - y_2,
 \end{aligned}$$

即直边四边形  $M_1M_2M_3M_4$  近似于平行四边形, 其面积 (当不计高阶无穷小时)

为

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_1 &= \left| \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4} \right| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 \end{matrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{matrix} \right\|.\end{aligned}$$

可以证明  $\Delta\sigma - \Delta\sigma_1 = o(\rho)$  ( $\rho \rightarrow 0$ ), 于是在不计高阶无穷小的情况下有

$$\begin{aligned}\Delta\sigma = \Delta\sigma_1 &= \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_u\Delta u & x_v\Delta v \\ y_u\Delta u & y_v\Delta v \end{matrix} \right\|_{(u,v)} \\ &= \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \Delta u \Delta v,\end{aligned}$$

从而有

$$\Delta\sigma = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \Delta\sigma' + o(\rho).$$

利用微分的思想和记法, 有

$$d\sigma = |J|d\sigma', \quad \text{即 } dx dy = |J|du dv.$$

于是得到

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) |J| du dv.$$

□

(7) 式称为**二重积分的换元公式**, 它让我们很容易联想到定积分的换元公式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) x'(t) dt,$$

其中  $x = x(t)$ ,  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$ . 积分区间  $[a, b]$ ,  $[\alpha, \beta]$  分别相当于  $D, D'$ ; 积分变量  $x, t$  分别相当于二维积分变量  $(x, y), (u, v)$ ;  $x'(t)$  相当于  $|J| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ . 这样的类比对于读者是有益的. 但有一点差别:  $x'(t)$  无绝对值而  $|J|$  带绝对值, 这

是因为二重积分的面积元  $d\sigma$  (或  $\Delta\sigma_i$ ) 总是正的, 而定积分由于上下限互换差一个负号不能保证微元  $dx$  (或  $\Delta x_i$ ) 总是正的. 但是  $x'(t)$  与  $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$  都分别表示该变量代换在相应点处的变化率, 如  $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$  表示变量代换 (6) 将点  $(u,v)$  变到点  $(x,y)$  时在该点面积的变化率或伸缩率.

我们指出, 如果 Jacobi 行列式  $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$  只是在  $D'$  内个别点上, 或在一条曲线上为零, 则可以证明换元公式 (7) 仍然成立. 例如, 在极坐标变换  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  下,

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r,$$

$J$  仅在原点为零, 因此无论  $D'$  是否含极点都可以利用极坐标变换进行二重积分的计算.

**例 2.11** 计算  $\iint_D \frac{y^2}{x} dx dy$ , 其中  $D$  是由抛物线  $y^2 = px, y^2 = qx, x^2 = ay$  和  $x^2 = by$  ( $0 < p < q, 0 < a < b$ ) 所围成的区域 (图 3.23(a)).

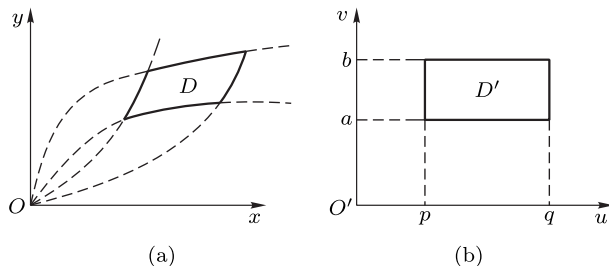


图 3.23

**解** 作变量代换

$$\begin{cases} y^2 = ux, \\ x^2 = vy, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{uv^2}, \\ y = \sqrt[3]{u^2v}, \end{cases}$$

其中  $p \leq u \leq q, a \leq v \leq b$ . 在此变量代换下

$$D' = \{(u, v) | p \leq u \leq q, a \leq v \leq b\},$$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3},$$

从而  $|J| = \frac{1}{3}$ , 于是

$$\iint_D \frac{y^2}{x} dx dy = \iint_{D'} u \cdot \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \int_a^b dv \int_p^q u du = \frac{1}{6} (b-a)(q^2 - p^2).$$

注意, 在计算 Jacobi 行列式  $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  时, 当  $J$  不易计算时, 可利用关系式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$$

来求  $J$ , 即

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}.$$

例如, 在例 2.11 中, 可先求

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3,$$

于是  $J = -\frac{1}{3}$ . 这里行列式中的偏导数比较好求.

**例 2.12** 求椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  围成的椭球体的体积.

**解** 上半椭球面方程为  $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ , 设所求体积为  $V$ , 椭球体在第一卦限部分的体积为  $V_1$ , 由对称性

$$V = 8V_1 = 8 \iint_D c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$



其中  $D = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ . 作坐标变换 (广义极坐标变换)

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta. \end{cases}$$

在此变换下  $D$  变为

$$D' = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = abr,$$

于是

$$V = 8 \iint_{D'} c \sqrt{1-r^2} ab r dr d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 abc \sqrt{1-r^2} r dr = \frac{4}{3} abc \pi.$$

### 习 题 3.2

(A)

1. 在直角坐标系下, 将二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  化成二次积分 (两种次序均要写出), 其

中  $D$  为如下区域:

- (1) 由  $x = 0, x = 1, y = -1$  及  $y = 2$  围成;
- (2) 由  $x = y^2$  及  $x + y = 2$  围成;
- (3) 由  $x + y = 1, x - y = 1$  及  $x = 0$  围成;
- (4) 由  $y = 0$  及  $y = \sqrt{1-x^2}$  围成.

2. 计算下列二重积分:

- (1)  $\iint_D xy^2 d\sigma, D = \{(x, y) | 4x \geq y^2, x \leq 1\};$
- (2)  $\iint_D (x^2 + xy + y^2) d\sigma, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$
- (3)  $\iint_D x e^{xy} d\sigma, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\};$
- (4)  $\iint_D \frac{\ln y}{x} d\sigma$ , 其中  $D$  是由  $y = 1, y = x$  与  $x = 2$  所围成的区域;
- (5)  $\iint_D x \cos(x+y) d\sigma$ , 其中  $D$  是三顶点分别为  $(0, 0), (\pi, 0)$  和  $(\pi, \pi)$  的三角形区域;

$$(6) \iint_D e^{-y^2} d\sigma, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y \leq 1\};$$

$$(7) \iint_D (x^2 - y^2) d\sigma, D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\};$$

$$(8) \iint_D \frac{x \sin y}{y} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是由 } y = x^2 \text{ 和 } y = x \text{ 所围成的区域.}$$

3. 交换下列二次积分的积分次序:

$$(1) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(2) \int_{-1}^0 dx \int_0^{1+x} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_{-1}^1 dx \int_{x^2+x}^{x+1} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy \quad (a > 0).$$

4. 判断下列等式是否成立, 为什么?

$$(1) \iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, \text{ 其中}$$

$$D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$(2) \iint_D f(x^2 + y^2) d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中}$$

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

5. 利用极坐标计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D y d\sigma, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\} \quad (a > 0);$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma, D = \{(x, y) | 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(3) \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\};$$

$$(4) \iint_D \ln(1+x^2+y^2) d\sigma, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\};$$

$$(5) \iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma, D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}.$$

6. 把下列积分化为极坐标系下的累次积分:

$$(1) \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2 + y^2) dy;$$

$$(2) \int_0^a dx \int_0^x f(x^2 + y^2) dy;$$

$$(3) \int_0^{2a} dy \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x^2 + y^2) dx;$$

$$(4) \iint_D f\left(\arctan \frac{y}{x}\right) d\sigma, D \text{ 由 } y=0, x=1, y=x \text{ 所围成}.$$

7. 计算下列立体的体积:

(1) 由平面  $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1$  及  $2x+3y+z=6$  围成;

(2) 由平面  $x=0, y=0, x+y=1, z=0$  及抛物面  $x^2+y^2=6-z$  围成;

(3) 由  $z=xy$  (马鞍面),  $z=0$  及  $x+y=1$  围成;

(4) 由  $z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2=2x$  及  $z=0$  围成.

8. 计算由下列各组曲线所围成图形的面积:

(1) 双曲线  $xy=a^2$  与直线  $x+y=\frac{5}{2}a$  ( $a>0$ );

(2) 心形线  $r=a(1+\cos\theta)$  ( $a>0$ );

(3) 抛物线  $y^2=\frac{b^2}{a}x$  与直线  $y=\frac{b}{a}x$  ( $a>0, b>0$ ).

9. 设某平面薄板所在的闭区域  $D$  是由直线  $y=0, x=1$  和  $y=x$  所围成, 其面密度  $\rho(x, y)=x^2+y^2$ , 求该薄板的质量.

10. 在一个半径为 4 cm 的金属球体上, 钻一个过球心、半径为 1 cm 的圆孔, 问损失掉的金属的体积是多少?

(B)

1. 计算下列积分:

$$(1) \iint_D e^{-|x|-|y|} d\sigma, \text{ 其中 } D: |x| \leq a, |y| \leq a;$$

$$(2) \iint_D f(x, y) d\sigma, \text{ 其中 } D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1,$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1-x-y, & x+y \leq 1, \\ 0, & x+y > 1; \end{cases}$$

$$(3) \iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 由 } y=x, y=x^4 \text{ } (x \geq 0) \text{ 围成};$$

$$(4) \int_0^1 dy \int_y^1 \sin x^2 dx;$$

$$(5) \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dx dy, \text{ 其中 } D: 1 \leq x^2+y^2 \leq e^2.$$

\*2. 选择适当的变量代换, 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y) dx dy$ , 其中  $D$  是平行四边形区域, 其四个顶点是  $(\pi, 0)$ ,  $(2\pi, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$  和  $(0, \pi)$ ;

(2)  $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ , 其中  $D$  是由两条双曲线  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  和两条直线  $y = x$ ,  $y = 4x$  所围成的在第 I 象限内的闭区域;

(3)  $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x$  轴,  $y$  轴和直线  $x + y = 1$  所围成的闭区域.

3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 试利用二重积分证明

$$\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

4. 求抛物面  $z = 1 + x^2 + y^2$  的一个切平面, 使得它与该抛物面及圆柱面  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  围成的立体体积最小, 试写出切平面方程并求出最小的体积.

5. 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  与柱面  $x^2 + y^2 = ax$  ( $a > 0$ ) 所围立体体积.

6. 设  $f(x, y) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  求  $F(t) = \iint_{x+y \leq t} f(x, y) dx dy$ .

## §3 三重积分

### 3.1 三重积分的概念

给定一个非均匀物体, 它在三维空间  $\mathbf{R}^3$  中占有有界闭区域  $\Omega$ , 当其在点  $(x, y, z)$  处的密度为  $\rho(x, y, z)$  时, 我们可以仿照上节引例 2 中求平面薄片质量的方法来求此物体的质量. 其步骤仍是: 分割、代替、求和、取极限, 可以得到该物体的质量为

$$m = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

详细步骤及记号的含义, 请读者自行补充. 由于求非均匀物体质量的实际问题化成了求和式的极限问题, 我们由这类和式的极限抽象出三重积分的概念.

**定义 3.1** 设  $f(x, y, z)$  是定义在有界闭区域  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  上的有界函数. 将  $\Omega$  任意分割成  $n$  个小闭区域

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n,$$

其中  $\Delta V_i$  既表示第  $i$  个小闭区域, 也表示其体积, 且任意两个小区域  $\Delta V_i$  与  $\Delta V_j$  ( $i \neq j$ ) 除边界外无公共点. 任取一点  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

以  $d_i$  表示  $\Delta V_i$  的直径,  $d = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ , 如果当  $d \rightarrow 0$  时, 极限

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

存在, 并且此极限与  $\Omega$  的分割方法及  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  的取法无关, 则称其为  $f(x, y, z)$  在区域  $\Omega$  上的三重积分, 记为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV.$$

其中体积元素  $dV$  在直角坐标系中也常写成  $dx dy dz$ , 即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

由定义 3.1 知, 前面提到的非均匀物体的质量现在可以写成

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV.$$

与二重积分一样, 可以证明, 当  $f(x, y, z) \in C(\Omega)$  时,  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上可积.

三重积分的性质与二重积分完全类似, 只需将二重积分性质中的被积函数  $f(x, y)$ 、积分区域  $D$ 、积分号  $\iint_D$  和面积元素  $d\sigma$  分别换成  $f(x, y, z)$ ,  $\Omega$ ,  $\iiint_{\Omega}$  和

体积元素  $dV$  即可, 请读者自行复述并体会其含义. 这里仅强调一个性质:

$$\iiint_{\Omega} dV = V(\Omega) \quad (\Omega \text{ 的体积}).$$

### 3.2 在直角坐标系下计算三重积分

在直角坐标系下计算二重积分, 是将其化成两次定积分来计算. 现在我们不但掌握了定积分的计算方法, 而且也掌握了二重积分的计算方法, 我们自然会想到在直角坐标系下三重积分是否应化为熟悉的定积分和二重积分来计算呢? 回答是肯定的. 本段我们不加证明地叙述在直角坐标系下化三重积分为定积分和

二重积分的方法, 分成三种情况“先一后二”法、“三次积分”法和“先二后一”法, 最常用的应是前两者.

### 1. 将三重积分化为先定积分后二重积分的计算

对于积分区域  $\Omega$ , 如果其可以表示成

$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\},$$

则称  $\Omega$  是  $xy$  型域, 其中  $D_{xy}$  是  $\Omega$  在  $Oxy$  坐标面上的投影域,  $z_1(x, y), z_2(x, y) \in C(D_{xy})$ .  $xy$  型域的特点是: 任何平行于  $z$  轴且穿过  $\Omega$  内部的直线与  $\Omega$  的边界曲面相交不多于两点 (图 3.24). 类似地可以定义  $yz$  型域和  $zx$  型域.

假设被积函数  $f(x, y, z)$  在  $xy$  型域  $\Omega$  上连续, 下面讨论三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

的计算.

任意  $(x, y) \in D_{xy}$ , 暂将  $x, y$  看成常量, 则  $f(x, y, z)$  是关于  $z$  的连续函数, 在区间  $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$  上对  $f(x, y, z)$  进行定积分计算, 得到的结果是  $x, y$  的函数, 记作  $F(x, y)$ , 于是

$$F(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

可以证明  $F(x, y)$  在  $D_{xy}$  上连续, 且有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xy}} F(x, y) d\sigma,$$

即

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d\sigma. \quad (9)$$

在利用 (9) 式计算括号内定积分时, 积分变量是  $z$ ,  $x$  和  $y$  暂时看成常量, 当完成定积分计算时, 由于  $f(x, y, z)$  本身含有  $x, y$ , 积分上下限也含有  $x, y$ , 最终的定积分结果是二元函数  $F(x, y)$ , 然后再计算二重积分  $\iint_{D_{xy}} F(x, y) d\sigma$ .

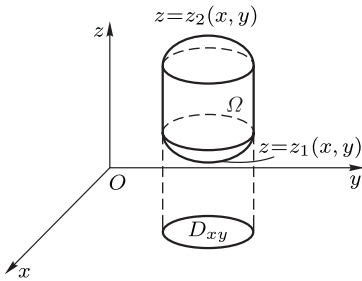


图 3.24

(9) 式又可以写成

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

如果  $\Omega$  是  $yz$  型域, 投影域为  $D_{yz}$ , 或者  $\Omega$  是  $zx$  型域, 投影域为  $D_{zx}$ , 则与 (9) 式相仿可以分别得到另外两个“先后二”法计算三重积分的公式, 这里将不一一列出.

**例 3.1** 计算  $\iiint_{\Omega} x dV$ , 其中  $\Omega$  由  $x=0, y=0, z=0$  及  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

( $a > 0, b > 0, c > 0$ ) 所围成.

**解** 如图 3.25 所示,  $\Omega$  既是  $xy$  型域, 又是  $yz$  型域和  $zx$  型域. 作为  $xy$  型域,  $\Omega$  可表示成

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq c \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right), (x, y) \in D_{xy} \right\},$$

其中  $D_{xy}$  由  $Oxy$  面上的直线  $x=0, y=0$  和  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  所围成. 于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x dV &= \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} x dz = \iint_{D_{xy}} cx \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) d\sigma \\ &= \int_0^a cxdx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left( 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) dy \\ &= \int_0^a \frac{bc}{2} x \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 dx = \frac{1}{24} a^2 bc. \end{aligned}$$

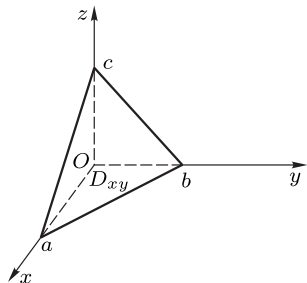


图 3.25

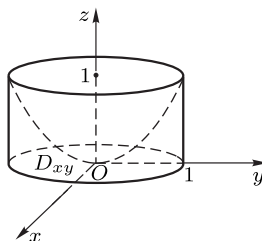


图 3.26

**例 3.2** 计算  $I = \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dV$ , 其中  $\Omega$  由旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$ , 圆

柱面  $x^2 + y^2 = 1$  及平面  $z = 0$  围成.

解 如图 3.26 所示,  $\Omega$  是  $xy$  型域, 可表示成

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq x^2 + y^2, (x, y) \in D_{xy}\},$$

其中  $D_{xy}$  是  $Oxy$  平面上的圆域

$$D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

于是

$$I = \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dV = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_0^{x^2+y^2} z(x^2 + y^2) dz = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma.$$

此二重积分用极坐标计算比较简捷, 有

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^6 \cdot r dr = \frac{\pi}{8}.$$

## 2. 将三重积分化为三次积分

在例 3.1 中, 当我们把计算过程中的二重积分直接写成二次积分时, 即

$$\iiint_{\Omega} x dV = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left( \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} x dz \right) dy,$$

这实际上就是将三重积分化成了计算三个定积分——三次积分 (或累次积分), 上述计算的顺序是先  $z$  再  $y$  最后  $x$ , 此三次积分可仿二次积分记为

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} x dz.$$

如果积分区域  $\Omega$  是  $xy$  型域, 即

$$\Omega = \{(x, y, z) | z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\},$$

当  $D$  是  $Oxy$  面上的  $x$  型域, 即

$$D = \{(x, y) | y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$$

时, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz;$$



当  $D$  是  $Oxy$  面上的  $y$  型域, 即

$$D = \{(x, y) | x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$$

时, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

类似地, 如果, 积分区域是  $yz$  型域或者  $zx$  型域, 并且投影域符合相关条件, 则三重积分可以化成另外各两种次序的三次积分.

**例 3.3** 计算  $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2}$ , 其中  $\Omega$  是由平面  $x = 1, x = 2, z = 0, y = x$  及

$z = y$  围成的区域.

**解**  $\Omega$  的图形如图 3.27 所示, 积分区域  $\Omega$  可表示成

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq y, 0 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\},$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2} &= \int_1^2 dx \int_0^x dy \int_0^y \frac{dz}{x^2 + y^2} = \int_1^2 dx \int_0^x \frac{y}{x^2 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(x^2 + y^2) \Big|_0^x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln 2 dx = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

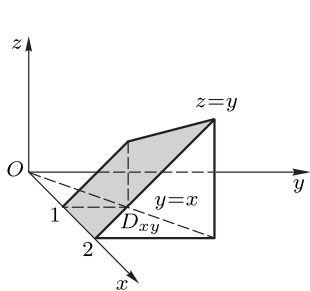


图 3.27

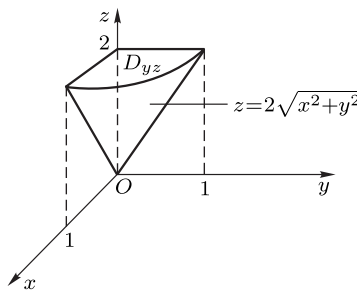


图 3.28

**例 3.4** 计算  $\iiint_{\Omega} \frac{xy}{\sqrt{z}} dV$ , 其中  $\Omega$  为锥面  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$  与平面  $z = 2$  围

成的锥体在第一卦限中的部分空间区域.

**解**  $\Omega$  的图形如图 3.28 所示, 根据本题中被积函数和积分区域的特点, 先对  $x$  再对  $y$  最后对  $z$  积分或先对  $y$  再对  $x$  最后对  $z$  积分, 比先对  $z$  积分容易些. 因此把  $\Omega$  按  $yz$  型区域来看, 即

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{z^2}{4} - y^2}, 0 \leq y \leq \frac{z}{2}, 0 \leq z \leq 2\}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz &= \int_0^2 dz \int_0^{\frac{z}{2}} dy \int_0^{\sqrt{\frac{z^2}{4} - y^2}} \frac{xy}{\sqrt{z}} dx \\ &= \int_0^2 dz \int_0^{\frac{z}{2}} \frac{y}{2\sqrt{z}} \left( \frac{z^2}{4} - y^2 \right) dy = \int_0^2 \frac{z^4}{128\sqrt{z}} dz \\ &= \frac{1}{128} \int_0^2 z^{\frac{7}{2}} dz = \frac{1}{36} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

### 3. 将三重积分化为先二重积分后定积分的计算

直接通过例题来学习 “先二后一” 法计算三重积分.

**例 3.5** 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ .

**解** 如图 3.29 所示, 区域  $\Omega$  可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, -c \leq z \leq c\},$$

其中  $D_z$  是平行于  $Oxy$  面的平面  $z = z$  截  $\Omega$  得到的平面区域, 在平面区域  $D_z$  上点的竖坐标均为  $z$ ,  $\forall z \in [-c, c]$ ,

$$D_z = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \right\},$$

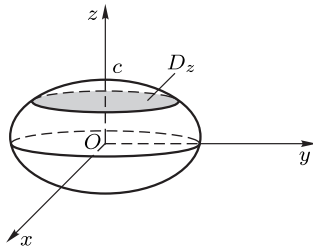


图 3.29

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_{-c}^c dz \iint_{D_z} z^2 d\sigma = \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} d\sigma \\ &= \int_{-c}^c \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) z^2 dz = \frac{4}{15} \pi abc^3. \end{aligned}$$

其中  $\iint_{D_z} d\sigma = \pi a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} = \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$  是  $D_z$  的面积.

此题若先对  $z$  积分比较麻烦. 一般地, 如果积分区域  $\Omega$  可表示成

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, p \leq z \leq q\},$$

其中  $D_z$  是平面  $z = z$  截  $\Omega$  得到的平面区域. 当二重积分  $\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$  比较容易计算时, 则可利用“先二后一”法计算三重积分, 即有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_p^q dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy.$$

### 3.3 在柱面坐标和球面坐标下计算三重积分

#### 1. 三重积分换元法

与定积分和二重积分相似, 三重积分也可以利用换元法来计算, 这里直接给出结论.

**定理 3.1** 设  $\Omega$  是  $Oxyz$  坐标系中的有界闭区域, 函数  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续,  $\Omega'$  是  $O'uvw$  坐标系中的有界闭区域, 作变换

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases} \quad (u, v, w) \in \Omega', \quad (10)$$

其中  $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) \in C^{(1)}(\Omega')$ , 若变换 (10) 将  $\Omega'$  一对一地变换到  $\Omega$ , 且 Jacobi 行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v, w) \in \Omega',$$

则有三重积分的变换公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} F(u, v, w) |J| du dv dw, \quad (11)$$

其中  $F(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ .

## 2. 利用柱面坐标计算三重积分

本节例 3.2 采用了把三重积分化成一次关于  $z$  的定积分和一次关于  $x, y$  的二重积分, 在二重积分的计算中利用了极坐标变换  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 实际上总体来看这是一个三维点之间的坐标变换

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad (12)$$

变换 (12) 称为**柱面坐标变换**. 直角坐标系中的点  $M(x, y, z)$  通过 (12) 可以用柱面坐标系中  $(r, \theta, z)$  来表示:  $r$  为点  $M$  到  $z$  轴的距离,  $\theta$  为过  $z$  轴及点  $M$  的半平面与  $Ozx$  面的夹角,  $z$  是  $M$  的竖坐标. 通常规定

$$0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty.$$

称  $(r, \theta, z)$  为点  $M$  的**柱面坐标** (图 3.30). 在柱面坐标系中, 三组坐标面为

$r = r_0$ , 这是以  $z$  为轴的圆柱面, 在直角坐标系中的方程是  $x^2 + y^2 = r_0^2$ ;

$\theta = \theta_0$ , 这是过  $z$  轴的半平面, 在直角坐标系中的方程是  $\frac{x}{\cos \theta_0} = \frac{y}{\sin \theta_0}$ ;

$z = z_0$ , 这是与  $Oxy$  面平行的平面.

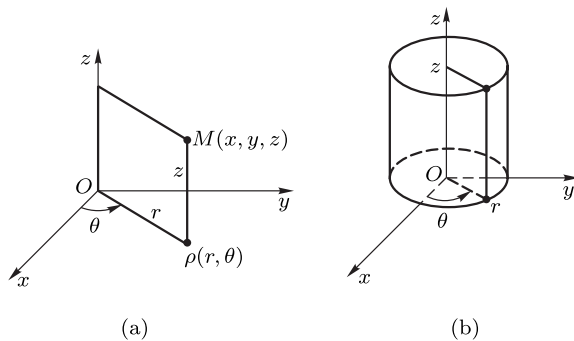


图 3.30

在柱面坐标变换 (12) 下, Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

若  $f(x, y, z)$  在有界闭区域  $\Omega$  上连续, 且在变换 (12) 下将  $\Omega$  变成  $\Omega'$ , 根据三重积分变换公式 (11) 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

这样就把直角坐标系下的三重积分化成了柱面坐标系下的三重积分. 然后再将柱面坐标系下的三重积分化成三次积分就可以计算了. 上式中的  $\Omega$  与  $\Omega'$  是同一区域在不同坐标系中的不同记号.

一般地, 当被积函数可以化为  $\varphi(x^2 + y^2, z)$  的形式, 而积分区域  $\Omega$  是以  $z$  轴为轴的旋转体或旋转体的一部分时, 利用柱面坐标计算三重积分可能比较简捷.

**例 3.6** 计算  $\iiint_{\Omega} (1 + x^2 + y^2) z dV$ , 其中  $\Omega$  是由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和平

面  $z = 1$  围成的闭区域 (图 3.31).

**解**  $\Omega$  是一个圆锥体域

$$\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\},$$

在柱面坐标系下  $\Omega$  可表示为

$$\Omega = \{(r, \theta, z) | r \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (1 + x^2 + y^2) z dV &= \iiint_{\Omega} (1 + r^2) z r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(1 + r^2) dr \int_r^1 z dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2} r(1 + r^2)(1 - r^2) dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{6} r^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

**例 3.7** 求半径为  $R$ , 高为  $h$  的球缺的体积 ( $0 < h < R$ ).

**解** 建立坐标系如图 3.32, 则球面方程为

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

从而球缺所占空间区域  $\Omega$  可表示为

$$\Omega = \{(r, \theta, z) | R - h \leq z \leq \sqrt{R^2 - r^2}, 0 \leq r \leq \sqrt{2Rh - h^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

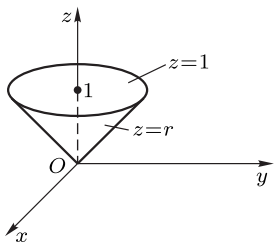


图 3.31

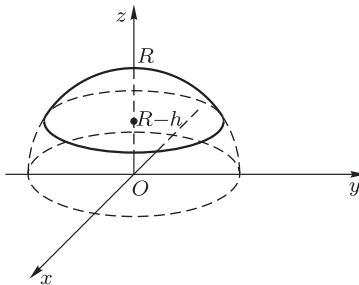


图 3.32

由三重积分的性质, 球缺的体积

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dV \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} r dr \int_{R-h}^{\sqrt{R^2-r^2}} dz \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} r(\sqrt{R^2-r^2} - R + h) dr \\
 &= 2\pi \left[ -\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^2}{2}(R-h) \right] \Big|_0^{\sqrt{2Rh-h^2}} \\
 &= \left( 2R^2h - Rh^2 + \frac{h^3}{3} \right) \pi.
 \end{aligned}$$

### 3. 利用球面坐标计算三重积分

空间中的点  $M$ , 也可以用另外一组三个数  $r, \theta, \varphi$  来表示, 其中  $r$  表示点  $M$  到原点  $O$  的距离,  $\theta$  表示  $x$  轴正向按逆时针与向量  $\vec{OP}$  的夹角 (点  $P$  是  $M$  在  $Oxy$  面的投影),  $\varphi$  表示  $z$  轴正向与  $\vec{OM}$  正向的夹角, 如图 3.33 所示, 并规定

$$0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

我们称  $(r, \theta, \varphi)$  为点  $M$  的球面坐标. 在球面坐标系中, 三组坐标面为

$r = r_0$ , 这是以原点为球心, 半径为  $r_0$  的球面, 在直角坐标系中的方程是  $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ ;

$\theta = \theta_0$ , 这是过  $z$  轴的半平面, 在直角坐标系中的方程是  $\frac{x}{\cos \theta_0} = \frac{y}{\sin \theta_0}$ ;

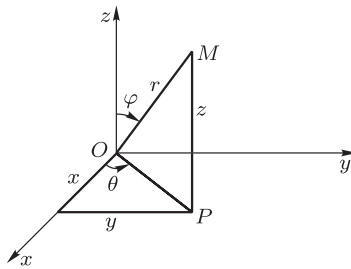


图 3.33

$\varphi = \varphi_0$ , 这是以原点为顶点,  $z$  轴为轴的圆锥面, 在直角坐标系中的方程是

$$\frac{z}{\cos \varphi_0} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sin \varphi_0}.$$

容易知道, 点  $M$  的直角坐标  $(x, y, z)$  与球面坐标  $(r, \theta, \varphi)$  之间的关系是

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases} \quad (13)$$

称 (13) 式为球面坐标变换, 在此变换下有恒等式  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

在球面坐标变换 (13) 下, Jacobi 行列式为

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= -r^2 \sin \varphi, \end{aligned}$$

从而  $|J| = r^2 \sin \varphi$ .

若  $f(x, y, z)$  在有界闭区域  $\Omega$  上连续, 且在变换 (13) 下将  $\Omega$  变为  $\Omega'$ , 根据定理 3.1, 则有变换公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} F(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi,$$

其中

$$F(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi).$$

一般地, 当被积函数可以写成  $\varphi(x^2 + y^2 + z^2)$  的形式, 而积分区域为球形区域或其一部分时, 可以考虑利用球面坐标计算三重积分, 与柱面坐标变换公式一样, 上式中的  $\Omega$  与  $\Omega'$  是同一区域在不同坐标系下的不同记号.

**例 3.8** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV$ , 其中  $\Omega$  由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和球面

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  围成.

**解**  $\Omega$  在直角坐标系中可以表示成

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{2} \right\}.$$

在球面坐标系中, 锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  即为  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ; 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  即为  $r = a$ , 如图 3.34 所示.  $\Omega$  在球面坐标中可以表示成

$$\Omega = \left\{ (r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\},$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^5}{5} \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{2}{5} \pi a^5 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

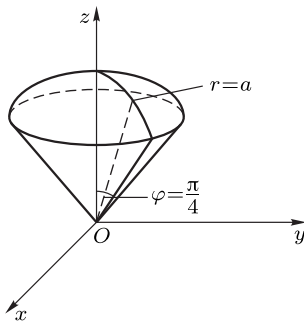


图 3.34

**例 3.9** 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dV$ , 其中  $\Omega$  为椭球区域

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

**解** 作广义球面坐标变换

$$\begin{cases} x = ar \sin \varphi \cos \theta, \\ y = br \sin \varphi \sin \theta, \\ z = cr \cos \varphi. \end{cases}$$

则  $\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ , 可以求得

$$|J| = abcr^2 \sin \varphi,$$

于是

$$\iiint_{\Omega} z^2 dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 abc^3 r^4 dr = \frac{4}{15} \pi abc^3.$$



## 习 题 3.3

(A)

1. 仅从积分域考虑, 将三重积分  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$  化成先对  $z$  再对  $y$  后对  $x$  的三次积分, 其积分区域  $\Omega$  分别是:

- (1) 由三个坐标平面及  $x + y + z = 1$  所围成的闭区域;
- (2) 由双曲抛物面  $z = xy$  及二平面  $z = 0, x + y = 1$  所围成的区域;
- (3)  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$ .

2. 计算下列三重积分:

- (1)  $\iiint_{\Omega} xyz dV$ , 其中  $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ;
- (2)  $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dV$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = xy$  与平面  $y = x, x = 1$  和  $z = 0$  所围成的

闭区域;

- (3)  $\iiint_{\Omega} (x + y) \sin z dV$ , 其中  $\Omega$  是由  $x + y = 1, y = x, y = 0, z = 0$  和  $z = \pi$  所围成

的闭区域;

- (4)  $\iiint_{\Omega} \frac{dV}{(1 + x + y + z)^3}$ , 其中  $\Omega$  为平面  $x = 0, y = 0, z = 0$  和  $x + y + z = 1$  所围

成的四面体;

- (5)  $\iiint_{\Omega} xz dV$ , 其中  $\Omega$  是由平面  $z = 0, z = y, y = 1$  及抛物柱面  $y = x^2$  所围成的闭

区域.

3. 利用柱面坐标计算下列三重积分:

- (1)  $\iiint_{\Omega} z dV$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  与  $z = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$  所围成的闭

区域;

- (2)  $\iiint_{\Omega} xyz dV$ , 其中  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ;

- (3)  $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dV$ , 其中  $\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ ;

- (4)  $\iiint_{\Omega} \frac{z}{1 + x^2 + y^2} dV$ , 其中  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ .

4. 利用球面坐标计算下列三重积分:

- (1)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^n dx dy dz$  ( $n > 0$ ), 其中  $\Omega$  是由球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  围成的

区域;

$$(2) \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\};$$

$$(3) \iiint_{\Omega} z dV, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是球面 } x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \text{ 围成的区域};$$

$$(4) \iiint_{\Omega} \frac{dV}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是球体 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ 满足 } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1$$

的部分.

5. 求由下列曲面所围成的空间区域的体积:

$$(1) z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a > 0), x^2 + y^2 = z^2 \text{ (含 } z \text{ 轴部分)};$$

$$(3) x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2 (a > 0);$$

$$(4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > 0, b > 0, c > 0).$$

(B)

1. 在适当的坐标系下计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} \sin[(x+y+z)\pi] dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 由平面 } x+y+z=1, x+y+\frac{z}{2}=1, x=0$$

和  $y=0$  所围成;

$$(2) \iiint_{\Omega} \frac{\sin(\pi z)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由锥面 } z = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + y^2} \text{ 和柱面 } x^2 + y^2 = \frac{1}{3} \text{ 以及}$$

平面  $z=2$  围成的区域;

$$(3) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由球面 } x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 (0 \leq z \leq 1) \text{ 和锥}$$

面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  围成的区域;

$$(4) \iiint_{\Omega} z^2 dV, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是两个球体: } x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ 和 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz (R > 0)$$

的公共部分 (提示: 可用先二后一法).

$$2. \text{ 设 } F(t) = \iiint_{\Omega_t} f(x^2 + y^2 + z^2) dV, \text{ 其中 } \Omega_t = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}, f \text{ 为}$$

连续函数, 求  $F'(t)$ .

$$3. \text{ 计算 } \iiint_{\Omega} z \sin(x+y+z) dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq \frac{\pi}{2}.$$

## \*§4 含参变量的积分与反常重积分

在实际问题中所遇到的积分, 其中除积分变量外还可能含有其他变量, 例如将二重积分化为累次积分时遇到的积分  $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ , 这种积分称为含参变量的积分. 本节讨论含参变量积分的一些重要性质. 此外, 还要将重积分的概念加以拓广, 介绍反常重积分的概念、性质与计算.

### 4.1 含参变量的积分

#### 1. 积分限为常数的含参变量的积分

记  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ . 当  $f(x, y) \in C(D)$  时, 对任意的  $y \in [c, d]$ , 定积分

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx \quad (14)$$

存在, 积分值  $I(y)$  随  $y$  的不同而变化, 即 (14) 式确定了自变量为  $y$  的函数  $I(y)$ , 将此积分称为含参变量  $y$  的积分.

同样, 对任意的  $x \in [a, b]$ , 定积分

$$J(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

确定了自变量为  $x$  的函数, 称为含参变量  $x$  的积分.

我们将以 (14) 式确定的含参变量的积分为例来讨论此类函数的分析性质.

**定理 4.1** 若  $f(x, y) \in C(D)$ , 则

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

在  $[c, d]$  上连续.

**证明** 任取  $y \in [c, d]$ , 当  $y + \Delta y \in [c, d]$  时, 则有

$$\Delta I = I(y + \Delta y) - I(y) = \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]dx.$$

因为  $f(x, y)$  在闭区域上连续, 从而一致连续, 所以  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在仅与  $\varepsilon$  有关的  $\delta(\varepsilon) > 0$ , 使得  $\forall (x, y) \in D, (x, y + \Delta y) \in D$ , 只要  $|\Delta y| < \delta(\varepsilon)$ , 就有

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

于是

$$|\Delta I| \leq \int_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon,$$

因此  $I(y)$  在  $[c, d]$  上连续. □

由定理 4.1 可知,  $\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0)$  相当于

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx,$$

即极限号与积分号可以交换次序.

**定理 4.2** 若  $f(x, y), f_y(x, y) \in C(D)$ , 则

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

在  $[c, d]$  上有连续的导数, 且

$$I'(y) \equiv \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx.$$

**证明** 任取  $y \in [c, d], y + \Delta y \in [c, d]$ . 由 Lagrange 中值定理

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y + \theta \Delta y) \Delta y \quad (0 < \theta < 1),$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I}{\Delta y} &= \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx \\ &= \int_a^b f_y(x, y + \theta \Delta y) dx. \end{aligned}$$

由于  $f_y(x, y)$  在  $[c, d]$  上连续, 根据定理 4.1 可知

$$I'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta y} = \int_a^b \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f_y(x, y + \theta \Delta y) dx = \int_a^b f_y(x, y) dx,$$

并且  $I'(y) \in C[c, d]$ . □

**例 4.1** 求积分

$$I(\theta) = \int_0^\pi \ln(1 + \theta \cos x) dx \quad (|\theta| < 1).$$

解 由  $|\theta| < 1$  知, 存在  $0 < b < 1$ , 使得  $|\theta| \leq b$ , 于是

$$f(x, \theta) = \ln(1 + \theta \cos x) \quad \text{及} \quad f_\theta(x, \theta) = \frac{\cos x}{1 + \theta \cos x}$$

在闭区域  $D = \{(x, \theta) | 0 \leq x \leq \pi, -b \leq \theta \leq b\}$  上连续. 由定理 4.2 知

$$I'(\theta) = \int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + \theta \cos x} dx = \frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \theta \cos x} = \pi \left( \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta \sqrt{1 - \theta^2}} \right).$$

再对  $\theta$  求不定积分, 使得

$$I(\theta) = \pi \left( \ln \theta + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \theta^2}}{\theta} \right) + C = \pi \ln(1 + \sqrt{1 - \theta^2}) + C.$$

将  $I(0) = 0$  代入上式, 得  $C = -\pi \ln 2$ , 于是

$$I(\theta) = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \theta^2}}{2}.$$

下面讨论含参变量积分的积分性质.

假设  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续, 由定理 4.1 知

$$I_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

及

$$I_2(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

分别在区间  $[c, d], [a, b]$  上及其闭子区间上连续. 设  $u \in [c, d]$ , 且记

$$J(u) = \int_c^u \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy - \int_a^b \left[ \int_c^u f(x, y) dy \right] dx.$$

由于右端第一项的被积函数  $\int_a^b f(x, y) dx$  连续, 故该项作为变上限积分可导; 第

二项的被积函数  $\int_c^u f(x, y) dy$  作为点  $(x, u)$  的函数连续, 其对  $u$  的偏导数  $f(x, u)$  也是连续的, 由定理 4.2 知该项作为  $u$  的函数可导, 且易知

$$J'(u) = \int_a^b f(x, u) dx - \int_a^b f(x, u) dx = 0.$$

于是在  $[c, d]$  上  $J(u) = k$  (常数), 而  $J(c) = 0$ , 因此  $J(u) = 0$ . 从而可以得到如下的结论.

**定理 4.3** 若  $f(x, y) \in C(D)$ , 则对任意的  $u \in [c, d]$ , 有

$$\int_c^u dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^u f(x, y) dy$$

成立.

定理 4.3 表明, 当  $f(x, y)$  连续时, 对含参变量的积分求积分可以在积分号内进行, 或者说累次积分可以交换次序. 这为我们以前进行过的累次积分交换次序提供了理论根据.

**例 4.2** 求定积分  $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0)$ .

**解** 由于

$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x},$$

所以

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

根据定理 4.3, 交换积分次序

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

## 2. 积分限也含参变量的积分

如果在 (14) 式中积分限  $a, b$  不是常数, 而是定义在  $[c, d]$  上的函数  $a(y), b(y)$ , 则成为形如

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \quad (15)$$

的含参变量积分. 其特点是不但被积函数  $f(x, y)$  含参变量  $y$ , 而且积分限也含参变量  $y$ . 现在讨论  $F(y)$  的连续性与可微性.

**定理 4.4** 若  $f(x, y) \in C(D)$ ,  $a(y), b(y)$  在  $[c, d]$  上连续, 且  $a \leq a(y) \leq b, a \leq b(y) \leq b$ , 则

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$$

在  $[c, d]$  上连续.

**证明** 进行变量代换, 令  $x = t[b(y) - a(y)] + a(y)$ , 于是 (15) 式中的积分变量由  $x$  变为  $t$ , 积分限也由  $b(y), a(y)$  分别变为 1, 0, 于是

$$F(y) = \int_0^1 f(t[b(y) - a(y)] + a(y), y) \cdot [b(y) - a(y)] dt. \quad (16)$$

由于 (16) 式中被积函数是  $(t, y)$  的连续函数, 由定理 4.1 知  $F(y)$  连续.  $\square$

**定理 4.5** 若  $f(x, y), f_y(x, y) \in C(D)$ ,  $a(y), b(y)$  均在  $[c, d]$  上可导, 且  $a \leq a(y) \leq b, a \leq b(y) \leq b$ , 则

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$$

在  $[c, d]$  上可导, 并且

$$F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y), \quad (17)$$

其中 (17) 式称为 **Leibniz (莱布尼茨) 公式**.

**证明** 将由 (15) 式所确定的函数  $F(y)$  看成是由

$$G(y, b, a) = \int_a^b f(x, y) dx$$

与  $b = b(y), a = a(y)$  复合而成的函数

$$F(y) = G(y, b(y), a(y)).$$

由多元复合函数求导的链式法则、定理 4.2 及变上限定积分的求导公式可知,  $F(y)$  在  $[c, d]$  上可导, 而且

$$\begin{aligned} F'(y) &= G_y + G_b b'(y) + G_a a'(y) \\ &= \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx + f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y). \end{aligned} \quad \square$$

**例 4.3** 设

$$\varphi(x, y) = \int_{\frac{y}{x}}^{xy} (y - xz) f(z) dz,$$

其中  $f(z)$  为可导函数, 求  $\varphi_{yx}(x, y)$ .

**解** 先将  $x$  看作常量, 应用定理 4.5, 得

$$\varphi_y(x, y) = \int_{\frac{y}{x}}^{xy} f(z) dz + x(y - x^2 y) f(xy),$$

再将  $y$  看作常量, 得

$$\begin{aligned} \varphi_{yx}(x, y) &= y f(xy) + \frac{y}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right) + (y - 3x^2 y) f(xy) + xy^2(1 - x^2) f'(xy) \\ &= \frac{y}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right) + y(2 - 3x^2) f(xy) + xy^2(1 - x^2) f'(xy). \end{aligned}$$

## 4.2 含参变量的反常积分

### 1. 含参变量无穷积分的一致收敛性

设二元函数  $f(x, y)$  在  $D = \{(x, y) | a \leq x < +\infty, c \leq y \leq d\}$  上有定义. 若对任意的  $y \in [c, d]$ , 无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x, y) dx \quad (18)$$

收敛, 则称由 (18) 式给出的含参变量的无穷积分在  $[c, d]$  上**收敛**. 此时该式确定了在  $[c, d]$  上有定义的函数, 记为  $F(y)$ , 即

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (19)$$

类似地可以定义

$$F(y) = \int_{-\infty}^b f(x, y) dx \quad \text{及} \quad F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

为了讨论含参变量的反常积分的性质, 引入“一致收敛”的概念.

**定义 4.1** 设二元函数  $f(x, y)$  在  $D = \{(x, y) | a \leq x < +\infty, c \leq y \leq d\}$  上有定义, 且  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  在  $[c, d]$  上收敛. 如果  $\forall \varepsilon > 0$ , 总存在一个仅与  $\varepsilon$  有关, 而与  $y$  无关的  $X \geq a$ , 使得当  $A > X$  时,  $\forall y \in [c, d]$  均有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon,$$

则称  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  关于  $y$  在  $[c, d]$  上**一致收敛**.

下面介绍一个关于一致收敛性的充分判别法.

**定理 4.6 (M-判别法)** 设  $f(x, y) \in C(D)$ . 若  $\exists M > 0$ , 当  $x > M$  时, 对  $\forall y \in [c, d]$ , 均有

$$|f(x, y)| \leq G(x),$$

而无穷积分  $\int_a^{+\infty} G(x) dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  关于  $y$  在  $[c, d]$  上**一致收敛**.

**证明** 在所给条件下, 对每一个  $y \in [c, d]$ ,  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  都绝对收敛, 从而收敛.



因为  $\int_a^{+\infty} G(x)dx$  收敛, 所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ , 使得当  $A > X$  时, 便有

$$\left| \int_A^{+\infty} G(x)dx \right| < \varepsilon.$$

从而对一切的  $y \in [c, d]$ , 当  $A > \max\{X, M\}$  时, 有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \right| \leq \int_A^{+\infty} |f(x, y)|dx \leq \int_A^{+\infty} G(x)dx < \varepsilon,$$

所以  $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$  关于  $y$  在  $[c, d]$  上一致收敛.  $\square$

## 2. 含参变量无穷积分的分析性质

可以证明在一致收敛的条件下, 由 (19) 式确定的函数  $F(y)$  具有如下分析性质 (略去证明).

**定理 4.7** 若  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 且

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

关于  $y$  在  $[c, d]$  上一致收敛, 则

(1)  $F(y)$  在  $[c, d]$  上连续;

$$(2) \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

**定理 4.8** 若  $f(x, y)$  与  $f_y(x, y)$  均在  $D$  上连续, 且

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

在  $[c, d]$  上收敛,  $\int_a^{+\infty} f_y(x, y)dx$  关于  $y$  在  $[c, d]$  上一致收敛, 则  $F(y)$  在  $[c, d]$  上有连续的导数, 且求导与积分可以交换顺序, 即

$$F'(y) \equiv \frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} f_y(x, y)dx.$$

**例 4.4** 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

**解** 利用等式

$$\int_a^b e^{-yx} dy = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x},$$

把原积分改写为

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-yx} dy.$$

因为在  $0 \leq x < +\infty, y \geq y_0 (y_0 = \min\{a, b\})$  上

$$e^{-yx} \leq e^{-y_0x},$$

而  $\int_0^{+\infty} e^{-y_0x} dx = \frac{1}{y_0}$  收敛, 由  $M$ -判别法知,  $\int_0^{+\infty} e^{-yx} dx$  关于  $y$  在  $[y_0, +\infty)$  上一致收敛. 所以, 由定理 4.7 知

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-yx} dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-yx} dx = \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln \frac{b}{a}.$$

本节中虽然只讨论了上限是正无穷大的带参变量的无穷积分, 但是这些结论都可以平移到下限是负无穷大及上限、下限均是无穷的情形. 另外这些结论也完全可以平移到含参变量的无界函数积分方面.

### 4.3 $\Gamma$ 函数与B函数

本段介绍两个很重要的非初等函数—— $\Gamma$  函数和B函数. 它们是由含参变量的反常积分定义的, 在许多学科中都有重要的应用.

#### 1. $\Gamma$ 函数

考察含参变量  $s$  的积分

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx, \quad (20)$$

它不仅是一个含参变量的无穷积分, 而且当  $s < 1$  时  $x = 0$  是一个瑕点, 因此这时它还是一个含参变量的无界函数积分. 易知当  $s > 0$  时,  $\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$  收敛, 称之为  $\Gamma$  函数, 也称  $\Gamma$  函数为第二类 Euler (欧拉) 积分. 下面讨论  $\Gamma$  函数的性质.

(1) 连续性 积分

$$\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

对于任意固定的  $A$  关于  $s$  在  $s \leq A$  上为一致收敛. 事实上我们利用  $M$ -判别法, 注意到  $x^{s-1} e^{-x} \leq x^{A-1} e^{-x}$  及  $\int_1^{+\infty} x^{A-1} e^{-x} dx$  是收敛的即证.  $x = 0$  可能是积分

$$\int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx$$

的瑕点. 对于任意固定的  $\delta > 0$ , 此积分关于  $s$  在  $[\delta, +\infty)$  是一致收敛的. 因此  $\Gamma$  函数在  $[\delta, A]$  上是连续的 (这里取  $A > \delta$ ), 再由  $\delta$  及  $A$  的任意性知  $\Gamma$  函数在  $s > 0$  上连续.

(2) 递推性 对于  $s > 0$ , 有递推公式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (21)$$

成立. 事实上, 由分部积分公式,

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx \\ &= -x^s e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \\ &= s\Gamma(s). \end{aligned}$$

反复运用 (21) 式, 得

$$\Gamma(s+n) = (s+n-1)(s+n-2)\cdots(s+1)s\Gamma(s). \quad (22)$$

由此可知对于  $\Gamma$  函数只要计算出  $0 < s \leq 1$  的值, 便可由递推公式算出所有函数值. 在 (22) 式中取  $s = 1$ , 并注意

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1,$$

便得到

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

这说明  $\Gamma$  函数是阶乘  $n!$  的推广.

对 (20) 式作变量代换  $x = u^2$ , 有

$$\Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} u^{2s-1} e^{-u^2} du;$$

令  $s = \frac{1}{2}$  得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

设  $n$  为正整数, 则有

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^n} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

## 2. B 函数

考察积分

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad (23)$$

易知当参数  $p < 1$  时, 积分下限  $x = 0$  是瑕点; 当  $q < 1$  时, 积分上限  $x = 1$  是瑕点. 从

$$B(p, q) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

可以看出, 当  $p > 0$  时右端第一项收敛; 当  $q > 0$  时右端第二项收敛. 于是当  $p > 0$  且  $q > 0$  时  $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$  收敛, 称为 **B 函数**, 也称 B 函数为**第一类 Euler 积分**.

(1) 连续性 因为对任意的  $p_0 > 0, q_0 > 0$ , 当  $p \in [p_0, +\infty), q \in [q_0, +\infty)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  时, 有

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}.$$

由于积分

$$\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1} dx$$

收敛, 由  $M$ -判别法知 (23) 式右端的积分在  $p \geq p_0, q \geq q_0$  上一致收敛, 再由被积函数  $f(x, p, q) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$  在  $0 < x < 1, p \geq p_0, q \geq q_0$  上连续知  $B(p, q)$  在  $p > 0, q > 0$  上连续.

(2) B 函数与  $\Gamma$  函数的关系 我们不加证明地给出 B 函数与  $\Gamma$  函数的关系公式

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p > 0, q > 0). \quad (24)$$

这一公式表明, 可以用  $\Gamma$  函数的值来求 B 函数的值. 例如在 (24) 式中若取  $p = m, q = n$  为正整数, 则

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

在 (24) 式中取  $p = q = \frac{1}{2}$ , 得

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(1)} = (\sqrt{\pi})^2 = \pi.$$

一般数学手册中均有  $\Gamma$  函数表, 可通过 (24) 式和  $\Gamma$  函数表求得 B 函数的函数值.

## 4.4 反常重积分

与一元函数的反常积分相似, 重积分也可以推广为无界区域与无界函数两类反常重积分. 本段仅以反常二重积分为例, 简要地介绍这两类反常二重积分的概念和收敛性判别法.

### 1. 无界区域的二重积分

**定义 4.2** 设  $D$  是  $Oxy$  面上的无界区域,  $f(x, y) \in C(D)$ . 任取  $D$  的一个有界闭子区域序列  $\{D_n\}$ , 满足  $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots$ , 且当  $n \rightarrow +\infty$  时  $\{D_n\}$  扩张为  $D$ . 称

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma$$

为  $f(x, y)$  在无界区域  $D$  上的反常二重积分, 简称无界区域的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma.$$

若无论  $\{D_n\}$  是如何取的, 极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma$$

都存在, 则称无界区域上的二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

收敛. 否则, 称其发散.

**定理 4.9 (收敛判别法)** 设  $f(x, y)$  在无界区域  $D$  上连续, 若存在  $\rho_0 > 0$ , 使得当  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \rho_0$ , 且  $(x, y) \in D$ , 有

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{\rho^\alpha},$$

其中  $M$  与  $\alpha$  为常数, 则当  $\alpha > 2$  时, 反常二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

收敛.

**例 4.5** 证明反常二重积分

$$I = \iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy$$

收敛, 并求其值.

**解**  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y, 0 \leq y < +\infty\}$   
 是无界区域, 如图 3.35 所示. 对于任何的  $(x, y) \in D$ , 显然有

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{(x+y)^2} = x+y,$$

因此

$$e^{-(x+y)} \leq e^{-\rho},$$

而对于任何的  $\alpha > 2$ , 均有

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \rho^\alpha e^{-\rho} = 0 < 1,$$

于是, 存在  $\rho_0 > 0$ , 当  $\rho > \rho_0$  时有

$$e^{-(x+y)} \leq e^{-\rho} \leq \frac{1}{\rho^\alpha},$$

由定理 4.9 知该反常二重积分收敛. 将其化为二次无穷积分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}.$$

## 2. 无界函数的二重积分

**定义 4.3** 设  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上除一点  $P_0(x_0, y_0)$  外处处连续, 且在  $P_0(x_0, y_0)$  的任意邻域  $N_\delta$  与  $D$  之交集  $K_\delta = N_\delta \cap D$  上无界. 记  $K_\delta$  的直径为  $d$ . 称

$$\lim_{d \rightarrow 0} \iint_{D \setminus K_\delta} f(x, y) d\sigma$$

为无界函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  上的反常二重积分, 简称无界函数的二重积分或二重瑕积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \iint_{D \setminus K_\delta} f(x, y) d\sigma.$$

若极限

$$\lim_{d \rightarrow 0} \iint_{D \setminus K_\delta} f(x, y) d\sigma$$

存在, 则称无界函数的二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

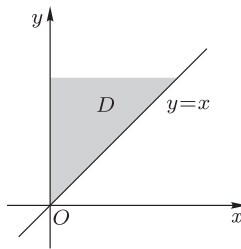


图 3.35

收敛. 否则, 称其发散.

与无界函数的反常定积分的情况相似, 我们也称定义 4.3 中的点  $P_0$  为瑕点或奇点.

**定理 4.10** (收敛判别法) 设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上除点  $P_0(x_0, y_0)$  为瑕点外, 处处连续, 若不等式

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{\rho^\alpha}$$

在点  $P_0$  的附近 (指  $P_0$  的某去心邻域与  $D$  之交集) 成立, 其中  $M$  与  $\alpha$  为常数,  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ , 则当  $\alpha < 2$  时, 反常二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

收敛.

**例 4.6** 证明反常二重积分

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{|x| + |y|}} dx dy \quad (D: x^2 + y^2 \leq 1)$$

收敛.

**证明** 点  $O(0, 0)$  是瑕点, 在  $D$  内除点  $(0, 0)$  外, 有

$$\frac{1}{\sqrt{|x| + |y|}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\rho}.$$

由定理 4.10 知反常积分  $I$  收敛. □

### \*习 题 3.4

(A)

1. 求下列函数的导数:

$$(1) \varphi(y) = \int_1^2 \frac{1}{x} e^{y^2 x^2} dx; \quad (2) \varphi(y) = \int_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx \quad (y \neq 0);$$

$$(3) \varphi(y) = \int_y^{y^2} \frac{\sin xy}{x} dx; \quad (4) \varphi(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} (y^2 \sin x - y^3) dy.$$

2. 求下列函数的二阶导数:

$$(1) F(x) = \int_0^x (x + y) f(y) dy, \text{ 其中 } f \text{ 为可微函数};$$

$$(2) \varphi(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+yx)}{x} dx \quad (y \neq 0).$$

3. 求下列积分:

$$(1) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left( \text{提示: 利用公式 } \frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2} \right);$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx \quad \left( \text{提示: 利用公式 } \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{xdy}{1+xy} \right).$$

4. 讨论下列含参变量的反常积分在指定的区间内的一致收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx \quad (a \geq 0); \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{1+x^2} dx \quad (-\infty < a < +\infty);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin^2 x dx \quad (0 < a_0 \leq a); \quad (4) \int_0^{+\infty} e^{-tx} x^4 \cos x dx \quad \left( \frac{1}{2} \leq t \leq \beta \right).$$

5. 利用  $\Gamma$  函数、 $B$  函数表示或计算下列积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \text{ 是正整数}); \quad (2) \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}; \quad (4) \int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} dx;$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \theta \cos^{b-1} \theta d\theta \quad (a, b > 0); \quad (6) \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^p dx.$$

6. 计算下列反常二重积分:

$$(1) \iint_{x \geq 0, y \geq 0} e^{-(x+y)} dx dy; \quad (2) \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^p};$$

$$(3) \iint_{x^2+y^2 \leq x} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad (4) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy.$$

(B)

$$1. \text{ 设 } F(x) = \int_a^b f(y)|x-y| dy, \text{ 其中 } a < b, \text{ 且 } f(y) \text{ 为可微函数, 求 } F''(x).$$

2. 研究函数

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx \quad (y > 0)$$

的连续性, 其中  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续且为正值函数.

$$3. \text{ 计算 } I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha, \beta > 0),$$

$$\left( \text{提示: 利用等式 } \frac{1}{x}(e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}) = \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-yx^2} dy \right).$$



## 4. 计算无界函数二重积分

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

其中  $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ .