

一、选择题：1~6 小题，每小题 3 分，共 18 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效。

1. 下列反常积分收敛的是 ()。

(A) $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$

(B) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} \, dx$

(C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx$

(D) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} \, dx$

2. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = ax \end{cases} (a > 0)$ 在 xOy 面上的投影线为 ()。

(A) 抛物线

(B) 双曲线

(C) 椭圆

(D) 圆

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{xy} = ()$ 。

(A) 1

(B) 0

(C) 1/2

(D) 不存在

4. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 沿任一方向的方向导数都存在是 $z = f(x, y)$ 在点 M_0 连续的()条件。

(A) 充分必要

(B) 必要非充分

(C) 充分非必要

(D) 既非充分又非必要

5. 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \, d\sigma = ()$ 。

(A) $ab\pi$

(B) $\frac{ab}{2}\pi$

(C) $(a+b)\pi$

(D) $\frac{a+b}{2}\pi$

6. 已知 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, f 在 Ω 上连续, 下列等式中正确的有 () 个。

1) $\iiint_{\Omega} f(z) \, dV = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(z) \, dz$

2) $\iiint_{\Omega} f(y) \, dV = \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(y) \, dy$

3) $\iiint_{\Omega} f(x) \, dV = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} r \, dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2 \cos^2 \theta}} f(x) \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sin \theta}} r \, dr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2 \sin^2 \theta}} f(x) \, dx$

4) $\iiint_{\Omega} f(z) \, dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\arctan \frac{1}{\sin \theta}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2-\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}}} f(r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr$
 $+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\arctan \frac{1}{\sin \theta}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi}} f(r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

二、填空题：7~12 小题，每小题 3 分，共 18 分。请将答案写在答题卡上，写在试题册上无效。

7. 摆线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$ 的弧长 $s =$ _____.

8. 过点 $M(1, 1, -1)$ 且与直线 $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = 1 + t \end{cases}$ 垂直的平面方程为_____.

9. $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处沿 x 轴正向的方向导数为_____.

10. 函数 $u = xyz$ 满足 $x + y + z = 3 (x > 0, y > 0, z > 0)$ 的条件极值 $u =$ _____.

11. 设 $f(x)$ 为连续函数， $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$ ，则 $F'(t) =$ _____.

12. 设 Ω 为 $x^2 + y^2 + z \leq 1, z \geq 0$ ，则 $\iiint_{\Omega} (x+1)(y+1)(z+1) dV =$ _____.

三、解答题：13~19 小题，共 64 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

13. (本题满分 10 分)

求 $y = 2x - x^2$ 与 $y = 0$ 所围的封闭区域绕 x 轴旋转一周生成旋转体的体积。

14. (本题满分 10 分)

求过直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-2}$ 且平行于直线 $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-2}$ 的平面方程。

15. (本题满分 10 分)

求椭球面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ 上点 $M(1, 1, 2)$ 处的切平面方程与法线方程。

16. (本题满分 10 分)

设 $u = f(x, xy, xyz)$ ， f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 。

17. (本题满分 10 分)

求函数 $z = x^2 + y^2 - 2x - y$ 在 $D = \{(x, y) | 2x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ 上的最值。

18. (本题满分 8 分)

求在上半球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 (z \geq 0)$ 除去柱体 $x^2 + y^2 \leq x$ 的空间立体的体积。

19. (本题满分 6 分)

已知 $\Omega = \left\{ (x, y, z) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} \leq 1 \right. \right\}$ ，计算 $I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 dV$ 。