普通高等教育“十一五”国家级规划教材

随 机 数 学

（A）

标准化作业

吉林大学公共数学中心

2021.08

第一次作业

院(系)____________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

一、填空题

1．袋中装有 2 红 4 白共 6 只乒乓球，从中任取 2 只，则取得 1 只红球 1 只白球的概率为____________.

2． 将一枚硬币重复投 5 次，则正、反面都至少出现 2 次的概率____________.

3．已知事件 A 和 B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=0.4$，则 $P(B)=$________.

4．设 A 与 B 是两个互不相容的随机事件，且 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})=$________.

*5. 甲乙两个射手独立地射击同一目标，他们击中目标的概率分别是 0.8 和 0.6. 若每人射击一次，目标被击中的概率为________________.

6．两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率是 $\frac{1}{9}$，且 A 发生 B 不发生和 A 不发生 B 发生的概率相等，则 $P(A)=$_________.

7．在 4 重伯努利试验中，已知事件 A 至少出现一次的概率为 0.5，则在一次试验中 A 出现的概率为_________.

8. 考虑抛物线 $y=x^2+Bx+C,$ 其中 B和C 分别是将一枚骰子连着掷两次先后出现的点数，求抛物线与 x 轴没有交点的概率为_________.

二、选择题

1．下列等式不成立的是（　　）

（A） $A=AB\cup A\overline{B}$.　　（B） $A-B=A\overline{B}$.

（C） $(AB)(A\overline{B})=\Phi$.　　（D） $(A-B)\cup B=A$.

2. 设 A,B,C 是同一个实验的三个事件，则事件 $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$ 可化简为（　　）

（A） $A\cup B$.　（B） $A-B$.　（C） AB .　（D） Φ .

3. 设随机事件 A 和 B 互不相容，则（　　）。

（A） $P(\overline{A}\,\overline{B})=0;$.　　（B） $P(\overline{A}\,\overline{B})\neq 0.$.

（C） $P(A\cup\overline{B})=P(A);$.　　（D） $P(A\cup\overline{B})=P(\overline{B})$.

4. 设事件 A，B，C 两两独立，则 A，B，C 相互独立的充分必要条件是（　　）。

（A）AB 和 BC 独立.　　（B）$A\cup B$ 和 $B\cup C$ 独立

（C）$A-B$ 和 C 独立.　　（D）$A-B$ 和 $B-C$ 独立.

5．设有 4 张卡片分别标以数字 1，2，3，4，今任取一张；设事件 A 为取到 1 或 2，事件 B 为取到 1 或 3，则事件 A 与 B 是（　　）

（A）互不相容.　　（B）互为对立.　　（C）相互独立.　（D）互相包含.

6. 设每次试验成功的概率为 $p\,(0<p<1)$，则重复进行试验直到第 n 次才取得成功的概率为（　　）

（A） $p\ (1-p)^{n-1}$.　（B） $np\ (1-p)^{n-1}$.　（C） $(n-1)p\ (1-p)^{n-1}$.　（D） $(1-p)^{n-1}$.

7．独立地投了 3 次篮球，每次投中的概率为 0.3，则最可能投中的次数为（　　）

（A）　0　　（B）1　　（C）2　（D）3.

8. 设 A，B 为随机事件，若 $0<P(A)<1,\ 0<P(B)<1,$ 则 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$ 的充要条件是(　　)

（A） $P(B|A)>P(B|\overline{A})$.　　（B） $P(B|A)<P(B|\overline{A})$.

（C） $P(\overline{B}|A)>P(B|\overline{A})$.　　（D） $P(\overline{B}|A)<P(B|\overline{A})$.

三、计算题

1．随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}\,(a>0)$ 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点与该点的连线与 x 轴夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率.

2.仪器中有三个元件,它们损坏的概率都是0.2,并且损坏与否相互独立.当一个元件损坏时, 仪器发生故障的概率为0.25,当两个元件损坏时,仪器发生故障的概率为0.6,当三个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.95, 当三个元件都不损坏时,仪器不发生故障.求:（1）仪器发生故障的概率;（2）仪器发生故障时恰有二个元件损坏的概率.

3. 学生做一道有四个选项的单项选择题，如果他不知道正确答案就随机猜测。现从卷面上看到学生此次选择题做对了，试求在以下两种情况下学生确实知道正确答案的概率。

（1）学生知道正确答案和胡乱猜测的概率为1/2.

（2）学生知道正确答案的概率为0.2。

4. 在100件产品中有10件次品；现在进行5次放回抽样检查，每次随机地抽取一件产品，求下列事件的概率：（1）抽到2件次品；（2）至少抽到1件次品.

四、证明题

设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$ ，证明事件 A 与 B 相互独立.

第二次作业

院(系)____________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

一、填空题

1．一实习生用一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格产品的概率为 $p_i=\dfrac{1}{i+1}\ (i=1,2,3)$，$X$ 表示 3 个零件中合格的个数，则 $P\{X=2\}=$____________.

2. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\le x<1,\\ 0.8, & 1\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

则 X 的分布律为__________________.

3．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1,\end{cases}$

则 $P\{X=1\}=$_______________，$P\left\{X<\dfrac{1}{2}\right\}=$____________.

4．设随机变量 X,Y 服从同一分布，X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

设 $A=\{X>a\}$ 与 $B=\{Y>a\}$ 相互独立，且 $P\{A\cup B\}=\dfrac{3}{4}$，则 $a=$________________.

5. 设随机变量 X 服从参数 $\theta=1$ 的指数分布，则 $P\{2<X<3\,|\,X\ge 1\}=$________________.

6. 设随机变量 X 服从 $N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$____________.

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于_____________.

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，其分布函数为 $F(x)$，则有

$F(\mu+\sigma x)+F(\mu-\sigma x)=$____________.

二、选择题

1．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，且有 $f(-x)=f(x)$, $F(x)$ 为 X 的分布函数，则对于任意实数 a，有（　　）

（A）　$F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$.　　（B）　$F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$.

（C）　$F(-a)=F(a)$.　　（D）　$F(-a)=2F(a)-1$.

2．设 $f(x)=\sin x$，要使 $f(x)=\sin x$ 能为某随机变量 X 的概率密度，则 X 的可能取值的区间是（　　）

（A）$[\pi,\frac{3}{2}\pi]$.　　（B）$[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$.　　（C）$[0,\pi]$.　　（D）$[0,\frac{1}{2}\pi]$.

3．设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取（　　）

（A）$a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$.　　（B）$a=\frac{2}{3},b=-\frac{2}{3}$.

（C）$a=\frac{1}{2},b=\frac{2}{3}$.　　（D）$a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$.

4．已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ kx+b, & 0\le x<\pi,\\ 1, & x\ge\pi,\end{cases}$$

则参数 k 和 b 分别为（　　）

（A）$k=0,b=\frac{1}{\pi}$.　　（B）$k=\frac{1}{\pi},b=0$.

（C）$k=\frac{1}{2\pi},b=0$.　　（D）$k=0,b=\frac{1}{2\pi}$.

5．设随机变量 X 的分布函数和概率密度函数分别为 $F(x)$和$f(x)$，则随机变量 $-X$ 的分布函数和概率密度函数分别为（　　）

（A）$F(-x)$和$f(-x)$。　　（B）$F(-x)$和$f(x)$。

（C）$1-F(-x)$和$f(-x)$。　　（D）$1-F(-x)$和$f(x)$。

6. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且 $P\{X \ge 1\} = \frac{1}{2}$， $f(1)=1$, 则（　　）

（A） $\mu=1,\sigma^2=1$.　　（B） $\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

（C） $\mu=1,\sigma^2=\frac{1}{2\pi}$.　　（D） $\mu=0,\sigma^2=1$.

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ^2 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$（　　）

（A）单调增大.　　（B）单调减少.

（C）保持不变.　　（D）增减性不定.

8. 设随机变量 $X \sim U(0,1), Y = kX^{\alpha}(\alpha>0)$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$，则(　　).

（A）k=1, $\alpha=\frac{1}{2}$　（B）k=1, $\alpha=2$　（C）k=2, $\alpha=\frac{1}{2}$　(D)　k=2, $\alpha=2$

三、计算题

1. 一批产品由 9 个正品和 3 个次品组成，从这批产品中每次任取一个，取后不放回，直到取得正品为止. 用 X 表示取到的次品个数，写出 X 的分布律和分布函数.

2．设随机变量 X 的概率分布为

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.10

（1）求 $Y=-2X$ 的概率分布；（2）求 $Z=X^2$ 的概率分布.

3．设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ k(2-x), & 1\le x<2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求：（1）k 的值；（2）X 的分布函数.

4．设在一电路中，电阻两端的电压(V)服从$N(120, 4)$，今独立测量了 5 次，试确定有 2 次测定值落在区间$[118,122]$之外的概率.

5．设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a, \\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x<a,(a>0) \\ 1, & x\ge a,\end{cases}$$

求：（1）常数A、B.（2）随机变量X落在$\left(-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$内的概率.（3）$X$的概率密度函数.

6．已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其 他}, \end{cases}$$

且 $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=\frac{5}{8}$, 求（1）常数 a,b 的值；（2）$P\left\{\frac{1}{4}<X\le\frac{1}{2}\right\}$.

7．已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},-\infty<x<+\infty$, 又设 $Y=\begin{cases} 1, X>0, \\ -1, X\le 0, \end{cases}$

求：（1）Y 的分布律；（2）计算 $P\left\{Y>\frac{1}{2}\right\}$.

8．已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<0\\ \frac{1}{4} & 0\le x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求：随机变量$Y=X^2$的概率密度函数.

四、证明题

1. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，证明：$Y=aX+b\ (a\neq 0)$ 仍然服从正态分布，并指出参数.

2. 设随机变量 X 的概率分布为$P\left\{X=1\right\}=P\left\{X=2\right\}=\dfrac{1}{2}$，在给定$X=i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i)$ $(i=1,2)$. 求Y的分布函数$F_Y(y)$.

第三次作业

院(系)____________　班级__________　学号__________　姓名__________

一、填空题

1．设随机变量 X 与 Y 相互独立，具有相同的分布律，

X	0	1
P	0.4	0.6

则 $\max\{X,Y\}$ 的分布律为________________.

2. 设随机变量（X,Y）的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{m+1}}, m\ge n,\\ 0,\quad m<n,\end{cases} m,n=1,2,\cdots,$$

则关于 X 的边缘分布律为 $P\{X=m\}=$_______，关于 Y 的边缘分布律为 $P\{Y=n\}=$_______.

3．若二维随机变量 (X,Y) 在区域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$ 上服从均匀分布，则 (X,Y) 的概率密度函数为______________________________.

4．设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 在区间 $(0,2)$ 上服从均匀分布，Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，则概率 $P\{X+Y>1\}=$__________________.

5．设随机变量 X 和 Y 相互独立且同分布，已知

X	0	1	2
P	0.25	0.5	0.25

则 $P\{X\ge Y\}=$____________.

6. 设相互独立的随机变量 X 与 Y 均服从 $[0,3]$ 上的均匀分布，则概率 $P\{1<\max(X,Y)\le 2\}=$____________.

7. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(0,1)$，则随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度为__________________.

8．设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$________________.

二、选择题

1．关于随机事件 $\{X\le a,Y\le b\}$ 与 $\{X>a,Y>b\}$ 下列结论正确的是（　　　）

（A）为对立事件.　　　　（B）为互斥事件.

（C）为相互独立事件.　　（D）$P\{X\le a,Y\le b\}>P\{X>a,Y>b\}$.

2．设二维随机变量 (X,Y) 在平面区域 G 上服从均匀分布，其中 G 是由 x 轴，y 轴以及直线 $y=2x+1$ 所围成的三角形域，则 (X,Y) 的关于 X 的边缘概率密度为（　　）

（A）. $f_X(x)=\begin{cases}8x+2, & -\dfrac{1}{2}<x<0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$　（B）. $f_X(x)=\begin{cases}8x+4, & -\dfrac{1}{2}<x<0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（C）$f_X(x)=\begin{cases}4x+2, & -\dfrac{1}{2}<x<0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$　（D）$f_X(x)=\begin{cases}4x+4, & -\dfrac{1}{2}<x<0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

3．设平面区域 G 是由 x 轴，y 轴以及直线 $x+\dfrac{y}{2}=1$ 所围成的三角形域，二维随机变量 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布，则 $f_{X|Y}(x|y)=$（　　）$(0<y<2)$

（A）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（B）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2}{1-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（C）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（D）$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

4．设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=A\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(B+\arctan\frac{y}{2}\right)$$

则常数 A 和 B 的值依次为（　　）

（A） π^2和$\frac{2}{\pi}$.　　（B） $\frac{1}{\pi}$和$\frac{\pi}{4}$.　　（C） $\frac{1}{\pi^2}$和$\frac{\pi}{2}$.　　（D） $\frac{1}{\pi}$和$\frac{\pi}{2}$.

5．设随机变量 X，Y 相互独立且都服从参数为 λ 的指数分布，则下列选项中服从参数为 2λ 的指数分布的随机变量是（　　）

（A） $X+Y$.　　（B） $X-Y$.

（C） $\max\{X,Y\}$.　　（D） $\min\{X,Y\}$.

6．如果 (X,Y) 是连续型随机变量，下列条件中不是 X 与 Y 相互独立的充分必要条件的是（　　），其中 x,y 为任意实数.

（A） $P\{X\ge x,Y\ge y\}=P\{X\ge x\}P\{Y\ge y\}$.

（B） $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$.

（C） $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

（D） $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

7. 设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从 $N(0,1)$，Y 服从 $N(1,1)$，则（　　）

（A） $P(X+Y\le 0)=0.5$.　　（B） $P(X+Y\le 1)=0.5$.

（C） $P(X-Y\le 0)=0.5$.　　（D） $P(X-Y\le 1)=0.5$.

8. 设 X 和 Y 是两个随机变量，且 $P(X\ge 0,Y\ge 0)=\frac{3}{7}$，$P(X\ge 0)=P(Y\ge 0)=\frac{4}{7}$，则

$P(\max\{X,Y\}\ge 0)=($　　$)$.

（A） $\frac{2}{7}$.　　（B） $\frac{3}{7}$.　　（C） $\frac{4}{7}$.　　（D） $\frac{5}{7}$.

*9. 设 (X,Y) 具有概率密度函数 $f(x,y)=\frac{1+\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$,则

(A) (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 和 Y 均服从一维正态分布；

(B) (X,Y) 服从二维正态分布，但 X 和 Y 均不服从一维正态分布；

(C) (X,Y) 不服从二维正态分布，且 X 和 Y 均不服从一维正态分布；

(D) (X,Y) 不服从二维正态分布，但 X 和 Y 均服从一维正态分布.

三、计算题

1．设随机变量 X 在 1，2，3，4 四个数字中等可能取值，随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值，求 (X,Y) 的概率分布，并判断 X 和 Y 是否独立.

2. 设随机事件 A、B 满足 $P(A)=\dfrac{1}{4},P(B|A)=P(A|B)=\dfrac{1}{2}$, 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{不发生},\end{cases}$$

求（1）(X,Y) 的概率分布；（2）$Z=X+Y$ 的概率分布.

3．设随机变量U在区间$[-2,2]$上服从均匀分布，令

$$X=\begin{cases}-1 & 若U\le -1,\\ 1 & 若U>-1,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1 & 若U\le 1,\\ 1 & 若U>1,\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布律.

4. 已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（1）求系数k；（2）条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$；（3）判断X和Y是否相互独立；（4）计算概率$P\left\{X<2\middle|Y<1\right\}$；（5）求$Z=\min\{X,Y\}$的密度函数$f_Z(z)$.

5．设随机变量(X,Y)的概率密度为$f\left(x,y\right)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<\infty \\ 0, & 其他. \end{cases}$.

（1）确定常数b. (2)求边缘概率密度函数.（3）求$U=\max\left\{X,Y\right\}$的分布函数.

6．设(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y, 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, \quad 其它. \end{cases}$，(I)求概率$P(X>2Y)$；

(II)求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

第四次作业

院(系)__________ 班级________ 学号________ 姓名________

一、填空题

1．设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

则 $E(X)=$__________， $E(X^2)=$__________， $E(3X^2+5)=$__________.

2．设随机变量 X 服从区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的均匀分布，且 $Y=\sin X$，则 $Cov(X,Y)=$__________.

3．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

对 X 独立重复地观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，则 $E(Y^2)=$__________.

4．设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim\pi(4)$，并且 X 与 Y 的相关系数为 0.5，则有 $D(3X-2Y)=$__________.

5．对一批圆木的直径进行测量，设其服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，则圆木截面面积的数学期望为__________.

6．设随机变量 X 在 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，设随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & X>0,\\ 0, & X=0,\\ -1, & X<0,\end{cases}$$

则 $D(Y)=$__________.

7．已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1},-\infty<x<+\infty$，则 $E(X)=$__________， $D(X)=$__________.

*8. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=0.2F_1(x)+0.8F_1(2x)$，其中 $F_1(x)$ 是服从参数为 1 的指数分布的随机变量的分布函数，则期望 $E(X)=$__________.

二、选择题

1. 设 X 是一随机变量，且 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$（$\mu,\sigma>0$ 为常数），则对于任意常数 C,必有（　　）

（A） $E\left[(X-C)^2\right]=E(X^2)-C^2$.　　　（B） $E\left[(X-C)^2\right]=E\left[(X-\mu)^2\right]$.

（C） $E\left[(X-C)^2\right]<E\left[(X-\mu)^2\right]$.　　　（D） $E\left[(X-C)^2\right]\geq E\left[(X-\mu)^2\right]$.

2. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2),Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)=$（　　）

（A）6.　　　（B）8.

（C）14.　　　（D）15.

3．对于以下各数字特征都存在的任意两个随机变量 X 和 Y，如果 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则有（　　）.

（A） $D(XY)=D(X)D(Y)$.　　　（B） $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

（C） X 和 Y 相互独立.　　　（D） X 和 Y 不相互独立.

4．设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2>0$，则为使 $E\left(a+bX\right)=0, D(a+bX)=1$，则 a 和 b 分别是（　　）

（A） $a=-\dfrac{\mu}{\sigma},b=\dfrac{1}{\sigma}$.　　　（B） $a=-\dfrac{\mu}{\sigma},b=\dfrac{\mu}{\sigma}$.

（C） $a=-\mu,b=\sigma$.　　　（D） $a=\mu,b=\dfrac{1}{\sigma}$.

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且方差 $D(X)>0,D(Y)>0$，则（　　）

（A） X 与 $X+Y$ 一定相关　　　（B） X 与 $X+Y$ 一定不相关.

（C） X 与 XY 一定相关.　　　（D） X 与 XY 一定不相关.

6. 若随机变量 X 与 Y 满足 $Y=1-\dfrac{X}{2}$，且 $D(X)=2$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$（　　）

（A）1.　　　（B）2.

（C）-1.　　　（D）-2.

7．设随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（　　）

（A）$P\{Y=-2X-1\}=1$.　　　　（B）$P\{Y=2X-1\}=1$.

（C）$P\{Y=2X+1\}=1$.　　　　（D）$P\{Y=-2X+1\}=1$.

三、计算题

1．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2, \\ cx+b, & 2\le x<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

已知 $E(X)=2, P\{1<X<3\}=\dfrac{3}{4}$，求 a, b, c 的值.

2．设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其　它}, \end{cases}$

求 $E(X), E(Y), \mathrm{cov}(X,Y), \rho_{XY}$ 和 $D(X+Y)$.

3．设二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中a,b,c为常数，且$E\left(X\right)=-0.2, P\left\{Y\le 0 \middle| X\le 0\right\}=0.5$，记$Z=X+Y$，求：（1）$a,b,c$的值；（2）$Z$的概率分布；（3）$P\left\{X=Z\right\}$.

4．在数轴上的区间$[0,a]$内任意独立地选取两点M与N，求线段MN长度的数学期望和方差.

5．已知二维随机变量$(X,Y)\sim N(1,0,3^2,4^2,-\frac{1}{2})$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$. 求（1）$Z$的数学期望与方差；（2）$X$与$Z$的相关系数；（3）$X$与$Z$是否相互独立？为什么？

6．随机变量X和Y相互独立，都服从（0, 1）上的均匀分布，以X和Y为边长做一个长方形，用 S 和 C 分别表示长方形的周长和面积，求 S 和 C 的相关系数.

第五次作业

院(系)____________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

一、填空题

1．设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 0.5，则根据切比雪夫不等式，有 $P\{|X-Y|\geq 6\}\leq$______.

2．在每次试验中，事件 A 发生的可能性是 0.5，则 1000 次独立试验中，事件 A 发生的次数在 400 次到 600 次之间的概率≥ ______.

3. 将一枚骰子重复抛掷 n 次，所掷出点数的算术平均值为 $\bar{X}_n$，如果对于任意给定 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\bar{X}_n-a\right|<\varepsilon\right\}=1$，则常数 $a=$______.

二、选择题

1．一射击运动员在一次射击中的环数 X 的概率分布如下：

X	10	9	8	7	6
P	0.5	0.3	0.1	0.05	0.05

则在 100 次独立射击所得总环数介于 900 环与 930 环之间的概率是（　　）

（A）0.8233.　　（B）0.8230.　　（C）0.8228.　　（D）0.8234.

2．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，则根据列维—林德伯格中心极限定理，当 n 充分大时，$X_1+X_2+\cdots+X_n$ 近似服从正态分布，只要 $X_i\,(i=1,2,\cdots)$ 满足条件（　　）

（A）具有相同的数学期望和方差.　　（B）服从同一离散型分布.

（C）服从同一连续型分布.　　（D）服从同一指数分布.

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_i)=\dfrac{1}{2}, D(X_i)=\dfrac{1}{4}$，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则有（　）.

$$(A)\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-2n}{2\sqrt{n}}\leq x\right\}=\Phi(x);\qquad (B)\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-2n}{\sqrt{2n}}\leq x\right\}=\Phi(x);$$

$$(C)\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{2\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x);\qquad (D)\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x).$$

4．设随机变量 $X_1, X_2,\cdots, X_9$ 相互独立同分布，$E(X_i)=1, D(X_i)=1, i=1,2,\cdots,9$.令 $S_i=\sum_{k=1}^{i}X_k$,则对于任意给定 $\varepsilon>0$，由切比雪夫不等式可得（　　）

（A）$P\{|S_9-1|<\varepsilon\}>1-\frac{1}{\varepsilon^2}$.　　（B）$P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$.

（C）$P\{|S_9-9|<\varepsilon\}>1-\frac{9}{\varepsilon^2}$.　　（D）$P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9-1\right|<\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{1}{\varepsilon^2}$.

5. 设 $X_1, X_2,\cdots, X_{1000}$ 相互独立，且都服从参数为 $p(0<p<1)$ 的(0-1)分布，则下列选项不正确的是(　　)

（A）$\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}X_i\approx p$.

（B）$\sum_{i=1}^{1000}X_i\sim B(1000, p)$.

（C）$P\left\{a<\sum_{i=1}^{1000}X_i<b\right\}\approx\Phi(b)-\Phi(a)$.

（D）$P\left\{a<\sum_{i=1}^{1000}X_i<b\right\}\approx\Phi\left(\frac{b-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}}\right)$

三、计算题

1. 一食品店有三种蛋糕出售, 由于售出哪一种蛋糕是随机的, 因而一只蛋糕的价格是一个随机变量, 它取 1 元、1. 2 元、1. 5 元各个值的概率分别为 0. 3, 0. 2, 0. 5, 某天该食品店出售了 300 只蛋糕. 试用中心极限定理计算，这天的收入至少为 395 元的概率.

2. 设某种元件使用寿命（单位：小时）服从参数为λ的指数分布，其平均使用寿命为40小时，在使用中当一个元件损坏后立即更换另一个新的元件，如此继续下去. 已知每个元件的进价为a元，试求在年计划中应为购买此种元件作多少预算，才可以有 95%的把握保证一年够用（假定一年按照2000个工作小时计算）.

3．一条生产线的产品成箱包装，每箱的重量时随机的. 假设平均重 50 千克，标准差为 5 千克. 如果用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每量车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0. 977，（$\Phi(2)=0.977$.）

第六次作业

院(系)___________ 班级_________ 学号_________ 姓名_________

一、填空题

1．设总体 X 的数学期望和方差都存在，且 $E(X)=\mu, DX=\sigma^2$.来自总体 X 的样本 $X_1, X_2,\cdots, X_n$，则 $E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=$___________，$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=$____________.

2．设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，记随机变量 $X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$，则当 $a=$_______，$b=$______时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为_______.

3．设总体 $X\sim B(m, p), X_1, X_2,\cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，样本均值为 $\overline{X}$，则 $E(\overline{X})=$__________，$D(\overline{X})=$___________.

4．设 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2), i=1,2,\cdots,n+1$，是相互独立的，记

$$\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2,$$

则 $Y=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X_n}}{S_n}\sim$ ______________.

5．来自总体 X 的样本 $X_1, X_2,\cdots,X_n$，设总体 $X\sim B(1,\frac{1}{2})$.记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $P(\overline{X}=\frac{k}{n})$ _________________.

6．设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\ -\infty<x<\infty$，来自总体 X 的简单随机样本 $X_1, X_2,\cdots, X_n$，其样本方差为 S^2，则 $E(S^2)=$____________.

二、选择题

1．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1, X_2,\cdots, X_n$ 是总体 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2,\quad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2,$$

则下列随机变量中服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的是（　　）

（A）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$.　（B）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$.　（C）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n-1}}$.　（D）$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n-1}}$.

2．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则 $P\left\{\dfrac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{0.025}\right\}=$（　　）

（A）0.025.　（B）0.975.　（C）0.95.　（D）0.05.

3．设随机变量 $X\sim t(n)\ (n>1), Y=\dfrac{1}{X^2}$，则（　　）

（A）$Y\sim\chi^2(n)$.　（B）$Y\sim\chi^2(n-1)$.　（C）$Y\sim F(1,n)$.　（D）$Y\sim F(n,1)$.

4. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 $N(1,2^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列结论中正确的是（　　）

（A）$\dfrac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim t(n)$.　（B）$\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim F(n,1)$.

（C）$\dfrac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.　（D）$\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\sim\chi^2(n)$.

5．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1,X_2\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是两个来自总体的独立的样本，它们的样本方差分别记为 S_X 和 S_Y，则统计量 $T=(n-1)(S_X^2+S_Y^2)$ 的方差 DT 是（　　）

（A）$2n\sigma^4$.　（B）$2(n-1)\sigma^4$.　（C）$4n\sigma^4$.（D）$4(n-1)\sigma^4$.

6. 设总体 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$, $\overline{X}$ 和 S^2 分别是容量为 n 的样本的均值和方差，则下列选项服从自由度为 n-1 的 T 分布的随机变量是(　).

(A) $\dfrac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{S}$.　(B) $\dfrac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{S^2}$.　(C) $\dfrac{n\overline{X}}{S}$.　(D) $\dfrac{n\overline{X}}{S^2}$.

7. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2), X_1,X_2\cdots,X_{11}$ 是来自总体的简单随机样本，$Y^2=\dfrac{1}{10}\sum_{i=2}^{11}X_i^2$，则(　).

(A) $X_1^{\ 2}\sim\chi^2(1)$;　(B) $Y^2\sim\chi^2(10)$;　(C) $\dfrac{X_1}{Y}\sim t(10)$;　(D) $\dfrac{X_1^{\ 2}}{Y^2}\sim F(10,1)$.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 为来自正态总体 $X\sim N(1,4)$ 的简单随机样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i$，$T=\sum_{i=1}^{4}(X_i-\overline{X})^2$，如果 $a\dfrac{(X_5-\overline{X})^2}{T}\sim F(1,3)$，则 $a=$(　).

(A) 2.　　(B) $\frac{2}{5}$.　　(C) $\frac{12}{5}$.　　(D) 1.

三、计算题

1．设 $X \sim N\left(0,\sigma^2\right)$， $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本，样本均值为 $\bar{X}$ ，试确定 σ 的值，使得 $P\left\{1 < \bar{X} < 3\right\}$ 最大.

2．设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos 2x, & 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，求样本容量 n ，使 $P\{\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \frac{\pi}{12}\} \geq \frac{15}{16}$.

3．设 $X_1, X_2,\cdots, X_8$ 是来自正态总体 $N(0, 0.2)$ 的样本，试求 k，使 $P\left\{\sum_{i=1}^{8} X_i^2 < k\right\} = 0.95$.

4．(a) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，样本均值为 $\overline{X}$ ，样本方差为 S^2 ，求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2),D(S^2)$.

(b) 如果总体服从泊松分布 $P(\lambda)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单随机样本，样本均值为 $\overline{X}$ ，样本方差为 S^2 ，计算 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$.

5. 设总体 X 服从正态分布 $N(-1,\sigma^2)$，$\sigma>0$，$X_1, X_2,\cdots, X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，对于统计量 $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，比较 $E(T_1)$和$E(T_2)$ 以及 $D(T_1)$和$D(T_2)$ 的大小关系.

6. 已知二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,1,2^2,3^2,0)$，判断 $F=\frac{9X^2}{4(Y-1)^2}$ 服从的概率分布.

第七次作业

院(系)____________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

一、填空题

1. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，其中 $\lambda>0$ 为未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，则 λ 的矩体计量为 $\hat{\lambda}=$____________.

2．设总体 X 在区间 $[\theta, 2]$ 上服从均匀分布，$\theta<2$ 为未知参数；从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，则参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=$______________.

3．设总体 $X \sim \pi(\lambda), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，则未知参数 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}$_______________.

4．该总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，一组样本值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其平均值 $\bar{x}=9.0$，若参数 μ 的置信水平为 0.9 的双侧置信区间的下限为 7.8，则置信上限为__________________.

5．设总体 $X \sim N(\mu, 3^2)$，要使未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信间的长度 $L \le 2$，样本容量 n 至少为__________.

二、选择题

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，总体 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	θ	$1-2\theta$	θ

其中 $\theta>0$ 未知，则未知参数 θ 的矩估计量为（　　）

（A）$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.　　（B）$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

（C）$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.　　（D）$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

2．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则总体方差的无偏估计量为（　　）

（A）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$.　　（B）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X)]^2$（$E(X)$ 未知）.

（C）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$.　　（D）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[X_i-E(X)]^2$（$E(X)$ 未知）.

3．设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本观察值，则 σ^2 的最大似然似计值为 $\sigma^2=$（　　）

（A）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$.　　（B）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^k, k=1,2,\cdots$.

（C）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$.　　（D）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$.

4．设总体 $X\sim N(\mu,4)$，μ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_9$ 为总体 X 的样本，测得样本均值为 $\bar{x}=9$，则参数 μ 的置信水平为 0.90 的置信区间为（　　）

（A）$\left(9-\frac{2}{3}u_{0.05},\ 9+\frac{2}{3}u_{0.05}\right)$.　　（B）$\left(9-\frac{1}{3}u_{0.05},\ 9+\frac{1}{3}u_{0.05}\right)$.

（C）$\left(9-\frac{2}{3}u_{0.1},\ 9+\frac{2}{3}u_{0.1}\right)$.　　（D）$\left(9-\frac{1}{3}u_{0.1},\ 9+\frac{1}{3}u_{0.1}\right)$.

5．设总体 $X\sim N(\mu,o^2)$，其中 o^2 已知，则总体均值 μ 的置信区间长度 L 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是（　　）

（A）当 $1-\alpha$ 缩小时，L 缩短.　　（B）当 $1-\alpha$ 缩小时，L 增大.

（C）当 $1-\alpha$ 缩小时，L 不变.　　（D）以上说法都不对.

三、计算题

1．设总体 X 具有概率分布

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 是未知参数，已知来自总体 X 的样本值为 1，2，1.求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

2．设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为 $f\left(x;\theta\right)=\begin{cases}2e^{-2\left(x-\theta\right)}, & x\ge\theta,\\ 0, & x<\theta.\end{cases}$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

3．设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-(\frac{1}{x})^{\beta}, x>1,\\ 0, \qquad\quad x\le 1.\end{cases}$$

其中参数 $\beta>1$ 是未知参数，又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的随机样本，（1）求 X 的概率密度函数 $f(x；\beta)$；（2）求参数 β 的矩估计量；（3）求参数 β 的最大似然估计量.

四、证明题

1．设总体 X 的均值 $\mu=E(X)$ 及方差 $\sigma^2=D(X)>0$ 都存在，μ 与 σ^2 均未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的样本，试证明不论总体 X 服从什么分布，样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 都是总体方差 $\sigma^2=D(X)$ 的无偏估计.

2. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta \\ 0, & 其它\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 并求其方差 $D(\hat{\theta})$.

3． 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta \\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \le x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$ ， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值. 判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，说明理由。

4．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ ，统计量 $T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$，证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

第八次作业

院(系)____________ 班级__________ 学号__________ 姓名__________

一、填空题

1．设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, Q^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,$$

当 μ 和 σ^2 未知时，则检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$ 所使用统计量是____________。

2．在假设检验中，对于给定的显著性水平 α，则犯第一类错误的概率为_________。

3．设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 已知，给定显著性水平 α，假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\geq\sigma_0^2$ 的拒绝域为__________________。

4．设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是来自总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的容量为 n 的简单随机样本，方差 σ^2 已知，检验假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$，检验统计量为 $u=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，在显著性水平 α 下，拒绝域为__________________。

二、选择题

1．在假设检验中，原假设 H_0，备择假设 H_1，则（　　）为犯第二类错误。

（A）H_0 为真，接受 H_1.

（B）H_0 不真，接受 H_0.

（C）H_0 为真，拒绝 H_1.

（D）. H_0 不真，拒绝 H_0.

2．设总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2, \alpha=0.10$，从 X 中抽取容量 $n_1=12$ 的样本，从 Y 中抽取容量 $n_2=10$ 的样本，算得 $S_1^2=118.4, S_2^2=31.93$，正确的检验方法与结论是（　　）。

（A）用 t 检验法，临界值 $t_{0.05}(17)=2.11$，拒绝 H_0.

（B）用 F 检验法，临界值 $F_{0.05}(11,9)=3.10, F_{0.95}(11,9)=0.34$，拒绝 H_0.

（C）用 F 检验法，临界值 $F_{0.95}(11,9)=0.34, F_{0.05}(11,9)=3.10$，接受 H_0.

（D）用 F 检验法，临界值 $F_{0.01}(11,9)=5.18, F_{0.99}(11,9)=0.21$，接受 H_0.

3．设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， σ^2 未知，假设 $H_0:\mu=\mu_0$ 的拒绝域为 $\mu \le -\mu_\alpha$，则备择假设 H_1 为（　　）。

（A） $\mu \ne \mu_0$.　　（B） $\mu > \mu_0$.　　（C） $\mu < \mu_0$.　　（D） $\mu \le \mu_0$.

4. 设总体 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$， σ^2 未知，假设检验 $H_0:\mu\le 1; \mu>1\left(\alpha=0.05\right)$，则拒绝域为（　　）。

（A） $\left|\bar{X}-1\right|>u_{0.05}$.　　（B） $\bar{X}>1+t_{0.05}\left(n-1\right)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$.

（C） $\left|\bar{X}-1\right|>t_{0.05}\left(n-1\right)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$.　　（D） $\bar{X}<1-t_{0.05}\left(n-1\right)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$.

5. 对正态总体的数学期望进行假设检验 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\ne\mu_0$，如果在显著性水平 0.05 下接受原假设 H_0，那么在显著性水平 0.01 下（　　）

（A）必接受 H_0 .　　（B）可能接受,也可能拒绝 H_0 .

（C）必拒绝 H_0 .　　（D）不接受,也不拒绝 H_0 .

三、计算题

1．某车间用一台包装机包装葡萄糖，包得的袋装葡萄糖的净重 X（单位 kg）是一个随机变量，它服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，当机器工作正常时，其均值为 0.5kg，根据经验知标准差为 0.015 kg（保持不变），某日开工后，为检验包装机的工作是否正常，从包装出的葡萄糖中随机地抽取 9 袋，称得净重为

0.497　0.506　0.518　0.524　0.498　0.511　0.520　0.515　0.512

试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验机器工作是否正常.

2．设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

3．设有甲，乙两种零件，彼此可以代用，但乙种零件比甲种零件制造简单，造价低，经过试验获得抗压强度（单位：$\mathrm{kg/cm^2}$）为

甲种零件：88，87，92，90，91，

乙种零件：89，89，90，84，88.

假设甲乙两种零件的抗压强度均服从正态分布，且方差相等，试问两种零件的抗压强度有无显著差异（取 $\alpha = 0.05$）？

4．某无线电厂生产的一种高频管，其中一项指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ，从一批产品中抽取 8 只，测得该指标数据如下：

66,　43,　70,　65,　55,　56,　60,　72,

（1）总体均值 $\mu=60$ ，检验 $\sigma^2=8^2$ （取 $\alpha=0.05$ ）；

（2）总体均值 μ 未知时，检验 $\sigma^2=8^2$ （取 $\alpha=0.05$ ）.

综合练习一

一、填空题

1. 设 A,B 是同一个试验中的两个事件，且 $P(A)=0.61, P(A-B)=0.22$，则 $P(\overline{AB})=$__________。

2. 抛掷两颗均匀的骰子，已知两颗骰子点数之和为 7 点，则其中一颗为 1 点的概率为__________。

3. 设连续型随机变量 X 的分布函数在某区间的表达式为 $\dfrac{1}{x^2+1}$，其余部分为常数，写出此分布函数的完整表达式____________________。

4. 设二维随机变量 $(X，Y)$ 在区域 D 上服从均匀分布，D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}, y=0, x=1, x=e^2$ 所围成，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=e$ 点的值为__________。

5. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，并且服从同一个分布，期望为 μ，方差为 σ^2，令 $\overline{X}=\dfrac{1}{\mathrm{n}}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则 $D(\overline{X})=$__________。

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，μ 和 σ^2 均未知，则 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为______________。

二、单项选择题

1. 设 A、B、C 三个事件两两相互独立，则 A、B、C 相互独立的充要条件是（　　）。

（A）A 与 BC 独立　（B）AB 与 $A\cup C$ 独立　（C）AB 与 AC 独立　（D）$A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

2. 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，在下列概率中可表示为 $F(a)-F(a-0)$ 的是（　　）。

（A）$P\{X\le a\}$　　（B）$P\{X>a\}$　　（C）$P\{X=a\}$　　（D）$P\{X\ge a\}$

3. 设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则（　　）。

（A）$P\{X+Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$　　（B）$P\{X+Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$

（C） $P\{\ X-Y\le 0\ \}=\dfrac{1}{2}$　　　　　（D） $P\{\ X-Y\le 1\ \}=\dfrac{1}{2}$

4．在假设检验中，原假设 H_0，备择假设 H_1，则（　　）称为第二类错误。

（A） H_0 为真，接受 H_1　　　　　（B） H_0 不真，接受 H_0

（C） H_0 为真，拒绝 H_1　　　　　（D） H_0 不真，拒绝 H_0

5. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=100$, 方差 $D(Y)=10$，则由切比雪夫不等式

$P\{80<X<120\}\ge$（　　）。

（A）　0.025　　　（B）　0.5　　　（C）　0.96　　　（D）　0.975

6．设 X_1,X_2,X_3 是来自总体 $N(\mu，\sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ 为已知，σ^2 为未知，则下列各式中不是统计量的为（　　）。

（A）$X_2-2\mu$　（B）$\mu X_1+X_3e^{X_2}$　（C）$\max(X_1,X_2,X_3)$　（D）$\dfrac{1}{\sigma^2}(X_1+X_2+X_3)$

三、按照要求解答下列各题

1. 在电报通讯中，发送端发出的是由“•”和“-”两种信号组成的序列。由于受到随机干扰，接收端收到的是“•”和“-”及“不清”三种信号组成的序列。假设发送“•”和“-”的概率分别为 0.7 和 0.3；在已知发送“•”时，接收到“•”、“-”和“不清”的概率分别为 0.8、0.1 和 0.1；在已知发送“-”时，接收到“•”、“-”和“不清”的概率分别为 0.2、0.7 和 0.1。

求（1）接收到信号“•”、“-”和“不清”的概率；

（2）在接收到信号“不清”的条件下，发送信号为“-”的概率。

2．设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x, \qquad -\infty<x<+\infty$，求（1）常数 A、B；（2）随机变量 X 落在 $(-1,1)$ 内的概率；（3）X 的概率密度函数。

3．已知随机变量 X 和 Y 的概率分布分别为

X	-1	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

并且 $P\{XY=0\}=1$。

（1）求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布（只写出计算结果表格）；（2）判别 X 和 Y 是否相互独立。

4．已知随机变量X、Y分别服从$N(1,0,9,16,-\frac{1}{2})$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$。求（1）$Z$的数学期望与方差；（2）$X$与$Z$的相关系数；（3）$X$与$Z$是否相互独立？为什么？

5. 设总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $\theta>0$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，求θ的矩估计量和最大似然估计量。

四、按照要求解答下列各题

1．已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

求随机变量$Y=X^2$的概率密度。

2．设总体 X 在$(0, \theta)$内服从均匀分布，$X_1, X_2,\cdots,X_n\ (n\ge 2)$ 是取自总体 X 的样本，已知θ的两个无偏估计量为$\hat{\theta}_1=2\overline{X}$，$\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}\max(X_1, X_2,\cdots,X_n)$，判别$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$哪个更有效?

综合练习二

一、填空题

1. 设事件 A 与事件 B 相互独立，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，则 $P(A\cup B)$=_____.

2. 设随机变量 $X\sim B(2,\ 0.1)$，则 $P\{X=1\}$ = __________.

3. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则随机变量

$Y=2X+1$ 的概率密度函数为________________.

4. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq$_______.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是来自总体的样本，其样本均值 $\bar{x}=5.2$，则

未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为_______________.（$u_{0.025}=1.96$）

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，若 σ^2

已知，检验假设为 $H_0:\mu=\mu_0;H_1:\mu\neq\mu_0$，则应取检验统计量为__________.

二、单项选择题

1. 设 A,B 为对立事件，$0<P(B)<1$，则下列概率值为 1 的是（　　　）.

(A) $P(\bar{A}\mid\bar{B})$　　(B) $P(\bar{A}\mid B)$　　(C) $P(B\mid A)$　　(D) $P(AB)$

2. 设随机变量 $X\sim N(0,1), Y=2X+1,$ 则 Y 服从（　　　）.

(A) $N(0,1)$　　(B) $N(1,1)$　　(C) $N(1,4)$　　(D) $N(0,2)$

3. 已知二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$ 是 X 和

Y 相互独立的（　　　）.

(A) 充分必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分非必要条件　　(D) 既不是充分条件也不是必要条件

4. 设随机变量 X 和 Y 的方差存在且都不等于零，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 是 X 和

Y（　　　）.

（A）不相关的充分非必要条件　　（B）不相关的必要非充分条件

（C）不相关的充分必要条件　　（D）X 和 Y 相互独立的充分必要条件

5. 设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的样本，其中 μ 已知，σ 未知，则下列不是统计量的是（　　）.

（A）$\max\limits_{1 \le k \le n} X_k$　　（B）$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \mu$　　（C）$\min\limits_{1 \le k \le n} X_k$　　（D）$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{X_k}{\sigma}$

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列样本函数中不是总体 X 期望 μ 的无偏估计量是（　　）.

（A）$\overline{X}$　　（B）$X_1 + X_2 - X_3$　　（C）$0.2X_1 + 0.3X_2 + 0.5X_3$　　（D）$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

三、按照要求解答下列各题

1. 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 2 件合格品和 2 件次品，乙箱中仅装有 2 件合格品，现从甲箱中随机地取出 2 件放入乙箱，求：（1）乙箱中次品数 X 的概率分布；（2）从乙箱中任取一件是次品的概率.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ （$-\infty<x<\infty$）. 求：(1) X 的分布函数；(2) $D(X)$.

3. 某箱装有 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件，现从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到}i\text{等品},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad i=1，2，3，$$

求：(1) 随机变量 (X_1,X_2) 的概率分布（只写出分布表）；(2) $Cov(X_1，X_2)$.

4. 某厂检验保温瓶的保温性能，在保温瓶中灌满沸水，24 小时后测定其保温温度为 T，$T \sim N(62, 5^2)$，若独立进行两次抽样测试，各次分别抽取 20 只和 12 只，样本均值分别为 $\overline{T}_1, \overline{T}_2$，求样本均值 $\overline{T}_1$ 与 $\overline{T}_2$ 的差的绝对值大于 1^0C 的概率. $(\Phi(\sqrt{\frac{3}{10}}) = 0.7088)$

5. 设总体 $X \sim N(1, 2^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是从总体取的样本. $\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差，求 $E(S^2)$ 、$D(S^2)$ 及 $E[(\overline{X}S^2)^2]$.

四、解答下列各题

1. 设随机变量(X,Y)的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}Cx, & 0<x<1,\ 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(1) 求常数 C；(2) 求 $P\{X+Y>1\}$；(3) 求 X 与 Y 的边缘概率密度，并判断 X 与 Y 是否相互独立.

2. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$，其中$\theta$（$\theta>0$）是未知参数，又$X_1,X_2,\cdots,X_n$为取自总体 X 的样本，求θ的矩估计量和最大似然估计量.