数学建模
第四章 动态模型介绍

机器学习研究室

时小虎 张禹

目录

1. 五步方法

① Ask the question.	① 提出问题
② Select the modeling approach.	② 选择建模方法
③ Formulate the model.	③ 推导模型的数学表达式
④ Solve the model.	④ 求解模型
⑤ Answer the question.	⑤ 回答问题

第1步，提出问题

① Make a list of all the variables in the problem, including appropriate units.

② Be careful not to confuse variables and constants.

③ State any assumptions you are making about these variables, including equations and inequalities.

④ Check units to make sure that your assumptions make sense.

⑤ State the objective of the problem in precise mathematical terms.

① 列出问题中涉及的变量，包括适当的单位.

② 注意不要混淆变量和常量.

③ 列出你对变量所做的全部煅设，包括等式和不等式.

④ 检查单位从而保证你的假设有意义.

⑤ 用准确的数学术语给出问题的目标.

第2步，选择建模方法

① Choose a general solution procedure to be followed in solving this problem.

② Generally speaking, success in this step requires experience, skill, and familiarity with the relevant literature.

③ In this book we will usually specify the modeling approach to be used.

① 选择解决问题的一个一般的求解方法.

② 一般地，这一步的成功需要经验、技巧和熟悉相关文献.

③ 在授课中，我们通常会给定要用的建模方法.

第3步，推导模型的数学表达式

① Restate the question posed in step 1 in the terms of the modeling approach specified in step 2.

② You may need to relabel some of the variables specified in step 1 in order to agree with the notation used in step 2.

③ Note any additional assumptions made in order to fit the problem described.

① 将第一步中得到的问题重新表达成第二步选定的建模方法所需要的形式.

② 你可能需要将第一步中的一些变量名改成与第二步所用的记号一致.

③ 记下任何补充假设，这些假设是为了使第一步中描述的问题与第二步中选定的数学结构相适应而做出的.

第4步，求解模型

① Apply the general solution procedure specified in step 2 to the specific problem formulated in step 3.

② Be careful in your mathematics. Check your work for math errors. Does your answer make sense?

③ Use appropriate technology. Computer algebra systems, graphics, and numerical software will increase the range.

① 将第二步中所选的方法应用于第三步得到的表达式.

② 注意你的数学推导，检查是否有错误，你的答案是否有意义.

③ 采用适当的技术.计算机代数系统、图形工具、数值计算的软件等都能扩大你能解决问题的范围，并能减少计算错误.

第5步，回答问题

① Rephrase the results of step 4 in nontechnical terms.

② Avoid mathematical symbols and jargon.

③ Anyone who can understand the statement of the question as it was presented to you should be able to understand your answer.

① 用非技术性的语言将第四步的结果重新表述.

② 避免数学符号和术语.

③ 能理解最初提出的问题的人就应该能理解你给出的解答.

2. 定常态分析

许多有趣的实际问题包含着随时间发展的过程。动态模型被用于表现这些过程的演变。空间飞行，电路，化学反应，种群增长，投资和养老金，军事战斗，疾病传播和污染控制正是广泛地运用动态模型的众多领域中的几个领域。

一般来讲，动态模型易于构造但难于求解．精确的解析解仅对很少的特殊情况存在，例如线性系统．数值方法常常对系统行为不能提供一个好的定性的解释．因此，图形表示通常成为分析动态模型不可缺少的一部分．由于图形表示特有的简单性，以及它的几何性质，这一章也提供我们一个理想的机会介绍最深刻且最基本的动态系统建模的观点．

2. 定常态分析

例 4.1 在一个未被管理的森林，硬材树与软材树竞争可用的土地和水分. 越可用的硬材树生长得越慢，但是越耐用且提供越有价值的木材. 软材树靠生长快，有效消耗水分和土壤养分与硬材树竞争. 硬材树靠生长的高度与软材树竞争，它们遮挡了小树的阳光. 它们也更耐抗疾病. 这两种树能否同时在一片森林中共存，或者一种树是否会迫使另一种树灭绝?

chnology

2. 定常态分析

第一步提出问题：

Variables (符号化问题描述):

变量：

H＝硬材树种群(吨/英亩)

S＝软材树种群(吨/英亩)

g_H＝硬材树的生长率(吨/英亩/年)

g_S＝软材树的生长率(吨/英亩/年)

硬材树与软材树

c_H＝~~与硬材树~~竞争的损失(吨/英亩/年)

c_S＝~~与软材树~~竞争的损失(吨/英亩/年)

软材树与硬材树

假设：

$g_H = r_1 H - a_1 H^2$

$g_S = r_2 S - a_2 S^2$

$c_H = b_1 SH$

$c_S = b_2 SH$

$H \geqslant 0$，$S \geqslant 0$

r_1，r_2，a_1，a_2，b_1，b_2 是正实数

目标： 确定是否有 $H \to 0$ 或 $S \to 0$.

2. 定常态分析

第二步选择模型：

定常态的动态模型。

设函数

$$\begin{gathered} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\cdots,x_n) \end{gathered}$$

定义在$\mathbb{R}^n$ 的子集 S 上．函数 f_1，…，f_n 分别表示每个变量 x_1，…，x_n 的变化率．称集合 S 中的一个点$(x_1$，…，$x_n)$为平衡点，如果在这点

$$\begin{gathered} f_1(x_1,\cdots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{gathered} \tag{1}$$

于是每个变量 x_1，…，x_n 的变化率为零，因此系统处于静止状态.

2. 定常态分析

第二步选择模型：

定常态的动态模型。

称 x_1，…，x_n 为状态变量，S 为状态空间．因为函数 f_1，…，f_n 依赖系统的现实状态(x_1，…，x_n)，现实状态完全确定系统的将来，而与过去发生的情况无关．我们仅需要知道目前的状况，并不需要知道如何到达目前的状况．当处于由方程(1)定义的平衡态时，我们称系统处于定常态．在这一点所有的变化率为零．作用在系统上的全部影响达到平衡．因此方程(1)有时被称为平衡方程．当一个系统处于定常态时，它将永远保持不变．因为所有的变化率为零，在将来的任何时候系统都将停留在现在所在的状态．

2. 定常态分析

第三步是构造模型的公式．记 $x_1=H$，$x_2=S$ 为两个状态变量，定义在状态空间

$$\{(x_1,x_2):x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}.$$

定常态方程为

$$\begin{aligned} r_1x_1-a_1x_1^2-b_1x_1x_2&=0\\ r_2x_2-a_2x_2^2-b_2x_1x_2&=0. \end{aligned}\tag{2}$$

我们对这个方程组在状态空间的解感兴趣．这些解表示动态模型的平衡点．

2. 定常态分析

第四步求解模型：

第四步是求解模型．从第一个方程约去因子 x_1，由第二个方程约去因子 x_2，我们得到四个解；三个解

$$(0,0)$$

$$\left(0,\frac{r_2}{a_2}\right)$$

$$\left(\frac{r_1}{a_1},0\right)$$

在坐标轴上，第四个在这两条直线

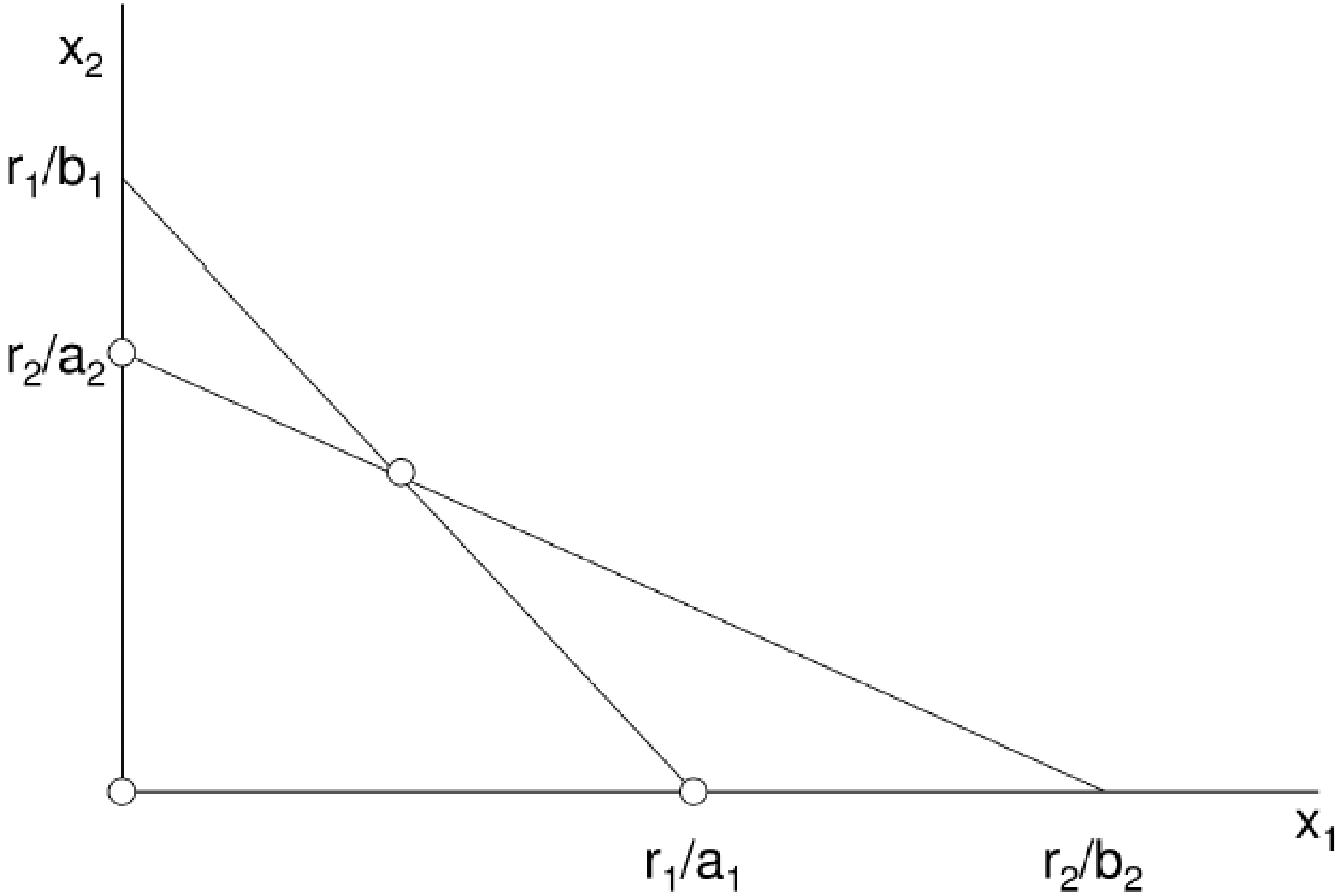
$$a_1x_1+b_1x_2=r_1$$

$$b_2x_1+a_2x_2=r_2.$$

的交点．参见图 4-2 作为说明．

2. 定常态分析

第四步求解模型：



2. 定常态分析

第四步求解模型：

由克拉默法则解得

$$x_1 = \frac{r_1 a_2 - r_2 b_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2}$$

$$x_2 = \frac{a_1 r_2 - b_2 r_1}{a_1 a_2 - b_1 b_2}.$$

如果这两条线在状态空间内不相交，则只存在三个平衡点. 在这种情况下两个树种不能和平共存于平衡状态.

2. 定常态分析

第四步求解模型：

我们希望知道在什么条件下 $x_1>0$ 且 $x_2>0$。有理由假设 $a_i>b_i$。生长率是

$$r_i x_i - a_i x_i x_i - b_i x_i x_j,$$

其中第一项表示无限制的增长，第二项表示种群内竞争的影响，第三项表示种群间竞争的影响。因为两种树不会占有完全相同的生态位，我们将假设对于 $x_i=x_j$（即种群内部）竞争影响更强。因此 $a_i>b_i$，所以

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 > 0.$$

于是，共存的条件是

$$r_1 a_2 - r_2 b_1 > 0$$

$$a_1 r_2 - b_2 r_1 > 0,$$

或者，换句话说，

$$\frac{r_2}{a_2} < \frac{r_1}{b_1} \text{ 且 } \frac{r_1}{a_1} < \frac{r_2}{b_2},$$

2. 定常态分析

第五步是用通俗的语言表达从我们的模型分析获得的结果．此时做到这一点有困难，因为我们的答案是有条件的，限制条件包含了未知参量．为了清楚地表达得到的结果，我们希望找到共存条件的更切实的解释．不妨重新检验模型的公式，看看我们是否能用直接的方法解释比率 r_i/a_i 和 r_i/b_i 的含义．

参数 r_i 表示增长趋势，参数 a_i 和参数 b_i 分别表示种群内和种群间的竞争强度．因此，比率 r_i/a_i 和 r_i/b_i 必然表达了增长与竞争的相对强度．进一步，在没有种群间的竞争时，增长率是

$$r_i x_i - a_i x_i^2 = x_i(r_i - a_i x_i).$$

比率 r_i/a_i 表示了在没有种群间的竞争时的平衡态种群水平，或者说是种群将停止增长的水平．类似地，如果我们忽略种群内部的竞争，净增长率为

$$r_i x_i - b_i x_i x_j = x_i(r_i - b_i x_j).$$

于是比率 r_i/b_i 表示了要使 i 类种群灭绝，j 类种群必须达到的种群水平，由此，现在我们可以通过下面具体的解释给出分析结果．

2. 定常态分析

第五步回答问题：

对每种类型的树(硬材或软材)存在两类增长限制．第一种是由于与另一种树的竞争，第二种是由于拥挤造成的同一树种内部的竞争．因此，对每一个树种存在一点，在这一点树木由于拥挤会主动停止增长，且存在另一点，在这一点树木通过竞争阻止另一种树的增长．两种树木能够共存的条件是每种树达到限制自己增长的点之前已经达到它限制另一种树增长的点．

2. 定常态分析

第五步回答问题：

对每种类型的树(硬材或软材)存在两类增长限制．第一种是由于与另一种树的竞争，第二种是由于拥挤造成的同一树种内部的竞争．因此，对每一个树种存在一点，在这一点树木由于拥挤会主动停止增长，且存在另一点，在这一点树木通过竞争阻止另一种树的增长．两种树木能够共存的条件是每种树达到限制自己增长的点之前~~已经~~未达到它限制另一种树增长的点．

2. 定常态分析

第五步回答问题：

对每种类型的树(硬材或软材)存在两类增长限制．第一种是由于与另一种树的竞争，第二种是由于拥挤造成的同一树种内部的竞争．因此，对每一个树种存在一点，在这一点树木由于拥挤会主动停止增长，且存在另一点，在这一点树木通过竞争阻止另一种树的增长．两种树木能够共存的条件是每种树达到限制自己增长的点之前~~已经~~未达到它限制另一种树增长的点.

如果该动态系统具有平衡态，它是否能够达到？或者在什么条件下能达到？

3. 动力系统

动力系统模型是最普遍应用的动态模型．在一个动力系统模型中力的变化由微分方程刻画．在这一节我们将集中考虑应用图示方法获得一个动力系统的定性性质．重点是稳定性问题．

例 4.2 蓝鲸和长须鲸是两个生活在同一海域的相似的种群，因此认为它们之间存在竞争．蓝鲸的内禀增长率每年估计为 5%，长须鲸为每年 8%．环境承载力（环境能够支持的鲸鱼的最大数量）估计蓝鲸为 150 000 条，长须鲸为 400 000 条．鲸鱼竞争的程度是未知的．在过去的 100 年剧烈的捕捞已经使鲸鱼数量减少，蓝鲸大约 5 000 条，长须鲸大约 70 000 条．蓝鲸是否会灭绝？

3. 动力系统

第一步提出问题：

Variables (符号化问题描述):

变量：

B = 蓝鲸的数量

F = 长须鲸的数量

g_B = 蓝鲸种群的增长率（每年）

g_F = 长须鲸种群的增长率（每年）

蓝鲸与长须鲸

c_B = ~~与蓝鲸~~竞争的影响（每年鲸鱼数）

c_F = ~~与长须鲸~~竞争的影响（每年鲸鱼数）

长须鲸与蓝鲸

假设：

$g_B = 0.05B(1 - B/150\ 000)$

$g_F = 0.08F(1 - F/400\ 000)$

$c_B = c_F = \alpha BF$

$B \geqslant 0 \quad F \geqslant 0$

α 是正实数

目标： 确定动力系统是否能够从 $B = 5\ 000$，$F = 70\ 000$ 开始达到稳定的平衡态

3. 动力系统

第二步选择建模方法：动力系统

一个由 n 个状态变量(x_1，…，x_n)构成的动力系统是一个微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= f_n(x_1,\cdots,x_n) \end{aligned} \tag{3}$$

定义在状态空间(x_1，…，x_n)$\in S$ 上，其中 S 是$\mathbb{R}^n$的一个子集. 微分方程解的存在性和惟一性理论表明，如果 f_1，…，f_n 在点

$$x_0 = (x_1^0,\cdots,x_n^0),$$

的一个邻域内有连续的一阶偏导数，则这个微分方程组存在通过这个初值点的惟

有唯一解。

3. 动力系统

第二步选择建模方法：动力系统

最好将动力系统的一个解看作是状态空间的一条轨线．只要可微性假设成立就存在过每个点的轨线，除了平衡点外轨线不相交．设

$$x=(x_1,\cdots,x_n)$$
$$F(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x)).$$

则动力系统方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x). \tag{4}$$

对每一条轨线 $x(t)$ 导数 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 表示速度向量．因此，对每一条解曲线 $x(t)$，$F(x(t))$ 是在每点的速度向量．向量场 $F(x)$ 呈现了在整个状态空间中运动的方向和快慢．通常两个变量的动力系统的定性性质可以通过在选择的点处画向量场而获得．满足 $F(x)=0$ 的点是平衡点，我们将特别注意这些点附近的向量场．

3. 动力系统

第三步推导数学表达式：

令 $x_1=B$，$x_2=F$，记

$$x_1' = f_1(x_1, x_2)$$

$$x_2' = f_2(x_1, x_2),$$

$$f_1(x_1, x_2) = 0.05x_1\left(1-\frac{x_1}{150\ 000}\right)-\alpha x_1 x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0.08x_2\left(1-\frac{x_2}{400\ 000}\right)-\alpha x_1 x_2.$$

状态空间是

$$S = \{(x_1, x_2): x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}.$$

3. 动力系统

第四步求解数学模型：

第四步是解这个模型．我们要勾画出这个问题的一个向量场图．从勾画水平集 $f_1=0$ 和 $f_2=0$ 开始．平衡态将是这两个水平集的交集．进一步，向量场将垂直于 $f_1=0(x_1'=0)$且平行于 $f_2=0(x_2'=0)$．沿着这两条曲线画速度向量．然后在它们之间添上一些速度向量，记住向量的长度和方向是连续变化的(只要 $F(x)$ 连续，通常正是这样)．事实上，对速度向量长度的分析不是非常重要的．完整的曲线见图 4-4．

这里有四个平衡态解：三个在

$$
\begin{aligned}
&(0,0)\\
&(150\,000,0) \qquad\qquad (6)\\
&(0,400\,000)
\end{aligned}
$$

另一个点的坐标依赖于 α．在我们的图示中假设

$$400\,000<\frac{0.05}{\alpha}.$$

此时很容易看出区域内部的平衡点是惟一稳定的平衡态．事实上，过状态空间的任意一点的解将最终趋于这个平衡态．特别是，当 $t\to\infty$时，具有初值 $x_1(0)=5\,000$，$x_2(0)=70\,000$ 的解将趋于这个平衡态．

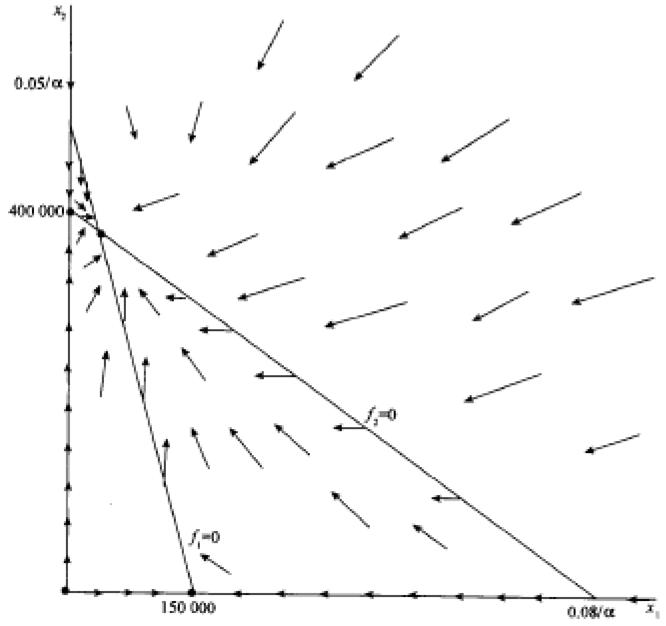


图 4-4 长须鲸 x_2 与蓝鲸 x_1 表示鲸问题的向量场

$f_1(x_1,x_2)=0.05x_1(1-x_1/150\,000)-\alpha x_1x_2$

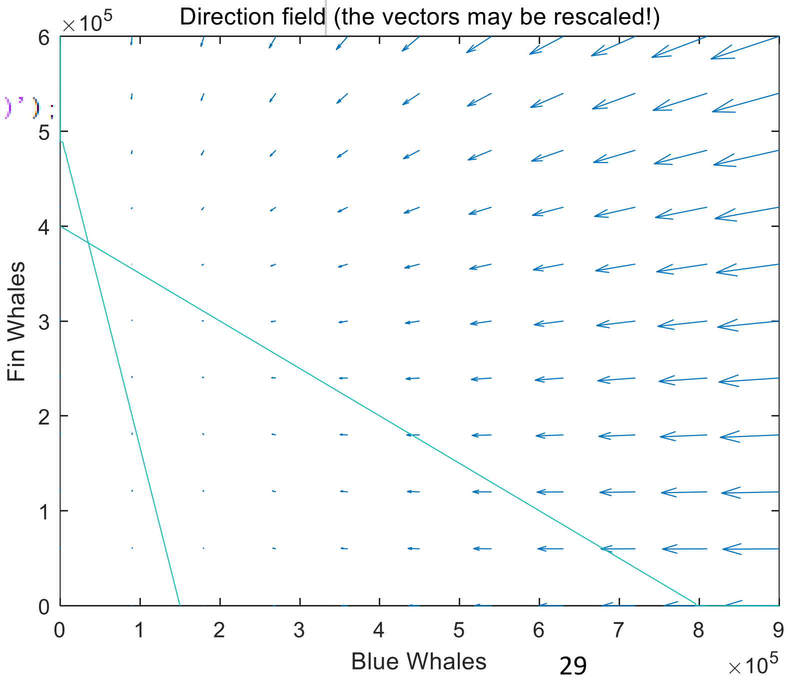
$f_2(x_1,x_2)=0.08x_2(1-x_2/400\,000)-\alpha x_1x_2$

3. 动力系统

```
clear all, close all, clc
syms x1 x2
alpha = 10 ^ (- 7);
f1 = 0.05 * x1 * (1 - x1 / 150000) - alpha * x1 * x2;
f2 = 0.08 * x2 * (1 - x2 / 400000) - alpha * x1 * x2;
[x1steady, x2steady] = solve(f1, f2);
disp('The equilibrium points are')
disp([x1steady x2steady])
```

```
The equilibrium points are
[         0,          0]
[    150000,          0]
[         0,     400000]
[ 600000/17, 6500000/17]
```

```
M = 10; % number of samples points
x1min = 0; x1max = 900000; % domain specification
x2min = 0; x2max = 600000;
[X1, X2] = meshgrid(x1min:(x1max - x1min) / M:x1max, x2min:(x2max - x2min) / M:x2max);
dX1 = 0.05 * X1 .* (1 - X1 / 150000) - alpha * X1 .* X2; % x1-component
dX2 = 0.08 * X2 .* (1 - X2 / 400000) - alpha * X1 .* X2; % x2-component
quiver(X1, X2, dX1, dX2); % matlab routine
axis([x1min x1max x2min x2max]);
hold on
ezplot(f1, [0 900000 0 600000]), hold on
ezplot(f2, [0 900000 0 600000])
title('Direction field (the vectors may be rescaled!)');
xlabel('Blue Whales');
ylabel('Fin Whales');
```



3. 动力系统

第五步回答问题：

第五步是用非数学的语言总结我们分析模型所得到的结果. 基于我们的分析，只要停止捕捞，鲸鱼种群将恢复到原来水平，生态系统将处于稳定的平衡态.

当然，我们的结论基于一些相当宽松的假设. 例如，我们假设竞争的影响相对较小. 如果它比较大[例如，$(0.05/\alpha)<400\ 000$]，则这两个种群将不可能共存. 假设竞争影响很小是有理由的，因为我们知道在我们开始捕捞之前这两个种群已经共存了很长的时间. 对种群增长过程我们也做了一些简单的假设. 最关键的是对非常小的种群，假设种群仍将按内禀增长率增长. 人们已知某些种群具有最小的群体水平(称为最小可生存种群水平)，低于这个量时种群的增长率为负值. 这个假设当然会改变我们动力系统的行为.

3. 动力系统

敏感性分析：考虑α的敏感性

最后，我们研究灵敏性和稳健性．首先我们考虑对参数 α 的灵敏性，对它我们知道得很少．对任意的 $\alpha<1.25\times10^{-7}$ 存在一个稳定的平衡态 $x_1>0$，$x_2>0$，

$$x_1=\frac{150\ 000(8\ 000\ 000\alpha-1)}{D}$$
$$x_2=\frac{400\ 000(1\ 875\ 000\alpha-1)}{D}, \tag{7}$$

其中

$$D=15\ 000\ 000\ 000\ 000\alpha^2-1,$$

这由克拉默法则求得．例如，如果 $\alpha=10^{-7}$，则

$$x_1=\frac{600\ 000}{17}\approx 35\ 294$$
$$x_2=\frac{6\ 500\ 000}{17}\approx 382\ 353. \tag{8}$$

在这一点的灵敏性为

$$S(x_1,\alpha)=-\frac{21\ 882\ 352\ 927}{6\ 000\ 000\ 000}\approx-3.6$$

和

$$S(x_2,\alpha)=\frac{27}{221}\approx 0.122.$$

```
clear all, close all, clc
syms x1 x2 alpha
%alpha = 10 ^ (- 7);
f1 = 0.05 * x1 * (1 - x1 / 150000) - alpha * x1 * x2;
f2 = 0.08 * x2 * (1 - x2 / 400000) - alpha * x1 * x2;
[x1steady, x2steady] = solve(f1, f2);
disp('The equilibrium points are')
disp([x1steady x2steady])
dx1da=diff(x1steady(4),alpha);
dx2da=diff(x2steady(4),alpha);
a = 10 ^ (- 7);
s_x1_a=inline(dx1da*alpha/x1steady(4));
s_x2_a=inline(dx2da*alpha/x2steady(4));
v_sx1a=s_x1_a(a)
v_sx2a=s_x2_a(a)
```

```
v_sx1a =

   -3.6471


v_sx2a =

    0.1222
```

3. 动力系统

敏感性分析：考虑α的敏感性

蓝鲸种群对 α 更灵敏．如果 $\alpha=10^{-8}$，则

$$x_1=\frac{276\ 000\ 000}{1\ 997}\approx 138\ 207$$

$$x_2=\frac{785\ 000\ 000}{1\ 997}\approx 393\ 090.$$

当然如图 4-4 所示总是有 $x_1<150\ 000$，$x_2<400\ 000$，但是这个平衡态最重要的特征不是它的坐标，而是它处于 $x_1>0$，$x_2>0$ 并且是稳定的．我们认为这些结论对 $\alpha<1.25\times10^{-7}$ 的整个区间是正确的．因此，应该说我们的主要结论对 α 一点儿也不灵敏．同样的，我们的主要结论对内禀增长率和环境承载量，甚至对现存鲸鱼群体的状态也是一点儿也不灵敏．

3. 动力系统

敏感性分析：

更深入的稳健性问题考虑函数 f_1 和 f_2 的形式．假设 x_1'/x_1 和 x_2'/x_2 分别是 x_1 和 x_2 线性函数．这些直线表示了一个种群或另一个种群停止增长的点．去掉这个线性的假设．设

$$x_1' = x_1 g_1(x_1, x_2)$$
$$x_2' = x_2 g_2(x_1, x_2).$$

如果 g_1 和 g_2 是非线性的，只要向量场具有相同的一般特征，我们所有的分析结果仍然是对的，见图 4-6.

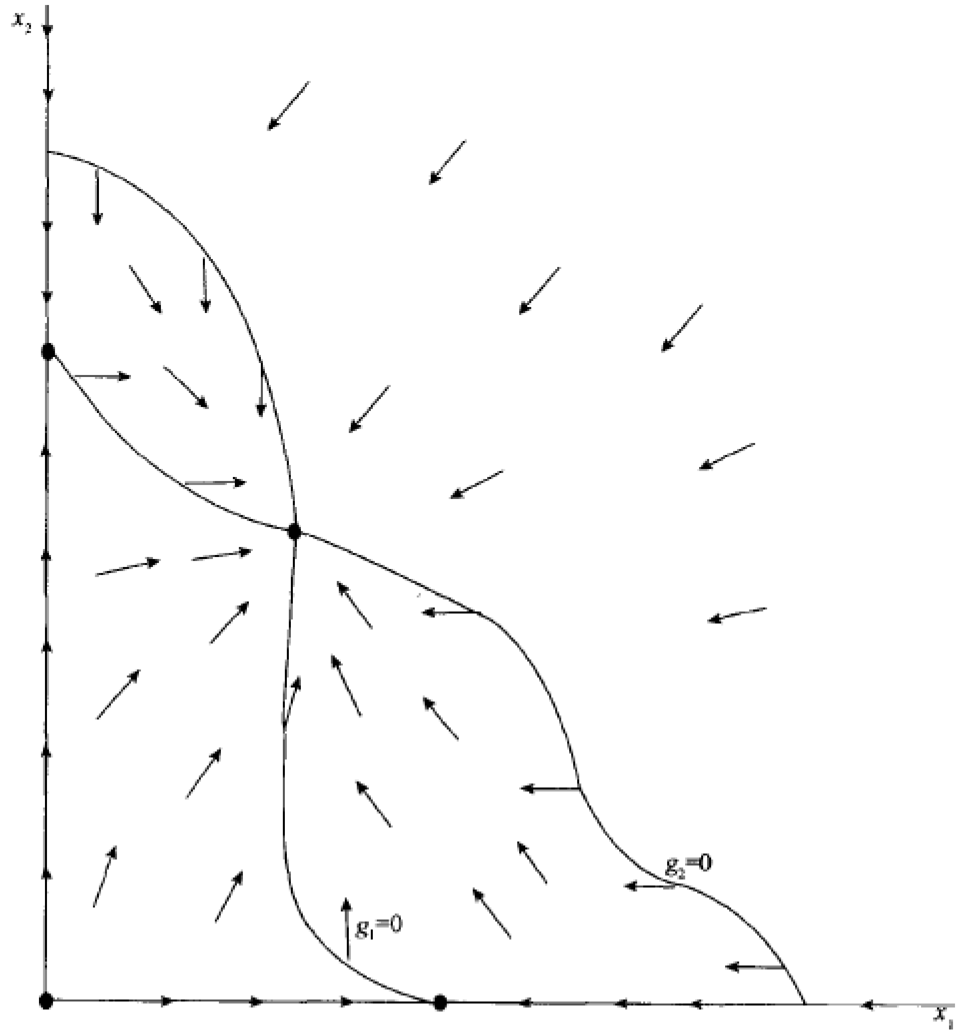


图 4-6　长须鲸 x_2 与蓝鲸 x_1 一般鲸鱼问题的向量场
$f_1(x_1, x_2) = x_1 g_1(x_1, x_2)$
$f_2(x_1, x_2) = x_2 g_2(x_1, x_2)$

4. 离散时间的动力系统

对某些问题很自然取离散的时间变量，此时一般微分方程被它的离散时间的模式：差分方程代替. 离散的和连续的动力系统之间的关系是 $\Delta x/\Delta t$ 与 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的关系，因此，不论我们假设时间是离散的还是连续的，动力系统的特性常常被认为是大致相同的. 但是，这种逻辑推断忽略了重要的一点. 每一个离散时间的动力系统都存在一种时间滞后，滞后的时间是时间步长 Δt 的长度. 对动力非常强的系统，时滞会导致出乎意料的结果.

例 4.3 宇航员在训练中要求用手动控制做对接演习. 作为这个演习的一部分，要求保持一个正在运行的太空船与另一个正在运行的太空船的相对位置. 手控制器提供了不同的加速度和减速度，并且在太空船上有一个装置测量这两个飞船的接近速度. 建议使用如下的策略进行飞船对接. 首先观察接近速度. 如果为零，则不用再做任何事. 否则，记住这个接近速度，再看加速度控制器，控制加速度使得它与接近速度相反，(即如果接近速度是正值，则放慢，如果是负的，则加快.)且正比于这个差值(即如果发现接近速度达到两倍时，我们将以两倍的速度刹车). 经过一段时间，再观察接近速度并重复上面步骤. 在什么环境下这个策略是有效的?

4. 离散时间的动力

例 4.3 宇航员在训练中要求用手动控制做对接演习．作为这个演习的一部分，要求保持一个正在运行的太空船与另一个正在运行的太空船的相对位置．手控制器提供了不同的加速度和减速度，并且在太空船上有一个装置测量这两个飞船的接近速度．建议使用如下的策略进行飞船对接．首先观察接近速度．如果为零，则不用再做任何事．否则，记住这个接近速度，再看加速度控制器，控制加速度使得它与接近速度相反，（即如果接近速度是正值，则放慢，如果是负的，则加快．）且正比于这个差值（即如果发现接近速度达到两倍时，我们将以两倍的速度刹车）．经过一段时间，再观察接近速度并重复上面步骤．在什么环境下这个策略是有效的？

我们将应用五步方法．设 v_n 表示在时间 t_n 观测到的接近速度，t_n 为第 n 次观测的时间．设

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n$$

表示根据我们的调整得到的太空船接近速度的改变．记

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n.$$

为两次观测速度之间间隔的时间．时间区间自然被分成两部分：调整速度控制器的时间和处于调整与下一次速度观测之间的时间．记

$$\Delta t_n = c_n + w_n,$$

其中 c_n 是调节控制器的时间，w_n 是下一次观测之前的等待时间．参数 c_n 是宇航员响应时间的函数，w_n 可任意设定．

记 a_n 为第 n 次调节后设定的加速度，由初等的物理得到

$$\Delta v_n = a_{n-1} c_n + a_n w_n.$$

控制规律要求加速度正比于（$-v_n$），因此

$$a_n = -kv_n.$$

4. 离散时间的动力

例 4.3 宇航员在训练中要求用手动控制做对接演习．作为这个演习的一部分，要求保持一个正在运行的太空船与另一个正在运行的太空船的相对位置．手控制器提供了不同的加速度和减速度，并且在太空船上有一个装置测量这两个飞船的接近速度．建议使用如下的策略进行飞船对接．首先观察接近速度．如果为零，则不用再做任何事．否则，记住这个接近速度，再看加速度控制器，控制加速度使得它与接近速度相反，(即如果接近速度是正值，则放慢，如果是负的，则加快．)且正比于这个差值(即如果发现接近速度达到两倍时，我们将以两倍的速度刹车)．经过一段时间，再观察接近速度并重复上面步骤．在什么环境下这个策略是有效的？

我们将应用五步方法．设 v_n 表示在时间 t_n 观测到的接近速度，t_n 为第 n 次观测的时间．设

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n$$

表示根据我们的调整得到的太空船接近速度的改变．记

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n.$$

为两次观测速度之间间隔的时间．时间区间自然被分成两部分：调整速度控制器的时间和处于调整与下一次速度观测之间的时间．记

$$\Delta t_n = c_n + w_n,$$

其中 c_n 是调节控制器的时间，w_n 是下一次观测之前的等待时间．参数 c_n 是宇航员响应时间的函数，w_n 可任意设定．

记 a_n 为第 n 次调节后设定的加速度，由初等的物理得到

$$\Delta v_n = a_{n-1} c_n + a_n w_n.$$

控制规律要求加速度正比于$(-v_n)$，因此

$$a_n = -k v_n.$$

变量：

t_n＝第 n 次观测速度的时间(秒)

v_n＝在 t_n 时刻的速度(米/秒)

c_n＝执行第 n 次控制调节的时间(秒)

a_n＝第 n 次调节后的加速度(米/秒^2)

w_n＝等待到第 $n+1$ 次观测前的等待时间(秒)

假设：

$t_{n+1} = t_n + c_n + w_n$

$v_{n+1} = v_n + a_{n-1} c_n + a_n w_n$

$a_n = -k v_n$

$c_n > 0$

$w_n \geqslant 0$

目标： 确定是否有 $v_n \to 0$

4. 离散时间的动力系统

第二步选择建模方法：离散时间的动力系统

一个离散时间的动力系统由若干个定义在状态空间 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 的状态变量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 和差分方程组构成

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= f_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ \Delta x_n &= f_n(x_1,\cdots,x_n).\end{aligned} \tag{9}$$

其中 Δx_n 表示在一个时间步长内 x_n 的改变量．通常取时间步长为 1，这相当于选择适当的单位．如果时间步长的长度是变化的，或者这个动力系统随时间变化，则我们将时间也作为一个状态变量．如果设

$$x = (x_1,\cdots,x_n)$$

$$F = (f_1,\cdots,f_n),$$

则运动方程可以形式地写成

$$\Delta x = F(x).$$

这个差分方程的解是状态空间中的一系列点．

$$x(0), x(1), x(2), \cdots$$

且对所有的 n 有

$$\begin{aligned}\Delta x(n) &= x(n+1) - x(n)\\ &= F(x(n))\end{aligned}$$

平衡态点 x_0 由

$$F(x_0) = 0,$$

刻画，而且，只要 $x(0)$ 充分接近 x_0，如果

$$x(n) \to x_0$$

则平衡态是稳定的．

4. 离散时间的动力系统

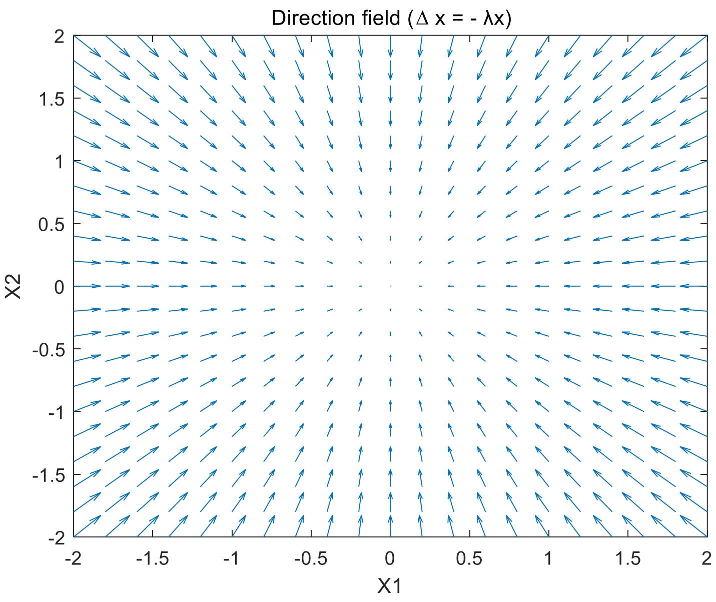
第二步选择建模方法：离散时间的动力系统

例 4.4 设 $x=(x_1, x_2)$，考虑差分方程

$$\Delta x = -\lambda x, \tag{10}$$

其中 $\lambda>0$. 在平衡态 $x_0=(0, 0)$附近的解有什么性质？图 4-8 呈现了当 $0<\lambda<1$ 时的向量场 $F(x)=-\lambda x$. 显然 $x_0=(0, 0)$是稳定的平衡态. 每一步都更接近 x_0. 现在我们考虑当 λ 变大时将会发生的情况. 当 λ 增大时，图 4-8 中的每个向量将伸长. 当 $\lambda>1$ 时向量伸长超过平衡态. 当 $\lambda>2$ 时向量伸长使得终点 $x(n+1)$实际上比起点 $x(n)$更远离平衡态$(0, 0)$. 此时 x_0 是一个不稳定的平衡态.

这个简单的例子清楚地说明了这一事实：离散时间的动力系统的行为不总是像它们相应的连续时间的系统一样. 微分方程



4. 离散时间的动力系统

第三步推导数学模型：

$$(v_{n+1}-v_n)=-kv_{n-1}c_n-kv_nw_n.$$

因此，第 n 步速度的变化依赖于 v_n 和 v_{n-1}. 为简化分析，对所有的 n 假设 $c_n=c$ 和 $w_n=w$. 则时间步长为

$$\Delta t=c+w$$

我们并不需要将时间作为状态变量. 但是，我们确实应该同时考虑 v_n 和 v_{n-1}. 设

$$x_1(n)=v_n$$
$$x_2(n)=v_{n-1}.$$

计算

$$\begin{aligned}\Delta x_1&=-kwx_1-kcx_2\\ \Delta x_2&=x_1-x_2.\end{aligned}\tag{12}$$

状态空间是 $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

4. 离散时间的动力系统

第四步求解模型：

第四步是求解模型．存在一点平衡点(0，0)位于两条直线的交点，

$$kwx_1 + kcx_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0.$$

通过令 $\Delta x_1 = 0$ 和 $\Delta x_2 = 0$ 得到稳定态方程．图 4-9 给出了向量场的图．

$$F(x) = (-kwx_1 - kcx_2, x_1 - x_2).$$

似乎解将趋于平衡态，但这一点很难证明．如果 k，c 和 w 很大，则平衡态可能不稳定，这点也同样难以证明．

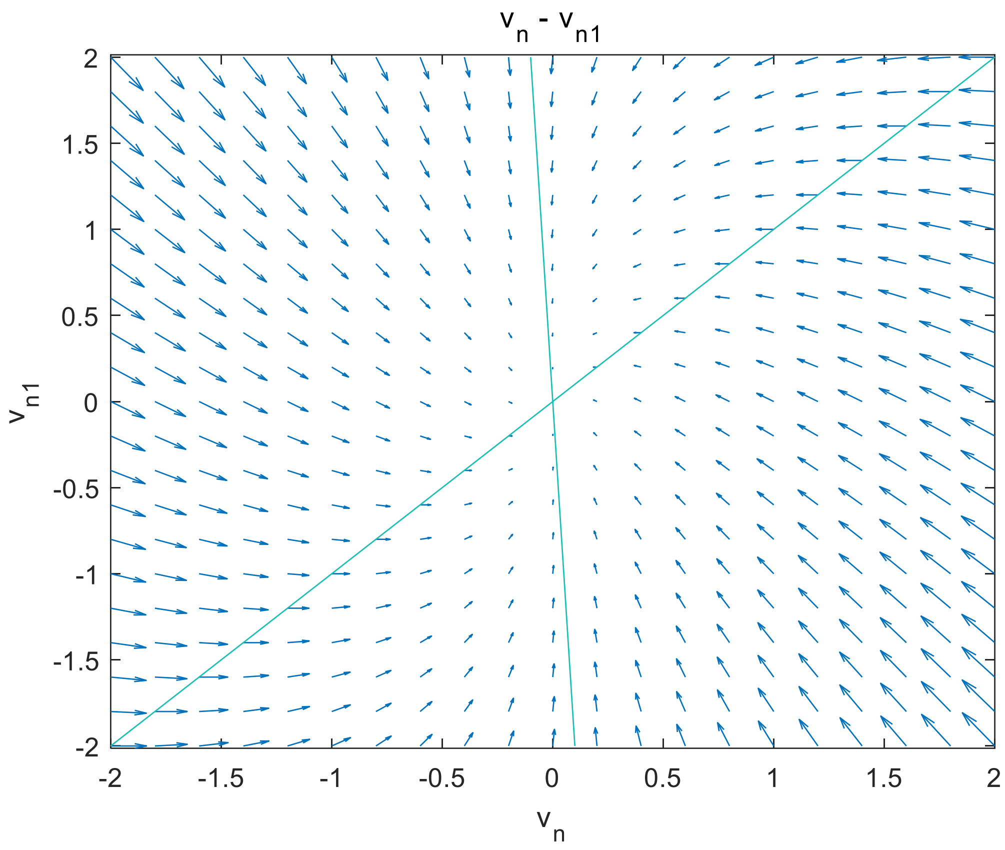
在我们的对接问题中，我们已将速度的改变 Δv_n 表达成两部分的和．一部分表示发生在读速度指示器与调节加速度控制器之间的速度改变．假设这段时间很短．实际上假设 c 比 w 小很多．如果 v_n 和 v_{n-1} 差别不大，近似式

$$\Delta v_n \approx -kwv_n$$

应该成立．差分方程

$$\Delta x_1 = -kwx_1$$

类似于例 4.4 的差分式，对任意的 $kw<2$ 我们将得到一个稳定的平衡态．如果 $kw<1$，我们将逼近这个平衡态，而不会越过它．



4. 离散时间的动力系统

第五步回答问题：

只要控制调节不是太剧烈，则控制策略将起作用．进一步，两次调节之间间隔的时间越长，调节幅度必须越小．而且，它们之间呈反比．如果两次调节之间的间隔时间增加两倍，则调节幅度可以减半．特别地，如果我们每 10 秒钟调节一次，则我们可以设置加速度控制在 1/10 的应设置的速度值，以免超过目标速度零．为了容许人工和仪器的误差，我们应该设置控制值稍微低些——比如，速度的 1/15 或 1/20．更频繁的调节需要对接近速度指示器更频繁的观测且更注意操作部分，但是确实可以实现在控制之下对更大推动力的成功管理．这大概是有利的．

作业

重新考虑例 4.1 的树木问题．现在假设

$$\frac{r_2}{a_2} < \frac{r_1}{b_1} \quad 及 \quad \frac{r_1}{a_1} \geqslant \frac{r_2}{b_2}.$$

(a)确定在状态空间内 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$，每个平衡态的位置(x_1, x_2).

(b)画此时的向量场.

(c)确定每个平衡态是稳定的还是不稳定的.

(d)假设开始有同样数量的硬材树和软材树．关于这两种树种的将来这个模型能预测些什么?