



## 第二章 图形基元的显示

- 扫描转换 将图形描述转换成用像素矩阵表示的过程
- 图形基元（输出图形元素） 图形系统能产生的最基本图形
- 线段、圆、椭圆、多边形

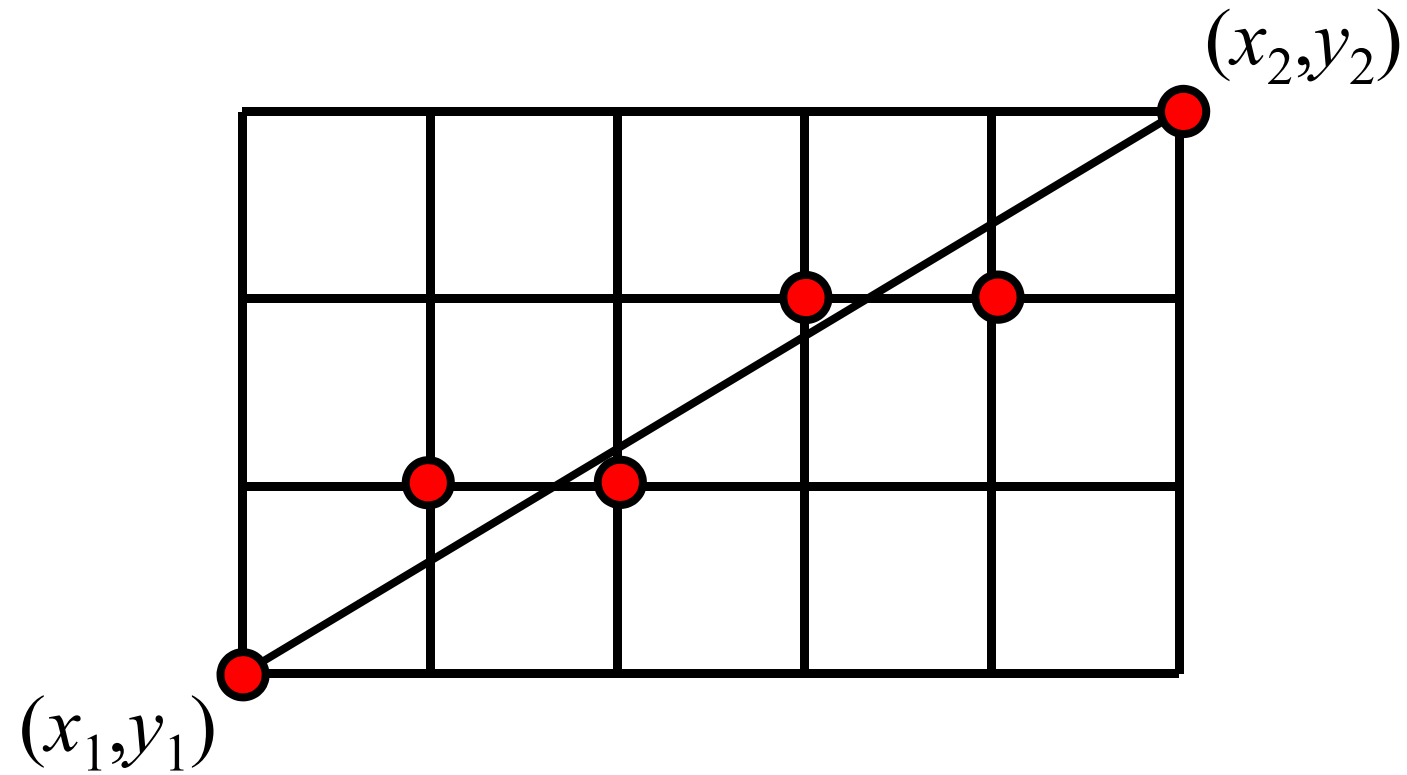


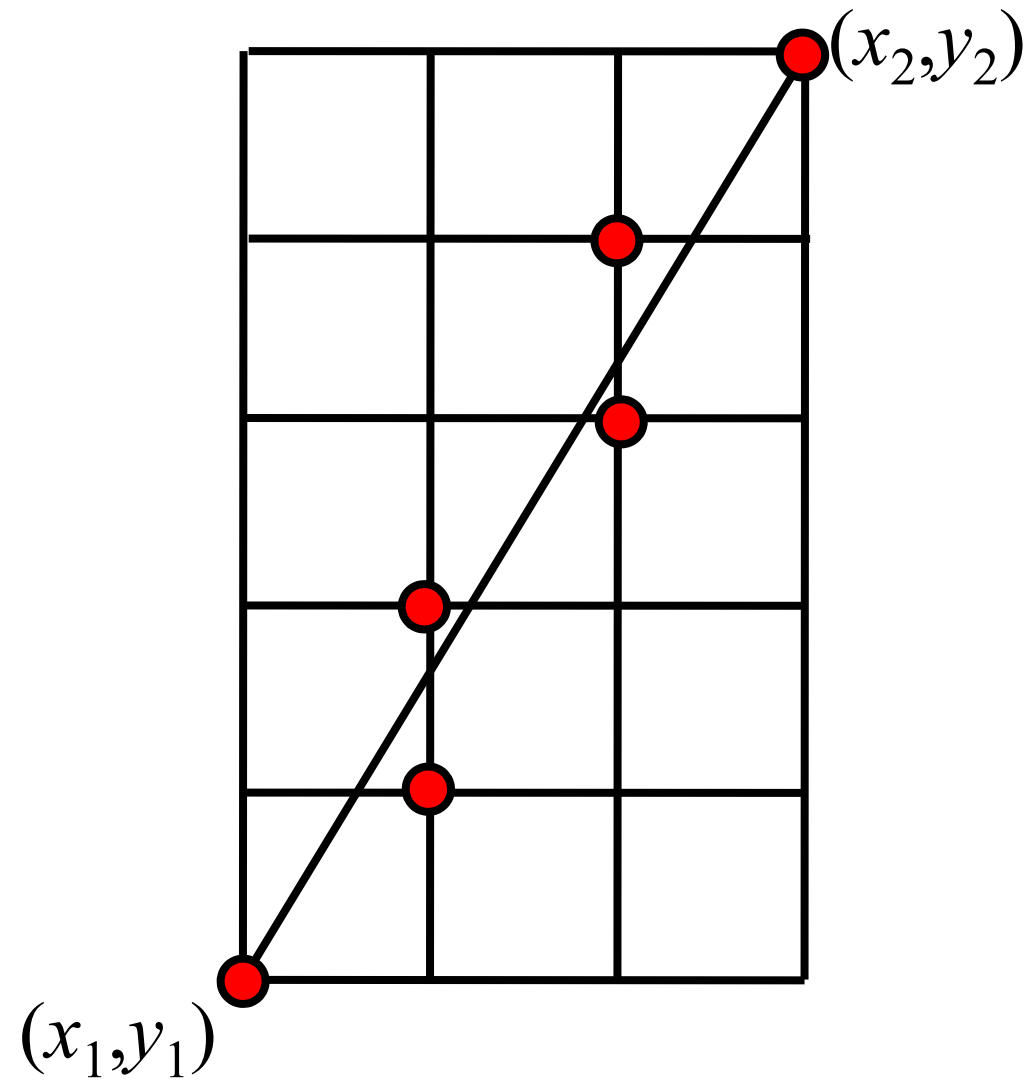
- **第一节 直线扫描转换算法**
- **第二节 圆的扫描转换算法**
- **第三节 椭圆扫描转换算法**
- **第四节 区域填充**



# 第一节 直线扫描转换算法

- DDA直线扫描转换算法
- 中点画线法
- Bresenham画线算法







# 1.DDA线段扫描转换算法

设待画线段两端点的坐标值 $(x_1, y_1)$ 和 $(x_2, y_2)$ , 假定

$$x_1 < x_2$$

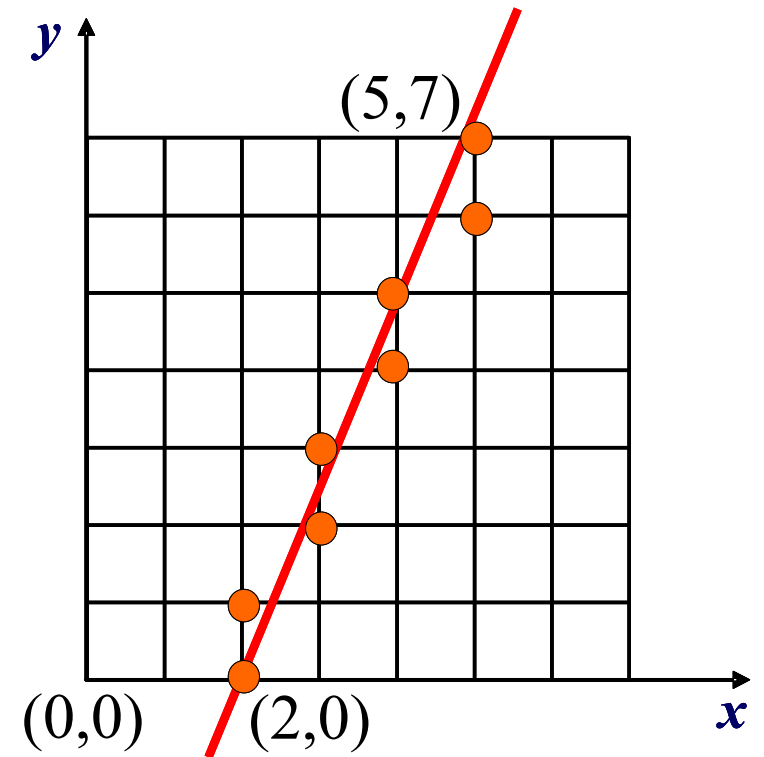
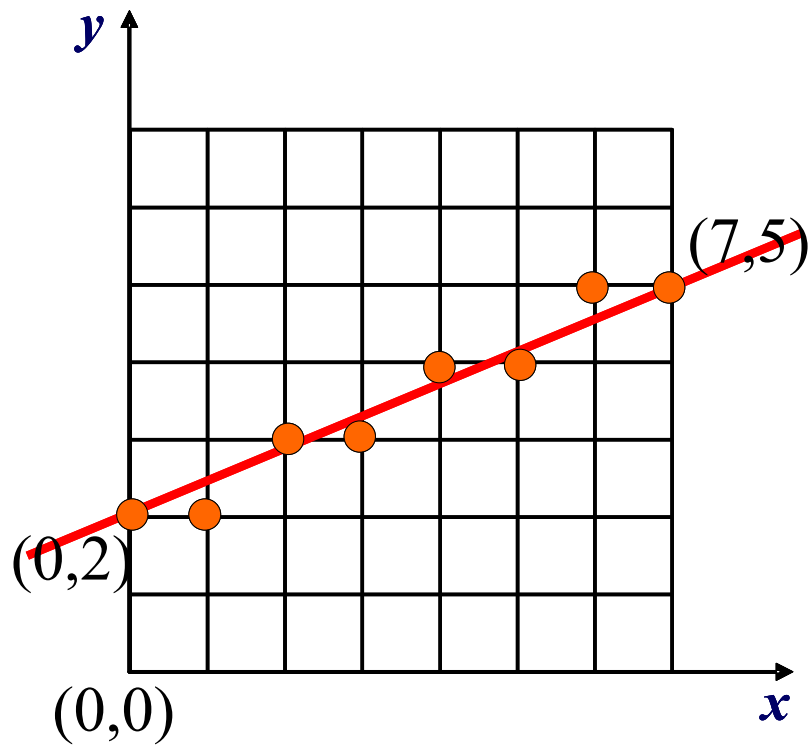
$$y = mx + b$$

$$m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

$$b = (x_2 y_1 - x_1 y_2) / (x_2 - x_1)$$

$|m| \leq 1$ , 对 $x$ 每增1取允许的各整数值:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$





```
void DDALine(int x1,int y1,int x2,int y2)  
{  
    double dx,dy,e,x,y;  
    dx=x2-x1;  
    dy=y2-y1;  
    e=(fabs(dx)>fabs(dy))?fabs(dx):fabs(dy);  
    dx/=e;  
    dy/=e;  
    x=x1;  
    y=y1;  
    for(int i=1;i<=e;i++)  
    {  
        SetPixel((int)(x+0.5), (int)(y+0.5));  
        x+=dx;  
        y+=dy;  
    }  
}
```

2021-12-12





## 2.中点画线法

假定直线斜率在**0**、**1**之间， $x = x_i$ 时已选 $(x_i, y_i)$ 像素，

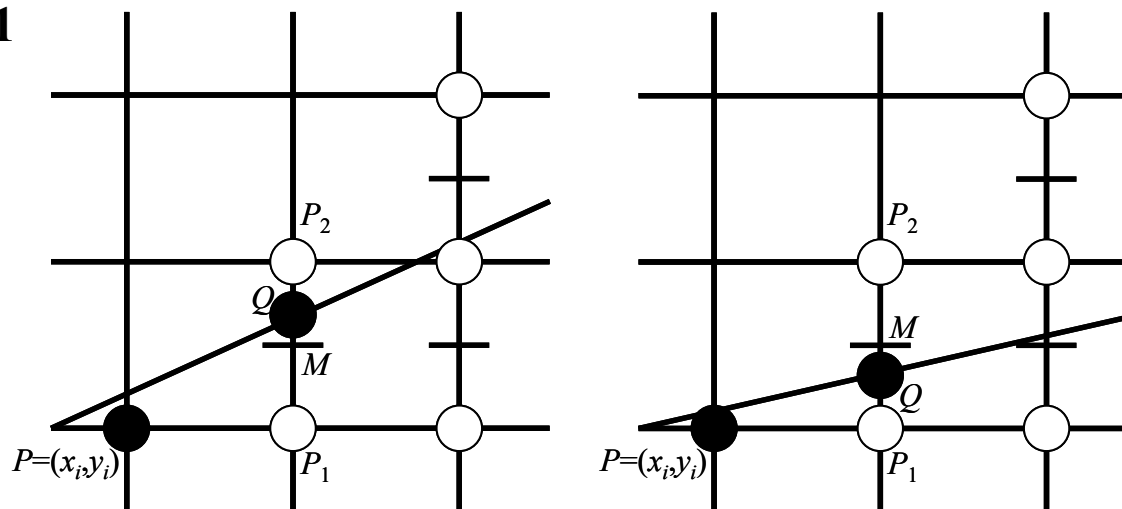
确定 $x = x_i + 1$ 与直线最近的像素

$P_1(x_i + 1, y_i)$ 、 $P_2(x_i + 1, y_i + 1)$

$M$ 表示 $P_1$ 与 $P_2$ 的中点， $M = (x_i + 1, y_i + 0.5)$ 。

$Q$ 是直线与垂直线 $x = x_i + 1$ 的交点

若 $M$ 在 $Q$ 的下方，则 $P_2$ 离直线近，应取为下一个像素；  
否则应取 $P_1$





起点和终点分别为  $(x_0, y_0)$  和  $(x_1, y_1)$ 。

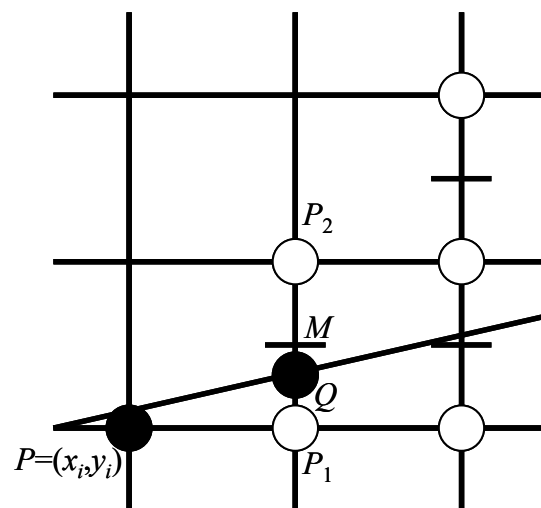
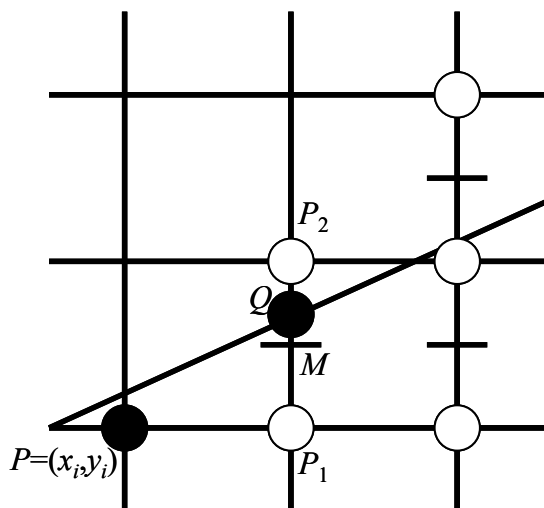
其所在直线  $F(x, y) = ax + by + c$

其中，  $a = y_0 - y_1$ ，  $b = x_1 - x_0$ ，  $c = x_0 y_1 - x_1 y_0$ 。

直线上的点，  $F(x, y) = 0$ ；

直线上方的点，  $F(x, y) > 0$ ；

直线下方的点，  $F(x, y) < 0$ 。





Q在M的上方还是下方，只要把M代入 $F(x, y)$ ，并判断它的符号。

$$d = F(M) = F(x_i+1, y_i+0.5)$$

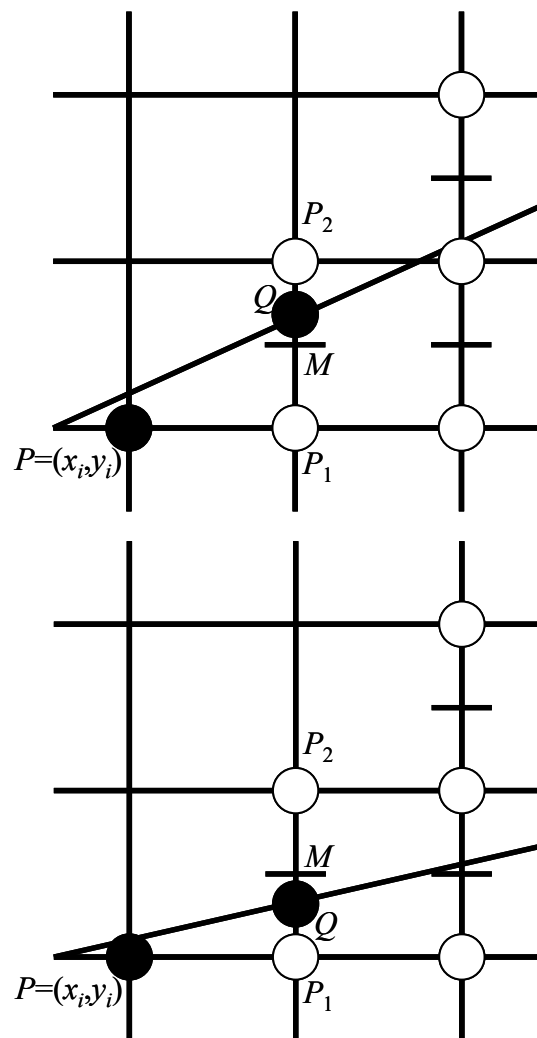
$$= a(x_i+1) + b(y_i+0.5) + c$$

当  $d < 0$  时，M在直线下方(即在Q的下方)，应取右上方的 $P_2$ 。

当  $d > 0$  时，则取正右方的 $P_1$ 。

当  $d = 0$  时，二者一样合适，取 $P_1$ 。

$d$ 是 $x_i, y_i$ 的线性函数，因此可采用增量计算，提高运算效率。



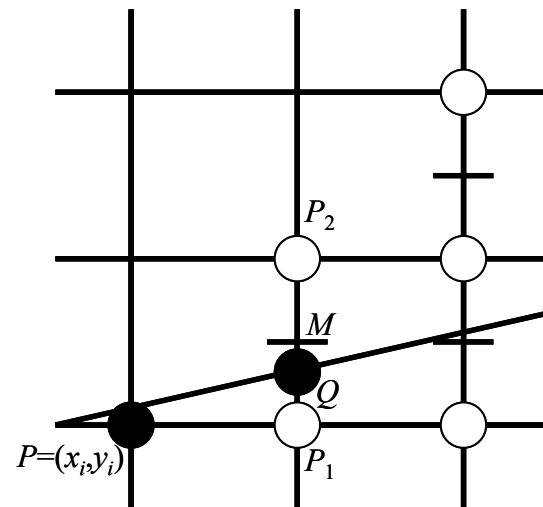
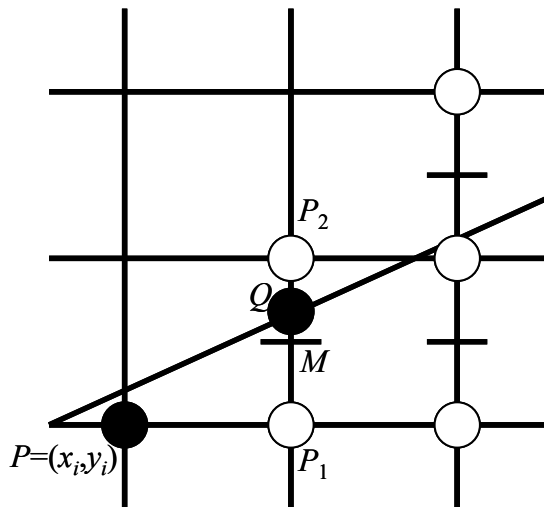


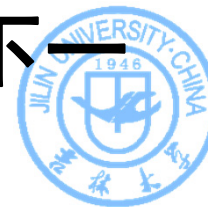
对每一个像素计算判别式 $d$ ，根据它的符号确定**下一**像素。

若  $d \geq 0$  时，取正右方像素 $P_1$ ，判断**再下一个**像素应取哪个，应计算

$$d_1 = F(x_i + 2, y_i + 0.5) \\ = a(x_i + 2) + b(y_i + 0.5) + c = d + \mathbf{a}$$

故 $d$ 的增量为 $a$ 。

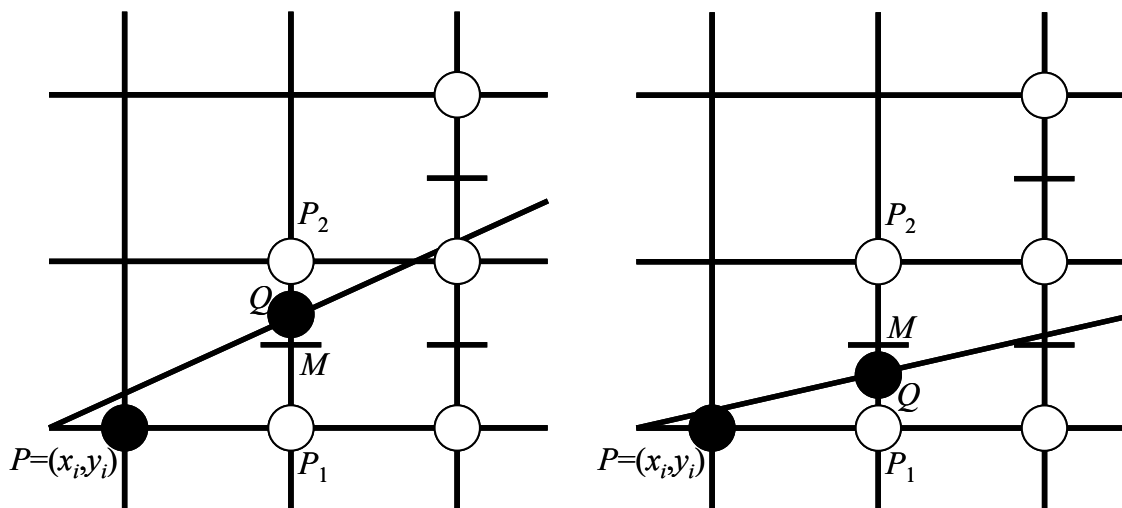




若  $d < 0$  时，则取右上方像素  $P_2$ 。要判断再下一个像素，则要计算

$$\begin{aligned} d_2 &= F(x_i+2, y_i+1.5) \\ &= a(x_i+2) + b(y_i+1.5) + c \\ &= d + a + b \end{aligned}$$

故在第二种情况， $d$  的增量为  $a + b$





再看d的初始值。显然，第一个像素应取左端点 $(x_0, y_0)$ ，相应的判别式值为

$$\begin{aligned}d_0 &= F(x_0 + 1, y_0 + 0.5) \\&= a(x_0 + 1) + b(y_0 + 0.5) + c \\&= ax_0 + by_0 + c + a + 0.5b \\&= F(x_0, y_0) + a + 0.5b\end{aligned}$$

但由于 $(x_0, y_0)$ 在直线上，故 $F(x_0, y_0)=0$ 。因此，d的初始值为 $d_0 = a + 0.5b$

为避免小数运算，考虑用 $2d$ 来代替 $d$ 的计算



```
void MidpointLine (int x0,int y0,int x1,int y1){
    int a,b,delta1,delta2,d,x,y ;
    a = y0 - y1;    b = x1 - x0;    d = 2 * a + b ;
    delta1 = 2 * a ;    delta2 = 2 *( a + b);
    x = x0 ;    y = y0 ;
    SetPixel(x,y);
    while( x<x1 ) {
        if( d<0 ) {
            x ++;  y ++;
            d+= delta2;
        }
        else {
            x ++;
            d+= delta1;
        }
        SetPixel(x,y);
    } /* while */
} /* MidpointLine */
```

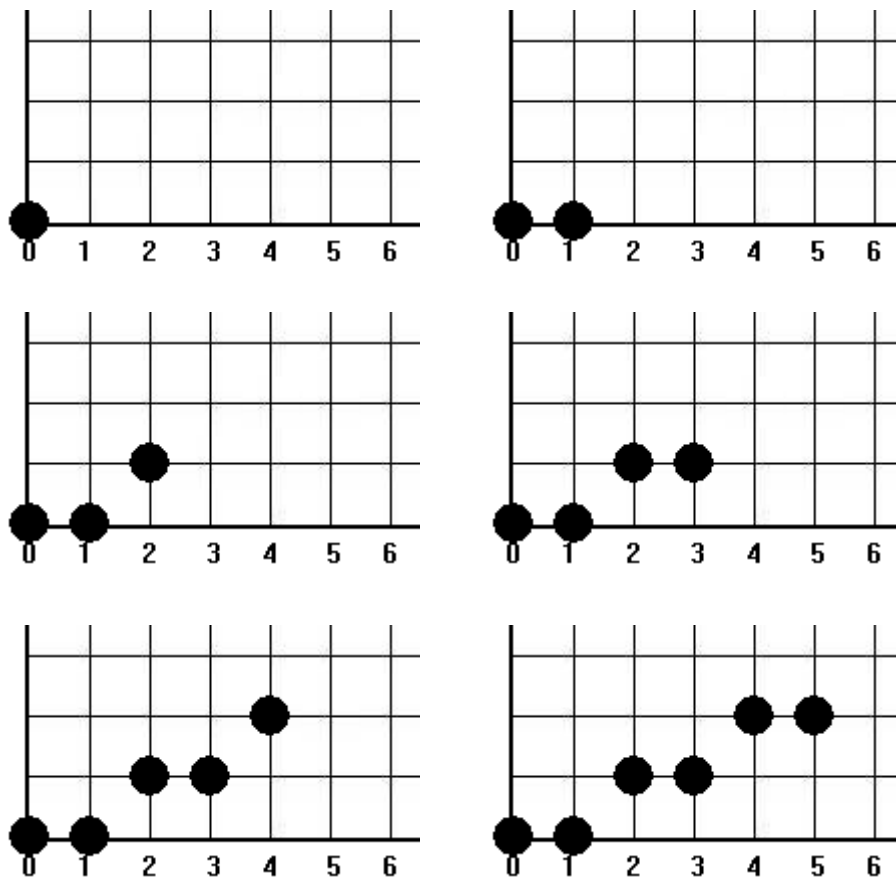
2021-12-12



例:  $(0, 0)$ 、 $(5, 2)$   $a = y_0 - y_1 = -2$ ,

$b = x_1 - x_0 = 5, d_0 = 2 * a + b = 1$ ,

$\text{delta1} = 2a = -4, \text{delta2} = 2(a+b) = 6$



$x$	$y$	$d$	$\Delta d$
0	0	1	-4
1	0	-3	6
2	1	3	-4
3	1	-1	6
4	2	5	-4
5	2	1	

```

if( d < 0 ) {
    x++; y++; d += delta2;
}
else {
    x++; d += delta1;
}

```

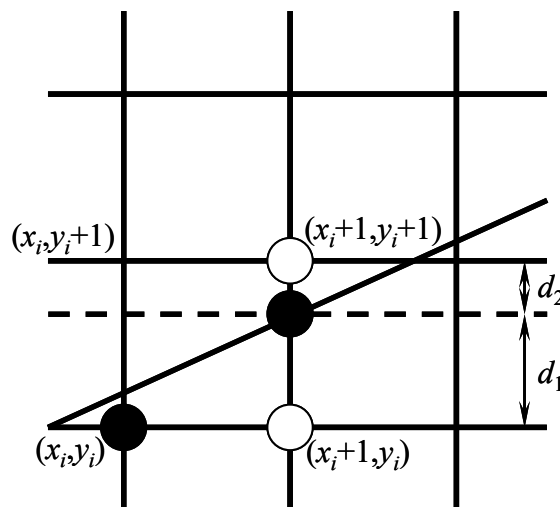




### 3. Bresenham画线算法

斜率 $m$ 在0到1之间，并且  $x_2 > x_1$

设在第 $i$ 步已经确定第 $i$ 个像素点是  $(x_i, y_i)$ ，现在看第 $i+1$ 步如何确定第 $i+1$ 个像素点的位置。





$$d_1 = y - y_i = m(x_i + 1) + b - y_i$$

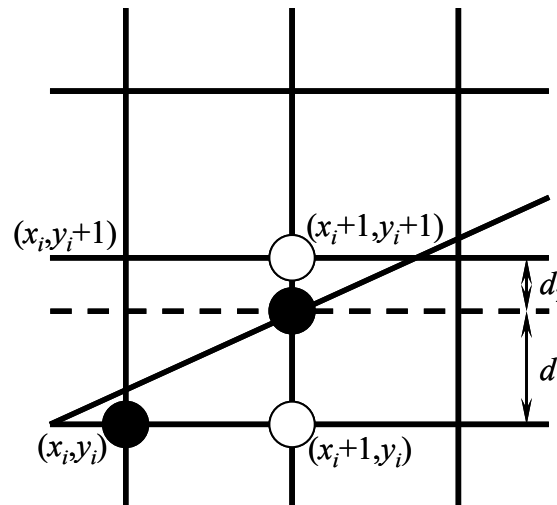
$$d_2 = (y_i + 1) - y = (y_i + 1) - m(x_i + 1) - b$$

$$d_1 - d_2 = 2m(x_i + 1) - 2y_i + 2b - 1$$

$d_1 > d_2$ , 下一个像素点取  $(x_i + 1, y_i + 1)$

$d_1 < d_2$ , 下一个像素点取  $(x_i + 1, y_i)$

$d_1 = d_2$ , 取两像素点中的任意一个





$$d_1 - d_2 = 2\textcolor{red}{m}(x_i + 1) - 2y_i + 2b - 1$$

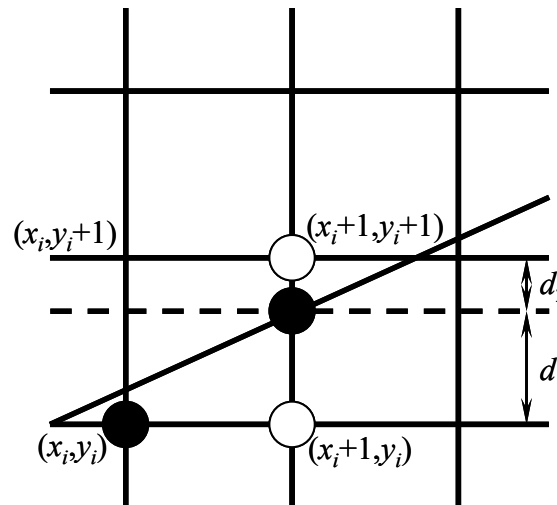
$$p_i = \Delta x(d_1 - d_2)$$

$$= 2\Delta y \cdot x_i - 2\Delta x \cdot y_i + \textcolor{red}{2\Delta y} + \textcolor{red}{\Delta x(2b - 1)}$$

$$= 2\Delta y \cdot x_i - 2\Delta x \cdot y_i + c$$

$$p_{i+1} = 2\Delta y \cdot x_{i+1} - 2\Delta x \cdot y_{i+1} + c$$

$$p_{i+1} - p_i = 2\Delta y - 2\Delta x(y_{i+1} - y_i)$$





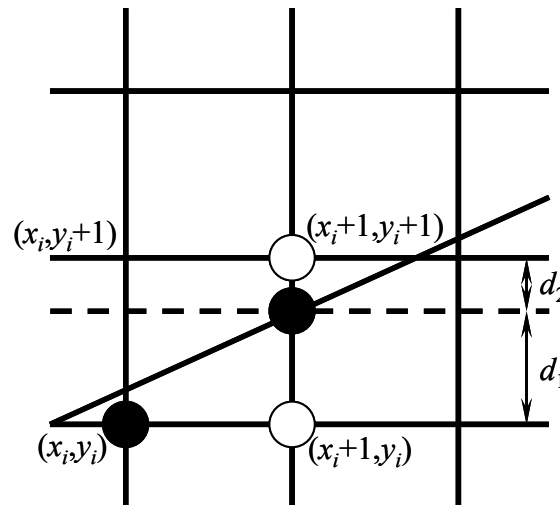
$$p_i = 2\Delta y \cdot x_i - 2\Delta x \cdot y_i + c$$

$$p_{i+1} = 2\Delta y \cdot x_{i+1} - 2\Delta x \cdot y_{i+1} + c$$

$$p_{i+1} - p_i = 2\Delta y - 2\Delta x(y_{i+1} - y_i)$$

$p_i \geq 0$ , 应取  $y_{i+1} = y_i + 1$ ,  $p_{i+1} = p_i + 2(\Delta y - \Delta x)$

$p_i < 0$ , 应取  $y_{i+1} = y_i$ ,  $p_{i+1} = p_i + 2\Delta y$





确定 $P_1$ ,

$$x_1 = x_1, y_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} x_1 + b \Rightarrow \Delta x \cdot y_1 = \Delta y \cdot x_1 + \Delta x \cdot b$$

令 $i=1$ , 可计算求出:

$$p_i = 2\Delta y \cdot x_i - 2\Delta x \cdot y_i + 2\Delta y + \Delta x(2b - 1)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= 2\Delta y \cdot x_1 - 2\Delta x \cdot y_1 + 2\Delta y + \Delta x(2b - 1) \\ &= 2\Delta y \cdot x_1 - 2\Delta y \cdot x_1 - 2\Delta x \cdot b + 2\Delta y + 2\Delta x \cdot b - \Delta x \\ &= 2\Delta y - \Delta x \end{aligned}$$



```
void BresenhamLine(int x1,int y1,int x2,int y2){
```

```
    int x,y,dx,dy,p;
```

```
    x=x1;
```

```
    y=y1;
```

```
    dx=x2-x1;
```

```
    dy=y2-y1;
```

```
    p=2*dy-dx;
```

```
    for(;x<=x2;x++) {
```

```
        SetPixel(x,y);
```

```
        if(p>=0) {
```

```
            y++;
```

```
            p+=2*(dy-dx);
```

```
        }
```

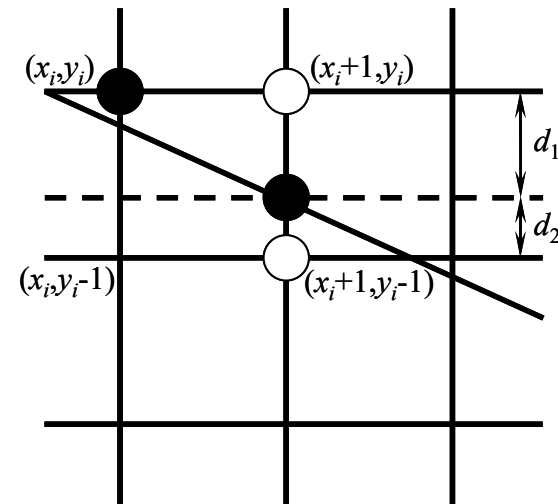
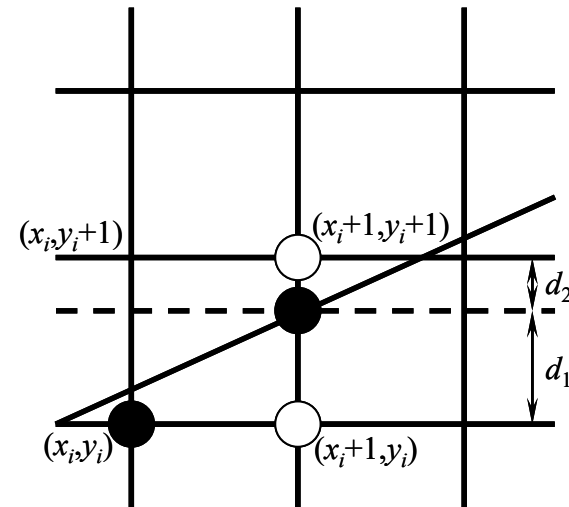
```
        else {
```

```
            p+=2*dy;
```

```
        }
```

```
    }
```

```
}
```



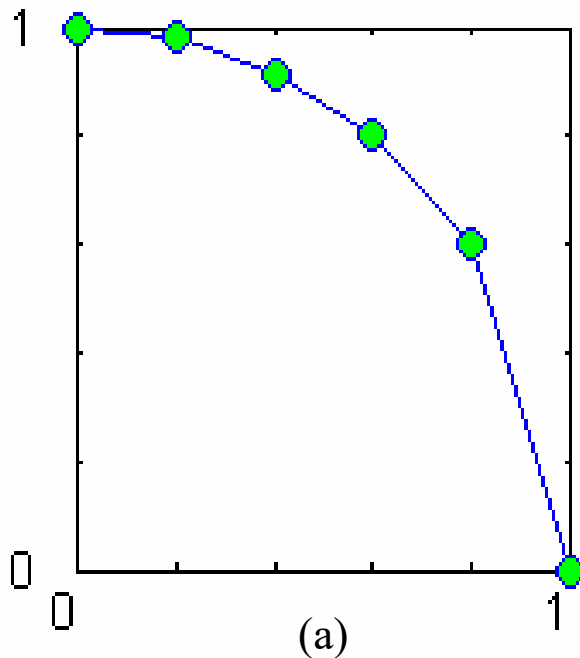


## 第二节 圆的扫描转换算法

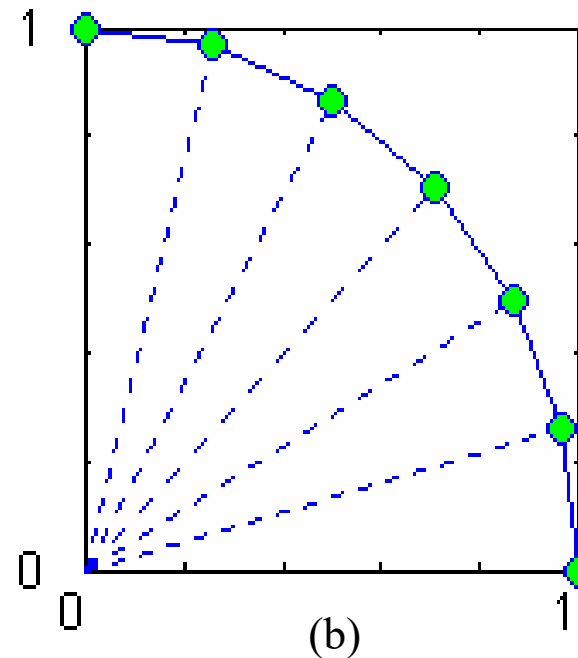
$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x = R \cos(\theta)$$

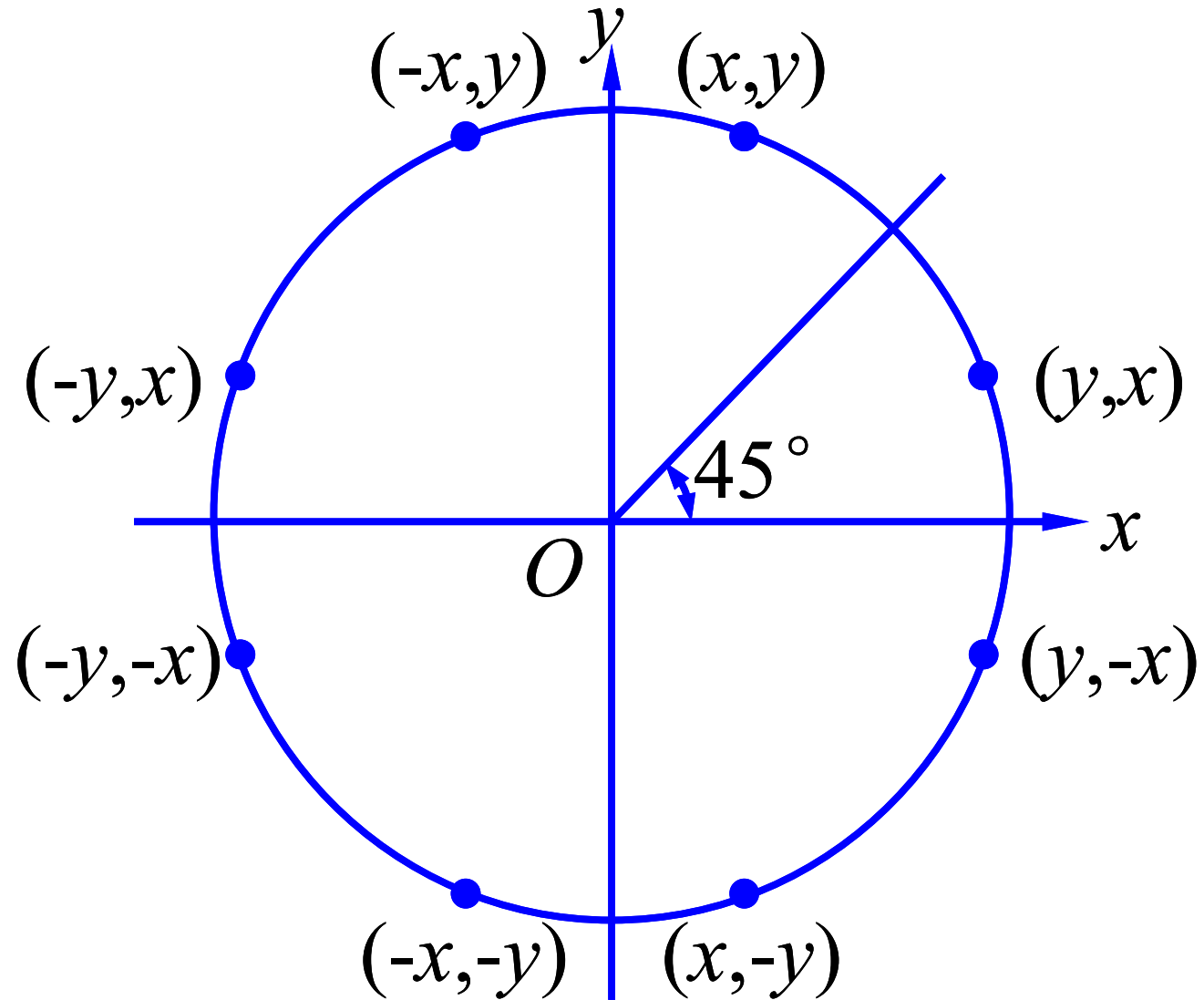
$$y = R \sin(\theta)$$



$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad 0 \leq x \leq 1$$



$$x = \cos \theta \quad y = \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$



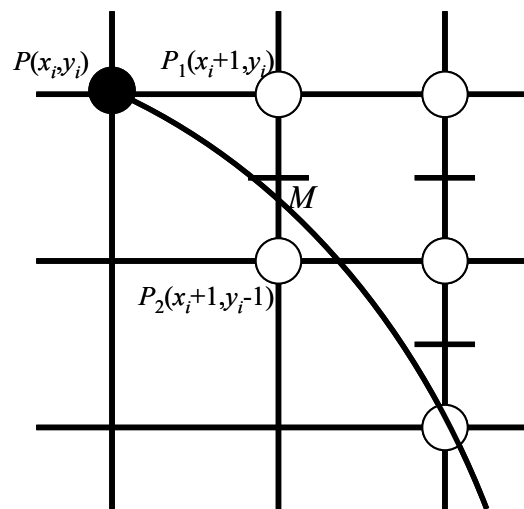
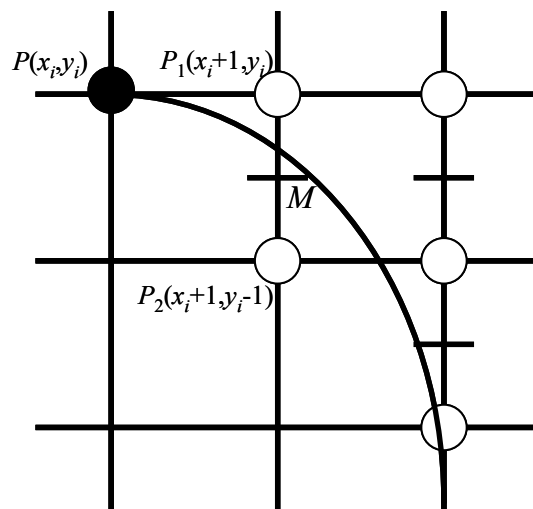




# 中点画圆法

讨论如何从点 $(0, R)$ 至 $(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$ 的 $1/8$ 圆周

若 $x$ 坐标为 $(x_i, y_i)$ , 下一个像素只能是 $(x_i+1, y_i)$  的 $P_1$ 点或  $(x_i+1, y_i-1)$  的 $P_2$ 点





构造函数:  $F(x,y)=x^2+y^2-R^2$

圆上的点,  $F(x,y)=0$

圆外的点,  $F(x,y)>0$

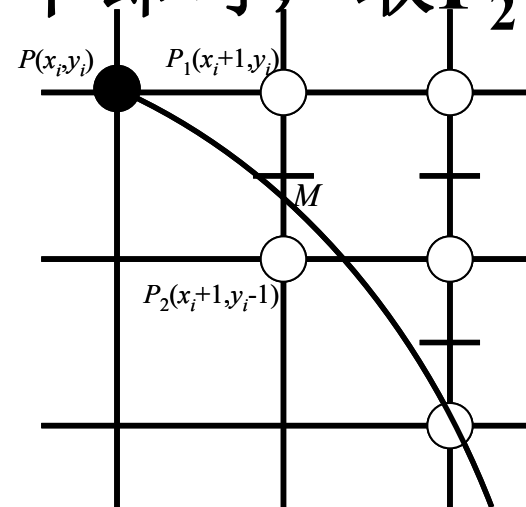
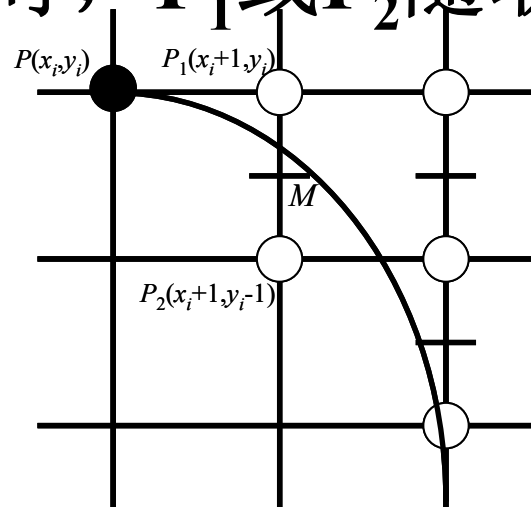
圆内的点,  $F(x,y)<0$

$P_1$ 和 $P_2$ 的中点为  $M=(x_i+1,y_i-0.5)$

$F(M)<0$ 时,  $M$ 在圆内, 取 $P_1$

$F(M)>0$ 时,  $M$ 在圆外, 取 $P_2$

$F(M)=0$ 时,  $P_1$ 或 $P_2$ 随取一个即可, 取 $P_2$





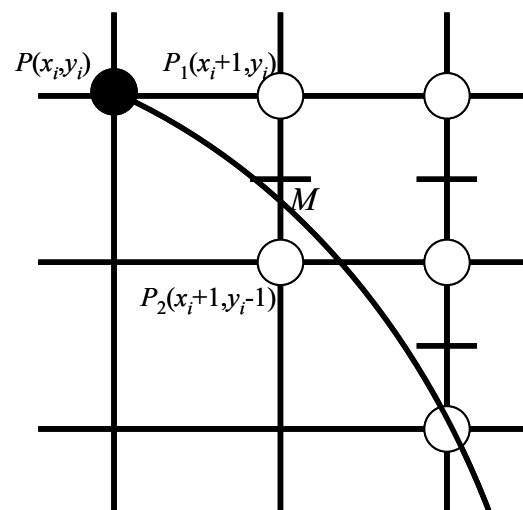
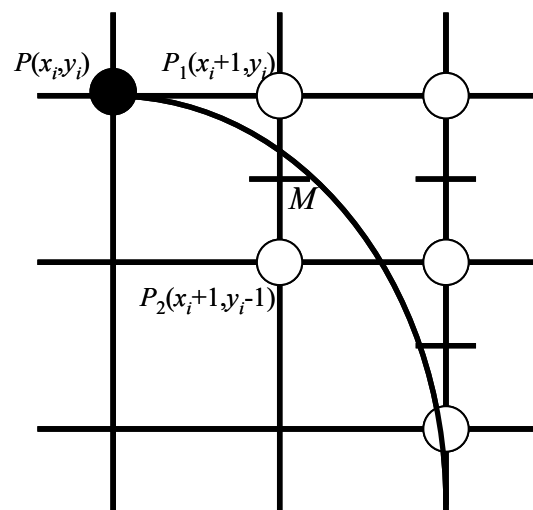
构造判别式  $d = F(M) = F(x_i + 1, y_i - 0.5)$

$$= (x_i + 1)^2 + (y_i - 0.5)^2 - R^2$$

若  $d < 0$ ，取  $P_1$  作为下一个像素，而且再下一个像素的判别式为

$$d' = F(x_i + 2, y_i - 0.5)$$

$$= (x_i + 2)^2 + (y_i - 0.5)^2 - R^2 = d + 2x_i + 3$$



若  $d \geq 0$ ，应取  $P_2$  作为下一个像素，而且再下一个像素的判别式

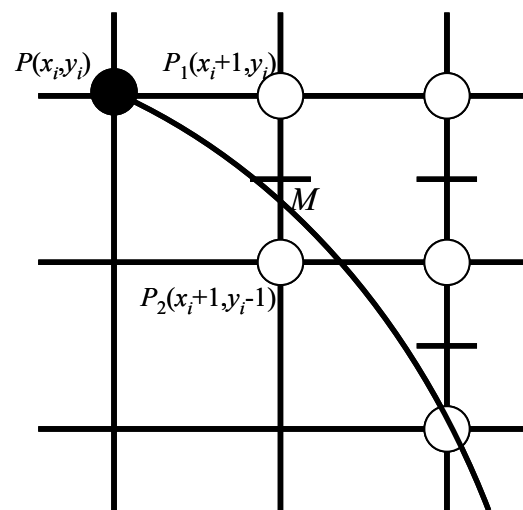
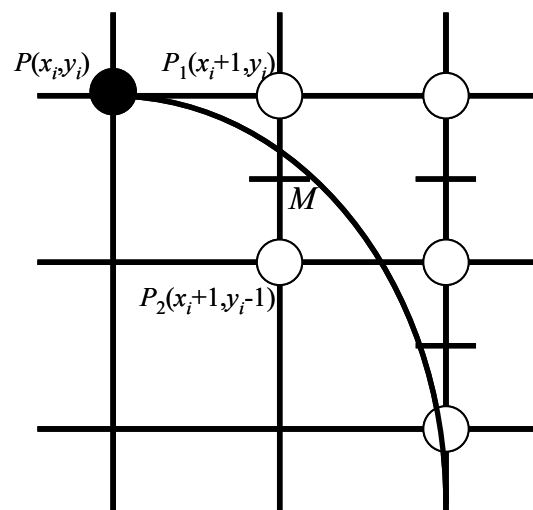


$$d' = F(x_i + 2, y_i - 1.5)$$

$$= (x_i + 2)^2 + (y_i - 1.5)^2 - R^2 = d + 2x_i - 2y_i + 5$$

第一个像素是  $(0, R)$ ，判别式  $d$  的初始值为

$$d_0 = F(1, R - 0.5) = 1 + (R - 0.5)^2 - R^2 = 1.25 - R.$$





```
void MidpointCircle(int R){  
    int x,y;  
    double d;  
    x=0;y=R;d=1.25-R;  
    SetPixel(x,y);  
    while(x<y) {  
        if(d<0) {  
            d+=2*x+3;  
            x++;  
        }  
        else {  
            d+=2*(x-y)+5;  
            x++;  
            y--;  
        }  
        SetPixel(x,y);  
    }  
}
```

2021-12-12



## 算法三：中点画圆法改进一

在上述算法中，使用了浮点数来表示判别式 $d$ 。

简化算法，在算法中全部使用整数，使用 $e=d-0.25$ 代替 $d$ 。

初始化运算 $d=1.25-R$ 对应于 $e=1-R$ 。

由于 $e$ 的初值为整数，且在运算过程中的增量也是整数，故 $e$ 始终是整数，所以

判别式 $d<0$ 对应于 $e<-0.25$ ，等价于 $e<0$ 。

判别式 $d\geq 0$ 对应于 $e\geq -0.25$ ，等价于 $e\geq 0$ 。



```
void MidpointCircle1(int R)
{   int x,y,d;
    x=0;y=R;d=1-R;
    SetPixel(x,y);
    while(x<y)
    {
        if(d<0)
        {d+=2*x+3;x++;}
        else
        {d+=2*(x-y)+5;x++;y--;}
        SetPixel(x,y);
    }
}
```

# 算法三：中点画圆法改进二



设 $\Delta x = 2 * x + 3$ ,  $\Delta y = -2 * y + 2$ , 则

if( $d < 0$ )

{ $d += \Delta x$ ;  $\Delta x += 2$ ;  $x++$ ; }

else

{ $d += (\Delta x + \Delta y)$ ;  $\Delta x += 2$ ;  $\Delta y += 2$ ;  $x++$ ;  $y--$ ; }

每当 $x$ 递增1,  $\Delta x$ 递增2。

每当 $y$ 递减1,  $\Delta y$ 递增2。

由于初始像素为(0,R), 所以 $\Delta x$ 的初值为3,  $\Delta y$ 的初值为-2R+2。

if( $d < 0$ )

{ $d += 2 * x + 3$ ;  $x++$ ; }

else

{ $d += 2 * (x - y) + 5$ ;  $x++$ ;  $y--$ ; }

2021-12-12





```
void MidpointCircle2(int R){
    int x,y,deltax,deltay,d;
    x=0;y=R;d=1-R;
    deltax=3;deltay=2-R-R;
    SetPixel(x,y);
    while(x<y){
        if(d<0) {
            d+=deltax; deltax+=2;
            x++;
        }
        else {
            d+=(deltax+deltay);
            deltax+=2;deltay+=2;
            x++;y--;
        }
        SetPixel(x,y);
    }
}
```

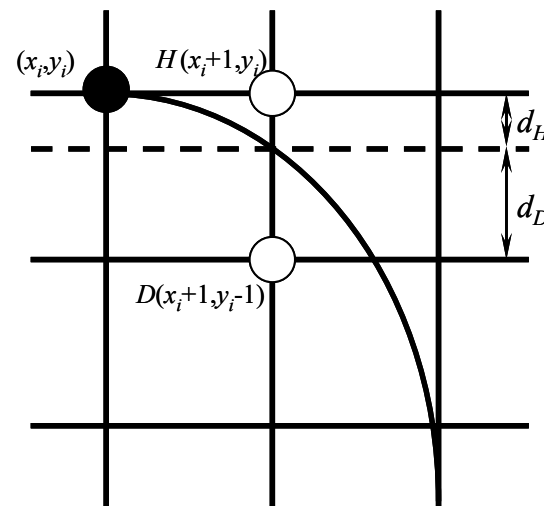
2021-12-12

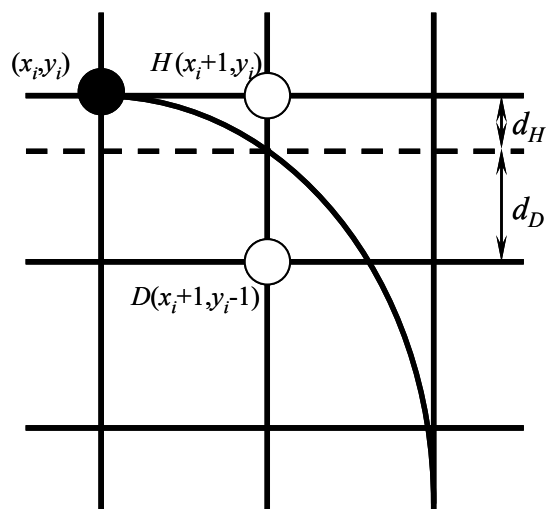


## 算法四： Bresenham画圆算法

在 $0 \leq x \leq y$ 的1/8圆周上，像素坐标 $x$ 值单调增加， $y$ 值单调减少。

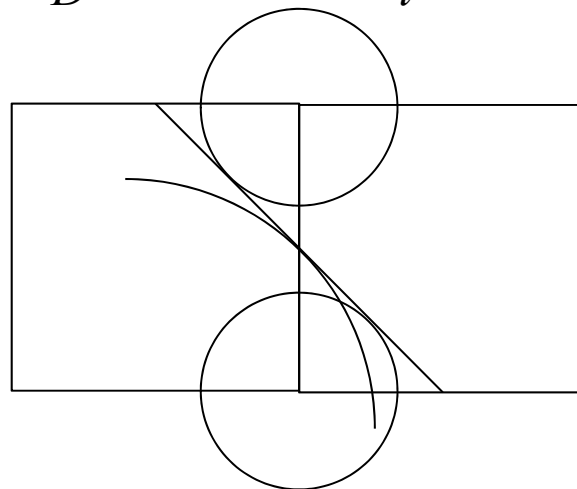
设第 $i$ 步已确定  $(x_i, y_i)$  是要画圆上的像素点，看第 $i+1$ 步像素点  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  应如何确定。下一个像素点只能是  $(x_i+1, y_i)$  或者  $(x_i+1, y_i-1)$  中的一个





$$d_H = (x_i + 1)^2 + y_i^2 - R^2$$

$$d_D = R^2 - (x_i + 1)^2 - (y_i - 1)^2$$

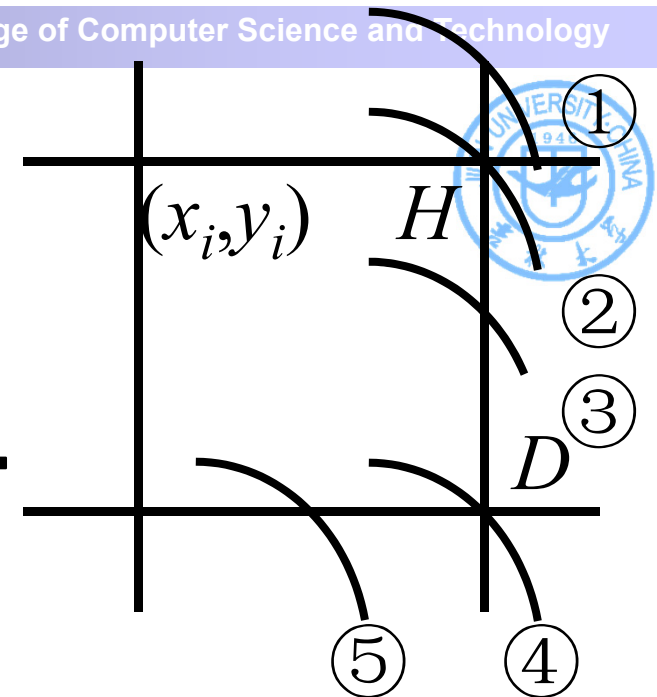


构造判别式：

$$p_i = d_H - d_D$$

$$= ((x_i + 1)^2 + y_i^2 - R^2) - (R^2 - (x_i + 1)^2 - (y_i - 1)^2)$$

$$= 2(x_i + 1)^2 + 2y_i^2 - 2y_i - 2R^2 + 1$$



构造判别式:  $p_i = d_H - d_D$

1. 精确圆弧是③, 则  $d_H > 0$  和  $d_D > 0$ .

若  $p_i < 0$ , 即  $d_H < d_D$  应选 H 点。

若  $p_i \geq 0$ , 即  $d_H \geq d_D$  应选 D 点。

2. 若精确圆弧是①或②, 显然 H 是应选择点, 而此时  $d_H \leq 0$ ,  $d_D > 0$ , 必有  $p_i < 0$ 。

3. 若精确圆弧是④或⑤, 显然 D 是应选择点, 而此时  $d_H > 0$ ,  $d_D \leq 0$ , 必有  $p_i > 0$ 。

得出结论:  $p_i$  做判别量,  $p_i < 0$  时, 选 H 点为下一个像素点,  $p_i \geq 0$  时, 选 D 点为下一个像素点。



从 $p_i$ 计算 $p_{i+1}$

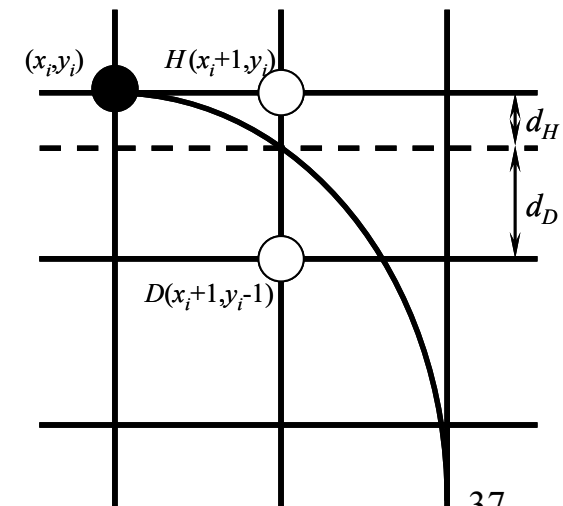
$$p_i = d_H - d_D$$

$$= ((x_i + 1)^2 + y_i^2 - R^2) - (R^2 - (x_i + 1)^2 - (y_i - 1)^2)$$

$$= 2(x_i + 1)^2 + 2y_i^2 - 2y_i - 2R^2 + 1$$

$$p_{i+1} = 2(x_{i+1} + 1)^2 + 2y_{i+1}^2 - 2y_{i+1} - 2R^2 + 1$$

$$p_{i+1} - p_i = 4x_i + 6 + 2(y_{i+1}^2 - y_i^2 - y_{i+1} + y_i)$$





从 $p_i$ 计算 $p_{i+1}$

$$p_i = 2(x_i + 1)^2 + 2y_i^2 - 2y_i - 2R^2 + 1$$

$$p_{i+1} - p_i = 2(y_{i+1}^2 - y_i^2 - y_{i+1} + y_i) + 4x_i + 6$$

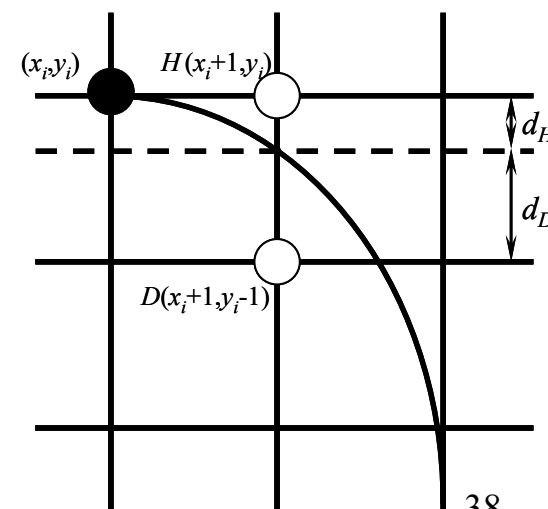
当 $p_i \geq 0$ 时, 应选**D**点, 即选

$$y_{i+1} = y_i - 1,$$

$$p_{i+1} = p_i - 4y_i + 4 + 4x_i + 6 = p_i + 4(x_i - y_i) + 10$$

当 $p_i < 0$ 时, 应选**H**点, 即选

$$y_{i+1} = y_i, p_{i+1} = p_i + 4x_i + 6$$

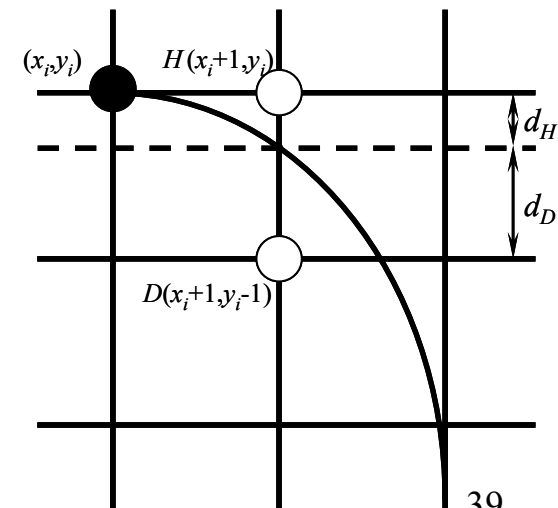




$$p_i = 2(x_i + 1)^2 + 2y_i^2 - 2y_i - 2R^2 + 1$$

画圆的起始点是 $(0, R)$ ，即 $x_1=0$ ， $y_1=R$ ，代入前式，令 $i=1$ ，就得到：

$$\begin{aligned} p_i &= 2(x_i + 1)^2 + 2y_i^2 - 2y_i - 2R^2 + 1 \\ &= 2(0 + 1)^2 + 2R^2 - 2R - 2R^2 + 1 \\ &= 3 - 2R \end{aligned}$$





```
void BresenhamCircle(int R){
```

```
    int x,y,p;
```

```
    x=0; y=R;
```

```
    p=3-2*R;
```

```
    for(;x<=y;x++){
```

```
        SetPixel(x,y);
```

```
        if(p>=0){
```

```
            p+=4*(x-y)+10;
```

```
            y--;
```

```
        }
```

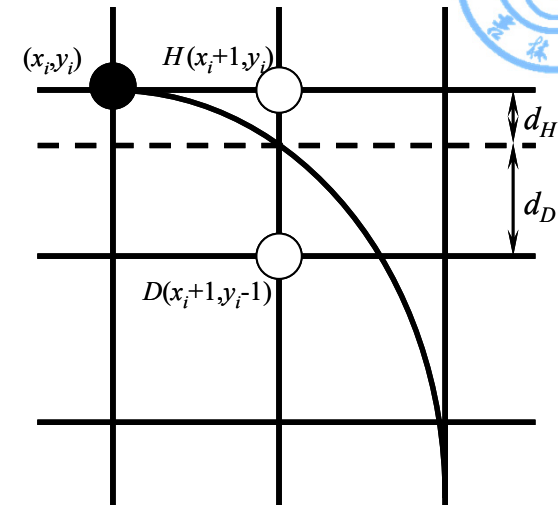
```
        else {
```

```
            p+=4*x+6;
```

```
        }
```

```
    }
```

```
} 2021-12-12
```



$$y_{i+1} = y_i - 1,$$

$$p_{i+1} = p_i + 4(x_i - y_i) + 10$$

$$y_{i+1} = y_i,$$

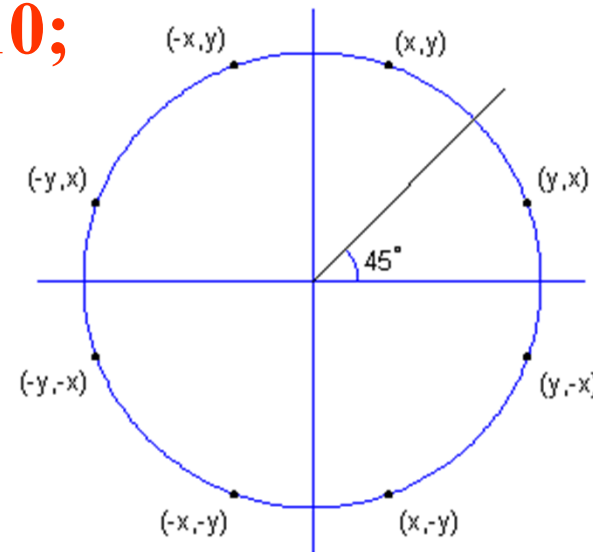
$$p_{i+1} = p_i + 4x_i + 6 \quad 40$$



```
void BresenhamCircle(int R){  
    int x,y,p;  
    x=0; y=R;  
    p=3-2*R;  
    for(;x<=y;x++){  
        SetPixel(x,y);  
        if(p>=0){  
            p+=4*(x-y)+10;  
            y--;  
        }  
        else {  
            p+=4*x+6;  
        }  
    }  
}
```

2021-12-12

只需修改语句  
SetPixel(x,y)，画八个对称的点，就可以画出全部圆周。  
若加一个平移，就可以画出圆心在任意位置的圆周。





## 第三节 椭圆扫描转换算法

中点画圆法推广到一般的二次曲线

$$F(x, y) = b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

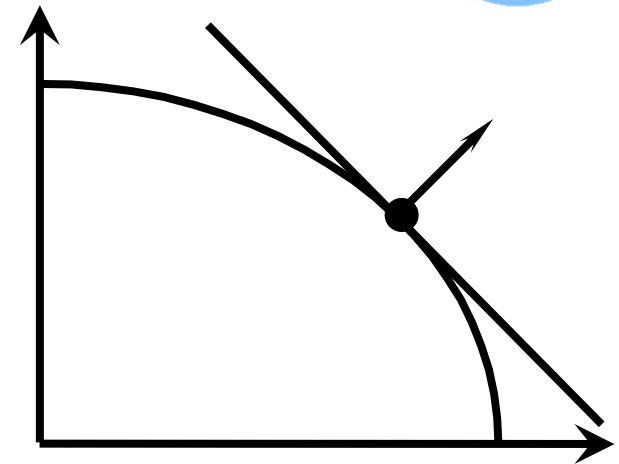
椭圆上一点(x,y)处的法向量为

$$N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j = 2b^2 x i + 2a^2 y j$$

(i, j)为x轴, y轴的单位向量

**上半部分:**  $(x_p, y_p), M(x_p + 1, y_p - 0.5)$ , 法向量的y的分量更大

**下半部分:**  $(x_p, y_p), M(x_p + 0.5, y_p - 1)$ , 法向量的x的分量更大





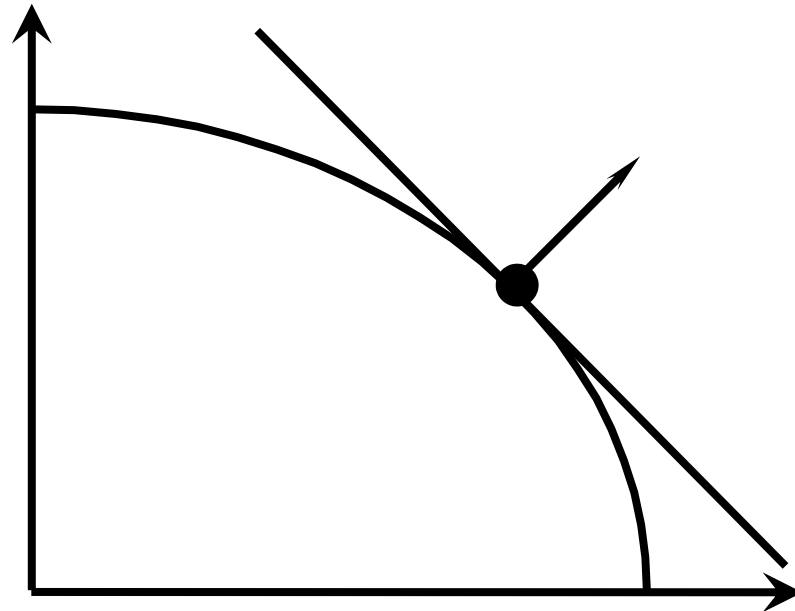
## 椭圆的扫描转换算法:

$$F(x, y) = b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2$$

法向量为  $(2b^2 x, 2a^2 y)$

当前中点:  $2b^2(x_i + 1) < 2a^2(y_i - 0.5)$  上半部分

下一个中点:  $2b^2(x_i + 1) > 2a^2(y_i - 0.5)$  下半部分



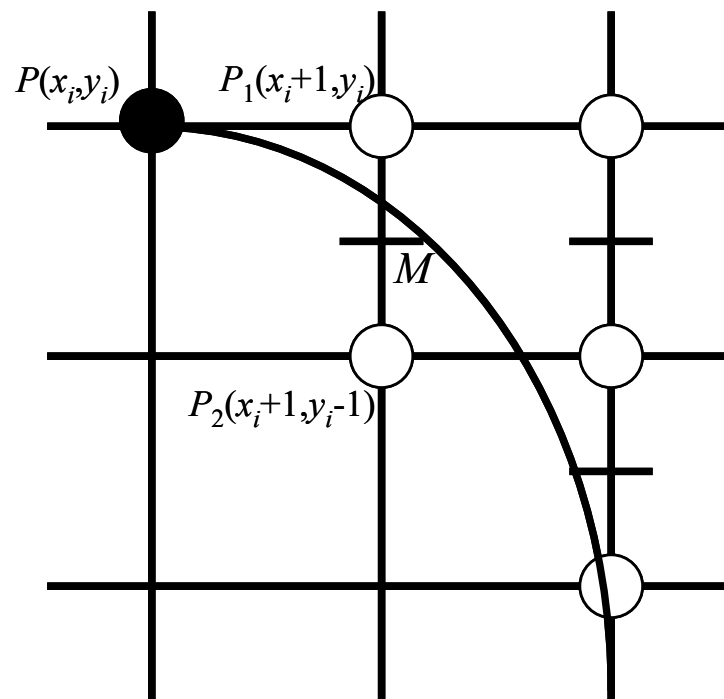


上半部分:  $(x_i, y_i), (x_i + 1, y_i - 0.5)$

$$d_1 = F(x_i + 1, y_i - 0.5) = b^2(x_i + 1)^2 + a^2(y_i - 0.5)^2 - a^2b^2$$

$d_1 < 0$ , 中点在椭圆内, 取正右方像素

$$\begin{aligned} d'_1 &= F(x_i + 2, y_i - 0.5) = b^2(x_i + 2)^2 + a^2(y_i - 0.5)^2 - a^2b^2 \\ &= d_1 + b^2(2x_i + 3) \end{aligned}$$





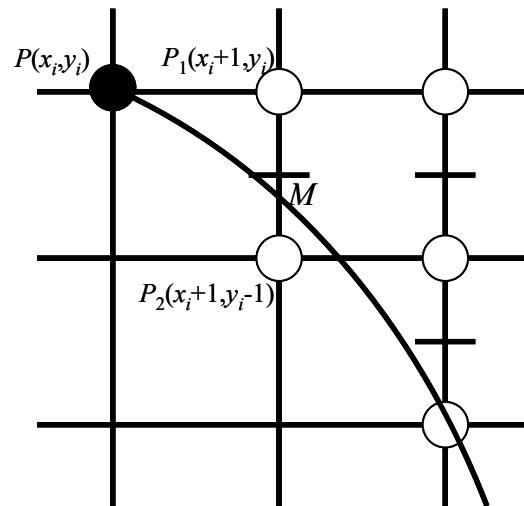
上半部分:  $(x_i, y_i), (x_i + 1, y_i - 0.5)$

$$d_1 = F(x_i + 1, y_i - 0.5) = b^2(x_i + 1)^2 + a^2(y_i - 0.5)^2 - a^2b^2$$

$d_1 > 0$ , 中点在椭圆外, 取右下方像素

$$\begin{aligned} d'_1 &= F(x_i + 2, y_i - 1.5) = b^2(x_i + 2)^2 + a^2(y_i - 1.5)^2 - a^2b^2 \\ &= d_1 + b^2(2x_i + 3) + a^2(-2y_i + 2) \end{aligned}$$

$$d_1 \text{ 初值 } d_1^0 = F(1, b - 0.5) = b^2 + a^2(-b + 0.25)$$





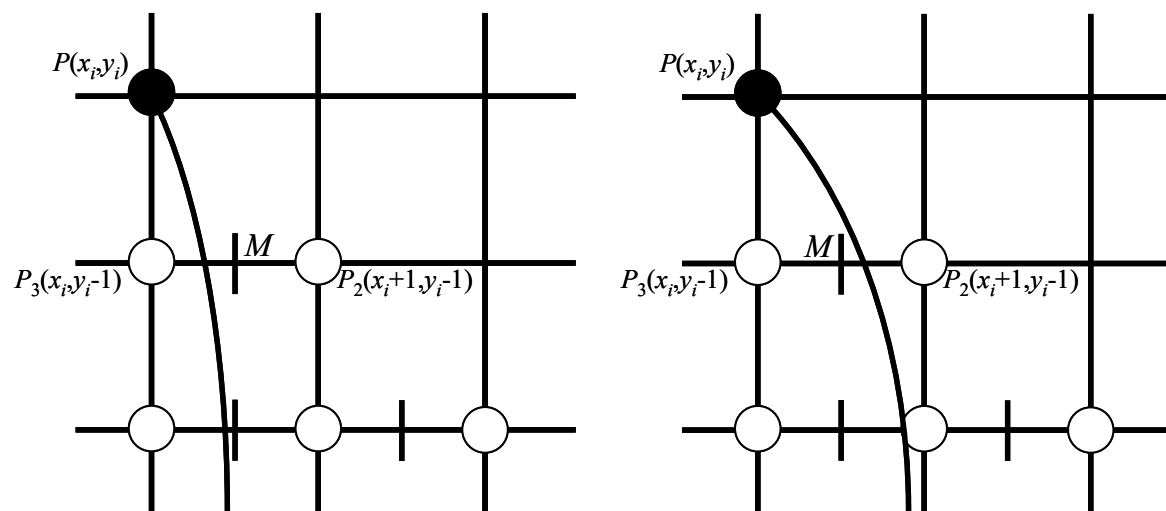
下半部分:  $(x_i, y_i)$ , 下一个点为  $(x_i, y_i - 1)$  或者  $(x_i + 1, y_i - 1)$

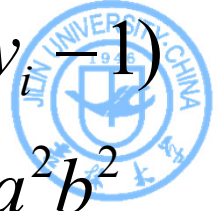
$$M = (x_i + 0.5, y_i - 1)$$

$$d_2 = F(x_i + 0.5, y_i - 1) = b^2(x_i + 0.5)^2 + a^2(y_i - 1)^2 - a^2b^2$$

$d_2 < 0$ , 中点在椭圆内, 取右下方象素

$$\begin{aligned} d'_2 &= F(x_i + 1.5, y_i - 2) = b^2(x_i + 1.5)^2 + a^2(y_i - 2)^2 - a^2b^2 \\ &= d_2 + b^2(2x_i + 2) + a^2(-2y_i + 3) \end{aligned}$$





下半部分:  $(x_i, y_i)$ , 下一个点为  $(x_i, y_i - 1)$  或者  $(x_i + 1, y_i - 1)$

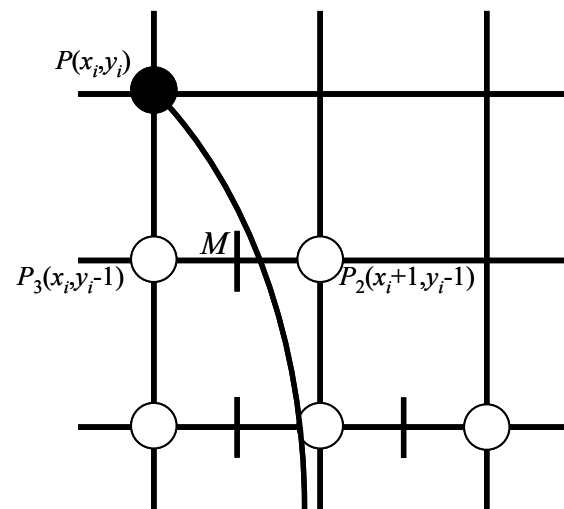
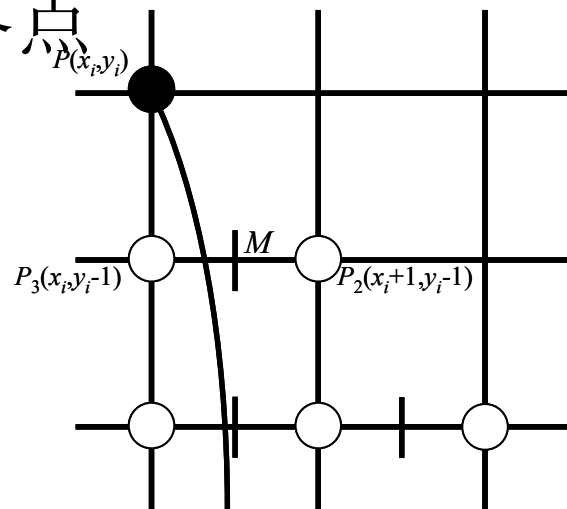
$$d_2 = F(x_i + 0.5, y_i - 1) = b^2(x_i + 0.5)^2 + a^2(y_i - 1)^2 - a^2b^2$$

$d_2 \geq 0$ , 中点在椭圆外, 取正下方像素

$$\begin{aligned} d_2' &= F(x_i + 0.5, y_i - 2) = b^2(x_i + 0.5)^2 + a^2(y_i - 2)^2 - a^2b^2 \\ &= d_2 + a^2(-2y_i + 3) \end{aligned}$$

$$d_2 \text{ 初值 } d_2^0 = F(x, y) = (b(x + 0.5))^2 + (a(y - 1))^2 - a^2b^2$$

$(x, y)$  为交界点





```
void MidpointEllipse(int a,int b){
    int x,y;
    double d1,d2;
    x=0;y=b;
    d1=b*b+a*a*(-b+0.25);
    SetPixel(x,y);
    while(b*b*(x+1)<a*a*(y-0.5)) {
        if(d1<0) {
            d1+=b*b*(2*x+3);x++;
        }else{
            d1+=(b*b*(2*x+3)+a*a*(-2*y+2));x++;y--;
        }
        SetPixel(x,y);
    }
    d2=b*b*(x+0.5)*(x+0.5)+a*a*(y-1)*(y-1)-a*a*b*b;
    while(y>0){
        if(d2<0){
            d2+=b*b*(2*x+2)+a*a*(-2*y+3);x++;y--;
        }else{
            d2+=a*a*(-2*y+3);y--;
        }
        SetPixel(x,y);
    }
}
```





## 第四节 区域填充

- 种子填充算法
- 扫描线填充算法
- 多边形扫描转换算法
- 边填充算法
- 图案填充

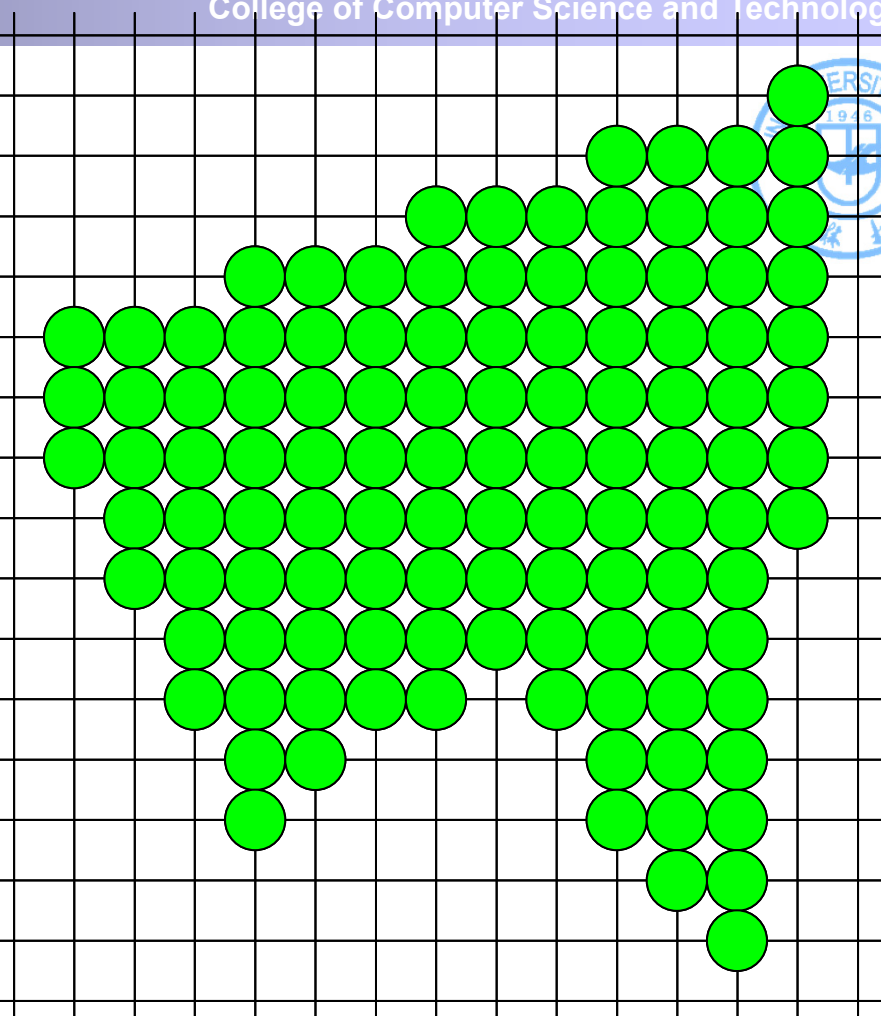
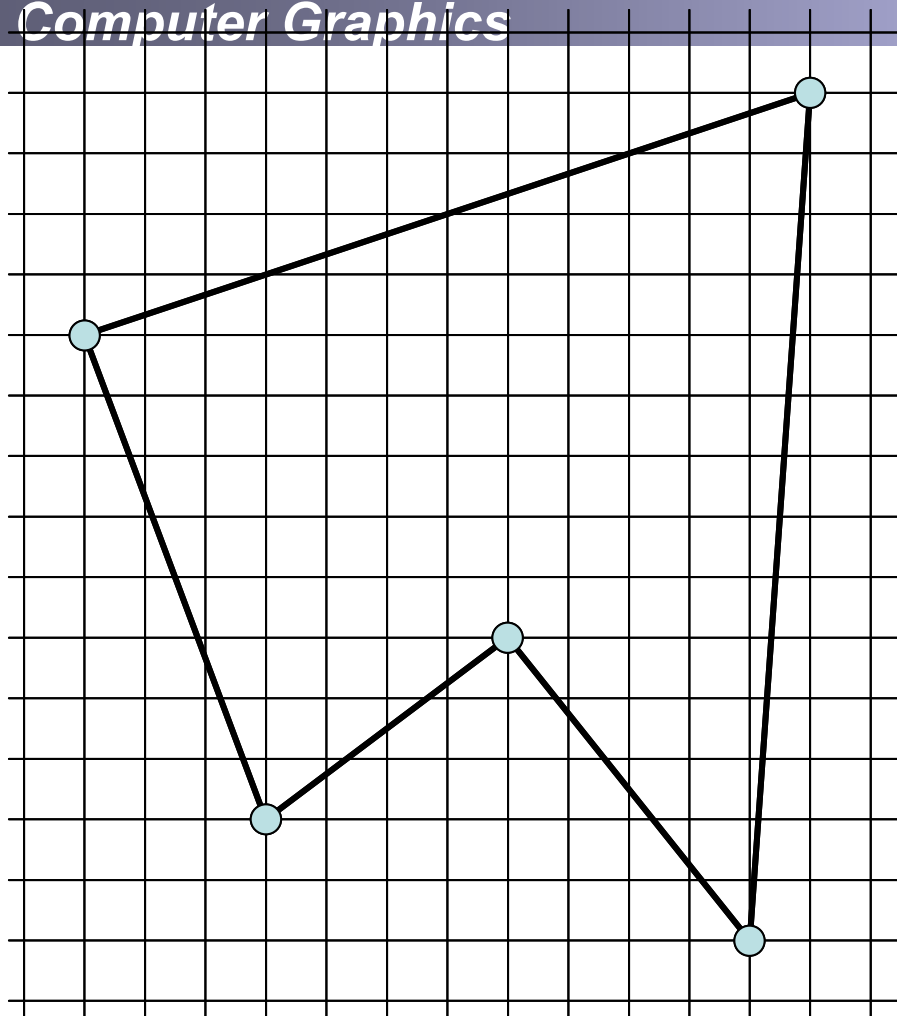
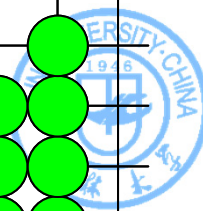


# 一、种子填充算法

## 1. 概念

**区域：**指光栅网格上的一组像素。

**区域填充：**把某确定的像素值送入到区域内部的所有像素中。



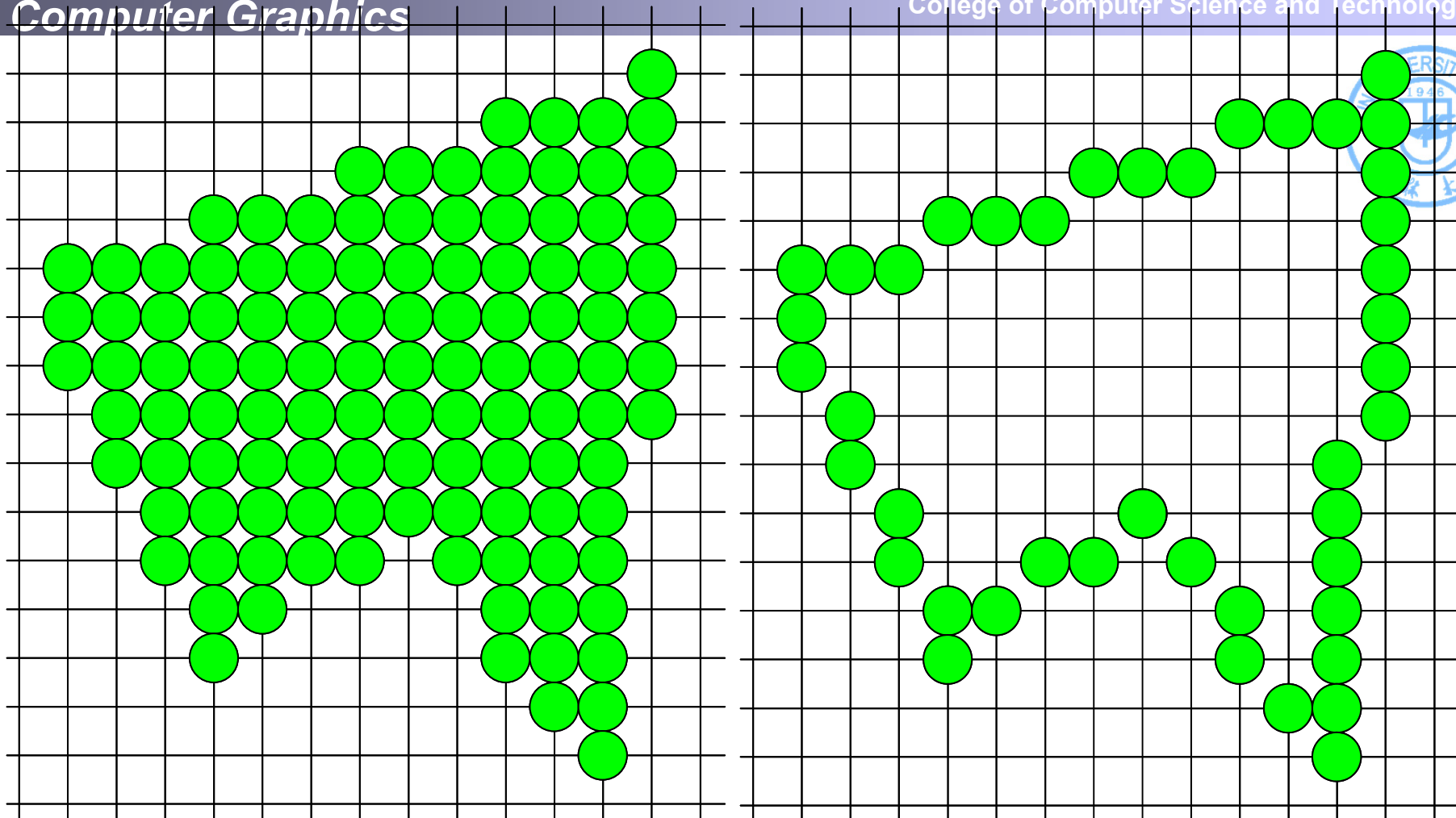
## 2. 区域填充方法分为两大类。

(1) 区域由**多边形**围成，区域由多边形的顶点序列来定义；

优点：占用内存少，缺点：需要区分内外侧

(2) 是通过**像素的值**来定义区域的内部

优点：形状可任意复杂，可直接着色 缺点：几何意义不直观



### 3.用像素值定义区域

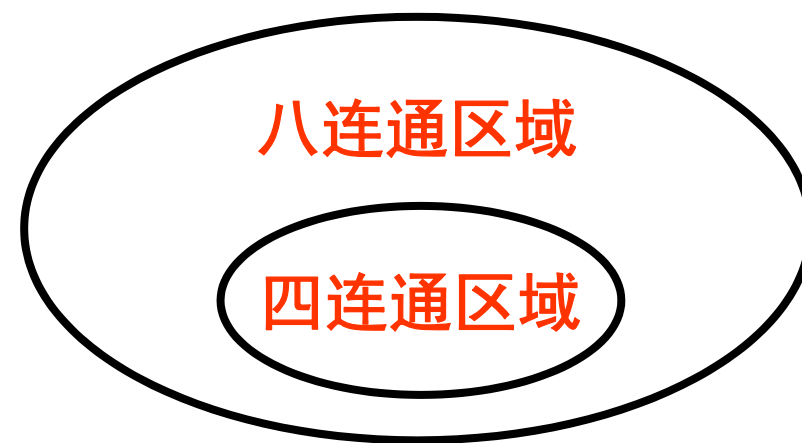
- (1) **内定义区域(oldvalue)**指出区域内部所具有的像素值, (**内点表示**)
  - (2) **边界定义区域(boundaryvalue)**, 指出区域边界所具有的像素值。此时区域边界上所有像素具有某个边界**boundaryvalue**。区域的边界应该是**封闭**的, 指明区域的**内部和外部**。
- 以像素为基础的区域填充主要是依据区域的连通性进行。

## 4. 区域的连通性

(1) **四连通**: 从区域中的一个像素出发, 经连续地向上下左右四个相邻像素的移动, 就可以到达区域内的**任意**另一个像素。

(2) **八连通**: 如果除了要经上下左右的移动, 还要经左上、右上、左下和右下的移动, 才能由一个像素走到区域中另外**任意**一个像素。  
**四连通区域必定是八连通区域**, 反之不一定。

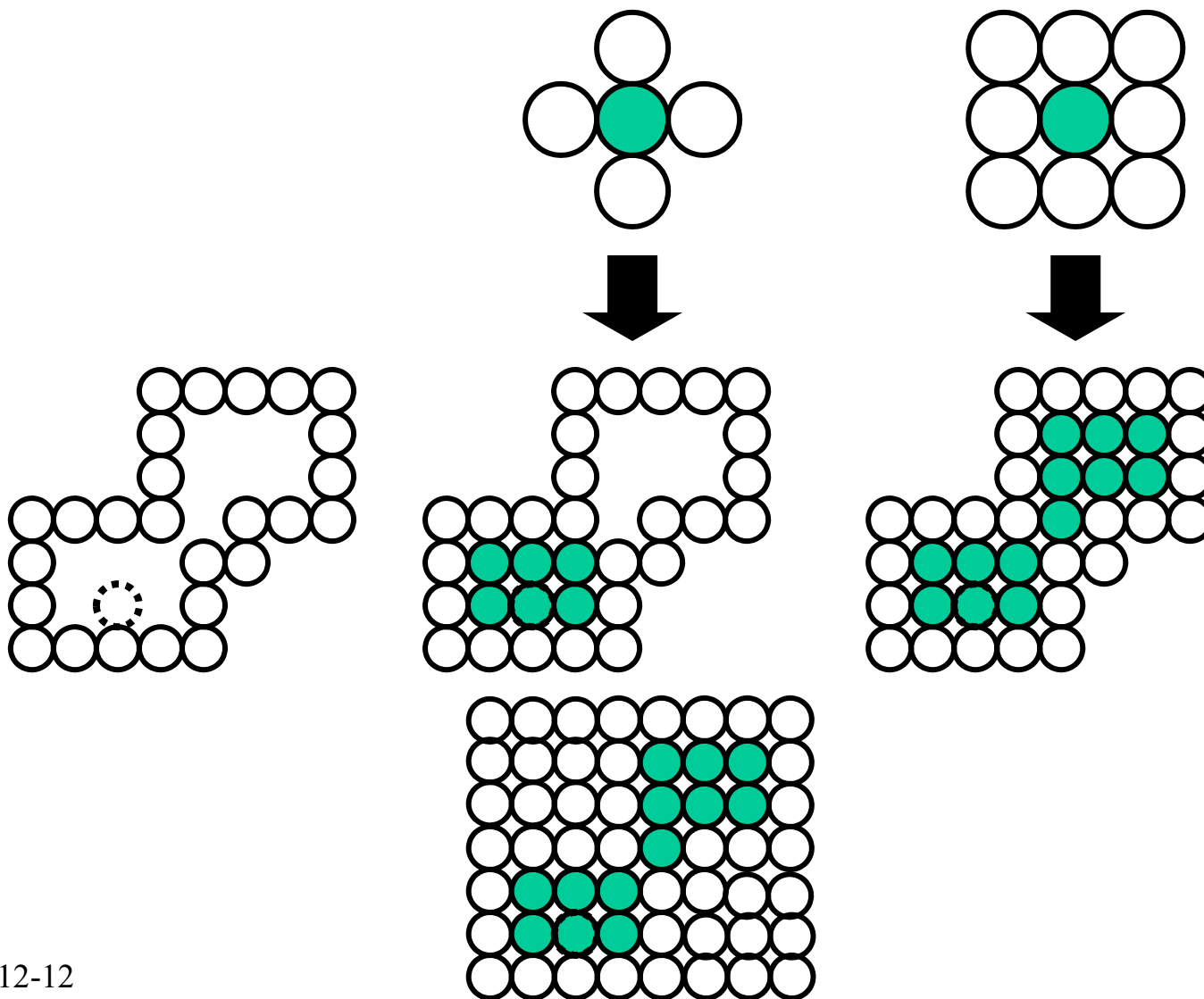
左上	上	右上
左	P	右
左下	下	右下





## 4. 区域的连通性

(1) 四连通 (2) 八连通





## 5. 种子填充算法

利用区域的连通性进行区域填充的要素：

- 明确定义区域，
- 事先给定一个**区域内部像素**，称为**种子**。

做区域填充时，要对光栅网格进行**遍历**，找出由种子出发能达到而又不穿过边界的所有像素。

这种利用连通性的填充，

优点：不受区域**不规则性**的影响，

缺点：需要事先知道一个内部像素。



(1) 四连通**内定义**区域填充算法:

```
void Floodfill(int x,int y,COLORREF oldvalue,COLORREF
newvalue){
/*(x,y)为种子 oldvalue是原值 newvalue是新值, 应不等于原
值。*/
{
    //是否在区域内并且尚未被访问过
    if (GetPixel(x,y) == oldvalue){
        {
            SetPixel(x,y,newvalue); //赋值为新值
            Floodfill(x,y-1,oldvalue,newvalue); //向上扩散
            Floodfill(x,y+1,oldvalue,newvalue); //向下扩散
            Floodfill(x-1,y,oldvalue,newvalue); //向左扩散
            Floodfill(x+1,y,oldvalue,newvalue); //向右扩散
        }
    }
}
```

2021-12-12  
优点: 算法简单 缺点: 重复多





## (2) 四连通边界定义区域填充算法:

```
void Boundaryfill(int x,int y,COLORREF  
boundaryvalue,COLORREF newvalue)
```

/\*(x,y) 为种子位置

boundaryvalue是边界像素值

newvalue是区域内像素新值，未填充前区域内不应有值为  
newvalue的像素。\*/

```
{    if( GetPixel(x,y)!=boundaryvalue  
        && GetPixel(x,y)!=newvalue) //未达边界且未访问过  
    {    SetPixel(x,y,newvalue); //赋以新值  
        //向四个方向扩散。  
        Boundaryfill(x,y-1,boundaryvalue,newvalue);  
        Boundaryfill(x,y+1,boundaryvalue,newvalue);  
        Boundaryfill(x-1,y,boundaryvalue,newvalue);  
        Boundaryfill(x+1,y,boundaryvalue,newvalue);
```

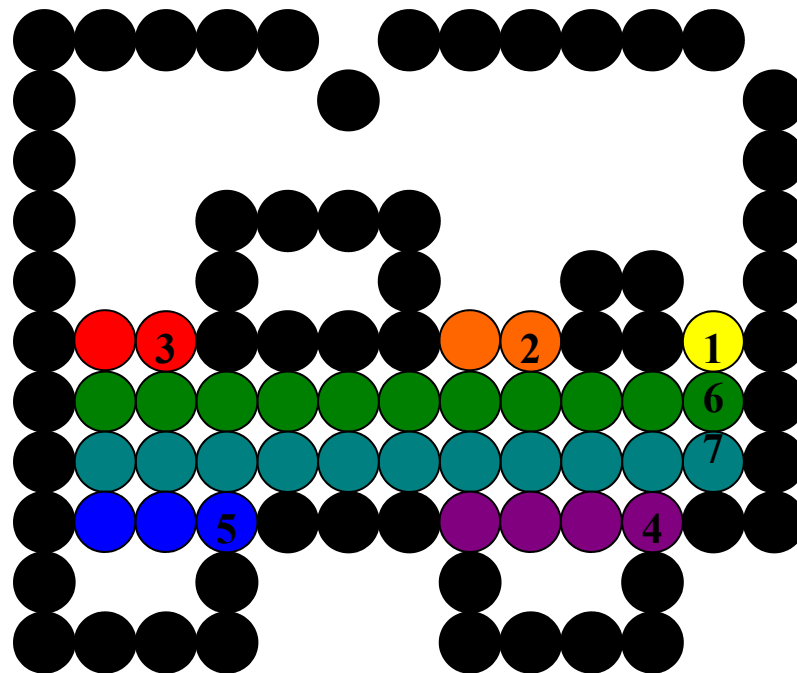
2021-12-12

```
} //算法简单，多层递归，存储空间有限—>堆栈溢出
```



## 二、扫描线填充算法

- 扫描线种子填充算法(适用于边界定义的四连通区域)
- 像素段：将区域内由边界点限定的同一行内相连接的不具有新值newvalue的一组像素称为一个像素段，像素段用它最右边的像素来标识。





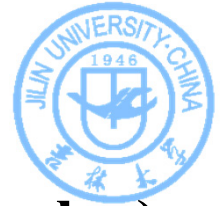
## 算法的步骤如下：

- 1.[初始化]将堆栈置为空，将给定的种子点 $(x,y)$ 压入堆栈
- 2.[出栈]如果堆栈为空，算法结束，否则取栈顶元素 $(x,y)$ 作为种子点
- 3.[区段填充]从种子点 $(x,y)$ 开始沿当前扫描线**向左右两个方向**逐个像素进行填充，直到遇到边界点为止
- 4.[定范围]用 $x_l$ 和 $x_r$ 分别表示在步骤3中填充的区段的左右两个端点的横坐标
- 5.[进栈]对当前扫描线上下相邻的两条扫描线从右向左的确定位于 $[x_l, x_r]$ 区域内的像素段。

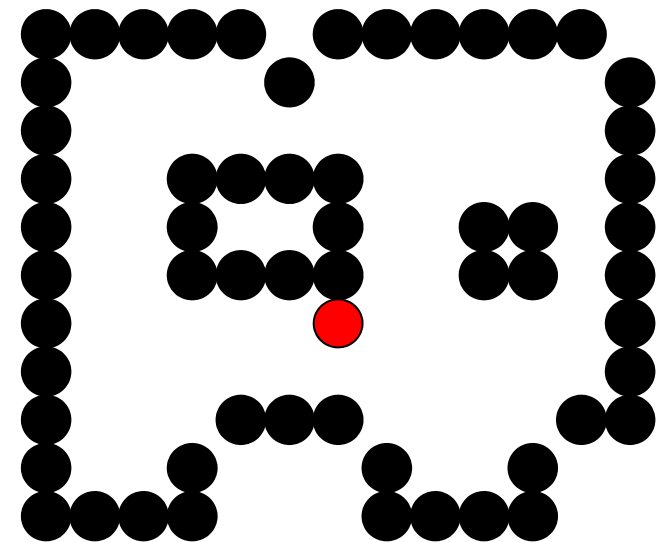
**如果区域内的像素未填充且不是边界，则取像素段的右端点作为种子点，压入堆栈，再转到步骤2，**

**否则转到步骤2。**

# 下面我们用伪C语言写出扫描线填充算法。



```
void ScanlineSeedfill(int x,int y,COLORREF  
                      boundaryvalue,COLORREF newvalue)  
{  
    int x0,xl,xr,y0,xid;  
    int flag;  
    Stack s;  
    Point p;  
    s.push(Point(x,y)); //种子像素入栈  
    while(!s.isEmpty())  
    {  
        p=s.pop(); //栈顶像素出栈  
        x=p.x;y=p.y;  
        SetPixel(x,y,newvalue);
```

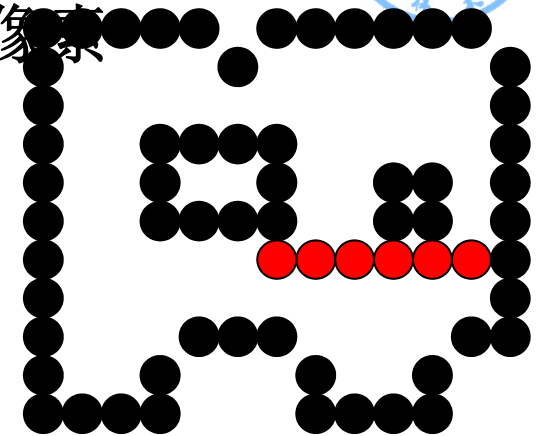




```

x0= x+1;
while(GetPixel(x0,y)!=boundaryvalue
&& GetPixel(x0,y)!=newvalue)//填充右方像素
{
    SetPixel(x0 ,y ,newvalue);
    x0++;
}

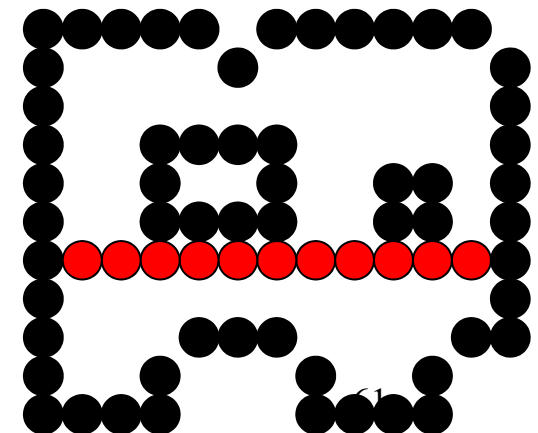
```

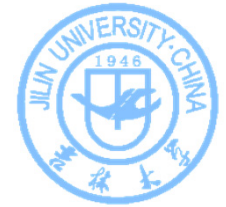


```

xr=x0-1;//最右边像素
x0= x-1;
while(GetPixel(x0,y)!=boundaryvalue
&& GetPixel(x0,y)!=newvalue)//填充左方像素
{
    SetPixel(x0 ,y ,newvalue);
    x0--;
}
xl=x0+1;//最左边像素

```





//检查上一条扫描线和下一条扫描线，  
//若存在非边界且未填充的像素，  
//则选取代表各连续区间的种子像素入栈。

y0=y;

for(int i=1;i>=-1;i-=2)//从最右像素开始寻找上下两行的像素段

{     **x0=xr;**

      y=y0+i;

      while(x0>=xl)

      {     flag=0;//是否找到像素段的标识，是为1，否为0

          while((GetPixel(x0,y)!=boundaryvalue)&&

                  (GetPixel(**x0**,y)!=newvalue) && (x0>=xl))

      {

          if(flag==0)

          {     flag=1;//标志找到新的像素段

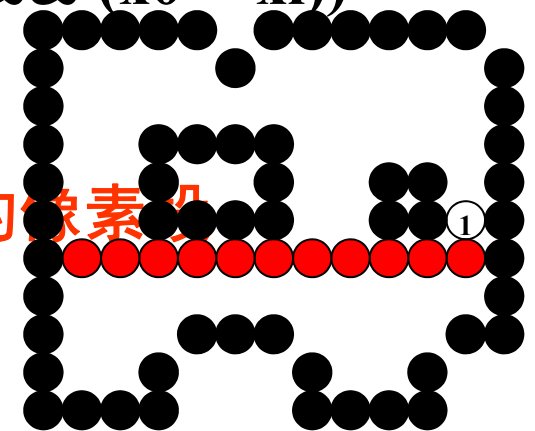
              xid=x0;

          }

          x0--;

2021-12-12

  }



//将最右侧可填充像素压入栈中

```
if(flag==1)
{
    s.push(Point(xid,y));
    flag=0;
}
```

//检查当前填充行是否被中断，若被中断，寻找左方第一个可填充像素

//判断当前点是否为边界点//判断当前点是否为已填充点

```
while((GetPixel(x0,y)==boundaryvalue
|| (GetPixel(x0,y)==newvalue)
&&(x0>=xl))
```

```
    x0--;
```

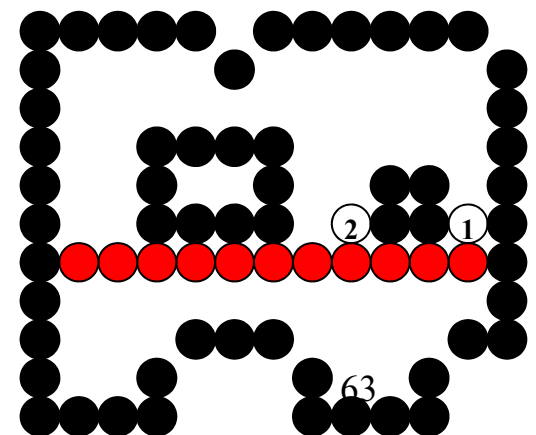
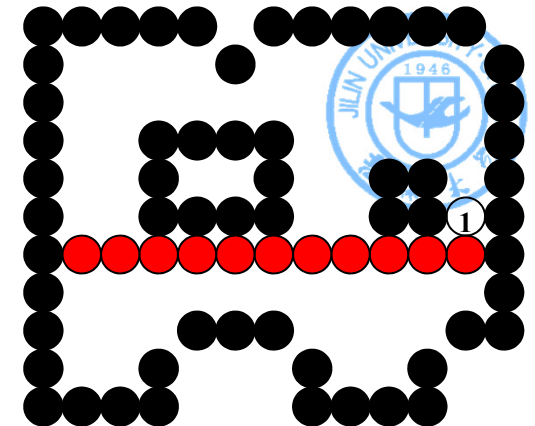
```
    }//while(x0>=xl)
```

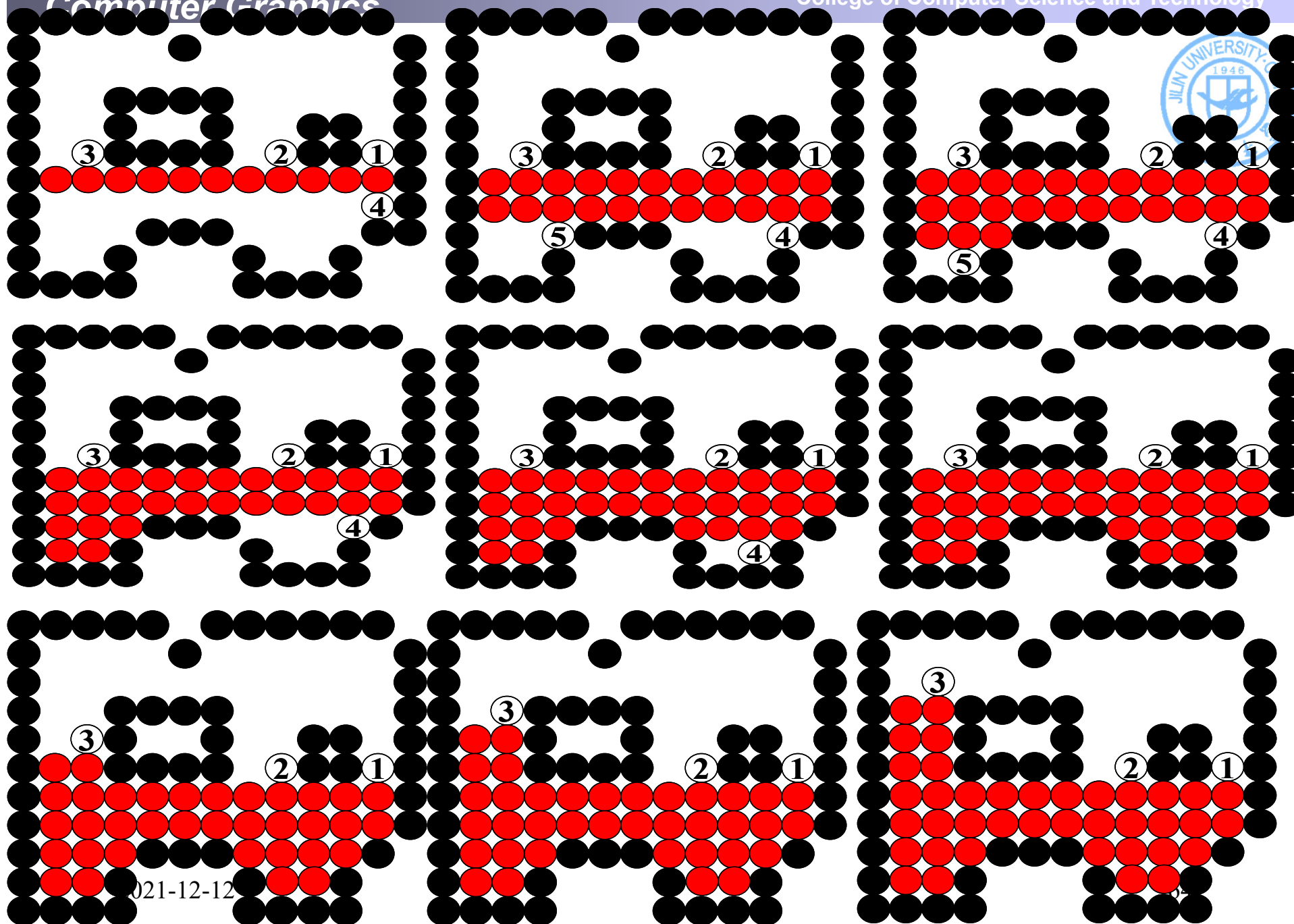
```
    }//for(int i=1;i>=-1;i-=2)
```

```
    }//while(!s.isempty())
```

```
}
```

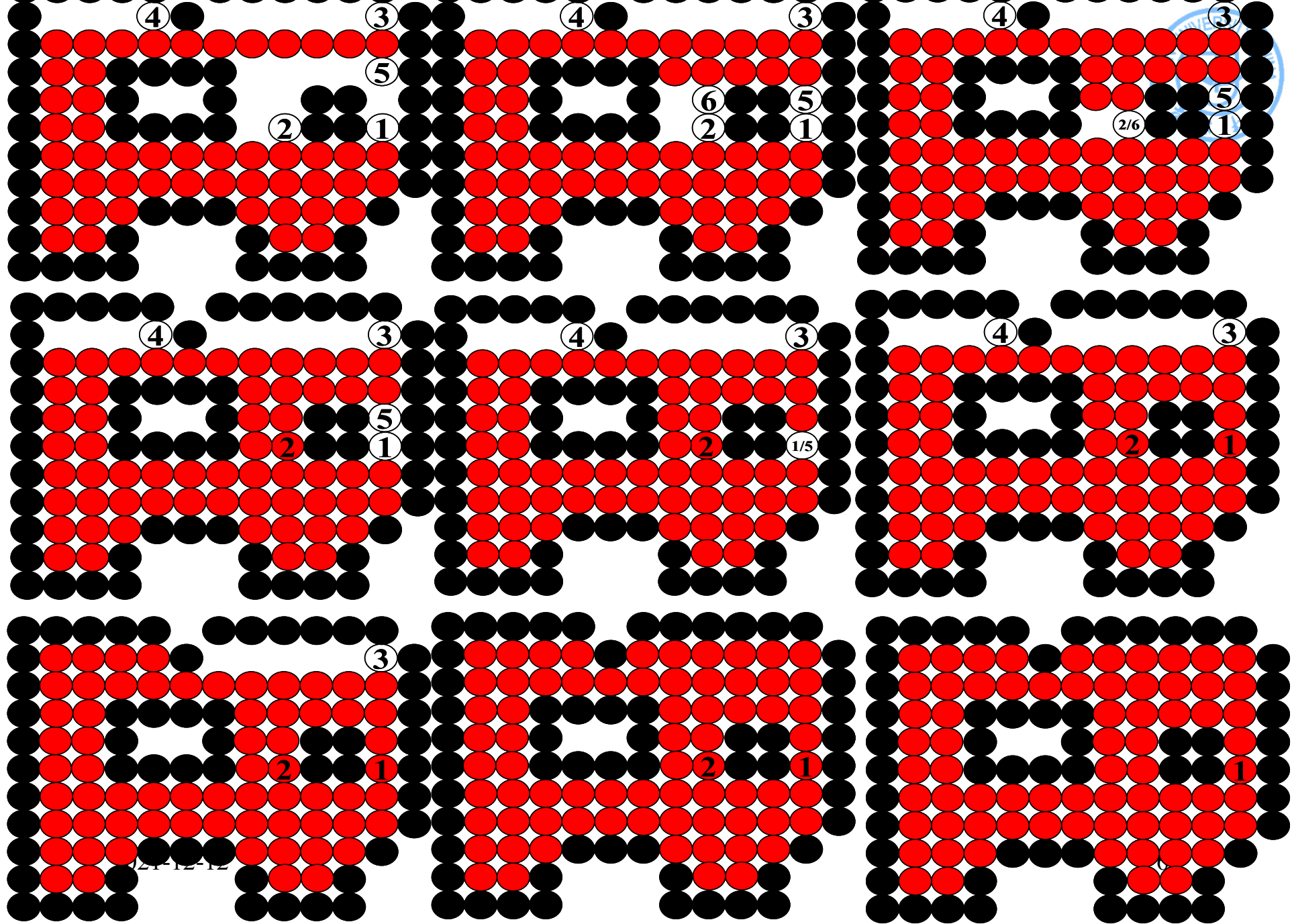
2021-12-12





2021-12-12

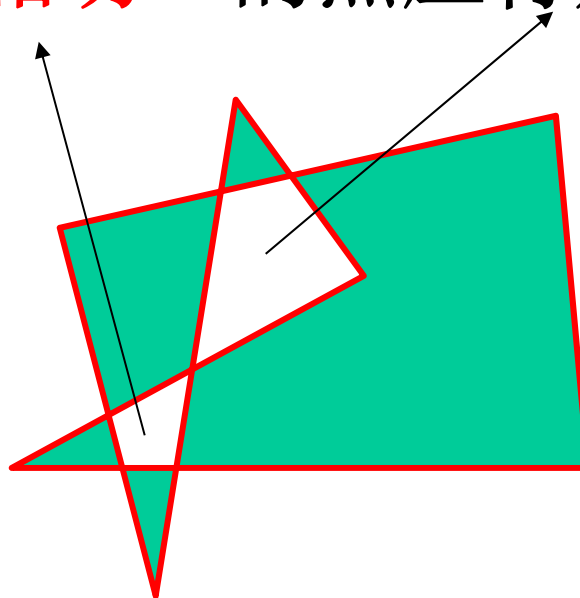




### 三、多边形的扫描转换算法

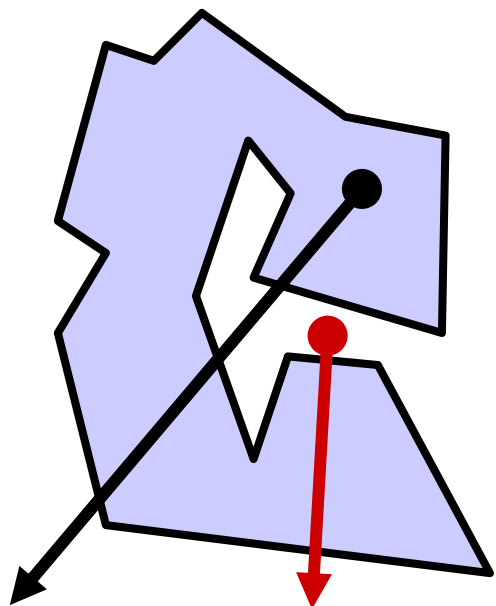


“**奇偶**”性质：即一条直线与任意封闭的曲线相交时，总是从第一个交点进入内部，再从第二个交点退出，以下交替的进入退出，即奇数次进入，偶数次退出。当然可能有一些“**相切**”的点应特殊处理。

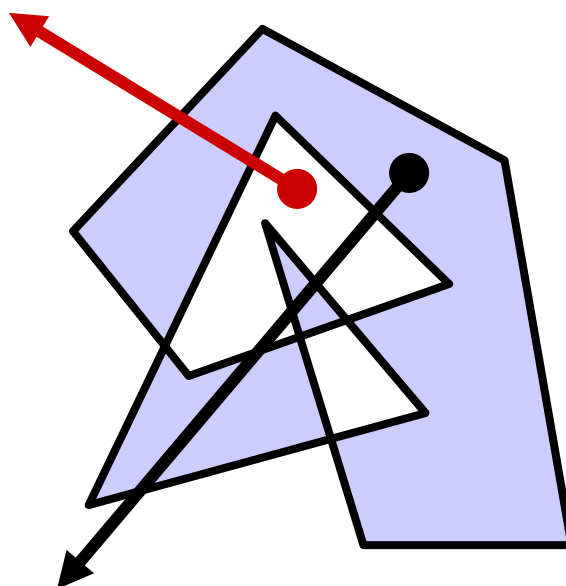




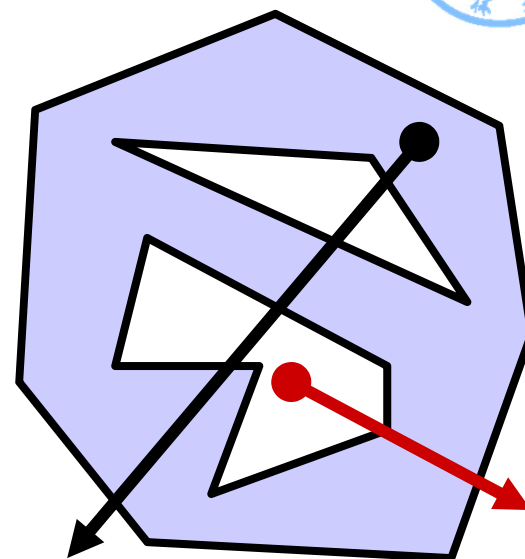
- 奇偶规则



凹多边形

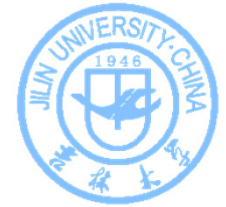


自相交多边形



带空洞的多边形

# 三、多边形的扫描转换算法



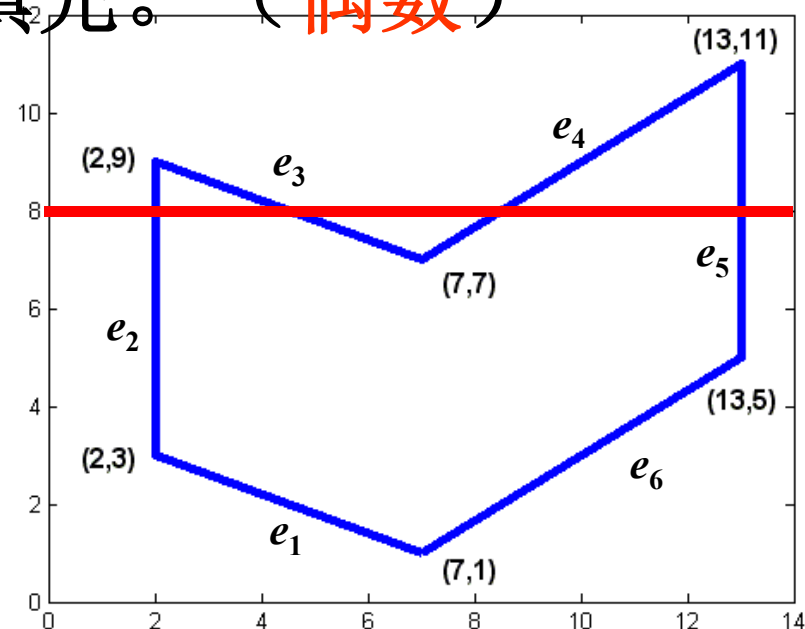
## 扫描转换算法步骤:

对于每一条扫描线

step1. 找出扫描线与多边形边界线的所有交点;

step2. 按x坐标增加顺序对交点排序;

step3. 在交点对之间进行填充。(偶数)

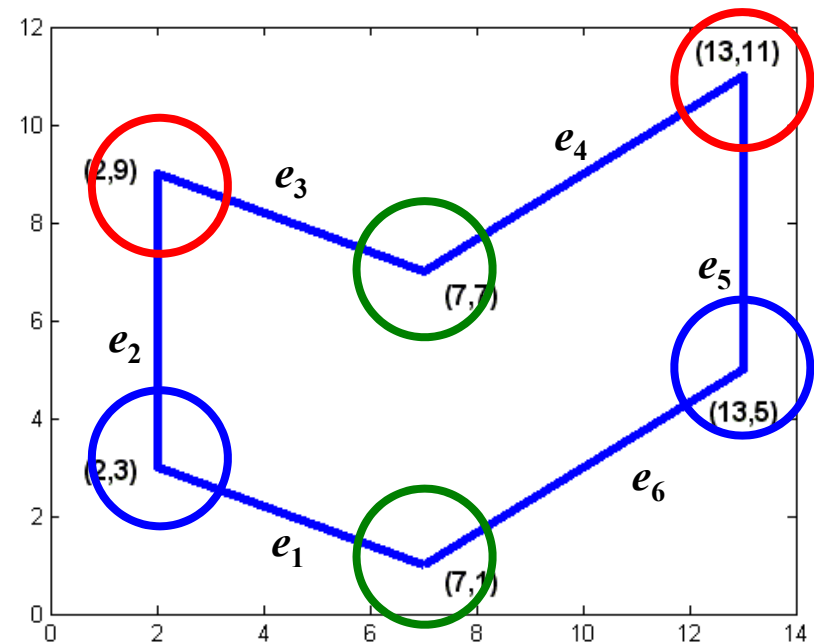




### 三、多边形的扫描转换算法

**局部极大：** 如果一个顶点的前面和后面各有一些相邻顶点的 $y$ 坐标，都小于该顶点的 $y$ 坐标，则这个顶点是局部极大。

**局部极小：** 如果一个顶点的前面和后面各有一些相邻顶点的 $y$ 坐标，都大于该顶点的 $y$ 坐标，则这个顶点是局部极小。





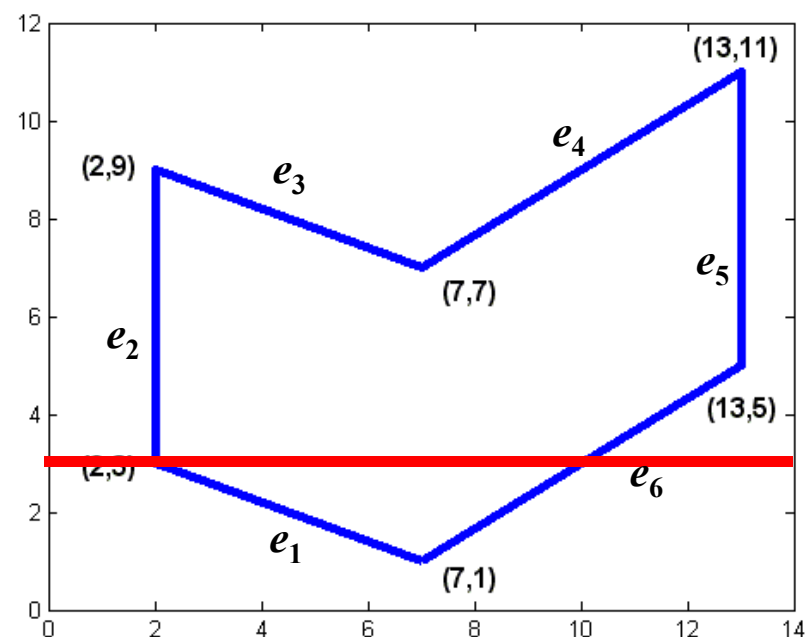
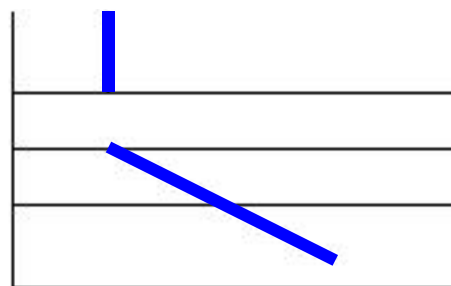
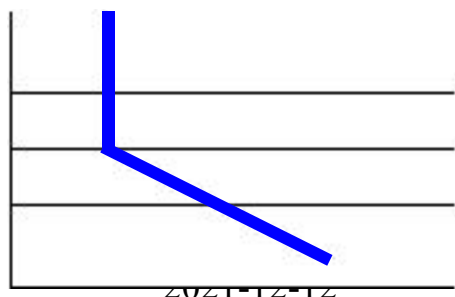
### 三、多边形的扫描转换算法

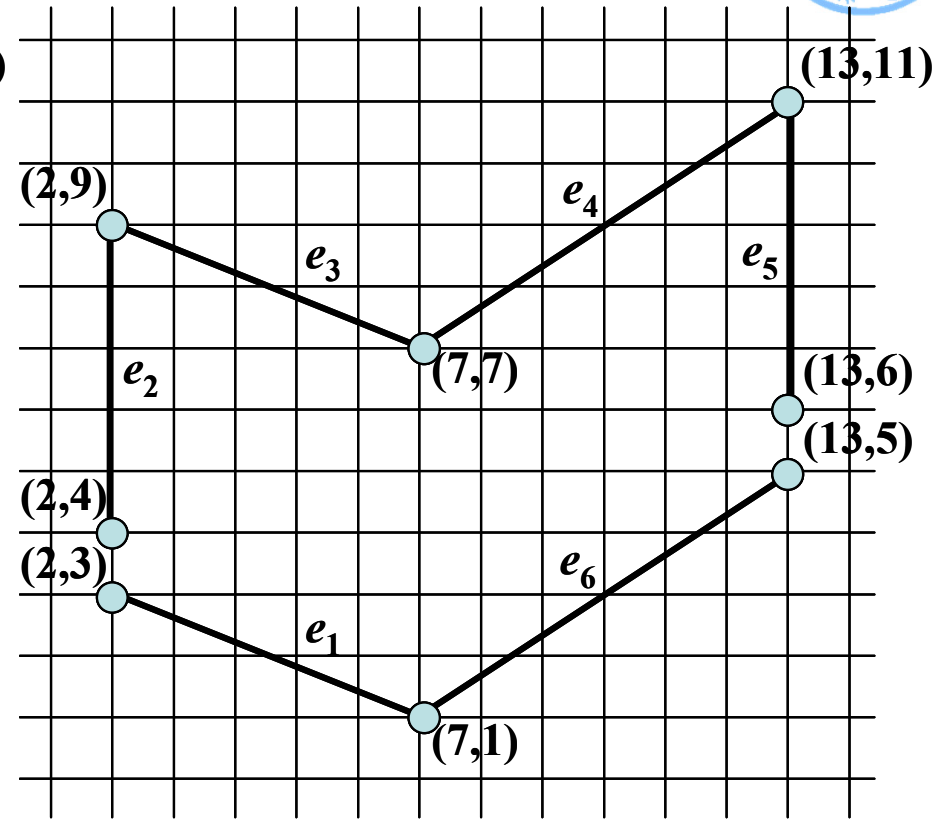
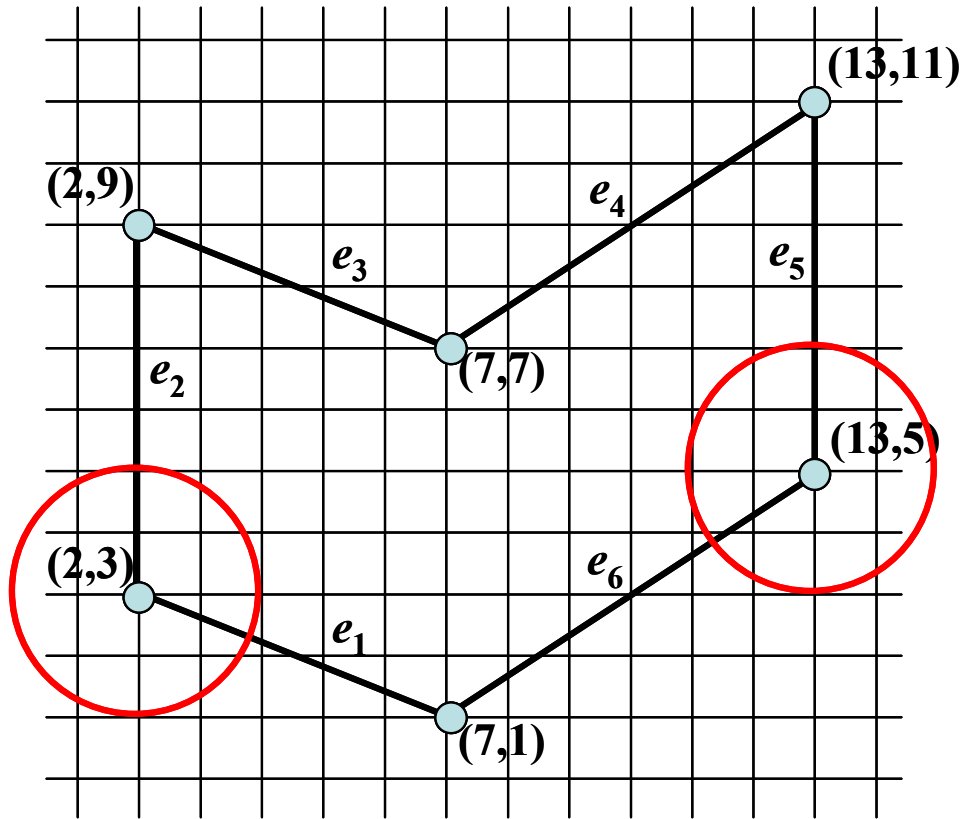
问题一：交点个数是奇数

奇数个交点的特殊处理：

发生奇数个交点的情况出现在扫描线穿过非局部极值点，该非局部极值点看做是一个顶点，将其上面的边**缩短**一个单位

对非极值点的简便处理





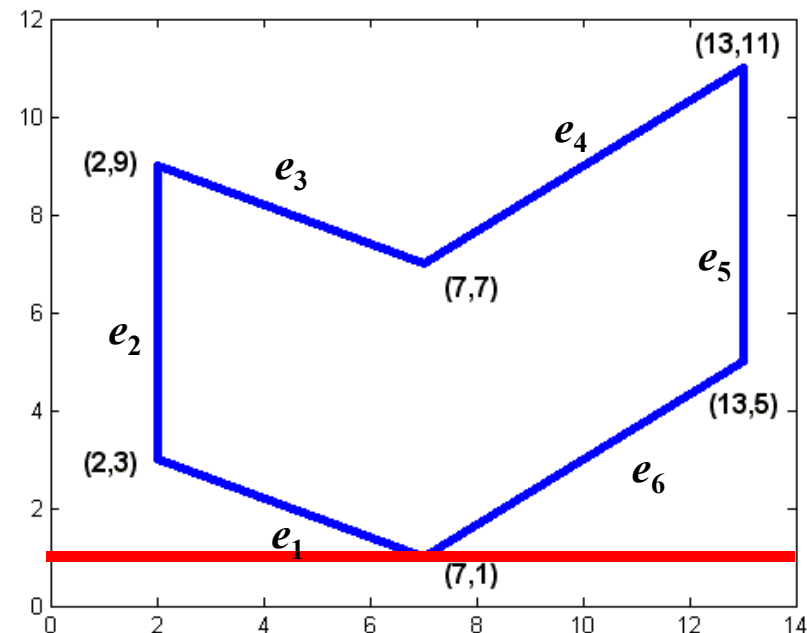


### 三、多边形的扫描转换算法

问题二：“相切”是否满足奇偶规则？

“相切”点的特殊处理：不做处理

与平行的扫描线“相切”的切点一定是局部极大或局部极小。边的“切点”一定是偶数个，满足奇偶规则，不做处理。







# 顶点处理

当顶点表现为是局部极大或局部极小时，  
就看做是二个，否则看做一个。

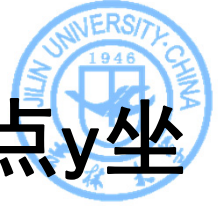
- 局部极大或局部极小点，交点看做是二个
- 非局部极值点，交点看做一个



step1. 如何计算扫描线与多边形边界线的所有交点？

若扫描线 $y_i$ 与多边形边界线交点 $x$ 的坐标是 $x_i$ ，则对下一条扫描线 $y_{i+1}$ ，它与那条边界线的交点的 $x$ 坐标 $x_{i+1}$ ，可如下求出：

$$m = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, y_{i+1} = y_i + 1 \Rightarrow x_{i+1} = x_i + \frac{1}{m}$$



**边表ET**: 记录多边形的**所有边**, 按边的下端点y坐标递增排序

**“吊桶”**: 记录一条边的信息

$y_{\max}$	$x_{\min}$	$1/m$	next
------------	------------	-------	------

$y_{\max}$ : 边的上端点(具有较大y坐标的端点)的y坐标

$x_{\min}$ : 边的下端点(具有较小的y坐标的端点)的x坐标

$1/m$ : 斜率的倒数

next: 指向下一条边的指针



**活跃边：** 与当前扫描线相交的边

**活跃边表AET：** 存贮当前扫描线相交的各边的表。

$y_{\max}$	$x$	$1/m$	next
------------	-----	-------	------

$y_{\max}$ :当前边的上端点的y坐标

$x$ : 当前边与扫描线交点的x坐标

$1/m$ :当前边的斜率的倒数

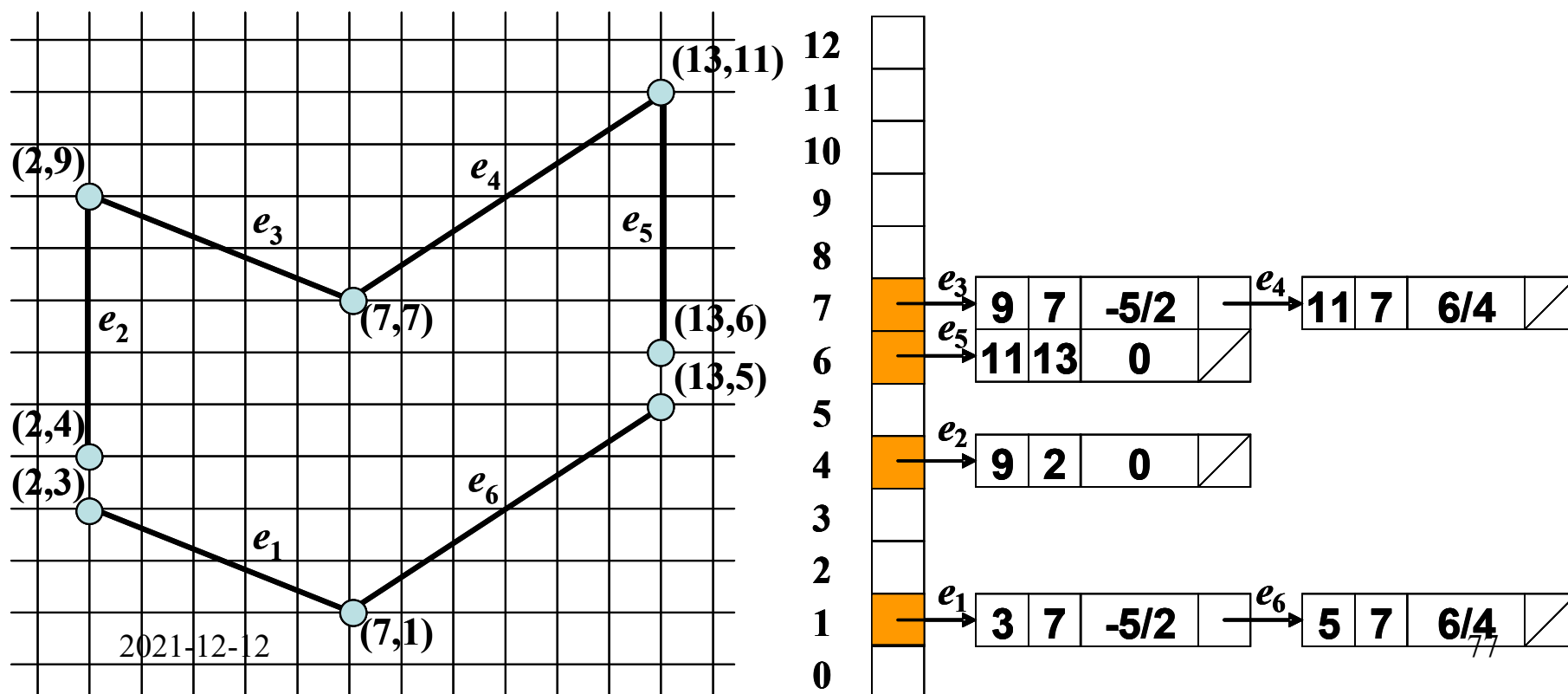
next:指向下一条边的指针

每次离开一条扫描线进入下一条之前，将表中有但与下一条扫描线不相交的边清除出表，将与下一条扫描线相交而表中没有的边加入表中。



1. 边的上端点y坐标 $y_{\max}$ 。
2. 边的下端点的x坐标 $x_{\min}$ 。
3. 斜率的倒数，即 $1/m$ 。

$y_{\max}$	$x_{\min}$	$1/m$	next
------------	------------	-------	------





## Polygonfill(EdgeTableET, COLORREFcolor)

{

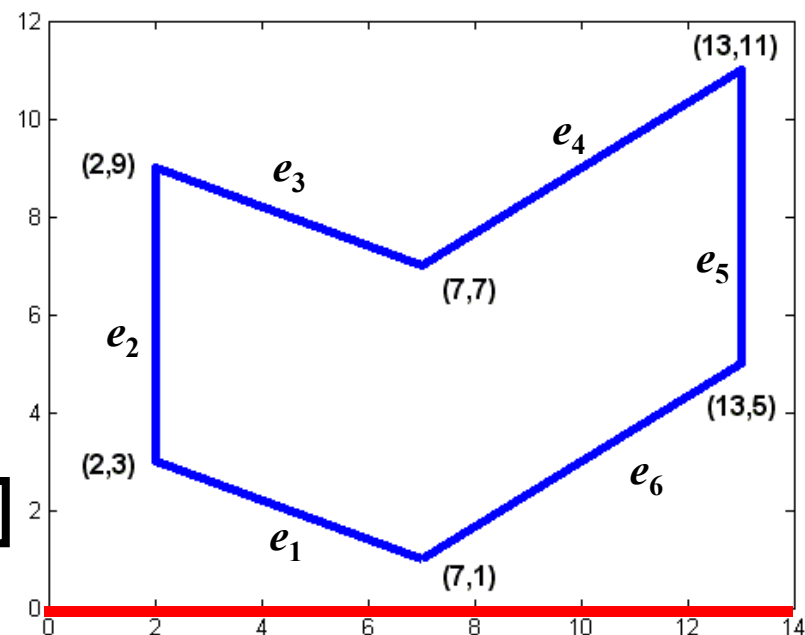
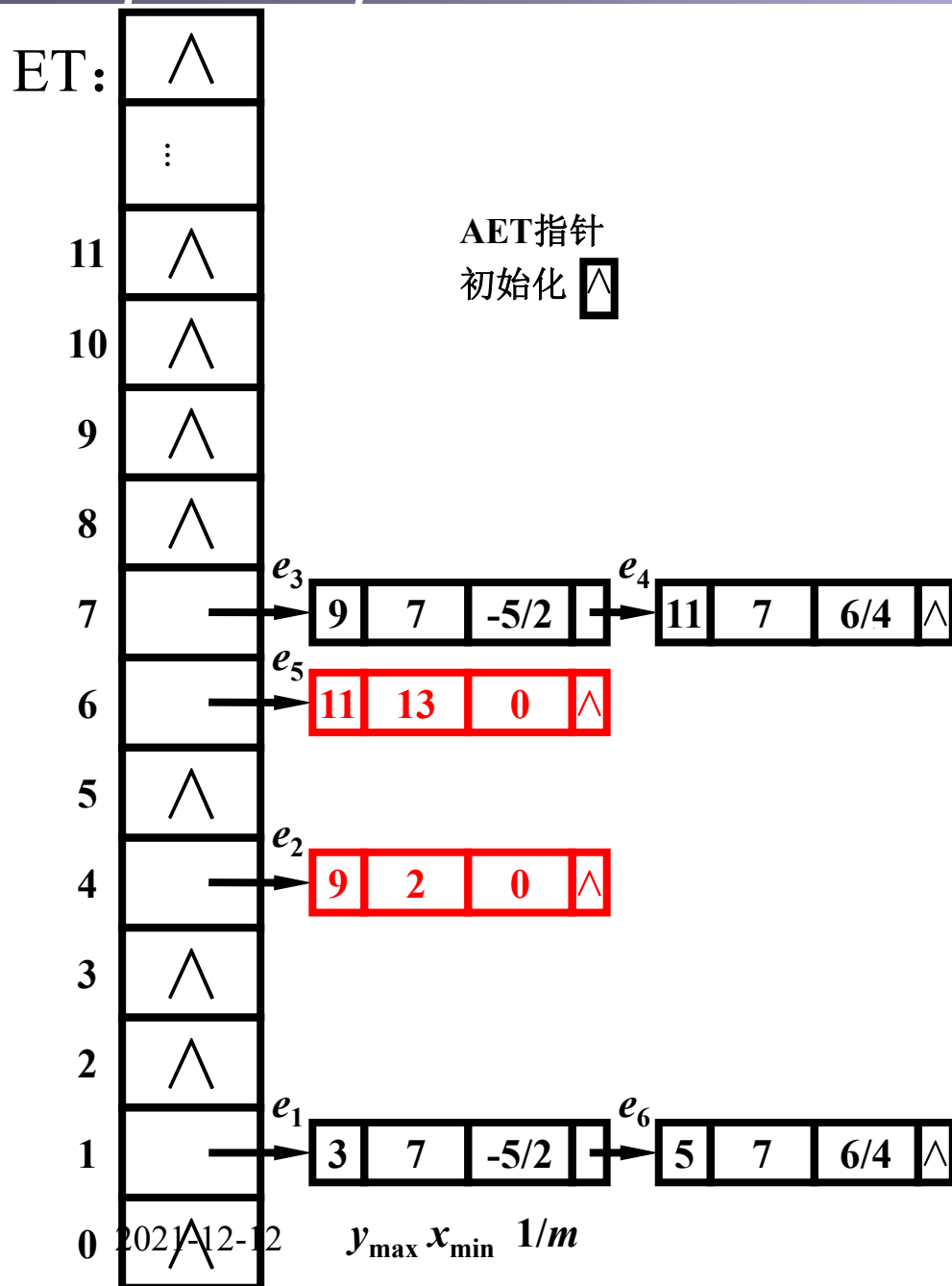
1.  $y = \min y$  为边表ET中各登记项对应的y 坐标中最小的值;
2. 活跃边表AET初始化为空表;
3. 若AET非空或ET非空, 则做下列步骤, 否则算法结束

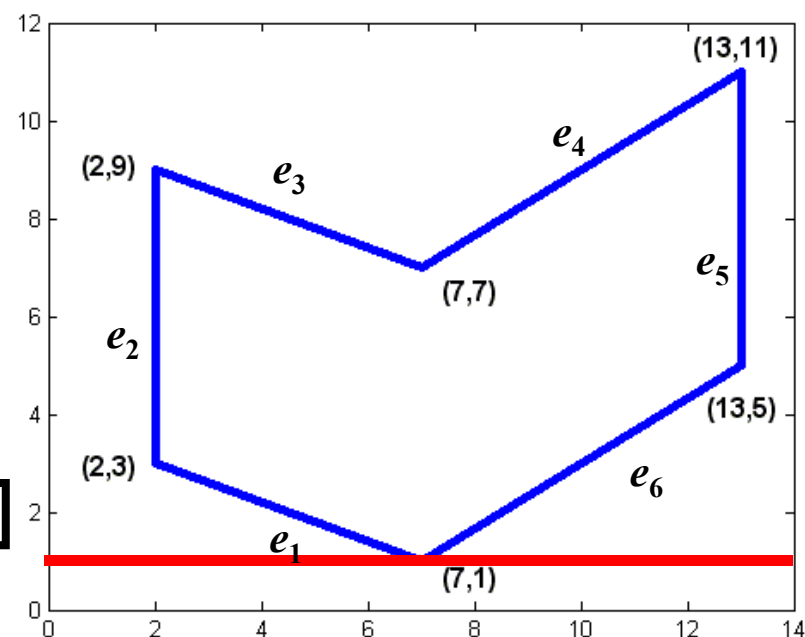
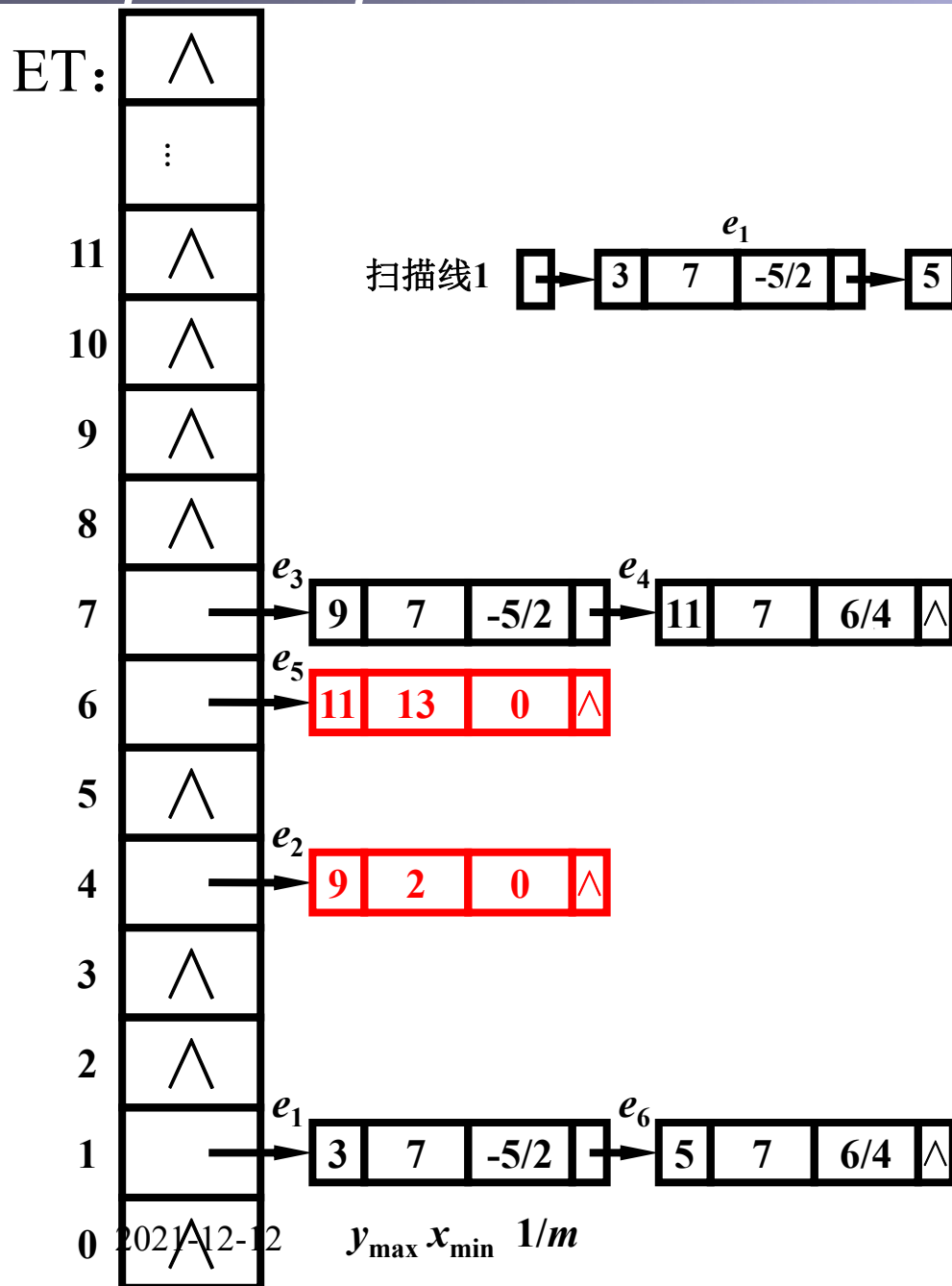
{

- 3.1. 将ET中登记项y对应的各“吊桶”合并到表AET中, 将AET中各吊桶按x坐标递增排序;
- 3.2. 在扫描线y上, 按照AET表提供的x坐标对, 用 color 实施填充;
- 3.3. 将AET表中有  $y = y_{\max}$  的各项清除出表;
- 3.4. 对AET中留下的各项, 分别将x换为  $x + 1/m$ , 求出AET中各边与下一条扫描线交点的x坐标;
- 3.5.  $y = y + 1$ , 返回步骤3处理下一条扫描线。

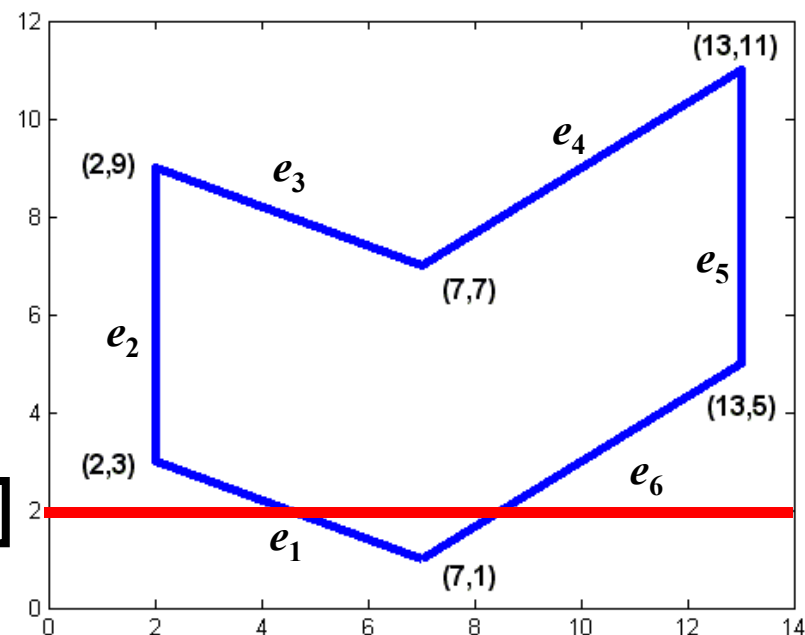
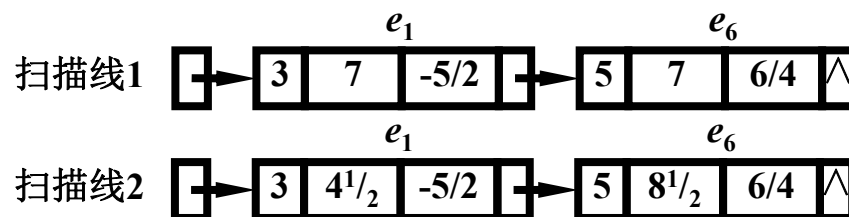
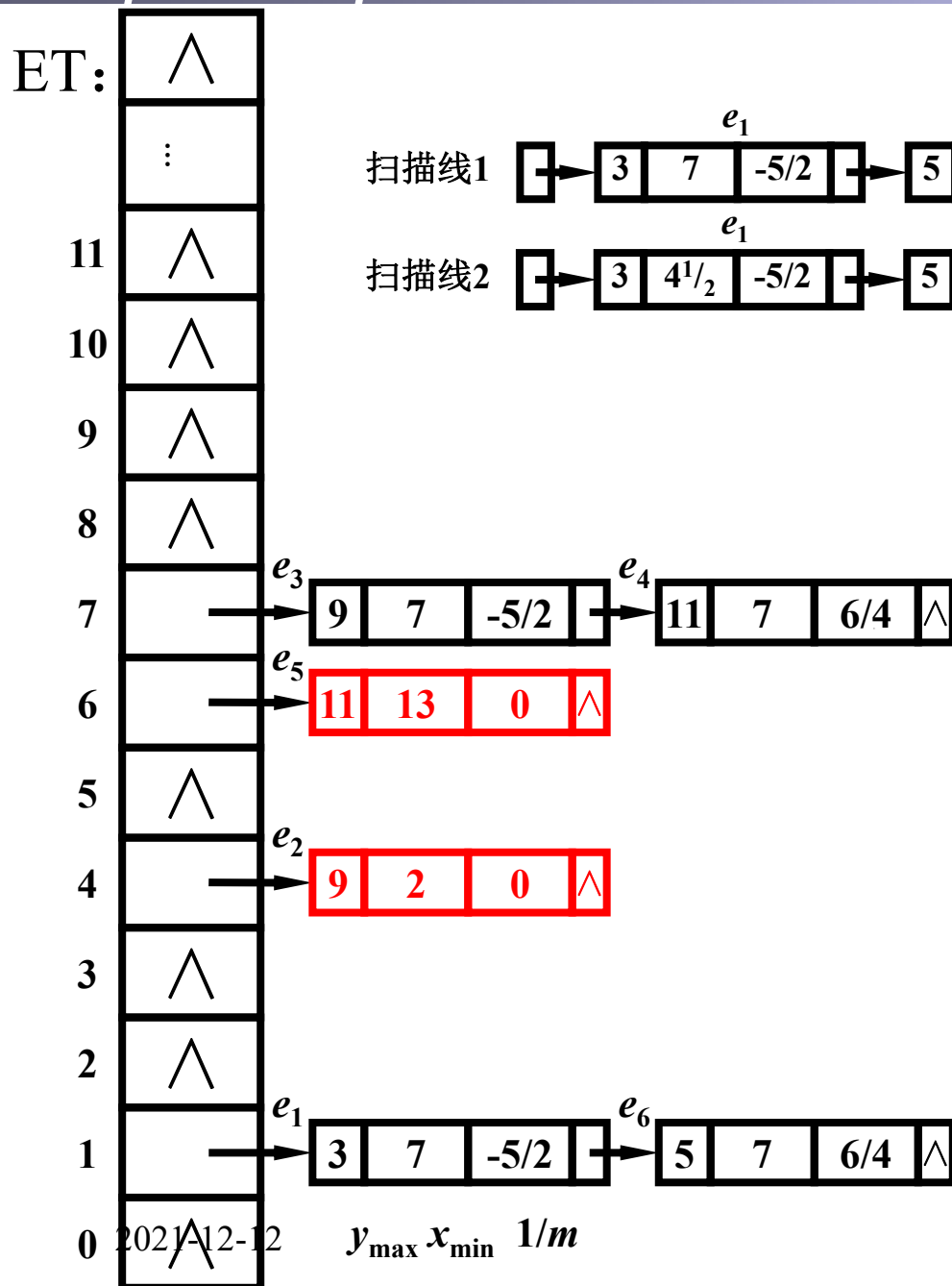
}}

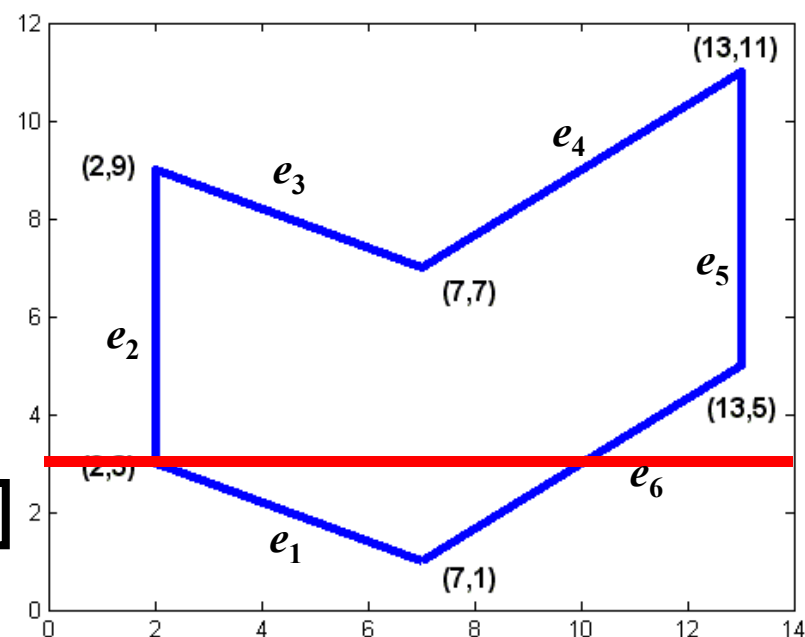
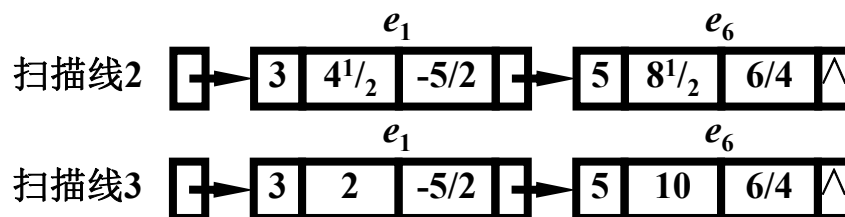
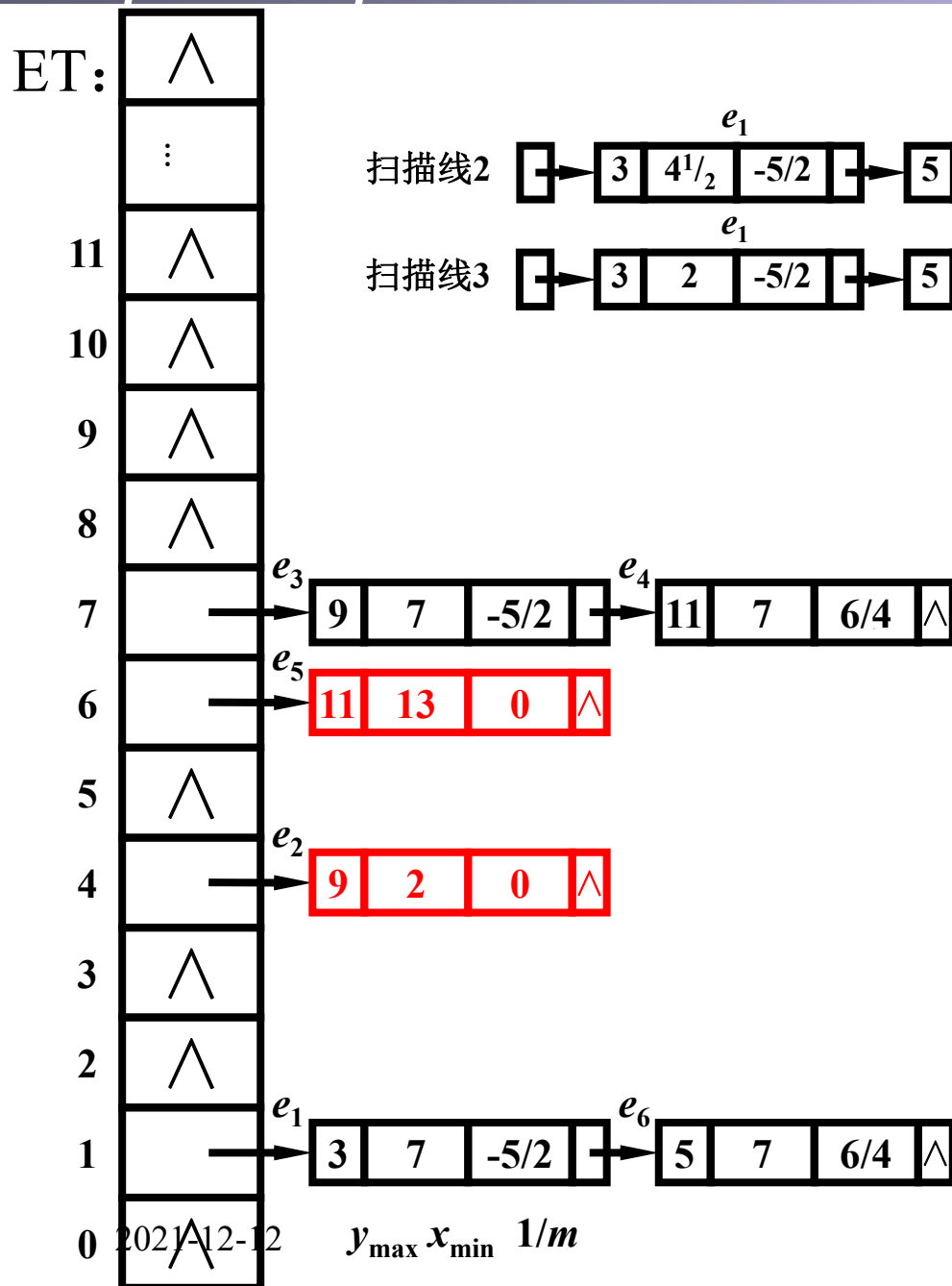
2021-12-12

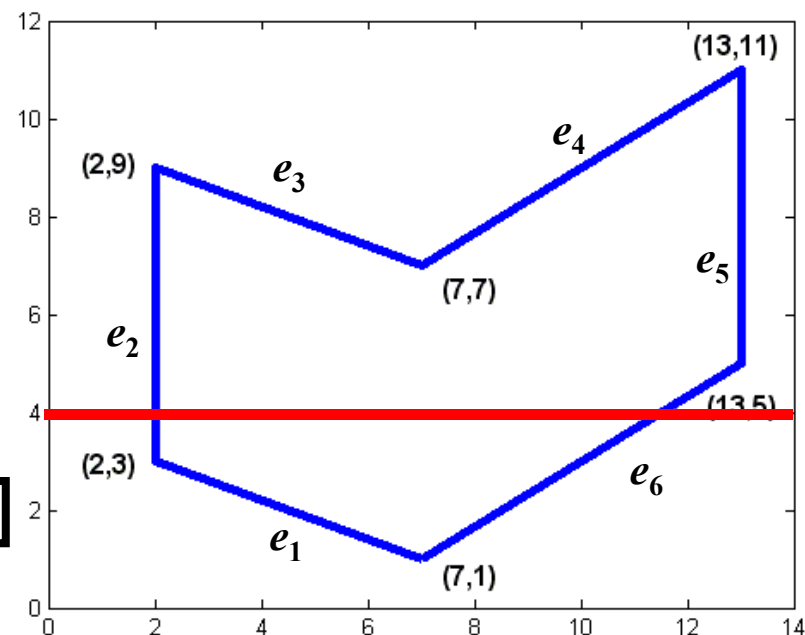
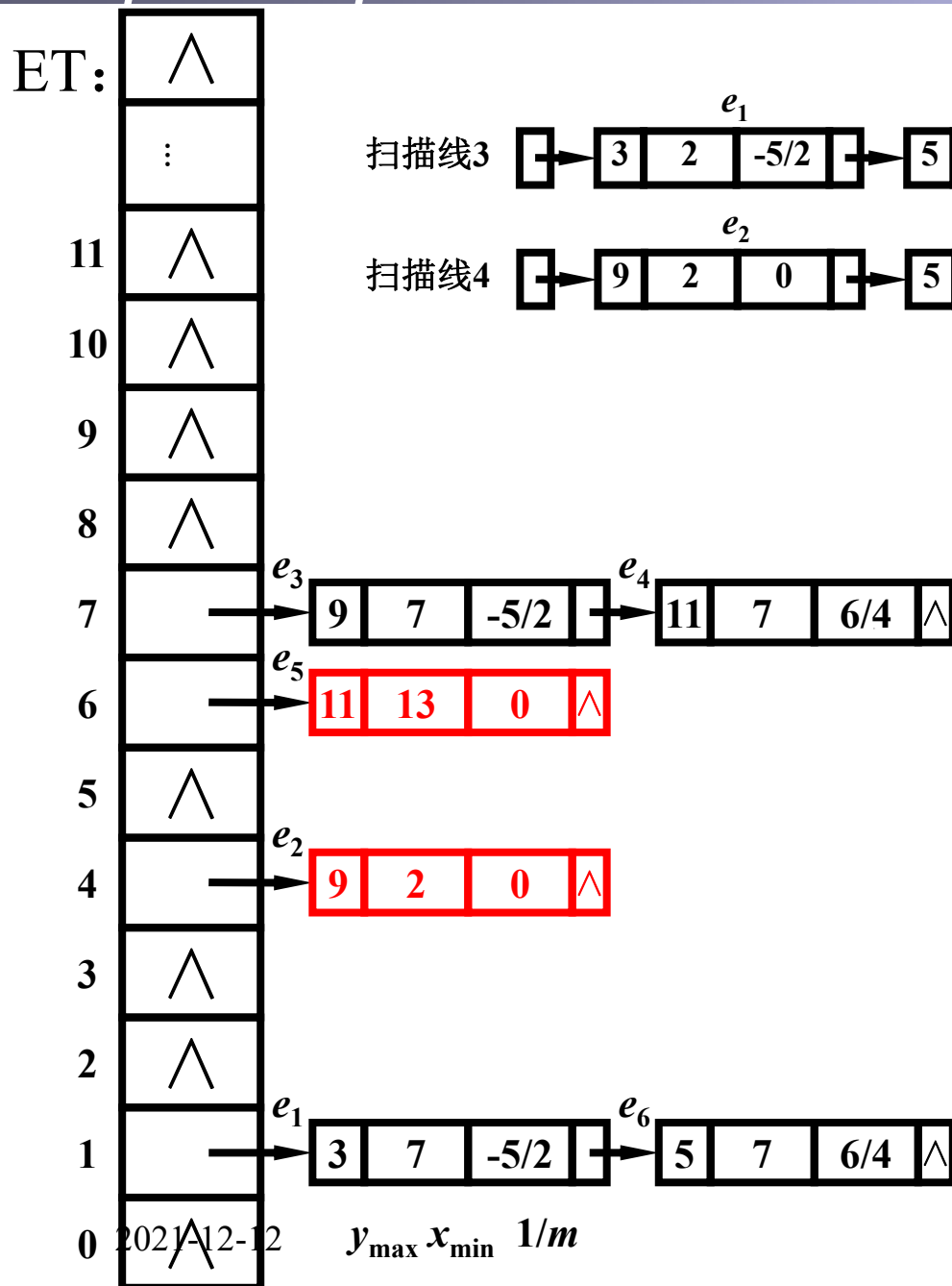


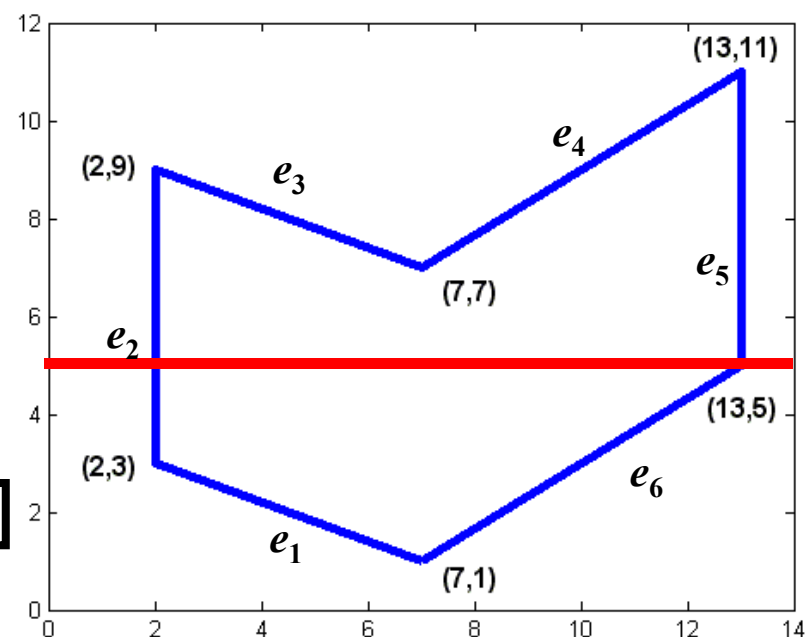
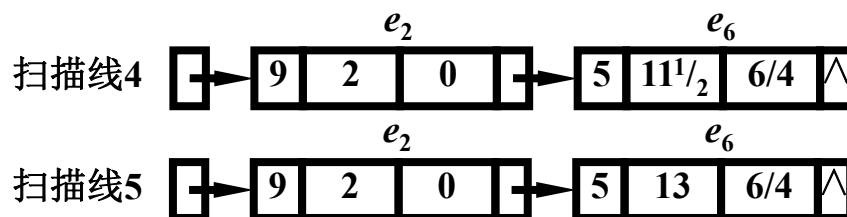
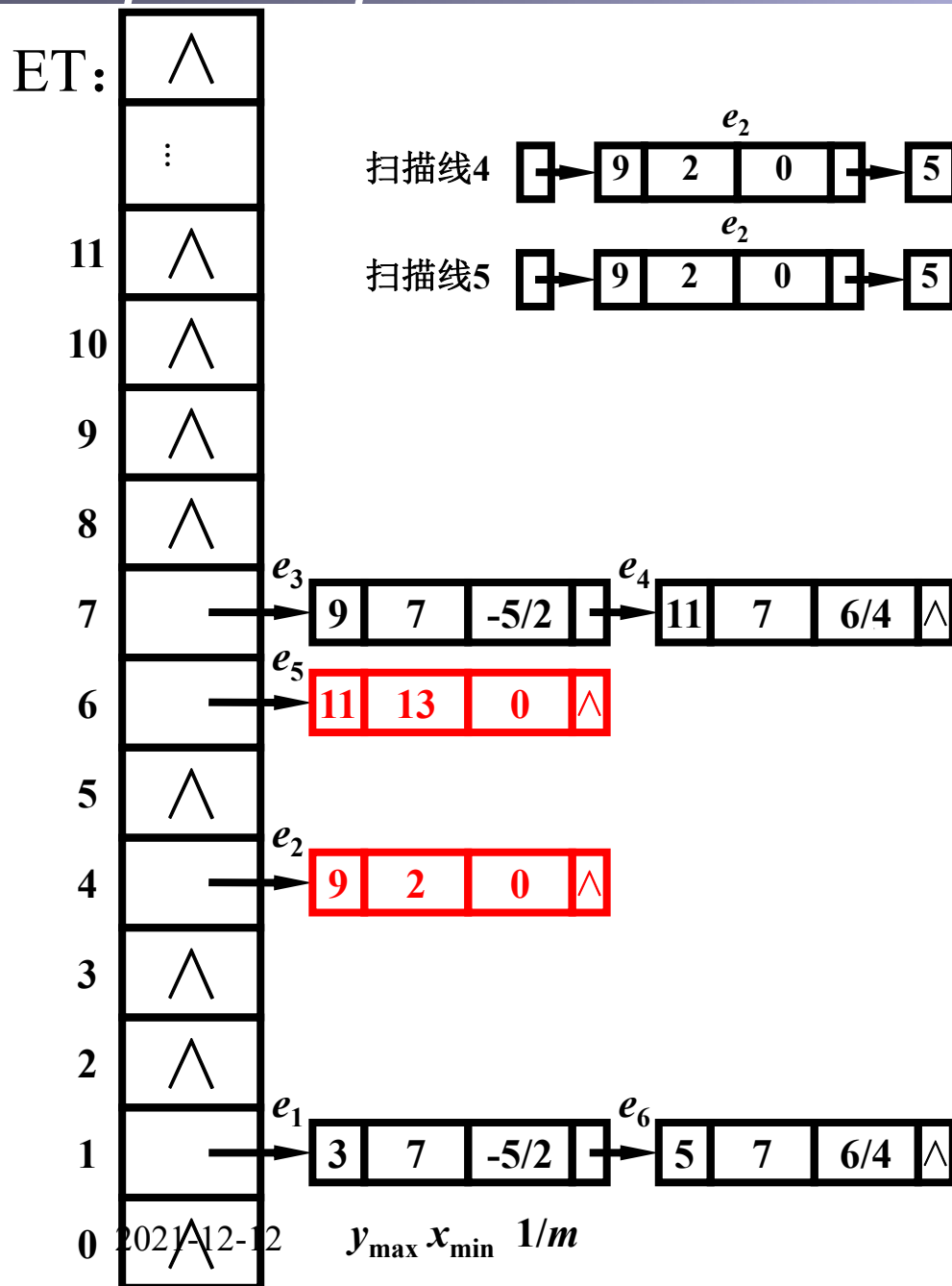


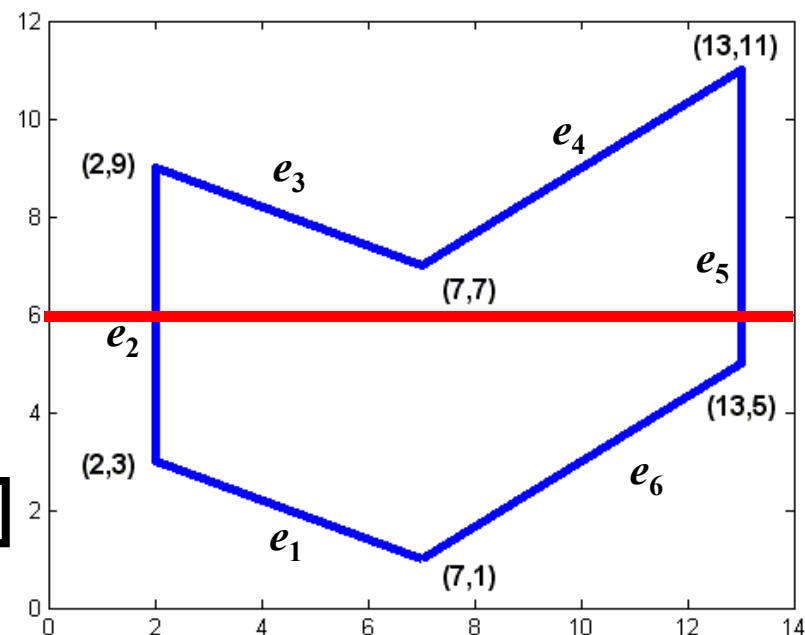
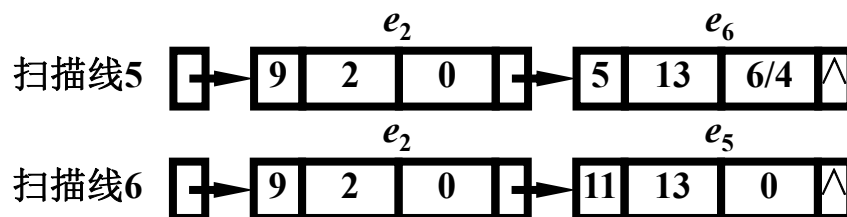
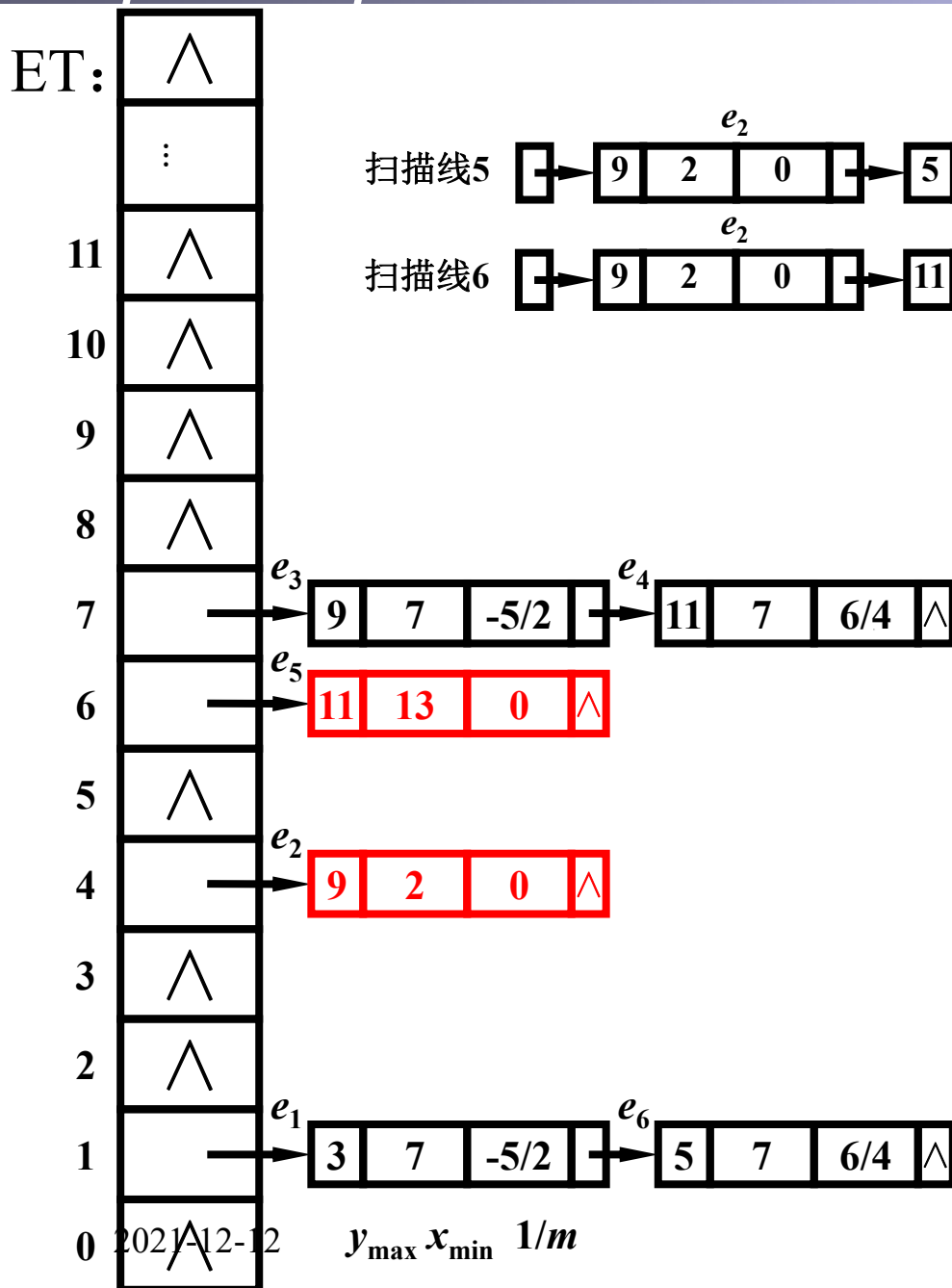








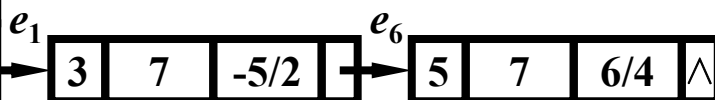
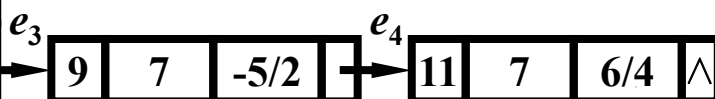
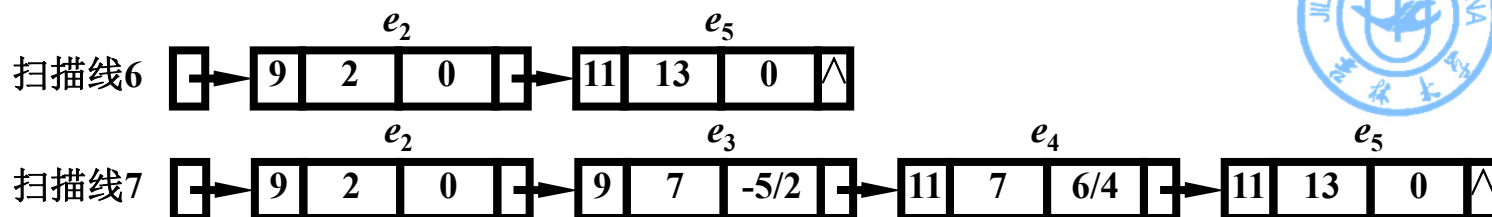




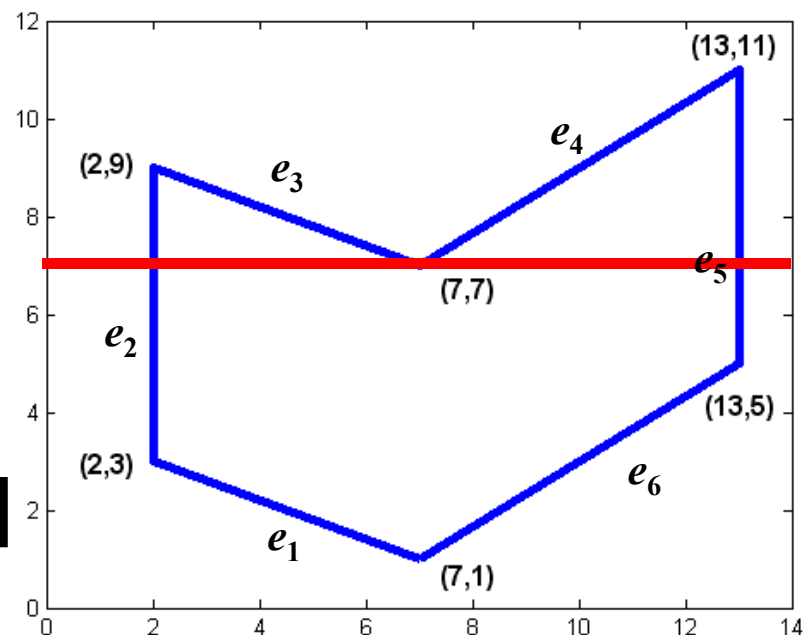


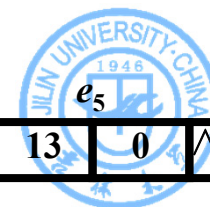
ET:

	^
	:
11	^
10	^
9	^
8	^
7	
6	
5	^
4	
3	^
2	^
1	
0	^



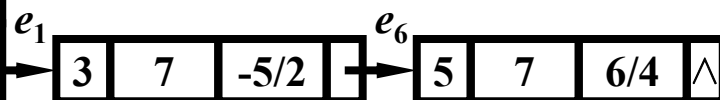
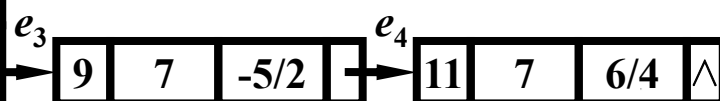
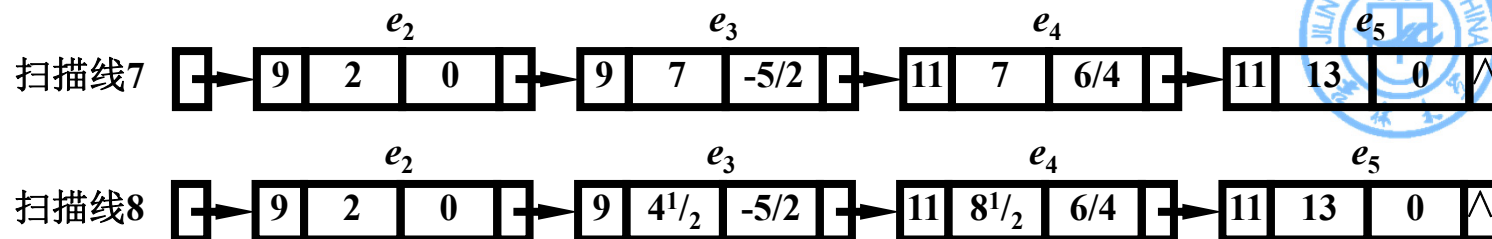
2021-12-12  $y_{\max}$   $x_{\min}$   $1/m$



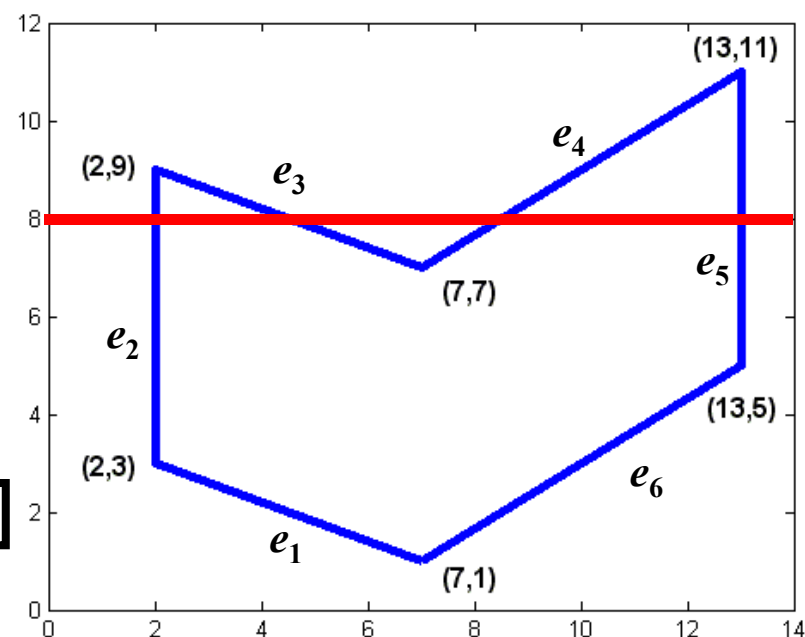


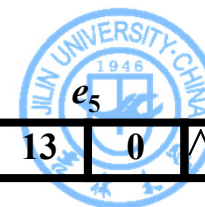
ET:

	^
	:
11	^
10	^
9	^
8	^
7	
6	
5	^
4	
3	^
2	^
1	
0	^



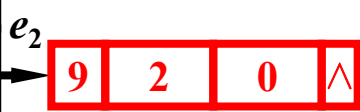
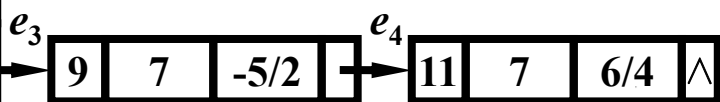
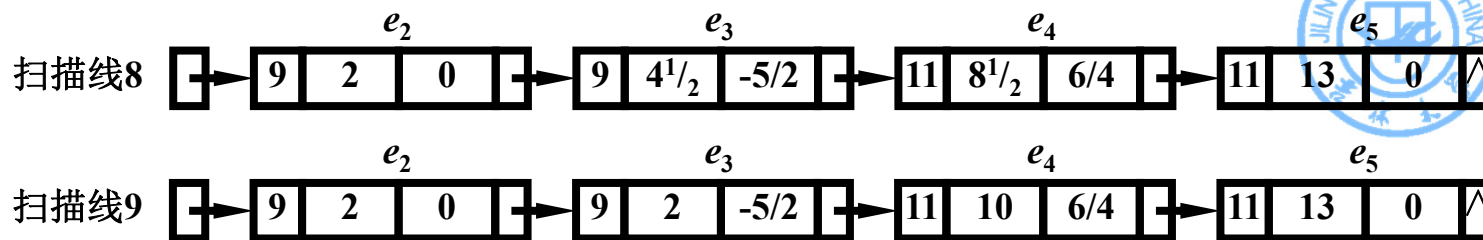
$y_{\max}$   $x_{\min}$   $1/m$



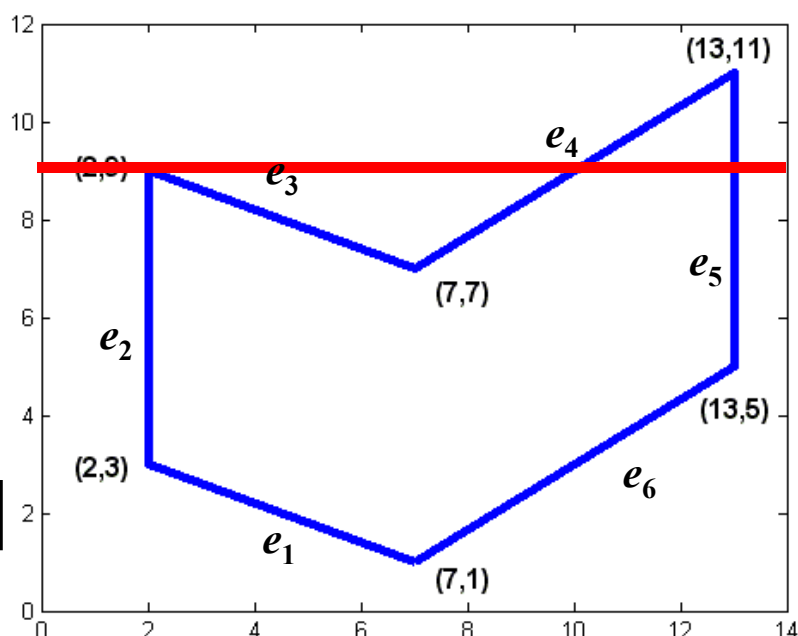


ET:

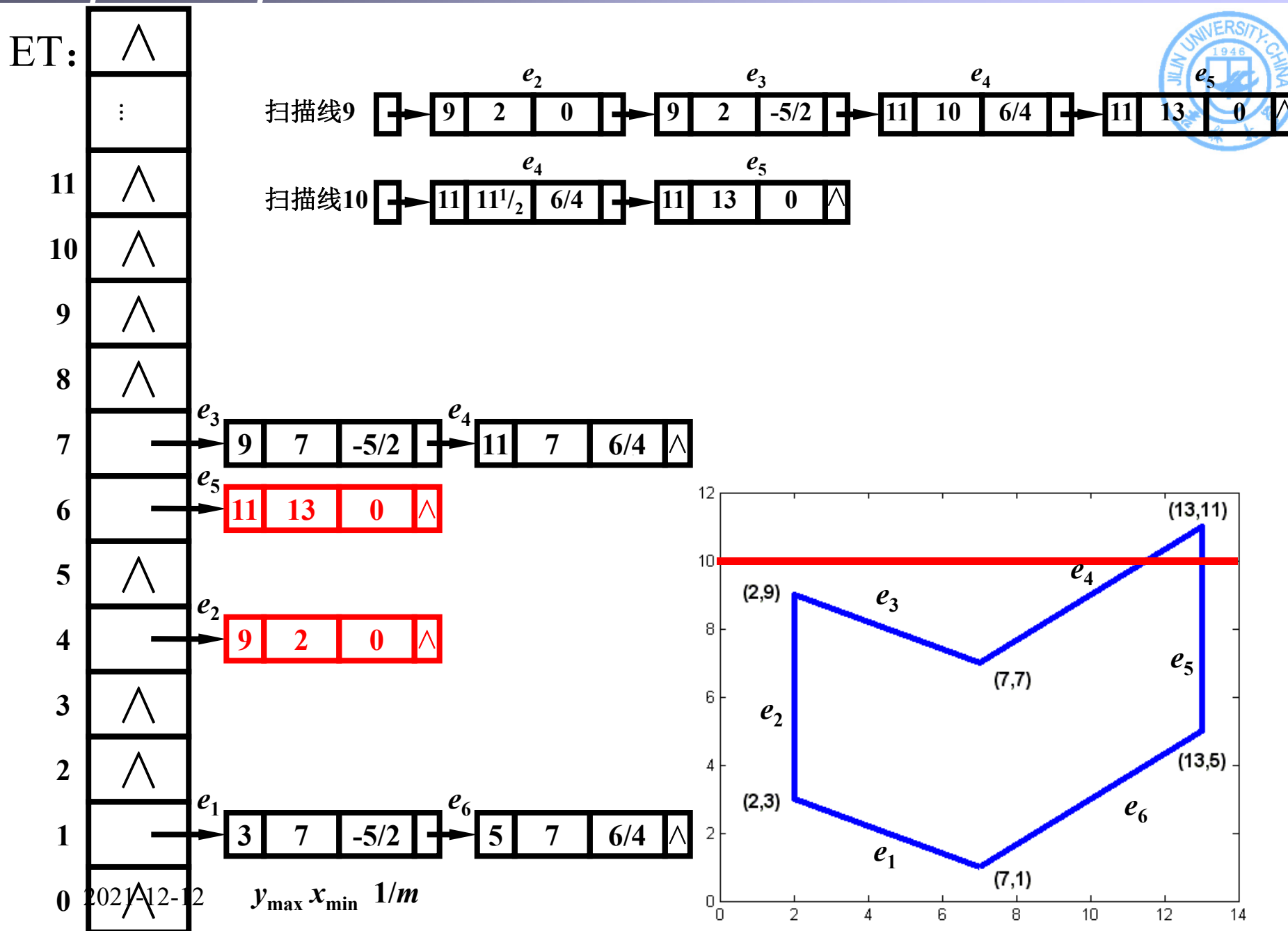
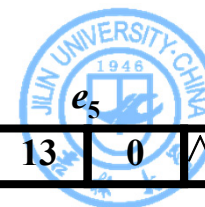
	^
	:
11	^
10	^
9	^
8	^
7	
6	
5	^
4	
3	^
2	^
1	
0	2021/12-12

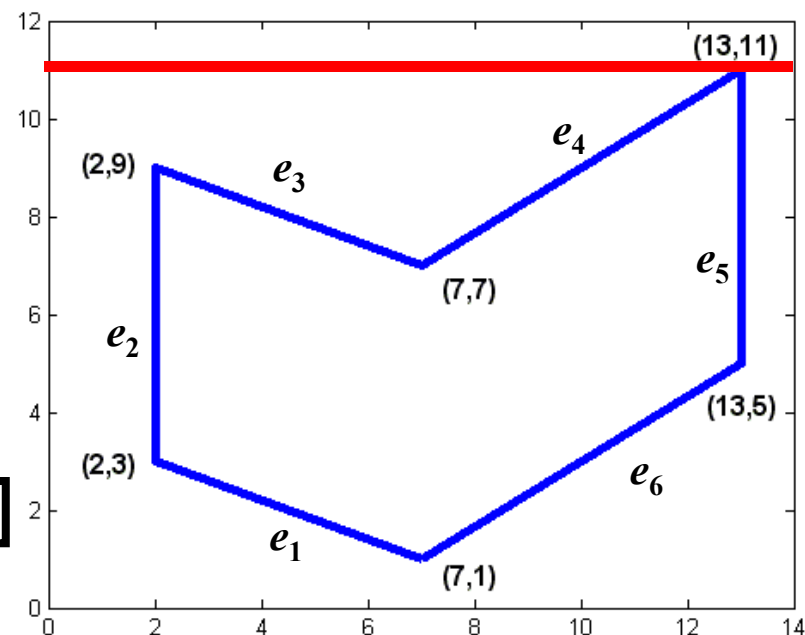
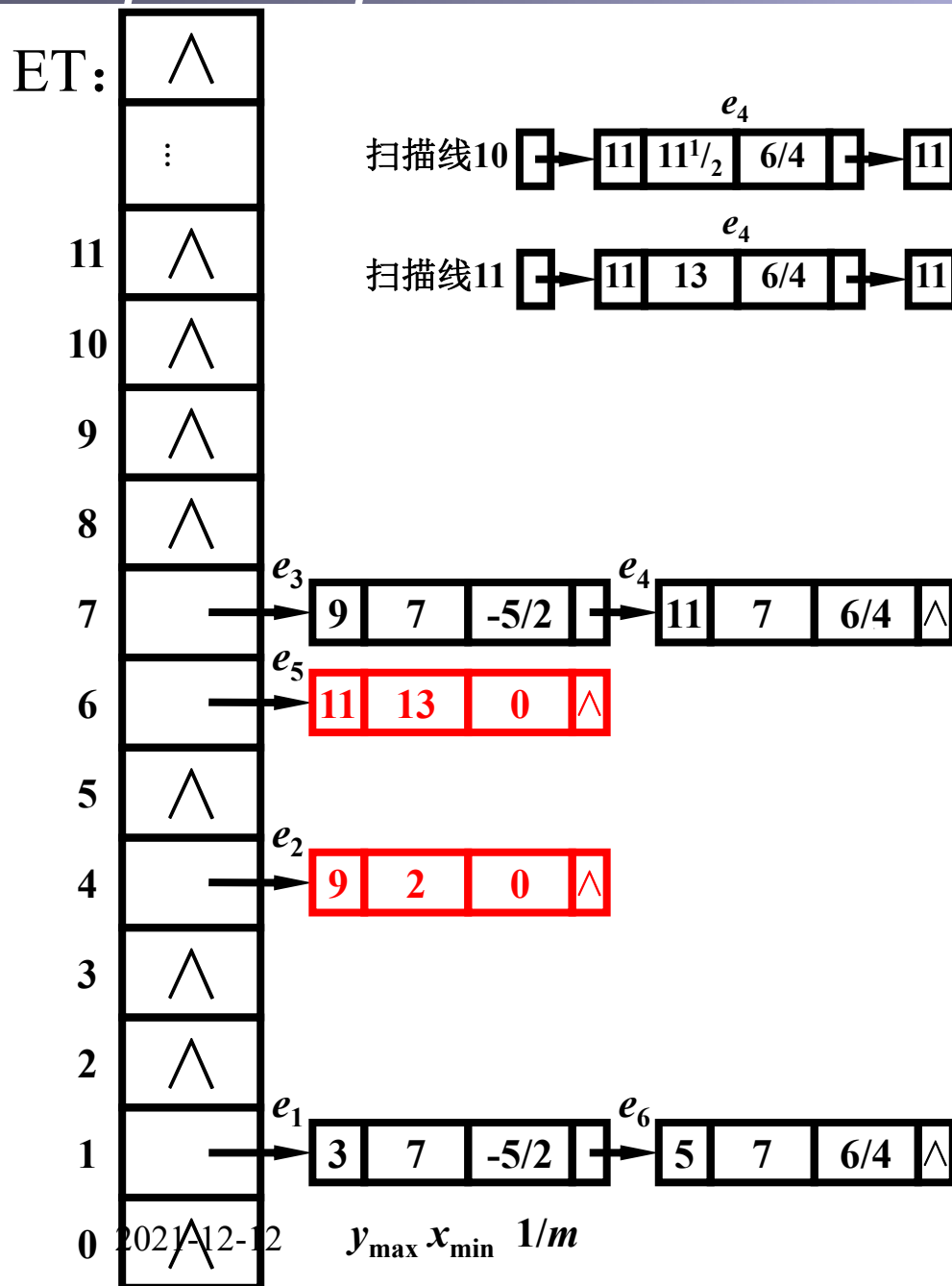


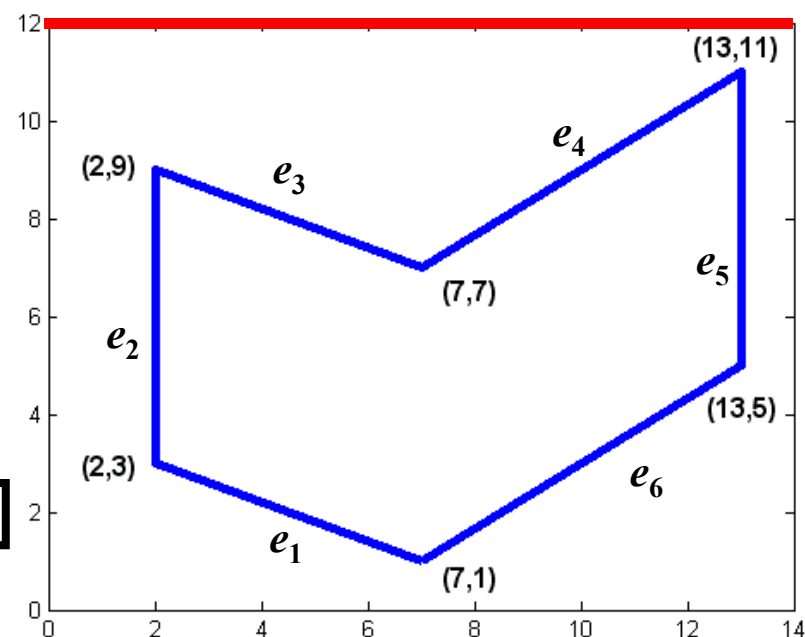
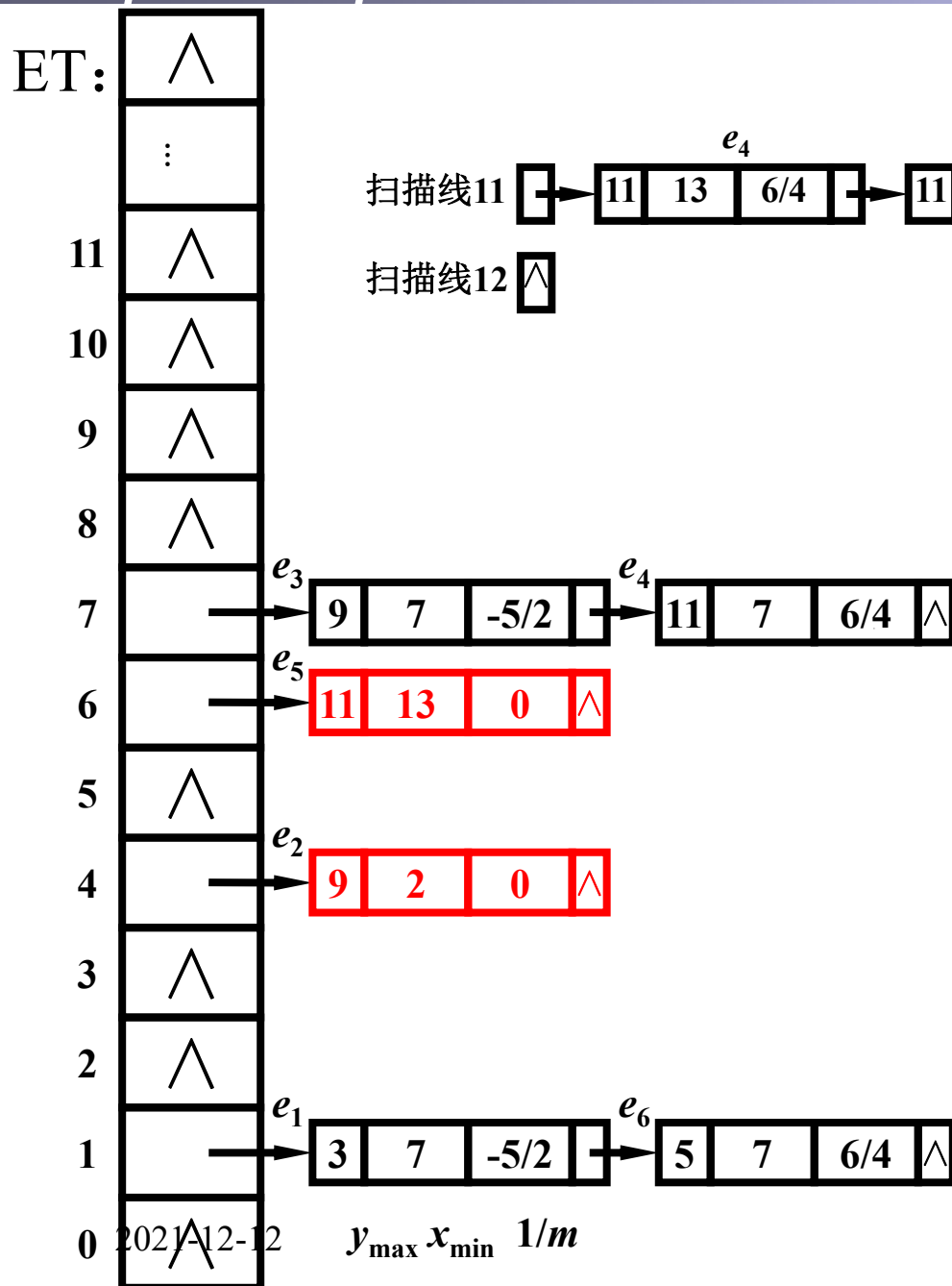
$y_{\max}$   $x_{\min}$   $1/m$

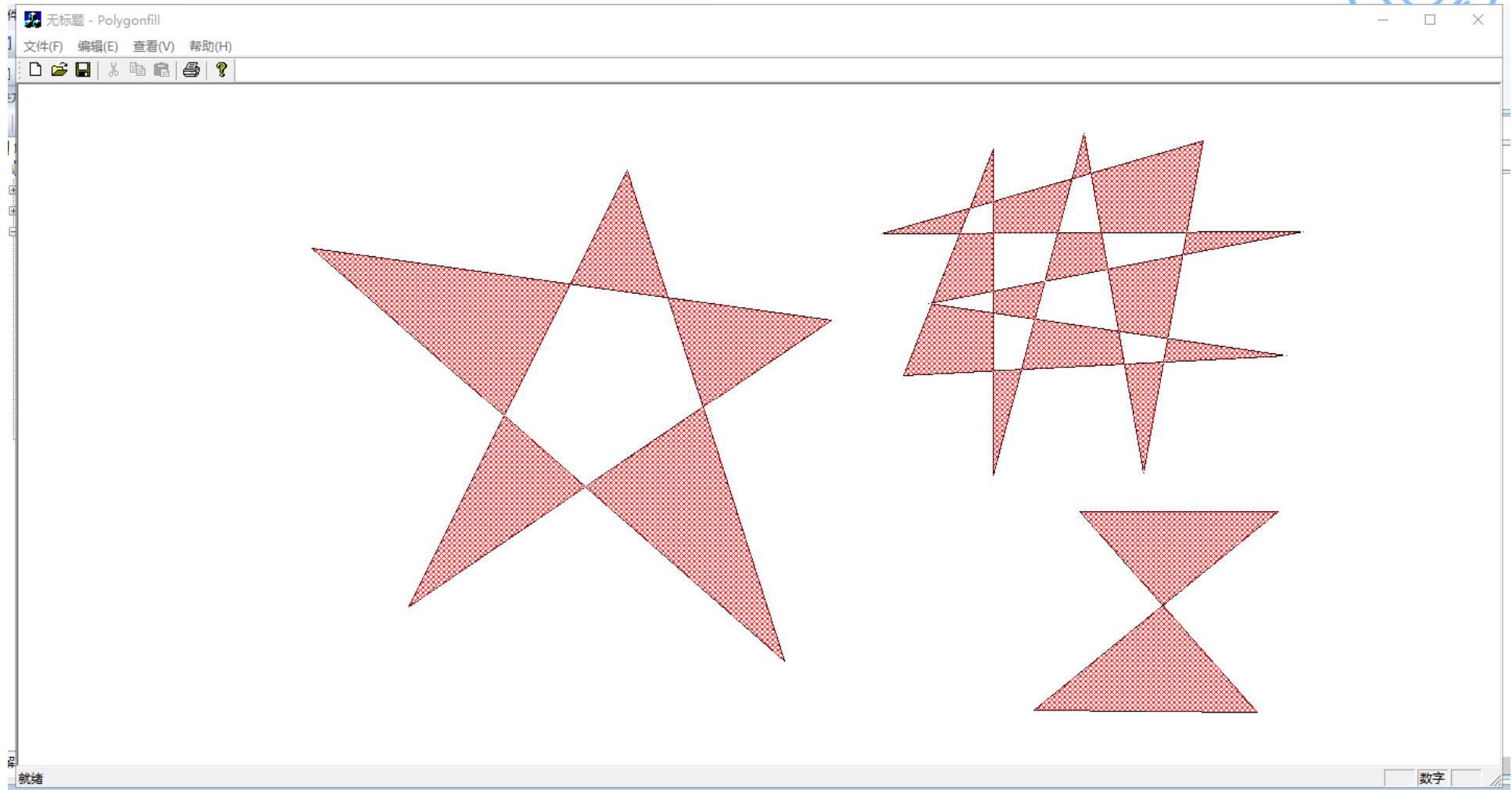








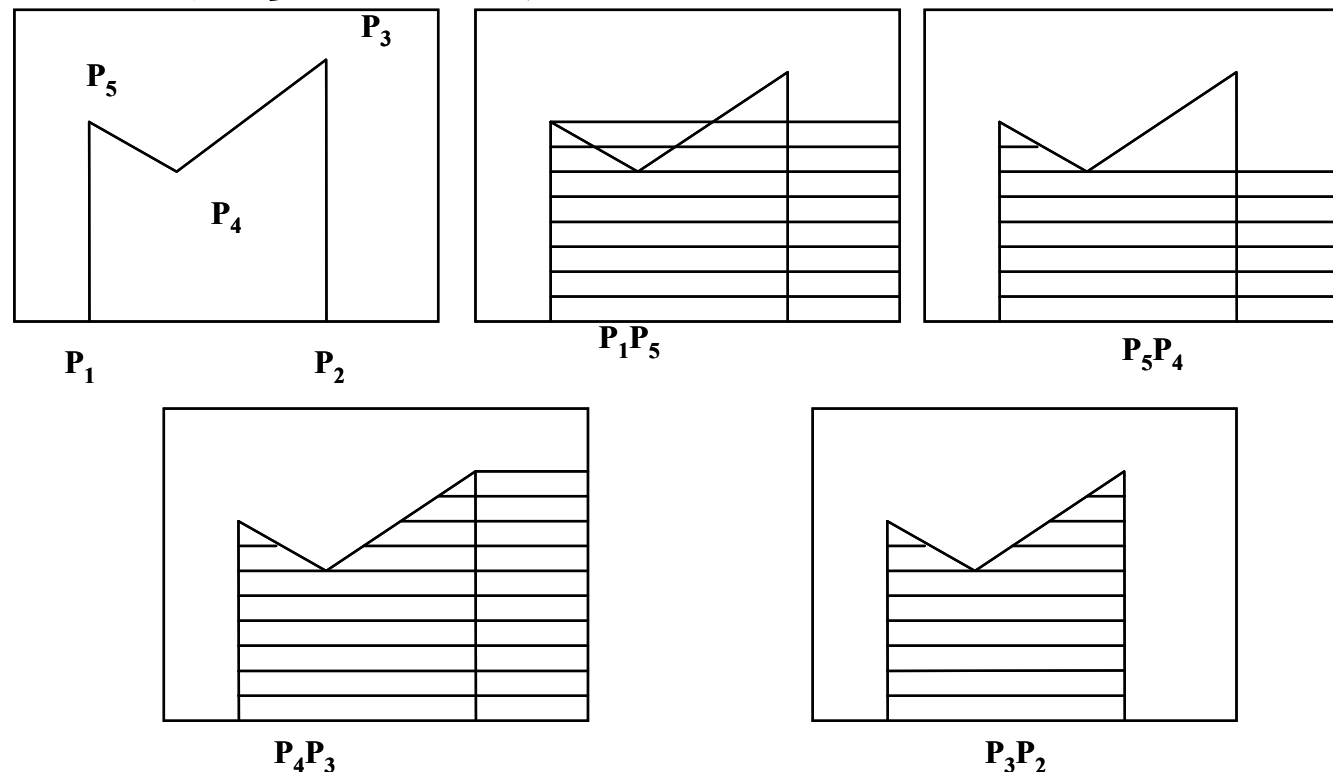






## 四、边填充算法(正负相消法)

基本思想：对于每一条扫描线和每条多边形边的交点  $(x_s, y_s)$ ，都将该扫描线上交点右方的所有像素取补，并对多边形的每条边按一定顺序(逆时针、顺时针均可)做此处理





待填充区域  $D$        $R(x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2) \supset D$

$MASK(x_1 \cdots x_2, y_1 \cdots y_2)$

$MASK(x, y) = false \quad (x, y) \in R$

对区域的每一条边与扫描线的每一个交点  $(x_s, y_s)$

当  $x \geq x_s$  做  $MASK(x, y_s) = \overline{MASK(x, y_s)}$

沿D的边界经历一周后，只要  $(x, y) \in D$

则  $MASK(x, y) = true$       否则  $MASK(x, y) = false$



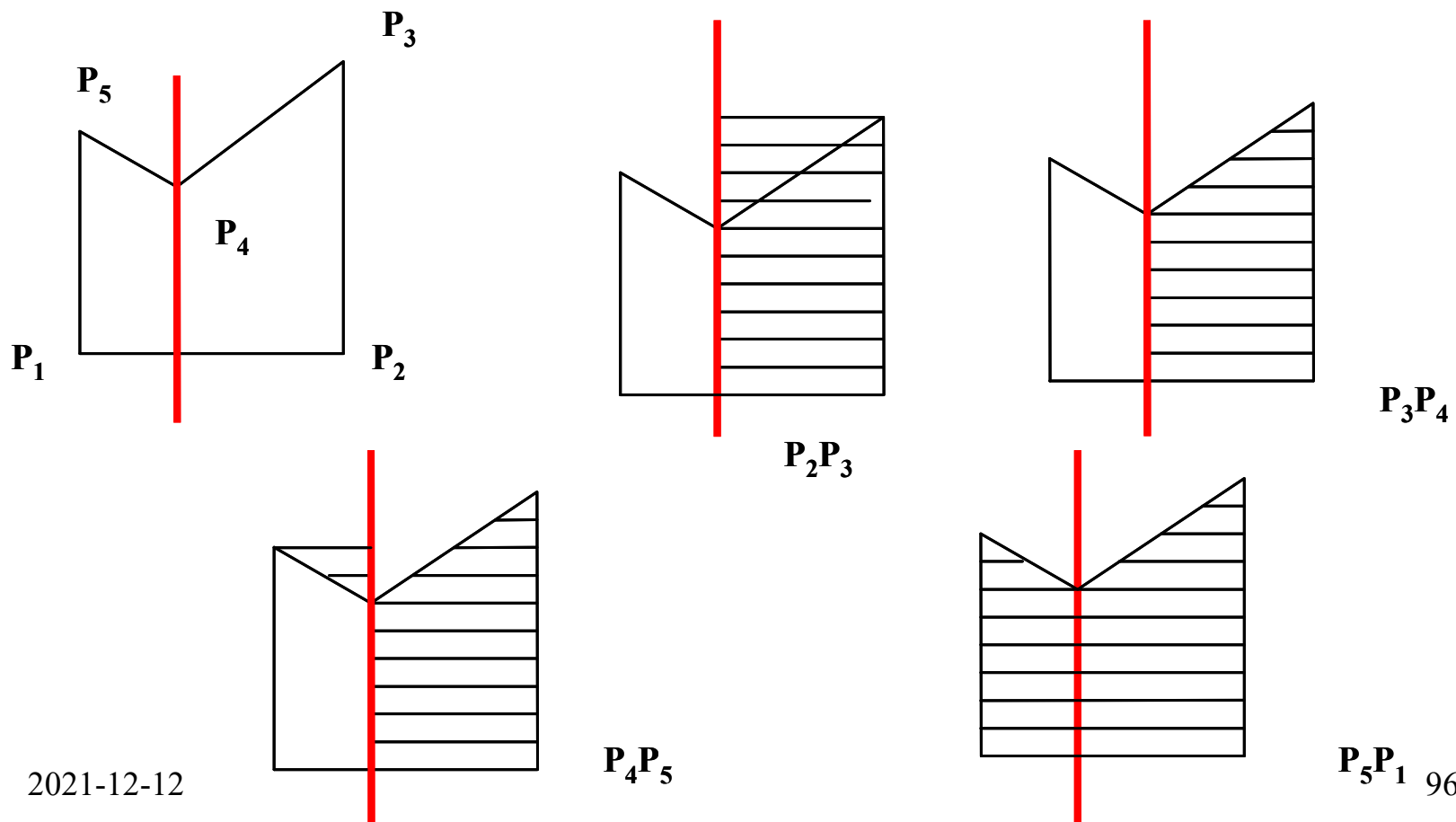
```
    for(y=y1;y<=y2;y++)
        for(x=x1;x<=x2;x++)
            MASK[y][x]=false;
    for(区域D内的每一条边PiPi+1){
        xs=x[i]; dxs=(x[i+1]- x[i])/(y[i+1]- y[i]);
        dys=abs(y[i+1]- y[i])/(y[i+1]- y[i]);
        for(ys=y[i]; ys!= y[i+1];ys+=dys){
            Ixs =int(xs +0.5);
            for(x= Ixs;x<=x2;x++)
                MASK[ys][x] =!MASK[ys][x];
            xs= xs + dys* dxs;
        }
    }
    for(y=y1;y<=y2;y++)
        for(x=x1;x<=x2;x++)
            if(MASK[y][x])
                SetPixel(x,y,color);
}
```



# 栅栏 (一条与扫描线垂直的直线)

栅栏填充基本思想:

对于每条扫描线与多边形的交点, 将交点与栅栏之间的扫描线上的像素取补.







## 边标志算法(轮廓填充算法)

对每个像素访问一次

边标志算法分为两个步骤:

第一步:边界像素打标志;

第二步:填充内部像素。

边标志算法的程序如下:

```
void EdgeMarkFill(PointArray& ptArray, COLORREF color){  
    for(y=y1; y<=y2; y++)  
        for(x=x1; x<=x2; x++)  
            MASK[y][x]=false; //形成轮廓线  
    for(区域D内的每一条边 $P_i P_{i+1}$ ){  
        xs=x[i]; dxs=(x[i+1]-x[i])/(y[i+1]-y[i]);  
        dys=abs(y[i+1]-y[i])/(y[i+1]-y[i]);  
        for(ys=y[i]; ys!=y[i+1]; ys+=dys){  
            Ixs=int(xs+0.5);  
            MASK[ys][Ixs]=!MASK[ys][Ixs];  
            xs=xs+dxs*dys;  
        }  
    }  
}
```



```
for(y=y1;y<=y2;y++){//按轮廓线填充  
    inside=false;  
    for(x=x1;x<=x2;x++){  
        if(MASK[y][x])  
            inside=!inside;  
        if(inside)  
            SetPixel(x,y,color);  
    }  
}  
}
```



## 五、图案填充

图案填充的主要问题是要决定图案区域和填充区域的相互位置关系

第一种方法是采用将图案粘贴在多边形的**顶点**位置，填充图案的视觉效果也是一致的。

第二种方法是采用**绝对定位**，即认为整个屏幕被图案覆盖，则标准的粘贴位置是屏幕的**原点**。其视觉效果可能是有差异的。

设图案通常是由较小的 $m \times n$ 像素阵列  $\text{pattern}[m][n]$  组成的，图案原点对应屏幕的坐标原点(对窗口处理而言，图案原点对应窗口坐标系的原点)，这样就可以用模运算  $x \bmod n$  和  $y \bmod m$  来获取  $x, y$  像素位置所对应的图案像素。<sup>99</sup>



```
void PatternFill(int x, int y, COLORREF* pattern, int m, int  
n){  
    SetPixel(x,y,pattern[y%m][x%n]);  
}  
void ShadowFill(int x, int y, COLORREF color) { // 斜影线填充  
    const int p=5;  
    if((x-y)%p==0)SetPixel(x, y,color);  
}  
void ShadowFill(int x, int y, COLORREF color) { // 对角交叉影  
线填充  
    const int p=5;  
    if(((x+y)%p==0)|| ((x-y)%p==0))SetPixel(x, y,color);  
}
```



m	$\Delta x$	$\Delta y$	$\Delta p(p \geq 0)$	$\Delta p(p < 0)$
$0 \leq m \leq 1$	$>0$	$>0$	$\Delta p = 2dy - 2dx$	$\Delta p = 2dy$
	$<0$	$<0$	$\Delta p = -2dy + 2dx$	$\Delta p = -2dy$
$-1 \leq m \leq 0$	$>0$	$<0$	$\Delta p = 2dy - 2dx$	$\Delta p = -2dy$
	$<0$	$>0$	$\Delta p = -2dy + 2dx$	$\Delta p = 2dy$
$m > 1$	$>0$	$>0$	$\Delta p = 2dx - 2dy$	$\Delta p = 2dx$
	$<0$	$<0$	$\Delta p = -2dx + 2dy$	$\Delta p = -2dx$
$m < -1$	$>0$	$<0$	$\Delta p = 2dx - 2dy$	$\Delta p = -2dx$
	$<0$	$>0$	$\Delta p = -2dx + 2dy$	$\Delta p = 2dx$



```
void BresenhamLine(int x1,int y1,int x2,int y2){
    int x,y,dx,dy,p,xmin,ymin,xmax,ymax,lx,ly,deltax,deltay;
    dx=x2-x1; dy=y2-y1;
    xmin=min(x1,x2);    xmax=max(x1,x2);
    ymin=min(y1,y2);    ymax=max(y1,y2);
    lx=xmax-xmin;       ly=ymax-ymin;
    deltax= (dx==0)?0:(dx>0?1:-1);    deltay= (dy==0)?0:(dy>0?1:-1);
    x=x1;    y=y1;
    if(lx>ly){    p=2*dy-dx;
        for(;x!=x2;x+=deltax){
            SetPixel(x,y,RGB(0,0,0));
            if(p>=0){    y+=deltay;p+=2*(ly-lx);
            }else{    p+=2*ly;
            }
        }
    }else{
        p=2*dx-dy;
        for(;y!=y2;y+=deltay){
            SetPixel(x,y,RGB(0,0,0));
            if(p>=0){    x+=deltax;p+=2*(lx-ly);
            }else{    p+=2*lx;
            }
        }
    }
}
```

2021-12-12



```
void CBresenhamView::BresenhamLine(CDC *pDC, int x1,int y1,int x2,int y2){
    int x,y,dx,dy,p,temp;
    int deltax,deltap1,deltap2,deltax1,deltax2,deltay1,deltay2;
    if(x1>x2){temp = x1;x1 = x2;x2 = temp;temp = y1;y1 = y2;y2 = temp;}
    x=x1;y=y1;
    if(y1<=y2){ deltax=1;
    }else{      deltax=-1;  y1 = -y1;y2 = -y2;}
    dx=x2-x1;dy=y2-y1;
    if(abs(dx)>abs(dy)){
        p=2*dy-dx;deltap1 = 2*(dy-dx);deltap2 = 2*dy;
        deltax1 = 1;deltax2 = 1;
        deltax1 = deltax;deltay2 = 0;
    }else{
        p=2*dx-dy;deltap1 = 2*(dx-dy);deltap2 = 2*dx;
        deltax1 = 1;deltax2 = 0;
        deltax1 = deltax;deltay2 = deltax;
    }
    for(int i=0;i<max(abs(dx),abs(dy));i++) {
        pDC->SetPixel(x,y,RGB(0,0,0));
        if(p>=0) {  x+=deltax1;y+=deltay1;p+=deltap1;
        }else {    x+=deltax2;y+=deltay2;p+=deltap2;
        }
    }
}
```