第一章 多元函数的极限和连续性

我们已经讨论过一元函数微积分, 那里出现的是依赖于一个自变量的所谓一元函数. 然而在实际问题中, 有很多量是由多种因素所决定的, 反映到数学上就是依赖于两个或两个以上自变量的多元函数. 因此, 有必要研究多元函数的微分和积分问题.

本章介绍多元函数的概念、多元函数的极限和连续性的概念及其性质.

这些概念和性质由一元函数推广和发展得来, 由于变量从一个变为多个, 从而产生了不同于一元函数的一些特点. 在学习中应当把握这些特点, 重点掌握多元函数与一元函数在极限和连续性方面的相同点和不同点.

§1 多元函数的概念

1.1 平面点集

我们知道, 为了掌握一元函数, 必须理解实数集 $\mathbf{R}$ 的基本概念. 同样, 在学习多元函数的时候, 首先要了解 $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ 乃至一般的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的基本概念.

将 n 元有序实数组的全体构成的集合记为

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) |\ x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素有时也用单个字母 $\boldsymbol{x}$ 表示, 即 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

在解析几何中, 通过建立直角坐标系, $\mathbf{R}^2$ (或 $\mathbf{R}^3$) 中的元素与平面 (或空间) 中的点形成一一对应关系. 所以 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点, $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标.

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, 定义 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**线性运算**为

$$\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \cdots, \lambda x_n + \mu y_n).$$

$\mathbf{R}^n$ 在上述线性运算下构成一个 n **维线性空间**, 简称为 n 维空间.

$\mathbf{R}^n$ 中两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**距离**定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

n 维线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中引入上述距离以后, 构成一个 n **维 Euclid 空间**, 仍简称为 n 维空间.

下面给出 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的一些概念. 为简便, 以 $\mathbf{R}^2$ 为例加以介绍. $\mathbf{R}^2$ 中的点集称为**平面点集**, $\mathbf{R}^2$ 中的点通常用 $P(x,y)$ 或 P 表示.

1. 邻域

定义 1.1 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2,\delta>0$. 称 $\mathbf{R}^2$ 中与点 P_0 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 组成的平面点集为点 P_0 的 δ **邻域**, 记为 $U(P_0,\delta)$, 即

$$\begin{aligned}U(P_0,\delta)&=\{P|\ \rho(P,P_0)<\delta\}\\&=\{(x,y)|\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.\end{aligned}$$

邻域 $U(P_0,\delta)$ 就是平面上以点 P_0 为中心, 以 δ 为半径的圆的内部.

在邻域 $U(P_0,\delta)$ 中除去点 P_0 得到的平面点集, 称为点 P_0 的**去心 δ 邻域**, 记为 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$, 即

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)&=\{P|\ 0<\rho(P,P_0)<\delta\}\\&=\{(x,y)|\ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.\end{aligned}$$

在不需要强调邻域的半径时, 常用 $U(P_0)$ 或 $\overset{\circ}{U}(P_0)$ 来表示点 P_0 的某个邻域或去心邻域.

2. 内点、外点与边界点

定义 1.2 设点集 $E\subset\mathbf{R}^2$.

(1) 对于点 $P_0\in E$, 若 $\exists\,\delta>0$, 使得 $U(P_0,\delta)\subset E$, 则称 P_0 为点集 E 的**内点**.

(2) 对于点 $P_1\notin E$, 若 $\exists\,\eta>0$, 使得 $U(P_1,\eta)$ 内不含 E 的任何点, 则称 P_1 为 E 的**外点**.

(3) 对于点 $P_2\in\mathbf{R}^2$, 若 $\forall\,\varepsilon>0$, 使得 $U(P_2,\varepsilon)$ 内既有属于 E 的点, 又有不属于 E 的点, 则称 P_2 为 E 的**边界点**. E 的边界点的全体称为 E 的**边界**, 记为 ∂E.

边界点既不是内点也不是外点, 它可能属于 E 也可能不属于 E (图 1.1).

显然, 对于集合 E 及点 P, P 必为 E 的内点或外点或边界点, 三者必具其一.

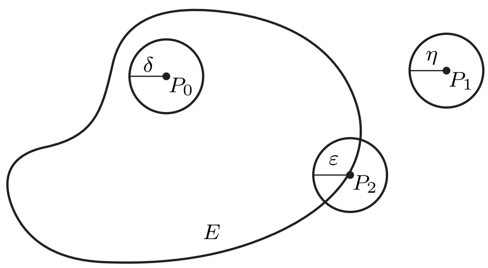

图 1.1

例如, $\mathbf{R}^2$ 中的点集

$$E_1 = \{(x,y) | \ 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}$$

是一个圆环. 这时, 满足

$$1 < x^2 + y^2 < 4$$

的点 $P(x,y)$ 为 E_1 的内点; 满足

$$x^2 + y^2 < 1 \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 > 4$$

的点 $P(x,y)$ 为 E_1 的外点; 而满足

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 = 4$$

的点 $P(x,y)$ 为 E_1 的边界点. 显然, 单位圆周上的点是 E_1 的边界点, 并且属于 E_1; 以原点为中心、以 2 为半径的圆周上的点, 也是 E_1 的边界点, 但不属于 E_1 (图 1.2).

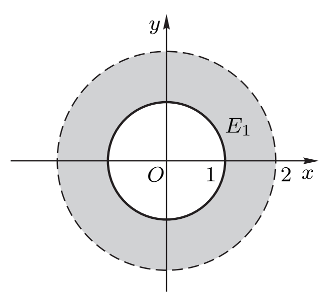

图 1.2

3. 开集与区域

定义 1.3　设点集 $E \subset \mathbf{R}^2$, 若 E 中的每一点都是它的内点, 则称 E 为 $\mathbf{R}^2$ 中的**开集**.

例如, 点集

$$E_2 = \{(x,y) | \ x^2 + y^2 < r^2\}$$

是一个开集. 又如点集

$$E_3 = \{(x,y)|\ a < x < b, c < y < d\}$$

也是一个开集. 但是, 前面例子中的点集

$$E_1 = \{(x,y)|\ 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}$$

不是一个开集, 因为单位圆周上的点属于 E_1, 却不是它的内点.

定义 1.4 设 E 为 $\mathbf{R}^2$ 中的非空点集.

(1) 若对 E 中任意两点 P_1 和 P_2, 总存在完全属于 E 的折线能把 P_1 和 P_2 连接起来, 则称 E 为**连通的**.

(2) 若 E 为连通的开集, 则称 E 为 $\mathbf{R}^2$ 中的**开区域**, 简称为**区域**; 区域 E 和它的边界 ∂E 的并集称为**闭区域**, 记为 $\overline{E}$, 即 $\overline{E} = E \cup \partial E$.

例如, 点集

$$E_4 = \{(x,y)|\ 1 < x^2 + y^2 < 4\},$$
$$E_5 = \{(x,y)|\ x^2 + y^2 < 1 \text{ 或 } x^2 + y^2 > 4\}$$

都是开集. 其中 E_4 是连通的, 所以 E_4 是一个区域, 相应的闭区域为

$$\overline{E}_4 = E_4 \cup \partial E_4 = \{(x,y)|\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\},$$

而 E_5 不是连通的, 所以 E_5 不是区域.

4. 有界集与无界集

定义 1.5 设点集 $E \subset \mathbf{R}^2$, 若 $\exists\, M > 0$, 使得 $E \subset U(O, M)$, 即 E 全部被包含在原点 O 的一个邻域内, 则称 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中的**有界集**, 否则, 称为 $\mathbf{R}^2$ 中的**无界集**.

前面例中的几个点集, 除 E_5 外均为有界集, E_5 为无界集.

***5. 聚点与闭集**

定义 1.6 设点集 $E \subset \mathbf{R}^2$, 点 $P_0 \in \mathbf{R}^2$. 若 $\forall\, \varepsilon > 0$, 在 $U(P_0, \varepsilon)$ 内除点 P_0 外至少还包含 E 的一个点, 则称 P_0 为 E 的**聚点**.

容易看出, 点集 E 的内点一定是它的聚点; E 的外点一定不是它的聚点; 而 E 的边界点, 可能是它的聚点, 也可能不是它的聚点.

例如, 点集

$$E_6 = \{(x,y)|x^2 + y^2 = 0 \text{ 或 } 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}.$$

原点 O 是 E_6 的边界点, 但不是它的聚点; 单位圆周上的点, 是 E_6 的边界点, 也是它的聚点, 并且属于 E_6; 圆周 $x^2+y^2=4$ 上的点, 是 E_6 的边界点, 也是它的聚点, 但不属于 E_6.

定义 1.7　设点集 $E\subset\mathbf{R}^2$. 若 E 的所有聚点都属于 E, 则称 E 为 $\mathbf{R}^2$ 中的**闭集**.

例如

$$E_7=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant r^2\},\quad E_8=\{(x,y)|\ a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$$

都是闭集, 而前面例中的 E_6 不是闭集.

闭区域 $\overline{E}$ 是由它的内点和边界点构成的. 由于区域具有连通性, $\overline{E}$ 的边界点一定是它的聚点, 所以闭区域一定是闭集.

可以证明: 若 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是开集, 则它的余集 E^c 是闭集; 若 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是闭集, 则它的余集 E^c 是开集*.

1.2　多元函数

1. 多元函数的定义

由上册我们知道, 所谓 (一元) 函数是从实数集的子集 $D\subset\mathbf{R}$ 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射.

一般地, 从集合 A 到集合 B 的映射 $f:A\to B$ 是一种对应关系, 它将集合 A 的元素映为集合 B 的元素, 即 $\forall\,x\in A$, 按照对应关系 f, 在 B 中有唯一一个确定的元素 u 与 x 对应.

如果集合 A 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集, B 是实数集 $\mathbf{R}$, 就得到 n 元函数的概念.

定义 1.8　设 D 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集, 将从 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的n **元函数**, 记作

$$f:\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\longmapsto u=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in D$$

或

$$u=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \boldsymbol{x}\in D.$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为**自变量**, u 称为**因变量**, D 称为函数 f 的**定义域**, 集合

$$f(D)=\{f(\boldsymbol{x})|\ \boldsymbol{x}\in D\}\subset\mathbf{R}$$

*约定空集 $\varnothing$ 是开集, 这样 $\varnothing$ 和 $\mathbf{R}^2$ 既是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集, 也是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集.

称为函数 f 的**值域**.

定义中当 $n=2$ 或 3 时, 常用 x,y 或 x,y,z 表示自变量, 而把二元函数和三元函数分别记作

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

和

$$u=f(x,y,z),\quad (x,y,z)\in D.$$

在我们周围, 随处可以见到多元函数的例子. 比如, 设平行四边形相邻两边长为 a 和 b, 夹角为 θ, 则平行四边形的面积

$$A=ab\sin\theta$$

是以 a,b,θ 为自变量的三元函数, 定义域为 $D=\{(a,b,\theta)|\ a>0,b>0,0<\theta<\pi\}$.

再如, 电阻 R_1 和 R_2 并联后的总电阻

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

是以 R_1,R_2 为自变量的二元函数, 这里 $R_1>0,R_2>0$.

在多元函数的概念中, 有两个基本要素, 即定义域和对应关系.

实际问题中的多元函数, 其定义域由问题的实际意义所确定, 如以上两例.

对于用某个算式表达的多元函数, 我们约定, 除另有说明外, 其定义域是所谓的自然定义域, 即使得算式有意义的自变量取值的集合.

例如, 二元函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的自然定义域为 $D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant 1\}$ (图 1.3).

又如, 二元函数 $z=\ln(xy)$ 的自然定义域为 $D=\{(x,y)|\ xy>0\}$ (图 1.4).

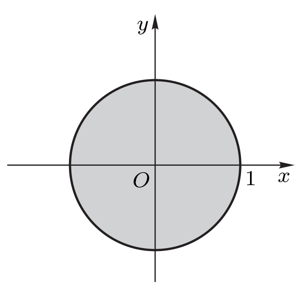

图 1.3

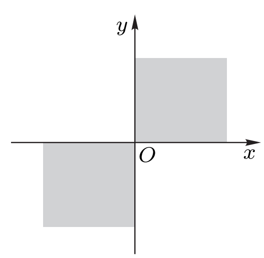

图 1.4

2. 二元函数的几何表示

在一元函数微积分中, 通过建立函数与平面曲线之间的联系, 使得我们可以借助于几何直观来更好地理解诸如微分中值定理等微积分的理论问题, 也使我们能用微积分方法来研究一些几何问题, 例如曲线的切线、曲率、平面图形的面积, 等等. 现在我们来考察二元函数的几何图形.

设有二元函数

$$z = f(x,y), \qquad (x,y) \in D.$$

建立了空间直角坐标 $Oxyz$ 以后, 定义域 D 是坐标平面 Oxy 上的点集. 由二元函数的定义, 对于任一个点 $P(x,y) \in D$, 都有一个确定的函数值 $z = f(x,y)$, 以这个 z 为竖坐标, 这样就得到空间 $Oxyz$ 中一点 $M(x,y,f(x,y))$. 称三维空间中的点集

$$W = \{(x,y,z) |\ z = f(x,y), \quad (x,y) \in D\}$$

为二元函数 $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ 的**图像**.

在几何上, W 通常是空间一张曲面, 这张曲面在坐标面 Oxy 上的投影就是函数 $z = f(x,y)$ 的定义域 D (图 1.5).

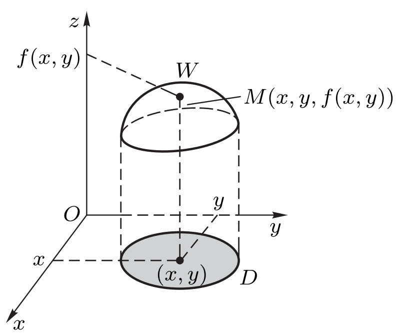

图 1.5

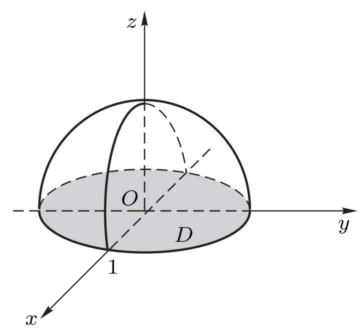

图 1.6

例如, 函数 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2 \leqslant 1$ 的图像是以原点为心的单位球的上半球面, 它在 Oxy 坐标面上的投影是圆域 $D = \{(x,y) |\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$, D 就是函数 $z = \sqrt{1-x^2+y^2}$ 的定义域 (图 1.6).

习　题　1.1

(A)

1. 设函数 $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$, 求

(1) $f(-2,3)$; (2) $f\left(\frac{1}{x},\frac{2}{y}\right)$; (3) $\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

2. 确定下列函数的定义域 D, 指出 D 是否为区域, 是开区域还是闭区域, 是否有界, 并画出 D 的图形.

(1) $f(x,y)=\ln[(16-x^2-y^2)(x^2+y^2-4)]$;

(2) $f(x,y)=\sqrt{6-2x-3y}$;

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

(4) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2-2xy}}$.

3. 设 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 求 $f(x,y)$.

4. 设 $f\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, 求 $f(x,y)$.

§2 多元函数的极限

与一元函数微积分一样, 多元函数的极限是多元函数微积分的基础.

2.1 二重极限

1. 二重极限的定义

定义 2.1 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某去心邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 内有定义, A 为常数, 若 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 使得当 $P\in\mathring{U}(P_0,\delta)$, 即

$$0<\rho(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时, 有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $P\to P_0$ 时, 函数 $f(x,y)$ 以 A 为**极限**, 记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

也简记作

$$f(P)\to A\ \ (P\to P_0) \quad 或 \quad f(x,y)\to A\ \ ((x,y)\to(x_0,y_0)).$$

为了区别于一元函数的极限, 我们把二元函数的极限叫做**二重极限**.

该定义用邻域来叙述: 只要点 $P(x,y)$ 落入以 P_0 为中心, δ 为半径的去心邻域, 其函数值就满足 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

例 2.1　证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证明　因为

$$|xy|\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

所以

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

$\forall\ \varepsilon>0$, 欲使 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$, 只需 $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$, 即 $\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$, 故只要取 $\delta=2\varepsilon$, 则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon,$$

由定义知, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$. □

应当指出, 按照二重极限的定义, 当动点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 函数 $f(x,y)$ 必须都趋于 A, 才有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A.$$

如果 $P(x,y)$ 以某种特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 趋于常数 A, 那么还不能断定 $f(x,y)$ 存在极限. 但是如果 $P(x,y)$ 以不同的方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, $f(x,y)$ 趋于不同的常数, 则能断定 $f(x,y)$ 的极限不存在.

例 2.2　设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 证明: 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在.

证明　当点 (x,y) 沿 x 轴 $(y=0)$ 趋于 $(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

同样, 沿 y 轴也有

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

但是, 沿着直线 $y=kx\ (k\neq0)$, 有

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}\neq0.$$

所以, 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在. $\square$

有时, 点 P 沿所有直线趋于点 P_0 时, 函数值趋于同一常数, 但考察点 P 以某种其他方式趋于点 P_0 时, 函数值趋于不同的常数, 这时也能断定函数的极限不存在.

例 2.3 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, 证明: 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在.

证明 沿着 x 轴和 y 轴趋于 $(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0,\qquad \lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0.$$

沿着直线 $y=kx$ $(k\neq 0)$, 也有

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=0.$$

但是, 沿着抛物线 $y=kx^2$ $(k\neq 0)$, 有

$$\lim_{(x,kx^2)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}\neq 0.$$

所以, 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在. $\square$

*2. 利用聚点概念定义二重极限

根据二重极限的定义, 在考虑极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 时, 函数可以在点 P_0 无定义, 但它必须在 P_0 的某去心邻域内有定义. 这样就限制了极限的讨论范围. 比如, 对函数 $x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$ 就不能考虑当 $(x,y)\to(0,0)$ 的极限, 因为它们在点 $(0,0)$ 的任何去心邻域内都有无定义的点. 如果引用聚点概念, 就可以得到更广泛意义下的二重极限定义.

定义 2.2 设 $f(P)=f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点, A 为常数. 若 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 使得当 $P(x,y)\in D\cap\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$ 时, 有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称当 $P\to P_0$ 时, 函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限, 记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A\quad 或\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A.$$

例 2.4 证明 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right)=0.$

证明 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)|\ x\neq 0, y\neq 0\}.$$

$P_0(0,0)$ 是 D 的聚点. 因为当 $x\neq 0, y\neq 0$ 时,

$$|f(x,y)-0|=\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant |x|+|y|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2},$$

故 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{2}\varepsilon$, 则当 $(x,y)\in D$, 且 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)=0.$ □

2.2 极限的运算法则

二重极限的定义与一元函数极限的定义有着完全相同的形式, 这使得一元函数极限的性质, 如极限的唯一性、局部有界性、局部保号性与夹挤定理等, 都可以推广到二重极限.

下面是有关二重极限的运算法则.

定理 2.1 (四则运算法则) 设当 $P\to P_0$ 时, 极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$, $\lim\limits_{P\to P_0}g(P)$ 存在, 则

(1) $\lim\limits_{P\to P_0}[f(P)\pm g(P)]=\lim\limits_{P\to P_0}f(P)\pm\lim\limits_{P\to P_0}g(P)$;

(2) 对任何常数 c, $\lim\limits_{P\to P_0}cf(P)=c\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$;

(3) $\lim\limits_{P\to P_0}[f(P)g(P)]=\lim\limits_{P\to P_0}f(P)\cdot\lim\limits_{P\to P_0}g(P)$;

(4) 当 $\lim\limits_{P\to P_0}g(P)\neq 0$ 时,

$$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)}{g(P)}=\frac{\lim\limits_{P\to P_0}f(P)}{\lim\limits_{P\to P_0}g(P)}.$$

定理 2.2 (复合函数的极限) 设

(1) $u=f(P)$ 是定义在 D 上的二元函数, 值域为 $f(D)$, 极限 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$;

(2) $z=\varphi(u)$ 是定义在 I 上的一元函数, 极限 $\lim\limits_{u\to A}\varphi(u)=B$;

(3) $f(D)\subset I$, 且对于 D 中点 P_0 附近*的点 $P\neq P_0, f(P)\neq A$. 则

$$\lim_{P\to P_0}\varphi[f(P)]=B.$$

*指的是该点的某邻域内使函数有定义的点集.

证明这些结论的方法与一元函数相应结果的证明方法是类似的, 请读者自行验证.

例 2.5 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$.

解 令 $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{y}$, 则函数 $f(x,y)$ 的定义域 $D=\{(x,y)|\, y\neq 0\}$, $P_0(1,0)$ 是 D 的聚点.

由极限的运算法则

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\sin(xy)}{y}&=\lim_{(x,y)\to(1,0)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x\right]\\&=\lim_{xy\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{x\to 1}x=1\cdot 1=1.\end{aligned}$$

*2.3 二次极限

在讨论二元函数的极限时, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 意味着关于 x 和 y 是同时取极限的, 故称之为二重极限. 相对于二重极限, 还有所谓的二次极限.

定义 2.3 设函数 $f(x,y)$. 若对任一固定的 $y\neq y_0$, 存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$, 且存在极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$, 则称 A 为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处先对 x 后对 y 的**二次极限**, 记为

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=A.$$

类似地, 可定义 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处先对 y 后对 x 的二次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y).$$

我们自然要问, 二重极限与二次极限之间有什么关系?

例如, 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0,\\[2mm] 0, & x=0 \text{ 或 } y=0.\end{cases}$$

在例 2.4 中我们已经证明了, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的二重极限存在, 并且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

但是, 由于 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}=0, \lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在, 所以二次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 不

存在.

同理, 二次极限 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 也不存在.

再如, 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\[2ex] 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,\quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0.$$

但是, 在例 2.2 中我们证明了二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

由这两个例子可看出, 二重极限的存在性与二次极限的存在性没有必然联系.

我们还要问, 如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处先对 x 后对 y 以及先对 y 后对 x 的两个二次极限都存在, 它们是否一定相等?

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\[2ex] 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然有

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}[-(1+y^2)]=-1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}(1+x^2)=1.$$

由该例可看出, 即使两个二次极限都存在, 它们也不一定相等, 即二次极限不一定能交换次序.

但是可以证明, 当 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的二重极限及两个二次极限都存在时, 它们必相等, 即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

此时, 二次极限可以交换顺序.

习 题 1.2

(A)

1. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$; (4) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

2. 设 $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$.

(1) 验证当 (x,y) 沿着直线 $y=kx$ $(k\neq-1)$ 趋于 (0,0) 时, $f(x,y)$ 趋于 $\dfrac{1-k}{1+k}$;

*(2) 求 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$;

(3) 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.

3. 证明定理 2.1.

(B)

1. 证明:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{x+y}$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=0$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy\ln(x^2+y^2)$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

3. 设 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, 证明:

(1) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$;

(2) 二次极限 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 不存在.

§3　多元函数的连续性

3.1　连续函数

1. 连续函数的定义

与一元函数一样, 仍用极限值等于函数值来定义多元函数的连续性.

定义 3.1　设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内有定义. 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

即 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0$, 使得当

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时, 有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 **连续**, P_0 称为 $f(x,y)$ 的**连续点**. 否则, 称 $f(x,y)$ 在点 P_0 **不连续**或**间断**, P_0 称为 $f(x,y)$ 的**间断点**.

如果 $f(x,y)$ 在定义域 D 的每一点都连续, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 或称 $f(x,y)$ 是 D 上的**连续函数**. 记为 $f\in C(D)$ [*].

以上关于二元函数的连续性概念可以推广到 n 元函数上去.

例 3.1　设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 连续.

证明　当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$|f(x,y)-f(0,0)|=|xy|\cdot\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|xy|\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

而当 $x^2+y^2=0$ 时, $|f(x,y)-f(0,0)|=0$.

于是 $\forall\,\varepsilon>0$, 取 $\delta=\sqrt{2\varepsilon}$, 则当 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 便有

$$|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon.$$

[*] $C(D)$ 表示 D 上所有连续函数的集合.

所以, $f(x,y)$ 在点 (0,0) 连续. □

2. 连续函数的运算法则

根据极限的运算法则和连续函数的定义, 与一元函数情形类似, 可以证明连续函数有下面的运算法则.

定理 3.1 (四则运算法则) 设 $f(x,y),g(x,y)$ 都在 D 上连续, 则 $f(x,y)\pm g(x,y)$, $f(x,y)g(x,y)$ 也在 D 上连续; 在 D 中除去使 $g(x,y)=0$ 的点外, $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ 也连续.

定理 3.2 (复合函数的连续性) 设

(1) 函数 $u=f(x,y)$ 在 D 上连续, 值域为 $f(D)$;

(2) 函数 $z=\varphi(u)$ 在 I 上连续;

(3) $f(D)\subset I$.

则复合函数 $z=\varphi[f(x,y)]$ 在 D 上连续.

对于其他形式的复合函数, 也有类似的结论.

定理 3.3 设

(1) 函数 $u=f(x,y),v=g(x,y)$ 都在 D 上连续, 它们的值域分别为 $f(D),g(D)$;

(2) 函数 $z=\varphi(u,v)$ 在 E 上连续;

(3) $f(D)\times g(D)\subset E$ *.

则复合函数 $z=\varphi[f(x,y),g(x,y)]$ 在 D 上连续.

3. 多元函数关于单变量的连续性

有时, 我们要考虑二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于单变量 x 或 y 的连续性. 固定 $y=y_0$, 则 $f(x,y_0)$ 成为 x 的一元函数; 同理固定 $x=x_0$, 则 $f(x_0,y)$ 成为 y 的一元函数.

(1) 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 则函数 $f(x,y_0)$ 在点 x_0 处连续, $f(x_0,y)$ 在点 y_0 处连续. 这是因为

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$
$$\lim_{y\to y_0} f(x_0,y)=\lim_{\substack{x=x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

这时我们说, $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处分别关于变量 x 和 y 连续.

(2) 反过来, 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于变量 x 和 y 都连续, 它在该点处不一定连续.

---

*点集 U 和 V 的笛卡儿积 (Cartesian product) 记为 $U\times V, U\times V=\{(u,v)|\ u\in U, v\in V\}$.

例如, 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=0=f(0,0),\quad \lim_{y\to 0}f(0,y)=0=f(0,0).$$

即 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 关于变量 x 和 y 都连续. 但是, 在例 2.2 中我们证明了当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在, 从而它在 (0,0) 点不连续.

3.2 有界闭区域上连续函数的性质

闭区间上的一元连续函数的性质, 都可以推广到多元函数上去. 以二元函数为例列举如下.

定理 3.4 (有界性定理) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则它在 D 上有界, 即 $\exists\, M>0$, 使得 $\forall\,(x,y)\in D$ 都有

$$|f(x,y)|\leqslant M.$$

定理 3.5 (最值定理) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则它在 D 上必有最大值和最小值, 即 $\exists$ (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\in D$, 使得 $\forall\,(x,y)\in D$, 都有

$$f(x_1,y_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_2,y_2).$$

定理 3.6 (介值定理) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则它必取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值, 即 $\forall\,\mu\in[m,M]$, 至少存在一点 $(x_0,y_0)\in D$, 使得 $f(x_0,y_0)=\mu$.

***定理 3.7** (一致连续性定理) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则它在 D 上**一致连续**, 即 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\,(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, 当

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$$

时, 有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

3.3 多元初等函数的连续性

本章最后, 我们指出, 任何一个定义在较低维空间的函数, 如果有必要, 总可以看成是一个定义在较高维空间上的函数. 比如定义在区间 $I=[-1,1]$ 上的一

元函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, 可看成是定义在 $D=I\times\mathbf{R}=\{(x,y)|x\in I,y\in\mathbf{R}\}$ 上的二元函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}$ (自变量 y 没有出现); 也可看成是定义在 $\Omega=I\times\mathbf{R}^2=\{(x,y,z)|x\in I,(y,z)\in\mathbf{R}^2\}$ 上的三元函数 $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2}$ (自变量 y 和 z 没有出现). 可以证明, 若一元函数 $f(x)$ 在 I 上连续, 则它作为二元函数在 $D=I\times\mathbf{R}$ 上也连续, 作为三元函数在 $\Omega=I\times\mathbf{R}^2$ 上也连续.

有了这些准备, 就可以讨论多元初等函数问题了. 一个多元初等函数是指由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算得到的, 并且能够用一个算式表达的多元函数. 例如

$$x^2+y^2,\quad \frac{x-y}{x+y},\quad \mathrm{e}^{x^2y},\quad \sin(x^2+y^2+z^2)$$

等都是多元初等函数.

根据一元基本初等函数的性质和本节讨论的多元连续函数的运算法则, 我们得到下述重要结论:

一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的.

这里所说的定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

习 题 1.3

(A)

1. 下列函数在哪些点是间断的?

(1) $z=\dfrac{y^2+x}{y^2-x}$; (2) $z=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}$.

2. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当一个变量固定时, 对另一个变量是连续的. 但 $f(x,y)$ 在原点不连续.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续, 且 $f(x_0,y_0)>0$, 证明: 存在点 P_0 的某个邻域, 使在该邻域内有 $f(x,y)>0$.