微积分AII

第一次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}, y=x$ 及 $x=2$ 所围成的图形面积为 S, 则 $S=($ B $)$.

(A) $\displaystyle\int_1^2\left(2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$; (B) $\displaystyle\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$; (C) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2(2-y)\,\mathrm{d}y$; (D) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2\left(2-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$.

2. 设点 $A(x,\sin x)$ 是曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 上一点,记 $S(x)$ 是直线 OA (O 为原点)与曲线 $y=\sin x$ 所围成图形的面积, 则当 $x\to0^+$ 时, $S(x)$ 与(D).

(A) x 为同阶无穷小; (B) x^2 为同阶无穷小;

(C) x^3 为同阶无穷小; (D) x^4 为同阶无穷小.

3. 设 $0<g(x)<f(x)<m$(常数), 则由 $y=f(x), y=g(x)x=a, x=b$ 所围成图形绕直线 $y=m$ 旋转所形成的立体的体积等于(B)

(A) $\displaystyle\int_a^b\pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(B) $\displaystyle\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(C) $\displaystyle\int_a^b\pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(D) $\displaystyle\int_a^b\pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

4. 下列反常积分发散的是(A).

(A) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (B) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; (C) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$; (D) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e},\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant\mathrm{e},\end{cases}$ 若反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 (C).

(A) $\alpha<-2$; (B) $\alpha>2$; (C) $0<\alpha<2$; (D) $-2<\alpha<0$.

二、填空题

1. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[1,\sqrt{3}]$ 上的平均值为____________.

答案 $\dfrac{(1+\sqrt{3})\pi}{24}$.

2. 抛物线 $y^2=ax(a>0)$ 与 $x=1$ 所围图形面积为 $\dfrac{4}{3}$, 则 $a=$____________.

答案 $a=1$.

3. 曲线 $y=x^2,x=y^2$ 围成图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积为____________.

答案 $\dfrac{3\pi}{10}$.

4. 已知反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{ax^2}\mathrm{d}x$ 收敛, 且值为 1 ,则 $a=$____________.

答案 $-\dfrac{1}{2}$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$____________.

答案 1.

三、计算题

1. 计算由 x 轴,曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 及其经过原点的切线围成的平面图形面积及该图形绕 x 轴旋转一周所得立体体积.

解 设切点为 (x_0,y_0) , 则过切点的切线方程为 $Y-y_0=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(X-x_0)$,

令 $X=0,Y=0,$, 得 $x_0=2,y_0=1$.

围成平面图形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times2\times1-\displaystyle\int_1^2\sqrt{x-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

旋转体体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi\times1^2\times2-\pi\displaystyle\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{6}$.

2. 设 $A>0,D$ 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0,x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域. V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转而成旋转体的体积, 若 $V_1=V_2$, 求 A 的值.

解 $V_1=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}A^2\sin^2x\mathrm{d}x=\dfrac{A^2\pi^2}{4}$. $V_2=2\pi A\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=2\pi A$.

由已知有 $\dfrac{A^2\pi^2}{4}=2\pi A$, 解得 $A=\dfrac{8}{\pi}$.

3. 求曲线 $r^2=\cos2\theta$ 所围成图形的面积.

解 $S=4S_1=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=1.$

4. 求摆线 $\begin{cases} y=1-\cos t, \\ x=t-\sin t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 的弧长.

解 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'42(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t,$

弧长 $s=\int_0^{\pi}2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4.$

5. 某水坝中有一个三角形的闸门,这闸门笔直竖立在水中,它的底边与水平面相齐,已知三角形底边长为10米,高8米,求闸门所受的水压力.

解 三角形顶点向底边作垂线. 垂足为坐标原点,向下过顶点为 x 轴,则 $x\in[0,8]$.

水压力为

$$\int_0^8\rho gx\frac{5(8-x)}{4}\mathrm{d}x=\frac{5\rho g}{4}\int_0^8 x(8-x)\mathrm{d}x=\frac{320\rho g}{3}.$$

四、判断下列反常积分的收敛性

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

解 (1) 由于 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛, 从而 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right|\mathrm{d}x$ 收敛,

因此$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 当 $p<1$ 时, $x=0$ 是暇点. $p\geqslant 1$ 时,该积分为无穷积分.

当 $p\geqslant 1$ 时,由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}=0$, 因此 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $p<1$ 时, $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

由于

$$\lim_{x\to 0^+}x^{1-p}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}=1,$$

当 $1-p<1$, 即 $p>0$ 时,级数收敛,当$1-p\geqslant 1$ 即 $p\leqslant 0$ 时,级数发散.

综上, 当 $p>0$ 时,积分收敛.

第二次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 共线, 且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$, 则 $\boldsymbol{x}=(\quad)$.

(A) $(6,-3,3)$; (B) $(-6,3,-3)$; (C) $(6,3,-3)$; (D) $(-6,3,3)$.

选(B).

2. 设有直线 $L:\left\{\ x+3y+2z+1=0, 2x-y-10z+3=0\right.$ 及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 $L(\quad)$.

(A) 平行于 π; (B) 在 π 上; (C) 垂直于 π; (D) 与 π 斜交.

选(C).

3. 曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的交线在 Oxy 平面上的投影曲线是$(\quad)$.

(A) 抛物线; (B) 双曲线; (C) 椭圆; (D) 圆.

选(D)

4. 过两曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与 $x^2-y^2-z^2=0$ 的交线,母线平行于 z 轴的柱面方程为$(\quad)$.

(A) $5x^2-3y^2=1$; (B) $5x^2+3y^2=1$; (C) $3x^2-5y^2=1$; (D) $3x^2+5y^2=1$.

选(A).

5. 方程 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=z$ 所表示的曲面为$(\quad)$.

(A) 椭球面; (B) 柱面; (C) 双曲抛物面; (D) 旋转抛物面.

选(C).

二、填空题

1. 若 $|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间夹角为 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ ____________, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$ ____________.

答案 $\sqrt{5}$, $\quad 3$.

2. 过点 $(1,1,-1),(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 三点的平面方程为____________.

答案 $x-3y-2z=0$.

3. 与向量 $\boldsymbol{a}=(2,4,-1)$ $\boldsymbol{b}=(0,-2,2)$ 同时垂直的单位向量为____________.

答案 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,-2)$.

4. 点 $(2,1,3)$ 到直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 的距离为____________.

答案 $\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

5. 曲线 $\begin{cases} z=6-x^2-y^2, \\ 2y+z-3=0 \end{cases}$ 在 Oxy 面上的投影曲线方程为____________.

答案 $\begin{cases} x^2+(y-1)^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

三、计算题

1. 设直线 L_1 的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$, 直线 L_2 的方程为 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

(1)证明 L_1 与 L_2 为异面直线; (2) 计算 L_1与 L_2 的距离.

解 (1) 设 L_1,L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$. L_1,L_2 上分别取点 $M_1=(1,1,0),M_2=(2,0,1)$, 则$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-1,1)$.

由于

$$[s_1,s_2,\overrightarrow{M_1M_2}]=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0,$$

因此 L_1 与 L_2 为异面直线.

(2) L_1 与 L_2 的距离 $d=\dfrac{[s_1,s_2,\overrightarrow{M_1M_2}]}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}$. $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3(-1,1,1)$.

$$d=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. 求过直线 $L_1: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{-2}$, 且平行于直线 $L_2: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ 的平面 π 的方程.

(方法一)直线 L 的一般方程为 $\begin{cases} y-1=0, \\ 2x+z-2=0. \end{cases}$ 过直线 L 的平面束方程为

$$(2x+z-2)+\lambda(y-1)=0,$$

即 $2x+\lambda y+z-(\lambda+2)=0$. 由已知有 $4-\lambda-2=0$, 解得 $\lambda=2$,
所求平面方程为

$$2x+2y+z-4=0.$$

(方法二) 设 L_1, L_2的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$, 则 $\boldsymbol{s}=(1,0,-2), \boldsymbol{s}_2=(2,-1,-2)$.
所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-(2,2,1)$.
所求平面的方程为 $2(x-2)+2(y-1)+z+2=0$, 即 $2x+2y+z-4=0$.

3. 求过点 $(0,1,2)$ 且与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 垂直相交的直线方程.

解　设交点为 (x_0,y_0,z_0), 由已知

$$\begin{cases} \dfrac{x_0-1}{1}=\dfrac{y_0-1}{-1}=\dfrac{z_0}{2}, \\ x_0-(y_0-1)+2(z_0-2)=0. \end{cases}$$

解得 $x_0=\dfrac{3}{2}, y_0=\dfrac{1}{2}, z_0=1$.所求直线方程为 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-2}$.

4. 求直线 $L: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

解　直线 L 的一般方程为 $\begin{cases} x-y-1=0, \\ y+z-1=0. \end{cases}$ 过直线 L 的平面束方程为

$$(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0,$$

即 $x+(\lambda-1)y+\lambda z-(\lambda+1)=0$, 垂直于平面 π 的方程满足

$$1-(\lambda-1)+2\lambda=0,$$

解得 $\lambda=-2$. 从而垂直于 π 的方程为 $x-3y-2z+1=0$, 因此 L_0 的方程为

$$\begin{cases} x-3y-2z+1=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$$

L_0 的方程可改写为 $\begin{cases} x=2y, \\ z=\dfrac{1-y}{2}. \end{cases}$ 设 (x,y,z) 是旋转曲面上任意一点,由 L_0 上点 (x_0,y_0,z_0) 旋转而来,因此有 $x^2+z^2=x_0^2+z_0^2, y=y_0$. 旋转曲面方程为

$$x^2+z^2=(2y)^2+\left(\frac{1-y}{2}\right)^2,$$

即

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

第三次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{x+y} =($ D $)$

(A) 1; (B) 0; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) 不存在.

2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处(A).

(A) 不连续, 偏导数存在; (B) 不连续, 偏导数不存在;

(C) 连续, 偏导数存在; (D) 连续, 偏导数不存在.

3. 曲线 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2), \\ y=4 \end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线与直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{0}$ 之间的夹角为(C).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$; (B) $\dfrac{\pi}{4}$; (C) $\dfrac{\pi}{3}$; (D) $\dfrac{\pi}{2}$.

4. 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-y}$, 则(D).

(A) $f'_x-f'_y=0$; (B) $f'_x+f'_y=0$; (C) $f'_x-f'_y=f$; (D) $f'_x+f'_y=f$.

5. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(C).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$;

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$;

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$, ;

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

二、填空题

1. 函数 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$ 连续区域是____________

答案 $\{(x,y)|x^2+y^2>1\}$.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} =$ ______________.

答案 0.

3. 设函数 $z=\sqrt{x^4+y^4}$, 则 $z'_x(0,0)=$ ______________.

答案 0.

4. 设函数 $z=\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})} =$ ______________.

答案 $\dfrac{\pi^2}{\mathrm{e}^2}$.

5. 设 $z=\mathrm{e}^{\sin(xy)}$, 则 $\mathrm{d}z=$______________.

答案 $\mathrm{e}^{\sin(xy)}\cos(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$.

三、计算题

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$, 证明:当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在.

解 令 $y=x$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0,y=x}\dfrac{x^2+x^2}{x^2+x^2}=1$,

令 $y=2x$, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to0,y=2x}\dfrac{x^2+2x^2}{x^2+4x^2}=\dfrac{3}{5}$,

因此, 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不存在.

2. 设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

3. 设 $z=\ln\left(\tan\dfrac{y}{x}\right)$, 求 $\mathrm{d}z$.

解

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\sec^2\frac{y}{x}\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)\\
&=\frac{1}{\tan\dfrac{y}{x}}\sec^2\frac{y}{x}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{2}{\sin\left(\dfrac{2y}{x}\right)}\left(-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

4. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 证明:当 $r\neq 0$ 时, 有 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

解 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\dfrac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}&=\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{2}{r}.\end{aligned}$$

5. 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内连续, 问:

(1) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件时, 才能使偏导数 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在?

(2) 在 $\varphi(x,y)$ 满足上述条件时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微?

解 (1)由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\varphi(x,0)}{x}$, 而

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=\varphi(0,0),\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=-\varphi(0,0).$$

要使 $f_x(0,0)$ 存在, 必须 $\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)$. 因此当 $\varphi(0,0)=0$ 时, $f_x(0,0)$ 存在.

同理, $\varphi_y(0,0)$ 存在, 只需 $\varphi(0,0)=0$. 因此当 $\varphi(0,0)=0$ 时, $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在.

(2) 由(1)知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 故

$$\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

又

$$\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}+\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant 2,$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varphi(\Delta x,\Delta y)=\varphi(0,0)=0.$$

从而

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0,$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

第四次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定,其中 F 为可微函数, 且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=($ C $)$

(A) x; (B) $-x$; (C) z; (D) $-z$.

2. 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是(D).

(A) $\dfrac{1}{2},0$; (B) $0,\dfrac{1}{2}$; (C) $-\dfrac{1}{2},0$; (D) $0,-\dfrac{1}{2}$.

3. 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数. 则必有(B).

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

4. 函数 $u=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任一方向的方向导数都存在是它在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都存在的(D)条件.

(A) 充分必要; (B) 必要非充分; (C) 充分非必要; (D) 既非充分又非必要.

5. 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在 $(0,1)$ 处的梯度等于(A).

(A) $\boldsymbol{i}$; (B) $\boldsymbol{j}$; (C) $-\boldsymbol{j}$; (D) $-\boldsymbol{i}$.

二、填空题

1. 已知 $f(1,2)=4,\mathrm{d}f(1,2)=16\mathrm{d}x+4\mathrm{d}y,\mathrm{d}f(1,4)=64\mathrm{d}x+8\mathrm{d}y$, 则 $z=f(x,f(x,y))$ 在点 $(1,2)$ 处对 x 的偏导数为____________.

答案 192.

2. 设隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy-yz+xz=\mathrm{e}^z$ 确定, 则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$ ____________.

答案 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

3. 设 $z=yf(x^2-y^2)$, 其中 $f(u)$ 可微, 则 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ______________.

答案 $\dfrac{f(x^2-y^2)}{y}$ 或者 $\dfrac{z^2}{y}$.

4. 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处沿 x 轴正向的方向导数为______________.

答案 1.

5. 函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{b}=$ ______________的方向导数最大,最大值为______________.

答案 $(0,1,2)\quad\sqrt{5}$.

三、计算题

1. 设 $z=f(x-y,xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\mathrm{d}z=f_1(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)+f_2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=(f_1+yf_2)\mathrm{d}x+(xf_2-f_1)\mathrm{d}y$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1+yf_2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=[f_{11}(-1)+f_{12}x]+f_2+y[f_{21}(-1)+f_{22}x]=-f_{11}+(x-y)f_{12}+xyf_{22}+f_2.$$

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 所确定, 且 f 可微, 求 $\mathrm{d}z$.

解 方程两端取微分,有

$$\begin{aligned}2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z&=f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}f\left(\frac{y}{x}\right)\\&=f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)\\&=f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}\end{aligned}$$

解得 $\mathrm{d}z=\dfrac{f\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)-2x}{2z}\mathrm{d}x+\dfrac{f'\left(\dfrac{y}{x}\right)-2y}{2z}\mathrm{d}y$.

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(y-x,yz)=0$ 所确定的隐函数, 其中函数 f 对各个变量具有连续的二阶偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 方程两端对 x 求偏导, 有 $f_1(-1)+yf_2\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad(1)$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{f_1}{yf_2}$.

在 (1) 式两端对 x 求导, 有

$$-\left[f_{11}(-1)+f_{12}\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]+y\left\{\left[f_{21}(-1)+f_{22}y\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial x}+f_2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\}=0,$$

解得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{y(f_2)^3}[f_1^2 f_{22}-2f_{12}f_1f_2+f_2^2 f_{11}]$.

4. 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 在方程 $z=xf(x+y)$ 两端对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x+y)+xf'(x+y)\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right), \tag{1}$$

在方程 $F(x,y,z)=0$ 两端对 x 求导得,

$$F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{F_y}\left(F_x+F_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$, 代入 (1) 式,解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x+y)F_y+xf'(x+y)F_y-xf'(x+y)F_x}{F_y+xf'(x+y)F_z}.$$

5. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在点 $(1,2)$ 处沿着抛物线 $y^2=4x$ 在该点切线方向的方向导数.

解 函数 $z=\ln(x+y)$ 在点 $(1,2)$ 处的梯度

$$\mathbf{grad}z=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\bigg|_{(1,2)}=\left(\frac{1}{x+y},\frac{1}{x+y}\right)\bigg|_{(1,2)}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

抛物线 $y^2=4x$ 在 $(1,2)$ 处的切线斜率 $k=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=1}=\dfrac{2}{\sqrt{4x}}\bigg|_{x=1}=1$, 切向量为 $\pm(1,1)$, 方向余弦为 $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$, 方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{s}}=\frac{1}{3}\times\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\times\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

第五次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设 $f(1,1)=-1$ 为函数 $f(x,y)=ax^3+by^3+cxy$ 的极值, 则 a,b,c 分别等于 (A).

(A) $1,1,-3$; (B) $1,1,3$; (C) $1,1,-1$; (D) $-1,-1,3$.

2. $z'_x(x_0,y_0)=0$ 与 $z'_y(x_0,y_0)$ 同时存在是函数 $z=z(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值的(D).

(A) 必要条件但非充分条件; (B) 充分条件但非必要条件;

(C) 充分必要条件; (D) 既非必要也非充分条件.

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$, 则点 $(0,0)$ (C).

(A) 不是 $f(x,y)$ 的极值点; (B) 是 $f(x,y)$ 的极大值点;

(C) 是 $f(x,y)$ 的极小值点; (D) 无法判断是否极值点.

4. 曲面 $z=x+f(y-z)$ 的任一点处的切平面(D)

(A) 垂直于一定直线; (B) 平行于一定平面;

(C) 与一定坐标面成定角; (D) 平行于一定直线.

5. 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是(B).

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$; (B) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$;

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$; (D) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

二、填空题

1. 如果曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 在点 $M(x,y,z)$ 处的切线平行于平面 $x+3y+3z=4$, 则切点 M 的坐标为______________.

答案 $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{27}\right)=\dfrac{1}{27}(9,-3,1)$.

2. 曲面 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{2},1\right)$ 处的切平面方程为______________.

答案 $x+4y-4z=0$.

3. 函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲面 $2z=x^2+y^2$ 在该点的外法线方向的方向导数为______________.

答案 $\dfrac{1}{3}$.

4. 曲面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ 在对应于 $u=1, v=\dfrac{\pi}{2}$ 的点处的切平面方程为____________________________.

答案 $ax+z=\dfrac{\pi a}{2}$.

5. 函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}$ 在点 $(0,1)$ 处具有Peano余项的二阶Taylor公式为

____.

答案 $1+x+\dfrac{1}{2}[x^2+2x(y-1)]+o(x^2+(y-1)^2)$.

三、计算题

1. 求曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{2}=1\\ x-2y+z=0\end{cases}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

解 曲线的切向量

$$\boldsymbol{s}=\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{x}{2} & \dfrac{y}{2} & z\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}\right|_{(1,1,1)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$$

因此切线方程为

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-3}.$$

法平面方程为 $5(x-1)+(y-1)-3(z-1)=0$, 即 $5x+y-3z-3=0$.

2. 过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面, 求其方程.

解 过直线的平面束方程为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0,$$

即

$$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0.$$

设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$. 曲面在切点的法向量为 $(3x_0,y_0,-z_0)$，有

$$\begin{cases}(10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0,\\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27,\\ \dfrac{3x_0}{10+\lambda}=\dfrac{y_0}{2+\lambda}=\dfrac{-z_0}{-(2+\lambda)}.\end{cases}$$

解得 $\lambda=-1$ 或者 $\lambda=-19$，因此切平面方程为

$$9x+y-z-27=0 \text{ 或 } 9x+17y-17z-27=0.$$

3. 求函数 $u=x+y+z$ 在 $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$ 上的最大值和最小值.

解 由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\dfrac{\partial u}{\partial y}=1\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$，故在内部没有驻点.

在 $z=1$ $(x^2+y^2=1)$ 上, 作Lagrange函数

$$F(x,y,\lambda)=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1),$$

解方程组

$$\begin{cases}1+2\lambda x=0,\\ 1+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y=\dfrac{\sqrt{2}}{2},z=1$ 或 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},z=1.$

在 $z=x^2+y^2$ 上, 作Lagrange函数

$$F(x,y,z,\lambda)=x+y+z+\lambda(x^2+y^2-z),$$

解方程组

$$\begin{cases}1+2\lambda x=0,\\ 1+2\lambda y=0,\\ 1-\lambda=0,\\ x^2+y^2-z=0.\end{cases}$$

解得 $x=-\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{1}{2}, z=\dfrac{1}{2}$. 由于

$$u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)=1+\sqrt{2}, u\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)=1-\sqrt{2}, u\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

故满足条件的最大值为 $u\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)=1+\sqrt{2}$, 最小值为 $u\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

4. 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

解 方程两端分别对 x, y 求偏导得

$$\begin{aligned}
&4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+8\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{\partial z}{\partial x}=0, && (1)\\
&4y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+8x\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0, && (2)
\end{aligned}$$

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{4x+8y}{1-8x-2z}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{4y}{1-8x-2z}$. 令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,解得 $x=-2z, y=0$, 代入原方程, 有

$$x=-2, y=0, z=1 \text{ 或 } x=\frac{16}{7}, y=0, z=-\frac{8}{7}.$$

在 (1) 两端对 x, y 求偏导, (2)式两端对 y 求偏导, 有

$$\begin{aligned}
&4+2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]+8\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, && (3)\\
&2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+8\left(\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, && (4)\\
&4+2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]+8x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, && (5)
\end{aligned}$$

将点 $(-2,0)$ 代入(3),(4),(5) 式有

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-2,1)}=\frac{4}{15}, B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-2,1)}=0, C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-2,0)}=\frac{4}{15}.$$

由于$AC-B^2=\dfrac{16}{225}>0, A=\dfrac{4}{15}>0$, 故 $(-2,0)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极小值点, 极小值 1.

将点 $\left(\dfrac{16}{7}, 0\right)$ 代入(3),(4),(5) 式有

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\left(\frac{16}{7},0\right)}=-\frac{4}{15}, B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\left(\frac{16}{7},0\right)}=0, C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\left(\frac{16}{7},0\right)}=-\frac{4}{15}.$$

由于$AC-B^2=\dfrac{16}{225}>0, A=-\dfrac{4}{15}<0$, 故 $\left(\dfrac{16}{7},0\right)$ 是 $z=z(x,y)$ 的极大值点, 极大值 $-\dfrac{8}{7}$.

5. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一个椭圆, 求原点到该椭圆的最长距离和最短距离

解 作Lagrange函数

$$\begin{aligned}F(x,y,z,\lambda,\mu)&=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)\\&=z+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1).\end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases}2\lambda x+\mu=0, & (1)\\ 2\lambda y+\mu=0, & (2)\\ 2z+1+\mu=0, & (3)\\ x^2+y^2-z=0, & (4)\\ x+y+z-1=0, & (5)\end{cases}$$

由(1),(2)得 $\lambda=0$, 或 $x=y$. 若 $\lambda=0$, 解得 $z=-\dfrac{1}{2}$, 矛盾. 故 $x=y$, 代入(4),(5) 解得

$$x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, y=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, z=2-\sqrt{3},\ \text{或}\ x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, z=2+\sqrt{3},$$

由实际意义,最长距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$, 最短距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

6. 将长为 l 的细铁丝剪成三段, 分别用来围成圆、正方形和正三角形, 问怎样剪法才能使它们围成的面积之和为最小, 并求出最小值.

解 设剪成的三段长度为别为 x,y,z. 则围成的面积之和为 $S=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{3}z^2}{36}$. 作Lagrange函数

$$F(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}z^2}{36}+\lambda(x+y+z-l).$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0, \\ \dfrac{y}{8}+\lambda=0, \\ \dfrac{\sqrt{3}z}{18}+\lambda=0, \\ x+y+z-l=0, \end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{\pi l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$, $x=\dfrac{4l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$, $x=\dfrac{3\sqrt{3}l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$. 由实际意义知, x,y,z 为所求. 因此最小面积为 $S=\dfrac{l^2}{4(\pi+4+3\sqrt{3})}$.

圆半径为 $\dfrac{l}{2(\pi+4+3\sqrt{3})}$, 正方形边长为 $\dfrac{l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$, 正三角形边长为 $\dfrac{\sqrt{3}l}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

第六次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1是 D 的第一象限部分, 则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$ 等于(A).

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma$; (B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma$;

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$; (D) 0.

2. 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a,b 为常数, 则 $\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$(D).

(A) $ab\pi$; (B) $\dfrac{ab\pi}{2}$; (C) $(a+b)\pi$; (D) $\dfrac{(a+b)\pi}{2}$.

3. 设平面区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$, $M=\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$, $N=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2\mathrm{d}\sigma$, $P=\iint\limits_D [\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}-1]\mathrm{d}\sigma$, 则有(B).

(A) $M>N>P$; (B)$N>M>P$; (C) $M>P>N$; (D) $N>P>M$.

4. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 可以写成(D).

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$; (B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$;

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$; (D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

5. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$ 化为极坐标形式的累次积分为(C).

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2)\mathrm{d}r$; (B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 f(r^2)r\mathrm{d}r$;

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2)r\mathrm{d}r$;　　(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r^2)r\mathrm{d}r$;

二、填空题

1. $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y=$ ________.

答案 $\frac{7}{3}$.

2. 积分 $\int_0^8\mathrm{d}x\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{1}{1+y^4}\mathrm{d}y=$ ________.

答案 $\frac{\ln 17}{4}$.

3. 设平面区域 $D=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, 则 $\iint\limits_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma=$ ________.

答案 $-\frac{3}{2}$.

4. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2)=$ ________.

答案 $f(2)$.

5. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant t^2\}$. 则 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$ ________.

答案 $f(0,0)$

三、解答题

1. 设平面区域 D 由直线 $x=3y,y=3x,x+y=8$ 围成, 计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma$.

解　直线 $x+y=8$ 与直线 $y=3x,x=3y$ 的交点分别为 $(2,6),(6,2)$. 故

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma&=\int_0^2x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{3x}\mathrm{d}y+\int_2^6x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}\mathrm{d}y\\&=\int_0^2\frac{8x^3}{3}\mathrm{d}x+\int_2^6\left(8x^2-\frac{4x^3}{3}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{416}{3}.\end{aligned}$$

2. 设平面区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$, 计算 $\iint\limits_D\max\{xy,1\}\mathrm{d}\sigma$.

解

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{D(xy>1)} \max\{xy,1\}\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D(xy<1)} \max\{xy,1\}\mathrm{d}\sigma \\ &= \iint\limits_{D(xy>1)} xy\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D(xy<1)} \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2} xy\mathrm{d}y + 4 - \int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{15}{4} - \ln 2 + 4 - (3 - 2\ln 2) = \frac{19}{4} + \ln 2.\end{aligned}$$

3. 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D = \{(x,y)|0 \leqslant x \leqslant 2, \sqrt{2x-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\}$.

解

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2} r^2\cdot r\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(16-16\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= 4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}.\end{aligned}$$

4. 设平面区域 D 由两条双曲线 $xy=1, xy=2$ 和两条直线 $y=x, y=4x$ 所围成的在第 I 象限内的闭区域, 计算 $\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}\sigma$.

解 令 $\begin{cases} u = xy, \\ v = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$ 则 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \dfrac{2y}{x} = 2v$. 图形 D 变换为

$$D' = \{(u,v)|1 \leqslant u \leqslant 2, 1 \leqslant v \leqslant 4\}.$$

$$\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D'} \frac{u^2}{2v}\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 u^2\mathrm{d}u\int_1^4 \frac{1}{2v}\mathrm{d}v = \frac{7\ln 2}{3}.$$

5. 设连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) = x^2 + x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\mathrm{d}t + \iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}\sigma,$$

其中区域 D 是以 $(-1,-1),(1,-1),(1,1)$ 为顶点的三角形区域, 且 $f(1)=0$, 求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 令 $x^2-t=u$, 则 $\int_0^{x^2} f(x^2-t)\mathrm{d}t=\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u$, 从而

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u+\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}\sigma.$$

设 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}\sigma=A$, 于是

$$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u+A,$$

因此

$$f(xy)=(xy)^2+(xy)\int_0^{(xy)^2} f(u)\mathrm{d}u+A,$$

在上式两端在 D 上取二重积分, 有

$$A=\iint\limits_D x^2y^2\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D\left[(xy)\int_0^{(xy)^2} f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\sigma+A\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma,$$

由于 $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=2, \iint\limits_D\left[(xy)\int_0^{(xy)^2} f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}\sigma=0$, 从而

$$A=-\iint\limits_D (xy)^2\mathrm{d}\sigma=-\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x\int_{-1}^x y^2\mathrm{d}y=-\frac{2}{9}.$$

于是 $f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u-\frac{2}{9}$, 代入 $f(1)=0$, 解得 $\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=-\frac{7}{9}$, 因此

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{9}.$$

第七次作业

学院____________ 班级____________ 姓名____________ 学号__________

一、单项选择题

1. 设有空间区域 $\Omega_1 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0\}$ 及 $\Omega_2 = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant\}$, 则 (C).

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$; (B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$;

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$; (D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}V$.

2. 设 Ω 由平面 $x+y+z+1=0, x+y+z+2=0, x=0, y=0, z=0$ 围成, $I_1 = \iiint\limits_{\Omega} [\ln(x+y+z+3)]^2\mathrm{d}V, I_2 = \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)^2\mathrm{d}V$, 则 (A).

(A) $I_1 < I_2$; (B) $I_1 > I_2$; (C) $I_1 \leqslant I_2$; (D) $I_1 \geqslant I_2$.

3. 曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = 2-x^2-y^2$ 所围成的立体体积为(B).

(A) $\dfrac{\pi}{2}$; (B) $\dfrac{5\pi}{6}$; (C) $\dfrac{2\pi}{3}$; (D) π.

4. 设空间区域 $\Omega = \{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}\}$, $f(x,y,z)$ 为连续函数, 则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V =$(D).

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z$;

(B) $\displaystyle 4\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z$;

(C) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{1}\mathrm{d}r\int_{r}^{2-r^2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathrm{d}z$;

(D) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{\sqrt{2}} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$.

5. 设空间区域 $\Omega = \{(x,y,z)|0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x, 0 \leqslant z \leqslant x+y\}$, $f(x,y,z)$为连续函数, 则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V =$(A).

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}z \int_0^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \mathrm{d}z \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x$;

(B) $\int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{z}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r$;

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta+\cos\theta} \mathrm{d}r \int_0^{r(\sin\theta+\cos\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}z$;

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta}} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r$.

二、填空题

1. 设 $\varOmega$ 为 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$, 则 $\iiint\limits_{\varOmega} (x+y+z)\mathrm{d}V =$ ____________.

答案 $\dfrac{\pi R^4}{4}$.

2. 设 $\varOmega$ 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的空间闭区域, 则三重积分 $\iiint\limits_{\varOmega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为柱面坐标下的先 z 再 r 后 θ 顺序的三次积分为____________.

答案 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathrm{d}z$.

3. 设 $\varOmega$ 为 $x^2+y^2+z \leqslant 1, z \geqslant 0$, 则 $\iiint\limits_{\varOmega} (x+1)(y+z)(z+1)\mathrm{d}V =$ ____________.

答案 $\dfrac{2\pi}{3}$.

4. 设 $F(t) = \iiint\limits_{\varOmega_t} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$, 其中 $\varOmega_t = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2\}$, f 为连续函数, 则 $F'(t) =$ ____________.

答案 $4\pi t^2 f(t^2)$.

5. 设 $\varphi(y) = \int_0^y \dfrac{\ln(1+xy)}{x}\mathrm{d}x (y \neq 0)$, 则 $\varphi'(1) =$ ____________.

答案 $2\ln 2$.

三、计算题

1. 设 $\varOmega$ 是由 $x+y=1, y=x, y=0, z=0$ 和 $z=\pi$ 所围成的空间闭区域, 计算 $\iiint\limits_{\varOmega} (x+y)\sin z\mathrm{d}V$.

解 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\sin z\mathrm{d}V=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{1-y}(x+y)\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\sin z\mathrm{d}z=\frac{1}{3}.$

2. 设 Ω 为 $x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1$ 所确定的空间闭区域, 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V$.

解 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{8\pi}{5}.$

3. 设 Ω 由旋转抛物面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=1,z=2$ 所围成的空间闭区域, 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$.

解 $\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D_z1\leqslant z\leqslant 2\},D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2z\}$. 从而

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V&=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma\\&=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^2\cdot r\mathrm{d}r\\&=2\pi\int_1^2 z^2\mathrm{d}z=\frac{14\pi}{3}.\end{aligned}$$

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}|z-x^2-y^2|\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega:0\leqslant z\leqslant 1,x^2+y^2\leqslant 1$.

解 用曲面 $z=x^2+y^2$ 将 Ω 分为两部分, 记 Ω 中 $z\geqslant x^2+y^2$ 的部分为 $\Omega_1,z\leqslant x^2+y^2$ 的部分为 Ω_2. 在柱面坐标系下

$$\Omega_1=\{(\theta,r,z)|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1,r^2\leqslant z\leqslant 1\},$$

$$\Omega_2=\{(\theta,r,z)|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant r^2\},$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}|z-x^2-y^2|\mathrm{d}V&=\iiint\limits_{\Omega_1}|z-x^2-y^2|\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega_2}|z-x^2-y^2|\mathrm{d}V\\&=\iiint\limits_{\Omega_1}(z-x^2-y^2)\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega_2}(x^2+y^2-z)\mathrm{d}V\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1(z-r^2)\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{r^2}(r^2-z)\mathrm{d}z\\&=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

5. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)^2\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ a>0,b>0,c>0\right.\right\}$.

解

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)^2\mathrm{d}V&=\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)+\left(xy+\frac{2}{3}xy+\frac{yz}{3}\right)\right]\mathrm{d}V\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

方法一　作广义球坐标变换 $\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\ y=br\sin\varphi\sin\theta & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\ z=cr\cos\varphi, & 0\leqslant r<+\infty\end{cases}$　$J=abcr^2\sin\varphi$.

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4\pi a^3bc}{15},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}V=\frac{4\pi ab^3c}{15},\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V=\frac{4\pi abc^3}{15},$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)^2\mathrm{d}V=\frac{4\pi abc}{15}\left(a^2+\frac{b^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right).$$

方法二(先二后一法)Ω 可以写成

$$\{(x,y,z)|(y,z)\in D_x,-a\leqslant x\leqslant a\},\ D_x=\left\{(y,z)|\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1-\frac{x^2}{a^2}\right\}.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V=\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}\mathrm{d}\sigma=\int_{-a}^{a}x^2\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4\pi a^3bc}{15},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}V=\frac{4\pi ab^3c}{15},\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V=\frac{4\pi abc^3}{15},$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)^2\mathrm{d}V=\frac{4\pi abc}{15}\left(a^2+\frac{b^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right).$$

6. 利用 $\boldsymbol{\Gamma}$ 函数, $\mathbf{B}$ 函数计算积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}$.

解 令 $x^{\frac{1}{4}}=u$, 则 $x=u^4, \mathrm{d}x=4u^3\mathrm{d}u$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}} &= \int_0^1 \frac{4u^3}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u = 4\int_0^1 u^{4-1}(1-u)^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{d}u \\
&= 4\mathbf{B}\left(4,\frac{1}{2}\right) = 4\frac{\boldsymbol{\Gamma}(4)\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)}{\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{9}{2}\right)} \\
&= \frac{4\times 3!\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{128}{35}.
\end{aligned}$$