矢量及其运算法则

一、标量和矢量

1. 标量：

定义：只有大小，没有方向的物理量。

如质量、时间、功、能量、温度等。

表示方法：带有正负号的数字。

加减法：代数和。

2. 矢量：

定义：即有大小又有方向的物理量。

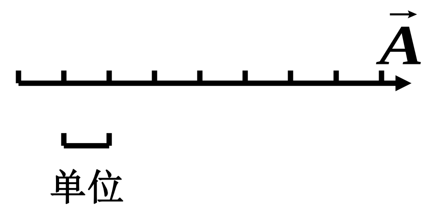
如位移、速度、加速度、力、动量等。

表示方法：

(1)矢量通常用带箭头的字母表示，如 $\vec{A}$ ，

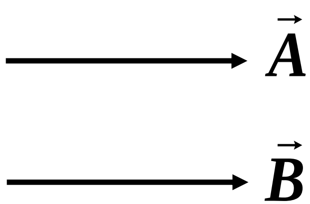
或黑体字母***A***表示。

(2)在空间用一有向线段表示，如

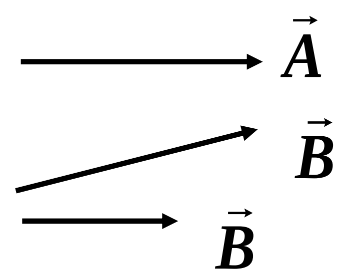


注意：

（1）只有大小相等且方向相同的两个矢量才相等；

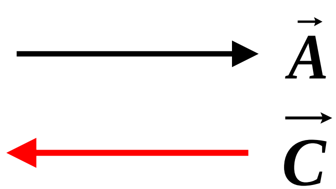


则： $\vec{A}=\vec{B}$



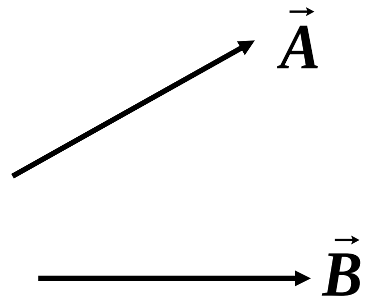
则：$\vec{A}\neq\vec{B}$

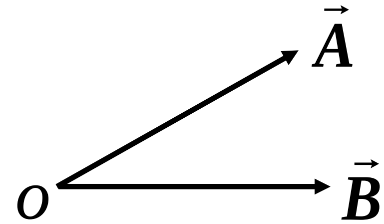
（2）若两个矢量的大小相等、方向相反，则互称负矢量；



则：$\vec{A}=-\vec{C}$

（3）矢量具有平移不变性。





二、矢量的模和单位矢量

矢量的大小称为矢量的模，用A或 $|\vec{A}|$表示。

如果某一矢量的模为1，且方向与矢量 $\vec{A}$ 相同，则称该矢量为矢量 $\vec{A}$ 的单位矢量，用 $\vec{e}$ 表示。

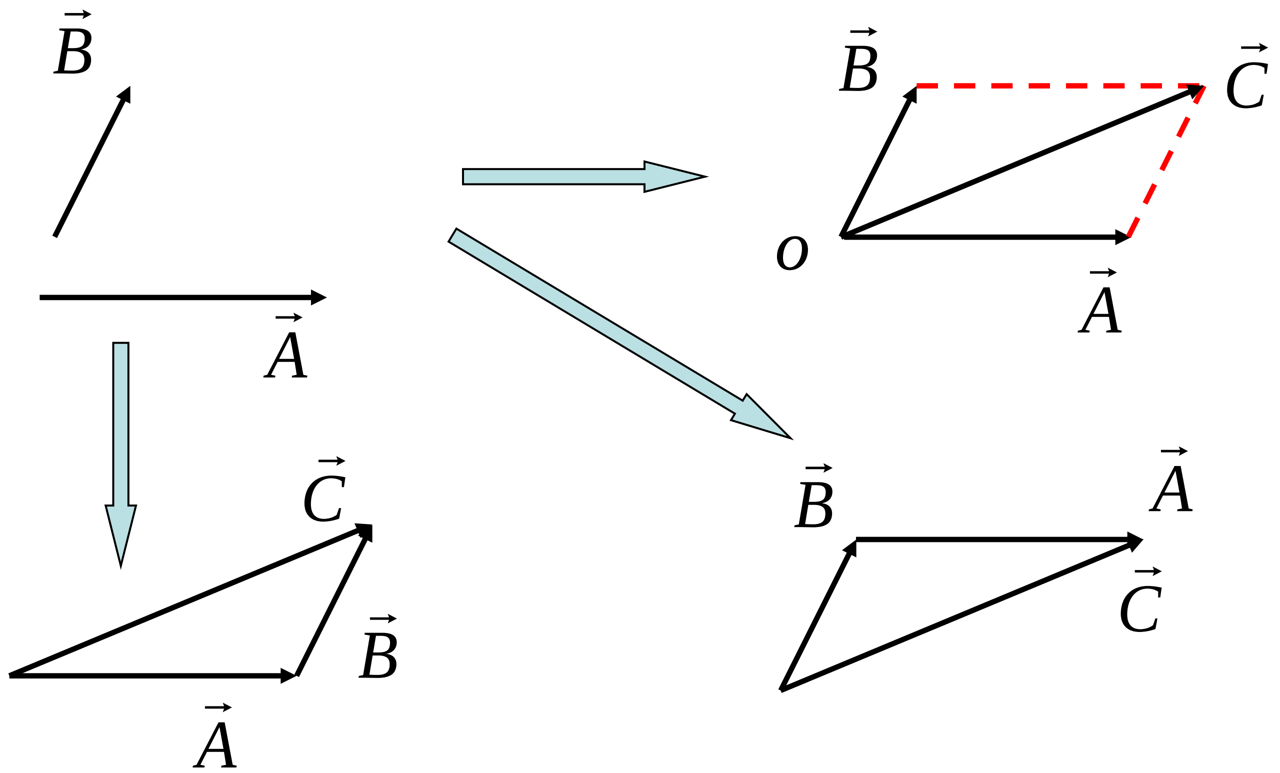
$$\vec{A}=|\vec{A}|\vec{e}=A\vec{e} \qquad \vec{e}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

在正交直角坐标系，常用 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$分别表示 x,y,z轴的单位矢量。

三、矢量的加法和减法

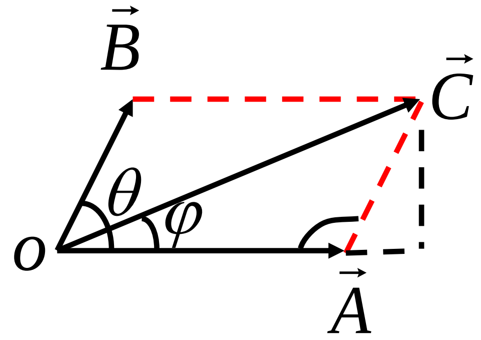
(1) 平行四边形法则（三角形法则）

两个矢量相加 $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$



$$\overrightarrow{\boldsymbol{C}}=\overrightarrow{\boldsymbol{A}}+\overrightarrow{\boldsymbol{B}}=\overrightarrow{\boldsymbol{B}}+\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$$

合矢量的大小和方向

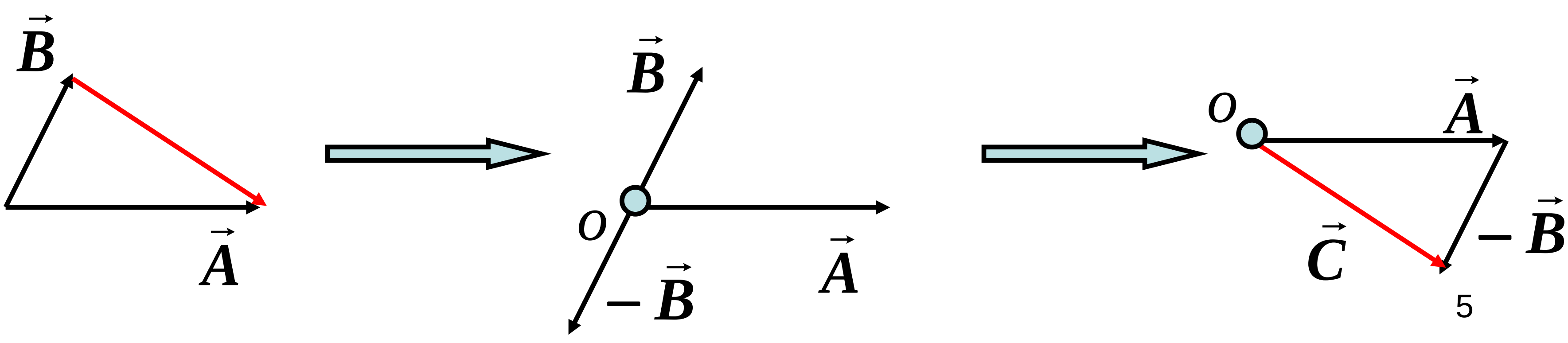


$$C=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos(180^\circ-\theta)}$$

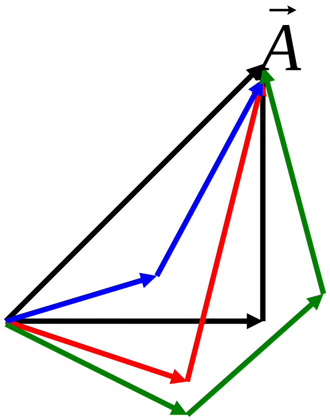
$$=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

$$\tan\varphi=\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$$

两个矢量相减 $\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$



(2) 矢量合成的解析法

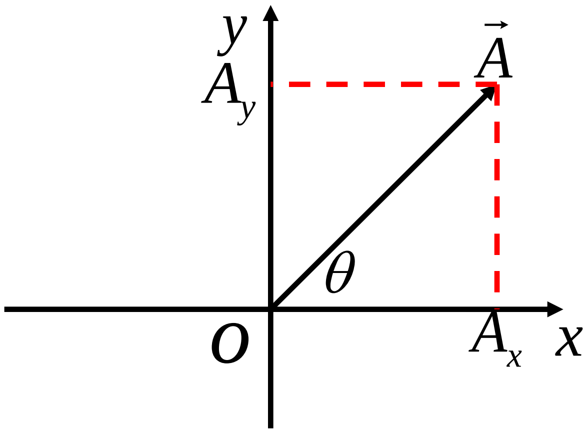


$$
\begin{cases}
\text{二分矢量：取平面直角坐标系} \\
\text{三分矢量：取空间直角坐标系}
\end{cases}
$$

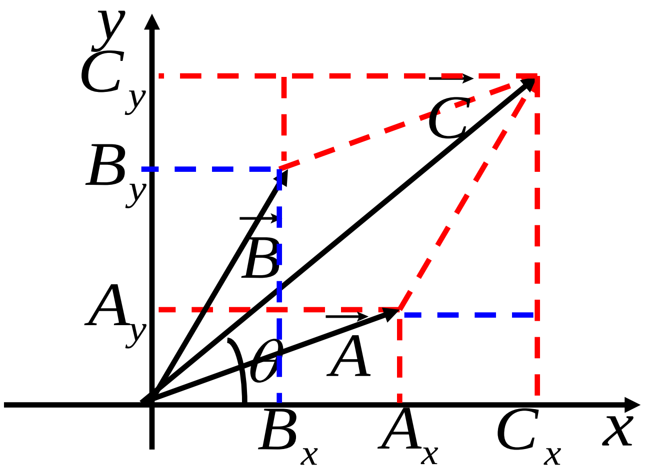
①平面直角坐标系

$$
\left.
\begin{aligned}
A_x &= A\cos\theta \\
A_y &= A\sin\theta
\end{aligned}
\right\}
\Rightarrow \vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\
\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}
\end{cases}
$$



两矢量相加 $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$



$$\begin{cases}\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}\\ \vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}\end{cases}$$

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\vec{i}+(A_y+B_y)\vec{j}$$

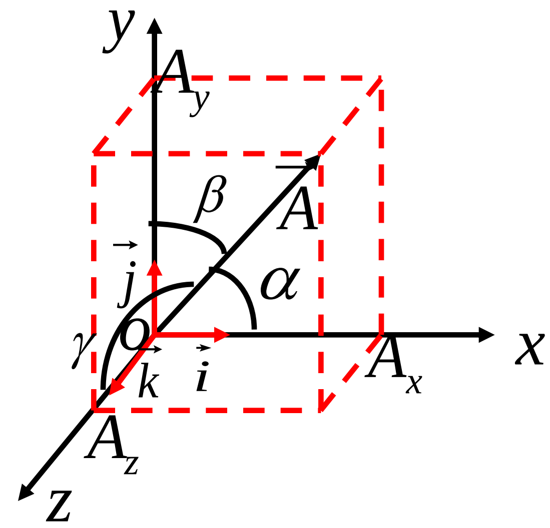
$$\vec{C}=C_x\vec{i}+C_y\vec{j}$$

$$\begin{cases}C_x=A_x+B_x\\ C_y=A_y+B_y\end{cases}$$

⇨ **两个矢量相减**

$$\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\vec{i}+(A_y-B_y)\vec{j}$$

②空间直角坐标系



$$\left.\begin{aligned}\vec{A}_x &= A_x\vec{i}\\ \vec{A}_y &= A_y\vec{j}\\ \vec{A}_z &= A_z\vec{k}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \\ \alpha = \arccos\dfrac{A_x}{A}, \beta = \arccos\dfrac{A_y}{A}, \gamma = \arccos\dfrac{A_z}{A} \end{cases}$$

两矢量相加减 $\vec{A} \pm \vec{B}$

$$\left.\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\\ \vec{B} &= B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}+\vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k} \\ \vec{A}-\vec{B} = (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k} \end{cases}$$

四、矢量的乘积

1. 矢量乘以标量

一个数m和一个矢量 $\vec{A}$相乘得另一矢量$\vec{C}$，则

$$\vec{C} = m\vec{A}$$

矢量$\vec{C}$ 的大小为 $C = |m|A$

矢量$\vec{C}$ 的方向： 若m>0，与$\vec{A}$ 同向；

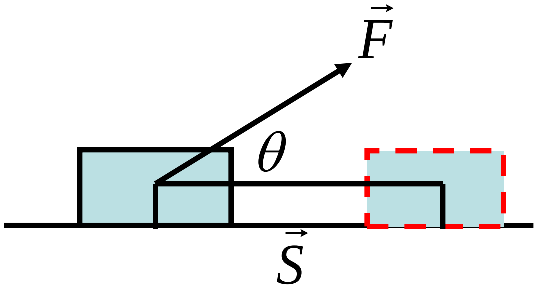
m<0，与$\vec{A}$ 反向。

性质： $m(\vec{A} \pm \vec{B}) = m\vec{A} \pm m\vec{B}$

2. 矢量的标积（做投影运算）

如果两矢量相乘得到一个标量，称为**标积**或**点积**。定义为

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$



例如功 $W = F\cos\theta S = \vec{F}\cdot\vec{S}$

性质：

（1）$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

（2）当$\theta = 0$时，$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$

（3）当$\theta = \dfrac{\pi}{2}$时，$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

（4）$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

根据以上性质可以得到直角坐标系的单位矢量点积有如下关系

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$$

在直角坐标系下，如下两个矢量

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

则 $\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

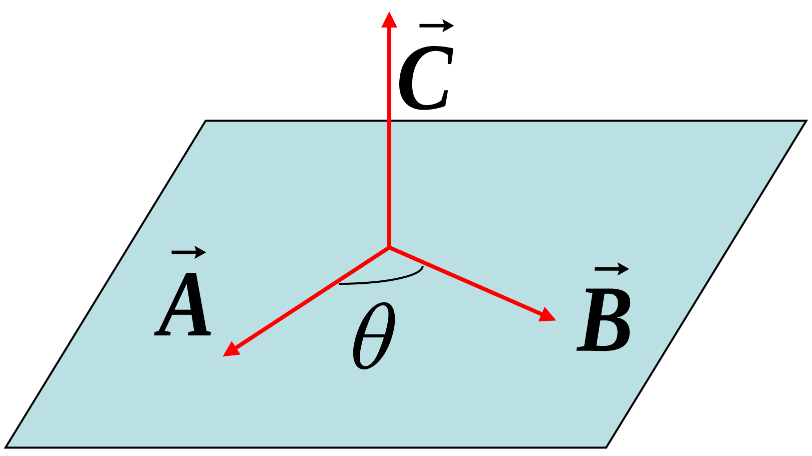
3. 矢量的矢积

若两矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 相乘得到一个矢量的叫做矢积，定义为

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

矢量 $\vec{C}$ 的大小为 $C = AB\sin\theta$ （以A、B为邻边的平行四边形面积）

矢量 $\vec{C}$ 的方向



符合右手螺旋法则

性质：

(1) $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

(2) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

(3) 当$\theta=0$时，$\vec{A}\times\vec{B}=0$

(4) 当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=AB$

根据以上性质可以得到直角坐标系的单位矢量矢积有如下关系

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

同样，在直角坐标系下的两个矢量

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

则 $$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$$

五、矢量函数的导数和微分

若某一矢量 $\vec{A}$ 与变量t之间存在一定的关系，当变量t取定某个值后，矢量有唯一确定的值（大小和方向）与之对应，则称 $\vec{A}$ 为 t 的矢量函数，即

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$$

五、矢量函数的导数和微分

当变量t改变Δt时，

$$\Delta\vec{A}=\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)=\Delta A_x\vec{i}+\Delta A_y\vec{j}+\Delta A_z\vec{k}$$

$$\Delta A_x=A_x(t+\Delta t)-A_x(t)$$

$$\Delta A_y=A_y(t+\Delta t)-A_y(t)$$

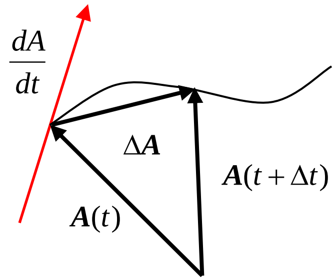
$$\Delta A_z=A_z(t+\Delta t)-A_z(t)$$

定义：$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t}\vec{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_y}{\Delta t}\vec{j}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}\vec{k}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A_x(t)}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}A_y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}A_z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

可以知道：矢量函数的导数仍然为一矢量。

导数矢量大小： $$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right|$$



导数矢量方向：

为当 $\Delta t\to 0$ 时，导数矢量的方向为 $\Delta\vec{A}$ 的极限方向，

即为 $\vec{A}(t)$ 曲线的切线方向。

同理可以得到该矢量函数的导数矢量二阶导数：

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{A}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2A_x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2A_y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2A_z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

矢量函数的导数性质：

$$(1)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\pm\vec{B})=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\pm\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$(2)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{A})=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{A}+m\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$(3)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$(4)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\times\vec{B})=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$