Universitat Autònoma de Barcelona
Facultat de Ciències

Modelització i Inferencia
Pràctica 2

Autor:
Gerard Lahuerta Martín
NIU: 1601350

2 de Desembre del 2021

Índex

1 Presentació del problema

Suposa una mostra aleatòria $X_1, \cdots, X_n$ distribuïda segons una $Weibull(\alpha, k)$ amb la següent funció de densitat:

$$f_X(x|\alpha, k) = \frac{k}{\alpha} x^{k-1} e^{-\frac{x^k}{\alpha}},\ x > 0,\ \alpha, k > 0$$

Considera $k = 2$.

(a) Troba l'estimador de màxima versemblança per a α, i comprova que el que has trobat és un maximitzador de la funció de versemblança.

(b) Demostra que l'estimador de màxima versemblança de α, $\hat{\alpha}$, és un estimador no esbiaxat per a α.
Pista: Per a resoldre aquest exercici, necessites trobar primer la distribució de X_i^2 sabent que $X_i \sim Weibull(\alpha, 2)$. Pots fer la demostració a partir de la distribució de probabilitat acumulada (CDF) sabent que:

$$\mathbb{P}(X_i^2 \leq c) = \mathbb{P}(X_i \leq \sqrt{c}) = \int_0^{\sqrt{c}} f_{X_i}(x_i|\alpha) \partial x_i$$

(c) Calcula la informació de Fisher esperada per a α

(d) És $\hat{\alpha}$ l'estimador per a α més eficient entre tots els estimadors no esbiaxats? Justifica la teva resposta.

2 Resolució del primer apartat

Trobem l'estimador de màxima versemblança per a α (que anomenarem $\hat{\alpha}$) a partir del seu MLE (*Most Likelihood Estimator*): Calculem la funció de versemblança, la log-versemblança i la funció "*score*":

- Funció de versemblança: $L(\alpha|x)$

$$L(\alpha|x) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\alpha, 2) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{\alpha} x_i e^{-\frac{x_i^2}{\alpha}} \right) = \left(\frac{2}{\alpha} \right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\alpha}} \prod_{i=1}^{n} x_i$$

- Funció de log-versemblança: $l(\alpha|x) = \log(L(\alpha|x))$

$$l(\alpha|x) = \log \left[\left(\frac{2}{\alpha} \right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\alpha}} \prod_{i=1}^{n} x_i \right] = n \log \left(\frac{2}{\alpha} \right) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\alpha} + \log \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) =$$
$$= n \left(\log(2) - \log(\alpha) \right) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2) + \sum_{i=1}^{n} (\log(x_i))$$

- Funció *score*: $s(\alpha|x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha|x)$

$$s(\alpha|x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(n \left(\log(2) - \log(\alpha) \right) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2) + \sum_{i=1}^{n} (\log(x_i)) \right) =$$
$$= \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2) - \frac{n}{\alpha}$$

- Igualem la funció score a 0 per a trobar el màxim.

$$s(\alpha|x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2) - \frac{n}{\alpha} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2) = \frac{n}{\alpha} \Longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2) = \alpha \Rightarrow$$
$$\Longrightarrow \hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2)$$

- Comprovem ara que el valor de l'estimador $\hat{\alpha}$ trobat es el màxim a partir del signe de la derivada de la funció *score*: $s'(\alpha|x)$.

$$s'(\alpha|x) = \frac{-2}{\alpha^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2) + \frac{n}{\alpha^2} \underset{(\alpha = \hat{\alpha})}{\underset{\uparrow}{=}} -2n^3 \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^2) \right)^{-2} + n^3 \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^2) \right)^{-2} =$$
$$= -n^3 \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^2) \right)^{-2} < 0 \text{ ja que } n \in \mathbb{N} (n > 0) \text{ i } \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^2) \right)^{-2} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$$
$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2) \text{ és realment l'estimador de màxima versemblança per } \alpha} \tag{1}$$

3 Resolució del segon apartat

Comprovem si l'estimador $\hat{\alpha}$ trobat a l'apartat anterior és no esbiaxat, sabent que no ho serà si i només si $Bias(\hat{\alpha}) = 0$. Calculem el $Bias(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha}) - \alpha$, calculant previamente l'esperança de l'estimador: $E(\hat{\alpha})$

- Càlcul de l'esperança de l'estimador $\hat{\alpha}$: $E(\hat{\alpha})$

$$E(\hat{\alpha}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ (I)}}{=} E\left(X_i^2\right)$$

(I): $X_1, \cdots, X_n$ *independents i idènticament distribuïdes*

- Calculem ara $E(X_i^2)$ trobat la distribució de X_i^2:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_i^2 \leq u) = \mathbb{P}(X_i \leq \sqrt{u}) = \int_0^{\sqrt{u}} \left(\frac{2}{\alpha} x_i e^{-\frac{x_i^2}{\alpha}}\right) dx = 1 - e^{\frac{-u}{\alpha}} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow X_i^2 = \left(1 - e^{\frac{-x_i}{\alpha}}\right)' = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-x_i}{\alpha}} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow E(X_i^2) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} x e^{\frac{-x}{\alpha}} dx = \left[-(\alpha + x)e^{\frac{-x}{\alpha}}\right]_0^{\infty} = 0 - (-\alpha) = \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

- Calculem ara el $Bias(\hat{\alpha})$:

$$Bias(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha}) - \alpha = \alpha - \alpha = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{L'estimador } \hat{\alpha} \text{ és no esbiaxat}}$$

4 Resolució del tercer apartat

Calculem l'informació de Fisher esperada per a α: $J(\alpha)$, calculant previament l'informació observada de Fisher, $I(\alpha)$.

- L'informació observada de Fisher: $I(\alpha) = -s'(\alpha)$ calculada anteriorment a l'apartat 2.1

$$I(\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2)$$

- Informació de Fisher esperada: $J(\alpha) = E(I(\alpha))$

$$J(\alpha) = E\left(\frac{-n}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2)\right) = \frac{-n}{\alpha^2} + \frac{2n}{\alpha^3}E(x_i^2) \underset{\substack{\uparrow \\ (II)}}{=} \frac{-n}{\alpha^2} + \frac{2n}{\alpha^2} = \frac{n}{\alpha^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{L'informació de Fisher esperada per a } \alpha \text{ és: } J(\alpha) = \tfrac{n}{\alpha^2}}$$

(II): $E(X_i^2) = \alpha$ *la sabem per l'apartat 3.2*

5 Resolució del quart apartat

Sabem que el millor estimador no esbiaxat serà aquell que tingui una menor variança. Per descobrir si $\hat{\alpha}$ és el millor estimador calculem la seva variança: $V(\hat{\alpha})$.

- Calculem $V(\hat{\alpha})$:

$$V(\hat{\alpha}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2\right) = \frac{1}{n}V\left(X_i^2\right)$$

- Calculem $V(X_i^2)$:

$$\left.\begin{array}{lllll} V(X_i^2) & = & E\left((X_i^2)^2\right) - E(X_i^2)^2 & = & E\left((X_i^2)^2\right) - \alpha^2 \\ E(\hat{\alpha}^2) & = & \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-x}{\alpha}}\, dx & = & \left[-\left(x^2 + 2x\alpha + 2\alpha^2\right) e^{\frac{-x}{\alpha}}\right]_0^\infty \; = \; 2\alpha^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow V(X_i^2) = \alpha^2 \Longrightarrow V(\hat{\alpha}) = \tfrac{\alpha^2}{n}$$

Sabem, també, que la Cota de Cramer-Rao $\left(CR = J^{-1}(\alpha)\right)$ ens diu si un estimador és o no eficient i, a més, si es el més eficient.
Serà l'estimador més eficient si la seva variança és igual a la Cota de Cramer Rao.

- Calculem doncs la Cota de Cramer Rao:

$$CR = J^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\frac{n}{\alpha^2}} = \frac{\alpha^2}{n}$$

Observem que $CR = V(\alpha) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{L'estimador } \hat{\alpha} \text{ és el millor d'entre tots els estimadors no esbiaxats}}$