Universitat Autònoma de Barcelona
Facultat de Ciències

Entrega 3 Modelització:

Autor:

Gerard Lahuerta

1601350

8 de Març del 2023

Contents

1 Exercici 1

Context:
Com a part de l'estudi climàtic del territori nacional s'ha proposat a l'agencia espacial que posicioni un satèl·lit d'investigació meteorològica que controli els canvis climàtics que experimenti la regió per tal de pronosticar el clima en dies propers.

Així, en cas de que les prediccions indiquin un esdeveniment meteorològic que pugui afectar a la població local poder posar en marxa protocols de prevenció o de mitigació de les possibles consequències.

Objectiu:
Estudiar la capacitat de posicionar un satèl·lit en òrbita; és a dir, modelitzar la velocitat del cohet propulsor per tal de trobar els paràmetres que milloren la viabilitat de la missió.

Assumpcions:
Previ a la modelització del cohet s'ha consultat al equip tècnic les especifiacions que s'estan platejant per a la construcció del cohet (i així tenir-les en compte).

També, s'han afegit assumpcions necessàries per al llançament del cohet així com també s'han afegit assumpcions per tal de facilitzar la modelització i obtenir així una primera aproximació per discutir la capacitats mínimes del cohet.

Indiquem ara les assmumpcions fetes a l'hora de plantejar el model inicial:

- Assumim que la capacitat de propulsió del motor a reacció és tan gran (comparada amb la força de gravitatòria terrestre) que podem supossar que està en el buit.
- Els efectes de l'atmosfera terrestre sobre el cohet son negligibles.
- Els efectes climàtic son negligibles.
- El cohet és d'una sola fase.
- El cohet gastarà per aribar a la posició dessitjada tot el seu combustible.
- El combustible és considerarà un unic líquid (no es tindrà en compte la necessitat de transportar oxigen per a poder fer la combustió).

Paràmetres:
Per tal de modelitzar la velocitat que patirà el cohet, cal tenir en compte els següents paràmetres:

- Massa del cohet i del satèl·lit que transporta (sense combustible) M_t $[kg]$.
- Massa del combustible que hi pot emmagatzemar el cohet: M_c $[kg]$.
- Velocitat que experimenta el cohet: v $[ms^{-1}]$.

Recalcar que a partir d'ara es representaran les unitats expressades de la següent manera (per tenir un registre i seguiment més senzill de les dimensionalitats del model que es proposarà):

- Unitats de temps es representaran com T.
- Unitats de distància es representaran com L.
- Unitats de massa es representaran com M.

Relacions:
Mitjançant les assumpcions esmentades anteriorment podem deduïr les següents relacions entre els paràmetres i l'evolució de la velocitat (recolzant-nos també en el principi de conservació del moment lineal; $m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$):

- El creixement en la velocitat que experimenta el cohet és inversament proporsional a la massa total que transporta: $\frac{dv}{dt} \propto M_T^{-1} = (M_t + M_c)^{-1}$.
- El creixement en la velocitat del cohet és proporcional a la que porta: $\frac{dv}{dt} \propto v$.
- El creixement en la velocitat del cohet és proporcional a la diferencia de massa que perd pel consum de combustible: $\frac{dv}{dt} \propto \Delta M = (M_f - M_0) \underset{[t\to 0]}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}} \frac{dv}{dt} \propto -\frac{dm}{dt}$, $M_f < M_0$.

Model:
Utilitzant les relacions obtingudes anteriorment podem proposar el següent model:

$$\frac{dv}{dt} \propto -\frac{v}{M_T} \cdot \frac{dm}{dt} = -\frac{v}{M_t + M_c} \cdot \frac{dm}{dt} \tag{1}$$

◦ **Anàlisi del model:**
Abans de resoldre el model, analitzem les relacions físiques del model plantejat.

Observem que aquest model es pot deduïr de la segona llei de Newton de la següent manera:

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d(M_T \cdot v)}{dt} = \frac{d\left((M_c + M_t) \cdot v\right)}{dt} \underset{\left[\frac{dM_t}{dt}=0\right]}{\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}} F = M_t\frac{dv}{dt} + v\frac{dM_c}{dt} + M_c\frac{dv}{dt}$$

Amb les nostres assumpcions, el cohet està en un ambient casi idèntic al buit; és a dir, $F = 0$ (no pateix forçes externes).

D'aquesta forma obtenim el següent resultat:

$$M_t\frac{dv}{dt} + v\frac{dM_c}{dt} + M_c\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow (M_t + M_c)\frac{dv}{dt} = -v\frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{M_t + M_c} \cdot \frac{dm}{dt}$$

◦ **Anàlisi dimensional**
Analitzem ara la dimensionalitat del model proposat a 1 per tal d'assegurar que les relacions siguin les correctes i que no falta incloure cap element nou al sistema.

- Unitats de l'acceleració (creixement de la velocitat): $\left[\frac{dv}{dt}\right] = NT^{-2}$.
- Unitats de la Massa de combustible i transportada: $[M_t] = [M_c] = M$.
- Unitats de la velocitat: $[v] = MT^{-1}$.
- Unitats del consum de massa de combustible: $\left[\frac{dm}{dt}\right] = MT^{-1}$.

Es pot veure a simple vista la concordança de les unitats del nostre model, ja que:

$$\left[\frac{dv}{dt}\right] = \left[-\frac{v}{M_t + M_c} \cdot \frac{dm}{dt}\right] \Longrightarrow LT^{-2} = LT^{-1}M^{-1}MT^{-1} = LT^{-2}$$

Per tant, podem prosseguir a estudiar i resoldre el model plantejat:

◦ **Resolució del model:**
Resolem l'equació diferencial ordinària 1 mitjançant un codi programat en python (consultable a 4.1).

$$v(t) = V\frac{M_t + M_{c0}}{M_t + M_c(t)} \tag{2}$$

On V és la velocitat que pot anar una massa de valor $M_t + M_{c0}$ amb la potència màxima del motor encés; M_{c0} és la massa de combustible que pot emmagatzemar com a màxim el dipòsit del cohet, i $M_c(t)$ és la funció que modelitza la massa restant al dipòsit del cohet a mida que avança el temps.

D'aquesta forma, podem modelitzar el valor de V segons la potència del motor:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot d}{t} = F \cdot V \Longrightarrow V = \frac{P}{F}, \text{ on } F \text{ és la força del motor i } P \text{ la seva potència}$$

Per tant, la modelització de la velocitat és:

$$v(t) = \frac{P}{F} \cdot \frac{M_t + M_{c0}}{M_t + M_c(t)} \tag{3}$$

Cal recalcar dues coses abans de proseguir:

- L'equació 2, és pot obtenir del principi de conservació del moment lineal:
  $M_T(t) \cdot v(t) = M_T(t=0) \cdot v(t=0) \Longrightarrow v(t) = v(t=0) \cdot \frac{M_T(t=0)}{M_T(t)} = V\frac{M_t+M_{c0}}{M_t+M_c(t)}$.
- L'equació 3 depén de la massa de combustible en funció del temps; pel que cal modelitzar també el consum de massa de combustible.

◦ **Modelització de la massa de combustible:**
Abans de plantejar la modelització de la massa de combustible, plantejem les assumpcions del sistema:

- El motor absorbeix una quantitat de combustible constant: C_c $[MT^{-1}]$
- La potència i força que exerceix el motor és constant.

Plantejem ara les relacions del model:

- El consum de massa del motor és proporcional a la quantitat de massa que absorbeix el motor: $\frac{dm}{dt} \propto -C_c$, ($C_c$ està negat ja que el motor consumeix massa de combustible, és a dir, la funció decreix).

Resolent l'EDO, arrivem al següent model:

$$\frac{dm}{dt} = -C_c \Rightarrow M_c(t) = M_{c0} - C_c \cdot t \tag{4}$$

S'observa fàcilment que el model coincideix dimensionalment; ja que:

$$[M_c(t)] = [M_{c0} - C_c \cdot t] \Longrightarrow M = M - MT^{-1}T = M$$

◦ **Estudi del model de la velocitat del cohet:**

Substituïnt el model 4 en el model 3; obtenim el següent model de la velocitat del cohet:

$$v(t) = \frac{P}{F} \cdot \frac{M_t + M_{c0}}{M_t + M_{c0} - C_c \cdot t} \tag{5}$$

S'observa del model com aquest pot obtenir valor negatius per a vaors de $t > \frac{M_t+M_{c0}}{C_c}$.

Tot i així, no cal preocupar-se perquè aquest model només té sentit mentre el motor sigui en funcionament (tingui combustible); és a dir, per a valors de $t \in [0, \frac{M_{c0}}{C_c}]$.

D'una manera més exacta, podem expressar el model amb la següent funció definida a troços:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{P}{F} \cdot \frac{M_t+M_{c0}}{M_t+M_{c0}-C_c \cdot t} & , \quad t \in \left[0, \frac{M_{c0}}{C_c}\right] \\ \frac{P}{F} \cdot \frac{M_t+M_{c0}}{M_t} & , \quad t > \frac{M_{c0}}{C_c} \end{cases} \tag{6}$$

Si estudiem el model en la restricció $t \in \left[0, \frac{M_{c0}}{C_c}\right]$; podem observar com es tracta d'una funció que és creixent per a qualsevol punt de l'interval on és definida; comportament que concorda amb el pensament intuïtiu de, a menys massa, més velocitat (assumpció feta anteriorment).

A més, només té un punt d'estabilitat (mitjançant l'expressió 1 i és quan $v = 0$; pel que, $\forall v > 0, \frac{dv}{dt} > 0$.

<u>Anàlisi crítica:</u>

Remarcar que el model proposat és molt sencill i no te en compte factors substancials com és l'efecte de l'atmosfera o que el motor no genera tant impuls com per a suposar que la gravetat terrestre no és negligible.
A més, el ritme de consum de combustible no té perquè ser lineal (assumpció important per al nostre model de la massa de combustible).

En cas de voler optenir un model més precís cal tenir en compte la fricció amb l'aire i el consum de combustible del motor.

Resolució de l'objectiu:
Utilitzem el model plantejat, trobem la velocitat màxima que pot obtenir el cohet.

Com que la funció $v(t)$ és creixent per a $t > 0$, obtindrà la seva velocitat màxima a $t \longrightarrow \infty$.

Com que la funció és defida a troços i està limitada superiorment a $t = \frac{M_[c0]}{C_c}$, obtenim que la velocitat màxima que obté el cohet és a qualsevol temps superior o igual a $t = \frac{M_[c0]}{C_c}$; és a dir:

$$v_{max} = \frac{P}{F} \cdot \frac{M_t + M_{c0}}{M_t}$$

2 Exercici 2

Context:
Com a part de l'agencia nacional d'espionatge s'ha plantejat la utilització d'un dispositiu setel·lital espacial per al control dels potencial enemics del país.
Es proposa la situació d'un satèl·lit espacial en òrbita geoestacionària sobre la nació per tal de poder obtenir informació de moviments militars dels països propers a les nostres fronteres.

Objectiu:
Estudiar les característiques i la viabilitat d'utilitzar un cohet d'una sola fase per a posicionar el satèl·lit en òrbita geoestacionari; és a dir, modelitzar la velocitat que ha d'adquirir el cohet per aconseguir orbitar.

Assumpcions:
Previ a la modelització del cohet s'ha consultat al comité encarregat d'analitzar el comportament i capacitats del coet (informació situada a 1); pel que hem pogut obtenir el model de la velocitat en funció del temps que obté el coet.

També, s'han afegit assumpcions necessàries per al llançament del cohet i d'altres necessàries per tal de facilitzar la modelització i obtenir així una primera aproximació per discutir la viabilitat del cohet.

Indiquem ara les assumpcions fetes a l'hora de plantejar el model inicial:

- Assumim que el comportament de la velocitat que adquereix el coet és la obtinguda al model 1.
- Els efectes de l'atmosfera terrestre sobre el cohet son negligibles.
- Els efectes climàtics són negligibles.
- El cohet és d'una sola fase.
- El cohet gastarà per aribar a la posició desitjada tot el seu combustible.
- El combustible es considerarà un únic líquid (no es tindrà en compte la necessitat de transportar oxigen per a poder fer la combustió).
- Es considera que arriba a la òrbita geoestacionaria si és capaç d'arribar a l'altitud necessària amb la velocitat necessària com per a mantenir-se en òrbita (no ens fixem en les descomposicions de la velocitat).
- Les velocitats i forçes son d'un ordre suficientment "baix" com per a poder utilitzar física Newtoniana i no Relativista.
- El motor exerceix la mateixa força que la gravetat.

Paràmetres:
Per tal de modelitzar la velocitat que patirà el cohet, cal tenir en compte els següents paràmetres:

- Massa del cohet: $m_c(t)$ $[kg]$.
- Velocitat que experimenta el cohet: v $[ms^{-1}]$.
- Constant de Gravitació de Newton: G $[Nm^2kg^{-2}] = [m^3kg^{-1}s^{-2}]$.
- Altitud per a la òrbita estacionària: r $[m]$.
- Gravetat que pateix el cohet: $F_g = G\frac{M_1M_2}{r^2}$ $[N] = [kgm^2s^{-2}]$.
- Massa de la Terra: m_T $[kg]$.

Recalcar que a partir d'ara es representaran les unitats expressades de la següent manera (per tenir un registre més senzill de les dimensionalitats del model que es proposarà):

- Unitats de temps es representaran com T.
- Unitats de distància es representaran com L.
- Unitats de massa es representaran com M.

Relacions:
Mitjançant les assumpcions esmentades anteriorment podem deduïr la relació que ha de complir el model per tal de que tingui sentit (utilitzant la segona llei de Newton):

$$\sum_{n=0}^{N} F_n = 0 \Rightarrow F_c - F_g = 0 \Rightarrow m_c(t)\frac{v^2(t)}{r(t)} = G\frac{m_c(t)m_T}{r^2(t)} \Rightarrow v^2(t) = G\frac{m_T}{r(t)} \tag{7}$$

Model:
Utilitzant la relació obtinguda anteriorment; resolem l'EDO plantejada per a obtenir el model sabent que $\frac{dr}{dt} = v(t)$:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = G\frac{m_T}{r(t)} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \sqrt{G\frac{m_T}{r(t)}} \Rightarrow \sqrt{r(t)}dr = \sqrt{G \cdot m_T}dt \tag{8}$$

Integrant als dos costats de l'igualtat obtenim el model de la trajectoria del cohet. Per tant, obtenim el següent model per a la trajectoria del cohet:

$$r(t) = \sqrt[3]{\frac{9Gm_T \cdot t^2}{4}} \tag{9}$$

◦ **Anàlisi dimensional**
Analitzem ara la dimensionalitat del model proposat a 9 per tal d'assegurar que les relacions siguin les correctes i que no falta incloure cap element nou al sistema.

- Unitats de temps: $[t] = T$.
- Unitats de la Massa Terrestre: $[m_T] = M$.
- Unitats de la altura (trajectoria): $[r] = L$.
- Unitats de la constant de Gravitació de Newton: $\left[MLT^{-1}\right]$.

Es pot veure a simple vista la concordança de les unitats del nostre model, ja que:

$$[r] = \left[\sqrt[3]{\frac{9Gm_T \cdot t^2}{4}}\right] \Longrightarrow L = \left(L^3M^{-1}T^{-2} \cdot M \cdot T^2\right)^{\frac{1}{3}} = L$$

Per tant, podem prosseguir a estudiar el model plantejat:

◦ **Estudi del model de la velocitat del cohet:**

Observem que, per a obtenir el model de la velocitat, hem de derivar el model trobat per a la posició respecte al temps:

$$v(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt[3]{\frac{9Gm_T \cdot t^2}{4}}\right) = \sqrt[3]{\frac{2Gm_T}{3t}} \tag{10}$$

Observem com, també, les dimensionalitats del model concorden amb les de la velocitat.

Anàlisi crítica:

Remarcar que el model proposat és molt senzill i no té en compte factors substancials com és l'efecte de l'atmosfera la inclinació amb la que s'ha de llençar el cohet (pel que cal considererar una trajectoria major que en línea recta).
A més, no s'ha considerat possibles efectes meteorològics ni sistemàtics (possibles errors en les mesures de l'altitud de l'òrbita necessària o de la massa terrestre).

En cas de voler obtenir un model més precís cal tenir en compte la fricció amb l'aire i la trajectoria que ha de seguir el cohet per arribar a l'òrbita desitjada.

Resolució de l'objectiu:

Utilitzem el model plantejat, trobem la velocitat que ha d'arribar el cohet per a estar en òrbita estacionaria mitjançant l'expresió 7:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{4.2164 \cdot 10^7}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 5.97}{4.2164}} \cdot 10^3 = (3.07 \pm 0.01) \cdot 10^3 ms^{-1} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow v = (3.07 \pm 0.01)\frac{km}{s} \tag{11}$$

A partir del resultat obtingut, comprovem mitjançant el model 2 si és viable utilitzar un cohet d'una sola fase calculant (amb el model 10 trobant prèviament el temps necessari per a arribar a òrbita):

$$v = \sqrt[3]{\frac{2Gm_T}{3t}} \Rightarrow t = \frac{2Gm_T}{3 \cdot v^3} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{3 \cdot (3.07 \cdot 10^3)^3} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 5.97}{3 \cdot 3.07^3} \cdot 10^4 =$$

$$= (0.91 \pm 0.01) \cdot 10^4 s = 2.54h \tag{12}$$

Trobem ara la viabilitat del cohet d'una sola fase suposant que arriba a òrbita geoestacionaria amb tot el combustible utilitzat:

$$v(0.91 \cdot 10^4) = 3.07 \cdot 10^3 \Rightarrow \frac{P}{F} \cdot \frac{M_t + M_{c0}}{M_t + M_{c0} - C_c \cdot 0.91 \cdot 10^4} = 3.07 \cdot 10^3 \tag{13}$$

Observem que el consum de combustible del motor ha de ser $C_c = \frac{M_{c0}}{9.1 \cdot 10^3}$.

Suposant que el cohet té una capacitat de combustible similar a la dels propulsaors espacial de classe *Shuttle*. El consum de combustible ha de ser aproximadament $C_C = 50Kgs^{-1}$; ja que tenen una capacitat de $500.000kg$.

Un consum com aquest és bastant petit si es tracta de motors a base de combustible sòlid.
Per altre banda, si es tracta d'un motor de comustible líquid, la seva capacitat disminueix (i també la seva potencia); pel que obtindriem que el seu consum seria més baix.

Per aquest motius descartem la viabilitat de posar en òrbita geoestacionaria un satèl·lit amb un cohet d'una sola fase i es recomanaria estudiar la capacitat de dur a terme la missió mitjançant un cohet multifase.

3 Exercici 3

Context:
Degut a les restriccions d'activitats i movilitats provocades per la pandemia de *Covid-19*, les activitats de caça recreativa així com d'altres que serveixen per al control d'espècies animals en llibertat per tot el territori s'han detingut.

Per aquest motiu, les poblacions d'animals salvatges (i en expecial les de porcs senglars) han experimentat un creixement molt elevat que cal controlar tant per evitar el seu efectes en la societat com per a evitar que s'estingueixin per dèficit d'aliment degut a la competitivitat entre els individus de la mateixa espècie.

Objectiu:
Modelitzar la població de porcs senglars en llibertat per estudiar la tendència i, així, poder decidir com actuar per a controlar la població.

Assumpcions:
Durant la recerca d'informació per a l'estudi s'han recopilat certes tendències històriques de la població de porcs senglas al terriotri nacional, així com tendències extretes de països similars (tant en clima con fauna i flora).

Gràcies a aquestes tendències podem fer certes assumpcions per tal de simplificar el model a estudiar:

- Si la població de porcs senglars supera un límit superior M individus, l'espècie podria extingir-se per falta de recursos.
- Si la població de porcs senglas no supera un límit inferior de m individus, l'espècie podria extingir-se per dèficit de natalitat.
- L'espècie és capaç de viure molt anys i podem suosar que viu de forma eterna.
- No hi ha defuncions per motius no biològics.

Paràmetres:
Per tal de modelitzar el comportament de la població de porcs senglars, cal tenir en compte els següents paràmetres:

- Límit superior de població que permet sostenir l'habitat degut als recursos disponibles: M [$\#població$].
- Límit inferior de població que permet sostenir l'espècie degut a la taxa de reproducció: m [$\#població$].
- Població de porcs senglars: P [$\#població$].
- Taxa de reproducció de l'espècie per unitat de temps: r [$temps^{-1}$].

Recalcar que a partir d'ara és representaràn les unitats de població i de temps de la següent manera (per tenir un registre i seguiment més senzill de les dimensionalitats del model que es proposarà):

- Unitats de temps es representaran com T.
- Unitats de població es representaran com N.

Relacions:

Mitjançant les assumpcions esmentades anteriorment podem deduïr les següents relacions entre els paràmetres i el creixement de la població de porcs senglars:

- El creixement de població és proporcional a la taxa de reproducció: $\frac{dP}{dt} \propto r$.
- El creixement de població és proporcional a la diferència entre el límit superior que pot sostenir l'espècie degut a l'habitat i la població actual: $\frac{dP}{dt} \propto \Delta P_M = M - P$.
- El creixement de població és proporcional a la població actual i el límit inferior que pot soportar la reproducció de l'espècie: $\frac{dP}{dt} \propto \Delta P_m = P - m$.
- El creixement de població és proporcional a la població de l'espècie: $\frac{dP}{dt} \propto P$.

Model:

Utilitzant les relacions obtingudes anteriorment podem proposar el següent model:

$$\frac{dP}{dt} \propto rP\Delta P_M \Delta P_m \Longrightarrow \frac{dP}{dt} = rP(M - P)(P - m) \tag{14}$$

◦ **Anàlisi del model:**

Abans de resoldre el model comprovem el comportament per tal d'assegurar que segueix les assumpcions plantejades:

1. Quan la població de porcs senglars no arriba al mínim de població que pot soportar l'espècie, la població de l'espècie a de decrèixer (pèrdua de població degut a la falta de reproducció).
2. Quan la població de porcs senglars sobrepassa el màxim de població que pot soportar l'habitat, la població de l'espècie a de decrèixer (pèrdua de població degut a la falta de recursos).
3. Quan la població de porcs senglars està continguda entre els límits superior i inferior, l'espècie té creixement poblacional.

Observem que per tal de donar-se aquestes situacions cal complir uns requisits per a que tingui sentit el model:

I) El sistema està definit al semiplà positiu de l'espai *població-temps* (no té sentit que existeixi una població negativa de porcs senglars), $P > 0$.

II) Els límits superior i inferior de població, que permeten un creixement de població ha de donar un interval no nul; és a dir, $M > m$.

III) La taxa de reproducció ha de ser positiva, $r > 0$.

Deduïm que, donades les condicions explicades, les situacions plantejades es donen, ja que:

1. Si $P > M \Longrightarrow \frac{dP}{dt} < 0$.
2. Si $P < m \Longrightarrow \frac{dP}{dt} < 0$.
3. Si $P \in (m, M) \Longrightarrow \frac{dP}{dt} > 0$.

S'observa com el model reflexa els comportament explicats inicialment, pel que és procedeix a estudiar la dimensionalitat del model per assegurar la correcta relació entre els diferents paràmetres abans exposats.

◦ **Anàlisi dimensional**

Analitzem ara la dimensionalitat del model proposat a 14 per tal d'assegurar que les relacions siguin les correctes i que no falta incloure cap element nou al sistema.

- Unitats del creixement poblacional de l'espècie estudiada: $\left[\frac{dP}{dt}\right] = NT^{-1}$.
- Unitats de la taxa de creixement de població de l'espècie: $[r] = T^{-1}$.
- Unitats de la *població potencial*[1]: $[\Delta P_M] = N$.
- Unitats de la *població extra-suficient*[2]: $[\Delta P_m] = N$.
- Unitats de la població de l'espècie: $[P] = N$

Es pot veure a simple vista la desconcordança de les unitats del nostre model, ja que:

$$\left[\frac{dP}{dt}\right] \neq [rP(M-P)(P-m)] \Longrightarrow NT^{-1} \neq T^{-1}N \cdot N \cdot N = N^3T^{-1}$$

Per tal de solucionar aquest problema amb la dimensionalitat del model, afegim una constant K amb dimensions N^{-2} per així poder ajustar la dimensionalitat del model.

Per a no modificar el model plantejat, redefinim la taxa de reproducció de l'espècie r multiplicant-la per la constant K que hem d'afegir: $r := r \cdot K$, per tant, $[r] = (N^2T)^{-1}$.

◦ **Estudi del comportament del model:**

Tal i com hem explicat anteriorment a l'anàlisi del model, hem obtingut el comportament esperable de la població segons les assumpcions presentades incialment: quan $P > M$ o $P < m$ la població de porcs senglars decreixerà.

Per altre banda, queda estudiar quan la població s'estabilitza i es manté constant; no hi ha creixement poblacional; és a dir, $\frac{dP}{dt} = 0$.

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Longleftrightarrow rP(M-P)(P-m) = 0 \underset{[r>0]}{\underset{\uparrow}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} P &= M \\ P &= m \\ P &= 0 \end{cases}$$

[1] Anomenarem com *població potencial* de l'espècie a la quantitat de població que encara pot sostenir l'habitat

[2] Anomenarem com *població extra-suficient* de l'espècie a la quantitat de població que sobrepasa el mínim necessari que cal per assegurar la continuïtat de l'espècie

Per tant, podem deduïr el comportament de la població de porcs senglars (estudiant només el domini que ens interessa, el que pot existir; és a dir, $P \geq 0$).

- Si la població és menor que el llindar m, la població de l'espècie tendirà a decreixer fins a extinguir-se.
- Si la població és exactament m, l'espècie serà molt susceptible a canvis i, per tant, pot extinguir-se molt fàcilment.
- Si la població es situa entre els llindars m i M, la població de l'espècie creixerà fins a estabilitzar-se al voltant del límit superior M.
- Si la població és superior al llindar M, l'espècie tendirà a perdre població salvatge degut a la falta de recursos fins a arribar a estabilitzar-se al voltant de M.

Anàlisi crítica:

Remarcar que el model proposat és molt senzill i no té en compte les defuncions de l'espècie ni els possibles efectes humans sobre l'espècie com la caça ilegal o accident on la vida dels animals salvatges poden ser afectades, així com la competitivitat entre les diverses espècies autòctones i invasores.

Per a poder millorar el model caldria afegir els factors més significatius no plantegats fins ara (els factors humans com la caça il·legal i la competitivitat entre espècies).

Resolució de l'objectiu:

Per a decidir quants permisos de caça recreativa cal donar a disposició de la població cal abans estudiar on es situa la població de porcs senglars dins dels intervals estudiats:

- Si la població és inferior al llindar m és necessari la restricció absoluta de la caça de porcs senglar degut al gran perill d'extinció de l'espècie així com es recomana la instauració de programes de recuperació per a l'espècie.
- Si la població és superior al llindar M no cal donar permisos de caça per tal de mantenir la població estable ja que per si mateixa tendirà a estabilitzar-se al voltant del llindar.
- Si la població està inclosa entre els llindars anteriors, s'estabilitzarà al voltant del llindar superior eventualment.

Es conclou que l'únic cas a estudiar és si la població és situa entre els llindars inferior i superior m i M o superior al llindar M però es vol que s'estabilitzi en un valor inferior al que és troba.

En aquest cas podem modificar el nostre model de la següent forma:

$$\frac{dP}{dt} = rP(M-P)(P-m) - dP = P\left[r(M-P)(P-m) - d\right]$$

On d és la taxa animals caçats pels caçador atributs amb llicencia.
S'observa com, d'aquesta forma, la població serà estable si $d = r(M-P)(P-m)$.
Definim la taxa de porca senglars caçats com: $d = \frac{\#morts}{\#llicencies}$.
D'aquesta forma podem calcular e nombre de llincencies L:

$$L = \frac{C}{r(M-P)(P-m)},\text{ on } C \text{ és el nombre de porcs senglars caçats.}$$

Cal resaltar que aquest model no és del tot efica perque s'haurien de modificar les llicencies de caça gradualemnt en el temps per a poder mantenir la població estable; tot així, si es disposa de intervals de temps on no és pot caçar, la població oscilarà en un interval més o menys estable.

4 Anexe

4.1 Programa resolució Exercici 1:

Funció show:

```
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy
from scipy import stats
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import Math, display
import sympy as sp
from sympy.physics.units.systems import SI
from sympy.physics.units import meter, second, liter,
                                hour, degree, convert_to
from sympy import sin, cos, pi, Abs

sp.init_printing()
def show(*args):
    out = ""
    for arg in args:
        if isinstance(arg, (sp.Expr, sp.Eq)):
            arg = sp.latex(arg)
        else:
            arg = str(arg)
        out += arg
    display(Math(out))

qq = "\quad "
```

Calcul de l'EDO:

```
from sympy.abc import t, C, T
Mt = sp.Symbol('Mt', nonzero = True, positive = True)
V = sp.Symbol('V', nonzero = True, positive = True)

Mc = sp.Function('Mc')(t)
v = sp.Function('v')(t)

dv = sp.diff(v, t)
dm = sp.diff(Mc, t)

f = -v*dm/(Mc+Mt)
eq = sp.Eq(dv, f)

ics = {v.subs(t, 0): V}
sol = sp.dsolve(eq, v, ics=ics)

vt = sol.rhs
show(vt)
```