

Universitat Autònoma de Barcelona  
Facultat de Ciències



## ENTREGA 5 MODELITZACIÓ:

*Autor:*

Gerard Lahuerta

1601350

23 de Març del 2023

# Contents

<b>1</b>	<b>Exercici 1</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Annex:</b>	<b>8</b>
2.1	Imports i funcions generals . . . . .	8
2.2	Càlcul models coeficient de fricció . . . . .	9
2.3	Visualització de les dades . . . . .	9
2.4	Simulació usant la caiguda de pressió . . . . .	9
2.5	Simulació sense usar la caiguda de pressió . . . . .	10
2.6	Discrepància . . . . .	10
2.7	Estudi de les incerteses dels paràmetres . . . . .	11
2.8	Incertesa de la discrepància . . . . .	11
2.9	Error relatiu del model . . . . .	11
2.10	Estudi del nivell de confiança . . . . .	11

# 1 Exercici 1

## Context:

Com a part de la construcció d'un nou sistema de canalització d'aigua des dels rius col·indants a la població s'ha demanat estudiar la millor relació pressió-cabal per tal de que l'aigua es pugui transportar de forma adient.

## Objectiu:

Estudiar el coeficient de fricció del fluid en ambients de pressions i cabals diferents.

## Assumpcions:

Per a fer el càlcul d'incerteses s'han tingut en compte les següents assumpcions:

- No hi ha problemes de tares o malproducció del material de construcció.
- El material és idèntic a la mostra obtinguda.
- Tots els paràmetres mesurats els tenim amb una incertesa del 0.1%.
- El manòmetre té una resolució de 10 Pa.
- El flowmeter té una resolució de 10 ml/s.
- Les constants reals tenen una precisió tan elevada que podem suposar negligible.
- Assumim que disposem de suficients mostres experimentals.

## Paràmetres:

Per a modelitzar el coeficient de fricció del líquid transportat i poder, així, calcular-lo i trobar la seva incertesa i la discrepància s'han utilitzat els següents paràmetres:

- Diferència de pressió  $\Delta P$ ,  $[Pa] = [N \cdot m^{-2}] = [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}]$ .
- Diàmetre de la tuberia  $d$ ,  $[m]$ .
- Rugositat del material  $\epsilon$ ,  $[m]$ .
- Flux de líquid  $Q$ ,  $[m^3 \cdot s^{-1}]$ .
- Densitat del fluid  $\rho$ ,  $[kg \cdot m^{-3}]$ .
- Viscositat dinàmica  $\mu$ ,  $[Pa \cdot s] = [kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$ .
- Llargada de la tuberia  $l$ ,  $[m]$ .

Recalcar que a partir d'ara es representaran les unitats expressades de la següent manera (per tenir un registre i seguiment més senzill de les dimensionalitats del model):

- Unitats de temps es representaran com  $T$ .
- Unitats de distància es representaran com  $L$ .
- Unitats de massa es representaran com  $M$ .

### **Model:**

El model utilitzat per a calcular la força de fricció és extret dels models físics sobre dinàmica de fluids següents:

$$\left. \begin{aligned} f &= \left( -1.8 \cdot \log \left( 6.9 \left( Re + \frac{\epsilon}{3.7 \cdot d} \right)^{-1} \right)^{1.11} \right)^{-2} \\ Re &= 4 \cdot Q \cdot \rho \cdot (\pi \cdot d \cdot \mu)^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f = \frac{0.309}{\log^2 [0.234 \cdot \epsilon^{1.11} \cdot d^{-1.11} + 1.725 \cdot \pi \cdot d \cdot \mu \cdot (Q \cdot \rho)^{-1}]} \quad (1)$$

On  $f$  i  $Re$  són la força de fricció que experimenta el fluid i el número de Reynolds respectivament.

Per tal de poder verificar la bona predicció del model; es compararan els resultats obtinguts amb les dades obtingudes mitjançant el model:

$$\Delta P = \frac{8lQ^2 f \rho}{\pi^2 d^5} \Rightarrow f = \frac{\pi^2 \Delta P d^5}{8lQ^2 \rho} \quad (2)$$

Els càlculs per obtenir els models es troben a [2.2](#).

Mitjançant un anàlisi dimensional, es pot observar com el model és consistent respecte la dimensionalitat del problema:

$$\begin{aligned} [f] &= \left[ \frac{0.309}{\log^2 [0.234 \cdot \epsilon^{1.11} \cdot d^{-1.11} + 1.725 \cdot \pi \cdot d \cdot \mu \cdot (Q \cdot \rho)^{-1}]} \right] = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [0.234 \cdot \epsilon^{1.11} \cdot d^{-1.11} + 1.725 \cdot \pi \cdot d \cdot \mu \cdot (Q \cdot \rho)^{-1}] = 1 \end{aligned}$$

Si analitzem les unitats de l'expressió observem el següent:

$$[0.234 \cdot \epsilon^{1.11} \cdot d^{-1.11} + 1.725 \cdot \pi \cdot d \cdot \mu \cdot (Q \cdot \rho)^{-1}] = L^{1.11} \cdot L^{-1.11} + L \cdot M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1} \cdot T \cdot L^{-3} \cdot L^3 \cdot M^{-1} = 1$$

Pel que, efectivament, el nostre model concorda amb la dimensionalitat del problema.

De la mateixa manera, es pot observar com el model utilitzat per a validar el nostre amb les dades obtingudes experimentalment també és dimensionalment consistent:

$$[f] = \left[ \frac{\pi^2 \Delta P d^5}{8lQ^2 \rho} \right] = \frac{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^5}{L \cdot L^6 \cdot T^{-2} \cdot M \cdot L^{-3}} = 1$$

### Simulació dels resultats:

Per tal de corroborar l'eficàcia del model 1 es procedeix a simular els resultat del coeficient de fricció mitjançant les dades obtingudes a l'experiment i comparar-les amb les del model 2.

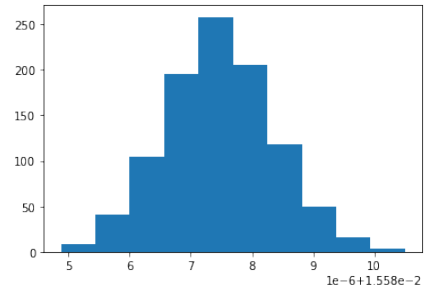
Mostrem a continuació els resultats del nostre model i els obtinguts pel model utilitzat per a la verificació:

S'observa com els dos models donen (majoritàriament) valors de coeficient de fricció continguts a l'interval  $[0.015, 0.016]$ .

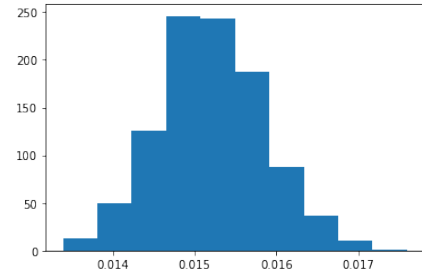
Tot i així, la distribució dels valors són diferents, obtenint en el nostre model una desviació respecte a la mitjana del model molt més petit.

Concretament els ordres de la desviació dels dos models son de  $10^{-4}$  i  $10^{-7}$ , en el model de verificació i el proposat, respectivament.

Procedim amb la validació del model calculant la discrepància entre el proposat i el utilitzat per a la validació.



(a) Histograma pel nostre model



(b) Histograma pel model de verificació

Es mostra a continuació l'histograma dels resultats obtinguts:

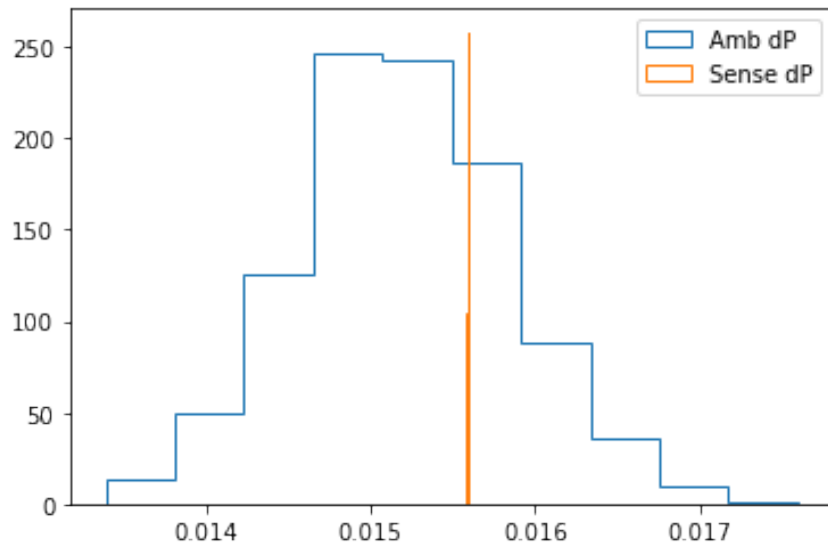


Figure 1: Histograma dels resultats dels dos models

S'observa fàcilment la mitjana de valors predits pels models; concretament hi existeix una discrepància de  $4 \cdot 10^{-4}$ .

Cal recalcar que, tot i visualitzar una separació gran entre les mitjanes a la figura 1, aquesta en veritat és de l'ordre de  $10^{-4}$ ; pel que podem concloure que el nostre model reflexa de forma adient la realitat.

També mencionar un altre cop la gran diferència de desviacions entre els models, obtenint en el model proposat una desviació moltes vegades més petita del que prediu el model utilitzat per a la verificació.

Comentar que els càlculs i representacions de les figures s'han dut a terme mitjançant un codi en python que es troba a 2.4 i a 2.5.

### **Anàlisi d'incerteses:**

Com a part de la verificació i validació del model proposat s'ha estudiat la incertesa de la discrepància del model.

Aquesta estimació de l'incertesa de la discrepància del model s'ha fet mitjançant un programa *python* i, amb els resultat obtinguts, poder comprovar la precisió del model proposat.

Els resultats obtinguts són els següents:

- Incertesa dels paràmetres (al quadrat):  $u_p^2 = 1.884 \cdot 10^{-10}$ .
- Incertesa de l'estimació de la discrepància:  $u_v = 0.0006$ .
- Discrepància:  $E = (4 \pm 6) \cdot 10^{-4}$ .

Observem doncs que, com a molt, la discrepància és de l'ordre de  $10^{-3}$ , suficientment precís com per a utilitzar el model proposat que no requereix de la pressió i que permet així evitar errors en els càlculs del coeficient de fricció ja que no requereix mesurar aquest paràmetre (la diferència de pressió).

Per a corroborar els resultats obtinguts s'ha decidit calcular l'error del nostre model. El resultat d'aquest estudi (consultable a 2.9) és de 2.4%.

Finalment, trobem que l'interval de confiança del model si tenim un error del 5% és del 96% (tal i com s'ha calculat a partir del scrip *python* inclós a l'apartat 2.10).

### **Anàlisi crítica:**

Cal comentar abans d'extreure conclusions que el model ha sigut comparat amb resultats extrets de dades indirectes i amb el model de validació; pel que podem patir errors de mesura per l'extracció de les dades i que, a més, poden ser amplificades pels possibles errors del model de verificació.

Per tant, una primera recomenació per a millorar l'estudi és obtenir dades directes de la mesura del coeficient de fricció per a una millor verificació dels models.

Tot i així, degut a la complicació tècnica d'obtenir mesures directes, una altre alternativa seria obtenir millor precisió en els paràmetres mesurats per a poder obtenir valors més fiables; així com també considerar més paràmetres que segur són significatius en el comportament del coeficient de fricció que pateix el fluid (com la temperatura del fluid o el recorregut que fa per les tuberies, si no es tracta d'un recorregut en línia recta).

També cal esmentar que la precisió obtinguda amb el model proposat és tan alta, obté valors amb discrepàncies amb els model de verificació d'ordres suficientment negligibles, el nivell de confiança del model es tan elevada i l'error del model és del 2.4%; que es recomana la utilització del model proposat per als càlculs del coeficient de fricció.

## 2 Annex:

### 2.1 Imports i funcions generals

```
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy
from scipy import stats
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import Math, display
import sympy as sp
from sympy.physics.units.systems import SI
from sympy.physics.units import meter, second, liter,
                                hour, degree, convert_to
from sympy import sin, cos, pi, Abs, N

sp.init_printing()

def show(*args):
    out = ""
    for arg in args:
        if isinstance(arg, (sp.Expr, sp.Eq)):
            arg = sp.latex(arg)
        else:
            arg = str(arg)
        out += arg
    display(Math(out))

qq = "\quad"
```



## 2.2 Càlcul models coeficient de fricció

```
from sympy.abc import rho, epsilon, mu, Q, L, d, f, P
Re = sp.symbols('Re')

DP = f * 8 * rho * Q**2 * L / (sp.pi**2 * d**5)
show('\Delta P==', DP)

f = 1 / (-1.8 * sp.log(6.9 / Re + (epsilon/d/3.7)**1.11))**2
show('f==', f)

Re = 4 * Q * rho / (sp.pi * mu * d)
show('Re==', Re)

#-----

f = f.subs("Re", Re)
show("f==", f)

#-----

dp = sp.symbols("P")
F = sp.solve(sp.Eq(DP, dp), "f")[0]
show("f==", F)
```

## 2.3 Visualització de les dades

```
data = pd.read_csv("dp_data.csv")
print(data.columns)

l = pd.plotting.scatter_matrix(data[data.columns])
#-----
print(data.mean(), '\n', data.std())
```

## 2.4 Simulació usant la caiguda de pressió

```
valors = {rho: 1000, epsilon: 0.01, mu: 1.2E-3, L: 1000, d: 0.15}
show('F==', F.subs(valors))

#-----

fF = sp.lambdify([Q, P], F.subs(valors))
q = data['Flow (l/s)'] / 1000
p = data['\Delta P (Pa)']
dp = fF(q, p)

l = plt.hist(dp)
print(np.mean(dp), np.std(dp))
```

## 2.5 Simulació sense usar la caiguda de pressió

```
valors = {rho: 1000, epsilon: 0.01, mu: 1.2E-3, L: 1000, d: 0.15}  
show('f_=_', f.subs(valors))
```

```
#-----
```

```
ff = sp.lambdify(Q, f.subs(valors))  
q = data['Flow_(l/s)'] / 1000  
dp2 = ff(q)
```

```
l = plt.hist(dp2)  
print(np.mean(dp2), np.std(dp2))
```

## 2.6 Discrepància

```
S = np.mean(dp2)  
D = np.mean(dp)  
E = S - D  
print(E)
```

```
l = plt.hist(dp, histtype='step')  
l = plt.hist(dp2, histtype='step')
```

```
l = plt.legend(['Amb_dP', 'Sense_dP'])
```

## 2.7 Estudi de les incerteses dels paràmetres

```
Re = 4 * Q * rho / (sp.pi * mu * d)
f = 1 / (-1.8 * sp.log(6.9 / Re + (epsilon/d/3.7)**1.11))**2

#-----

mesures = {Q: q.mean()}
valors = {rho: 1000, epsilon: 0.01, mu: 1.2E-3, L: 1000, d: 0.15}

dep = sp.diff(f, epsilon).subs(valors).subs(mesures).n()
dd = sp.diff(f, d).subs(valors).subs(mesures).n()
dmu = sp.diff(f, mu).subs(valors).subs(mesures).n()
dQ = sp.diff(f, Q).subs(valors).subs(mesures).n()
drho = sp.diff(f, rho).subs(valors).subs(mesures).n()
show(dep, qq, dd, qq, dmu, qq, dQ, qq, drho)

#-----

up2 = np.sum(np.power([
    dep * valors[epsilon] * 0.001,
    dd * valors[d] * 0.001,
    dmu * valors[mu] * 0.001,
    dQ * q.std(),
    drho * valors[rho] * 0.001,
], 2))
```

## 2.8 Incertesa de la discrepància

```
ud = np.std(dp)
uv = np.sqrt(float(uD**2 + up2))
uv

#-----

show("E_=_%0.4f_\\pm_%0.4f" % (E, uv))
```

## 2.9 Error relatiu del model

```
ur = E/S
ur
```

## 2.10 Estudi del nivell de confiança

```
t = 0.05 / ur
l, h = stats.t.cdf([-t, t], 1000)
CL = h - l
CL
```