Universitat Autònoma de Barcelona
Facultat de Ciències

Entrega 4 Modelització:

Autor:

Gerard Lahuerta

1601350

15 de Març del 2023

Contents

1 Exercici 1

Context:
Com a part de construcció del nou rascacel de la ciutat, s'ha encarregat al nostre grup d'investigació la fiabilitat dels materials de construcció per tal d'assegurar la seguretat de la construcció.

Objectiu:
Estudiar el mòdul elàstic del material utilitzant en base una mostra rectangular subministrada per l'emperesa constructora.

Assumpcions:
Per a fer el càlcul d'incerteses s'han tingut en compte les següents assumpcions:

- No hi ha problemes de tares o malproducció del material de construcció.
- El material és idèntic a la mostra obtinguda.
- Tots els paràmetres mesurats els tenim amb una incertesa del 1%.
- Les constants reals tenen una precissió tan elevada que podem suposar negligible.
- Assumim que disposem de suficients mostres experimentals.

Paràmetres:
Per a modelitzar el modul elàstic del material i poder, així, calcular-lo i trobar la seva incertesa s'han utilitzat els següents paràmetres:

- Càrrega suportada P, $[N] = [kg \cdot m \cdot s^{-2}]$.
- Dimensió del rectangle $(b \times b \times l)$, $[m^3]$.
  - Base del rectangle cuadrada amb dimensions b, $[m]$.
  - Dimensió de l'alçada del rectangle l, $[m]$.

Recalcar que a partir d'ara es representaran les unitats expressades de la següent manera (per tenir un registre i seguiment més senzill de les dimensionalitats del model que es proposarà):

- Unitats de temps es representaran com T.
- Unitats de distància es representaran com L.
- Unitats de massa es representaran com M.

Model:
El model utilitzat per a calcular el mòdul elàstic és extret dels models físics així com models de moments d'inèrcia:

$$\left.\begin{array}{rcl} P & = & \frac{4\pi^2 E \cdot I}{l^2} \\ \\ I & = & \frac{b^4}{12} \end{array}\right\} \Longrightarrow E = \frac{3 \cdot P \cdot l^2}{\pi^2 \cdot b^4} \tag{1}$$

On els paràmetres I i E son el moment d'inèrcia de la columna respecte l'eix y i el mòdul elàstic (respectivament).

Es pot observar, a més, com aquest model concorda amb les dimensions esperades (te la dimensionalitat correcta).

Anàlisi d'incerteses:
Trobem ara les incerteses i especificacions solicitades:

◦ **Coeficients de sensitivitat dels paràmetres:**
Per trobar la significancia de la variable en el model, calculem el seu coeficient de sensitivitat: $C_i = \frac{x_i}{y} \cdot \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$, on $y = f(\vec{x})$ el paràmetre objectiu i x_i el paràmetre que volem obtenir el seu coeficient de sensitivitat.

$$\begin{aligned} C_P &= 1 \\ C_l &= 2 \\ C_b &= -4 \end{aligned} \tag{2}$$

Els càlculs per a obtenir els resultats han sigut efectuats mitjançant el següent codi 3.2.1.

Cal recalcar com els valors obtinguts de coeficients de sensitivitat són exactament els mateixos que els graus de cada paràmetre en el model.
Aquest resultat és degut a que tots els paràmetres son independents uns dels altres (només es multipliquen).

◦ **Incertesa relativa del mòdul elàstic:**
Calculem l'incertesa relativa del model proposat per al mòdul elàstic sabent que:

$$ur_s^2 = \sum_{i=0}^{N} C_i \cdot I_i$$

On C_i i I_i són el coeficient de sensitivitat i la incertesa del paràmetre i-èssim.

A partir dels resultats obtinguts anteriorment i el coneixement de les incerteses dels paràmetres s'ha obtingut el següent valor utilitzant el codi mostrat a 3.2.2.

$$ur_E = 0.046$$

◦ **Pes relatiu dels paràmetres en l'incertesa del mòdul elàstic:**
Calculem ara quin dels paràmetres és més significatiu (pes relatiu P_i) en l'incertesa relativa del modul elàstic per tal d'obtenir on s'han d'invertir més capacitats en augmentar la precissió per, així, millorar més l'error relatiu del nostre paràmetre objectiu:

$$\begin{aligned} P_P &= 0.048 \\ P_l &= 0.190 \\ P_b &= 0.762 \end{aligned} \tag{3}$$

Aquests valors s'han obtingut amb el codi inclòs a 3.2.3.

S'observa com els resultats obtinguts són concordants amb els obtinguts al càlcul dels coeficients de sensitivitat i amb un anàlisi viasual del model proposat ja que:

- Observant el model és notable que el paràmetre més rellevant és aquell que tingui un grau major (tal i com hem obtingut amb l'anàlisi del pes relatiu).
- Els resultats dels coeficients de sensitivitat ens permeten ja saber que els més significatius seràn aquells amb els coeficients amb valor absolut més elevant (ja que tots els paràmetres tenen la mateixa incertesa 1%).

Anàlisi crítica:

És necessari comentar que el model proposat i estudiat pot ser millorat tenint en compte paràmetres com la densitat del material o la temperatura a la que és sotmés el pilar (així com les diverses situacions atmosfèriques) que no han sigut contemplades en aquest estudi inicial, però que afecten al rendiment dels material de construcció.

També s'hauria de procurar tenir en compte la precisió numèrica dels càlculs efectuats per l'ordinador mitjançant els codis esmentats i la precisió de les constants del model.

2 Exercici 2

Context:

Per tal de maximitzar la producció de carn donades les altes demandes de l'aliment, un empresa ramadera ha encarregat l'estudi de l'anàlisi del creixement (en pes) dels animals en funció del mejar subministrat.

Objectiu:

Trobar la millor quantitat de menjar per tal de maximitzar el seu creixement i obtenir l'incertesa d'aquesta mesura així com d'altres incerteses rellevants per a subministrar a l'empresa ramadera el nostre estudi.

Assumpcions:

Donades les situacions de l'empresa agraria i dels animals que exploten, podem utilitzar les següents assumpcions per al nostre estudi:

- Els paràmetres utilitzats per a l'estudi tenen una precissió de l'1%.
- Els efectes del menjar sobre el pes dels animals són idèntics per als diferents animals (tenen un metabolisme idèntic).
- La quantitat de menjar subministrat és idèntic per als animals (no hi ha efectes d'errors humans al tractar-se d'un sistema informatitzat).
- La quantitat de menjar que disposem és il·limitada (no hi ha problemes en el subministrament per factors econòmics, d'emmagatzematge i d'obtenció del recurs).
- Assumim que disposem de suficients mostres experimentals.

Paràmetres:

Per a modelitzar el pes del bestiar i poder fer l'estudi s'han utilitzat els següents paràmetres necessaris:

- Menjar mínim necessari per mantenir de forma saludable el bestiar A_0, $[kg]$.
- Factor d'absorció del menjar b, $[kg^{-1}]$.
- Factor d'absorció mínima d'aliments c, [1] (adimensional).

Recalcar que a partir d'ara es representaran les unitats expressades de la següent manera (per tenir un registre i seguiment més senzill de les dimensionalitats del model que es proposarà):

- Unitats de massa es representaran com M.

Model:

Amb un estudi independent s'ha trobat que la relació entre el pes del bestiar i el menjar que consumeix és el següent:

$$G(A) = \frac{A - A_0}{b \cdot A + c} \tag{4}$$

On la funció G amb variable A és la que determina el canvi en el pes del ganat.

En el nostre cas els valors dels paràmetres pels animals del ganat de l'empresa són:

$$(A_0, b, c) = (0.764, 0.482, 0.645)$$

Es pot observar, a més, com aquest model concorda amb les dimensions esperades (té la dimensionalitat correcta).

Anàlisi d'incerteses:

Trobem ara les incerteses i especificacions solicitades:

∘ **Incertesa d'A per a tenir una incertesa menor a 5% en l'objectiu G:**
Mitjançant el codi mostrat a 3.3.1 s'ha calculat l'incertesa d'A, sabent que:

$$\left.\begin{array}{rcl} ur_G^2 & = & ur_A^2 + ur_{A_0}^2 + ur_b^2 + ur_c^2 \\ ur_i & = & C_i \cdot I_i \\ C_i & = & \frac{x_i}{y} \cdot \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} \end{array}\right\} \Longrightarrow I_A = \sqrt{\frac{ur_G^2 - (ur_{A_0}^2 + ur_b^2 + ur_c^2)}{C_A^2}} \tag{5}$$

Amb aquesta expressió obtenim la següent funció (que ens representa el codi abans mencionat):

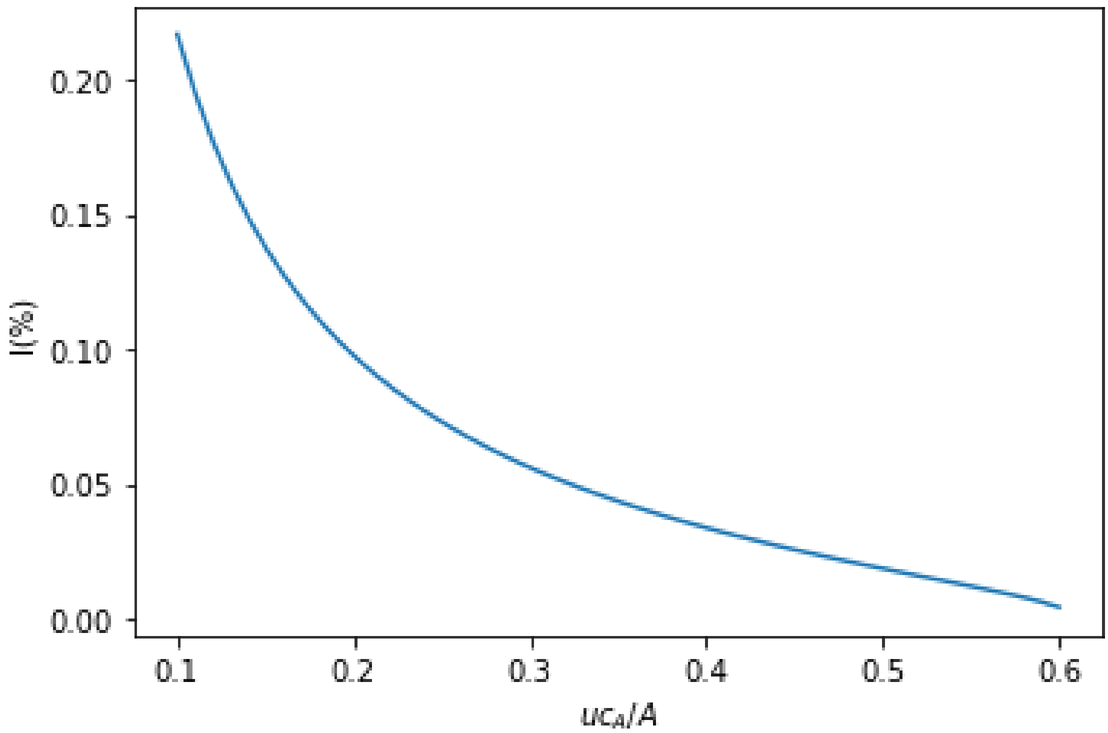

Figure 1: Gràfica de la incertesa d'A per a que G tingui una incertesa menor a 5%

◦ **Incertesa d'A amb un 95% de confiança:**

Per tal de millorar la seguritat en el resultat anterior, s'ha programat el codi mostrat a 3.3.2 per tal d'obtenir l'expressió de l'incertesa d'A per tal de tenir una inecertesa inferior a 5% en el paràmetre G amb una confiança del 95%.

Amb el codi obtenim el següent resultat:

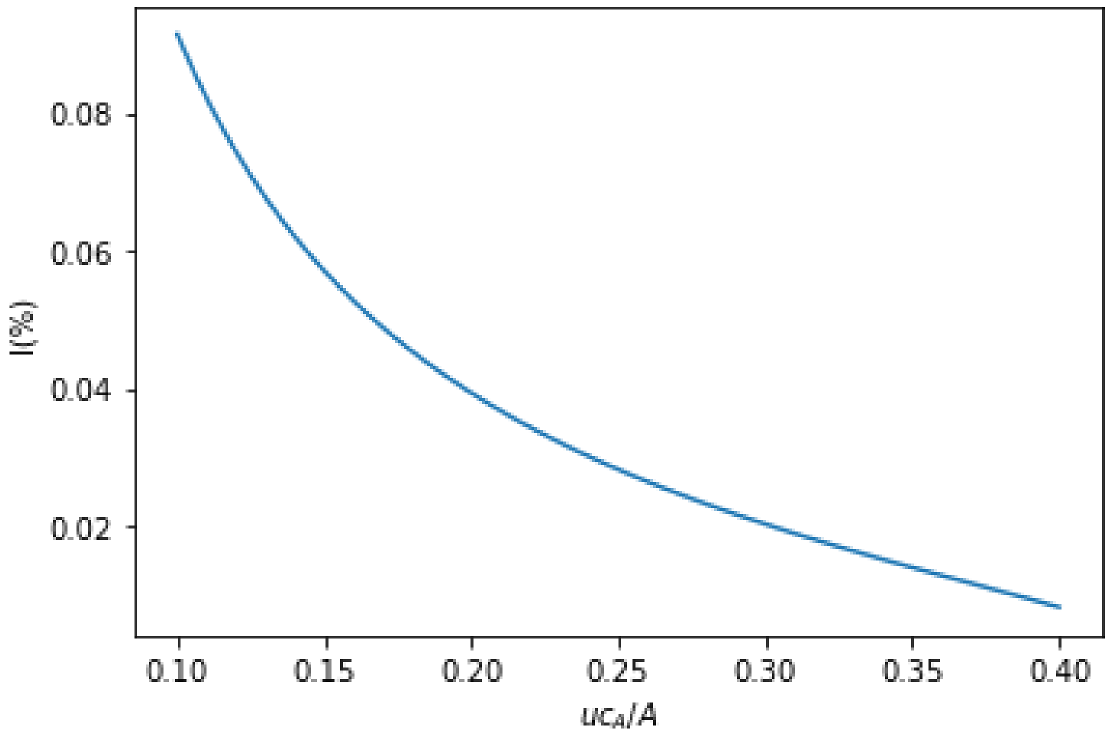

Figure 2: Incertesa d'A per a que G tingui una incertesa menor a 5% amb $CL = 95\%$

Cal remarcar com, tot i afegir el CL (*Confidence Interval*), la forma de la funció és exactament igual que l'obtinguda sense el CL, però amb ordres de magnituts diferents (concretament en aquest cas ordres menors).
Aquest comportament té sentit degut a que hem de tenir menor incertesa per a assegurar un 95% de confiança.

◦ **Punt d'alimentació òptim:**
S'ha solicitat també analitzar l'incertesa de la millor quantitat d'aliment a donar per alimentar els animals.
Per aquest cas cal abans estudiar quin és aquest valor (del paràmetre A).

Definim que el punt òptim és aquell on la relació aliment invertit - creixement de pes és màxim; és a dir,

$$\left\{ A \in \mathbb{R}^+ | \max \frac{G(A)}{A} \right\}, \text{ que òbviament } \forall A \in \mathbb{R}^+, \frac{G(A)}{A} < 1$$

Per tal de trobar el màxim, calculem on la derivada de la funció $\frac{G(A)}{A}$ val 0 i descartem els resultats menors a 0 ja que no pertanyen al nostre domini (no te sentit físic parlar-ne de aliments negatius).

Els càlculs s'han efectuat a partir del codi *Python* mostrat a 3.3.3.
D'aquest codi obtenim que el resultat que busquem és $A = 2.031$.

Comentar també que no s'ha calculat la segona derivada ja que s'observa com la funció per a valors d'$A > 0$ és monotona creixent perquè:

- El numerador es tracta d'una recta; pel que sempre serà monotona, i com el coeficient principal és positiu, creixent.
- El denominador és una paràbola que, per a valors positius d'A, és monotona creixent (ja que tots els seus coeficients son positius.

Per aquest valor trobat, obtenim una relació $\frac{G(A)}{A} = 38.4\%$.

◦ **Incertesa del paràmetre G amb l'alimentació òptima:**
Mitjançant el resultata obtingut a l'apartat anterior, podem calcular l'incertesa del paràmetre G de la següent manera:

1. Calculem la incertesa del paràmetre A[1] per al valor obtingut com òptim.
2. Calculem la incertesa relativa del paràmetre A per al valor òptim.
3. Calculem amb totes les incerteses relatives la del paràmetre G.

Per a efectuar tots els càlculs s'ha programat el codi ubicat a 3.3.4.

Com a resultat del programa obtenim la següent informació:

$$\begin{aligned} I_{A,95} &= 23.2\% \\ ur_G &= 2.5\% \end{aligned} \tag{6}$$

Remarcar que, tal i com era esperat, el valor de la incertesa del paràmetre objectiu G és inferior al 5%.

[1] Utilitzem la incertesa del 95% de *Confidence Interval* per assegurar obtenir una incertesa de G menor a 5%.

Anàlisi crítica:

Cal comentar també que el model proposat no contempla les diferències en les necessitats alimentàries dels animanls en diferents edats així com els efectes de diferents aliments.

Per a millorar la precisió de l'estudi es recomana tenir en compte aquests paràmetres, així com també els efectes de circumstàncies biològiques com cicles hormonals dels animals i dels efectes de la seva situació en la granja (si es tracta d'un ambient estressant, lliure, són animals esterilitzats, etc).

Finalment afegir que, per a obtenir un millor anàlisi de resultats s'hauria d'introduïr un *Confidence interval* del 95% a al paràmetre de l'augment del pes del bestiar calculat en l'últim apartat de l'anàlisi d'incerteses.

3 Annex:

3.1 Imports i funcions generals

```python
import numpy as np
from scipy import optimize
from scipy import stats
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import Math, display
import sympy as sp
n = 50

sp.init_printing()

def show(*args):
    out = ""
    for arg in args:
        if isinstance(arg, (sp.Expr, sp.Eq)):
            arg = sp.latex(arg)
        else:
            arg = str(arg)
        out += arg
    display(Math(out))

qq = "\quad "
```

3.2 Codis exercici 1

3.2.1 Pregunta 1

```python
from sympy.abc import P, l, b
E = (3*P*(l**2))/((np.pi**2)*(b**4))
show("E =", E)

CP = P / E * sp.diff(E, P)
Cl = l / E * sp.diff(E, l)
Cb = b / E * sp.diff(E, b)
show(CP, qq, Cl, qq, Cb)
```

3.2.2 Pregunta 2

```python
incer = 0.01 # 1%

CurP = CP * incer
Curl = Cl * incer
Curb = Cb * incer

urE2 = CurP**2 + Curl**2 + Curb**2
show("ur^2_E=", urE2)
show("ur_E=", urE2**0.5)
```

3.2.3 Pregunta 3

```python
for i in [(CurP,"P -->"), (Curl,"l -->"), (Curb,"b -->")]:
    res = (i[0]**2)/urE2
    show(i[1],res)
```

3.3 Codis exercici 2

3.3.1 Pregunta 1

```
from sympy.abc import A, b, c, I
A0 = sp.symbols('A_0')
G = (A-A0)/(A*b+c)
show("G =", G)

CA = A / G * sp.diff(G, A)
CA0 = A0 / G * sp.diff(G, A0)
Cb = b / G * sp.diff(G, b)
Cc = c / G *sp.diff(G, c)
show(CA, qq, CA0, qq, Cb, qq, Cc)

incer = 0.01 # 1%

Valb = 0.482
Valc = 0.645
ValA0 = 0.764

Cb = Cb.subs(b,Valb)
Cc = Cc.subs(b,Valb)
CA = CA.subs(b,Valb)

CA0 = CA0.subs(A0,ValA0)
CA = CA.subs(A0, ValA0)

Cb = Cb.subs(c,Valc)
Cc = Cc.subs(c,Valc)
CA = CA.subs(c, Valc)

A0 = sp.symbols('A_0')


show( CA0, qq, Cb, qq, Cc)

CurA = CA * I
CurA0 = CA0 * incer
Curb = Cb * incer
Curc = Cc * incer

urG2 = CurA**2 + CurA0**2 + Curb**2 + Curc**2
show("ur^2_G=", urG2)

I = -(CurA0**2 + Curb**2 + Curc**2 -0.05**2)/(CA**2)
show(I)

x = np.linspace(0.1, 0.6, 50)
```

```
furI = sp.lambdify(A, sp.sqrt(I.subs(A,x)), "numpy")

urc = furI(x)

plt.plot(x, urc)

plt.xlabel('$uc_A/A$')
plt.ylabel('I(%)')
plt.show()
```

3.3.2 Pregunta 2

```
from sympy.abc import I
urG2 = (CA**2)*I**2 + CurA0**2 + Curb**2 + Curc**2
show(urG2)

t = 2
I2 = sp.solve(sp.Eq(urG2, (0.05 / t)**2), I**2)[0]

show(I2)

x = np.linspace(0.1, 0.4, 50)
furE = sp.lambdify(A, sp.sqrt(I2).subs(A,x), "numpy")

ure = furE(x)

plt.plot(x, ure)
plt.xlabel('$uc_A/A$')
plt.ylabel('I(%)')
plt.show()
```

3.3.3 Pregunta 3

```
from sympy.abc import I

GA = sp.diff(G/A,A).subs(b, Valb).subs(c,Valc).subs(A0,ValA0)

res = sp.solve(GA)

show(GA)
show(res)

print(res[1]) # Part imaginaria \sim 0 --> degut a problemas
d'aproximaci
#print(sp.re(res[1]))
show((G/A).subs(A,sp.re(res[1])).subs(A0,ValA0).subs(b, Valb).subs(c,Valc))
```

3.3.4 Pregunta 4

```
ValA = sp.re(res[1])
urG2 = CurA**2 + CurA0**2 + Curb**2 + Curc**2
#show(I2.subs(A,ValA))
I2 = sp.sqrt(I2.subs(A,ValA))
#show(I2)
show(sp.sqrt(urG2.subs(A,ValA).subs(I, I2)))
```