Universitat Autònoma de Barcelona
Facultat de Ciències

Entrega 2 Modelització:

Autor:

Gerard Lahuerta

1601350

1 de Març del 2023

Índex

1 Exercici 1

Context:
Volem modelitzar el nombre d'elements radioactius B que podem extreure diàriament a partir d'un element (també radioactiu) A.

Objectiu:
Trobar un model que s'ajusti a la descomposició de l'element B per tal de saber quants àtoms hi podem extreure passades 24 hores: N_B.

Assumpcions:
Llistem ara els assumpcions del nostre model:

- L'element radioactiu A es transforma a l'element radioactiu B sense emetre cap residu.
- L'element radioactiu B es desintegra completament sense emetre cap altre element.
- Assumim que l'alliberació d'energia en decaure elements no és un problema.
- Assumim que les interaccions i efectes externs del sistema no afecten el decaïment dels elements.

Paràmetres:
Exposem ara el conjunt de paràmetres per al nostre model:

- Nombre d'àtoms de l'element A: N_A [$\#atoms$].
- Nombre d'àtoms de l'element B: N_B [$\#atoms$].
- Constant de desintegració de l'element A: C_A [$segons^{-1}$].
- Constant de desintegració de l'element B: C_B [$segons^{-1}$]

Model:
Plantegem inicialment el model observant les relacions entre els paràmetres.

◦ **Anàlisi de les relacions de les desintegracions**
Llistem ara les relacions dels paràmetres amb l'objectiu:

- La variació d'àtoms d'un element és proporcional al nombre d'àtoms de l'element
- El nombre d'àtoms d'un element són els àtoms que existeixen (que no decauen) més els que rep del decaïment d'un element diferent.

Proposem ara el nostre model.

◦ **Model de desintegracions de l'element** B
Podem modelar la variació del nombre d'àtoms de l'element B com:

$$\frac{dN_B(t)}{dt} \propto N_{BT}(t) = (N_B(t) + N_A(t)) \tag{1}$$

Observem que, per modelar el comportament del nombre d'àtoms de l'element B cal modelar el comportament del nombre d'àtoms de l'element A.
Utilitzem el mateix Anàlisi de relacions (ja que es tracta d'un element radioactiu que es comporta de manera similar) per a modelar-lo:

∘ **Model de desintegracions de l'element A**
Podem modelar la variació del nombre d'àtoms de l'element A com:

$$\frac{dN_A(t)}{dt} \propto -N_{AT}(t) = -N_A(t) \tag{2}$$

Observem que, perquè les dimensions del model concordin cal introduir el temps mitjà de desintegració de l'element. Així doncs, obtenim el següent model:

$$\frac{dN_A(t)}{dt} = -T_A \cdot N_{AT}(t) = -C_A \cdot N_A(t)$$

Resolem l'equació diferencial ordinària per a trobar la funció que modelitza el nombre d'àtoms de l'element A:

$$\frac{dN_A(t)}{dt} = -C_A \cdot N_A(t) \Rightarrow \frac{dN_A(t)}{N_A(t)} = -C_A \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dN_A(t)}{N_A(t)} = \int -C_A \cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(N_A(t)\right) = -C_A \cdot t + k \Rightarrow N_A(t) = K \cdot e^{-C_A \cdot t}$$

Deduïm mitjançant un anàlisi dimensional que la constant K ha de tenir unitats de $\#tomsi, ams, l'equacihadecomplirqueat = 0$,N$_A(0) = N_{A0}$; i per això $K = N_{A0}$, on N_{A0} és el nombre inicial d'àtoms de l'element A que hi és al recinte.
Per tant, concluim que el model que expressa el nombre d'àtoms de l'element A és:

$$N_A(t) = N_{A0} \cdot e^{-C_A \cdot t} \tag{3}$$

∘ **Model de desintegracions de l'element B**
A partir del model de l'element A 3 i el model plantejat 1, obtenim la següent expressió:

$$\frac{dN_B(t)}{dt} \propto N_{BT}(t) = (-N_B(t) + N_{A0} \cdot e^{C_A \cdot t})$$

Observem que, igual que amb el model de l'element A, les unitats no coincideixen. Introduïm la constant de desintegració de l'element B perquè concordin les unitats i resolem l'equació diferencial ordinària:

$$\frac{dN_B(t)}{dt} = -C_B \cdot N_B(t) \Rightarrow N_{B1}(t) = N_{B0} \cdot e^{-C_B \cdot t}, \text{ anàlogament a } 3 \tag{4}$$

És conclou doncs que:

$$B_N(t) = N_{B0} \cdot e^{-C_B \cdot t} + N_{A0} \cdot e^{C_A \cdot t}$$

Com que a $t = 0$, $B_N(0) = 0$, deduïm que $N_{B0} = -N_{A0}$; per la qual cosa:

$$B_N(t) = N_{A0}\left(e^{C_A \cdot t} - e^{-C_B \cdot t}\right) \tag{5}$$

Respostes a les preguntes:
Resolem les preguntes proposades:

(a) Quants àtoms de A necessitem per poder fer extraccions durant una setmana.
Sabem que l'activitat de la mostra B que necessitem (com a mínim) l'últim dia (de la setmana, és a dir, el dia 7) és de $7 \cdot 10^9$ desintegracions per segon; és a dir, $\frac{dN_B}{dt}(t = 7dies) = 7 \cdot 10^9$. Calculem doncs la quantitat d'àtoms d'element A necessaris perquè al dia 7 obtinguem suficient mostra.

$$B_N(t) = N_{A0}\left(e^{C_A \cdot t} - e^{-C_B \cdot t}\right) \Rightarrow B'_N(t) = N_{A0}\left(C_B \cdot e^{-C_B \cdot t} + C_A \cdot e^{C_A \cdot t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{A0} = \frac{B'_N(t)}{C_B \cdot e^{-C_B \cdot t} + C_A \cdot e^{C_A \cdot t}}$$

Sabem que $C_K = \frac{\log(2)}{T_K}$, on T_K és el temps mitjà de desintegració de l'element K i C_K la constant de desintegració. Així, substituïm els paràmetres per les dades conegudes: $(T_A, T_B, t, B'_N) = (66 \cdot 3600, 6 \cdot 3600, 7 \cdot 24 \cdot 3600, 7 \cdot 10^9)$ (tot en unitats internacionals).

$$N_{A0} = \frac{7 \cdot 10^9}{\frac{\log(2)}{6 \cdot 3600} \cdot e^{-\frac{\log(2)}{6 \cdot 3600} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 3600} + \frac{\log(2)}{66 \cdot 3600} \cdot e^{\frac{\log(2)}{66 \cdot 3600} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 3600}} = 4.11 \cdot 10^{14} \text{ atoms d'}A \quad (6)$$

Concloem doncs que: $\boxed{N_{A0} = 4.11 \cdot 10^{14} \text{ atoms d'}A}$

(b) Activitat (desintegracions per segon) d'A.
Pr a calcular l'activitat d'A en un periode de semidesintegració, utilitzem l'expressió 3, ja que volem trobar $N'_A(t = t_s)$ (amb $t_s = 66h$ el temps de semidesintegració).

$$N_A(t) = N_{A0} \cdot e^{-C_A \cdot t} \Rightarrow |N'_A(t)| = N_{A0} \cdot C_A \cdot e^{-C_A \cdot t} =$$

$$= \frac{\log(2)}{66 \cdot 3600} \cdot 4.11 \cdot 10^{14} \cdot \left(e^{-\frac{\log(2)}{66 \cdot 3600} \cdot 66 \cdot 3600}\right) = \frac{\log(2) \cdot 4.11 \cdot 10^{14}}{2 \cdot 66 \cdot 3600} = 6 \cdot 10^8 \frac{\#atoms}{segons}$$

Concloem doncs que: $\boxed{N'_A(t = 66h) = 8.31 \cdot 10^8 \frac{\#atoms}{segons}}$

2 Exercici 2

Context:

Volem modelitzar la difusió d'informació nova (innovació cultural o idea) sobre un grup social de persones que interactuen entre elles, transmetent la informació de les persones coneixedores a les persones que ho desconeixen.

Objectiu:

Trobar un model que s'ajusti a la difusió d'informació sobre un grup de persones ampli i calcular la taxa de difusió del missatge: T_x.

Assumpcions:

Llistem ara les assumpcions del nostre model:

- Les interaccions entre les persones són uniformes, no hi ha preferències ni discriminacions a l'hora de decidir a qui es transmet o no la informació.
- Una vegada és coneixedor de la informació no la pot oblidar.
- Només pots saber la informació si algú te la ha trasmès.
- La població és finita i constant (la suma de gent coneixedora i desconeixedora és idèntica independentment del temps que passi).

Paràmetres:

Exposem ara el conjunt de paràmetres per al nostre model:

- persones coneixedores: P_c $[\#persones]$.
- Població total: P_t $[\#persones]$.
- Coeficient de transmisió d'informació: C_t.

Model:

Plantejem inicialment el model observant les relacions entre els paràmetres.

◦ Anàlisi de les relacions per la taxa de difusió

Llistem ara les relacions dels paràmetres amb l'objectiu:

- La taxa de difusió és proporcional al nombre de persones coneixedores.

Proposem ara el nostre model.

◦ Model de la taxa de difusió

Podem modelar la taxa de difusió d'informació com:

$$T_x \propto P_c(t)$$

Mitjançant un anàlisi dimensional observem que el model no concorda dimensionalment. Sabem que $P_c(t) \leq P_t \forall t \geq 0$ i que $T_x \leq 1 \forall t \geq 0$, pel que modifiquem el model afegint el total de població:

$$T_x \propto \frac{P_c(t)}{P_t} \Longrightarrow T_x = \frac{P_c(t)}{P_t} \tag{7}$$

D'aquesta forma, no només obtenim les unitats correctes sino que ens reduïm a trobar una expressió de la població coneixedora en funció del temps.

◦ **Anàlisi de les relacions per la taxa de difusió**
Exposem ara les relacions entre els paràmetres per al model:

- La velocitat de difusió de la informació és proporcional al nombre de persones coneixedores.
- La velocitat de difusió de la informació és proporcional al nombre de persones desconeixedores.
- La velocitat de difusió és proporcional al coeficient de transmissió de la informació.

Proposem mitjançant les relacions deduïdes el nostre model:

◦ **Model de la població coneixedora**
Podem modelar la població coneixedora com:

$$\frac{dP_c(t)}{dt} \propto C_t \cdot P_c(t) \cdot P_d(t) = C_t \cdot P_c(t) \cdot (P_t - P_c(t)) = C_t \left[P_c(t)P_t - P_c(t)^2\right]$$

Resolem l'Equació Diferencial Ordinària per a trobar l'expressió de la població coneixedora de l'informació.

◦ **Resolució del model de població coneixedora**

$$\frac{dP_c(t)}{dt} = C_t \left[P_c(t)P_t - P_c(t)^2\right] \Rightarrow \frac{dP_c}{P_cP_t - P_c^2} = C_t dt \Rightarrow \int \frac{dP_c}{P_cP_t - P_c^2} = \int C_t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dP_c}{P_c^2\left(\frac{P_t}{P_c} - 1\right)} = C_t \cdot t \Rightarrow \int \frac{du}{u} = C_t \cdot t \Rightarrow \log(u) = C_t \cdot t + K \Rightarrow u = e^{C_t \cdot t + K} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_t}{P_c} - 1 = e^{C_t \cdot t + K} \Longrightarrow P_c(t) = \frac{P_t}{e^{C_t \cdot t + K} + 1}$$

On K és la constant d'integració adimensional.

S'observa fent un anàlisi dimensional que l'única inconcordança del model és a l'exponencial, pel que definirem el coeficient de transmissió d'informació amb unitats de $temps^{-1}$ per a que les dimensions siguin correctes.

◦ **Anàlisi del model de població coneixedora proposat:**
Podem deduïr que, si la població no varia i les persones no poden oblidar la informació, quan $t \to \infty$ tota la població ha de saber la informació.
D'aquesta forma, observem que el terme de l'exponencial ha de ser negatiu.
Imposem el signe negatiu per a que el coeficient de transmissió d'informació i la constant d'integració puguin ser positius i expressem la constant d'integració com a múltiple de l'exponencial.

$$P_c(t) = \frac{P_t}{e^{-(C_t \cdot t + K)} + 1} = \frac{P_t}{Me^{-C_t \cdot t} + 1} \tag{8}$$

Suposem que inicialment és coneixedora de la infomació un subgrup de població de P_0 membres, calculem el paràmetre M que compleix aquesta situació:

$$P_c(t) = \frac{P_t}{Me^{-C_t \cdot t} + 1} \Rightarrow P_c(t=0) = P_0 = \frac{P_t}{M+1} \Rightarrow P_0\,(M+1) = P_t \Rightarrow M = \frac{P_t}{P_0} - 1 \tag{9}$$

◦ **Anàlisi del model de difusió d'informació:**

Mitjançant l'expressió trobada inicialment a 7 i els resultats obtinguts a 8 i 9; concluïm amb el següent model:

$$T_x(t) = \left[\left(\frac{P_t}{P_0} - 1\right) e^{-C_t \cdot t} + 1\right]^{-1} \tag{10}$$

Respostes a les preguntes:

Resolem les preguntes proposades:

(a) Quan la taxa de difusió d'informació és del 90%:
Aïllem el temps de 10 imposant que $T_X = 0.9$:

$$0.9 = \left[\left(\frac{P_t}{P_0} - 1\right) e^{-C_t \cdot t} + 1\right]^{-1} \Rightarrow \frac{10}{9} = \left(\frac{P_t}{P_0} - 1\right) e^{-C_t \cdot t} + 1 \Rightarrow \frac{1}{9} = \left(\frac{P_t}{P_0} - 1\right) e^{-C_t \cdot t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_0}{9(P_t - P_0)} = e^{-C_t \cdot t} \Rightarrow \log\left(\frac{P_0}{9(P_t - P_0)}\right) = -C_t \cdot t \Longrightarrow t = \frac{-1}{C_t} \log\left(\frac{P_0}{9(P_t - P_0)}\right) \Longrightarrow$$

$$\boxed{t = \tfrac{-1}{C_t} \log\left(\tfrac{P_0}{9(P_t - P_0)}\right), \text{on } P_0 \text{ és la població coneixedora inicial}}$$

(b) Quan la velocitat de difusió serà màxima?
Trobem el valor de t tal que faci que la taxa de difusió tingui el major pendent derivant l'expressió 10.
Analitzant la expressió, s'observa que es pot simplificar com una funció del tipus:

$$f(x) = \frac{1}{a \cdot e^{-bx} + 1}, \text{ on } a, b > 0$$

Derivem la funció $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{a \cdot e^{-bx} + 1} \Rightarrow f'(x) = -\left(\frac{1}{a \cdot e^{-bx} + 1}\right)^2 \cdot \left(-ab \cdot e^{-bx}\right) = \frac{ab \cdot e^{-bx}}{(a \cdot e^{-bx} + 1)^2}$$

Observem com $\forall x \geq 0$, $f'(x) > 0$; és a dir, que la funció $f(x)$ és monòtona creixent. A més, observem com el seu denominador té un grau superior al del numerador, pel que

$$\lim_{t \to \infty} f'(x) = 0$$

Amb tot això, concluïm que el temps on s'assoleix la major velocitat de difusió de la informació és a temps inicial $t_0 = 0$.

(c) Com podriem modificar el model per a modelitzar una enfermetat?
Per a modelitzar una enfermetat hauriem de modelitzar també la capacitat de recuperar-se de l'individu; és a dir, eliminar la assumpció de que una persona no pot "oblidar-se de la informació" i modelitzar també el canvi de "coneixement"(recuperar-se i ser una altre cop susceptible i/o tenir inmunitat).

3 Exercici 3

Context:

Volem modelitzar el comportament de la temperatura a una certa altitud de la capa atmosfèrica; és a dir, trobar les relacions i interaccions entre diversos fenòmens i el pas del temps que afecten a la temperatura de la mateixa.

Sabem que el comportament de la temperatura és periòdic, les temperatures oscil·len respecte el pas del temps.

Objectiu:

Trobar un model que s'ajusti als cambis de temperatura de la capa atmosfèrica a una certa altura. Representem la temperatura com: $T\ (°C)$

Assumpcions:

Llistem ara els assumpcions del nostre model:

- La distribució dels diferents elements que composen l'atmosfera són distribuïts de forma uniforme; és a dir, tractem l'aire com a una subtància amb propietats i no com a parts individuals que la formen.
- Assumim que la desitat de l'aire varia de forma constant a mida que augmentem l'altitud, disminueix la densitat d'aire de forma lineal.
- Assumim que l'activitat solar és uniforme en tots el dies; no hi ha dies de major o menor activitat de radiació solar.
- Assumim que el temps d'exposició de l'atmosfera al sol és idèntica independenment del dia de l'any.
- Assumim que el dia està dividit de forma equitativa entre dia i nit.
- Assumim que analitzem només una part de l'atmosfera i no el conjunt de la mateixa; la secció estudiada està aïllada de la resta de les parts de l'atmosfera.
- Assumim que la temperatura que absorbeix i emet l'atmosfera es distribueix sobre la superfície estudiada de forma instantània.
- Assumim que els efectes humans són negligibles.
- Assumim que la capa afectada per la radiació solar és plana (horitzontal).
- Assumim que la capacitat d'absorbir radiació solar és la mateixa que la d'emetre radiació.
- Assumim que la part que estudiem de la capa atmosfèrica és un cub simètric.
- Assumim que el ritme d'absorció és idèntic al d'emissió de radiació.

Paràmetres:
Expresem ara els diferents paràmetres per al modelatge del sistema:

ATMOSFERA:

- Altitud de la capa $[A]$ (m)
- Densitat de l'aire $[\rho]$ $(\frac{kg}{m^3})$
- Coeficient d'absorció $[C_a]$ (1)
- Dimensions de la capa $[d]$ (m)

SOL:

- Radiació emesa $[r]$ $(\frac{w}{m^2})$
- Angle d'incidència $[\theta]$ (1)
- Temps d'exposició $[T_s]$ (h)

Model:
Plantejem inicialment un model senzill, ignorant la humitat i la altitud de la atmosfera sobre la capa a estudiar.

○ **Anàlisi de les relacions**
Llistem ara les relacions dels paràmetres amb l'objectiu:

- Augmentar la densitat augmenta la radiació absorvida.
- Augmentar les dimensions de la capa atmosfèrica augmenta la radiació absorvida.
- Augmentar la radiació emesa augmenta la radiació absorvida.
- Si augmentem el temps d'exposició augmentem la radiació absorbida.
- Si l'angle d'incidència és perpendicular a la superfície de la capa la radiació que rep és màxima.
- Augmentar l'altura de la capa disminueix la densitat atmosfèrica.

○ **Anàlisi del primer model:**
Com que la temperatura és cíclica al voltant de l'any, suposem que:

$$T \propto C_a \cdot \rho \cdot d \cdot A \cdot r \cdot T_s \cdot \sin(\theta(t))$$

Observerm que el model és molt complexe, pel que proposem inicialment un més sencill.

○ **Anàlisi del segon model:**
Proposem doncs un model més senzill en base a les següents premises.

1. La temperatura màxima s'assoleix a les èpoques d'estiu.
2. La temperatura mínima s'assoleix a les èpoques d'hivern.
3. La temperatura a les èpoques de primavera i tardor són similars.
4. La mitjana de les temperatures s'aproximarà a les obtingudes a la tardor/primavera.

Proposem doncs el següent model:

$$T \propto \hat{T} \sin\left(w \cdot t\right)$$

On $\hat{T}$ és la variació de temperatura respecte la mitjana de temperatures, t és el temps en unitats de *dies* i w és el factor de conversió de dies a radiants en $dies^-1$.

Podem doncs, formular el següent model:

$$T = \bar{T} + \hat{T} \sin\left(w \cdot t + f\right), \text{ on } f \text{ és un certa fase i } \bar{T} \text{ és la mitjana de temperatures}$$

Trobem els valors dels paràmetres mitjançant les dades recol·lectades.

<u>Anàlisi crítica:</u>
Utilitzem les dades obtingudes per a calcular els paràmetres $\bar{T}$, $\hat{T}$i f.
Per altra banda, podem calcular el factor w sabent que una rotació (2π radiants) són un any (365.25 dies).

- Valor de w: $w = \frac{2\pi}{365.25}$ amb unitats $[dies^{-1}]$

Calculem ara el valor de la fase f per a que comencem amb la temperatura inicial de les dades obtingudes:

$$T = \bar{T} + \hat{T}\sin(wt + f) \Longrightarrow wt + f = \arcsin\left(\frac{T - \bar{T}}{\hat{T}}\right) \Longrightarrow f = \arcsin\left(\frac{T - \bar{T}}{\hat{T}}\right) + wt$$

Mostrem ara els resultats del nostre model:

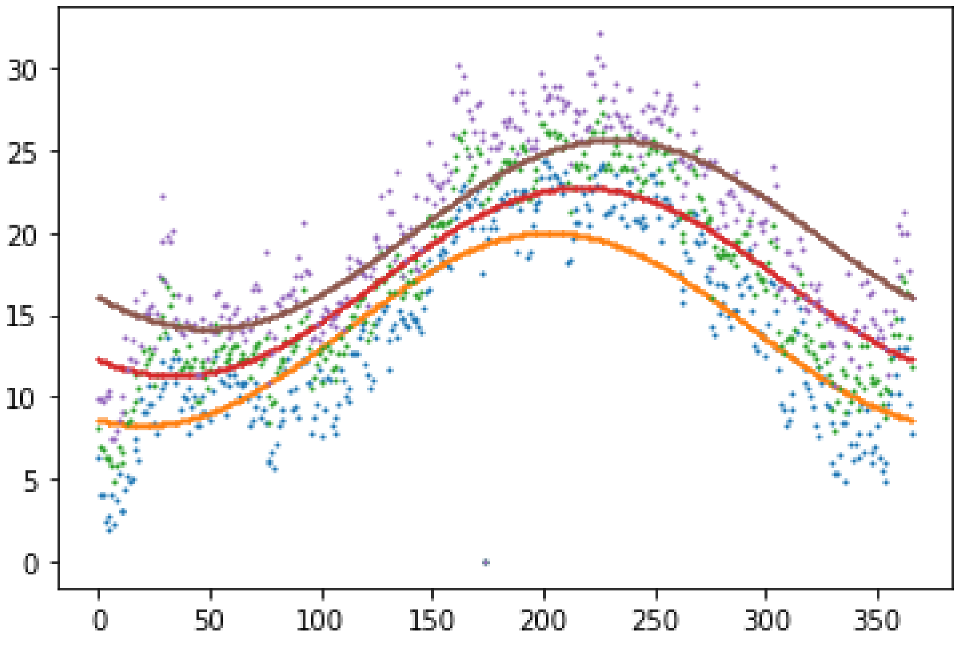

Figura 1: Temperatura obtinguda per les dades i pel model

Observem com (ignorant els outliners), el nostre model tendeix a predir bé a (aproximament) el primer terç de l'any i com a mida que avança l'any la predicció no és suficientment bona.
Aquest fenòmen és segurament provocat per la simplicitat del model i podria millorar-se si augmentem la complexitat i les relacions dels paràmetres.

4 Exercici 4

Suposem que la força de fregament F entre la paret de la canonada i el fluït és:

- Proporcional a la llargària de la canonada: l.
- Proporcional al quadrat de la velocitat mitjana del fuit: u.
- Proporcional al diàmetre de la canonada: d.

Assumim que tots els elements són mesurats en unitats del sistema intercional.

Trobem la relació dels paràmetres amb la força de fregament mitjançant un anàlisis dimensional.

<u>Anàlisi de les dimensions de la força, la llargada, la velocitat i el diàmetre</u>

◦ **Dimensions de la força**

Unitats del sistema internacional de la força: Newton, N.

Sabem que (per la segona llei de Newton) $F = m \cdot a$, on m és la massa del objecte que es aplicada la força i a l'acceleració que pateix l'objecte en aplicar-li la força.

Observem, a més, que les unitats de la massa i de l'acceleració són (respectivament) Kilograms (Kg) i metres entre segons al quadrat ($\frac{m}{s^2}$). Deduïm d'aquí que les unitats de força $[F] = N = MLT^{-2}$; on M són les unitats de massa (kilogram), L són les unitats de distància (metres) i T són les unitats de temps (segons).

◦**Dimensions de la llargada i el diàmetre**

Unitats del sistema internacional de la distància: metres, m.

Les unitats de la distància les representarem com L (ja mencionat anteriorment).

Tant la llargada de la canonada com el diàmetre de la mateixa són distàncies, pel que tindran unitats de distància exclusivament.

◦**Dimensions de la velocitat**

Unitats del sistema internacional de la velocitat: metres entre segons, ms^{-1}.

Al tractar-se d'una unitat composat per dos, unitats de distancia (metres) i unitat de temps (segons), representarem les unitats de la velocitat com LT^{-2}.

<u>Anàlisi dimensional</u>

Analitzem la relació entre la força de fregament i els paràmetres:

$$F \propto l \cdot u^2 \cdot d \Rightarrow [F] = [l] \cdot [u^2] \cdot [d] \Rightarrow MLT^{-2} = L(LT^{-1})^2 L = L^4 T^{-2} \Rightarrow [F] \neq [l] \cdot [u^2] \cdot [d] \tag{11}$$

S'observa de l'anàlisi que les unitats de la força no coincidexen amb els paràmetres amb les que són proporcionals.

Sabem que si $F \propto l \cdot u^2 \cdot d \implies F = K \cdot l \cdot u^2 \cdot d$, on K és una constant dimensional.

De l'equació 11, podem trobar les unitats que ha de tenir la constant K per a que compleixi l'anàlisi dimensional:

$$[F] = [K] \cdot [l] \cdot [u^2] \cdot [d] \iff MLT^{-2} = [K] L^4 T^{-2} \iff [K] = ML^{-3}$$

Recalcar que, donades les unitats de la constant K i tractan-se de la força de fregament d'un fluit, podem intuïr que la constant K pot referir-se a la densitat del fluït ($\frac{\text{massa}}{volum}$).

Concluïm doncs amb la fòrmula de la força de fregament del fluït amb la canonada:

$$\boxed{F = K \cdot l \cdot u^2 \cdot d, \text{on } K \text{ és una constant amb dimensions } ML^{-3}}$$

5 Exercici 5

La velocitat de propagació de les ones oceàniques (u), és una funció de la longitud d'ona (λ), l'acceleració de la gravetat (g) i la densitat del líquid (ρ).

Trobem la relació de la velocitat de les ones oceàniques en funció dels paràmetres esmentats mitjançant l'anàlisi dimensional:

Anàlisi de les dimensions dels paràmetres:
Representem les unitats de la següent forma: M unitats de massa, T unitats de temps i L unitats de distància.

∘ **Velocitat de les ones oceàniques:** u
Es defineix la velocitat com: $u = \frac{\textit{distància}}{\textit{temps}}$, pel que expresem les unitats de la velocitat com: $[u] = LT^{-1}$.

∘ **Acceleració de la gravetat:** g
Es defineix l'acceleració (en aquest cas es tracta de la gravitatòria però la definició és idéntica) com: $a = \frac{\textit{velocitat}}{\textit{temps}}$, pel que expresem les unitats de l'acceleració gravitatòria com: $[g] = LT^{-2}$.

∘ **Densitat del líquid:** ρ
Es defineix la densitat (volumètrica del líquid) com: $\rho = \frac{\textit{massa del líquid}}{\textit{volum del líquid}}$, pel que expresem les unitats de la densitat del líquid com: $[\rho] = ML^{-3}$.

∘ **Longitud de les ones:**
Es defineix la distància (longitud de les ones) com $\lambda = \textit{distància entre inici i final}$, pel que expresem les unitats de la longitud d'ona com: $[\rho] = L$.

Anàlisi dimensional:
Analitzem la relació entre la velocitat de les ones i els paràmetres esmentats:

$$u \propto \rho \cdot g \cdot \lambda \Longrightarrow [\rho] = [\rho \cdot g \cdot \lambda] \Longrightarrow LT^{-1} = ML^{-3}LT^{-2}L = ML^{-1}T^{-2} \qquad (12)$$

Observem de l'equació 13 les següents relacions:

- **Unitats de temps** T: Les unitats de temps no coincideix amb el grau.
- **Unitats de longitud** L: Les unitats de distància són del mateix grau però amb signe contrari.
- **Unitats de Massa** M: Les unitats de massa no concorden, a la velocitat no intervé la massa però en l'expressió obtinguda pels paràmetres hi apareix amb grau 1.

Modifiquem l'equació 13 per generalitzar-la i trobar així la expressió que verifiqui les dimensions del sistema:

$$u \propto \cdot\rho^a \cdot g^b \cdot \lambda^c \Rightarrow [u] = [\rho^a \cdot g^b \cdot \lambda^c] \Rightarrow LT^{-1} = (ML^{-3})^a (LT^{-2})^b L^c = M^a L^{c+b-3a} T^{-2b} \qquad (13)$$

Resolem el sistema d'equacions platejat:

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & c+b-3a \\ -1 & = & -2b \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 1 & = & c+b-3a \\ b & = & \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow c-3a = \frac{1}{2}$$

Observem de l'equació en que intervenen les unitats de massa (ρ) que $0 = a$. En aquest cas obtindriem que la densitat no intervé en el model i obtindriem el valor de $c = \frac{1}{2}$.
En aquest cas el nostre model és:

$$u \propto \sqrt{\lambda \cdot g} \Longrightarrow u = K\sqrt{\lambda \cdot g}, \text{ on } K \text{ és una constant adimensional} \tag{14}$$

Observem que, de la relació trobada, es pot deduïr d'una formula física del moviment rectilini uniforme: $u_f^2 - u_0^2 = 2ad$.
Si imposem que inicialment (la partícula que forma part de l'ona) no es mou, $u_o^2 = 0$, i aïllem a velocitat final, obtenim $u_f = \sqrt{2ad}$; on d és la distància recorreguda i a l'acceleració.

Observacions del model

Per altra banda si imposem que la densiat ha de pertànyer al nostre model, podem dir que el valor de a és un paràmetre, pel que obtenim el següent valor de c: $c = \frac{1}{2} + 3a$.

Si asumim aquesta situació, el model de la velocitat seria el següent: $u \propto \rho \cdot \lambda^{3a} \cdot \sqrt{\lambda \cdot g}$.

En aquest cas les unitats de massa no concorden, pel que s'hauria de modificar el model afegint una constant K dimensional amb unitats M^{-1}.

$$u \propto K \cdot \rho^a \cdot \lambda^{3a} \cdot \sqrt{\lambda \cdot g}, \text{ on } K \text{ és una constant amb unitats } M^{-a} \tag{15}$$

De l'equació 15, si imposem el valor $a = 1$, trobem que les unitats de la constant K és de massa inversa; pel que, modificant el model obtenim el següent:

$$Ku \propto \rho \cdot \lambda^3 \cdot \sqrt{\lambda \cdot g}, \text{ on } K \text{ és una constant amb unitats } M \tag{16}$$

D'aquí s'observa que, com K té unitats de massa i és constant, podem suposar que és la massa del líquid que està formant l'ona.

Si observem el primer terme del model, uK és massa per velocitat, que es tracta de l'expressió del moment lineal d'un objecte i derivada respecte la velocitat de l'energia cinètica d'un objecte ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$).

D'aquesta forma, com que una ona és energia trasnportada en una substància, podem deduïr que aquesta fòrmula té més relacions físiques que l'expressió 14.

A més, podem observar com el terme obtingut en el model anterior $\sqrt{\lambda \cdot g}$ torna a aparèixer en el nou model i que el terme $\rho \cdot \lambda^3$ és la massa de líquid que hi és a un volum cúbic amb costats λ; és a dir, el model es pot interpretar com el moviment d'un objecte cúbic que es desplaça una distància λ.

D'aquesta forma podem observar que el model està imposant la conservació del moment lineal; és a dir, que $u \propto \sqrt{\lambda \cdot g}$ i que $K \propto \rho \cdot \lambda^3$.

Conclusió:

Si no disposem d'informació sobre la massa de líquid desplaçada, el model 14 és l'indicat.
Si per contra dispossem de la informació de la massa del líquid, el model 16 és més fiable.