

Estudi de la Geometria Fractal en el pla Real i Complex

Gerard Lahuerta i Valentí Torrents

Desembre 2019

Las nubes no son esferas, las montañas no son
conos, las costas no son círculos, y las cortezas de
los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan
en una línea recta

Benoît Mandelbrot (1969 -2)

Índex

1	Introducció	6
1.1	Motivació i antecedents	6
1.2	Objectius de la investigació	7
1.3	Metodologia emprada	9
2	Els fractals i la natura	10
2.1	Definició de fractal	10
2.2	Propietats fonamentals	11
2.3	Fractals a la natura	13
2.4	Aplicacions	16
2.4.1	Fractals a la ciència	16
2.4.2	Fractals a la tecnologia	17
2.4.3	Fractals al art	17
2.5	Dimensió fractal	18
3	Fractals geomètrics	23
3.1	Fractals més clàssics	23
3.1.1	Triangle de Sierpinski	23
3.1.2	Conjunt de Cantor	27
3.1.3	Corba de Koch	30
3.1.4	Floc de Koch	31
3.2	Construccions geomètriques iterades	33
3.3	Construccions geomètriques iterades aleatoriament mitjançant el joc del caos	38

4	Fractals complexos i dinàmica complexa	53
4.1	Explicació dels Fractals Complexos	53
4.2	Iteració de funcions Complexes	53
4.2.1	Iteració real quadràtica	54
4.2.2	Iteració complexa lineal	59
4.2.3	Iteració complexa quadràtica	63
4.3	Anàlisi dels fractals complexos més coneguts	65
4.3.1	Conjunt de Julia	66
4.3.2	Conjunt de Mandelbort	70
5	Conclusions i bibliografia	72
5.1	Conclusions	72
5.2	Agraïments	73
5.3	Bibliografia i Webgrafia	74

Resumen

En este trabajo hemos hablado sobre fractales desde un punto más básico y sencillo hasta uno de más matemático y complejo. Para empezar, hemos tratado la definición de fractal y sus propiedades, junto con una breve explicación de la historia de estos. También hemos trabajado la relación que presentan estas figuras con el medio natural y nuestras vidas, hablando al mismo tiempo de las aplicaciones que estos pueden tener en diferentes ámbitos. A continuación, nos adentramos plenamente en nuestro trabajo, hablando, ahora si, de los fractales geométricos. Primero denominamos a los más conocidos y de los cuales hablamos en profundidad, describiéndolos, calculando sus propiedades y, en la mayoría de casos, programándolos en lenguaje C. Un punto importante del cual hablamos es el juego del caos, un estilo de iteración aleatoria que crea una figura sorprendente. Más adelante, empezamos a introducir los fractales complejos, los cuales tienen unas propiedades bastante diferentes de los previamente mencionados. Nos adentramos en algunos cálculos matemáticos necesarios para el entendimiento de los fractales complejos, como son las iteraciones de funciones complejas. Aun así, no profundizamos mucho en estos, puesto que habría acabado desviando la esencia del trabajo. Igualmente, tratamos sobre los conjuntos de Julia y de Mandelbrot, los cuales son visualmente espectaculares.

Abstract

In this project, we have talked about fractals from a more basic and simple point to a more mathematical and complex one. To begin with, we have discussed the definition of fractal and its properties, together with a brief explanation of their history. We have also worked on the relationship these figures present with the natural environment and our lives, while also talking about the applications that these can have in different areas. Next, we start to go deep into our project talking, now, about geometrical fractals. First we call the best-known ones, of which we speak in depth, describing them, calculating their properties and, in most cases, programming them in C language. An important point we talk about is the game of chaos, a style of random iteration that creates a surprising figure. Later on, we begin to introduce complex fractals, which have properties quite different from the previously mentioned ones. We get into some mathematical calculations necessary for the understanding of complex fractals, such as the iterations of complex functions. Despite that, we do not go deep into these, since it would have ended up diverting the essence of the work.

Capítol 1

Introducció

1.1 Motivació i antecedents

La realització d'aquest treball ha estat duta a terme per part de Gerard Lahuerta i Valentí Torrents, alumnes de Batxillerat a l'escola Sant Gervasi. En aquest Treball de recerca, hem volgut millorar els nostres coneixements envers els fractals, especialment els fractals geomètrics. Com és normal, en un principi no teniem gaire clar per quina branca de les ciències numèriques anar, ja que podiem optar per fer un treball de caire científic, o bé purament matemàtic. Definitivament, vam decantar-nos per fer un treball bassat purament en les matemàtiques i, després de fer recerca sobre diferents temes que ens podrien agradar, vam escollir el tema dels fractals. Sorprenentment, el món dels fractals és extremadament extens, pel qual havíem d'escollir una especialitat en la que centrar-nos. I aquesta va ser la geometria fractal. Vam escollir aquesta branca dels fractals ja que és la més vista al nostre dia a dia, amb organismes i invents formats a partir d'aquests.

En un principi no sabíem res sobre els fractals però, al parlar-ho entre nosaltres i amb el nostre tutor, l'interès va començar a créixer dins nostre. Un cop havíem decidit fer el treball sobre fractals, vam contactar amb la Universitat de Barcelona, on ens van comentar el tema amb molta més profunditat i ens van assessorar sobre com enfocar el treball. Allà ens van donar tot d'informació interessant amb la que vam entendre tot el necessari a saber sobre el món dels fractals.

Així, vam endinsar-nos en aquest treball amb moltes ganes i al·legria, treballant i estudiant d'una manera que mai havíem experimentat abans. En un principi no teníem uns objectius

molt clars però és cert que hem assolit totes les nostres propostes i expectatives.

Al mateix temps, hem volgut fer una introducció molt extensa i fàcil d'entendre per tothom, ja que creiem que es tracta d'un tema molt interessant ja sigui acompanyat, o no, dels números i les matemàtiques que els caracteritzen.

- **Investigacions prèvies**

Per tal d'iniciar aquest treball, vam haver de fer un estudi previ per tal d'entendre els fonaments dels fractals i la història dels mateixos. Més endavant parlem en profunditat dels estudis fractals al llarg de la història però, com a breu introducció, cal dir que els fractals han estat presents durant tota la història. En totes les èpoques hi ha hagut personatges que han treballat amb aquestes figures geomètriques que ningú entenia, i ha entès la seva utilitat.

En canvi, no va ser fins al 1997 que Benoît Mandelbort va emprar el terme fractal per primera vegada. Va ser doncs, des d'aquell moment, que el món dels fractals ha evolucionat deixant un registre immens d'aquest entre nosaltres.

1.2 Objectius de la investigació

Els nostres objectius a assolir al llarg d'aquest treball poden ser dividits en dues branques. En una podríem trobar els conceptuals i procedimentals, els quals es basen en la part pràctica del treball, i en l'altre podem trobar els humans, que són els que permeten gaudir d'una adequada elaboració del treball.

Dins dels objectius conceptuals i procedimentals podem trobar:

- Ser capaços de fer un treball de recerca amb el rigor demanat, al mateix temps que poder exposar amb claredat el nostre treball final.
- Aprendre a utilitzar LaTeX com a eina per a redactar treballs.
-

Ara, com a objectius humans trobaríem:

- Assolir un nivell de coneixements equitatiu entre tots els membres del grup, així com una cooperació adequada per complementar-nos mutuament.

- Coneixer experts en el tema per tal d'incrementar els nostres coneixements.
- Aprendre dels errors i adversitats que puguin sorgir al llarg del treball.
- Ser capaços d'escollir les millors opcions per tal de tirar endavant el treball, raonant cada problema des d'un punt de vista lògic.

1.3 Metodologia emprada

Per a la creació d'aquest treball, hem utilitzat una gran varietat de recursos, des de TDR's d'alumnes d'anys anteriors de Sant Gervasi, fins a documents amb molta informació que hem trobat per internet. Al mateix temps, vam contactar amb la Universitat de Barcelona per saber si ens podrien fer la tutoria del treball. Afortunadament van accedir i, junt amb explicacions generals del tema, ens van entregar unes pautes a seguir per la redacció del treball i documents amb informació per al desenvolupament d'aquest.

Com acabem de dir, ens vam posar en contacte amb la UB. Allà, la doctora Fagella, del departament de matemàtiques, ens va introduir el tema dels fractals, junt amb un estudiant de matemàtiques, David Balbuena, el qual ens faria la tutoria i ens assessoraria al llarg del treball. Allà, ens van donar documents per a l'entendiment i redacció de les parts més teòriques i matemàtiques, mentre que per la part històrica dels fractals vam haver de fer recerca pel nostre compte.

Un altre dels aspectes en els que havíem d'ampliar els nostres coneixements va ser el de programar els fractals. Ja teníem una base per a la programació amb C++. Tot i així, la complexitat de les iteracions que havíem de dur a terme ens van obligar a buscar ajut en treballs relacionats o programacions similars, sortint-nos així endavant.

Per a la redacció del treball vam utilitzar un editor de textos especialitzat en textos científics anomenat LaTeX. Aquest ens ha permès introduir formules i caràcters matemàtics de forma més senzilla i ràpida. Tot i així, l'entendiment del funcionament d'aquest no ha estat del tot fàcil, pel que hem hagut de esforçar-nos en millorar les nostres habilitats utilitzant-lo.

Capítol 2

Els fractals i la natura

2.1 Definició de fractal

Per tal d'iniciar-nos en el món dels fractals, ens cal primer saber d'on prové la paraula i quin significat té.

El concepte de fractal prové de l'adjectiu llatí *fractus*, que significa fracturat, trencat o irregular. Aquest concepte va ser primer desenvolupat per Benoit Mandelbrot, matemàtic polonès del Centre d'Investigació Thomas J. Watson dels laboratoris IBM a Nova York i pare de la geometria fractal, l'any 1975. Aquest terme els és atribuït a aquestes estructures perquè no poden ser considerades geomètriques com a tal, sinó com a semigeomètriques. Això és a causa de que no les podem establir representades explícitament en un pla o en una recta, sinó en un punt "mitjà" entre els dos.

D'altra banda, l'any 1975 Mandelbrot va afirmar que els fractals són formes generades normalment per processos matemàtics repetitius i caracteritzats per no ser diferenciables, per tenir un aspecte semblant a qualsevol escala i una dimensió fraccionària.

Al 1982 Mandelbrot va definir fractal com a un conjunt la dimensió del qual és estrictament major que la seva dimensió topològica, però ell mateix va reconèixer que aquesta última consideració no era suficientment general i exclouia alguns objectes matemàtics que realment són fractals com la corba de Peano. Tot i que continuava sent la definició més acceptada pels sectors matemàtics, al ser la més adequada per englobar figures fractals.

Mandelbrot no va inventar els fractals, sinó que va aconseguir agrupar i identificar certes propietats en comú entre aquestes construccions geomètriques anteriorment anomenades

”monstres matemàtics”, ja que sempre havien estat a la natura i als límits de l’infinit a esperant que algú topés amb ells i donés a conèixer aquesta meravella matemàtica i artística. La definició de fractal ha anat evolucionant amb el temps segons les característiques i propietats dels que s’anaven descobrint. El mateix Mandelbrot afirma que només disposem d’una definició temporal i incompleta, donat que cap definició teòrica resulta totalment satisfactòria.

2.2 Propietats fonamentals

Primer de tot, cal recordar que Mandelbrot no va donar una definició precisa de fractal però de forma general va caracteritzar les noves estructures irregulars com figures autosimilars, de complexitat infinita, de dimensió fraccionària i recursives.

A partir d’aquesta caracterització, podem parlar sobre algunes de les propietats més importants dels fractals en general.

- **Autosemblança o autosimilitud:**

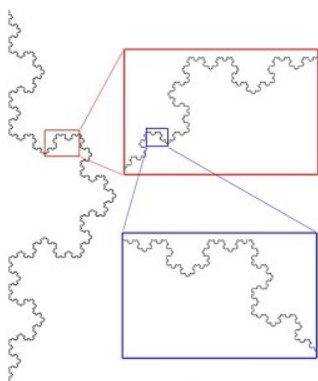


Figura 2.1: Exemple d’autosemblança

La autosemblança és un concepte que es pot entendre de manera simple i bastant visual. Imaginem un objecte geomètric, indiferentment de la forma que tingui. Ara, pensem que aquest objecte o figura està format per figures idèntiques a l’original, però amb una mida reduïda; i alhora cadascuna d’aquestes figures està composta per unes de més petites que se segueixen veient idèntiques a l’original, així successivament... Entenent aquest procediment, podem tenir una imatge clara de com pot arribar a ser qualsevol fractal.

Aquesta característica rep aquest nom a causa de que totes les figures que formen el nostre objecte són semblants a l’original, sabent que dues figures són semblants entre elles si tenen la mateixa forma però diferents mides.

- **Recursivitat:**

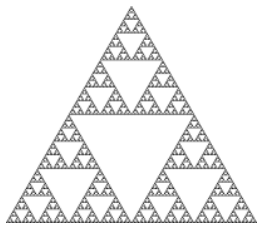


Figura 2.2: Triangle de Sierpinski

Aquesta característica és pròpia dels fractals, ja que es tracta de conjunts definits per un algorisme recursiu amb processos iteratius determinats. Això vol dir que poden ser formats repetint el mateix procés infinites vegades. El procés, del qual parlarem més a fons més endavant, es tracta d'aplicar una iteració a una figura inicial, i seguir aplicant la mateixa iteració al resultat obtingut al aplicar-la anteriorment.

Gràcies a aquesta qualitat, els fractals possibles de programar amb ordinador a partir de, com ja hem dit, un algorisme recursiu repetit una infinitat de vegades.

- **Complexitat infinita**

Aquesta característica ens indica que, indiferentment de l'escala d'observació amb la qual la veiem, la figura sempre manté molta complexitat.

Gràcies a aquesta propietat, podríem ampliar una imatge sense parar i la figura que se'ns mostraria seria totalment idèntica a la inicial.

El fet que els fractals tinguin una bellesa peculiar és producte d'aquesta complexitat infinita que, al no ser extremadament complicada d'imaginar o detectar en una figura, és més atractiva per les persones que ho veuen.

La manera més simple i eficient de classificar fractals és fer-ho en funció de les característiques que acabem d'anomenar. Així i tot, aquesta classificació, com qualsevol altre, ens porta a deixar de banda altres característiques que podrien relacionar o diferenciar més aquestes figures.

A trets generals, parlem de dos grups ben diferenciats i definits depenent de si s'iteren en reals o en complexos, termes dels quals parlarem més endavant:

-Fractals lineals: aquests poden ser construïts a partir d'un senzill canvi en les seves escales. A causa d'aquesta propietat, tenen exactament la mateixa forma independentment

de l'escala fins a l'infinit en la que es trobi. Alguns exemples serien el triangle de Sierpinski o la corba de Koch.

-Fractals no lineals: són aquells que es generen a partir de distorsions complexes o no lineals. La majoria dels objectes fractals purament matemàtics i naturals no són lineals, com el conjunt de Mandelbrot o el conjunt de Julia.

2.3 Fractals a la natura

Ara que ja ens hem endinsat una mica en el complex món dels fractals, i abans d'aprofundir en l'aspecte matemàtic d'aquests, és bastant oportú que tractem la seva importància i abundància a la naturalesa que ens envolta. A continuació, parlarem d'alguns exemples de fractals que podem arribar a trobar a qualsevol paisatge. Ens haurem de fixar, també, en com compleixen les característiques anteriorment mostrades.

Des de ben petits, tots hem expressat la realitat d'una manera molt simple i geomètricament poc complicada, dibuixant-ho tot molt poc detallat i inexacte. Això és a causa del fet que la geometria euclidiana ho ha simplificat tot molt, fent que representéssim tot amb rectes, corbes o punts poc exactes i complexos. Ara bé, tots sabem que la realitat és extremadament diferent, ja que totes les figures que podem veure són extraordinàriament complexos, si saps a quina escala mirar. D'això tracta el llibre de Benoît Mandelbrot, *Geometria Fractal de la Naturalesa*.

Quan diem que la geometria fractal està present a la natura, no volem dir que sigui fàcil de detectar o que sigui visible a ull nu. Tal com hem dit abans, el que més importa per detectar aquests fractals a la naturalesa és variar el punt de vista i l'escala amb la qual els observem normalment. Per això, anem a anomenar alguns exemples de figures fractals presents als paisatges que podem haver vist.

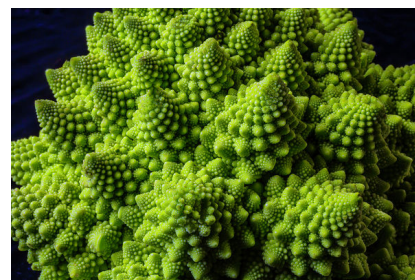


Figura 2.3: Romanesco

La majoria de la gent no té una gran estima per les verdures o pels productes que ens otorga la terra però, més enllà del gust que puguin tenir, moltes d'elles mostren una geometria formidable, especialment la família de les cols. El més evident i espectacular fractal vist en un aliment d'aquest grup és el romanesco, el qual presenta una autosimilitud gairebé exacte.

Un altre exemple curiós pot ser la falguera, una de les primeres plantes en aparèixer al nostre planeta. La forma de les seves fulles és molt peculiar, però el valor estètic no és el més important per la planta a l'hora de crear les seves fulles així. Aquesta forma i distribució de les fulles compleix amb algunes de les característiques pròpies dels fractals, el que fa que puguin ocupar una major superfície per tal de captar el màxim de llum, CO_2 i oxigen.



Figura 2.4: Ramificacions fractals

A causa d'aquesta eficàcia i a la senzillesa amb la qual aquestes bifurcacions de les branques són creades, el disseny de la falguera o similars són dels més abundants a la natura. Aquestes ramificacions poden ser considerades fractals, però no de complets, ja que, al ser creats naturalment, han de tenir un nombre finit d'iteracions. Aquest tipus de fractals creats biològicament són els anomenats "fractals naturals".

Un altre exemple evident de fractals visibles a la natura pot ser el perfil d'una muntanya. Aquest és constantment modificat pel vent, l'erosió, i molts altres factors. A diferència dels fractals naturals dels quals hem parlat abans, aquest no presenta una estructura idèntica en tots els seus punts. En canvi, no som capaços de diferenciar cap dels seus punts, ja que mantenen una estructura molt similar, encara que no idèntica. Això també passaria al comparar el perfil de qualsevol serralada amb el d'una pedra vista de ben a prop.



Figura 2.5: Paissatge muntanyós

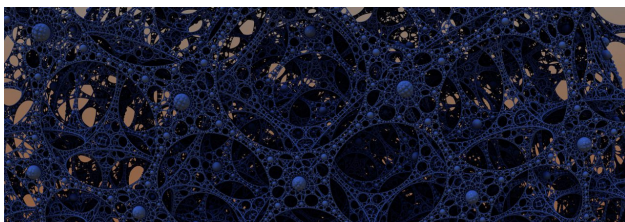


Figura 2.6: Interior del cos humà

Per seguir donant exemples de fractals visibles en el nostre món, haurem de deixar de mirar fora per començar a mirar dins nostre. Algunes de les estructures fractals més impressionants es troben dins el nostre organisme i, sorprenentment, tenen molt avantatge. Al tenir les venes o artèries estructurades

amb un disseny molt similar al dels fractals, ens permet cobrir el màxim de cèl·lules possibles per tal d'alimentar-les apropiadament. En el cas dels bronquis i els alvèols pulmonars, ens permet aprofitar el màxim cada inspiració i expiració per tal d'intercanviar més oxigen i diòxid de carboni. I no es queda aquí. Aquest estil d'estructura es troba a molts altres punts del nostre cos; com en el sistema sanguini, limfàtic, digestiu, pulmonar, o en les neurones i sistema nerviós; i otorga en totes elles un millor funcionament.

A continuació, mostrarem alguns més exemples de fractals visibles a la naturalesa. Cal recalcar que aquests són figures fractals més conegudes o amb menys utilitats, motiu pel qual els donem menys importància i no els descriurem un per un.

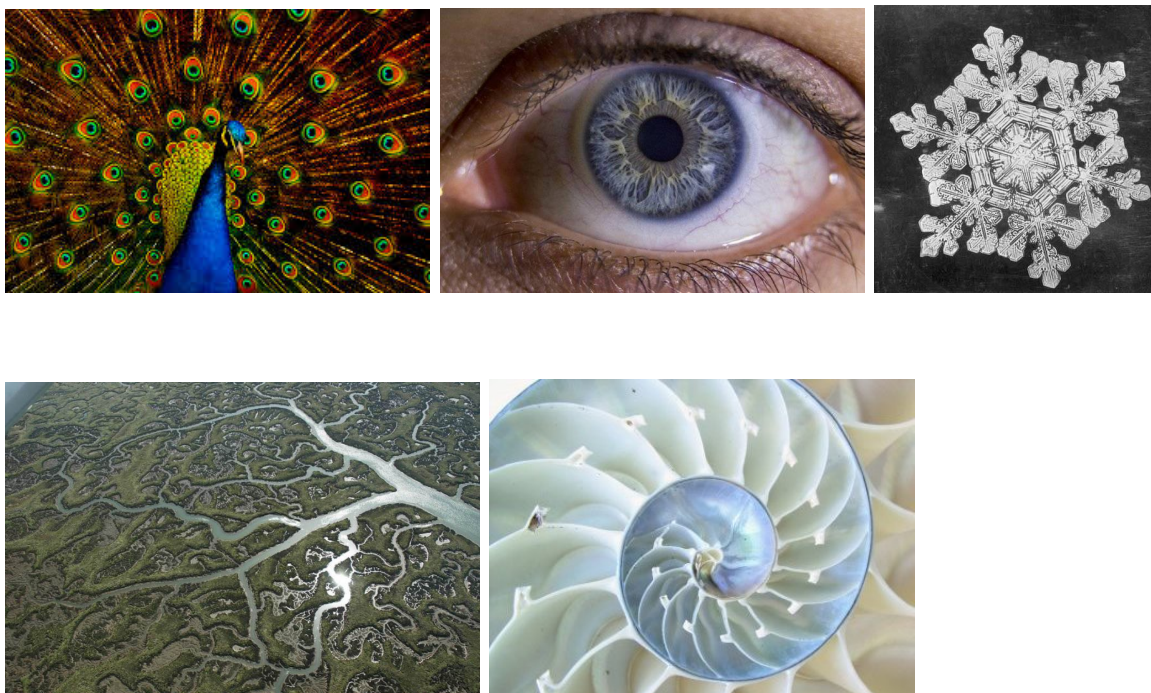


Figura 2.7: Exemples de fractals a la natura

2.4 Aplicacions

Un altre dubte que li sorgeix a tothom quan comencen ha sentit parlar sobre fractals és: *quina utilitat tenen?* Doncs moltes, i en una gran varietat d'àmbits, algun dels quals potser ens toca estudiar o practicar en algun punt de les nostres vides, depenent dels estudis que fem.

A continuació, parlarem una mica sobre les utilitats que tenen els fractals en diversos àmbits com la tecnologia, la ciència, la biologia o l'art.

2.4.1 Fractals a la ciència

Òbviament, el primer que se'ns ve al cap quan escoltem sobre fractals és relacionar-ho amb la ciència o les matemàtiques, encara que no sapiguem ben bé com són aplicats. Doncs, sorprenentment per a molts, en té moltes d'aplicacions.

Primerament, cal parlar de la seva importància a les matemàtiques, i en la geometria. Podríem parlar de la teoria del caos per establir processos aleatoris o del mètode de Newton per aproximar arrels.

A continuació, podríem tenir en compte les seves aportacions a la física. Potser la seva importància no destaca per les seves aplicacions a la física teòrica, però en àmbits com la meteorologia es tornen sorprenentment importants. També podem

observar aplicacions dels fractals en aspectes militars, com per exemple l'estudi de la variació en el comportament de les naus davant el vent.

I, per descomptat, també els trobem rellevants a la química i la biologia, on se li dona una gran importància a la seva geometria a l'hora de fer compostos amb propietats peculiars o al estudiar plantes amb formes fractals.

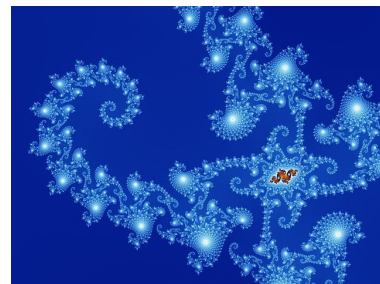


Figura 2.8: Fractal complex

2.4.2 Fractals a la tecnologia

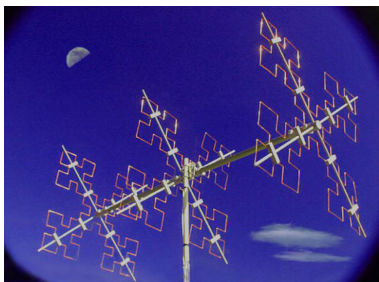


Figura 2.9: Tecnologia fractal

En el món de la tecnologia, els experts sempre han intentat treure bon profit als fractals, tant en la codificació de senyals d'àudio, vídeo o digital, així com la compressió d'imatges. Una de les aplicacions principals es tracta de buscar algorismes recursius similars als utilitzats per a la construcció dels fractals per tal de guardar la fórmula que genera una part de la imatge en lloc d'una porció d'imatges d'ella mateixa, reduint la memòria necessària. Però l'aplicació més exitosa i enginyosa són les antenes fractals perquè han permès disminuir la seva grandària i el seu rendiment gràcies a aplicar les propietats fractals en dispositius mòbils, com l'empresa catalana "Fractus S.A." amb gran influència internacional per aquesta brillant idea.

2.4.3 Fractals al art

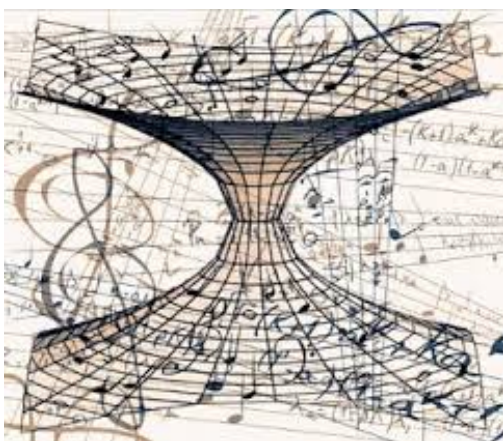


Figura 2.10: Fractals a la música

Veure pintures o escultures formades per figures fractals pot ser relativament fàcil, ja que només es tracta de representar, no a la perfecció, la geometria que hi ha darrere d'aquestes figures matemàtiques. Encara i així, hi ha altres estils d'art on no és tan senzill representar-les. Un exemple d'aquests és la música, on la versió fractal d'aquesta és bastant diferent de les vistes fins ara. La música fractal consisteix, principalment, en la projecció de l'estructura d'un fractal sobre un espai musical per generar composicions interessants. Seria bastant improbable detectar una composició de música fractal sense tenir un nivell avançat en aquest aspecte. Però, un cop pots comprendre el rerefons darrere la música, podràs quedar molt sorprès per aquestes peces musicals.

2.5 Dimensió fractal

Com hem mencionat en la introducció, fractal significa fracturat o trencat i això és a causa de que no pertanyen a les dimensions a les que estem habituats (dimensió 0 un punt, 1^a dimensió una recta ...) sinó que per a definir-les necessitem dimensions fraccionàries.

Segons Mandelbrot i la seva definició de fractal, un fractal és aquell que la seva dimensió és estrictament major a la seva dimensió topològica. Per tant, per a definir i calcular les dimensions de qualsevol fractal, abans hem de definir què és la dimensió Topològica.

• Dimensió Topològica:

El concepte de dimensió Topològica habitual és el d'aquella dimensió que ve donada per un nombre natural. Però, hi ha altres definicions per al concepte de dimensió topològica. Una d'elles és la següent:

Definició Sigui S un subconjunt de \mathbb{R}^N

- S té **dimensió zero**, si cada punt té arbitràriament altres punts al voltant que, a la vegada, no intercepten entre ells.
- S té **dimensió k** , si el límit de cada punt de S intercepta S en un conjunt de dimensions $k - 1$, on k és el menor nombre natural per al qual l'anteriorment dit, succeeix.

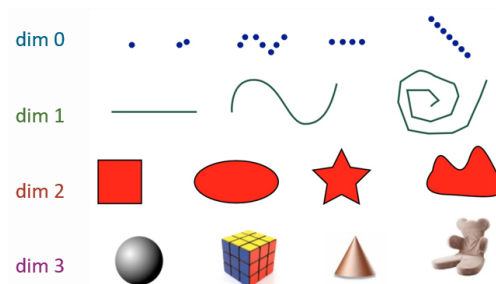
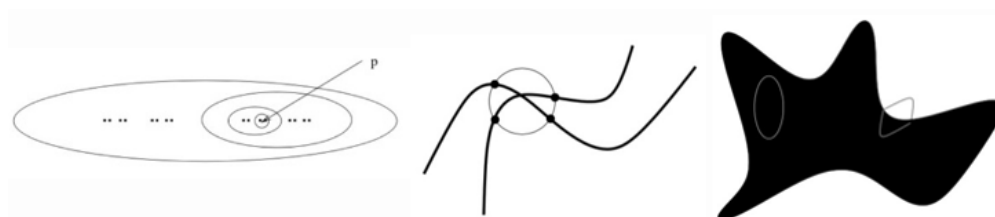


Figura 2.11: Ambdues figures, adalt i abaix, representen les dimensions topològiques.



Dimensió 0

Dimensió 1

Dimensió 2

També podem relacionar la dimensió topològica com l'exponent que relaciona el nombre de peces en que pots dividir un objecte geomètric amb la seva contracció tal com ho explicarem en la pàgina següent.

Però, per a descriure la dimensió d'un fractal, necessitem una nova noció (o dimensió) per a mesurar la seva complexitat, ja que la descripció actual de la dimensió topològica no distingeix correctament els diferents tipus de fractals així com les seves densitats.

• Com calcular la dimensió d'un fractal

La fórmula per la qual puguem calcular la dimensió de qualsevol fractal també ha de ser vàlida per a les figures geomètriques (les que la seva dimensió sigui definida mitjançant un nombre natural).

Per començar, agafarem el concepte d'autosimilitud de la geometria fractal amb fractals que tinguin el mateix factor de contracció en totes les seves afinitats per tal de trobar una aproximació a la fórmula per després depurar-la fins a trobar-ne una que sigui funcional.

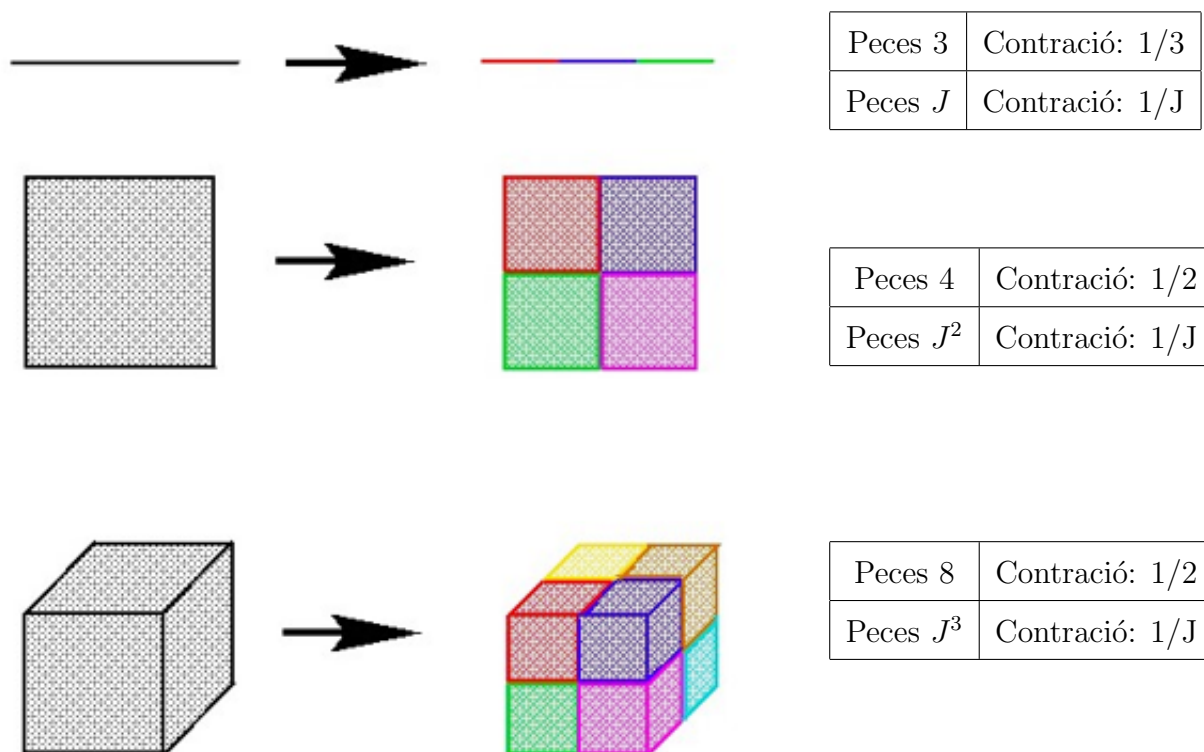


Figura 2.12: Contraccions

Podem observar que existeix una relació entre el nombre de peces, la contracció i la dimensió de les figures anteriors.

Sent: N el nombre de peces, R el valor de la contracció i D_S la dimensió d'un objecte S , trobem la següent expressió.

$$N = \left(\frac{1}{R}\right)^{D_S} \Rightarrow D_S = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{R}\right)}$$

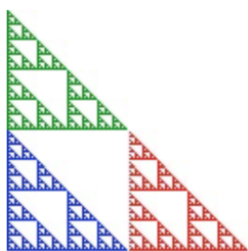
Comprovem si la expressió trobada és correcte mitjançant les taules anteriors.

$$\text{Si } s \text{ és una línia} \rightarrow D_S = \frac{\log N}{\log \frac{1}{\frac{1}{N}}} = \frac{\log N}{\log N} = 1$$

$$\text{Si } s \text{ és un quadrat} \rightarrow D_S = \frac{\log N^2}{\log \frac{1}{\frac{1}{N}}} = \frac{\log N^2}{\log N} = 2$$

$$\text{Si } s \text{ és un cub} \rightarrow D_S = \frac{\log N^3}{\log \frac{1}{\frac{1}{N}}} = \frac{\log N^3}{\log N} = 3$$

Ara apliquem aquesta fórmula a fractals geomètrics que tinguin el mateix factor de contracció, així com el triangle de Sierpinski o la curva de Koch.



$$D_{Sierpinski} = \frac{\log N_S}{\log \frac{1}{R_s}} = \frac{\log 3}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58...$$

Figura 2.13: Dimensió sierpinski



$$D_{Koch} = \frac{\log N_K}{\log \frac{1}{R_k}} = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26...$$

Figura 2.14: Dimensió Koch

Però aquesta fórmula només és capaç de funcionar quan el valor de contracció r és idèntic per a totes les afinitats i per a totes les contraccions.

En casos com aquest, que les diferents afinitats tenen diferents contraccions, necessitem una altra fórmula. Aquesta fórmula és anomenada la **fórmula de Moran**.

• Fórmula de Moran

Si apliquem N diferents afinitats amb diferents contraccions R (R_1, R_2, \dots, R_n), doncs la dimensió del fractal que obtenim a través d'un sistema iterat és el únic valor de $D > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^N R_k^D = 1$$

Però, aquesta fórmula només funciona per a objectes autosembants geomètricament. Per a calcular la dimensió d'objectes no autosembants (així com es pot utilitzar per als que sí que són autosembants) s'utilitza la relació que existeix entre la dimensió de Hausdorff i el sistema de Box-Counting Dimension (també anomenat Dimensió de Minkowski).

★ Observació

Quan $R_1 = R_2 = \dots = R_N$, l'equació passa a ser $NR^D = 1$, que és d'on surt l'equació que vam deduir anteriorment de $N = (\frac{1}{R})^D$

• Dimensió de Hausdorff i dimensió de Minkowski

La millor definició general de dimensió és l'anomenada dimensió de Hausdorff, denotada com dim_H . Així i tot, aquesta és bastant difícil d'executar, fins i tot a conjunts simples.

Una bona aproximació a la dimensió de Hausdorff és la Box-counting Dimension, denotada com dim_M . En general, $dim_H \leq dim_M$ però, en conjunts autosembants,

$$dim_H = dim_M = dim_S$$

sent dim_S l'equivalent a D_S a la pàgina 20.

Aplicarem aquest sistema per a calcular la dimensió de qualsevol objecte:

Sigui $K \in \mathbb{R}^2$ un conjunt limitat. Cobrirem K per quadrats de costat r , sent $N(r)$ el nombre de quadrats necessaris per a dur-ho a terme. Doncs,

$$dim_M = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{r}}$$

Com a exemple, expondrem el càlcul per al triangle de Sierpinski:

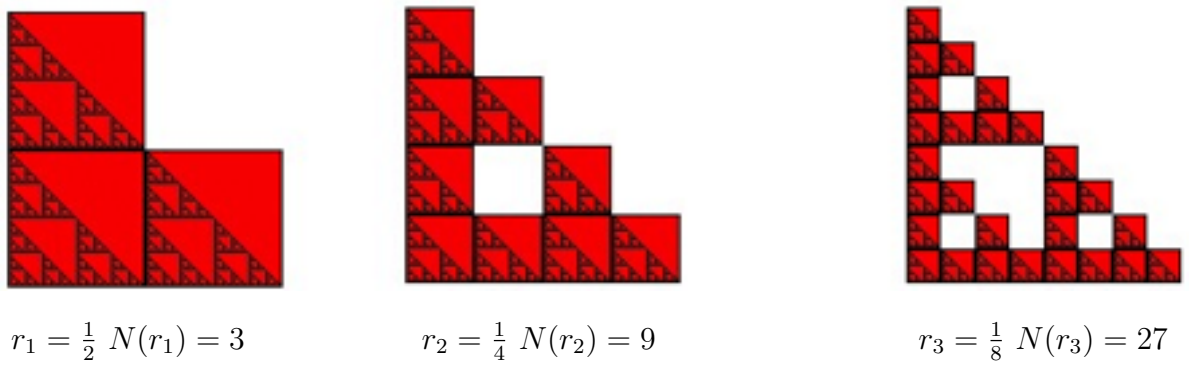


Figura 2.15: Càlcul de la dimensió del triangle de Sierpinski amb el mètode de Box-counting

En l'exemple del triangle de Sierpinski, obtenim com a resultat per a qualsevol valor de r de 1,58, això és a causa de que es tracta d'un fractal autosemblant.

Aquest sistema es pot utilitzar virtualment a partir d'un ordinador, sent d'aquesta manera un dels mètodes més útils per calcular les dimensions dels fractals. Encara que no és l'únic ús que té. Aquest sistema també s'utilitza sovint en l'àmbit mèdic per al diagnòstic de malalties com podrien ser tumors, malformacions, coàguls de sang, malalties cerebrals, identificació de retina o fractures òssies.

També és útil en l'àmbit de la cartografia i l'arqueologia, ja que es tracta d'una manera versàtil de calcular les fronteres entre països, els canvis de desnivell o l'augment del nivell del mar.

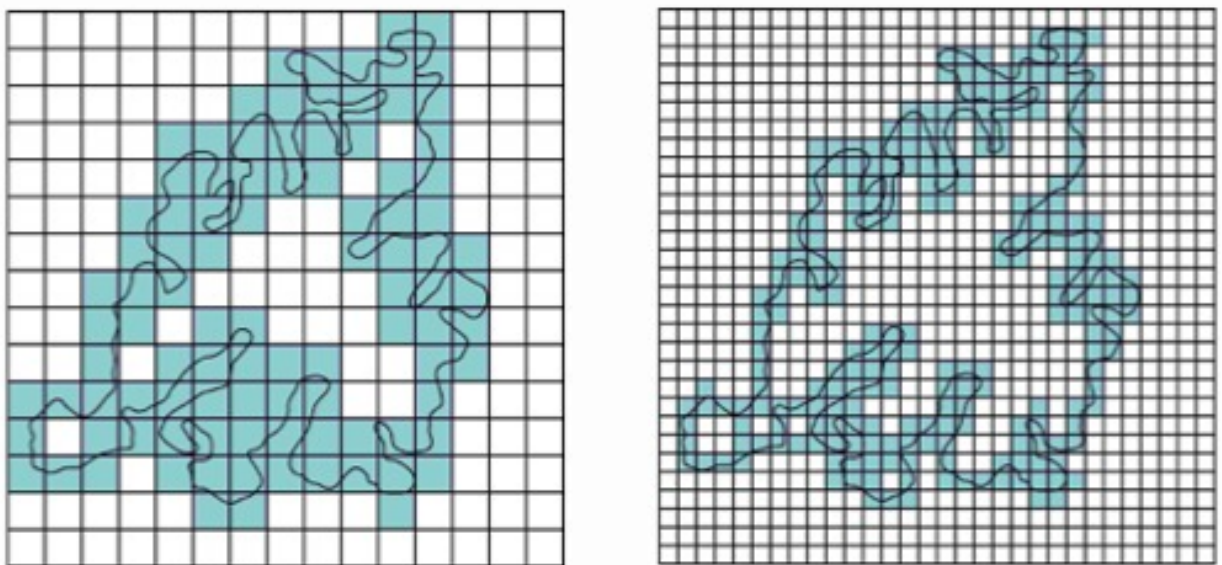


Figura 2.16: Mètode del Box-counting aplicat a una superfície irregular

Capítol 3

Fractals geomètrics

3.1 Fractals més clàssics

A continuació, parlarem d'alguns dels fractals més coneguts que hi ha. En aquest apartat, comentarem breument la història de com varen ser descoberts, els trets generals de cadascun dels fractals, i algunes de les propietats d'aquests (dimensió fractal, àrea...)

3.1.1 Triangle de Sierpinski

Començarem parlant del triangle de Sierpinski. Probablement, un dels fractals més coneguts i un dels més útils a l'hora d'explicar com és un fractal.

Aquest fractal va ser descobert l'any 1915 pel matemàtic polonès Waclaw Sierpiński. El que ell volia demostrar en el moment de la creació del fractal era que era possible la creació d'una corba que tenia perímetre infinit delimitant una àrea nul·la.

Aquest és l'exemple més conegut del triangle de Sierpinski, el creat amb un triangle equilàter. Com es pot veure, aquesta figura ha estat formada extraient la part interior de cada triangle format dins d'aquesta. Així i tot, hi ha altres maneres de construir aquesta corba:

La primera i més senzilla és la que ja hem comentat, extraient la part interna de cada triangle que es forma. Amb aquest mètode, el que es fa és extreure la figura delimitada pels punts mitjans de cada un dels costats dels triangles formats a la iteració anterior. D'aquesta manera, per tant, la seva àrea es redueix $1/4$ a la iteració anterior.

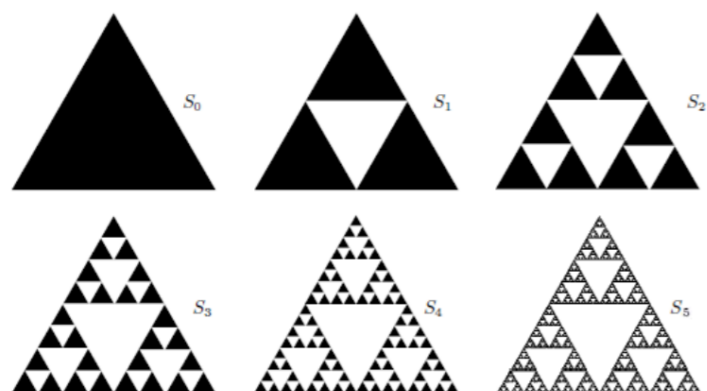


Figura 3.1: Triangle de Sierpinski

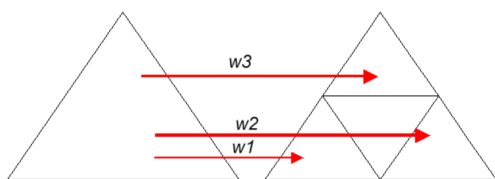


Figura 3.2: Sierpinski iterat

Un altre mètode per crear aquesta figura és a partir del reescalat i la translació de la figura. Primer es reescala la figura a $1/3$ de la seva mida i s'aplica la translació per col·locar-la a tres punts diferents, ocupant $3/4$ de l'àrea que ocupava la figura de la iteració anterior.

L'últim mètode, i el que podríem dir és el més curiós, es basa en el joc del caos. Aquest joc, del qual parlarem més endavant, utilitza una successió de nombres aleatoris per tal de crear la imatge del triangle de Sierpinski.

A continuació parlarem de la longitud i l'àrea d'aquest fractal. Veient la figura que hem mostrat més amunt, podem deduir més o menys aquestes dues propietats. Encara i així, a continuació mostrarem dues taules per definir més detalladament la longitud i l'àrea d'aquest fractal a cada iteració.

• Longitud

Primer de tot, considerarem que el triangle inicial serà equilàter i que cadascun dels seus costats constarà d'una unitat de longitud.

	Nombre de costats	Longitud de cada costat	Longitud total (en unitats linears)
S_0	$3 \cdot 1$	1	$3 \cdot 1 = 3$
S_1	$3 \cdot 3$	$\frac{1}{2}$	$3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 4,5$
S_2	$3 \cdot 9$	$\frac{1}{4}$	$3 \cdot 9 \cdot \frac{1}{4} = 6,75$
S_3	$3 \cdot 27$	$\frac{1}{8}$	$3 \cdot 27 \cdot \frac{1}{8} = 10,125$
S_n	$3 \cdot 3^n$	$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$3 \cdot 3^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

En la taula anterior se'ns mostren diferents dades sobre la longitud dels costats dels triangles depenent del número d'ells, sent n el número de la iteració en la qual estem.

Per tal de calcular la longitud que tindrà la figura un cop es facin una infinitat d'iteracions, només s'ha de calcular la longitud total de la figura (última columna de la taula) fent que n tendeixi cap a infinit. D'aquesta manera podem veure com la longitud que obtindrà el fractal serà infinita.

• Àrea

Considerem, un altre cop, que el triangle inicial sigui equilàter i que cadascun dels seus costats constarà d'una unitat de longitud, i que n sigui el número de la iteració en la qual estem.

	Nombre de triangles	Longitud de la base de cada triangle	Longitud de l'altura de cada triangle	Àrea de cada triangle	Àrea total
S_0	1	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,433\dots$
S_1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,324\dots$
S_2	9	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}$	$9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = 0,243\dots$
S_3	27	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}$	$27 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} = 0,182\dots$
S_n	3^n	$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}}$	$3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2^{2n+2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

A diferència del vist amb la longitud, l'àrea d'aquest fractal disminueix a cada iteració. A l'última columna de la taula veiem com a cada iteració es disminueix l'àrea, encara que cada cop menys en respecte a l'anterior. Així i tot, quan es facin infinites iteracions, l'àrea tendirà cap al 0 fins al punt d'arribar a ser nul·la.

Curiosament, aquest fractal no és l'únic "descobert" per Sierpinski, ja que hi ha variables del mateix com el tetraedre de Sierpinski que també són coneguts, encara que no els descriurem al ser massa similars.

3.1.2 Conjunt de Cantor

Aquest curiós i simple fractal rep el seu nom del matemàtic i filòsof alemany Georg Cantor el qual, el 1883, el va utilitzar per a una de les seves investigacions més importants relacionada amb el continu”.

El conjunt de Cantor és considerat, per molts, el fractal més típic i conegut que hi ha, ja que és el més antic. El que també molts desconeixen, és que Georg Cantor no va ser el primer a treballar amb aquest fractal, ja que al 1875, el dublinès Henry John Stephen Smith, ja l’havia descobert però al morir abans de donar-lo a conèixer, Cantor va rebre tot el reconeixement.

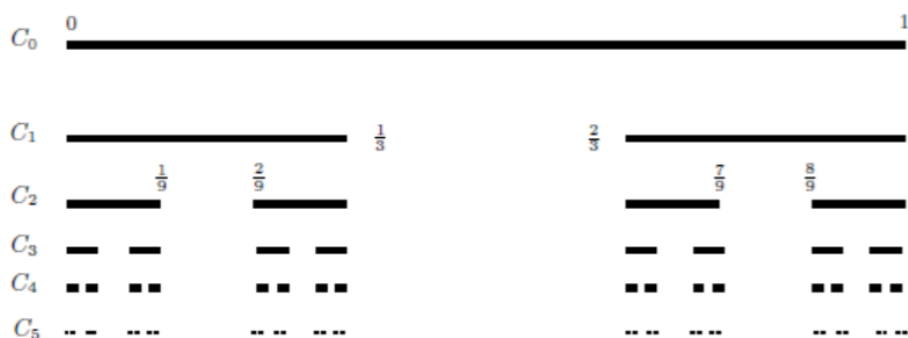


Figura 3.3: Conjunt de Cantor

Aquest fractal permet dos definicions igualment vàlides per a la seva construcció:

- La definició numèrica ens diu que es tracta del conjunt de tots els punts de l'interval real $[0,1]$ que permeten una expressió en base 3 que no utilitzi el dígit 1.
- Al mateix temps, la definició geomètrica ens indica que aquest fractal és de caràcter recursiu i que elimina, a cada iteració, el segment corresponent al terç central de cada interval.

Al ser un fractal bastant simple i fàcil d'entendre, ens dedicarem a detallar les primeres iteracions de la seva creació.

Primer de tot, tenim un segment $[0,1]$ a la recta real, al qual li haurem d'extreure el segment equivalent al seu terç central, quedant dos segments de $\frac{1}{3}$ de la longitud del segment inicial. Els intervals resultants seran:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Sent l'interval entre parèntesis el que hem d'extreure del segment original, quedant la primera iteració així:

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Per a continuar amb el següent pas, haurem de repetir el mateix procés, però aplicant el que hem fet en la primera iteració a cadascun dels segments que ara hi ha. Els intervals que ara trobarem seran:

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \text{ i } \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

A continuació, igual que hem fet abans, hem d'extreure tots els intervals entre parèntesis, ja que són els terços centrals corresponents per a cada segment.

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \text{ i } \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Per acabar de crear el fractal sencer, hauríem de repetir aquest procés una infinitat de vegades, esborrant cada cop més segments però més petits, fins a arribar al punt on no podríem ni veure'ls al ser tan petits.

Un fet curiós d'aquest fractal és que, si fem els càlculs, veiem com arriba un punt on la longitud d'aquest és nul·la. El que és més curiós encara és que quan has fet una infinitat d'iteracions (sense que la longitud sigui zero), cadascun dels punts que trobem en el segment inicial tenen un punt corresponent (amb el que "s'emparellen") a la iteració en la qual estem. Això demostra com encara i ser un més petit que l'altre, la seva quantitat de punts en el segment són els mateixos, ja que ambdós són infinits.

Tal com hem fet abans, parlarem de la longitud del fractal, ja que no té àrea.

- **Longitud**

En aquest cas, el càlcul de la longitud és bastant més fàcil que el del triangle de Sierpinski, ja que es tracta simplement d'extreure troços del segment principal. També sabem que a cada iteració s'extreu una porció menor a la extreta en la iteració anterior.

	Nombre de segments	Longitud de cada segment	Longitud total
C_0	1	1	1
C_1	2	$\frac{1}{3}$	$2 \cdot \frac{1}{3} = 0,666\dots$
C_2	4	$\frac{1}{9}$	$4 \cdot \frac{1}{9} = 0,444\dots$
C_3	8	$\frac{1}{27}$	$8 \cdot \frac{1}{27} = 0,296\dots$
C_n	2^n	$\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

3.1.3 Corba de Koch

El matemàtic suec, Helge von Koch, va introduir la corba que porta el seu nom al 1904 i com un exemple d'una corba contínua, infinita, i que no tenia tangent a cap dels seus punts.

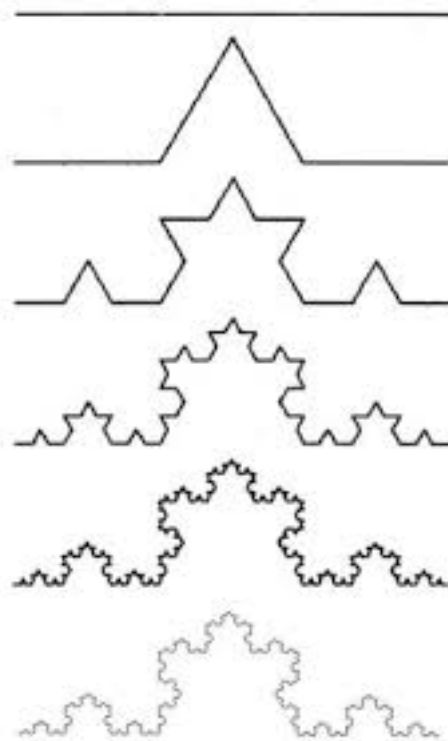


Figura 3.4: Corba de Koch

Definirem el primer segment que veiem com a un format per l'interval $[0,1]$. La regla d'iteració que seguirà la creació d'aquest fractal seia: "Substituir la tercera part central de cada segment per dos segments de mida idèntica rotats amb un angle de 60° en sentits contraris, formant una dent."

Al aplicar la primera iteració, el segment que havíem vist abans s'ha "transformat" en un segment idèntic on s'ha substituït el terç central per un triangle equilàter sense base. Amb això obtindrem la primera corba, formada per quatre segments de $\frac{1}{3}$ de longitud cadascun.

Si repetim aquest procés infinites vegades, acabarem eliminant tots els terços centrals de cada segment creat amb anterioritat. Al substituir cadascun d'aquests fragments per dos segments a cada iteració, acabem tenint una corba de longitud infinita. Encara i així, un cop hem fet una infinitat d'iteracions, trobem imperceptibles els fragments que s'afegeixen, tot i que incrementen la longitud de la figura.

- Longitud

Ja que aquest segment està delimitat per l'interval $[0,1]$, considerarem que aquest té una unitat de longitud amb la que treballarem per fer la taula següent:

	Nombre de segments	Longitud de cada segment	Longitud total
C_0	1	1	1
C_1	4	$\frac{1}{3}$	$4 \cdot \frac{1}{3} = 0,666\dots$
C_2	16	$\frac{1}{9}$	$16 \cdot \frac{1}{9} = 0,444\dots$
C_3	64	$\frac{1}{27}$	$64 \cdot \frac{1}{27} = 0,296\dots$
C_n	4^n	$\frac{1}{3^n} = (\frac{1}{3})^n$	$4^n \cdot (\frac{1}{3})^n = (\frac{4}{3})^n$

Com podem observar, la longitud total d'aquest fractal augmenta a cada iteració. Per tant, un cop fèssim infinites iteracions, trobariem que la seva longitud seria infinita.

3.1.4 Floc de Koch

Aquest fractal és una variació o extensió de la, anteriorment mencionada, corba de Koch, amb la qual comparteixen moltes propietats. Aquest fractal va ser creat pel mateix Koch uns anys després de crear la corba, al 1906. Aquest és, probablement, el fractal que a la gent més li sorprèn conèixer, ja que tothom l'identifica amb un floc de neu.

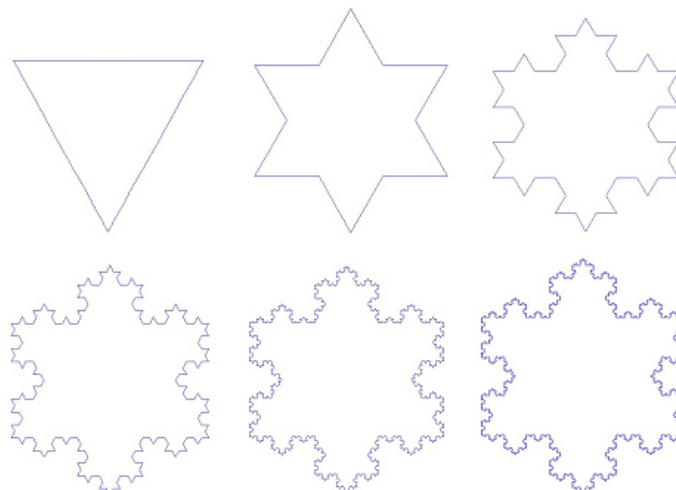


Figura 3.5: Floc de Koch

Com hem dit abans, les propietats d'aquest fractal són molt similars al anteriorment descrit. És per això que segueix la mateixa iteració que l'anterior, amb la única diferència que la figura inicial és un triangle equilàter.

Com a la corba de Koch, es substitueix cada segment per quatre de longitud menor. Continuant amb aquesta iteració una infinitat de vegades, obtenim el fractal.

• Longitud

Sabent que la longitud de la corba de Koch és $(\frac{4}{3})^n$, i que la longitud del cop de Koch és el triple que l'anterior, podem deduir que la longitud del cop de Koch serà de $3 \cdot (\frac{4}{3})^n$.

Doncs, sabent que la longitud de la corba és infinita, la del cop també serà infinita.

	Nombre de triangles nous	Longitud de la base dels nous triangles	Longitud de l'altura dels nous triangles	Àrea de cada triangle	Àrea total
K_0	0	0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{4} = 0,433\dots$
K_1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$	$A_{K0} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = 0,577\dots$
K_2	12	$\frac{1}{9}$	$\frac{\sqrt{3}}{18}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{18}$	$A_{K0} + A_{K1} + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{18} = 0,243\dots$
K_3	48	$\frac{1}{27}$	$\frac{\sqrt{3}}{54}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{54}$	$A_{K0} + A_{K1} + A_{K2} + 48 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{54} = 0,182\dots$
K_n	$3^{n-1} \cdot 3$	$\frac{1}{3^n} = (\frac{1}{3})^n$	$\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^n}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^n} = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 3^{2n}}$	$A_{K0} + \dots + 4^{n-1} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 3^{2n}}$

Doncs, l'àrea total del foc de Koch quan les iteracions tendeixen a infinit seria:

$$A_{K_S} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Amb això podem veure com una longitud infinita conté una àrea finita.

3.2 Construccions geomètriques iterades

Les construccions geomètriques iterades són repeticions d'uns certs processos, sempre idèntics, sobre un objecte geomètric. És a dir, definim un sistema iterat com una funció que podem anomenar com $f(x_n)$ on $n \geq 0$, $x_1 = f(x_0)$, al igual que $x_2 = f(x_1)$ i així fins a $n = \infty$.

Mitjançant aquests processos podem ser capaços de construir qualsevol classe de fractal i fins i tot crear-ne de nous.

Aquestes iteracions estan formades per afinitats que són manipulades per un conjunt de normes: reescalat, translació i rotació. Repetint la iteració infinites vegades podem generar qualsevol fractal.

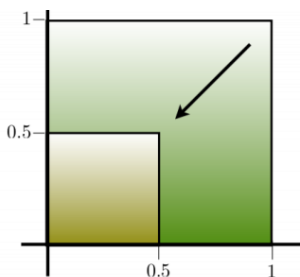


Figura 3.6: Reescalat

El reescalat es basa en multiplicar dos valors; que anomenarem \mathbf{r} i \mathbf{s} , sent $\{r, s\} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Xr \\ Ys \end{pmatrix}$$

La rotació funciona multiplicant la posició de l'objecte per la matriu $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \varphi \\ \sin \theta & \cos \varphi \end{pmatrix}$ sent $\{\theta, \varphi\} \in \mathbb{R}$, els valors angulars que vols que sigui rotat l'objecte.

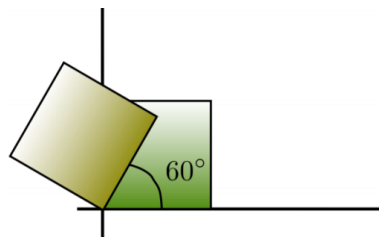


Figura 3.7: Rotació

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \varphi \\ \sin \theta & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

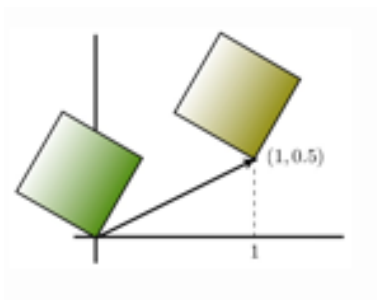


Figura 3.8: Translació

La translació consisteix en sumar a la posició de l'objecte un valor per tal de desplaçar-lo. Ens referirem a aquest valor amb les lletres **e** i **h**, sent $\{e, h\} \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix}$$

- Exemple mitjançant el triangle de Sierpinski

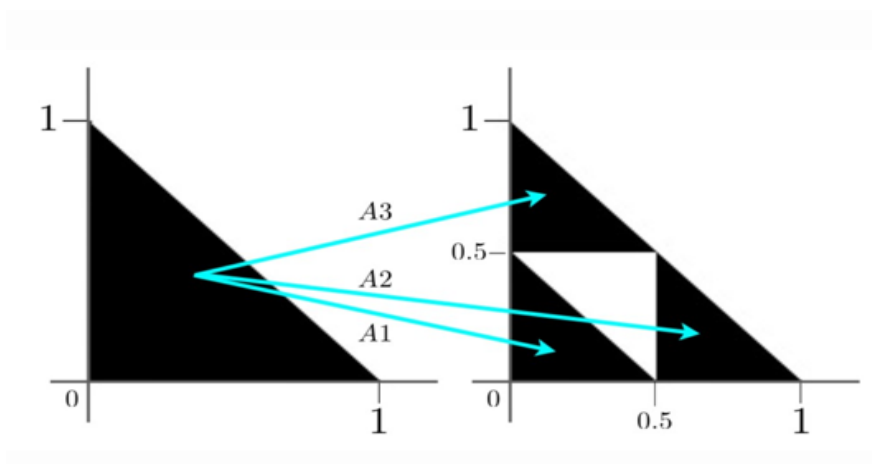


Figura 3.9: Iteracions

El triangle de Sierpinski es pot construir mitjançant dues de les tres possibles accions que podem aplicar, la translació i la reducció. En aquest cas necessitem aplicar-ho tres vegades, és a dir, per cada iteració estarem manipulant 3 afinitats.

Anomenarem A_1 , A_2 i A_3 a la primera, segona i tercera afinitat, respectivament.

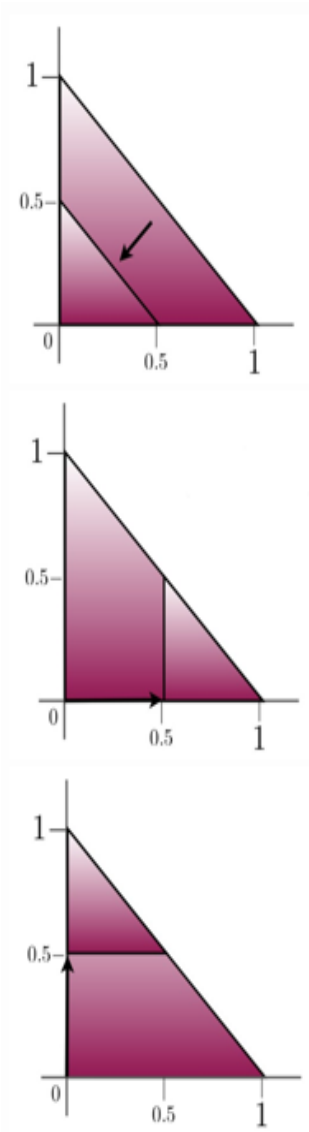


Figura 3.10: Afinitats

Primera afinitat A_1 : La primera afinitat únicament es basa en reescalar el triangle reduint els catets del triangle a la meitat.

$$reescalat : r = 0.5$$

Segona afinitat A_2 :

La segona afinitat reescala el triangle igual que a la primera afinitat però en aquest cas es trasllada 0,5 unitats de distància des del centre de coordenades en l'eix d'abscisses.

$$reescalat : r = 0.5$$

$$traslació : \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

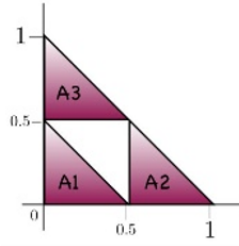
Tercera afinitat A_3 :

La tercera afinitat és exactament igual a la segona exceptuant que la translació canvia. La tercera iteració es trasllada 0.5 unitats de distància des del centre de coordenades, però, en l'eix d'ordenades.

$$reescalat : r = 0.5$$

$$traslació : \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Per tant, podem resumir la informació de la següent manera:



Afinitats	r i s	θ i φ	e	h
A_1	0.5	0	0	0
A_2	0.5	0	0.5	0
A_3	0.5	0	0	0.5

Aquest conjunt de normes és al que ens referim com al sistema iterat del triangle de Sierpinski. Si repetim les iteracions infinites vegades, trobem que es genera el triangle de Sierpinski amb cada vegada més detall.

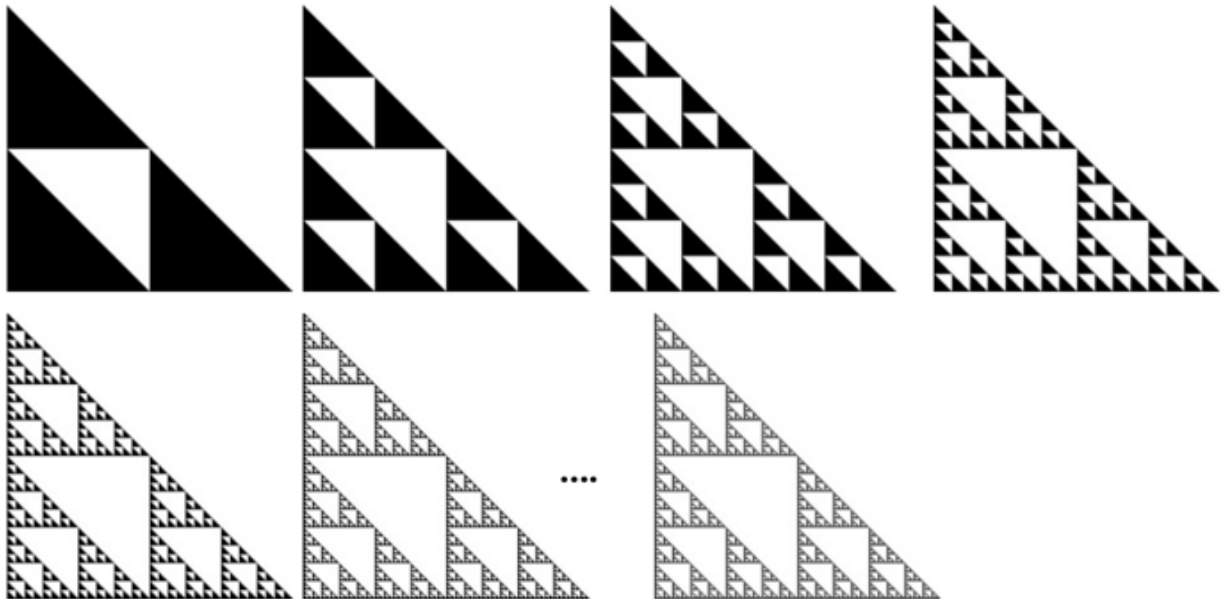


Figura 3.11: Iteració Triangle de Sierpinski

Concloem que, repetint les iteracions, es conserva la forma triangular. Per tant, podem canviar el generador per crear un fractal que, en l'infinit, es comporti igual que el Triangle de Sierpinski.

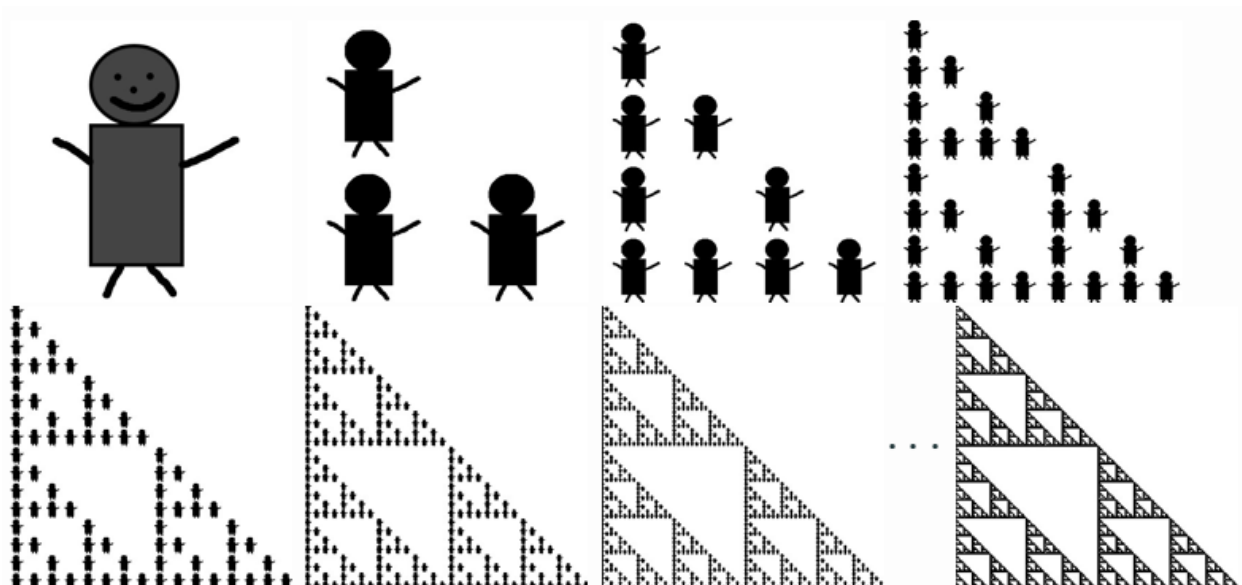


Figura 3.12: Exemple triangle de Sierpinski

Sabem que un sistema iterat geomètric és un conjunt de contraccions en el pla T_1, T_2, \dots , T_n , i P_0 qualsevol forma (o grup de punts).

Doncs la seqüència de generació de la forma del fractal seria:

$$P_1 = T_1(P_0) \cup \dots \cup T_n(P_0)$$

$$P_2 = T_1(P_1) \cup \dots \cup T_n(P_1)$$

.

.

.

$$P_{k+1} = T_1(P_k) \cup \dots \cup T_n(P_k)$$

Si la seqüència convergeix en la figura P , doncs serà invariant a l'operació descrita.

$$P = T_1(P) \cup \dots \cup T_n(P)$$

Sabent això, podem comprendre el [teorema de Collage](#).

- **Teorema de Collage**

Sigui $T_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on $i = 1, \dots, N$ contraccions. Doncs $T : K(\mathbb{R}^2) \rightarrow K(\mathbb{R}^2)$ serà la funció de collage, actuant sobre un conjunt compacte, un conjunt tancat i acotat, en el pla com

$$T(C) = T_1(C) \cup \dots \cup T_n(C) = \bigcup_{k=1}^N P_k$$

on

$$T_i(C) = \{T_i(x, y); (x, y) \in C\}$$

sent C un conjunt compacte $\in \mathbb{R}^2$

Doncs, existirà un únic conjunt A que satisfagi

$$T(A) = A$$

El que provoca, per tant, és que per a qualsevol altre conjunt, diguem-ne B

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(B) = A$$

amb les mesures de Hausdorff en $k(\mathbb{R}^2)$.

Un clar exemple del Teorema de Collage seria la Figura 3.12, vista en el punt anterior.

3.3 Construccions geomètriques iterades aleatoriament mitjançant el joc del caos

Les construccions geomètriques iterades aleatòriament són processos repetitius que es basen en l'atzar com a mitjà per a la construcció dels fractals. Aquests sistemes són molt sensibles als canvis i, com a resultat d'aquests, obtenim diferents tipus de fractals.

- **El joc del caos**

Abans d'entrar en les matemàtiques darrere d'aquest joc, parlarem de com es juga i el resultat que té.

El joc del caos compleix un seguit de normes per al seu funcionament:

- Ha de contenir un nombre major o igual a 2 punts assignats en l'espai que serveixin com a punts cardinals.

- Els punts no han d'estar alineats.
- Els punts han de ser estàtics en l'espai.
- Ha d'existir un punt d'origen des d'on començar el joc, que sigui equivalent o no a un punt cardinal, contingut dins de la figura formada pels punts cardinals.

Per explicar el funcionament agafarem com a exemple la creació del triangle de sierpinski mitjançant el joc del caos.

iguí: Q, P, S tres punts no alineats continguts en el pla \mathbb{R}^2 i un punt $z_0 \notin \{Q, P, S\}$ contingut en el pla \mathbb{R}^2 . I sent la probabilitat d'escollir un dels tres punts la mateixa, és a dir, $\frac{1}{3}$.

Agafem al atzar un dels tres punts Q, P, R per a definir el nou punt z_1 .

Suposem que aleatoriament escollim el punt Q . Doncs, el nou punt z_1 serà, en aquest cas, el punt mitjà entre els punts z_0 i Q .

$$z_1 = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{Qz_0} + Q = \frac{1}{2} \cdot (z_0 - Q) + Q = \frac{z_0 + Q}{2}$$

I així succesivament sent $z_2 = \frac{z_1 + P}{2}$ (si aleatoriament escollim el punt P) fins a l'infinit.

Podem, doncs, expressar-ho com aplicar al atzar una de les tres aplicacions afins següents:

$$\left. \begin{aligned} A_1(z_x) &= \frac{z_x + P}{2} \\ A_2(z_x) &= \frac{z_x + R}{2} \\ A_3(z_x) &= \frac{z_x + Q}{2} \end{aligned} \right\}$$

També podem escriure la successió d'una manera més compacta

$$z_n = f^n(z_0)$$

sent f el mecanisme aleatori, i per tant, ho podem interpretar com l'òrbita de z_0 , la qual explicarem més endavant en l'apartat 4.2.1.

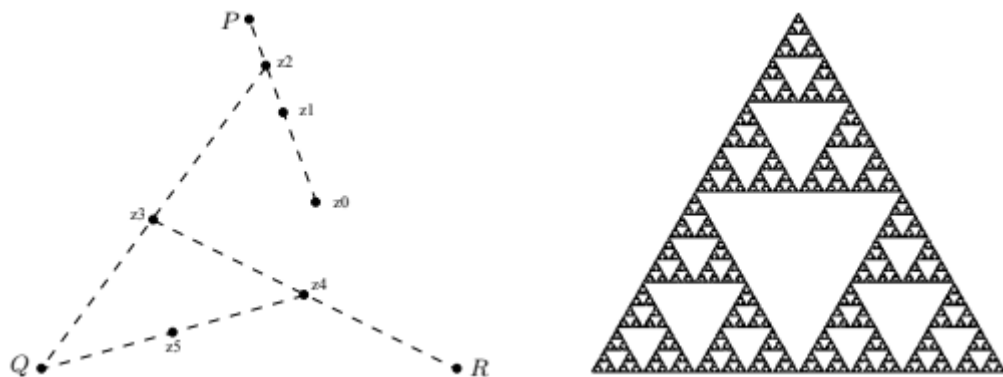


Figura 3.13: Esquerra: primers 6 punts en el joc del caos per la seqüència PPQRRQ.... Dreta: Els següents 80.000 punts.

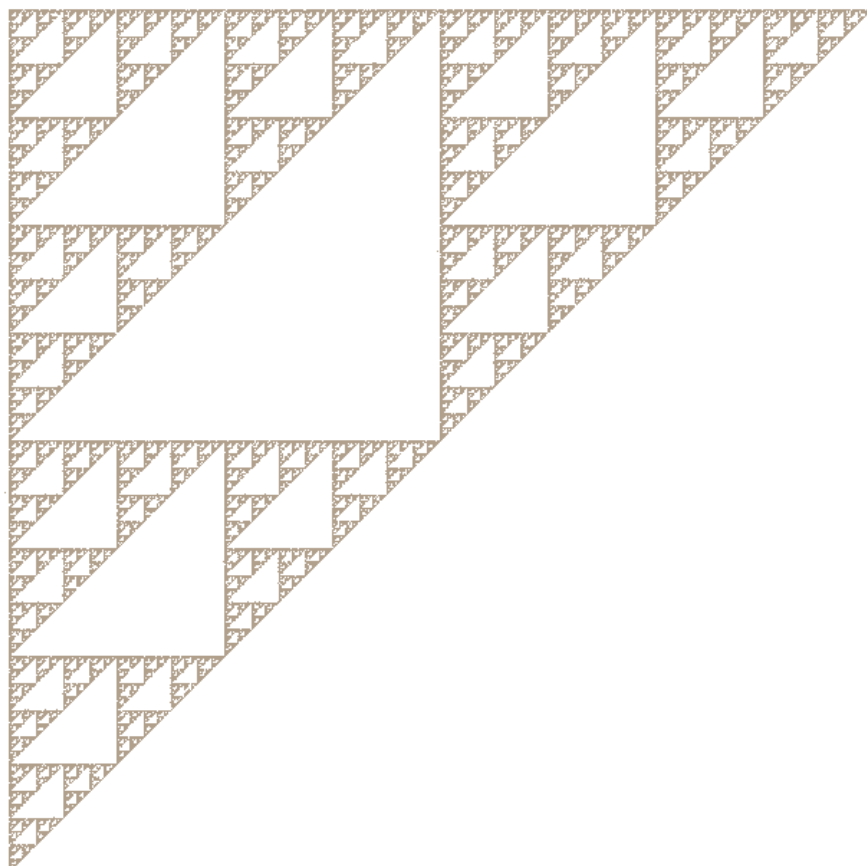


Figura 3.14: Triangle de Sierpinski amb 100.000 punts

Modificant el valor de contracció, la quantitat i/o posició dels punts cardinals, afegint rotació o canviant la probabilitat, es poden generar fractals totalment diferents.

Aquest sistema per a la creació de fractals és molt útil i senzill de programar en sistemes informàtics, i és capaç de generar qualsevol classe de fractal que el programador pugui programar.

Com a exemple, nosaltres mateixos hem pogut programar diversos fractals, alguns coneguts, i d'altres de nous.

- **Programació d'un generador de fractals mitjançant el joc del caos amb C++**

Per a dur a terme el programa vàrem decidir utilitzar com a llenguatge de programació el C++, utilitzant com a programa d'ajut SharpDevelop, ja que és un programa fàcil d'entendre, utilitzar, i ja que teníem nocions bàsiques del seu ús perquè vàrem tenir l'oportunitat d'aprendre a utilitzar-lo en l'assignatura d'informàtica en la nostra escola.

Com que bastanta part del programa és per a l'execució, així com la coordinació del mateix programa, farem menció únicament a les parts que tenen major importància sobre els càlculs i generació dels fractals. I obviarem les parts purament informàtiques.

El programa és una modificació d'un ja creat per a una tasca de l'assignatura d'informàtica.

Per a accedir a tot el codi de programació, podeu anar a la pàgina 10 dels annexos.

- **Programa de generació del Triangle de Sierpinski**

Per a la creació del fractal del Triangle de Sierpinski, necessitem anomenar dos variables claus. Una que consideri el nombre de punts que imprimirem per pantalla, ja que ens seria impossible fer-ho de forma infinita. I una que sigui el sistema aleatori que utilitzarem per a escollir a quin punt dirigir-nos.

Aquesta última variable és una Classe que ve per defecte anomenat Random que serveix per a la generació de nombres pseudoaleatoris. Anomenarem *rnd* a la classe que generarà els nombres aleatoris.

Per altra banda, com que el nombre de punts que imprimirem per pantalla ha de ser un nombre natural d'un valor numèric relativament gran, utilitzarem una variable de

```

// auto-generació de la posició inicial
for(int Q=0; Q<numsprites; Q++){
    sprites[Q] = new Sprite();
    sprites[Q].Texture = texture;
    sprites[Q].XAnchor= 1;
    sprites[Q].YAnchor= 1;
    sprites[Q].X = 0;
    sprites[Q].Y = 0;
}

```

Figura 3.16: generació de la posició inicial dels punts

tipus enter (int) per a que guardi el valor. Aquesta variable l'anomenem numsprites.

```

int numsprites=100000;           //nombre de punts
Random rnd= new Random();       //sistema de generació de nombres aleatoris

```

Figura 3.15: Introducció de les variables

Després de la declaració de les variables, en el que seria el set up, hi creem un bucle de tipus *for* per assignar a cada punt la seva textura i unes posicions a la pantalla per posteriorment reassignares.

Aquest pas serveix únicament per a que, posteriorment, assignar les coordenades correctes dels punts sigui més fàcil.

```

protected virtual void ProcessFrame()
{

    if( !paused )
    {

        for(int U=1; U<numsprites; U++){
            int aa= rnd.Next(0,3);
            sprites[U].X = movimentX(aa,sprites[U-1].X);
            sprites[U].Y = movimentY(aa,sprites[U-1].Y);
        }
        paused=true;

    }
    else
    {
        System.Threading.Thread.Sleep( 1 );
    }

}

```

Figura 3.17: ProcessFrame del Programa

El mètode del **ProcessFrame**, encarregat de dur a terme els càlculs per a la posterior impressió dels mateixos per pantalla, està gestionat per una clau **if** i una clau **else**. En cas que el programa no estigui pausat, calcularà les coordenades dels punts. Per altra banda, si el programa està pausat, no calcularà res.

Per calcular les coordenades de tots els punts s'utilitza un bucle **for**, ja anomenat anteriorment. En aquest, es calcula la posició de tots els punts utilitzant el sistema de nombres aleatoris i dos mètodes creats anomenats **movimentX** i **movimentY**.

Cada vegada que comença el bucle **for**, el sistema de nombres aleatoris guarda dins de la variable de tipus enter (**int** aa) un número entre el 0 i el 2, és a dir, tres números que corresponen a cada un dels punts cardinals necessaris per a la construcció del fractal.

Les coordenades dels punts es calculen basant-se en el nombre aleatori i en les coordenades del punt anterior. Per a facilitar els càlculs varem decidir descompondre les coordenades de cada punt en dos eixos l'eix X (eix d'abscisses) i l'eix Y (eix d'ordena-

des). Els mètodes **movimentX** i **movimentY** s'encarreguen de calcular el valor de la posició del seu eix corresponent.

Els dos mètodes són idèntics, l'única diferència és el valor de posició dels punts.

Eventualment, en finalitzar el bucle, es força al programa a aturar-se per a que no recalculi de forma infinita la posició de tots els punts i estigui canviant la posició dels mateixos sense parar.

* Mètodes **movimentX** i **movimentY**

```
public virtual float movimentX(int opció, float posicióX){  
    float XA=100;  
    float XB=700;  
    float XC=100;  
    float movimentXX=0;  
  
    switch(opció){  
        case 0:  
            movimentXX=(XA+posicióX)/2;  
            break;  
        case 1:  
            movimentXX=(XB+posicióX)/2;  
            break;  
        case 2:  
            movimentXX=(XC+posicióX)/2;  
            break;  
    }  
  
    return movimentXX;  
}
```

```

public virtual float movimentY(int opció, float posicióY){
    float YA=50;
    float YB=50;
    float YC=650;
    float movimentYY=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentYY=(YA+posicióY)/2;
            break;
        case 1:
            movimentYY=(YB+posicióY)/2;
            break;
        case 2:
            movimentYY=(YC+posicióY)/2;
            break;
    }

    return movimentYY;
}

```

Figura 3.18: Mètodes de moviment X i Y

Els mètodes calculen el valor de l'eix corresponent del nou punt calculant el punt mitjà entre el punt anterior del que estem calculant i un punt cardinal (en aquest cas anomenats A , B i C).

Per a saber a quin punt cardinal es dirigirà, utilitzem la clau **switch** amb la primera variable de tipus enter (**int** opció) que fa referència a la variable que guarda el nombre aleatori.

Depenent el valor de la variable *opció* es calcularà el punt mitjà entre el valor de l'eix del punt anterior; guardat en l'altre variable enter (**int** posicióX, si és el mètode de **movimentX** o posició Y si és el mètode de **movimentY**).

El càlcul del punt mitjà és exactament igual que el ja abans explicar en l'explicació del joc del caos en la pàgina 33, l'únic que en comptes de calcular el punt mitjà entre els dos punts, calcula el valor mitjà de l'eix corresponent, de forma que quan es calculen els dos valors mitjans (un per cada eix), dóna el valor de la coordenada de la pantalla on imprimir el punt.

Ja al final del programa, en el mètode de dibuix anomenat **Render**, existeix un últim bucle de tipus **for** que serveix per a dibuixar tots els punts per pantalla sense necessitat de cap altre variable, ja que el punt mateix té les dades de tot al ser una variable de tipus **Class** que permet guardar dintre d'ella informació sobre la variable.

```
for (int Q=0; Q<numsprites; Q++){  
    sprites[Q].Draw( spriterenderer, camera );  
}
```

Figura 3.19: Bucle de printació dels punts per pantalla

★ Observacions extretes a través de l'experimentació i recerca

Una vegada hem programat la generació del Triangle de Sierpinski, ens trobem que existeix una gran similitud entre el joc del caos, i el sistema geomètric iterat.

A més, visualitzem clarament una certa atracció en el joc del caos que provoca la creació del fractal.

Havent observat aquest comportament ens proposem construir altres fractals mitjançant el joc del caos, ja que sabent el perquè del seu funcionament, se'ns és bastant fàcil calcular la quantitat i posició de punts en el mapa per tal de crear els fractals.

Modificant el mètode movimentX i movimentY del programa del Triangle de Sierpinski, explicat en la pàgina anterior, hem sigut capaços de crear diversos fractals.

Ús deixem a les següents pàgines uns exemples d'altres fractals construïts per aquest sistema, explicant abans que les petites irregularitats i/o errors en la construcció dels fractals no és deguda a cap falla en el programa, poden ser degudes a errors decimals en els càlculs a l'hora de posicionar els punts cardinals i a la posició del punt inicial, ja que aquest no estava posicionat en un punt cardinal sinó en un punt qualsevol del pla, demostrant així, que des de qualsevol punt del pla es pot començar la generació del fractal sense haver-hi gairebé cap error, sent aquesta variable invariant en l'espai.

```

public virtual float movimentX(int opció, float posicióX){
    float XA=0;
    float XB=800;
    float XC=0;
    float XD=800;

    float XE=400;
    float XF=0;
    float XG=800;
    float XH=400;

    float movimentXX=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentXX=(XA+posicióX)/3;
            break;
        case 1:
            movimentXX=(XB+posicióX)/3;
            break;
        case 2:
            movimentXX=(XC+posicióX)/3;
            break;
        case 3:
            movimentXX=(XD+posicióX)/3;
            break;
        case 4:
            movimentXX=(XE+posicióX)/3;
            break;
        case 5:
            movimentXX=(XF+posicióX)/3;
            break;
        case 6:
            movimentXX=(XG+posicióX)/3;
            break;
        case 7:
            movimentXX=(XH+posicióX)/3;
            break;
    }

    return movimentXX;
}

public virtual float movimentY(int opció, float posicióY){
    float YA=0;
    float YB=0;
    float YC=800;
    float YD=800;

    float YE=0;
    float YF=400;
    float YG=400;
    float YH=800;

    float movimentYY=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentYY=(YA+posicióY)/3;
            break;
        case 1:
            movimentYY=(YB+posicióY)/3;
            break;
        case 2:
            movimentYY=(YC+posicióY)/3;
            break;
        case 3:
            movimentYY=(YD+posicióY)/3;
            break;
        case 4:
            movimentYY=(YE+posicióY)/3;
            break;
        case 5:
            movimentYY=(YF+posicióY)/3;
            break;
        case 6:
            movimentYY=(YG+posicióY)/3;
            break;
        case 7:
            movimentYY=(YH+posicióY)/3;
            break;
    }

    return movimentYY;
}

```

Figura 3.20: Esquerra: mètode de movimentX per a la construcció de l'alfombra de Sierpinski Dreta: mètode movimentY per a la construcció de l'alfombra de Sierpinski

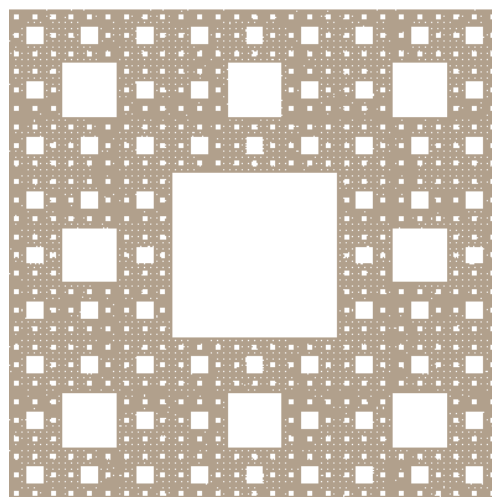


Figura 3.21: Alfombra de Sierpinski


```

public virtual float movimentX(int opció, float posicióX){
    float XA=0;
    float XB=400;
    float XC=800;
    float XD=400;
    float XE=400;

    float movimentXX=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentXX=(XA+posicióX)/3;
            break;
        case 1:
            movimentXX=(XB+posicióX)/3;
            break;
        case 2:
            movimentXX=(XC+posicióX)/3;
            break;
        case 3:
            movimentXX=(XD+posicióX)/3;
            break;
        case 4:
            movimentXX=(XE+posicióX)/3;
            break;
    }

    return movimentXX;
}

public virtual float movimentY(int opció, float posicióY){
    float YA=400;
    float YB=800;
    float YC=400;
    float YD=0;
    float YE=400;

    float movimentYY=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentYY=(YA+posicióY)/3;
            break;
        case 1:
            movimentYY=(YB+posicióY)/3;
            break;
        case 2:
            movimentYY=(YC+posicióY)/3;
            break;
        case 3:
            movimentYY=(YD+posicióY)/3;
            break;
        case 4:
            movimentYY=(YE+posicióY)/3;
            break;
    }

    return movimentYY;
}

```

Figura 3.22: Esquerra: mètode movimentX per a la construcció del fractal de la caixa girat 90° Dreta: mètode movimentY per a la construcció del fractal de la caixa girat 90°

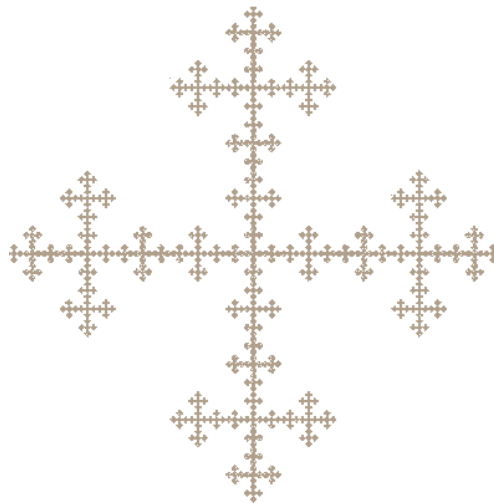


Figura 3.23: Fractal de la caixa girat

```

public virtual float movimentX(int opció, float posicióX){
    float XA=500;
    float XB=0;
    float XC=0;
    float XD=500;
    float XE=1000;
    float XF=1000;

    float movimentXX=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentXX=(XA+posicióX)/3;
            break;
        case 1:
            movimentXX=(XB+posicióX)/3;
            break;
        case 2:
            movimentXX=(XC+posicióX)/3;
            break;
        case 3:
            movimentXX=(XD+posicióX)/3;
            break;
        case 4:
            movimentXX=(XE+posicióX)/3;
            break;
        case 5:
            movimentXX=(XF+posicióX)/3;
            break;
    }

    return movimentXX;
}

public virtual float movimentY(int opció, float posicióY){
    float YA=0;
    float YB=255;
    float YC=755;
    float YD=1000;
    float YE=755;
    float YF=255;

    float movimentYY=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentYY=(YA+posicióY)/3;
            break;
        case 1:
            movimentYY=(YB+posicióY)/3;
            break;
        case 2:
            movimentYY=(YC+posicióY)/3;
            break;
        case 3:
            movimentYY=(YD+posicióY)/3;
            break;
        case 4:
            movimentYY=(YE+posicióY)/3;
            break;
        case 5:
            movimentYY=(YF+posicióY)/3;
            break;
    }

    return movimentYY;
}

```

Figura 3.24: Esquerra: mètode movimentX per a la construcció del fractal del Hexàgon Dreta: mètode movimentY per a la construcció del fractal del Hexagon

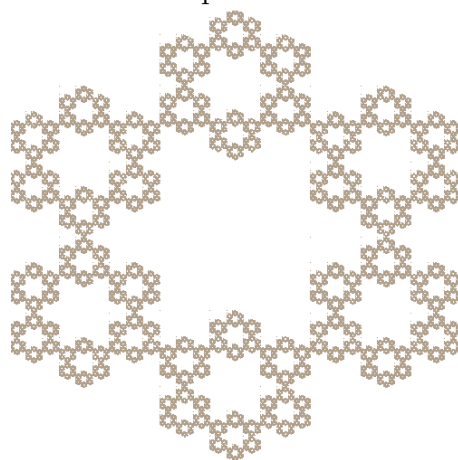


Figura 3.25: Fractal del Hexagon

```

public virtual float movimentX(int opció, float posicióX){
    float XA=0;
    float XB=400;
    float XC=800;
    float XD=400;

    float movimentXX=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentXX=(XA+posicióX)/3;
            break;
        case 1:
            movimentXX=(XB+posicióX)/3;
            break;
        case 2:
            movimentXX=(XC+posicióX)/3;
            break;
        case 3:
            movimentXX=(XD+posicióX)/3;
            break;
    }

    return movimentXX;
}

public virtual float movimentY(int opció, float posicióY){
    float YA=400;
    float YB=800;
    float YC=400;
    float YD=0;

    float movimentYY=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentYY=(YA+posicióY)/3;
            break;
        case 1:
            movimentYY=(YB+posicióY)/3;
            break;
        case 2:
            movimentYY=(YC+posicióY)/3;
            break;
        case 3:
            movimentYY=(YD+posicióY)/3;
            break;
    }

    return movimentYY;
}

```

Figura 3.26: Esquerra: mètode movimentX per a la construcció del fractal del Quadrat inclinat 90° Dreta: mètode movimentY per a la construcció del fractal del Quadrat inclinat 90°

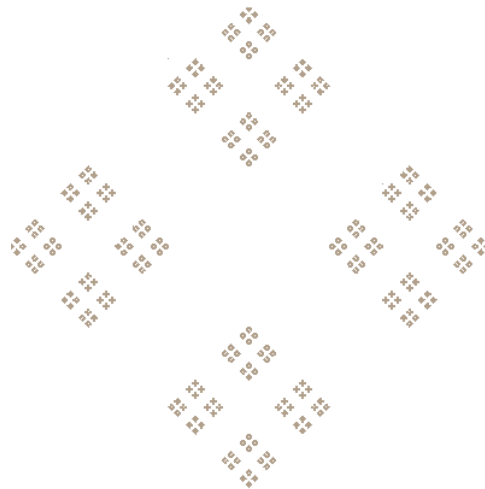


Figura 3.27: Fractal del Quadrat inclinat

```

public virtual float movimentX(int opció, float posicióX){
    float XA=100;
    float XB=1000;

    float movimentXX=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentXX=(XA+posicióX)/3;
            break;
        case 1:
            movimentXX=(XB+posicióX)/3;
            break;
    }
    return movimentXX;
}

public virtual float movimentY(int opció, float posicióY){
    float YA=100;
    float YB=100;

    float movimentYY=0;

    switch(opció){
        case 0:
            movimentYY=(YA+posicióY)/3;
            break;
        case 1:
            movimentYY=(YB+posicióY)/3;
            break;
    }
    return movimentYY;
}

```

Figura 3.28: Esquerra: mètode movimentX per a la construcció del Conjunt de Cantor Dreta: mètode movimentY per a la construcció del Conjunt de Cantor



Figura 3.29: Conjunt de Cantor

Capítol 4

Fractals complexos i dinàmica complexa

4.1 Explicació dels Fractals Complexos

Com ja vàrem introduir abans, a l'apartat de complexitat infinita, en la pàgina 12, faríem menció a dos diferents tipus de fractals. Els geomètrics, explicats durant tot el capítol 3, i els complexos.

Per a explicar aquests fractals, haurem d'introduir nous conceptes, així com la iteració de funcions, explicada en l'apartat 4.2.

A diferència dels fractals geomètrics, els fractals compostos no es poden explicar d'una manera senzilla a través d'iteracions geomètriques repetitives. Els fractals complexos són productes d'iteracions de funcions complexes.

La creació dels fractals complexos és deguda a punts d'atracció i de repulsió que, aquests mateixos, generen al crear orbites, explicades en la pàgina 49.

Alguns dels fractals complexos més famosos són el conjunt de Julia o el conjunt de Mandelbrot, que explicarem i exposarem com a exemple en les següents pàgines.

4.2 Iteració de funcions Complexes

Tal com ja hem explicat anteriorment, en l'apartat 3.2 a la pàgina 33, l'acte d'iterar és portar a terme un mateix procés repetides vegades. Anteriorment hem mencionat la iteració

geomètrica; és a dir, la repetició de processos geomètrics. En aquest cas, la iteració d'una funció $F(x)$ és la composició d'aquesta amb ella mateixa: $F \circ F = F(F(x))$. D'aquesta manera, la funció en la primera iteració serà la variable, independentment de la segona iteració, tal que $F(x_n) = x_{n+1}$. Definirem la iteració n -èsima de la funció F com F^n , per tant, $F^n = F \circ F^{n-1}$.

Sent x_0 el valor inicial (o llavor) d'on començarà la iteració, podem definir l'òrbita del valor x_0 com la successió de valors de $F(x)$:

$$x_0 \rightarrow x_1 = F(x) \rightarrow x_2 = F(x_1) = F^2(x_0) \rightarrow x_3 = F(x_2) = F^3(x_0) \rightarrow x_n = F^n(x_0)$$

4.2.1 Iteració real quadràtica

Per tal de poder explicar la iteració de funcions complexes d'una manera més fàcil, ens dedicarem a explicar tota la base teòrica iterant funcions reals quadràtiques.

La iteració real quadràtica és la iteració de funcions expressades a partir d'un polinomi de grau 2 (quadràtic).

$$F(x) = x^2 + k$$

sent $x, k \in \mathfrak{R}$, on k és el paràmetre de la funció.

En funció del paràmetre obtenim diferents òrbites per a la funció les quals venen regides en funció dels punts fixes; punts que atrauen o repulsen la funció (encara que també poden ser neutres; és a dir, que no afectin a les òrbites de la funció).

Algebràicament podem trobar aquests punts fixes ressolent l'equació $f(x) = x$, que, en el cas d'equacions de segon grau, seria ressoldre l'equació: $f(x) = x \Rightarrow x^2 + k = x \Rightarrow x^2 - x + k = 0$. Geomètricament, cal representar la funció $f(x)$ que iterarem i la bisectriu del primer i tercer quadrat (la funció identitat) $y = x$. Això és pel fet que aquesta, la funció identitat, és una funció afí on la imatge i l'antiimatge són sempre iguals. És per això que la intersecció entre la funció $f(x)$ i la bisectriu són els punts fixes de la funció, ja que compleixen la igualtat $f(x) = x$.

Cal, també, recalcar el tema de les progrecions geomètriques. Hem d'aclarir que quan el límit d'un conjunt o valor k és multiplicat per si mateix n vegades, i $n \rightarrow \infty$, el resultat variarà depenent del valor de k .

- Si $k \in (-1, 1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} k^n = 0$.
- Si $k \in \mathbb{R} - (-1, 1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} k^n = \infty$.
- Si K és una funció, el resultat de $\lim_{x \rightarrow \infty} k^n$ dependrà del valor de la seva llavor inicial, i donarà lloc a diverses possibilitats que explicarem a continuació.

• Punts fixos atractors i repulsors

Essent x un punt fix (que compleix la igualtat $f(x) = x$ i sent per tant un punt de tall entre $f(x)$ i la bisectriu $y = x$) el valor absolut de la primera derivada de la funció en el punt fix determinarà la seva naturalesa:

- Si $|f'(x)| > 1$ el punt fix x és repulsor. Per exemple, la funció $f(x) = x^2 - 1$ té un punt fix a $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. El valor absolut de la primera derivada de la funció en el punt fix x_0 és major que 1, $f'(x_0) = 1 + \sqrt{5} > 1 \Rightarrow x_0$ és un punt atractor, tal i com és pot observar a la Figura 4.1.
- Si $|f'(x)| < 1$ el punt fix x és atractor. Per exemple, la funció $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ té un punt fix a $x_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$. El valor absolut de la primera derivada de la funció en el punt fix x_0 és menor que 1, $|f'(x_0)| = 1 - \sqrt{3} < 1 \Rightarrow x_0$ és un punt atractor, tal i com és pot observar a la Figura 4.2.
- Si $|f'(x)| = 1$ el punt fix x és neutre (encara que en alguns casos pot ser repulsor o atractor). Per exemple, la funció $f(x) = x^2 - x$ té un punt fix a $x_0 = 0$. El valor absolut de la primera derivada de la funció en el punt fix $x_0 = 0$, $|f'(x)| = 1 \Rightarrow x_0$ és un punt neutre ja que és mostra atractor per la banda esquerra i repulsor per la banda dreta; tal i com és pot observar a la Figura 4.3.

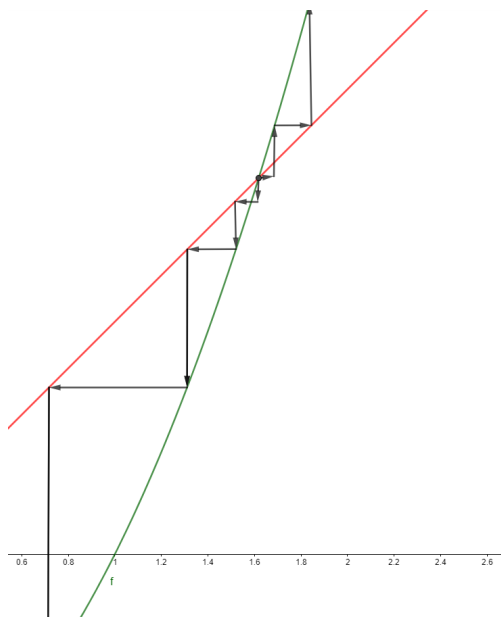


Figura 4.1: $f(x) = x^2 - 1$ tenint un punt fix repulsor

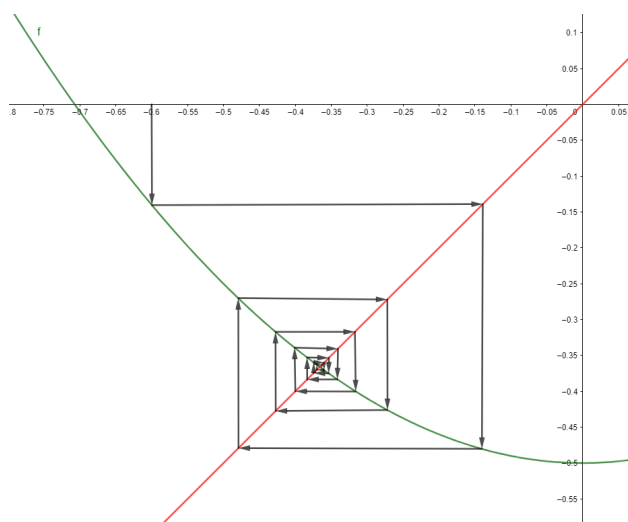


Figura 4.2: $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ tenint un punt fix atractor

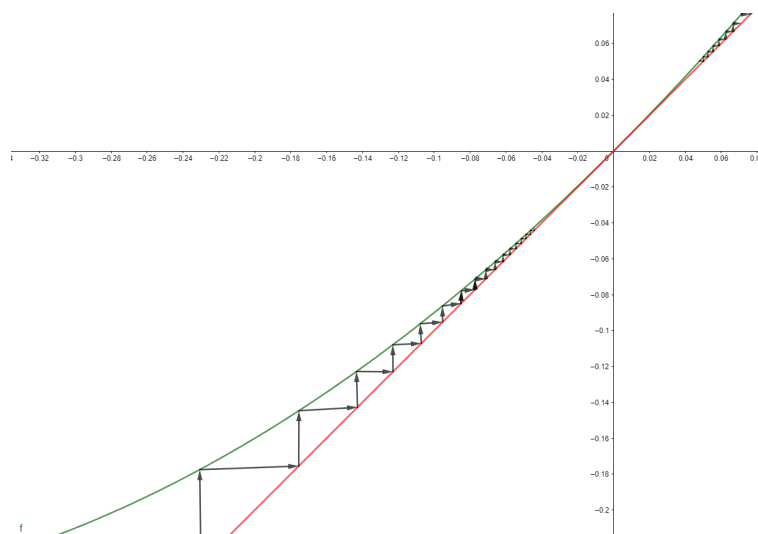


Figura 4.3: $f(x) = x^2 + x$ tenint un punt fix neutre

- **Òrbites eventualment fixes**

Si partim d'una llavor x_0 es pot arribar a un iterat x_n que sempre complirà la condició $f(x_n) = x_n$. Si la condició és compleix, l'òrbita de la llavor (x_0) s'anomenarà òrbita eventualment fixa. Com a exemple d'aquesta òrbita és l'òrbita de la funció $f(x) = x^2 + k$ on $x_0 = 0$ i el paràmetre $k = -2$. Doncs, l'òrbita de $f(x = x_0)$ seria:

$$f(x_0) = -2 \rightarrow f(x_1) = f(x_0)^2 - 2 = 2 \rightarrow f(x_2) = f(x_1)^2 - 2 = 2 \rightarrow f(x_3) = f(x_2)^2 - 2 = 2$$

- ★ **Observació**

Cal remarcar la semblança d'aquest tipus d'òrbites amb el teorema de Collage, ja que en el ja esmentat abans, a l'apartat 3.2 pàgina 38. En el susdit teorema per a qualsevol forma (en el que seria en aquest cas valor de x_0 que agafem que compleixi l'òrbita eventualment fixa) al cap d'infinites iteracions adquireix una mateixa forma concreta (el que seria el valor x_n).

- **Òrbites n -periòdiques**

Es tracta d'un conjunt de valors que procedeixen de les repeticions d'un cert nombre d'iteracions. Aquests períodes (o també anomenats cicles) indiquen el nombre mínim de punts que existeixen en l'òrbita tal que torna a arribar al punt inicial $x_n = x_0$. Aquest fenomen és anomenat com "tancar el cicle". La condició per a que un cicle sigui n -periòdic és que $f^n(x_0) = x_0 \Leftrightarrow f^m(x_0) \neq x_0, \forall m \in \{1, \dots, n-1\}$ de forma que el valor d' n ens indica el nombre d'iteracions que té el cicle (anomenat període).

★ **Observació**

Mitjançant aquesta definició podem concloure que la principal característica d'aquests tipus d'òrbites és que contenen un nombre finit de punts. Així com podem afirmar que els punts fixes poden ser considerats cicles de període 1, $f^1(x_0) = x_0$.

• **Òrbites eventualment periòdiques**

Les òrbites eventualment periòdiques, tal com es pot deduir pel seu nom, són òrbites que comencen per una llavor x_0 tal que inicialment no arriba a desencadenar un cicle; però que al cap d'un nombre indefinit d'iteracions arriba a un valor x_n en el qual, finalment, s'inicia un cicle n -periòdic que es tanqui en $x_n = x_u$. Perquè existeixi aquest tipus d'òrbites, s'haurà de complir una condició semblant a la de les òrbites n -periòdiques: $f^n(x_u) = x_n \Leftrightarrow f^m(x_u) \neq x_u, \forall m \in \{1, \dots, n-1\}$. L'òrbita de la llavor x_0 que compleixi aquesta condició serà anomenada òrbita eventualment n -periòdica.

Un exemple d'aquest tipus d'òrbites és la iteració de la funció real quadràtica de variable real $f(x) = x^2 - 1$; és a dir, quan el paràmetre d'una funció real de grau 2 és $k = -1$, per a la llavor $x_0 = 1$. L'òrbita d'aquesta funció per la llavor x_0 seria:

$$1 \mapsto 0 \mapsto -1 \mapsto 0 \mapsto -1$$

Que és tractaria d'un cicle 2-periodic.

★ **Observació**

Observem que les òrbites eventualment periòdiques tenen un comportament semblant a la generació de fractals geomètrics, anteriorment explicada en l'apartat 3.3 pàgina 39, en com des de qualsevol punt de l'espai es pot generar un fractal sent la variable del punt d'origen d'aquest invariable en l'espai, ja que aquest mateix acaba arribant a una òrbita fixa que eventualment, al repetir-se infinitament, acabarà generant el fractal.

• **Òrbites caòtiques**

Les òrbites caòtiques són aquelles que partint d'una llavor x_0 , en cada iteració, l'òrbita no tendeix mai cap a cap cicle periòdic: s'escapa a infinit o no es veu condicionada per cap altra tipus d'òrbita. Manifesten un comportament erràtic, caòtic.

Un exemple d'aquesta òrbita és l'òrbita per a $x_0 = 0$ per a la funció $f(x) = x^2 + 0.5$, representada a la Figura 4.4.

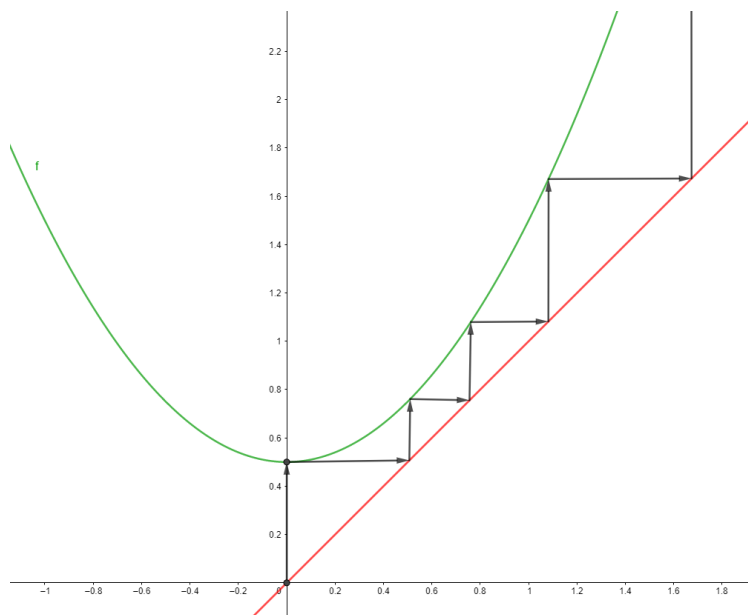


Figura 4.4: Òrbita de la funció $f(x) = x^2 + 0.5$ per a la llavor $x_0 = 0$

• Òrbita crítica

En la iteració de funcions, la llavor més important és $x_0 = 0$. Aquest punt és anomenat punt crític; i a la seva òrbita, òrbita crítica.

És tant important aquesta llavor perquè representa el mínim de l'equació parabòlica $f(x) = x^2 + k$; és a dir, que la seva primera derivada, $f'(x) = 2x$, és igual a 0 per a $x_0 = 0$. I és que en funció del valor de l'ordenada a l'origen, el paràmetre k , que determina la posició de la funció en l'eix vertical, l'òrbita crítica escapa o no a l'infinit.

Com a exemple d'aquesta òrbita també es pot observar en l'òrbita de $x_0 = 0$ de la funció $f(x) = x^2 + 0.5$ en la Figura 4.4.

4.2.2 Iteració complexa lineal

Introducció als nombres complexos

En el pla real, no existeixen arrels parelles de nombres negatius, per tant equacions com $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ no tenen solució real.

Per a poder resoldre aquest tipus d'equacions es va definir un conjunt de nombres, els nombres

complexos, que vénen definits per l'expressió $z = a + bi$ on z és el nombre complex que ve en funció dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$; sent a la part real del nombre complex i b la seva part imaginària, i sent i la unitat imaginària equivalent a $\sqrt{-1}$.

L'expressió abans exposada, $z = a + bi$, s'anomena forma binòmia del complex però no és l'única forma d'expressar-los; per a poder multiplicar dos nombres complexos utilitzem la seva forma trigonomètrica.

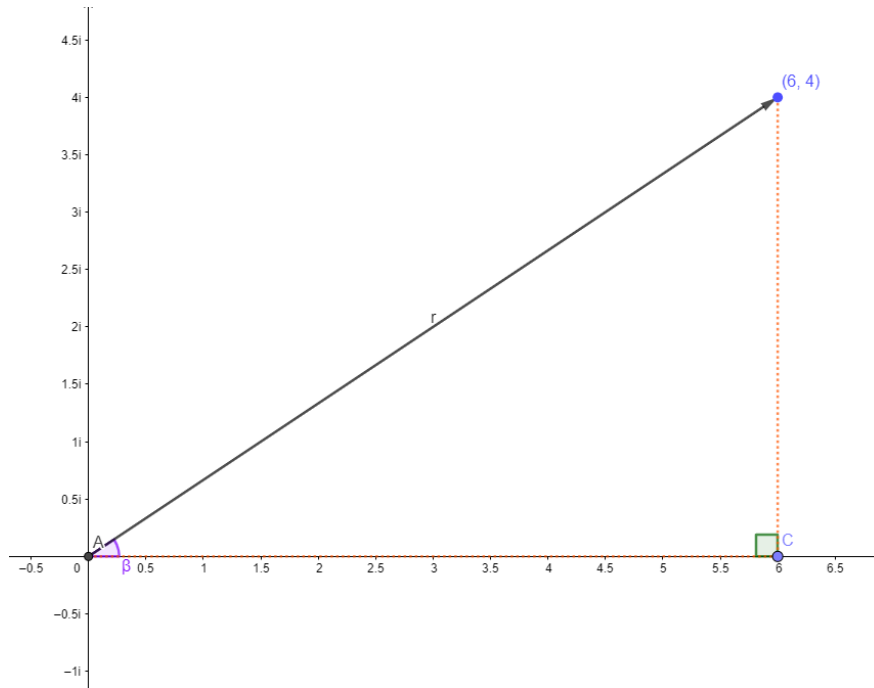


Figura 4.5: Relació trigonomètrica dels nombres complexos

Siguin $z_1 = a + bi = r \cos \alpha + r \sin \alpha i$ i $z_2 = c + di = s \cos \beta + s \sin \beta i$ dos nombres complexos expressats de forma trigonomètrica, el producte seria: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (rs \cos \alpha \cos \beta - rs \sin \alpha \sin \beta) + (rs \cos \alpha \sin \beta + rs \sin \alpha \cos \beta)i$.

Si apliquem les relacions trigonomètriques per a la suma de dos angles podem concloure que:

$$z_1 \cdot z_2 = rs[\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta)i]$$

Posteriorment, podem transformar el resultat obtingut en la forma polar, de tal manera que podem observar que

$$z_1 \cdot z_2 = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$$

- Geometria de la Iteració complexa

En la Iteració complexa lienal no ens podem ajudar de la iteració gràfica per a visualitzar l'òrbita d'un nombre complex. Hem de calcular els iterats de l'òrbita a partir

de la iteració algèbrica per posteriorment dibuixar-los en el pla complex i unir-los per mitjà de fletxes amb el sentit del nou iterat.

En la iteració d'una funció de tipus $f(z) = az$, sent, per exemple, $a = i$. Es tracta de la multiplicació del nombre z per la unitat imaginària i ; que en forma polar és 1_{90} . Per tant, com hem multiplicat el nombre complex z per la unitat imaginària, el mòdul inicial del producte és igual al mòdul del nombre complex z ; mentre que el seu angle va augmentant en 90 cada vegada, tal com es pot observar en la Figura 4.5.

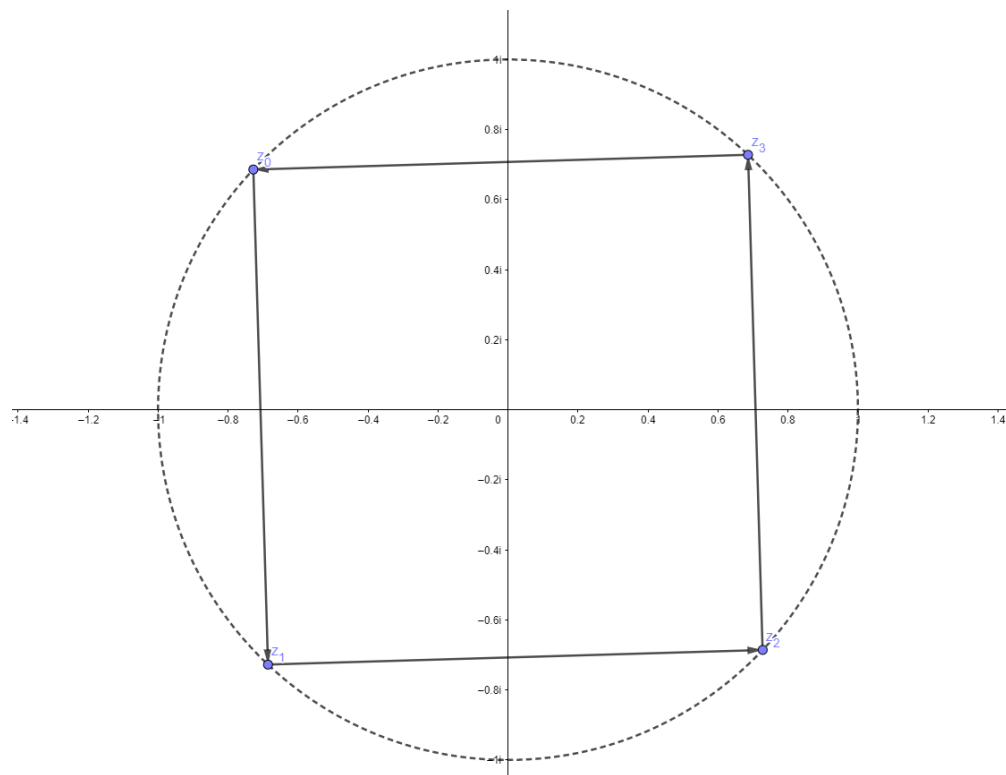


Figura 4.6: Iteració de $f(z) = zi$, observem que es manté en la circumferència de radi 1 i es duplica l'angle.

Si l'angle culpable de la rotació es tracta d'un nombre racional $\alpha = \frac{w}{T}$, com a l'exemple posat anteriorment, podem afirmar que l'òrbita realitzarà un cicle n -periòdic tal que w determinarà el valor de voltes necessàries abans de tancar el cicle i T determinarà el període de l'òrbita. En l'exemple anterior es tracta d'un cicle 4-periòdic que es tanca en la primera volta, ja que $\alpha = 90 = \frac{1}{4} \cdot 360$.

★ **Observació:** Teorema de Jacobi

També podem saber si una funció $f(z) = z^2 + k$ produeix un cicle n -periòdic per a un valor k si el paràmetre $k = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, ja que $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'òrbita de z_0 serà densa en la circumferència formada $\{|z_0| = |z|\}$.

Això ve explicat pel **Teorema de Jacobi**

Si prenem ara la regla d'iteració $f(z) = az = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$ on el mòdul de a és $r = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ i el seu argument $\alpha = 45$. Iterant la llavor $z_0 = 1$ som capaços d'observar com es produeix la rotació de 45 però com els iterats de l'òrbita cada vegada s'apropen més a l'origen de coordenades. Això és a causa del fet que és multiplicat cada vegada per un mòdul inferior a 1; és a dir, l'eix de coordenades actua com a punt atractor tal com s'observa a la Figura 4.6.

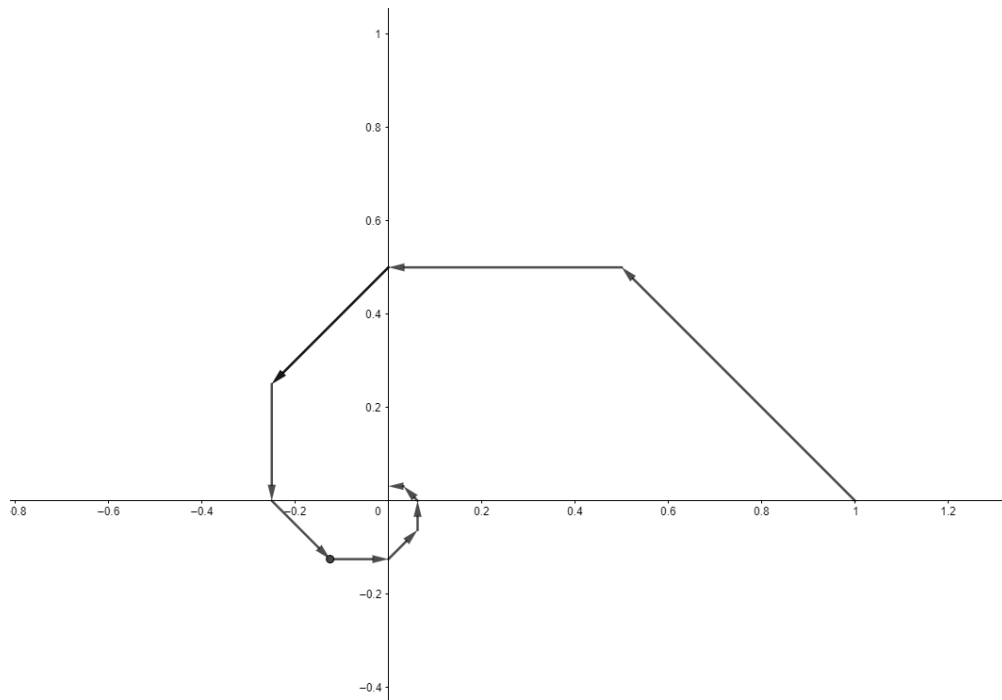


Figura 4.7: $f(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$ tendeix cap a un punt fix atractor a l'origen de coordenades

El cas contrari és pot aconseguir per a la regla d'iteració $f(z) = az = (1 + i)z$, on el mòdul de $a = \sqrt{2} > 1$ i on el seu argument $\alpha = 45$. Iterant també de la llavor $z_0 = 1$, s'observa que es produeix la mateixa rotació, 45, però que té l'efecte contrari en l'òrbita, ja que aquesta s'allunya de l'eix de coordenades al ser multiplicada repetidament per

un nombre major que 1, com es pot observar en la Figura 4.7.

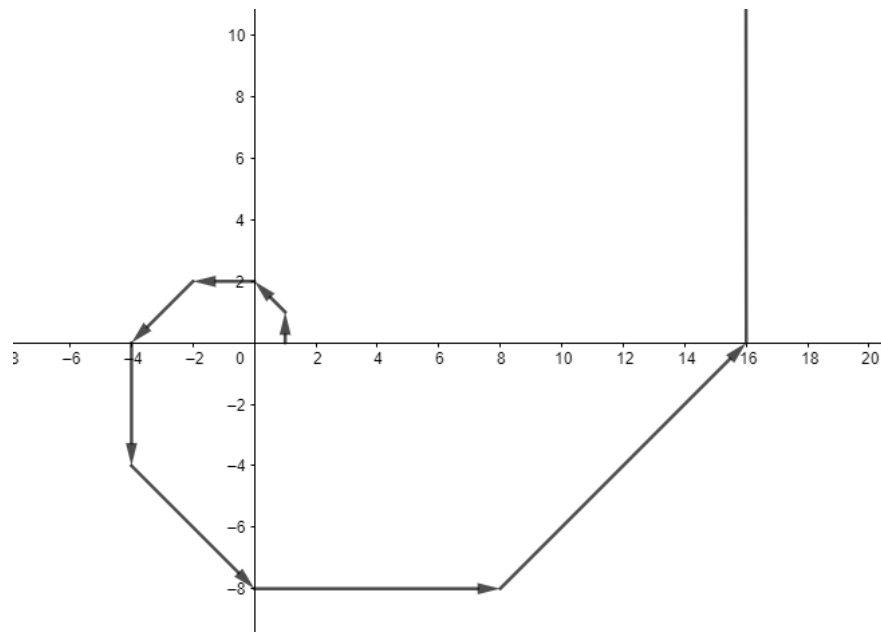


Figura 4.8: $f(z) = (1 + i)z$ tendeix cap a un punt fix repulsor a l'origen de coordenades

Ens adonem, per tant, que les òrbites que traçarà la funció depenen del valor de z_0 i de a ; és a dir, que com el punt fix és $z_0 = 0$, sempre que la llavor de l'òrbita no sigui 0 i el mòdul del valor anomenat a no sigui igual a 0 ($|a| \neq 0$) l'òrbita traçada dependrà estrictament del valor del mòdul de a de tal manera que si aquest és < 1 serà atractor i si és > 1 repulsor. En cas que $|a| = 1$ l'òrbita traçada és una circumferència.

4.2.3 Iteració complexa quadràtica

Es tracta d'iterar una funció complexa de variable complexa de grau dos; és a dir, iterar una funció de tipus $f(z) = z^2$, sent $z \in \mathbb{C}$

Geometria de la iteració

Tal com hem dit abans, una funció complexa de grau 2, $f(z) = z^2$, es pot expressar perfectament com $f(z) = z \cdot z$. D'aquesta manera podem observar com les propietats de la iteració complexa lineal també es poden aplicar en les quadràtiques.

Igual que en la iteració lineal, expressarem les llavors en la seva forma polar; $z = r_\alpha$, amb r

el seu mòdul i α el seu angle que forma amb l'eix d'abscisses.

Tal com vàrem explicar abans en l'apartat 4.2.2 en la pàgina 60, la multiplicació de dos nombres complexos és: $z_1 \cdot z_2 = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$. Té tal manera que quan $z_1 = z_2 = z$, el producte queda expressat d'aquesta forma: $z^2 = z \cdot z = r_{2\alpha}^2$. Així en les successives iteracions obtindrem, la següent òrbita:

$$z_0 = r_\alpha \mapsto z_1 = r_{2\alpha}^2 \mapsto z_2 = r_{4\alpha}^4 \mapsto z_3 = r_{8\alpha}^8$$

Per tant, deduïm que l'expressió general d'aquesta iteració en la seva forma polar és : $z_n = r_{2^n\alpha}^{2^n}$; i en la forma trigonomètrica: $z_n = r^{2^n}(\cos(2^n\alpha) + \sin(2^n\alpha)i)$.

Però, caldrà diferenciar el comportament entre les llavors de mòdul igual, menor i major a 1.

- Llavors de mòdul major a 1, $r > 1$

Les llavors de mòdul $r > 1$ corresponen als punts exteriors a la circumferència de radi 1. Com que el mòdul és major a 1, l'òrbita tendirà cap a infinit; és a dir, s'escaparà, ja que qualsevol nombre major a 1 al quadrat és sempre major al nombre original.

- Llavors de mòdul menor a 1, $r < 1$

Les llavors de mòdul $r < 1$ corresponen a punts interiors a la circumferència de radi 1. Al contrari de les de mòdul $r > 1$, que tendien a escapar, aquestes s'apropen cada vegada més al punt fixe al centre de coordenades.

- Llavors iguals a 0

En el cas concret que el mòdul sigui igual a 0; és a dir, que la llavor $z_0 = 0$, l'òrbita d'aquest sempre serà el punt 0, ja que $f(0) = 0^2 = 0$.

- Llavors de mòdul igual a 1, $r = 1$

Les llavors de mòdul $r = 1$ corresponen als punts pertanyents a la circumferència de radi 1 tal que el quadrat del mòdul d'aquestes llavors serà sempre $r^n = 1$ i, per tant, tots els punts de l'òrbita d'aquesta llavor romandran en la circumferència unitària.

En aquest cas es dona una rotació dels iterats al voltant de l'origen de coordenades que és determinat per l'angle α que es duplica en cada iteració.

Pel teorema fonamental de l'Àlgebra, sabem que tot polinomi de n coeficients reals

o complexos, té n possibles solucions complexes o arrels. Per això, en la iteració complexa, sempre existeixen punts inicials l'òrbita dels quals és m -periòdica; $\forall m \in \mathbb{R}$. Això és pel fet que qualsevol polinomi mitjançant el qual cerquem l'òrbita m -periòdica de la funció tindrà solució; és a dir, punts en el pla complex en l'òrbita de període m . En el cas de la iteració complexa quadràtica, $f(z) = z^2$, les òrbites periòdiques es donen únicament en la circumferència unitària, a excepció del punt fix $z = 0$. Per això, les anomenem revolucions.

Considerant el punt $z = 1$ com 0 revolucions, el punt $z = i$ com $\frac{1}{4}$ revolucions, el punt $z = -1$ com $\frac{1}{2}$ revolucions i el punt $z = -i$ com $\frac{3}{4}$ revolucions; podem esbrinar el comportament d'aquestes llavors en la circumferència unitària. De tal manera que prenent la llavor $z_0 = i$, o el que és equivalent, $\frac{1}{4}$ revolucions, observem una òrbita eventualment periòdica, explicades en la pàgina 49, al cap de dues iteracions, ja que en la iteració quadràtica l'angle sempre s'itera com 2α

$$\frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow 1 = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

★ **Observació** Cal destacar que quan l'angle cau en el punt $z = 1$ equivalent a 1 revolució, considerem que torna a 0 revolucions.

Troblem també que una òrbita 2-periòdica si prenem la llavor $\frac{1}{3}$ revolucions: $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \dots$. O una òrbita 3-periòdica si iniciem l'òrbita amb la llavor $\frac{3}{7}$ revolucions: $\frac{3}{7} \rightarrow \frac{6}{7} \rightarrow \frac{5}{7} \rightarrow \frac{3}{7} \rightarrow \frac{6}{7} \rightarrow \dots$

Per tant, les òrbites de les llavors seran m -periòdiques o eventualment periòdiques \Leftrightarrow el valor de la llavor es pot expressar com un nombre racional. En canvi, quan l'angle de les llavors de la circumferència unitària s'expressa mitjançant un nombre irracional, l'òrbita d'aquestes llavors no formarà cap cicle sinó que omplirà densament la circumferència unitària.

4.3 Anàlisi dels fractals complexos més coneguts

Una vegada explicat el funcionament de la iteració complexa, som capaços d'explicar la formació de diversos tipus de fractals complexos, així com el conjunt de Julia o el conjunt

de Mandelbrot.

4.3.1 Conjunt de Julia

El conjunt de Julia, anomenat en honor al matemàtic francès Gaston Julia, és una família de conjunts de nombres complexos de la funció $f(z) = z^2 + k$ en funció del paràmetre k .

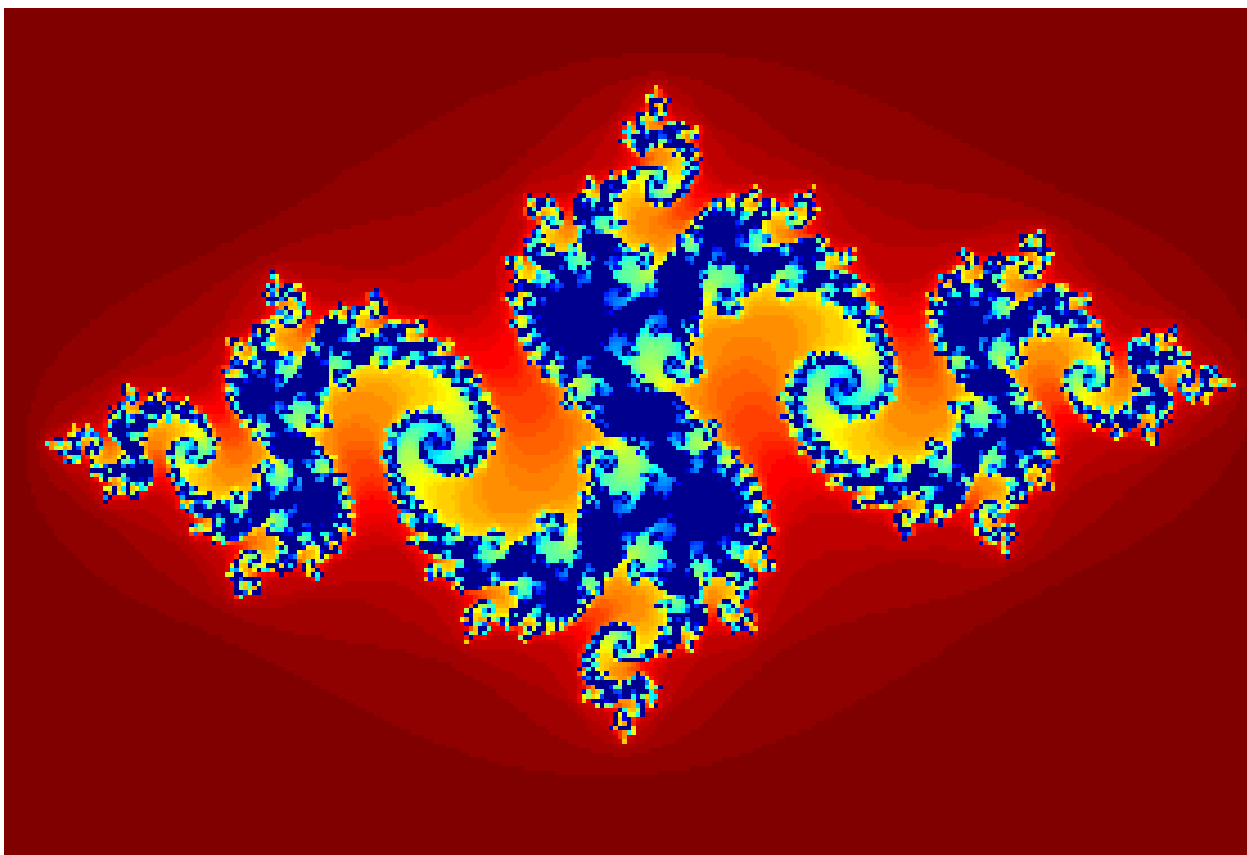


Figura 4.9: Representació del Conjunt de Julia

Com ja hem explicat anteriorment a l'apartat 4.2.1, les òrbites d'una funció complexa $f(z)$ es poden distingir segons com es comporten; és a dir, quina és la seva tendència: a formar cicles, escapar a l'infinit o a ser atret a un punt fix.

En funció d'aquestes tendències som capaços de distingir dos conjunts que, a la vegada, són complementaris.

- Conjunt de Julia ple

Un conjunt de Julia ple (K_f per a $f(z) = z^2$) és aquell que les òrbites de cada llavor z convergeixen a un punt fix atractor situat a l'interior de la circumferència unitària o

bé pertanyen o tendeixen a formar cicles n -periòdics.

Per tant, en aquest conjunt, les òrbites dels seus punts pertanyeran a l'interior de la circumferència unitària. Així, per a la funció $f(z) = z^2$, podem definir un conjunt K_f , i el conjunt de Julia ple corresponent, com:

$$K_f := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

En general, per a tota funció de la forma $f(z) = z^2 + k$, el conjunt de Julia ple s'expressa com:

$$K_f := \{z_0 \in \mathbb{C} \mid f_k^n(z_0) \not\rightarrow \infty \text{ quan } n \rightarrow \infty\}$$

En aquest cas, per a calcular el valor del mòdul de la llavor z_0 a partir del qual escaparà cap a infinit cal trobar el valor d'escapament $E(k)$ que definirem més endavant.

Si K_f compleix la seva definició, complirà també un seguit de propietats que mostren el seu caràcter fractal:

- K_f és compacte, no numerable i sense cap punt aïllat
- K_f és igual rere n iteracions $\Leftrightarrow k$ sigui constant ja que $K_f = K_f^n$ on $n \in \mathbb{N}$
- K_f és invariant per a $f(z)$ i $f^{-1}(z)$

• Conjunt de Julia

Un conjunt de Julia, J_f , es defineix com la frontera entre aquells punts que tenen òrbites que escapen a infinit i aquells que no.

Per tant, considerant J_f qualsevol conjunt de Julia de la funció $f(z) = z^2 + k$, definim aquest com:

$$J_f := \{z_0 \in \mathbb{C} \mid f_k^n \not\rightarrow \infty \text{ quan } n \rightarrow \infty \text{ on } \exists z'_0 \text{ adjacent a } z_0 / f_k^n(z'_0) \rightarrow \infty \text{ quan } n \rightarrow \infty\}$$

Per a expressar el comportament de les òrbites de les llavors en el Conjunt de Julia, és necessari introduir l'expressió de cada punt de la circumferència unitària en revolucions; ja esmentat anteriorment en l'apartat 4.2.3 a la pàgina 54.

Després d'iterar un nombre complex, si el valor de la revolució és major o igual al valor de la revolució abans d'iterar-ho, es reduirà el seu valor a una revolució equivalent

entre 0 i 1.

D'aquesta manera, si iterem la llavor $z_0 = i$ per a la funció $f(z) = z^2$, l'òrbita serà:

$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow 1 = 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

★ **Observació**

Aquesta òrbita es trobarà al punt $z = 1$; és a dir, a 0 revolucions. Per tant, tendirà a aquest punt fix.

Valor d'escapament

- **Calcul:**

El valor d'escapament $E(k)$ per a la funció $f(z) = z^2 + k$ indica per a quins valors de k la iteració d'aquesta funció escaparà a l'infinit i, per tant, no formarà part de Conjunt de Julia.

Definim el valor d'escapament com $E(k) := \max\{|k|, 2\}$; de forma que si $|k| > 2$ afirmem que $|f^n(z_0)| > E(k) \Rightarrow f_k^n(z) \rightarrow \infty$, l'òrbita escaparà a l'infinit.

Per tal de conèixer el valor d'escapament, $E(k)$, d'una funció $f(z) = z^2 + k$, hem de calcular el mòdul del paràmetre complex k , sent $k = a + bi$, $|k| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Depenent del valor del mòdul d'escapament trobem diferents valors d'escapament; és a dir:

- $|k| \leq 2 \Rightarrow 2$
- $|k| > 2 \Rightarrow |k|$

Observem, doncs, que el Conjunt de Julia pot estar contingut per una circumferència de radi 2 o bé per la circumferència de radi $|k|$, $\Leftrightarrow |k| > 2$.

Per tant, el valor d'escapament serà aquell valor del mòdul de k superior a 2 o, per defecte, 2.

- **Demostració**

Demostrarem en aquest apartat perquè la funció $f(z) = z^2 + k$, un punt escaparà a infinit quan aquest superi el valor d'escapament; és a dir, quan $|z_n| > E(k)$.

Partint de l'hipòtesis que z_n és un dels punts de l'òrbita d'una llavor i que $|z_n| > E(k)$.

Expressem la desigualtat triangular en la forma $|A + B| \geq |A| - |B|$, recordem que en tot moment representem un nombre complex com un triangle des de l'origen de coordenades.

Per tant, podem extrapolar:

$$|z_n^2 + k| \geq |z_n^2| - |k| \Rightarrow |z_n + 1| = |z_n^2 + k| \geq |z_n^2| - |k|$$

Si $|z_n| > E(k)$,

$$|z_n| > |k|, \text{ per tant, } -|z_n| < -|k|$$

Doncs:

$$|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |k| > |z_n|^2 - |z_n| = |z_n| \cdot (|z_n| - 1) \quad (*)$$

Sabent per definició que $|z_n| > 2$, deduïm de l'expressió anterior que $|z_n| - 1 > 1$.

Si expressem $D \sim (|z_n| - 1)$, que, necessàriament, $D > 1$; podem deduir de (*)

$$|z_{n+1}| > D \cdot |z_n|$$

Si $|z_{n+1}| > |z_n|$ per un factor $D > 1 \Rightarrow |z_{n+1}| \rightarrow \infty$.

També, podem demostrar que $|z_{n+2}| > D^2|z_n|$ pel mètode d'Inducció, explicat i demostrat més endavant.

En general, diem que:

$$|z_{n+k}| = D^k |z_n|$$

★ Observació

Observem que si $D > 1$, D^k creix de manera que $|z_{n+k}| \rightarrow \infty$. Per tant, l'òrbita de qualsevol llavor de mòdul que superi el valor d'escapament, escaparà a l'infinit.

D'igual manera, podem observar que si $D < 1$, D^k decreix de manera que $|z_{n+k}| \rightarrow 0$

• Demostració mitjançant el mètode d'Inducció

Demostrarem que $|z_{n+2}| > D^2|z_n|$ pel mètode d'Inducció:

Sabem que: $|z_{n+1}| > D \cdot |z_n|$

Ho anem a demostrar per a $n + 1$

$$|z_{n+1+1}| > D \cdot |z_{n+1}| \implies |z_{n+2}| > D \cdot D \cdot |z_n| = D^2|z_n|$$

Com que l'expressió és vàlida, podem concloure que hem demostrat que

$$|z_{n+k}| > D^k |z_n|$$

O en general

$$|z_{n+k}| = D^k |z_n|$$

4.3.2 Conjunt de Mandelbort

Com hem pogut observar en els apartats anteriors, podem diferenciar els fractals que s'obtenen a partir de la iteració de la funció $f(z) = z^2 + k$ en dos grups que depenen dels comportaments de les llavors del pla amb el paràmetre k : els fractals connexes (on l'òrbita crítica no escapa a l'infinit) i la pols fractal (aquells que l'òrbita si escapa a l'infinit).

El conjunt de Mandelbort és el conjunt de paràmetres k en que l'òrbita crítica de la iteració $f(z) = z^2 + k$ no escapa a l'infinit.

Per tant, podem definir el conjunt de Mandlbort com:

$$M := \{k \in \mathbb{C} \mid K_k \text{ és connex} \}$$

és a dir,

$$M := \{k \in \mathbb{C} \mid f_k^K(0) \not\rightarrow \infty\}$$

El Conjunt de Mandelbrot es troba dins de la circumferència de radi 2 que té com a centre l'origen de coordenades, tal com es pot observar a la figura 4.8.

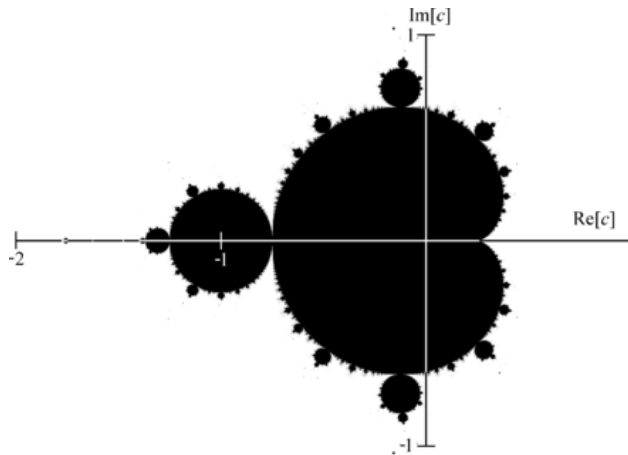


Figura 4.10: Conjunt de Mandelbort

També, observem com el Conjunt de Mandelbrot té simetria respecte a l'eix d'abscisses però no té simetria des de l'eix d'ordenades.

El Conjunt de Mandelbrot, està format per un cardioide principal, anomenat així perquè el seu límit és similar a la corba matemàtica cardioide.

Enganxades a la cardioide principal, trobem les components hiperbòliques, regions circular, definides posteriorment, de les quals sorgeixen moltes altres components hiperbòliques i antenes que, es toquen entre elles en un punt d'unió.

• Components hiperbòliques

Les components hiperbòliques estan caracteritzades perquè els punts del seu interior convergeixen al centre de la component, en comptes d'escapar a l'infinit.

El centre de la component hiperbòlica és el punt que té un període determinat tal que l'òrbita crítica del component en el punt retorna a 0; per tant, ha de ser periòdica o eventualment periòdica. En aquest punt la iteració de la funció $Q_k(z) = z^2 + k$ rere k iteracions s'expressa com $Q_k^t(0) = 0$.

El centre de cada component hiperbòlic es correspon al valor k tal que l'òrbita periòdica tractorsa de la funció $Q_k(z)$ té multiplicador $\mu = 0$ ja que un dels factors del producte μ és $|Q'_k(z_i)| = 2z_i = 0$ ja que $z_i = 0$, i essent μ com:

$$\mu = |Q'_k(z_0)| \cdot |Q'_k(z_1)| \cdot \dots \cdot |Q'_k(z_{t-1})| = \prod_{j=0}^{t-1} |Q'_k(z_j)|$$

Capítol 5

Conclusions i bibliografia

5.1 Conclusions

Com s’ha vist al llarg del nostre treball, hem volgut aprofundir en els aspectes més geomètrics i clàssics del món dels fractals, junt amb les matemàtiques necessàries per fer-ho. En un principi anàvem a centrar, exclusivament, el nostre treball en aquest tipus de fractals però, a mesura que avançàvem amb la nostra recerca, ens hem anat adonant que seria necessària la introducció dels fractals complexos.

El procés de redacció ha estat l’adequat, ja que hem pogut aprendre a utilitzar l’aplicació de LaTeX, junt amb altres eines i coneixements que ens han ajudat al desenvolupament del treball. En un principi se’ns va fer difícil treballar amb aquest nou programa, però ens hem adaptat correctament i hem tirat endavant. Junt amb això, hem enfocat el nostre projecte de la manera que teníem previst, i podem dir que estem molt orgullosos de la feina feta.

Hem pogut parlar de la història dels fractals i de molts d’ells en detall, al mateix temps que treballàvem en la programació i creació d’aquests. De la mateixa manera que vam tenir problemes amb el funcionament de LaTeX, l’inici no va ser senzill per la programació dels fractals, ja que requeríem de coneixements que no sabíem i vam haver d’investigar i practicar molt abans d’aconseguir resultats. També hem pogut entendre la importància de les matemàtiques al nostre dia a dia i, gràcies a això, hem obtingut una visió diferent del que ens rodeja i de la geometria que coneixem.

Al llarg del nostre treball, hem entès que no sempre sortirà tot com creiem, per molt bé que es planifiqui. Hi ha coses que no depenen de nosaltres, i hem hagut d'aprendre a adaptar-nos sobre la marxa. També ha sigut necessària la comunicació amb la Universitat de Barcelona, i el contacte amb un estudiant d'allà, el David Balbuena, el qual ens ha assessorat i ajudat tant en l'àmbit del treball com en el nostre creixement personal, ja que requeríem d'una certa professionalitat.

Clarament, el treball ha estat una experiència gratificant tot i el temps i esforços dedicats. Ha estat la primera vegada que hem treballat durant un termini tan llarg de temps, i podem dir, convençuts, que ha sortit bé. Com ja hem dit abans, han sorgit alguns inconvenients, però hem aconseguit afrontar-los i superar-los tots ells. Cal recalcar el gran esforç que ens ha suposat, sobretot cap a inicis de segon de Batxillerat, el fet de compaginar l'avanç del treball amb les assignatures escolars, ja que el nostre ritme a l'estiu va ser molt elevat i vam veure un gran canvi al retornar a fer classes. Així i tot, tot ha sortit molt bé i estem molt conformes amb els resultats.

5.2 Agraïments

El nostre treball de recerca ha estat supervisat per Pedro Román, a qui ens agradaria expressar el nostre agraïment, per a fer possible la realització d'aquest treball. A més, agrair la seva paciència i dedicació que ha tingut per ajudar-nos a fer que tot surti exitosament. Gràcies pel teu suport.

També volem agrair a dos membres de la UB. A la nostra coordinadora Nuria Fagella, per donar-nos la possibilitat de fer aquest treball, i al nostre tutor David Balbuena el qual ens ha estat indispensable per a l'assoliment del treball.

Per acabar, també volem agrair als nostres familiars i amics, els quals ens han donat suport durant aquest llarg trajecte, sense deixar-nos mai caure i estant sempre allà.

I, com no podia ser de cap altra manera, donem les gràcies a les matemàtiques i als fractals per ser, un altre cop, una font de coneixement i d'inspiració per a les nostres vides.

5.3 Bibliografia i Webgrafia

[CDF] J. Choate, R.L. Devaney, A. Foster. Fractals (A tool kit of dynamics activities). Key Curriculum Press 1999. ISBN 1-55953-355-2.

[FJ] N. Fagella i X. Jarque, Iteración Compleja y Fractales. Coed. Vicens Vives/ICE (UAB), 2007. col·lección enseñar y saber en el Siglo XXI.

[D] R.L.Devaney, A first course in Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley 1992.

[P] H.O.Peitgen, Dietmar Saupe, (editors), The Science of fractal images. Springer, 1988.

[B] M.F. Barnsley, Fractals everywhere. Academic Press, 1988.

[MF] <http://www.maia.ub.es/holodyn/mathfrac> Software Mathfrac creat per Christian Manes pel nostre grup. Amb aquest programa es poden explorar els fractals resultants d'un IFS.

[W1] <http://math.bu.edu/DYSYS> Web amb informació sobre fractals (i altres aspectes d'iteració) totalment adaptada a alumnes de secundària. Molts applets per a treballar. En anglès

[W2] Aplicacions dels fractals a la medicina Armengol Gasull.

<http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2016/v2016n05.pdf>

[W3] https://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/ Web amb informació sobre fractals geomètrics amb explicacions, exemples i programes.

Estudi de sistemes dinàmics en el pla complex

<http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/7.SDdiscretos>.

<https://www.geogebra.org/classic>

<http://www.maia.ub.es/holodyn/mathfrac/>

[http://metodos.fam.cie.uva.es/ latex/apuntes/apuntes2.pdf](http://metodos.fam.cie.uva.es/latex/apuntes/apuntes2.pdf)

[http://metodos.fam.cie.uva.es/ latex/curso-2015/apuntes3.pdf](http://metodos.fam.cie.uva.es/latex/curso-2015/apuntes3.pdf)