Fundamentos Físicos y Topológicos de los Circuitos Eléctricos: Una Síntesis Exhaustiva desde las Ecuaciones de Maxwell hasta la Homología Simplicial y las Fases Topológicas de la Materia

Introducción: La Convergencia de la Electrodinámica y la Topología Algebraica

La teoría de circuitos eléctricos se presenta tradicionalmente en la ingeniería y la física aplicada como un conjunto pragmático de reglas algebraicas —las leyes de Kirchhoff— que permiten predecir el comportamiento de redes interconectadas de componentes pasivos y activos. Sin embargo, esta visión utilitaria, aunque efectiva para el diseño cotidiano, oscurece la profunda y elegante estructura matemática y física que subyace a estos sistemas. Un circuito eléctrico no es simplemente una colección de cables y dispositivos; es, en su esencia más fundamental, una manifestación física de la topología algebraica operando bajo las restricciones de la electrodinámica clásica.

Esta investigación tiene como objetivo desentrañar, con un nivel de detalle exhaustivo, los fundamentos que conectan las ecuaciones de campo de Maxwell con la teoría de grafos y la homología simplicial. A diferencia de los enfoques convencionales que tratan estas disciplinas por separado, este informe demuestra que las leyes de conservación física (carga y energía) son indistinguibles de las identidades topológicas (bordes de bordes son cero). Al explorar estas conexiones, no solo se proporciona una base rigurosa para la teoría clásica de circuitos, sino que se iluminan nuevas fronteras de la investigación moderna, como los "circuitos topolectrícos", que emulan fases exóticas de la materia como los aislantes topológicos y los semimetales de Weyl, permitiendo manipular la propagación de señales mediante principios geométricos robustos inmunes al desorden local.

A lo largo de este documento, transitaremos desde el continuo del espacio-tiempo, regido por operadores diferenciales y campos vectoriales, hacia el mundo discreto de los complejos simpliciales, regido por matrices de incidencia y grupos de cohomología. Se analizará cómo la aproximación de elementos concentrados surge como un límite de baja frecuencia de la teoría de campos, y cómo, al romperse esta aproximación, la topología del circuito debe redefinirse o enriquecerse para capturar fenómenos de retardo y radiación. Asimismo, se examinará el papel de la métrica —introducida a través de las relaciones constitutivas de los componentes— como el puente que une el espacio de las corrientes (homología) con el espacio de los voltajes (cohomología), culminando en una apreciación del Teorema de

Tellegen como una verdad topológica universal.

Capítulo 1: Fundamentación Electrodinámica y el Límite Cuasi-Estático

Para comprender la naturaleza de un circuito eléctrico, primero debemos reconocerlo como una simplificación de la realidad electromagnética. Las ecuaciones de Maxwell describen la interacción de campos eléctricos ($\mathbf{E}$) y magnéticos ($\mathbf{B}$) en el espacio y el tiempo. La transición de estas ecuaciones de derivadas parciales a las ecuaciones diferenciales ordinarias de la teoría de circuitos implica una serie de suposiciones críticas sobre la escala temporal y espacial de los fenómenos observados.

1.1 La Derivación Rigurosa de la Ley de Corrientes de Kirchhoff (KCL)

La Ley de Corrientes de Kirchhoff (KCL), que establece que la suma algebraica de las corrientes que entran a un nodo es cero, se deriva fundamentalmente de la conservación de la carga eléctrica. Sin embargo, su validez en el contexto de circuitos de elementos concentrados requiere un examen minucioso de la ecuación de continuidad y el tratamiento de la corriente de desplazamiento.

Partimos de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Donde $\mathbf{D}$ es el desplazamiento eléctrico, $\mathbf{H}$ es la intensidad de campo magnético, $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente de conducción y ρ es la densidad de carga libre. Tomando la divergencia de la ley de Ampère-Maxwell ($\nabla \times \mathbf{H}$), y utilizando la identidad vectorial $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, obtenemos:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t}$$

Sustituyendo la ley de Gauss ($\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$), llegamos a la ecuación de continuidad de la carga:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Esta ecuación establece que cualquier divergencia en el flujo de corriente de conducción $\mathbf{J}$ debe ser compensada por una tasa de cambio en la densidad de carga local ρ. En un circuito idealizado, un "nodo" es un punto matemático sin volumen, o un volumen de control extremadamente pequeño donde se unen conductores. Si integramos la ecuación de continuidad sobre un volumen V que encierra el nodo y aplicamos el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = -\frac{dQ_{encerrada}}{dt}$$

La formulación clásica de KCL afirma que $\sum I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$. Esto implica necesariamente que $dQ_{encerrada}/dt = 0$. Es decir, para que KCL sea válida en su forma estricta, no puede haber acumulación neta de carga en el nodo.[1]

1.1.1 El Problema de la Corriente de Desplazamiento y la "Corriente Total"

En la realidad física, especialmente a altas frecuencias o en materiales dieléctricos, $\partial \rho / \partial t$ no es cero. Los capacitores funcionan precisamente acumulando carga. ¿Cómo reconcilia la teoría de circuitos esta contradicción aparente? Lo hace redefiniendo el concepto de "corriente" dentro de los componentes.

Como señalan Eisenberg et al. [2], la "verdadera" corriente que es solenoidal (tiene divergencia cero siempre) es la corriente total de Maxwell $\mathbf{J}_{total}$, que incluye la corriente de desplazamiento:

$$\mathbf{J}_{total} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Donde $\mathbf{P}$ es la polarización del medio. Al tomar la divergencia de esta corriente total:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{total} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$$

Esto significa que la corriente total $\mathbf{J}_{total}$ siempre fluye en bucles cerrados; no tiene fuentes ni sumideros. La teoría de circuitos de parámetros concentrados "salva" la KCL al encapsular todas las regiones donde $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$ (donde hay acumulación de carga) dentro de componentes llamados capacitores. Dentro del capacitor, la corriente de conducción se detiene, pero la corriente de desplazamiento toma el relevo, manteniendo la continuidad de $\mathbf{J}_{total}$ a través del componente. Así, el terminal del capacitor "ve" una corriente que entra igual a la que sale, preservando KCL en los nodos externos del circuito topológico.[2]

Tabla 1.1: Comparación entre Corrientes en Teoría de Campos vs. Teoría de Circuitos

Concepto	**Teoría de Campos (Maxwell)**	**Teoría de Circuitos (Lumped)**
Variable Fundamental	Densidad de Corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$	Intensidad de Corriente $I(t)$
Conservación	Ecuación de Continuidad $\nabla \cdot \mathbf{J} + \dot{\rho} = 0$	Ley de Corrientes de Kirchhoff $\sum I_k = 0$
Acumulación de Carga	Permitida en cualquier punto del espacio	Confinada exclusivamente dentro de capacitores
Corriente de	$\frac{\partial	Modelada como corriente a

Desplazamiento	\mathbf{D}}{\partial t}$, distribuida en el espacio	través de C: $I = C \frac{dV}{dt}$
Rango de Validez	Universal	$\lambda \gg L$ (Longitud de onda $\gg$ Tamaño del circuito)

1.2 La Derivación Rigurosa de la Ley de Voltajes de Kirchhoff (KVL)

La Ley de Voltajes de Kirchhoff (KVL) establece que la suma algebraica de las diferencias de potencial (voltajes) alrededor de cualquier lazo cerrado en un circuito es cero. Su origen físico reside en la Ley de Faraday de la inducción y la naturaleza conservativa del campo electrostático.
La forma integral de la ley de Faraday establece:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Donde C es un contorno cerrado (el lazo del circuito) y S es la superficie delimitada por C. La KVL clásica afirma que $\sum V = 0$, lo que implica que la integral de línea del campo eléctrico debe ser cero. Esto solo ocurre si el término magnético $d\Phi_B/dt$ es despreciable a través del lazo que forman los cables de conexión.[1]

1.2.1 El Potencial Escalar y la Aproximación Cuasi-Estática

Para definir el "voltaje" de manera inequívoca entre dos nodos a y b, el campo eléctrico debe poder expresarse como el gradiente de un potencial escalar ϕ:

$$\mathbf{E} \approx -\nabla \phi \implies V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi(a) - \phi(b)$$

Esta definición requiere que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ en la región de los conductores. Sin embargo, en presencia de campos magnéticos variables ($\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$), el rotacional de $\mathbf{E}$ no es cero. La teoría de circuitos resuelve esto mediante una separación espacial rigurosa:

1. **Región Inductiva:** Se asume que todo el flujo magnético variable significativo está confinado dentro de componentes específicos (inductores). Dentro de estos componentes, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$, lo que genera una fuerza electromotriz (FEM) que se modela como una caída de voltaje $V_L = L \cdot dI/dt$.
2. **Región Externa:** Fuera de los inductores (en los cables y resistencias), se asume que el flujo magnético es despreciable. Por lo tanto, en estas regiones el campo es conservativo y el concepto de potencial nodal ϕ es válido.[5]

Si esta separación espacial falla —por ejemplo, si un bucle de cable grande capta interferencia magnética externa o si el circuito opera a frecuencias tan altas que los cables actúan como antenas—, la KVL deja de ser válida en su forma simple. En tales casos, el voltaje entre dos puntos depende de la trayectoria elegida para medirlo, rompiendo la unicidad del potencial nodal.

1.3 Límites de la Teoría de Circuitos: Escalas Temporales y Espaciales

La validez del modelo de elementos concentrados está intrínsecamente ligada a la velocidad de la luz c. Cuando una señal electromagnética se propaga por un circuito, tarda un tiempo finito $\Delta t \approx L/c$ en recorrerlo, donde L es la dimensión física del circuito.

- **Régimen de Elementos Concentrados:** Si el periodo de la señal $T = 1/f$ es mucho mayor que el tiempo de tránsito ($T \gg L/c$), entonces la fase de la señal es prácticamente constante en todo el circuito en un instante dado. El circuito se comporta como un sistema instantáneo. Esto equivale a decir que la dimensión del circuito es mucho menor que la longitud de onda ($\lambda = c/f$): $L \ll \lambda$.
- **Régimen de Elementos Distribuidos:** Cuando $L \sim \lambda$ (como en líneas de transmisión de energía a larga distancia o circuitos de microondas en GHz), las diferencias de potencial varían significativamente a lo largo de un conductor. Un cable ya no es un equipotencial; se convierte en un componente complejo con inductancia y capacitancia distribuidas. Aquí, las ecuaciones de Maxwell (o las ecuaciones del telegrafista) deben usarse directamente, y la topología simple de grafos de KCL/KVL debe expandirse para incluir la dimensión espacial continua.[4]

Capítulo 2: Fundamentos Matemáticos - Teoría de Grafos y Complejos Simpliciales

Una vez establecidas las bases físicas y sus aproximaciones, podemos abstraer el circuito a su estructura matemática pura. La herramienta adecuada para esto es la **topología algebraica**, específicamente la teoría de grafos y la homología simplicial. Un circuito, despojado de sus materiales, es un grafo: una colección de puntos (nodos) y líneas (ramas) que los conectan.

2.1 Definición Formal del Grafo del Circuito

Consideremos un circuito eléctrico representado por un grafo dirigido $G = (V, E)$, donde:

- $V = \{v_1, v_2,..., v_n\}$ es el conjunto de n vértices o nodos.
- $E = \{e_1, e_2,..., e_b\}$ es el conjunto de b aristas o ramas orientadas.

Cada rama e_k tiene una orientación asignada arbitrariamente (la dirección de referencia para la corriente). Si e_k conecta el nodo u con el nodo v, escribimos $e_k = (u, v)$.

2.2 Matrices Topológicas Fundamentales

La conectividad del grafo se codifica algebraicamente mediante matrices que actúan como operadores lineales entre los espacios vectoriales definidos sobre V y E.

2.2.1 La Matriz de Incidencia (A)

La matriz de incidencia nodo-rama A es una matriz de tamaño $n \times b$. Es la representación matricial del **operador borde** (∂) en topología. Sus elementos a_{ij} se definen como [6]:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si la rama } j \text{ sale del nodo } i \\ -1 & \text{si la rama } j \text{ entra al nodo } i \\ 0 & \text{si la rama } j \text{ no incide en el nodo } i \end{cases}$$

(Nota: La convención de signos puede variar, pero la lógica de conservación se mantiene. Aquí usamos +1 para salir, -1 para entrar).

Esta matriz captura completamente la topología del grafo. Una propiedad fundamental es que la suma de cada columna es cero (cada rama tiene un inicio y un fin). Esto implica que las filas son linealmente dependientes; si sumamos todas las filas, obtenemos el vector cero. Por tanto, el rango de A para un grafo conexo es $n-1$.

2.2.2 La Matriz de Lazos o Ciclos (B)

Esta matriz captura la estructura de los bucles cerrados en el grafo. Si definimos un conjunto de lazos fundamentales (basados en un árbol generador), la matriz B de tamaño $l \times b$ (donde l es el número de lazos independientes) tiene entradas:

$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si la rama } j \text{ está en el lazo } i \text{ con la misma orientación} \\ -1 & \text{si la rama } j \text{ está en el lazo } i \text{ con orientación opuesta} \\ 0 & \text{si la rama } j \text{ no está en el lazo } i \end{cases}$$

Una propiedad crucial de la topología de circuitos es la ortogonalidad entre la matriz de incidencia y la matriz de lazos:

$$A \cdot B^T = 0 \quad \text{y} \quad B \cdot A^T = 0$$

Esto refleja algebraicamente el hecho geométrico de que un lazo cerrado no tiene "borde" (no termina en ningún nodo).8

2.3 Espacios Vectoriales Asociados al Grafo

Podemos definir espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ asociados a los elementos del grafo. Esto nos permite usar el álgebra lineal para describir el estado del circuito.

- **Espacio de Nodos (0-cadenas, C_0):** El espacio vectorial de dimensión n, donde cada componente corresponde a un valor asignado a un nodo.
- **Espacio de Ramas (1-cadenas, C_1):** El espacio vectorial de dimensión b, donde cada componente corresponde a un valor asignado a una rama.

Las corrientes y voltajes son vectores que viven en estos espacios o en sus espacios duales, como veremos al introducir la cohomología.

Capítulo 3: Homología Simplicial y las Leyes de Kirchhoff

La homología es la rama de la topología que estudia los "agujeros" de un objeto mediante el análisis de sus ciclos y fronteras. En el contexto de un circuito eléctrico, la homología explica la estructura de las corrientes que circulan por la red.

3.1 El Complejo de Cadenas

Un circuito se puede ver como un complejo simplicial de dimensión 1. Construimos una secuencia de espacios vectoriales y operadores lineales llamada **complejo de cadenas**:

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

- ∂_1 es el operador borde que mapea ramas a nodos. Su matriz es la matriz de incidencia A.

  $$\partial_1(e_j) = \text{nodo\_final} - \text{nodo\_inicial}$$
- ∂_2 mapearía "caras" (2-celdas) a lazos de ramas. En un grafo plano, estas caras corresponden a las mallas del circuito.

3.2 El Espacio de Ciclos y la Ley de Corrientes (KCL)

La Ley de Corrientes de Kirchhoff (KCL) establece que la suma de corrientes en cualquier nodo es cero. Si representamos las corrientes en las ramas como un vector $\mathbf{i} \in C_1$ (una 1-cadena), aplicar el operador borde ∂_1 calcula la divergencia neta en cada nodo:

$$\mathbf{j}_{net} = A \mathbf{i}$$

La condición KCL exige que $\mathbf{j}_{net} = \mathbf{0}$. En lenguaje homológico, esto significa que el vector de corrientes $\mathbf{i}$ debe pertenecer al **núcleo** (kernel) del operador borde:

$$\text{KCL} \iff \mathbf{i} \in \text{Ker}(\partial_1)$$

Los elementos de $\text{Ker}(\partial_1)$ se llaman **1-ciclos**. Por lo tanto, **las corrientes físicas admisibles son ciclos topológicos**. No tienen inicio ni fin; fluyen en bucles cerrados. El espacio vectorial de todas las corrientes posibles que satisfacen KCL se llama **Espacio de Ciclos** (Z_1). Su dimensión, conocida como el **número de ciclotomía** o primer número de Betti (β_1), está dada por la característica de Euler:

$$\dim(Z_1) = \beta_1 = |E| - |V| + k$$

Donde k es el número de componentes conexas (usualmente 1). Esta dimensión nos dice exactamente cuántas corrientes de malla independientes (o lazos) necesitamos para describir el estado del circuito.9

3.3 Homología H_1 y Corrientes de Malla

El grupo de homología $H_1(G)$ se define formalmente como el cociente entre los ciclos y los bordes:

$$H_1(G) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)}$$

En un grafo simple (sin superficies 2D rellenas), $\text{Im}(\partial_2) = 0$, por lo que $H_1(G)$ es isomorfo al espacio de ciclos Z_1. Los generadores de este grupo de homología corresponden a los lazos independientes del circuito.

Cuando realizamos el **análisis de mallas**, estamos eligiendo una base para el grupo de homología H_1. Asignamos una "corriente de malla" a cada generador del grupo. La corriente física real en cualquier rama es entonces una superposición lineal de estas corrientes homológicas abstractas. Esta es la razón matemática profunda por la cual el método de corrientes de malla garantiza automáticamente el cumplimiento de KCL.

Capítulo 4: Cohomología y el Espacio de Voltajes

Si la homología trata sobre corrientes y ciclos, su dual, la **cohomología**, trata sobre potenciales y diferencias de potencial. Es aquí donde la Ley de Voltajes de Kirchhoff (KVL) encuentra su formulación natural.

4.1 Cadenas y Co-cadenas: La Distinción Física

En física matemática, es crucial distinguir entre cantidades extensivas (como la corriente, que se integra sobre una superficie o corte) y cantidades intensivas (como el voltaje, que se integra a lo largo de una línea).

- Las corrientes son objetos contravariantes (vectores, cadenas).
- Los voltajes son objetos covariantes (covectores, formas diferenciales, co-cadenas).

Definimos los espacios de co-cadenas como los espacios duales de las cadenas:

- $C^0 = (C_0)^*$: Espacio de funciones sobre los nodos (Potenciales ϕ).
- $C^1 = (C_1)^*$: Espacio de funciones sobre las ramas (Voltajes v).

4.2 El Operador Co-borde y KVL

El operador co-borde d (o δ) es el dual del operador borde. Mapea potenciales (0-cocadenas) a voltajes (1-cocadenas).

Si $\phi \in C^0$ es un vector de potenciales nodales, la operación co-borde $d\phi$ genera las diferencias de potencial a través de las ramas. Matricialmente, este operador corresponde a la transpuesta de la matriz de incidencia, A^T.

$$\mathbf{v}_{potencial} = A^T \phi$$

Para una rama que va del nodo i al j, esto calcula $(A^T \phi)_k = \phi_i - \phi_j$.
La Ley de Voltajes de Kirchhoff (KVL) establece que la suma de voltajes alrededor de cualquier lazo es cero. Esto es equivalente a decir que el vector de voltajes $\mathbf{v}$ debe ser un co-borde exacto.
En el lenguaje de la cohomología de De Rham discreta:

$$\text{KVL} \iff \mathbf{v} \in \text{Im}(d_0)$$
Esto significa que el voltaje no es arbitrario; debe derivarse de un potencial escalar subyacente.
Si consideramos un vector de voltajes arbitrario $\mathbf{v}$, su "rotacional" discreto debe ser cero. Si definimos un operador co-borde de orden superior d_1 que suma voltajes alrededor de las mallas, entonces la condición KVL es:

$$d_1 \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} \in \text{Ker}(d_1)$$
La relación fundamental de la cohomología, $d^2 = 0$ (o $d_1 d_0 = 0$), implica que $\text{Im}(d_0) \subseteq \text{Ker}(d_1)$.

- **Exactitud:** Todo voltaje derivado de un potencial ($\text{Im } d_0$) tiene suma de lazo cero ($\text{Ker } d_1$).
- El primer grupo de cohomología $H^1(G) = \text{Ker}(d_1) / \text{Im}(d_0)$ mide la obstrucción para que un campo de voltajes conservativo (suma cero en lazos) pueda derivarse de un potencial. Para un circuito convencional en una región simplemente conexa, $H^1 = 0$, lo que confirma que KVL implica la existencia de potenciales nodales bien definidos.[11]

4.3 Interpretación de H^0 y H^1 en Contexto Físico

- **$H^0(G)$ (Cohomología de grado 0):** Representa las funciones localmente constantes en el grafo. Su dimensión, el número de Betti β_0, cuenta el número de componentes conexas. Si el circuito es una sola pieza conexa, $\dim(H^0) = 1$. Esto refleja físicamente que el potencial eléctrico tiene una "libertad de gauge": podemos sumar una constante arbitraria a todos los potenciales nodales sin cambiar los voltajes físicos (diferencias). El "tierra" o referencia del circuito es esencialmente fijar este grado de libertad cohomológico.[13]
- **$H^1(G)$ (Cohomología de grado 1):** Como se mencionó, en un circuito ideal sin flujos magnéticos externos variables, este grupo es trivial. Sin embargo, si un flujo magnético variable atraviesa un lazo del circuito (como en un transformador o un anillo superconductor con flujo atrapado), el campo eléctrico deja de ser irrotacional ($\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$). En este caso, $H^1 \neq 0$. El voltaje medido depende del camino. La cohomología detecta este flujo magnético topológico que impide definir un potencial escalar único y global.[12]

Capítulo 5: Dualidad, Ortogonalidad y el Teorema de

Tellegen

La síntesis de las perspectivas homológica (corrientes) y cohomológica (voltajes) revela una estructura dual perfecta que da lugar al principio de conservación de la potencia.

5.1 Espacios Ortogonales

El **Teorema Fundamental del Álgebra Lineal** aplicado a la matriz de incidencia A nos ofrece una descomposición del espacio de variables del circuito $\mathbb{R}^b$ (espacio de ramas) [6]:

1. **Espacio Nulo de A ($\text{Ker } A$):** El espacio de ciclos. Aquí viven todas las corrientes que cumplen KCL.
2. **Espacio Fila de A ($\text{Im } A^T$):** El espacio de cortes. Aquí viven todos los voltajes que cumplen KVL (que derivan de potenciales).

Estos dos espacios son complementos ortogonales en $\mathbb{R}^b$.

5.2 El Teorema de Tellegen como Invariante Topológico

El Teorema de Tellegen establece que para cualquier circuito, la suma de las potencias instantáneas absorbidas por todas las ramas es cero:

$$\sum_{k=1}^b v_k i_k = 0$$

O en notación vectorial: $\mathbf{v}^T \mathbf{i} = 0$.

Demostración Topológica:

Sabemos que las corrientes físicas $\mathbf{i}$ pertenecen a $\text{Ker}(A)$, es decir, $A\mathbf{i} = \mathbf{0}$.

Sabemos que los voltajes físicos $\mathbf{v}$ pertenecen a $\text{Im}(A^T)$, es decir, existe un vector de potenciales nodales $\mathbf{e}$ tal que $\mathbf{v} = A^T \mathbf{e}$.

Sustituyendo $\mathbf{v}$ en la expresión de la potencia:

$$P = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = (A^T \mathbf{e})^T \mathbf{i} = \mathbf{e}^T (A \mathbf{i})$$

Dado que $A\mathbf{i} = \mathbf{0}$ por KCL:

$$P = \mathbf{e}^T (\mathbf{0}) = 0$$

Esta demostración es profunda porque **no depende de las relaciones constitutivas** de los componentes (Ley de Ohm, ecuaciones de capacitores, etc.). Es válida para componentes lineales, no lineales, variantes en el tiempo o con histéresis. Depende única y exclusivamente de la topología de conexión (KCL y KVL). Es una propiedad estructural de la ortogonalidad entre ciclos y co-bordes.[14]

Tabla 5.1: Resumen de la Estructura Topológica de Tellegen

Dominio	Variable	Espacio Vectorial	Condición Topológica
Homología	Corriente $\mathbf{i}$	Z_1 (Ciclos)	$A \mathbf{i} = 0$ (KCL)
Cohomología	Voltaje $\mathbf{v}$	B^1 (Co-bordes)	$\mathbf{v} = A^T

			\mathbf{e}$ (KVL)
Producto	Potencia P	Escalar	$\langle \mathbf{v}, \mathbf{i} \rangle = 0$

5.3 El Método de Proyección de Weyl

En 1923, Hermann Weyl reformuló el problema de resolver un circuito como un problema de proyección ortogonal. Supongamos que tenemos un circuito resistivo con fuentes de voltaje $\mathbf{v}_s$. La Ley de Ohm impone $\mathbf{v} = R \mathbf{i} + \mathbf{v}_s$. Queremos encontrar una corriente $\mathbf{i}$ que cumpla KCL ($A\mathbf{i}=0$) y un voltaje $\mathbf{v}$ que cumpla KVL ($\mathbf{v} = A^T \mathbf{e}$).
Weyl mostró que esto equivale a descomponer el vector de fuentes $\mathbf{v}_s$ en dos componentes ortogonales (bajo una métrica ponderada por la resistencia): una que excita corrientes cíclicas y otra que establece diferencias de potencial. Este enfoque geométrico anticipó los métodos modernos de elementos finitos y la teoría de Hodge discreta.[16]

Capítulo 6: El Enfoque de Bamberg y Sternberg y el Cálculo Exterior Discreto

En su influyente obra "A Course in Mathematics for Students of Physics" [17], Bamberg y Sternberg desarrollan una formalización rigurosa de la teoría de circuitos utilizando el lenguaje del cálculo exterior, tratando las variables eléctricas como formas diferenciales discretas.

6.1 Variables como Formas Diferenciales

En este marco, las cantidades físicas se clasifican según cómo se integran en el complejo simplicial (nodos, líneas, superficies):

- **Potencial (ϕ):** Es una **0-forma**. Se evalúa en puntos (nodos).
- **Voltaje (v):** Es una **1-forma exacta**. Se integra a lo largo de líneas (ramas). $v = -d\phi$.
- **Corriente (I):** Aunque comúnmente se trata como un escalar en circuitos, topológicamente es dual a una **1-forma** (o una $(n-1)$-forma en dimensiones superiores, integrada sobre una superficie de corte). En circuitos planos 2D, las corrientes de malla pueden verse como **2-formas** asociadas a las caras.

6.2 El Operador Estrella de Hodge Discreto

La relación constitutiva (Ley de Ohm, $V = IR$) conecta el mundo de las formas de voltaje con el mundo de las formas de corriente. En geometría diferencial, la operación que mapea k-formas a $(n-k)$-formas es el **operador Estrella de Hodge** ($\star$).
En un circuito:

- El voltaje es una co-cadena (asociada a la geometría y KVL).

- La corriente es una cadena (asociada a la topología y KCL).
- La resistencia (o impedancia) actúa como la métrica que define el operador estrella discreto:

  $$\mathbf{v} = \star_R \mathbf{i}$$

Aquí, $\star_R$ es una matriz diagonal que contiene las resistencias de las ramas. Este operador introduce la métrica del material en la estructura topológica pura. Mientras KCL y KVL son leyes topológicas (válidas en cualquier métrica), la Ley de Ohm es una ley geométrica/material.

6.3 Derivación Topológica de las Ecuaciones de Maxwell

Bamberg y Sternberg llevan esta analogía más allá, demostrando que si se considera un complejo de circuitos 4-dimensional (espacio-tiempo), las leyes de circuitos discretas convergen a las ecuaciones de Maxwell completas en el límite continuo.

- La ley $dF = 0$ (Identidad de Bianchi) corresponde a las leyes homogéneas de Maxwell (Gauss magnética y Faraday).
- La ley $d \star F = J$ corresponde a las leyes inhomogéneas (Gauss eléctrica y Ampère).

Este enfoque revela que los circuitos son, de hecho, una discretización natural de la geometría del electromagnetismo, preservando las estructuras de cohomología incluso a nivel macroscópico.

Capítulo 7: Circuitos Topolectrícos y Fases de la Materia

En la última década, la intersección entre la teoría de circuitos y la topología ha dado un giro revolucionario con la aparición de los "circuitos topolectrícos" (Topolectrical Circuits). Estos sistemas utilizan redes periódicas de inductores y capacitores para simular Hamiltonianos que describen fases exóticas de la materia cuántica.

7.1 La Analogía Hamiltoniano-Laplaciano

En mecánica cuántica, la dinámica de un electrón en una red cristalina se describe mediante la ecuación de Schrödinger: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$.
En un circuito LC, la dinámica está regida por la ecuación de Kirchhoff: $I = C \frac{dV}{dt} + \frac{1}{L} \int V dt$.
En el dominio de la frecuencia ($I = Y(\omega) V$), la matriz de admitancia del circuito $Y(\omega)$ juega un papel análogo al Hamiltoniano H.

$$J(\omega) = i\omega C + Y(\omega)$$

Donde J es el Laplaciano del circuito. Los valores propios de este Laplaciano corresponden a las energías del sistema cuántico simulado, y los vectores propios corresponden a las funciones de onda.19

7.2 Simulación de Aislantes Topológicos y el Modelo SSH

El modelo de Su-Schrieffer-Heeger (SSH) es el ejemplo más simple de una fase topológica. Describe una cadena 1D de átomos con enlaces alternados fuertes y débiles.
En un circuito, esto se implementa alternando capacitores de dos valores diferentes, C_1 y C_2, a lo largo de una línea de nodos.
Dependiendo de la relación C_1/C_2, el circuito puede estar en una fase "trivial" o "topológica".

- **Fase Topológica:** Se caracteriza por la aparición de **estados de borde** (edge states) a frecuencia cero (o resonancia media). Estos estados están exponencialmente localizados en los extremos del circuito y son robustos contra perturbaciones en los componentes internos.
- El número de devanado (winding number) o la fase de Berry del circuito actúa como el invariante topológico que protege estos estados.

7.3 Semimetales de Weyl y Dimensiones Sintéticas

Una ventaja única de los circuitos topolectrícos es su capacidad para superar las restricciones espaciales. Mientras que los cristales reales están limitados a 3 dimensiones espaciales, los circuitos pueden conectarse arbitrariamente para simular redes de 4D, 5D o más, o geometrías hiperbólicas no euclidianas.[19]
Esto ha permitido la observación experimental de fases como los **semimetales de Weyl**, que poseen puntos de degeneración en la estructura de bandas (conos de Weyl) conectados por "arcos de Fermi" en la superficie. En un circuito 3D de inductores y capacitores, estos arcos de Fermi se manifiestan como resonancias de impedancia superficial extremadamente robustas, permitiendo la transmisión de señales de alta eficiencia inmunes a la retrodispersión por defectos.

Capítulo 8: No-Hermiticidad y Nuevas Fronteras

La flexibilidad de los componentes electrónicos permite ir más allá de la simulación de sistemas cuánticos estándar (que son Hermíticos, conservan energía/probabilidad) e investigar la física **No-Hermítica**.

8.1 Circuitos Activos y Ruptura de Reciprocidad

Utilizando amplificadores operacionales (Op-Amps) y convertidores de impedancia negativa (NICs), es posible construir circuitos donde la matriz de admitancia no es simétrica ($Y_{ij} \neq Y_{ji}$). Esto rompe la reciprocidad y simula interacciones efectivas donde la "acción" no es igual a la "reacción".[22]

8.2 El Efecto Piel No-Hermítico (Non-Hermitian Skin Effect)

En estos circuitos exóticos, se ha descubierto un fenómeno sin análogo clásico directo: el efecto piel no-hermítico. En lugar de distribuirse por todo el circuito, todos los modos propios del sistema se colapsan y localizan en un solo borde del circuito.
Esto tiene implicaciones profundas para el diseño de sensores de ultra-alta sensibilidad. Un cambio minúsculo en la topología o en un componente del borde puede alterar drásticamente la respuesta macroscópica de todo el circuito debido a esta localización extrema de la energía.24

Conclusiones y Perspectivas

La investigación presentada demuestra que la teoría de circuitos eléctricos es un campo vibrante donde convergen la física fundamental y la matemática abstracta.

1. **Fundamentos Físicos:** Las leyes de circuitos no son arbitrarias, sino aproximaciones asintóticas de las ecuaciones de Maxwell válidas bajo condiciones estrictas de cuasi-estática y confinamiento de campos. La "corriente" y el "voltaje" son conceptos emergentes que simplifican la compleja realidad de los campos vectoriales.
2. **Estructura Topológica:** La robustez y universalidad de las leyes de Kirchhoff provienen de su naturaleza topológica. Son manifestaciones de las propiedades de homología (ciclos/KCL) y cohomología (potenciales/KVL) del grafo subyacente. El Teorema de Tellegen es la prueba definitiva de que la conservación de la energía en redes es una invariante topológica, independiente de la física material de los componentes.
3. **Innovación Tecnológica:** Esta comprensión profunda ha trascendido la teoría pura. La ingeniería de "circuitos topolectrícos" está utilizando estos principios para diseñar metamateriales electrónicos con propiedades de transporte de señal sin precedentes, robustez topológica y sensado de alta precisión basado en física no-hermítica.

El futuro de la electrónica, desde los chips cuánticos hasta las redes eléctricas inteligentes, dependerá cada vez más de esta visión unificada donde la topología del diseño dicta la física del funcionamiento.

Tablas de Referencia de Datos Estructurados

Tabla C.1: Correspondencia entre Análisis de Circuitos y Topología Algebraica

Concepto de Circuito	Concepto Topológico	Símbolo Matemático	Ecuación Fundamental
Nodos	0-Cadenas / 0-Simplex	C_0	N/A
Ramas	1-Cadenas / 1-Simplex	C_1	N/A
Mallas	2-Cadenas / 2-Simplex (Caras)	C_2	N/A

Conectividad	Matriz de Incidencia	A ó ∂_1	$\partial_1: C_1 \to C_0$
Ley de Corrientes (KCL)	Ciclos (Kernel de ∂)	Z_1	$A \mathbf{i} = 0$
Ley de Voltajes (KVL)	Co-bordes (Imagen de d)	B^1	$\mathbf{v} = A^T \mathbf{e}$
Potencia Total	Producto Dual	$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\langle \mathbf{v}, \mathbf{i} \rangle = 0$
Independencia	Números de Betti	β_0, β_1	$\beta_1 =

Tabla C.2: Propiedades Comparativas de Circuitos Topológicos

Tipo de Circuito	Hamiltoniano Simulado	Invariante Topológico	Fenómeno Observado	Aplicación Potencial
Circuito SSH (1D)	Modelo de enlace fuerte	Fase de Berry / Núm. Winding	Estados de borde (Zero modes)	Interconexiones robustas
Circuito Chern (2D)	Efecto Hall Cuántico	Número de Chern	Modos de borde quirales	Aisladores unidireccionales
Circuito Weyl (3D)	Semimetal de Weyl	Carga de Weyl	Arcos de Fermi superficiales	Antenas de alta eficiencia
Circuito No-Hermítico	Hatano-Nelson	Winding espectral	Efecto Piel (Skin Effect)	Sensores de alta sensibilidad

(Fin del Informe)

Obras citadas

1. Lecture 24 Circuit Theory Revisited - Purdue Engineering, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://engineering.purdue.edu/wcchew/ece604f20/Lecture%20Notes/Lect24.pdf
2. Kirchhoff's Current Law: A Derivation from Maxwell's Equations - MDPI, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://www.mdpi.com/2079-3197/13/8/200
3. From Maxwell to Circuits - tp.rush.edu, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://ftp.rush.edu/users/molebio/Bob_Eisenberg/Reprints/2025/Eisenberg_IIT_2025.pdf
4. 6.200 Lecture Notes: Lumped-Element Abstraction, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://circuits.mit.edu/_static/S23/handouts/lec01a/lecture01a.pdf
5. Kirchhoff's circuit laws - Wikipedia, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff%27s_circuit_laws
6. MA 511, Session 11 Graphs and Kirchhoff's Laws We'll call a graph a set of points (called the nodes) and oriented segments j - Purdue Math, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://www.math.purdue.edu/~walther/teach/511/lessons/lesson11.pdf

7. Incidence matrix - Wikipedia, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://en.wikipedia.org/wiki/Incidence_matrix
8. Conservation laws and open systems on higher-dimensional networks, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://www.math.rug.nl/arjan/DownloadPublicaties/conservationlaws.pdf
9. DATA STRUCTURES FOR GEOMETRIC AND TOPOLOGICAL ..., fecha de acceso: enero 19, 2026, https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/kotiuga2.pdf
10. Lecture 1, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://irma.math.unistra.fr/~sereni/Lectures/GC_Spring09/gc09_1.pdf
11. Homology, equilibrium, and conservation laws I: Discrete systems of points - arXiv, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://arxiv.org/pdf/1901.03171
12. Generators of $H^1(\Gamma, \partial \Gamma^c)$ with $\partial \Gamma^c \subset \partial \Gamma$ for Triangulated Surfaces $\Gamm - arXiv, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://arxiv.org/pdf/2504.05124
13. Cohomology is an algebraic variant of homology, the result of a simple dualization in the definition. Not surprisingly, the co, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATch3.pdf
14. Tellegen's Theorem in Electric Circuits | PDF | Visual Cortex | Electrical Network - Scribd, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://www.scribd.com/document/421968586/Lecture-22-Scribe-pdf
15. Tellegen's Theorem - Solved Examples & MATLAB Simulation - Electrical Technology, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://www.electricaltechnology.org/2021/05/tellegens-theorem.html
16. (Co)homology theory and electrical circuit - Math Stack Exchange, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://math.stackexchange.com/questions/1209604/cohomology-theory-and-electrical-circuit
17. A Course in Mathematics for Students of Physics by Paul Bamberg and Shlomo Sternberg Cambridge University Press, 1988, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://static.ias.edu/pcmi/1998/textbooks/bamberg-sternberg.html
18. A Course in Mathematics for Students of Physics: Volume 1 - Google Books, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://books.google.com/books/about/A_Course_in_Mathematics_for_Students_of.html?id=BEh0AgAAQBAJ
19. Topolectrical circuits—Recent experimental advances and developments - AIP Publishing, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://pubs.aip.org/aip/aed/article/1/2/021503/3345301/Topolectrical-circuits-Recent-experimental
20. Topolectrical Circuits, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://d-nb.info/1167611225/34
21. Topolectrical circuits – recent experimental advances and developments - arXiv, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://arxiv.org/html/2502.18563v1
22. Non-Hermitian topological electric circuits with projective symmetry - Hep Journals, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://journal.hep.com.cn/fop/EN/10.15302/frontphys.2026.025200

23. Non-Hermitian topological electric circuits with projective symmetry | Request PDF - ResearchGate, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://www.researchgate.net/publication/392765482_Non-Hermitian_topological_electric_circuits_with_projective_symmetry
24. Non-Hermitian topological electric circuits with projective symmetry - arXiv, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://arxiv.org/html/2506.14225v1
25. Topological Zero Modes in Non-Hermitian Topolectrical Systems: Size and Impedance Control - arXiv, fecha de acceso: enero 19, 2026, https://arxiv.org/html/2507.17227v1