Un Panorama Exhaustivo de la Topología Algebraica: De los Invariantes Fundamentales a las Fronteras de la Ciencia Aplicada

Sección I: Introducción a la Filosofía de la Topología Algebraica

La topología algebraica representa una de las síntesis más profundas y fructíferas de las matemáticas modernas. Es una disciplina que se sitúa en la intersección de la geometría y el álgebra, empleando las estructuras rígidas y computables de esta última para desentrañar los misterios de la forma y el espacio. Su filosofía central no es meramente aplicar una herramienta a un problema, sino construir un puente conceptual, un diccionario riguroso que traduce las propiedades elusivas y cualitativas de los objetos geométricos al lenguaje preciso y manejable de grupos, anillos y otras estructuras algebraicas.

1.1 Definición y Objetivo Central

En su núcleo, la topología algebraica es la rama de las matemáticas que utiliza herramientas del álgebra abstracta para estudiar y clasificar los espacios topológicos.[1] Un espacio topológico es un conjunto de puntos dotado de una noción de "proximidad", lo que permite definir conceptos como la continuidad sin necesidad de una métrica o distancia.[3] El objetivo fundamental de la topología es comprender las propiedades de estos espacios que permanecen inalteradas bajo deformaciones continuas, como estirar, doblar o comprimir, pero no bajo operaciones más drásticas como rasgar o pegar.[1] Esta idea se ha popularizado a través de la célebre analogía de que, para un topólogo, no hay diferencia entre una taza de café y una dona (un toro), ya que uno puede ser deformado continuamente en el otro.[1]
La noción matemática que formaliza esta "equivalencia por deformación" es el **homeomorfismo**: una función biyectiva y continua entre dos espacios topológicos, cuya inversa también es continua.[1] Si existe un homeomorfismo entre dos espacios, se dice que son homeomorfos; desde la perspectiva de la topología, son indistinguibles, representan "el

mismo espacio".[1] El gran desafío de la topología es, por tanto, clasificar todos los espacios topológicos, determinando cuándo dos espacios dados son o no homeomorfos.

1.2 El Problema de la Clasificación y la Necesidad de Invariantes

La tarea de clasificación presenta una dificultad asimétrica fundamental. Demostrar que dos espacios *son* homeomorfos "solo" requiere construir explícitamente un homeomorfismo entre ellos. Sin embargo, demostrar que *no lo son* es considerablemente más arduo, ya que implicaría probar la no existencia de una función con las propiedades deseadas entre dos conjuntos potencialmente muy complejos.[1]

Para sortear este obstáculo, la topología algebraica adopta una estrategia indirecta pero inmensamente poderosa: el método de los **invariantes topológicos**. Un invariante topológico es una propiedad o una estructura, a menudo de naturaleza algebraica, que se asocia a cada espacio topológico de tal manera que si dos espacios son homeomorfos, sus invariantes asociados deben ser idénticos (o, en el caso de estructuras algebraicas, isomorfos).[1]

La lógica de este enfoque es la de una prueba por contraposición. Si se calculan los invariantes para dos espacios, X e Y, y resultan ser diferentes, se puede concluir con certeza que X e Y no son homeomorfos.[5] Por ejemplo, un invariante simple para superficies es su *género*, que informalmente corresponde al "número de agujeros". Un toro tiene género 1, mientras que una esfera tiene género 0. Como sus géneros son diferentes, no pueden ser homeomorfos.[1]

Es crucial entender que esta implicación es unidireccional. Si dos espacios tienen el mismo invariante, no se puede concluir que sean homeomorfos; simplemente, el invariante en cuestión no fue lo suficientemente "potente" para distinguirlos.[1] Esta limitación no es una debilidad, sino el motor que impulsa la disciplina: la búsqueda constante de un arsenal de invariantes cada vez más finos y sofisticados, capaces de capturar matices más sutiles de la estructura topológica. Esta estrategia es inherentemente "negativa" en su aplicación más común, sirviendo como una herramienta de distinción más que de identificación, y ha dado lugar a la rica jerarquía de métodos que se explorarán en este informe.

1.3 El Paradigma Central: El Functor Algebraico

La "asociación" de una estructura algebraica a un espacio topológico se formaliza de manera rigurosa utilizando el lenguaje de la **teoría de categorías**. Desde esta perspectiva, la topología algebraica se dedica a la construcción de **functores**. Un functor es un mapa entre categorías que preserva la estructura.[6]

En este contexto, se construyen functores F desde la categoría de los espacios topológicos (cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las aplicaciones continuas) hacia categorías algebraicas, como la categoría de grupos (Grp) o la de anillos (Ring).[6] Un functor de este tipo,

$F:Top \to Grp$, realiza dos asignaciones:
1. A cada espacio topológico X, le asigna un grupo F(X).
2. A cada aplicación continua $f:X \to Y$, le asigna un homomorfismo de grupos $F(f):F(X) \to F(Y)$.

Esta asignación debe respetar la composición de funciones y las identidades. La propiedad crucial es que si f es un homeomorfismo, entonces F(f) es un isomorfismo de grupos. Esto es lo que garantiza matemáticamente que la estructura algebraica asignada es un verdadero invariante topológico.[5]

Este paradigma funtorial es la maquinaria que formaliza la "traducción" de problemas. Permite convertir una pregunta geométrica difícil (¿son X e Y homeomorfos?) en una pregunta algebraica, a menudo más manejable (¿son los grupos F(X) y F(Y) isomorfos?). La razón de ser de la topología algebraica radica en que, en muchos casos, "es mucho más fácil razonar sobre grupos y homomorfismos que razonar sobre espacios topológicos y homeomorfismos".[1]

Sección II: El Lenguaje de la Deformación: Teoría de la Homotopía

La teoría de la homotopía es la primera de las grandes teorías de la topología algebraica y la que se alinea más directamente con la intuición de "deformación continua". Proporciona un marco para clasificar no solo los espacios, sino también las aplicaciones entre ellos, y da lugar al primer invariante algebraico fundamental: el grupo fundamental.

2.1 Homotopía de Aplicaciones y de Caminos

El concepto central es el de **homotopía** entre aplicaciones. Dadas dos funciones continuas $f,g:X \to Y$ entre espacios topológicos, se dice que f es **homotópica** a g (denotado $f \simeq g$) si existe una aplicación continua $H:X \times I \to Y$, donde $I = $ es el intervalo unitario, que satisface:
- $H(x,0)=f(x)$ para todo $x \in X$.
- $H(x,1)=g(x)$ para todo $x \in X$.

La función H se denomina una homotopía entre f y g.[10] Intuitivamente, se puede pensar en el segundo parámetro de
H como el "tiempo". Así, H describe una familia continua de funciones $H_t(x)=H(x,t)$ que deforma suavemente la función f (en el tiempo t=0) hasta convertirla en la función g (en el tiempo t=1).[10] Se puede demostrar que la relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas de
X a Y.[10]

Esta idea se extiende a los propios espacios. Dos espacios topológicos X e Y se dice que tienen el mismo **tipo de homotopía** o que son **homotópicamente equivalentes** si existen aplicaciones continuas $f:X \to Y$ y $g:Y \to X$ tales que las composiciones $g \circ f$ es homotópica a la identidad en X (id_X) y $f \circ g$ es homotópica a la identidad en Y (id_Y).[15] Esta es una noción de equivalencia más débil que el homeomorfismo. Por ejemplo, un disco cerrado D^n es homotópicamente equivalente a un único punto, ya que puede ser "contraído" continuamente a su centro. Un espacio que es homotópicamente equivalente a un punto se llama **contráctil**.[10]

2.2 El Grupo Fundamental (π_1)

El grupo fundamental es el primer invariante algebraico no trivial que se construye en la disciplina, y surge de aplicar la idea de homotopía a los lazos dentro de un espacio.
La construcción procede en varios pasos:

1. **Caminos y Lazos:** Un **camino** en un espacio topológico X es una aplicación continua $f:I \to X$. Si $f(0)=x_0$ y $f(1)=x_1$, se dice que es un camino de x_0 a x_1.[10] Un **lazo** (o camino cerrado) con **punto base** x_0 es un camino que empieza y termina en el mismo punto, es decir, $f(0)=f(1)=x_0$.[10]
2. **Homotopía de Caminos:** Dos lazos f,g con el mismo punto base x_0 son **homotópicos relativos a los extremos** si existe una homotopía $H:I \times I \to X$ entre ellos que mantiene fijos los puntos inicial y final durante toda la deformación. Es decir, $H(s,0)=f(s)$, $H(s,1)=g(s)$, y además $H(0,t)=x_0$ y $H(1,t)=x_0$ para todo $t \in I$.[10] Esta es también una relación de equivalencia.[10]
3. **El Conjunto de Clases:** El **grupo fundamental** de X con punto base x_0, denotado $\pi_1(X,x_0)$, es el conjunto de todas las clases de equivalencia de lazos basados en x_0 bajo esta relación de homotopía.[5] Cada elemento de $\pi_1(X,x_0)$ representa una familia de lazos que pueden deformarse unos en otros.
4. **La Operación de Grupo:** Se define una operación de producto en este conjunto mediante la **concatenación de lazos**. Si [f] y [g] son dos clases de homotopía, su producto $[f] \cdot [g]$ es la clase del lazo que primero recorre f y luego recorre g (reparametrizando para que el tiempo total siga siendo 1).[10] Se puede demostrar que esta operación está bien definida (no depende de los representantes elegidos en cada clase), es asociativa, tiene un elemento neutro (la clase del lazo constante en x_0) y cada elemento tiene un inverso (la clase del lazo recorrido en sentido contrario). Por tanto, $\pi_1(X,x_0)$ tiene la estructura de un grupo.[17]

Si el espacio X es **conexo por caminos** (es decir, siempre existe un camino entre dos puntos cualesquiera), el grupo fundamental es independiente del punto base elegido, en el sentido de que $\pi_1(X,x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X,x_1)$ para cualquier $x_0,x_1 \in X$. En tales casos, se puede hablar simplemente del grupo fundamental de X, denotado $\pi_1(X)$.[11]

2.3 Interpretación Geométrica y Ejemplos Clave

El grupo fundamental $\pi_1(X)$ captura algebraicamente la información sobre los "agujeros" unidimensionales o lazos no contráctiles de un espacio.[1]

- **Espacios Simplemente Conexos:** Un espacio conexo por caminos se llama **simplemente conexo** si su grupo fundamental es el grupo trivial, $\pi_1(X)\cong\{e\}$. Esto significa que todo lazo en X puede ser deformado continuamente hasta convertirse en un punto.[10] Intuitivamente, estos son espacios "sin agujeros". Ejemplos canónicos son el espacio euclídeo
  $\mathbb{R}^n$ y cualquier subconjunto convexo de este, como el disco D^n.[10]
- **El Círculo:** El ejemplo paradigmático de un espacio no simplemente conexo es el círculo, S^1. Su grupo fundamental es isomorfo al grupo de los enteros bajo la suma, $\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z}$.[10] Cada entero
  $k\in\mathbb{Z}$ corresponde a la clase de homotopía de un lazo que se "enrolla" k veces alrededor del círculo (el signo indica la dirección del enrollamiento). Este resultado, aunque intuitivo, es uno de los pilares de la topología algebraica y su demostración requiere herramientas más sofisticadas como la teoría de espacios recubridores. Es la base para pruebas topológicas de resultados fundamentales en otras áreas, como el Teorema Fundamental del Álgebra [17] y el Teorema del Punto Fijo de Brouwer en dos dimensiones.[13]
- **El Toro:** El toro $T^2=S^1\times S^1$ tiene un grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Esto refleja la existencia de dos tipos de lazos fundamentalmente diferentes que no pueden deformarse uno en otro: uno que rodea el toro "a lo largo" y otro "a lo ancho".

Una característica distintiva del grupo fundamental es que, en general, no es abeliano (conmutativo). Por ejemplo, el grupo fundamental de una figura de ocho (la unión en un punto de dos círculos) es el producto libre $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$, un grupo no abeliano muy complejo. Esta capacidad para capturar estructuras algebraicas no conmutativas lo hace muy potente, pero también computacionalmente difícil. Esta tensión entre la simplicidad geométrica de un objeto y la potencial complejidad de su invariante algebraico es un tema recurrente. Revela que la "traducción" al álgebra no siempre simplifica el problema, sino que a veces expone una complejidad estructural oculta, motivando así el desarrollo de invariantes algebraicamente más simples, como los grupos de homología.

Sección III: La Aritmética de los Agujeros: Teoría de la Homología

Mientras que la teoría de la homotopía se centra en las aplicaciones y las deformaciones, la teoría de la homología adopta un enfoque diferente y, en muchos sentidos, más combinatorio y calculable. Su objetivo es crear un "censo" de los agujeros de un espacio en cada dimensión, asignando a cada espacio una secuencia de grupos abelianos que actúan como sus invariantes.

3.1 Intuición Geométrica

La idea central de la homología es formalizar y contar los "agujeros" de diferentes dimensiones.[18]

- El **0-ésimo grupo de homología, $H_0(X)$**, cuenta el número de componentes conexas por caminos del espacio. Si el espacio está formado por tres piezas separadas, $H_0(X) \cong Z \oplus Z \oplus Z$.
- El **1er grupo de homología, $H_1(X)$**, cuenta los "agujeros" o "túneles" unidimensionales. Para un círculo, $H_1(S^1) \cong Z$, detectando el agujero central. Para un toro, $H_1(T^2) \cong Z \oplus Z$, detectando los dos lazos fundamentales.[18]
- El **2º grupo de homología, $H_2(X)$**, cuenta las "cavidades" o "vacíos" bidimensionales. Para una esfera S^2, que encierra un vacío, $H_2(S^2) \cong Z$. Para un toro T^2, que también encierra un vacío interior, $H_2(T^2) \cong Z$.[18]

La homología proporciona una forma sistemática de asociar una secuencia de grupos abelianos $\{H_0(X), H_1(X), H_2(X), \ldots\}$ a un espacio topológico X, donde cada grupo $H_n(X)$ describe la estructura de los agujeros n-dimensionales.

3.2 Construcción Formal

La construcción formal de la homología, particularmente la **homología singular**, es un ejemplo paradigmático de la abstracción matemática. Aunque inicialmente parece alejada de la intuición geométrica, su generalidad y robustez la convierten en la herramienta estándar.

1. **Símplices Singulares:** Para un espacio topológico X, un **n-símplex singular** es simplemente una aplicación continua $\sigma: \Delta^n \to X$, donde Δ^n es el n-símplex estándar (un punto para n=0, un segmento para n=1, un triángulo para n=2, un tetraedro para n=3, etc.).[19] A diferencia de la homología simplicial, que requiere una "triangulación" del espacio, la homología singular considera
todas las posibles formas de mapear símplices en el espacio, sin importar si se solapan, se degeneran o se pliegan sobre sí mismos.[19]
2. **Grupos de Cadenas (C_n):** El **n-ésimo grupo de cadenas**, $C_n(X)$, es el grupo abeliano libre generado por el conjunto de todos los n-símplices singulares en X. Un elemento de $C_n(X)$, llamado una **n-cadena**, es una suma formal finita de la forma $\Sigma k_i \sigma_i$, donde k_i son enteros y σ_i son n-símplices singulares.[1] Intuitivamente, representa una "pieza" n-dimensional del espacio con coeficientes enteros.
3. **El Operador Frontera (∂):** Para cada dimensión n, se define un homomorfismo, el **operador frontera**, $\partial_n: C_n(X) \to C_{n-1}(X)$. Este operador actúa sobre un n-símplex σ y devuelve la suma alternada de sus "caras" (n−1)-dimensionales. Por ejemplo, para un 1-símplex (un camino) $\sigma: \Delta^1 \to X$, su frontera es $\partial_1(\sigma) = \sigma(1) - \sigma(0)$, sus puntos finales. Para un 2-símplex (un triángulo), su frontera es la suma de sus tres aristas, con orientaciones

alternas.[19] La propiedad algebraica fundamental y más importante de este operador es que
la frontera de una frontera es cero, es decir, la composición $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ para todo n.[16] Esta condición,
$\partial^2 = 0$, es la piedra angular de toda la teoría.

4. **Ciclos (Z_n) y Fronteras (B_n):**
    - Un **n-ciclo** es una n-cadena cuya frontera es cero. El conjunto de todos los n-ciclos forma un subgrupo de $C_n(X)$, denotado $Z_n(X)=\ker(\partial_n)$. Geométricamente, son objetos n-dimensionales "sin borde", como un círculo o una esfera.[18]
    - Una **n-frontera** es una n-cadena que es la frontera de una (n+1)-cadena. El conjunto de todas las n-fronteras forma un subgrupo de $C_n(X)$, denotado $B_n(X)=\mathrm{im}(\partial_{n+1})$. Un ejemplo es un círculo que es el borde de un disco.[18]

      La propiedad $\partial^2=0$ garantiza que toda frontera es un ciclo, es decir, $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$.
5. Grupos de Homología (H_n): Finalmente, el n-ésimo grupo de homología de X se define como el grupo cociente de los ciclos módulo las fronteras:

   $$H_n(X)=B_n(X)Z_n(X)=\mathrm{im}(\partial_{n+1})\ker(\partial_n)$$

   .[18] Los elementos de
   $H_n(X)$ son clases de equivalencia de ciclos, donde dos ciclos se consideran equivalentes si su diferencia es una frontera. Por tanto, $H_n(X)$ captura precisamente los ciclos n-dimensionales que "no son la frontera de nada", que es la formalización matemática de un "agujero" n-dimensional.[18]

3.3 Propiedades y Comparación con la Homotopía

La teoría de la homología posee varias propiedades deseables que la distinguen de la homotopía:

- **Abelianidad:** Por construcción, los grupos de homología $H_n(X)$ son siempre grupos abelianos. Esto los hace mucho más fáciles de clasificar y computar que los grupos de homotopía, que pueden ser no abelianos y tener una estructura muy compleja.[9]
- **Relación con π_1:** Existe una conexión formal entre las dos teorías en la primera dimensión. El **Teorema de Hurewicz** establece que para un espacio conexo por caminos X, el primer grupo de homología $H_1(X)$ es isomorfo a la **abelianización** del grupo fundamental $\pi_1(X)$ (el grupo cociente más grande de $\pi_1(X)$ que es abeliano).[16] Esto significa que
  H_1 captura la misma información que π_1 pero "olvidando" la estructura no conmutativa.
- **Invariancia Homotópica:** Al igual que los grupos de homotopía, los grupos de homología son invariantes del tipo de homotopía. Si dos espacios X e Y son homotópicamente equivalentes, entonces sus grupos de homología son isomorfos,

$H_n(X) \cong H_n(Y)$ para todo n.[16]

La transición de la homología simplicial (basada en triangulaciones) a la homología singular (basada en mapas continuos) representa un momento clave en la evolución de la disciplina. Aunque la construcción singular parece infinitamente más compleja, la maquinaria del álgebra homológica ($\partial^2=0$) funciona de manera idéntica y produce un invariante universalmente aplicable a cualquier espacio topológico.[19] Para los espacios que admiten una triangulación, se puede demostrar que ambas teorías producen los mismos grupos de homología.[19] Este es un ejemplo recurrente en matemáticas: a veces, para resolver un problema de forma robusta, es mejor abordarlo en un marco mucho más general, ya que la maquinaria abstracta resultante es más limpia, potente y universal.

Sección IV: La Estructura Dual Enriquecida: Teoría de la Cohomología

La cohomología surge de un proceso de dualización algebraica aplicado al complejo de cadenas de la homología. A primera vista, podría parecer una mera reformulación técnica, pero este cambio de perspectiva revela una estructura algebraica adicional y oculta —una estructura de producto— que la convierte en un invariante topológico significativamente más potente que la homología.

4.1 El Concepto de Dualidad Algebraica

La construcción de la cohomología sigue un camino paralelo a la de la homología, pero con las "flechas invertidas".

1. **Cocadenas y Grupos de Cocadenas:** En lugar de cadenas (sumas formales de símplices), se consideran **cocadenas**. Una **n-cocadena** con coeficientes en un grupo abeliano G es un homomorfismo de grupos $\phi: C_n(X) \to G$. Esencialmente, es una función que asigna un elemento de G a cada n-símplex singular en X.[9] El conjunto de todas las n-cocadenas forma un grupo abeliano, $C^n(X;G)=\mathrm{Hom}(C_n(X),G)$.[22]
2. **El Operador Coborde (δ):** El operador frontera $\partial_n: C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ induce, por dualización, un **operador coborde** $\delta^n: C^n(X;G) \to C^{n+1}(X;G)$. Este operador "sube" la dimensión, a diferencia del operador frontera que la baja. La propiedad fundamental $\partial \circ \partial = 0$ de la homología se traduce en una propiedad análoga para el operador coborde: $\delta \circ \delta = 0$.[21]
3. **Cociclos, Cofronteras y Grupos de Cohomología:** De manera completamente análoga a la homología, se definen:
    - **n-cociclos:** El núcleo del operador coborde, $Z^n(X;G)=\ker(\delta^n)$.
    - n-cofronteras: La imagen del operador coborde, $B^n(X;G)=\mathrm{im}(\delta^{n-1})$.
      La condición $\delta^2=0$ asegura que $B^n \subseteq Z^n$.

- El n-ésimo grupo de cohomología de X con coeficientes en G se define como el grupo cociente:

  $Hn(X;G)=Bn(X;G)Zn(X;G)=im(\delta n-1)ker(\delta n)$

  .21

Si el grupo de coeficientes G es un cuerpo, los grupos de cohomología $Hn(X;G)$ son los espacios vectoriales duales de los grupos de homología $Hn(X;G)$. Sin embargo, para coeficientes más generales como Z, la relación es más sutil y está descrita por el Teorema de los Coeficientes Universales.[21]

4.2 El Producto Cup: Una Estructura Multiplicativa

La verdadera ventaja de la cohomología reside en una estructura adicional que no tiene un análogo directo y simple en la homología: el producto cup. Si se elige un anillo R como grupo de coeficientes (por ejemplo, Z, Q, R), existe una operación bilineal:

$\smile:Hp(X;R)\times Hq(X;R)\longrightarrow Hp+q(X;R)$

.21 Este producto se define primero a nivel de cocadenas. Dadas una p-cocadena $\alpha\in Cp(X;R)$ y una q-cocadena $\beta\in Cq(X;R)$, su producto cup $\alpha\smile\beta$ es una (p+q)-cocadena. Para evaluarla en un (p+q)-símplex σ, se evalúa α en la "cara frontal" de σ (sus primeros p+1 vértices) y β en su "cara trasera" (sus últimos q+1 vértices), y luego se multiplican los resultados en el anillo R.[21]

Esta operación a nivel de cocadenas induce un producto bien definido a nivel de cohomología. Este producto dota a la suma directa de todos los grupos de cohomología, $H*(X;R)=\oplus n\geq 0Hn(X;R)$, de la estructura de un **anillo graduado**.[21] Se dice que es graduado porque el producto de un elemento de grado p y un elemento de grado q da como resultado un elemento de grado p+q. Este anillo se conoce como el **anillo de cohomología** de X. Además, este producto es **graduado-conmutativo**, lo que significa que para $\alpha\in Hp$ y $\beta\in Hq$, se cumple la relación $\alpha\smile\beta=(-1)pq(\beta\smile\alpha)$.[23]

La existencia de esta estructura de producto no es un accidente. Es una consecuencia profunda de la naturaleza contravariante del functor de cohomología. La construcción puede entenderse a través del mapa diagonal $\Delta:X\longrightarrow X\times X$. Este mapa induce un homomorfismo en cohomología $\Delta*:H*(X\times X;R)\longrightarrow H*(X;R)$. Combinado con un mapa de producto externo (el producto de Künneth), se obtiene una operación interna $H*(X;R)\otimes H*(X;R)\longrightarrow H*(X\times X;R)\Delta*H*(X;R)$, que define el producto cup. En homología, el mapa inducido por la diagonal va en la dirección opuesta, $\Delta*:H*(X)\longrightarrow H*(X\times X)$, lo que impide la definición de un producto análogo de manera natural.[23]

4.3 Interpretaciones y Poder Discriminatorio

El anillo de cohomología es un invariante topológico mucho más fino que los grupos de homología por sí solos.

- **Dualidad de Poincaré:** Para una variedad orientada compacta M de dimensión n, la **dualidad de Poincaré** establece un isomorfismo $H^k(M) \cong H_{n-k}(M)$. Bajo este isomorfismo, el producto cup en cohomología es dual a la **intersección geométrica** de subvariedades en homología. Esto proporciona una poderosa intuición geométrica para la estructura del anillo.[21]
- **Poder Discriminatorio:** La estructura del anillo puede distinguir espacios que tienen los mismos grupos de homología (y por tanto los mismos grupos de cohomología, vistos solo como grupos abelianos). El ejemplo canónico es el toro $T^2 = S^1 \times S^1$ y el espacio $X = S^2 \vee S^1 \vee S^1$ (una esfera con dos círculos pegados en un punto). Ambos espacios tienen los mismos grupos de homología y cohomología: $H^0 \cong \mathbb{Z}$, $H^1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H^2 \cong \mathbb{Z}$. Sin embargo, sus anillos de cohomología son diferentes. En el toro, el producto cup de los dos generadores de H^1 es un generador de H^2 (no es cero), lo que refleja que los dos lazos fundamentales se intersecan. En el espacio X, el producto cup de los generadores de H^1 es cero. Por lo tanto, T^2 y X no son ni siquiera homotópicamente equivalentes.[23]

Tabla Comparativa de Teorías Fundamentales

La siguiente tabla resume y contrasta las tres teorías fundamentales de la topología algebraica, destacando su evolución desde herramientas intuitivas pero algebraicamente complejas hacia estructuras más abstractas pero computacionalmente más manejables y potentes.

Característica	Teoría de la Homotopía	Teoría de la Homología	Teoría de la Cohomología
Objeto de Estudio	Clases de equivalencia de lazos/mapas	Clases de equivalencia de ciclos k-dim	Funcionales lineales sobre cadenas (cociclos)
Invariante Principal	Grupos de Homotopía (π_n)	Grupos de Homología (H_n)	Anillo de Cohomología (H^*)
Estructura Algebraica	Grupo (generalmente no abeliano)	Grupo abeliano	Anillo graduado-conmutativo
Computabilidad	Difícil en general (indecidible)	Relativamente fácil (algorítmica)	Relativamente fácil (dual a la homología)
Información Capturada	Estructura fina de lazos y mapeos	Conteo de "agujeros" k-dimensionales	Conteo de agujeros + estructura multiplicativa (intersecciones)

Sensibilidad	Detecta diferencias sutiles (ej. nudos)	Invariante más "tosco" pero robusto	Más potente que la homología para distinguir espacios

Sección V: Herramientas Computacionales y Teoremas Clave

Las teorías de homotopía y homología, aunque conceptualmente poderosas, serían de utilidad limitada sin métodos efectivos para calcular los invariantes que definen. Esta sección se dedica a los teoremas fundamentales que actúan como la maquinaria computacional de la topología algebraica, permitiendo descomponer problemas complejos en partes más manejables. Estos teoremas encarnan una filosofía de "dividir y conquistar", que es la manifestación algorítmica del principio de "local a global" que impregna la disciplina.

5.1 El Teorema de Seifert-van Kampen

Este teorema es la herramienta principal para calcular el grupo fundamental de un espacio topológico que puede ser construido "pegando" espacios más simples.

- **Propósito:** El teorema permite calcular el grupo fundamental de un espacio X que es la unión de dos subespacios, A y B, a partir de los grupos fundamentales de A, B y su intersección $A \cap B$.[11]
- **Enunciado:** Si $X = A \cup B$, donde A, B y $A \cap B$ son abiertos y conexos por caminos, y el punto base $x0$ está en la intersección, entonces el grupo fundamental $\pi 1(X,x0)$ es el **producto libre amalgamado** de $\pi 1(A,x0)$ y $\pi 1(B,x0)$ a lo largo del grupo $\pi 1(A \cap B,x0)$.[24]
$\pi 1(X) \cong \pi 1(A) * \pi 1(A \cap B) \pi 1(B)$
- **Mecanismo:** Intuitivamente, un producto amalgamado es una forma de "pegar" dos grupos (G1 y G2) a lo largo de un subgrupo común (H). Se toman los generadores y relaciones de G1 y G2, y se añade la relación de que los elementos de H (vistos como subgrupo de G1) son iguales a los elementos correspondientes de H (vistos como subgrupo de G2).[24] En el contexto topológico, esto significa que un lazo que vive enteramente en la intersección se considera el mismo, ya sea que se lo piense como un lazo en
A o como un lazo en B.
- **Aplicaciones:** El teorema es extremadamente útil para calcular el grupo fundamental de complejos de celdas (espacios construidos adjuntando celdas de dimensiones crecientes).[11] Por ejemplo, permite calcular fácilmente que el grupo fundamental de la unión en un punto de

n círculos (un "ramo de flores") es el producto libre de n copias de Z. Sin embargo, tiene limitaciones notables: en su forma estándar, no puede usarse para calcular el grupo fundamental del círculo S^1, ya que es imposible descomponer S^1 en dos abiertos cuya intersección sea conexa.[25]

5.2 La Sucesión de Mayer-Vietoris

La sucesión de Mayer-Vietoris es el análogo en la teoría de la homología del Teorema de Seifert-van Kampen. Es una de las herramientas de cálculo más potentes y elegantes de la topología algebraica.

- **Propósito:** Permite calcular los grupos de homología de un espacio X que es la unión de dos subespacios A y B, relacionando los grupos de homología de X, A, B y $A \cap B$.[27]
- Enunciado: Si X es un espacio topológico y A,B son subespacios tales que X es la unión de los interiores de A y B, entonces existe una sucesión exacta larga de grupos de homología:
  $$ \dots \to H_n(A \cap B) \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B) \to \dots $$
  .27
- **Mecanismo:** Una "sucesión exacta" es una secuencia de grupos y homomorfismos donde la imagen de cada homomorfismo es exactamente igual al núcleo del siguiente.[16] Esta propiedad impone restricciones muy fuertes a los grupos involucrados. Si se conocen la mayoría de los grupos en la secuencia, a menudo se pueden deducir los desconocidos. El "homomorfismo conector"
  ∂_* es particularmente importante, ya que permite relacionar la homología de X en una dimensión con la de la intersección en una dimensión inferior.
- **Aplicación (Cálculo de la Homología de Esferas):** La sucesión de Mayer-Vietoris proporciona una prueba inductiva clásica de los grupos de homología de la k-esfera, S^k.
  1. Se descompone S^k en su hemisferio norte A y su hemisferio sur B. Se eligen de manera que sean ligeramente más grandes que los hemisferios cerrados, para que sus interiores cubran S^k.
  2. Tanto A como B son homeomorfos al disco D^k, que es contráctil. Por lo tanto, sus grupos de homología reducida $\tilde{H}_n$ son triviales para todo n.[28]
  3. La intersección $A \cap B$ es una banda alrededor del ecuador, que es homotópicamente equivalente a la (k−1)-esfera, S^{k-1}.[28]
  4. Al insertar esta información en la sucesión de Mayer-Vietoris para $n>0$, los términos $H_n(A) \oplus H_n(B)$ se anulan, lo que lleva a una sucesión exacta corta:

     $0 \to H_n(S^k) \to H_{n-1}(S^{k-1}) \to 0$
  5. Esto implica que el homomorfismo del medio es un isomorfismo:
     $H_n(S^k) \cong H_{n-1}(S^{k-1})$ para $n>1$.

6. Usando este isomorfismo de forma recursiva y un caso base ($H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$), se puede calcular la homología de todas las esferas:
$$ H_n(S^k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n=0 \text{ o } n=k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{para } k > 0) $$
.28

5.3 El Teorema del Punto Fijo de Brouwer

Este es uno de los resultados más famosos de la topología y un ejemplo perfecto de cómo un resultado puramente topológico puede tener profundas implicaciones en otros campos.

- **Enunciado:** Toda aplicación continua $f:D^n \to D^n$ desde el disco unitario cerrado n-dimensional hacia sí mismo debe tener al menos un **punto fijo**, es decir, un punto $x \in D^n$ tal que $f(x)=x$.[30] Intuitivamente, es imposible "agitar" un disco cerrado sobre sí mismo sin que al menos un punto termine en su posición original.[31]
- **Demostración Topológica:** La prueba clásica utiliza la topología algebraica y procede por contradicción.
    1. Se supone que existe una función continua $f:D^n \to D^n$ sin puntos fijos.
    2. Si $f(x) \neq x$ para todo x, se puede construir una nueva función $r:D^n \to S^{n-1}$ (la frontera del disco). Para cada punto x en el disco, se traza una semirrecta que parte de $f(x)$ y pasa por x. El punto $r(x)$ se define como la intersección de esta semirrecta con la frontera S^{n-1}.[12]
    3. Esta función r es continua. Además, si un punto x ya está en la frontera S^{n-1}, entonces $r(x)=x$. Una función con esta propiedad se llama una **retracción** de D^n a S^{n-1}.
    4. Aquí es donde interviene la topología algebraica. Una retracción de este tipo induciría un homomorfismo entre los grupos de homología (o cohomología) $H_{n-1}(D^n) \to H_{n-1}(S^{n-1})$.
    5. Sin embargo, sabemos que $H_{n-1}(D^n) \cong 0$ (porque el disco es contráctil) y $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. No puede existir un homomorfismo que mapee el grupo trivial de manera sobreyectiva sobre el grupo de los enteros. Esto es una contradicción.
    6. Por lo tanto, la suposición inicial de que no había puntos fijos debe ser falsa.[13]
- **Importancia:** Más allá de su elegancia matemática, el teorema es una herramienta fundamental para probar la existencia de soluciones en análisis, ecuaciones diferenciales y, de manera crucial, en economía y teoría de juegos.[12]

Sección VI: Aplicaciones en la Vanguardia de la Ciencia y la Tecnología

Lejos de ser una disciplina puramente abstracta, la topología algebraica ha emergido en las últimas décadas como una fuente de herramientas conceptuales y computacionales para abordar problemas complejos en una amplia gama de campos científicos y tecnológicos. Su capacidad para capturar la estructura esencial y robusta de los sistemas, ignorando el ruido y los detalles métricos irrelevantes, la hace ideal para modelar los fenómenos del mundo real.

6.1 La Geometría del Cosmos y las Partículas

La física teórica moderna, en su búsqueda de una comprensión unificada del universo, ha encontrado en la topología algebraica un lenguaje natural para describir las propiedades fundamentales del espaciotiempo y la materia.

- **Teoría Cuántica de Campos Topológica (TQFT):** Una TQFT es un tipo especial de teoría cuántica de campos donde las cantidades calculables, como las funciones de correlación, son **invariantes topológicos**. Esto significa que no dependen de la geometría o la métrica del espaciotiempo subyacente, sino solo de su topología.[33] Formalmente, una TQFT se define como un functor monoidal desde una categoría de cobordismos (que describe cómo las variedades se "propagan" en el tiempo) a la categoría de espacios vectoriales.[33] Esta independencia de la métrica las convierte en modelos ideales para teorías de la gravedad cuántica. Una de las aplicaciones más célebres es la
  Teoría de Chern-Simons, una TQFT en tres dimensiones cuyos cálculos se corresponden directamente con invariantes de nudos, como el polinomio de Jones, estableciendo un puente profundo entre la física de partículas y la teoría de nudos.[33]
- **Teoría de Cuerdas y Variedades de Calabi-Yau:** La teoría de cuerdas postula que las partículas fundamentales no son puntos, sino diminutas cuerdas vibrantes. Para su consistencia matemática, la teoría requiere la existencia de dimensiones espaciales adicionales más allá de las tres que observamos.[36] Se conjetura que estas seis dimensiones extra están "compactificadas", es decir, enrolladas en una escala increíblemente pequeña. La forma de este espacio de compactificación es crucial, ya que su topología determina las leyes de la física que observamos, como el número de familias de partículas y sus masas.[38] Los principales candidatos para estos espacios son las
  variedades de Calabi-Yau, que son espacios complejos de seis dimensiones con propiedades geométricas y topológicas muy específicas. Los invariantes topológicos de estas variedades, como sus números de Betti (los rangos de sus grupos de homología), se traducen directamente en parámetros del Modelo Estándar de la física de partículas.[36]
- **Aislantes Topológicos:** En la física de la materia condensada, los aislantes topológicos son una fase de la materia que se comporta como un aislante eléctrico en su interior, pero cuya superficie contiene estados que conducen la electricidad.[41] Esta propiedad conductora de la superficie es extraordinariamente robusta y está "protegida topológicamente". Esto significa que no puede ser eliminada por impurezas o

deformaciones locales del material. La protección se debe a que la existencia de estos estados de borde está garantizada por un invariante topológico (como el número de Chern) asociado a la estructura de bandas electrónicas del material en su conjunto.[41] Es una manifestación física directa de la invarianza topológica: una propiedad global (la topología de las bandas) dicta un comportamiento local robusto (la conducción en la superficie).

6.2 Descubriendo la Forma de los Datos (TDA)

El **Análisis Topológico de Datos (TDA)** es un campo emergente que aplica los métodos de la topología algebraica para extraer información estructural de conjuntos de datos complejos, a menudo representados como nubes de puntos en espacios de alta dimensión.[45]

- **Homología Persistente:** La herramienta central del TDA es la **homología persistente**. En lugar de asumir una única escala para analizar los datos, se construye una secuencia de complejos simpliciales (una **filtración**) al hacer crecer gradualmente bolas alrededor de cada punto de datos y conectar los puntos cuyas bolas se intersecan. A medida que el radio de las bolas aumenta, aparecen y desaparecen características topológicas (componentes conexas, lazos, vacíos).[48] La homología persistente rastrea el "nacimiento" y la "muerte" de estas características a lo largo de la filtración.[48]
- **Diagramas de Persistencia y Códigos de Barras:** La idea clave es que las características topológicas que "persisten" a lo largo de un amplio rango de escalas son probablemente características genuinas y estructurales de los datos, mientras que aquellas con una vida corta son probablemente "ruido" o artefactos del muestreo.[48] Los resultados se visualizan de dos maneras equivalentes:
  - **Códigos de Barras:** Cada característica topológica se representa con una barra horizontal que comienza en su escala de "nacimiento" y termina en su escala de "muerte". Las barras largas representan características persistentes y significativas.[48]
  - **Diagramas de Persistencia:** Cada característica se representa como un punto en un plano 2D, con coordenadas (nacimiento, muerte). Los puntos lejos de la diagonal representan características persistentes, mientras que los puntos cercanos a la diagonal representan ruido.[48]
- **Aplicaciones:** El TDA se ha aplicado con éxito en numerosos dominios, incluyendo la biología (para clasificar proteínas según la forma de su estructura tridimensional [50]), la neurociencia (para analizar la estructura de redes neuronales [45]), la medicina (para detectar arritmias en electrocardiogramas [45]) y la genética (para identificar patrones periódicos [51]).

6.3 Biología Estructural

La forma y la estructura son primordiales en biología, y la topología proporciona el lenguaje preciso para describir estas propiedades.

- **Topología del ADN:** El ADN en las células a menudo existe como moléculas circulares que están altamente compactadas y retorcidas. Su estado topológico se describe mediante tres números: el **número de enlace (Lk)**, que cuenta cuántas veces una hebra se enrolla sobre la otra y es un invariante topológico; y el **número de torsión (Tw)** y el **número de enrollamiento (Wr)**, que describen la geometría de la hélice y la trayectoria de su eje en el espacio, respectivamente. Estos están relacionados por la ecuación fundamental $Lk=Tw+Wr$. La gestión de la topología del ADN es vital para procesos como la replicación y la transcripción, y es llevada a cabo por enzimas especializadas llamadas topoisomerasas, que cortan y vuelven a unir las hebras de ADN para alterar su número de enlace.[52]
- **Plegamiento de Proteínas:** La función de una proteína está determinada por su compleja estructura tridimensional. El proceso por el cual una cadena de aminoácidos se pliega en esta forma nativa está guiado por su "paisaje de energía libre". La topología de este paisaje —sus valles (estados estables) y barreras energéticas— determina las posibles rutas de plegamiento y la estabilidad de la proteína final.[54]

6.4 Sistemas Autónomos y Estratégicos

La topología algebraica también ofrece herramientas para analizar problemas de planificación y toma de decisiones en sistemas complejos.

- **Planificación de Movimiento en Robótica:** El problema de planificar el movimiento de un robot desde un punto A a un punto B sin colisiones es fundamentalmente un problema topológico. El conjunto de todas las posibles posiciones y orientaciones de un robot forma un espacio de alta dimensión llamado **espacio de configuraciones**.[56] Los obstáculos en el mundo físico se traducen en "regiones prohibidas" en este espacio. Una trayectoria válida es un camino continuo en la parte "libre" del espacio de configuraciones. La topología de este espacio libre (por ejemplo, si tiene "agujeros" que deben ser rodeados) determina la dificultad del problema de planificación. El invariante llamado
  complejidad topológica, $TC(X)$, mide el número mínimo de reglas continuas necesarias para crear un planificador de movimiento global para un robot, proporcionando una medida de la "inestabilidad" inherente a la navegación en ese espacio.[56]
- **Teoría de Juegos y Equilibrio de Nash:** El Teorema del Punto Fijo de Brouwer es la piedra angular de la prueba de existencia de un **equilibrio de Nash** en la teoría de juegos. Un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias en el que ningún jugador puede mejorar su resultado cambiando unilateralmente su propia estrategia. John Nash demostró que para cualquier juego finito con un número finito de jugadores, siempre existe al menos un equilibrio (si se permiten estrategias mixtas). Su prueba consiste en

construir una función continua desde el espacio de perfiles de estrategias mixtas (que es un conjunto compacto y convexo) hacia sí mismo. Un punto fijo de esta función corresponde precisamente a un equilibrio de Nash, y el Teorema de Brouwer garantiza que tal punto fijo siempre existe.[32]

El diálogo entre la física teórica y la topología algebraica es un claro ejemplo de un ciclo virtuoso. La física no solo se beneficia de las herramientas matemáticas, sino que las intuiciones físicas, como las de la TQFT y la teoría de cuerdas, han inspirado el desarrollo de nuevas y profundas estructuras matemáticas, demostrando que la relación es una simbiosis de descubrimiento mutuo.

Sección VII: Perspectiva Histórica y Horizontes Futuros

La topología algebraica, como la conocemos hoy, es el resultado de más de un siglo de desarrollo, marcado por la genialidad de figuras visionarias y una tendencia constante hacia una mayor abstracción y rigor. Su historia no es solo una crónica de resultados, sino una narrativa sobre cómo las intuiciones geométricas iniciales requirieron la construcción de un andamiaje algebraico cada vez más sofisticado para ser plenamente realizadas.

7.1 Los Orígenes: El "Analysis Situs" de Henri Poincaré

Se considera universalmente a **Henri Poincaré** (1854-1912) como el padre de la topología algebraica.[61] Antes de él, existían ideas topológicas aisladas, pero fue Poincaré quien, en su monumental memoria de 1895,
Analysis Situs, emprendió el primer estudio sistemático y coherente de las propiedades de los espacios que son independientes de su geometría.[62]

Poincaré, conocido por su extraordinaria intuición geométrica más que por su rigor formal [61], introdujo dos de los conceptos más fundamentales del campo:

1. **El Grupo Fundamental:** En 1894, introdujo la idea de clasificar superficies estudiando los lazos que se pueden trazar sobre ellas, sentando las bases para la teoría de la homotopía y el grupo fundamental.[62]
2. **La Homología:** Desarrolló una primera versión de la teoría de la homología a través de los **números de Betti**, que contaban los "agujeros" de diferentes dimensiones de una variedad.

Su trabajo culminó en una de las preguntas más famosas y fructíferas de la historia de las matemáticas: la **Conjetura de Poincaré**. Formulada en 1904, conjeturaba que la 3-esfera es la única 3-variedad compacta y simplemente conexa.[61] Este problema permaneció sin resolver durante casi un siglo, y los intentos de demostrarlo impulsaron una inmensa cantidad de investigación y el desarrollo de nuevas técnicas en topología.[65] Su resolución final por Grigori

Perelman en 2002-2003 fue la culminación de este legado histórico.[64]

7.2 El Desarrollo del Siglo XX: Figuras Clave

Tras los trabajos fundacionales de Poincaré, el siglo XX vio la transformación de la topología algebraica de un conjunto de ideas intuitivas a una disciplina rigurosa y axiomática.

- **Emmy Noether (1882-1935):** Aunque no trabajó directamente en topología, su revolución en el álgebra abstracta fue indispensable para el desarrollo de la topología algebraica moderna. Al reformular la teoría de anillos, módulos e ideales en un marco axiomático, proporcionó el lenguaje preciso y la estructura necesarios para que la teoría de la homología pudiera ser formalizada como una teoría de grupos abelianos y módulos.[69] Su influencia, a menudo a través de sus estudiantes y colegas, fue fundamental para dotar al campo del rigor algebraico que necesitaba.[71]
- **Heinz Hopf (1894-1971):** Fue una figura central en el desarrollo de la teoría de la homotopía. Su trabajo fue crucial para comprender la estructura de los grupos de homotopía superiores de las esferas, un problema notoriamente difícil. Introdujo conceptos clave como la **fibración de Hopf** (un mapa sorprendente de la 3-esfera a la 2-esfera) y el **invariante de Hopf**, que sentaron las bases para gran parte de la teoría de la homotopía moderna. Su trabajo también condujo al desarrollo de las **álgebras de Hopf**, estructuras que combinan un álgebra y un co-álgebra y que tienen aplicaciones en toda la matemática y la física teórica.[73]
- **Jean Leray (1906-1998) y Jean-Pierre Serre (1926-):** Estos matemáticos franceses desarrollaron una de las herramientas computacionales más potentes de la disciplina: las **secuencias espectrales**. Leray las introdujo mientras era prisionero de guerra para estudiar la topología de los espacios fibrados. Serre, en su tesis doctoral, adaptó y aplicó esta maquinaria para lograr avances espectaculares en el cálculo de los grupos de homotopía de las esferas, un problema que se consideraba intratable.[75] Las secuencias espectrales representan un alto nivel de abstracción, pero son la herramienta que permite resolver problemas concretos que de otro modo estarían fuera de alcance.

Esta trayectoria histórica ilustra una tendencia clara: las ideas geométricas intuitivas de Poincaré requirieron la construcción de capas sucesivas de abstracción y rigor —el álgebra de Noether, la teoría de categorías de Eilenberg y MacLane, las secuencias espectrales de Leray y Serre— para convertirse en la teoría matemática robusta y poderosa que es hoy.

7.3 Fronteras Actuales y Problemas Abiertos

La topología algebraica sigue siendo un campo de investigación vibrante y activo, con numerosos problemas abiertos que impulsan la frontera del conocimiento.

- **Grupos de Homotopía de Esferas:** A pesar de los avances de Serre y otros, el cálculo completo de los grupos de homotopía de las esferas, πk(Sn), sigue siendo uno de los problemas abiertos más importantes del campo. Su estructura es increíblemente rica y compleja, y su comprensión total parece requerir nuevas ideas fundamentales.[9]

- **K-Teoría Algebraica:** Esta es una teoría homológica sofisticada que estudia estructuras algebraicas como anillos y módulos. La **conjetura de Farrell-Jones** en K-teoría algebraica es un problema central que busca relacionar la K-teoría de un anillo de grupo con la de sus subgrupos más simples.[78]
- **Conjeturas en Geometría Algebraica:** La topología algebraica está profundamente entrelazada con la geometría algebraica. La **conjetura de Hodge**, uno de los Problemas del Milenio del Clay Mathematics Institute, es una pregunta profunda sobre los ciclos en variedades algebraicas complejas que busca conectar la topología (clases de homología) con la geometría (subvariedades algebraicas).[79]
- **Nuevas Direcciones:** La investigación activa también se centra en refinar y aplicar las herramientas existentes en nuevos contextos. Esto incluye el desarrollo de la **topología algebraica no abeliana** (utilizando grupoides en lugar de grupos), la exploración de nuevas teorías de (co)homología y la continua expansión de las aplicaciones del TDA a campos emergentes como la inteligencia artificial y la ciencia de materiales.[82]

En conclusión, la topología algebraica ha evolucionado desde sus orígenes como el "análisis de la posición" hasta convertirse en un pilar central de las matemáticas puras y una herramienta indispensable en la ciencia aplicada. Su capacidad para destilar la esencia estructural de los objetos, traduciendo la forma en álgebra, asegura su continua relevancia y su posición en la vanguardia del descubrimiento científico.

Fuentes citadas

1. ¿Qué es la topología algebraica y por qué las personas la estudian? - Quora, acceso: agosto 16, 2025, https://es.quora.com/Qu%C3%A9-es-la-topolog%C3%ADa-algebraica-y-por-qu%C3%A9-las-personas-la-estudian
2. es.wikipedia.org, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa_algebraica#:~:text=La%20topolog%C3%ADa%20algebraica%20es%20una,para%20estudiar%20los%20espacios%20topol%C3%B3gicos.
3. Topología - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa
4. Topología algebraica: Grupos, Espacios | StudySmarter, acceso: agosto 16, 2025, https://www.studysmarter.es/resumenes/matematicas/matematicas-puras/topologia-algebraica/
5. INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA - UNED, acceso: agosto 16, 2025, http://portal.uned.es/EadmonGuiasWeb/htdocs/abrir_fichero/abrir_fichero.jsp?idGuia=35129
6. TOPOLOGÍA ALGEBRAICA - EHU, acceso: agosto 16, 2025, https://www.ehu.eus/~mtwmastm/TopAlg_Master_1415.pdf

7. TOPOLOGÍA ALGEBRAICA Curso 2005/2006, acceso: agosto 16, 2025, https://www.ehu.eus/~mtwmastm/TopoAlg0506.pdf
8. TOPOLOGÍA ALGEBRAICA Curso 2007/2008, acceso: agosto 16, 2025, https://www.ehu.eus/~mtwmastm/TopoAlg0708.pdf
9. Topología algebraica - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Topolog%C3%ADa_algebraica
10. Invitación a la teoría de homotopía: Grupo fundamental y espacios ..., acceso: agosto 16, 2025, https://www.usfq.edu.ec/sites/default/files/2021-04/osorno.pdf
11. GRUPO FUNDAMENTAL, SUPERFICIES, NUDOS Y APLICACIONES RECUBRIDORAS - Universidad de La Rioja, acceso: agosto 16, 2025, https://www.unirioja.es/cu/luhernan/hfolder/htp.pdf
12. TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER - ResearchGate, acceso: agosto 16, 2025, https://www.researchgate.net/profile/Miguel-Vivas-Cortez/publication/328808378_TEOREMA_DEL_PUNTO_FIJO_DE_BROUWER/links/5be43a234585150b2ba7aad6/TEOREMA-DEL-PUNTO-FIJO-DE-BROUWER.pdf
13. Invitación a la teoría de homotopía: Grupo fundamental y espacios recubridores - Dialnet, acceso: agosto 16, 2025, https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6523981.pdf
14. Caminos y homotopías | Grupo fundamental | Topología algebraica - YouTube, acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=nStpLjYHEvc
15. Grupos fundamentales y el Teorema de Seifert-van Kampen, acceso: agosto 16, 2025, https://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/Monografias/Materias/O/Blanca%20-%20Grupos%20fundamentales%20y%20el%20Teorema%20de%20S-VK.pdf
16. TOPOLOGÍA ALGEBRAICA: HOMOLOGÍA SINGULAR Índice 1. Introducción 2 2. Definiciones básicas 3 3. Invarianza homotópica 5 4., acceso: agosto 16, 2025, http://blogs.mat.ucm.es/jesusr/wp-content/uploads/sites/52/2020/03/manuel.pdf
17. Introducción a la Topología Algebraica (2020): Grupo fundamental y cubrientes - YouTube, acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/playlist?list=PLw6VbGzthqgeKFVvAo1JJi2o9W90qCEr5
18. Homología (matemática) - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Homolog%C3%ADa_(matem%C3%A1tica)
19. Topología Algebraica - Clase 8: Homología singular - YouTube, acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=xB-dE0Fmrvw
20. Homología (matemática), acceso: agosto 16, 2025, https://math.uprrp.edu/pdfs/topo_alg/Homologia.pdf
21. Cohomology and Cup Product | Algebraic Topology Class Notes - Fiveable, acceso: agosto 16, 2025, https://library.fiveable.me/algebraic-topology/unit-7
22. Cup Product - Algebraic Topology 21 - YouTube, acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=uenkIqOKjng
23. Cup product - Wikipedia, acceso: agosto 16, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Cup_product
24. morfismos.cinvestav.mx, acceso: agosto 16, 2025,

https://morfismos.cinvestav.mx/sites/default/files/Upload/vol02-n2-3.pdf
25. Teorema de Seifert-van Kampen - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Seifert-van_Kampen
26. Seifert–Van Kampen theorem - Wikipedia, acceso: agosto 16, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Seifert%E2%80%93Van_Kampen_theorem
27. Sucesión de Mayer-Vietoris - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Mayer-Vietoris
28. Homología singular - la sucesión de Mayer-Vietoris - YouTube, acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=f3_T5UKIDZw
29. MAT 7570 The Mayer-Vietoris Sequence, acceso: agosto 16, 2025, https://cpb-us-e1.wpmucdn.com/s.wayne.edu/dist/1/24/files/2021/05/The-Mayer-Vietoris-Sequence.pdf
30. Equilibrio General Competitivo y Teorema del Punto Fijo de Brouwer - YouTube, acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=USI_Kr7ZYLo
31. Teorema del punto fijo de Brouwer - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_punto_fijo_de_Brouwer
32. Una introducción a los teoremas de punto fijo y a la existencia de equilibrios en economía - Páginas Personales UNAM, acceso: agosto 16, 2025, https://paginaspersonales.unam.mx/app/webroot/files/3968/Publica_20230717185633.pdf
33. Teoría topológica cuántica de campo - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_topol%C3%B3gica_cu%C3%A1ntica_de_campo
34. Teoría Cuántica de Campos y Topología : r/mathematics - Reddit, acceso: agosto 16, 2025, https://www.reddit.com/r/mathematics/comments/1ja9rzh/quantum_field_theory_and_topology/?tl=es-es
35. Topological Quantum Field Theory for Character Varieties - Docta Complutense, acceso: agosto 16, 2025, https://docta.ucm.es/bitstreams/6a6e6bda-db8b-467b-ac63-ce1c6d60878d/download
36. Simetría especular (teoría de cuerdas) - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Simetr%C3%ADa_especular_(teor%C3%ADa_de_cuerdas)
37. Teoría de cuerdas - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_cuerdas
38. Teoría de Cuerdas: Conceptos, Aplicaciones | StudySmarter, acceso: agosto 16, 2025, https://www.studysmarter.es/resumenes/matematicas/fisica-teorica-y-matematica/teoria-de-cuerdas/
39. Introducción a las Variedades de Calabi - Yau en Teoría de Cuerdas - YouTube, acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=iPIz7UdHP60

40. Variedades de Calabi - Yau en Teoría de Cuerdas - YouTube, acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=O4Dp-eeAhXU
41. Segundo trabajo. Física atómica y materia condensada. Aislantes ..., acceso: agosto 16, 2025, https://bigbang.nucleares.unam.mx/~jimenez/FAMC/Trabajo1_2019/ValdezAvilaD_AislantesTopologicos.pdf
42. Revolución topológica en materia condensada - gefes rsef, acceso: agosto 16, 2025, https://gefes-rsef.org/revolucion-topologica-en-materia-condensada/
43. Topological phases of mater and open quantum systems | Documentos - Universidad Complutense de Madrid, acceso: agosto 16, 2025, https://produccioncientifica.ucm.es/documentos/5d1df61e29995204f7661c8d
44. ¿Qué es lo topológico en los aislantes topológicos? : r/Physics - Reddit, acceso: agosto 16, 2025, https://www.reddit.com/r/Physics/comments/17dag5c/what_is_topological_in_topological_insulators/?tl=es-es
45. Homología persistente para el análisis de datos - IMAL - CONICET, acceso: agosto 16, 2025, https://imal.conicet.gov.ar/2628-2/
46. PDF - CENATAV, acceso: agosto 16, 2025, http://www.cenatav.co.cu/doc/RTecnicos/RT%20SerieAzul_088web.pdf
47. Topological data analysis and machine learning - alphaXiv, acceso: agosto 16, 2025, https://www.alphaxiv.org/es/overview/2206.15075v3
48. Análisis de datos topológicos - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/An%C3%A1lisis_de_datos_topol%C3%B3gicos
49. Homología Persistente | Homología, misión 5 - YouTube, acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=-QO8hO7dGTU
50. Homología Persistente para el Análisis de Datos - Ximena ..., acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=R6JQAH0gPsw
51. Grado en Matemáticas Título del trabajo: La teoría de la persistencia Nombre del estudiante: Aitor Izuzquiza Gimeno - e-Spacio UNED, acceso: agosto 16, 2025, https://e-spacio.uned.es/bitstreams/2a44776f-5b81-4d95-ac63-408efb376336/download
52. Topología del ADN nucleosomal en centrómeros y ... - DDD UAB, acceso: agosto 16, 2025, https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2014/hdl_10803_284324/odi1de1.pdf
53. Análisis del anudamiento del ADN intracelular, acceso: agosto 16, 2025, https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/140883/1/AVG_TESIS.pdf
54. Cuantificando los mecanismos de plegamiento de las proteínas | SPECTRINROUGHNESS Project | Resultados resumidos | FP7 | CORDIS | Comisión Europea, acceso: agosto 16, 2025, https://cordis.europa.eu/article/id/89506-quantifying-protein-folding-mechanisms/es
55. Plegamiento de proteínas - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Plegamiento_de_prote%C3%ADnas
56. (PDF) Topological robotics: topological complexity of motion planners, acceso: agosto 16, 2025, https://www.researchgate.net/publication/267003030_Topological_robotics_topol

ogical_complexity_of_motion_planners
57. Planeación de movimiento de robots móviles para ambientes fijos con incertidumbre - Repositorio Institucional del Tecnológico Nacional de México (RI - TecNM), acceso: agosto 16, 2025, https://rinacional.tecnm.mx/bitstream/TecNM/3251/1/G93070913_donacion_tesis_bib.pdf
58. La complejidad topológica del planificador de movimientos robótico - CORE, acceso: agosto 16, 2025, https://core.ac.uk/download/51285638.pdf
59. Teoremas de Punto Fijo y la Existencia de Equilibrios de Nash para Juegos no Cooperativos José Miguel Pérez Urquidi - Licenciatura en Matemáticas, acceso: agosto 16, 2025, https://lic.mat.uson.mx/tesis/146TesisUrquidi.pdf
60. El Teorema del Punto Fijo de Brouwer y algunas aplicaciones a la ..., acceso: agosto 16, 2025, https://zaguan.unizar.es/record/110345/files/TAZ-TFG-2021-2983.pdf
61. La conjetura de Poincaré. Un problema de topología - ResearchGate, acceso: agosto 16, 2025, https://www.researchgate.net/publication/41395254_La_conjetura_de_Poincare_Un_problema_de_topologia/fulltext/0e60837ff0c46d4f0acc3e99/La-conjetura-de-Poincare-Un-problema-de-topologia.pdf
62. Henri Poincaré - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincar%C3%A9
63. Carlos Ivorra Castillo TOPOLOGÍA ALGEBRAICA, acceso: agosto 16, 2025, https://www.uv.es/ivorra/Libros/TA.pdf
64. La conjetura de Poincaré - Revista Mètode, acceso: agosto 16, 2025, https://metode.es/revistas-metode/monograficos/la-conjectura-de-poincare.html
65. Historia de la Conjetura de Poincaré y de las mentes que dejó por el camino. - infoSocuéllamos, acceso: agosto 16, 2025, https://infosocuellamos.com/historia-de-la-conjetura-de-poincare-y-de-las-mentes-que-dejo-por-el-camino/
66. Conjetura de Poincaré - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_Poincar%C3%A9
67. La_conjetura_de_Poincare_GU, acceso: agosto 16, 2025, https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/56009/1/La_conjetura_de_Poincare_GUERRERO_MARTINEZ_NADIA_MARIA.pdf
68. El PROBLEMA RESUELTO del MILLÓN de DOLARES Topología ALGEBRAICA e INVESTIGACIÓN I Hora GAUSSIANA - YouTube, acceso: agosto 16, 2025, https://www.youtube.com/watch?v=sudmbm_OvSI
69. Emmy Noether: Version para imprimir - Aula virtual UPTC, acceso: agosto 16, 2025, https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Noether-1.asp.htm
70. Emmy Noether Amalie - Revista Petra, acceso: agosto 16, 2025, https://revistapetra.com/emmy-noether-amalie/
71. Emmy Noether - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025,

https://es.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether
72. Emmy Noether y el inicio del ´Algebra Abstracta - La Gaceta de la RSME, acceso: agosto 16, 2025, https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=81
73. Heinz Hopf - Wikipedia, acceso: agosto 16, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Heinz_Hopf
74. THE BEGINNINGS OF THE THEORY OF HOPF ALGEBRAS 1. Introduction In this note, we address the following questions: Who introduced t - FaMAF - Universidad Nacional de Córdoba, acceso: agosto 16, 2025, https://www.famaf.unc.edu.ar/~andrus/historia_hopf_final.pdf
75. Jean-Pierre Serre, medalla Fields - La Gaceta de la RSME, acceso: agosto 16, 2025, https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=227
76. Serre spectral sequence - Wikipedia, acceso: agosto 16, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Serre_spectral_sequence
77. Fragments of the history of sheaf theory - ResearchGate, acceso: agosto 16, 2025, https://www.researchgate.net/publication/227007411_Fragments_of_the_history_of_sheaf_theory
78. Topología y Teoría de Conjuntos | CCM UNAM - Centro de Ciencias Matemáticas, acceso: agosto 16, 2025, https://matmor.unam.mx/es/investigacion/topologia-y-teoria-de-conjuntos
79. Conjetura de Hodge | PDF | Espacios topológicos | Conceptos, acceso: agosto 16, 2025, https://id.scribd.com/document/474472665/Conjetura-de-Hodge
80. Conjetura de Hodge - Wikipedia, la enciclopedia libre, acceso: agosto 16, 2025, https://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_Hodge
81. What are some open problems in algebraic geometry? - MathOverflow, acceso: agosto 16, 2025, https://mathoverflow.net/questions/37172/what-are-some-open-problems-in-algebraic-geometry
82. Análisis Topológico de Datos - Colegio de Matemáticas Bourbaki, acceso: agosto 16, 2025, https://www.colegio-bourbaki.com/blog/analisis-topologico-de-datos
83. Open problems in algebraic topology and homotopy theory ..., acceso: agosto 16, 2025, https://mathoverflow.net/questions/135765/open-problems-in-algebraic-topology-and-homotopy-theory