

Taller: Introducción al control

Qué es un sistema retroalimentado, concepto de error y control PID

MSc. Gerardo Emir Sánchez Valdés

24 de noviembre de 2025

Objetivos del taller

- **Hora 1:** Fundamentos del control automático
- **Hora 2:** Sistemas retroalimentados y concepto de error
- **Hora 3:** Control PID - Parte Proporcional e Integral
- **Hora 4:** Control PID - Parte Derivativa y aplicaciones prácticas

¿Cómo un drone se mantiene estable en el aire?

¿Cómo el control de cruce de un carro mantiene una velocidad constante sin nuestra intervención?

¿Cómo un termostato mantiene la temperatura perfecta en su casa?

¿Qué significa Controlar?

Definición Simple

Controlar = Hacer que algo se comporte exactamente como queremos

Ejemplos Cotidianos:

- Conducir un carro
- Regular la ducha
- Escribir en teclado
- Cocinar (temperatura)

En Ingeniería:

- Control automático
- Sistemas autónomos
- Robots industriales
- Dispositivos inteligentes

Sistemas de Control en la Vida Real



Figura: Termostato



Figura: Control de crucero

- **Temperatura:** Aire acondicionado, refrigeradores
- **Velocidad:** Control de crucero, trenes, aviones
- **Posición:** Robots, drones, cámaras
- **Nivel:** Tanques de agua, piscinas

Elementos de un Sistema de Control

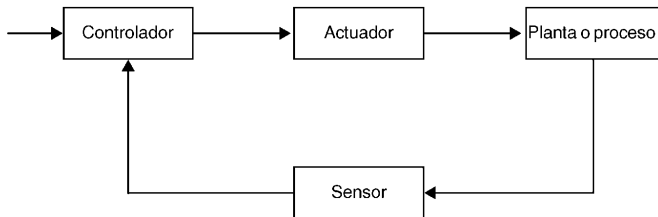


Figura: Diagrama de bloques de un sistema de control

- ❶ **Variable a controlar:** Lo que queremos controlar
- ❷ **Sensor:** Mide el estado actual
- ❸ **Controlador:** Toma decisiones (el cerebro)
- ❹ **Actuador:** Ejecuta las acciones
- ❺ **Planta:** Sistema que estamos controlando

¿Qué es la Retroalimentación?

Definición

Retroalimentación = Usar información del resultado para ajustar la acción futura

Con Retroalimentación:

- Sistema en lazo cerrado
- Preciso y estable
- Se adapta a cambios
- Ejemplo: Termostato

Sin Retroalimentación:

- Sistema en lazo abierto
- Menos preciso
- No se adapta
- Ejemplo: Temporizador de riego

Analogía Humana: Beber de un Vaso

Beber con los ojos abiertos

Con retroalimentación:

- Se observa el vaso
- Decides movimiento
- Ajustas posición en dependencia de donde está el vaso
- Éxito garantizado

Beber con ojos cerrados

Sin retroalimentación:

- No observas el vaso
- Decides movimiento
- Movimientos a ciegas, no sabes donde está el vaso actualmente
- Posible derrame

El Concepto de Error

Definición Matemática

El error es la diferencia entre lo que queremos menos lo que tenemos

$$\text{Error} = \text{Valor Deseado} - \text{Valor Actual}$$

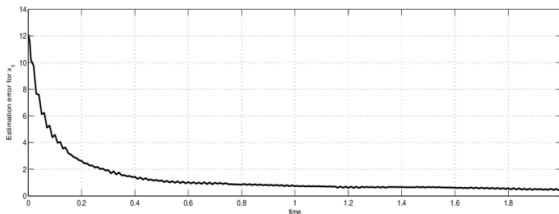


Figura: Visualización del error

Ejemplo: Control de Temperatura

Iteración	Temp Actual	Error	Acción
1	18°C	+4°C	PRENDER
2	21°C	+1°C	PRENDER
3	23°C	-1°C	APAGAR
4	22°C	0°C	MANTENER

Cuadro: Control de temperatura (Deseado: 22°C)

Decisiones del Controlador

- Error positivo → Aumentar potencia para aumentar temperatura
- Error negativo → Disminuir potencia para disminuir temperatura
- Error cero → Mantener temperatura actual

Importancia del Error en el Control

El error nos dice:

- Qué tan lejos estamos del objetivo
- En qué dirección debemos movernos
- Qué tan rápido debemos actuar
- Cuándo debemos detenernos

Principio Fundamental

Sin error, no hay corrección. Sin corrección, no hay control.

Modelo Matemático del Sistema Térmico

Desarrollo del Ejemplo de Control de Temperatura

Sistema Físico

- Temperatura ambiente: $T_{\text{amb}} = 15^{\circ}\text{C}$
- Temperatura deseada: $T_{\text{ref}} = 22^{\circ}\text{C}$
- Temperatura inicial: $T_{\text{ini}} = 15^{\circ}\text{C}$
- Potencia máxima del calentador: $u_{\text{max}} = 50\text{W}$

Modelo de Segundo Orden

$$G(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

- $K = 0,8^{\circ}\text{C/W}$ (Ganancia del sistema)
- $\tau = 10\text{ s}$ (Constante de tiempo)
- $\zeta = 0,7$ (Coeficiente de amortiguamiento)

Ecuaciones Diferenciales del Sistema

De la Función de Transferencia al Dominio del Tiempo

Función de Transferencia

$$G(s) = \frac{T(s)}{U(s)} = \frac{0,8}{100s^2 + 14s + 1}$$

Ecuación Diferencial

Multiplicando cruzado:

$$(100s^2 + 14s + 1)T(s) = 0,8U(s)$$

Transformando al dominio del tiempo:

$$100 \frac{d^2 T}{dt^2} + 14 \frac{dT}{dt} + T = 0,8u(t) + T_{\text{amb}}$$

Discretización del Modelo

Preparando para Simulación Numérica

Aproximación de Derivadas

Usando diferencias finitas:

$$\frac{dT}{dt} \approx \frac{T_k - T_{k-1}}{\Delta t}$$
$$\frac{d^2 T}{dt^2} \approx \frac{T_k - 2T_{k-1} + T_{k-2}}{(\Delta t)^2}$$

Con $\Delta t = 0,1$ s

Ecuación en Diferencias

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$100 \frac{T_k - 2T_{k-1} + T_{k-2}}{0,01} + 14 \frac{T_k - T_{k-1}}{0,1} + T_k = 0,8u_k + 15$$

Ecuación final de la Simulación

Ecuación Reorganizada

Despejando T_k se obtiene:

$$T_k = \frac{2T_{k-1} - T_{k-2} + 0,01(0,8u_k - 140(T_{k-1} - T_{k-2}) - (T_{k-1} - 15))}{1,01}$$

Función de Transferencia en Lazo Abierto

Análisis del Sistema sin Retroalimentación

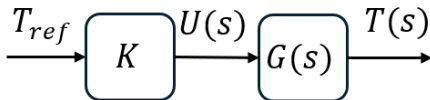


Figura: Diagrama de Bloques - Lazo Abierto

Función de Transferencia Total

$$\frac{T(s)}{T_{ref}} = K_{open} \cdot G(s) = K_{open} \cdot \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

$$\frac{T(s)}{T_{ref}} = \frac{K_{open}K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

Problema Fundamental

La ganancia en DC es 1, pero no hay corrección de errores ni rechazo a perturbaciones.

Función de Transferencia en Lazo Cerrado

Análisis del Sistema con Retroalimentación

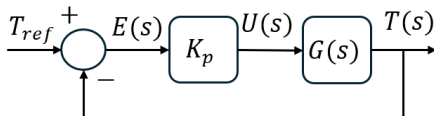


Figura: Diagrama de Bloques - Lazo Cerrado

Función de Transferencia Total

$$\frac{T(s)}{T_{ref}} = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)} = \frac{K_p \cdot \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}}{1 + K_p \cdot \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1}}$$

Función de Transferencia en Lazo Cerrado (Cont.)

Forma Simplificada

Función de Transferencia Final

$$\frac{T(s)}{T_{\text{ref}}} = \frac{K_p K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1 + K_p K}$$

Sustituyendo Valores Numéricos

$$\frac{T(s)}{T_{\text{ref}}} = \frac{2,5 \cdot 0,8}{100s^2 + 14s + 1 + 2,5 \cdot 0,8} = \frac{2,0}{100s^2 + 14s + 3,0}$$

Forma Estándar

$$\frac{T(s)}{T_{\text{ref}}} = \frac{0,667}{33,33s^2 + 4,667s + 1}$$

Control en Lazo Abierto

Análisis Teórico

Cálculo de la Acción de Control

Para alcanzar $T_{\text{ref}} = 22^{\circ}\text{C}$ partiendo de $T_{\text{amb}} = 15^{\circ}\text{C}$:

$$u_{\text{open}} = \frac{T_{\text{ref}} - T_{\text{amb}}}{K} = \frac{22 - 15}{0,8} = 8,75\text{W}$$

Señal de Control en Lazo Abierto

$$u_{\text{open}}(t) = 8,75\text{W} \quad \text{para } t \geq 0$$

Problema del Lazo Abierto

- No compensa perturbaciones
- Error en estado estacionario si el modelo no es exacto
- No se adapta a cambios

Control Proporcional en Lazo Cerrado

Ley de Control con Retroalimentación

Definición del Error

$$e(t) = T_{\text{ref}} - T(t)$$

Donde:

- $e(t) > 0$: Temperatura por debajo de la referencia
- $e(t) < 0$: Temperatura por encima de la referencia
- $e(t) = 0$: Temperatura en la referencia

Ley de Control PROPORCIONAL

$$u(t) = K_p \cdot e(t) = K_p(T_{\text{ref}} - T(t))$$

Con $K_p = 2,5 \text{ W/}^\circ\text{C}$

Implementación del Control P

Consideraciones Prácticas

Ecuación de Control Discreta

Para cada instante k :

$$u_k = K_p(T_{\text{ref}} - T_k)$$

Algoritmo Completo

- 1 Medir temperatura actual T_k
- 2 Calcular error $e_k = T_{\text{ref}} - T_k$
- 3 Calcular acción de control $u_k = K_p e_k$
- 4 Aplicar saturación
- 5 Ejecutar acción en el sistema

Análisis del Error

Comparación Lazo Abierto vs Lazo Cerrado

Integral del Error Absoluto (IAE)

Métrica de desempeño:

$$\text{IAE} = \int_0^{t_f} |e(t)| dt$$

- **Lazo Abierto:** IAE $\approx 45,2$
- **Lazo Cerrado:** IAE $\approx 12,8$

Conclusión

El control en lazo cerrado reduce el error en un 72 % y mejora el desempeño del sistema.

Simulación y Resultados

Comportamiento del Sistema

Comportamiento del Error

- **Lazo Abierto:**

- Error inicial: 7°C
- Error final: 0.5°C
- Respuesta lenta

- **Lazo Cerrado:**

- Error inicial: 7°C
- Error final: 0.1°C
- Respuesta rápida
- Sobreimpulso pequeño

Señal de Control

- **Lazo Abierto:**

- Constante: 8.75W
- No se adapta

- **Lazo Cerrado:**

- Variable: 0-17.5W
- Se adapta al error

Ventaja

La retroalimentación permite que el sistema se adapte automáticamente y compense errores del modelo y perturbaciones.

Interpretación Física del Comportamiento

¿Qué Está Pasando en el Sistema?

Fase Inicial (0-10s)

- Error grande: 7°C
- Control P aplica máxima potencia
- Calentador a tope
- Temperatura sube rápidamente

Fase Media (10-25s)

- Error disminuye
- Potencia se reduce
- Sistema se acerca a referencia

Fase Final (25-50s)

- Error pequeño
- Pequeños ajustes
- Sistema estabilizado
- Compensación automática

Comportamiento ante perturbaciones

Si cambia la temperatura ambiente o hay perturbaciones, el control P se adapta automáticamente manteniendo la temperatura deseada.

Conclusiones del Ejemplo

Ventajas del Lazo Cerrado

- **Precisión:** Menor error en el estado estacionario
- **Robustez:** Tolerante a perturbaciones
- **Adaptabilidad:** Se ajusta automáticamente
- **Estabilidad:** Mejor desempeño dinámico

Limitaciones del Control P

- **Error residual:** Pequeño error en estado estacionario
- **Sobreimpulso:** Puede exceder temporalmente la referencia

Próximo Tema

En la siguiente sesión veremos cómo el control PI elimina completamente el error en estado estacionario.

Presentando al Controlador PID

Tres Estrategias en Una

¿Qué significa PID?

- **P** = Proporcional (Respuesta inmediata)
- **I** = Integral (Corrección acumulada)
- **D** = Derivativo (Anticipación futura)

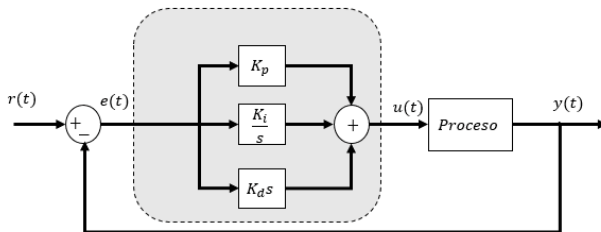


Figura: Diagrama del controlador PID

Analogía del Conductor

Manteniendo 100 km/h



Figura: Cerebro P

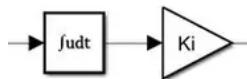


Figura: Cerebro I

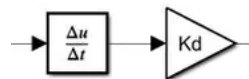


Figura: Cerebro D

Proporcional:

- Mira velocímetro
- Error actual: 95 km/h
- Ajusta acelerador

Integral:

- Recuerda: 98 km/h \times 2 min
- Error acumulado
- Da empujón extra

Derivativo:

- Ve aceleración rápida
- 95 \rightarrow 99 km/h rápido
- Frena suavemente

Encontrando el Balance Correcto

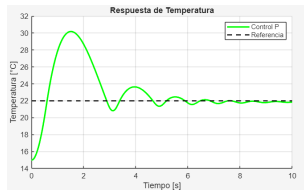


Figura: K_p muy grande

Problemas:

- Oscilaciones
- Sobreimpulso
- Inestabilidad

Problema del Control P Puro

El Error en Estado Estacionario

Fenómeno observado:

- El sistema se acerca al objetivo
- Pero nunca llega exactamente
- Siempre queda un pequeño error
- Esto se llama **error en estado estacionario**

¿Por qué ocurre?

- Cuando el error es pequeño, la acción P también lo es
- La acción P no es suficiente para la última corrección
- Se necesita una acción adicional...

Parte I: Control Integral

Eliminando el Error Permanente

Concepto Clave

La acción Integral **acumula** el error a lo largo del tiempo y sigue corrigiendo hasta eliminar completamente el error.

Fórmula del Control Integral

$$\text{Acción}_I = K_i \times \sum \text{Errores Pasados}$$

Donde:

- K_i = Ganancia integral
- \sum = Suma de todos los errores
- Errores pasados = Historial de errores

Ejemplo Práctico: Aplicando la Parte I

Control de Velocidad con PI

Escenario Extendido

- Velocidad deseada: 100 km/h
- Historial de errores: +10, +8, +5 km/h
- $K_p = 2$, $K_i = 0,1$

Cálculo PI

$$\text{Acción}_P = 2 \times 5 = 10$$

$$\text{Acción}_I = 0,1 \times (10 + 8 + 5) = 2,3$$

$$\text{Acción Total} = 10 + 2,3 = 12,3 \text{ unidades}$$

Observación: La parte I agrega 2.3 unidades extra porque recuerda que hemos estado lentos durante varios intervalos.

Características del Control Integral

Ventajas y Desventajas

✓Ventajas:

- Elimina error permanente
- Mejora precisión a largo plazo
- Compensa perturbaciones constantes
- Logra el objetivo exacto

Desventajas:

- Puede causar sobreimpulso (overshoot)
- Respuesta más lenta
- Puede causar oscilaciones
- Sensible a errores de medición

Punto Importante

La parte I es **persistente** - sigue actuando mientras exista error, sin importar cuán pequeño sea.

Parte D: Control Derivativo

Anticipando el Futuro

Concepto Más Avanzado

La acción Derivativa mira la **tasa de cambio** del error y anticipa el comportamiento futuro del sistema.

Fórmula del Control Derivativo

$$\text{Acción}_D = K_d \times \frac{\Delta \text{Error}}{\Delta \text{Tiempo}}$$

Donde:

- K_d = Ganancia derivativa
- ΔError = Cambio en el error
- ΔTiempo = Período de tiempo

Analogía del Semáforo

Entendiendo la Parte D

Escenario:

- Semáforo en rojo a 100m
- Vas a 50 km/h
- **Conducción normal:**
 - Sueltas acelerador
 - Frenas suavemente
 - Paras perfectamente

¿Qué Hace la componente D?

- **No espera** a estar a 1m del semáforo
- **Anticipa** la necesidad de frenar
- **Mira** qué tan rápido se acerca
- **Actúa** proporcionalmente a la rapidez de aproximación

Características del Control Derivativo

El Estabilizador

✓Ventajas:

- Reduce oscilaciones
- Mejora estabilidad
- Suaviza la respuesta
- Anticipa sobreimpulsos
- Respuesta más rápida

Desventajas:

- Sensible al ruido
- Difícil de sintonizar
- Amplifica errores de medición

Uso Práctico

En muchos sistemas simples, se usa solo PI. La parte D se agrega cuando se necesita mayor estabilidad y respuesta rápida.

Fórmula Completa del Control PID

Uniendo las Tres Partes

Ecuación del Controlador PID

$$\text{Salida} = K_p \times e(t) + K_i \times \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \times \frac{de(t)}{dt}$$

Términos:

- $e(t)$ = Error en el tiempo t
- $\int e(\tau) d\tau$ = Integral del error
- $\frac{de(t)}{dt}$ = Derivada del error
- K_p, K_i, K_d = Ganancia

Sintonización del PID

Encontrando los Valores Correctos

Método Práctico de Sintonización

- 1 **Empezar con P:** Aumentar K_p hasta que el sistema oscile, luego reducir a la mitad
- 2 **Agregar I:** Empezar con K_i pequeño y aumentar hasta eliminar el error permanente
- 3 **Agregar D:** Añadir K_d pequeño para reducir oscilaciones y sobreimpulso
- 4 **Ajustar fino:** Refinar los tres parámetros iterativamente