

# Algunas aplicaciones del análisis de series de tiempo de imágenes satelitales de México

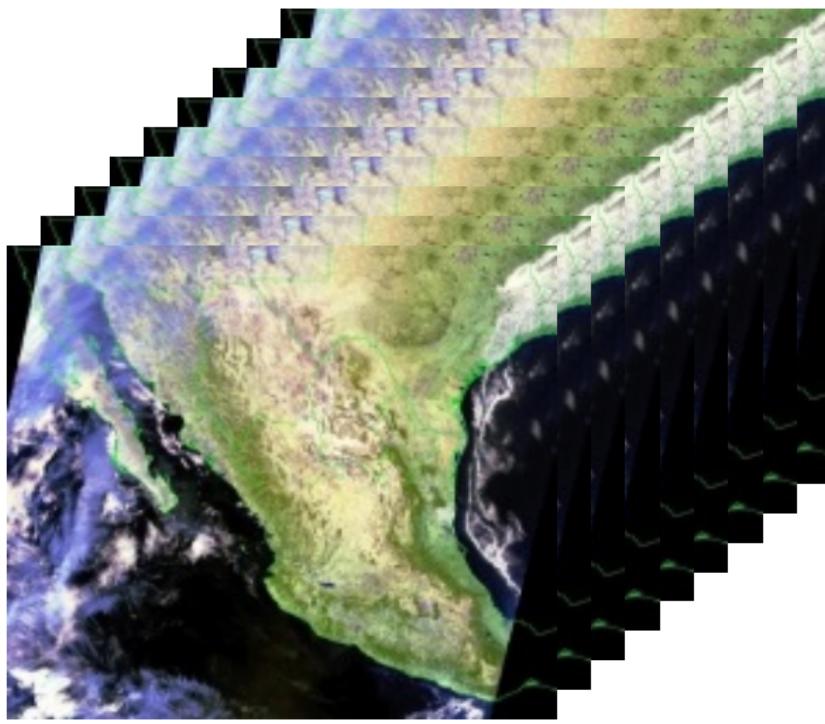
Inder Tecuapetla Gómez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>[CONACyT](#)-CONABIO

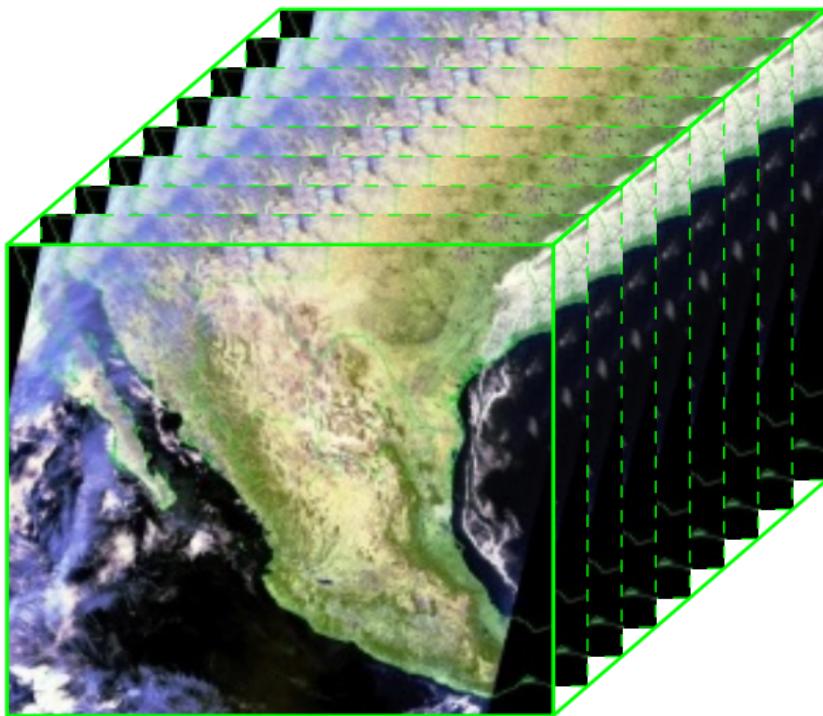
Taller [TATSSI](#): Primera Parte,  
Julio 18, 2019, CONABIO



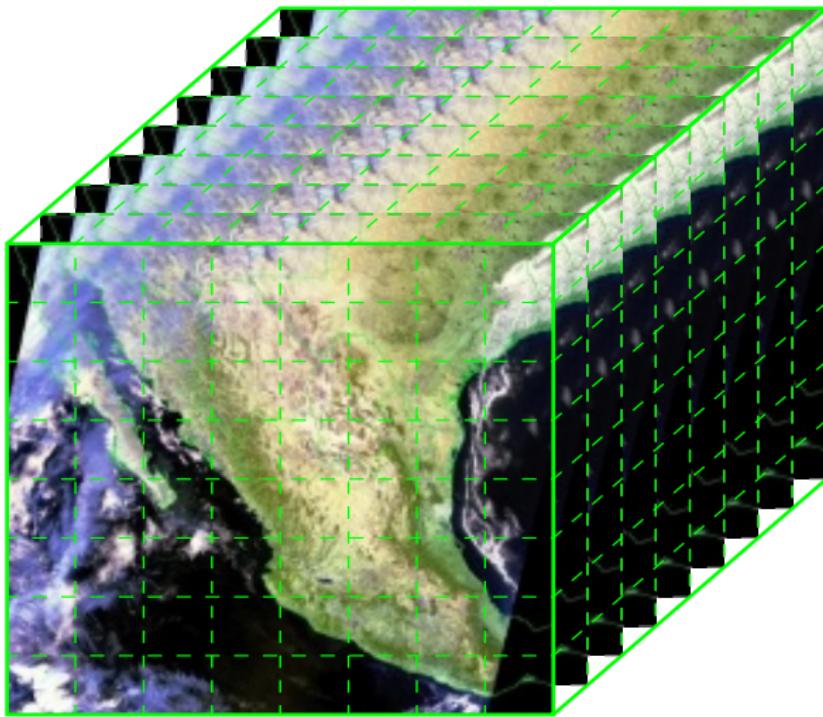
# Nuestros datos



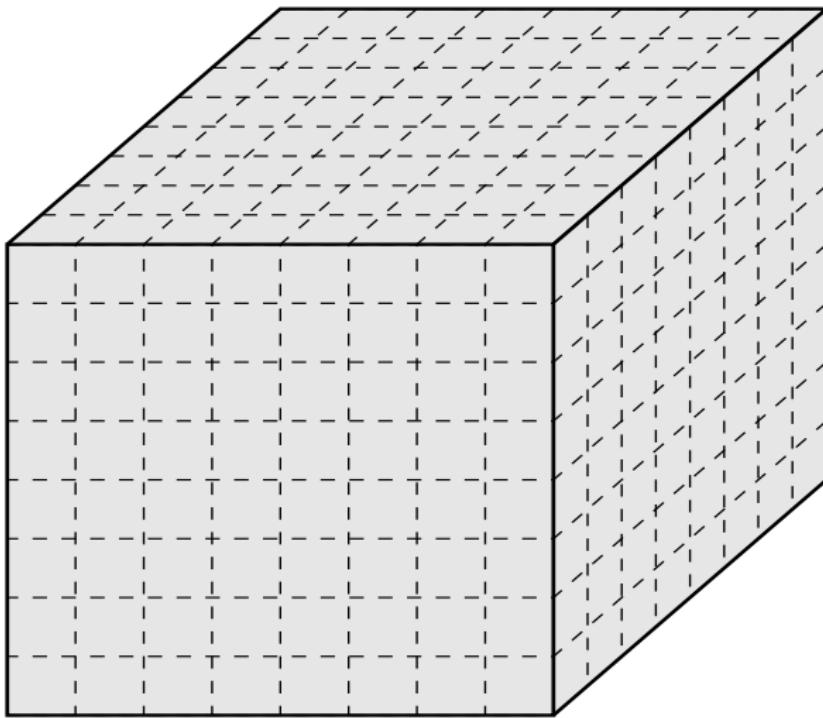
# Nuestros datos



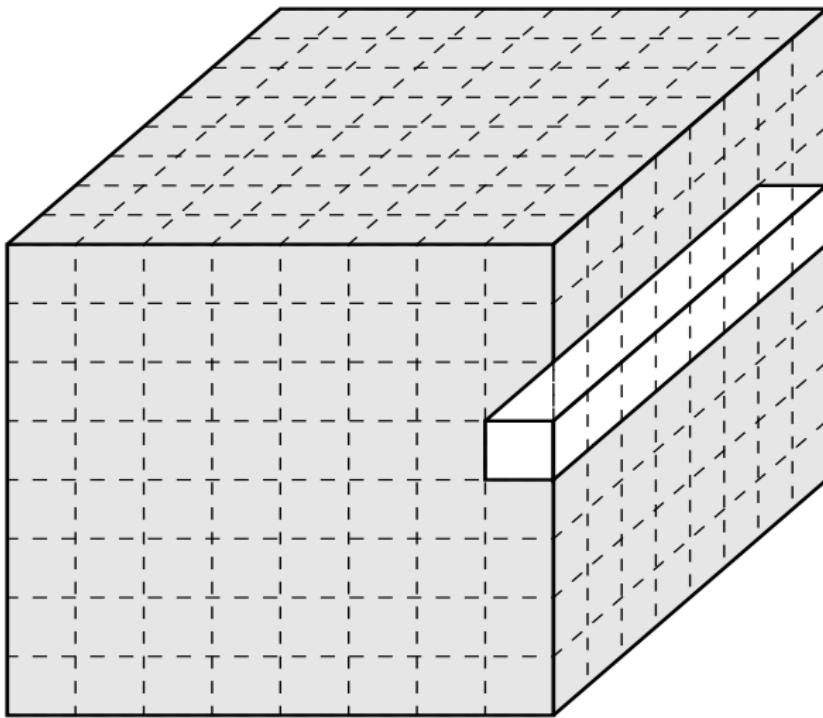
# Nuestros datos



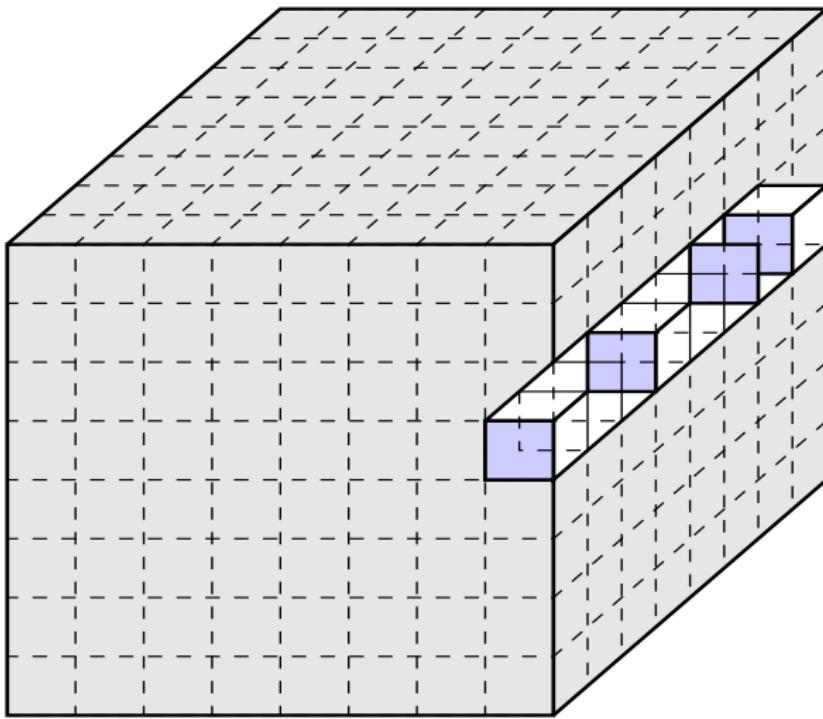
# Data cube (abstraction)



# Data cube (abstraction)



# Data cube (abstraction)



ESSENTIALLY, ALL MODELS ARE WRONG, BUT  
SOME ARE USEFUL.

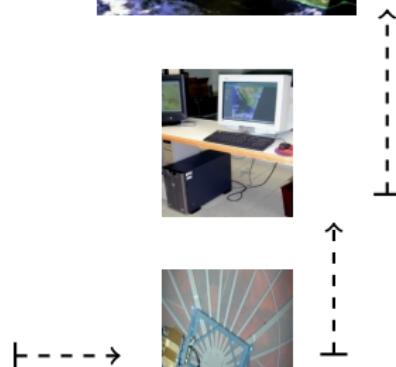
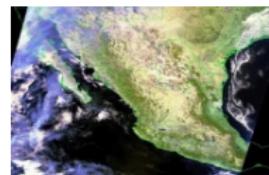
GEORGE Box (UNIVERSITY OF WISCONSIN)

# Temario

- Sensors and data products: **MODIS, Landsat**
- Seasonal Trend Analysis: análisis armónico aplicado y análisis estadístico de tendencias
- Estimación de puntos de cambio: **BFAST**

# SENSORS & DATA PRODUCTS

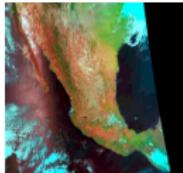
# Adquiriendo datos



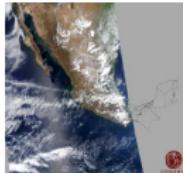
# Datos de sensores remotos

Resolución temporal  
(↑), resolución  
espacial (↓)

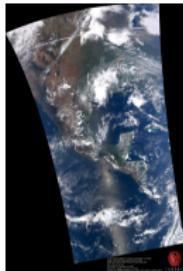
AVHRR



MODIS



VIIRS

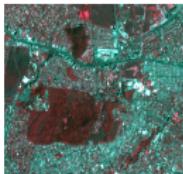


Resolución temporal  
(↓), resolución  
espacial (↑)

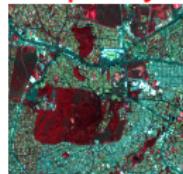
Landsat



SPOT



RapidEye



WV



Aérea



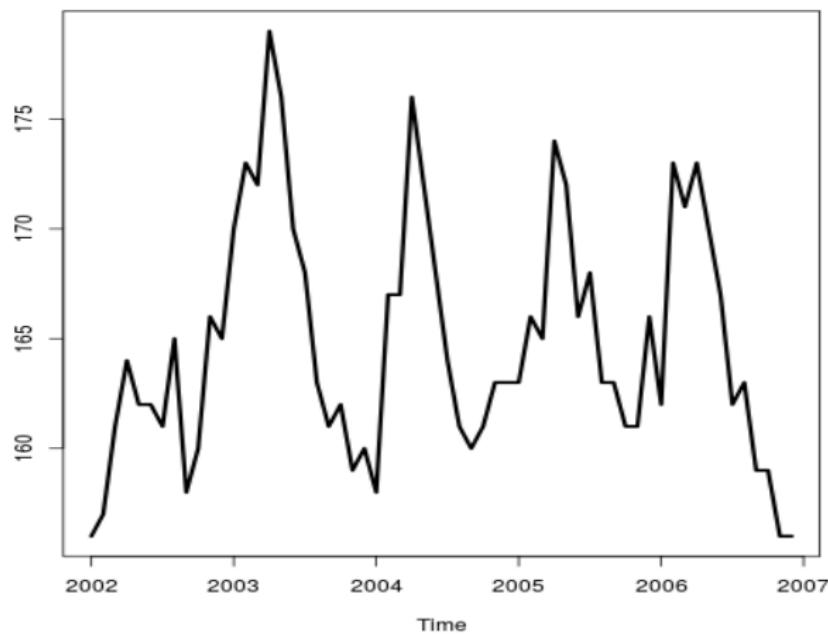
Hemisférica



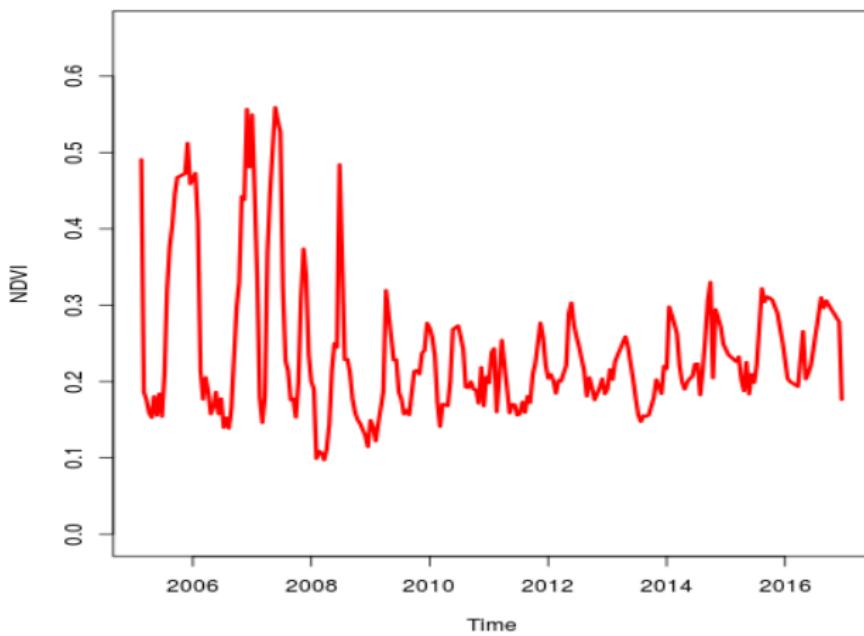
# SEASONAL TREND ANALYSIS

# ANÁLISIS ARMÓNICO

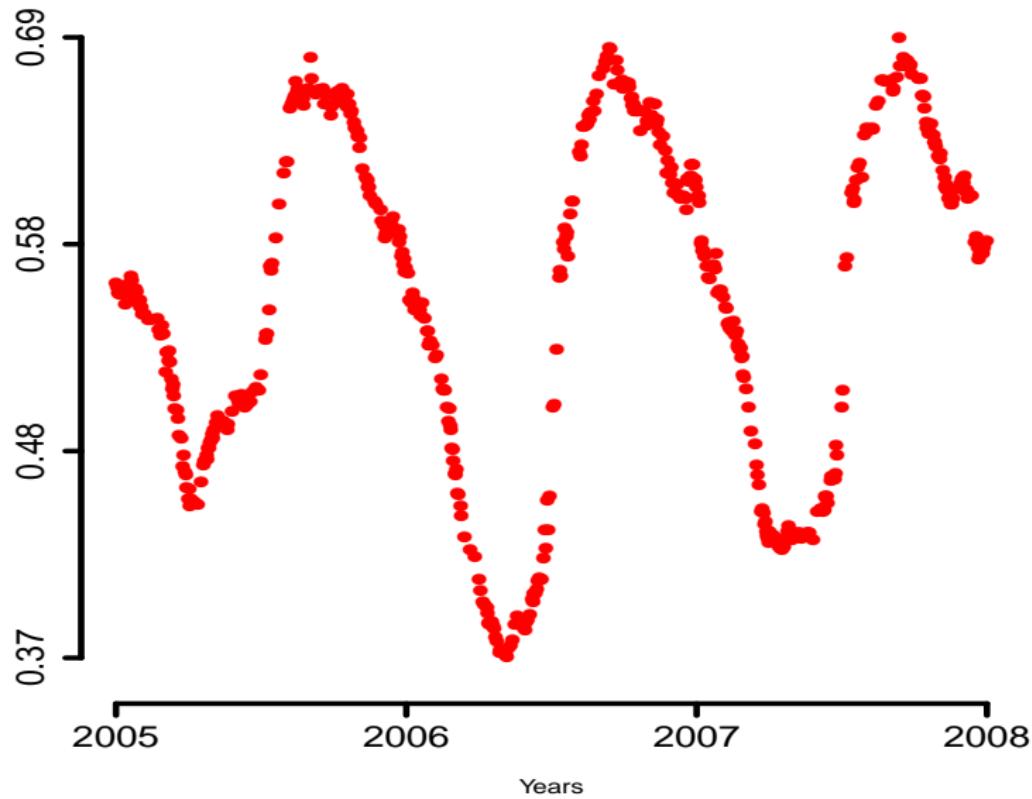
# Series de tiempo (en algún lugar de Coahuila)



# Series de tiempo (La Primavera, Jal.)



## Ajustando una serie de tiempo de NDVI



# Ajustando una serie de tiempo de NDVI

- Podemos *suponer* que la serie de NDVI es **periódica**

# Ajustando una serie de tiempo de NDVI

- Podemos *suponer* que la serie de NDVI es **periódica**
- Representación como serie infinita de Fourier:

$$y_t = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{L}\right) \right\}$$

(haciendo  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\tan(\phi_n) = \frac{b_n}{a_n}$ )

$$\begin{aligned} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{L} - \phi_n\right) \\ &\approx c_0 + \sum_{n=1}^K \textcolor{red}{c}_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{L} - \phi_n\right) \end{aligned}$$

# Ajustando una serie de tiempo de NDVI

- Podemos *suponer* que la serie de NDVI es **periódica**
- Representación como serie infinita de Fourier:

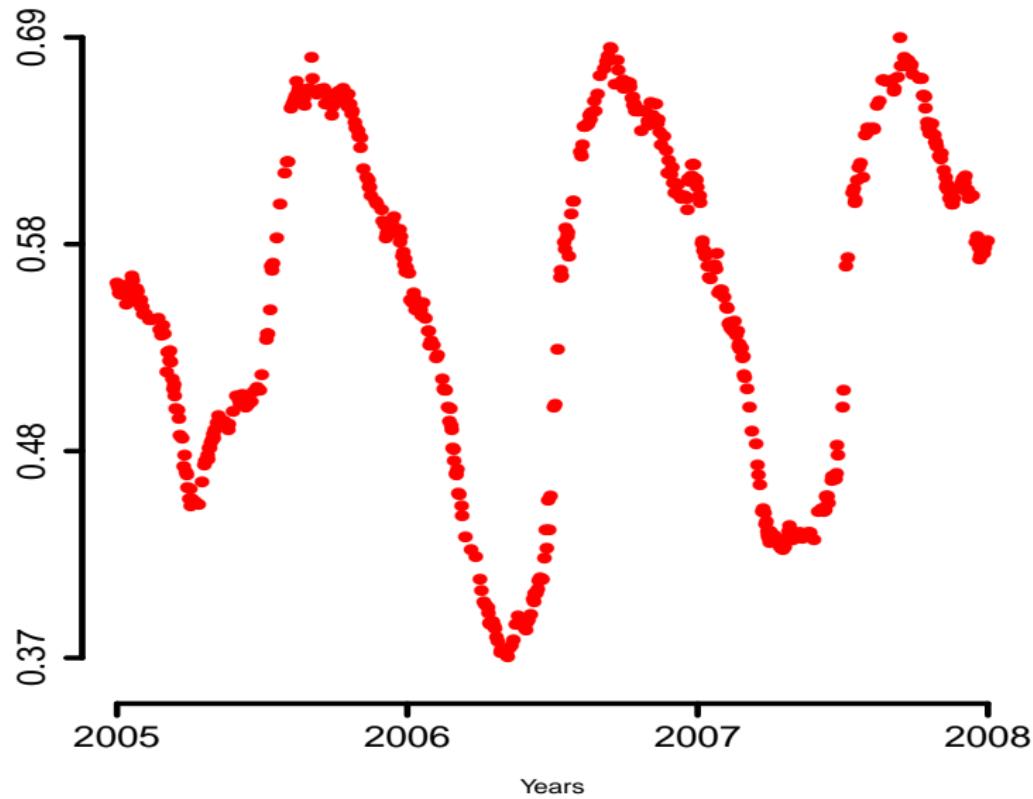
$$y_t = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) \right\}$$

(haciendo  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\tan(\phi_n) = \frac{b_n}{a_n}$ )

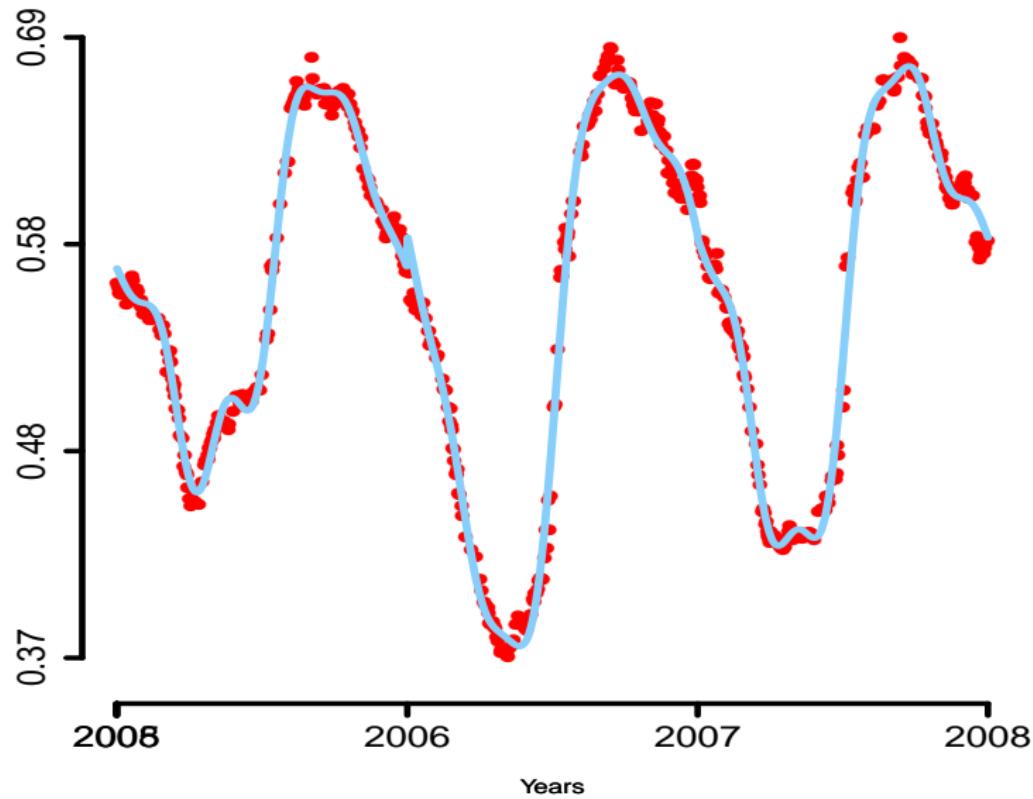
$$\begin{aligned} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{L} - \phi_n\right) \\ &\approx c_0 + \sum_{n=1}^K \textcolor{red}{c}_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{L} - \phi_n\right) \end{aligned}$$

- $\{c_n\}$ ,  $\{\phi_n\}$  son determinados mediante **mínimos cuadrados**

## El ajuste



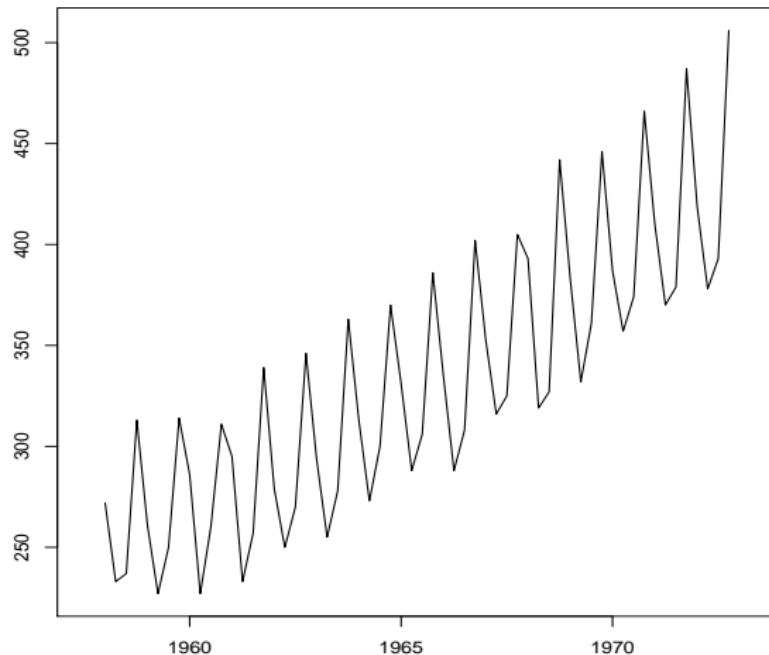
## El ajuste



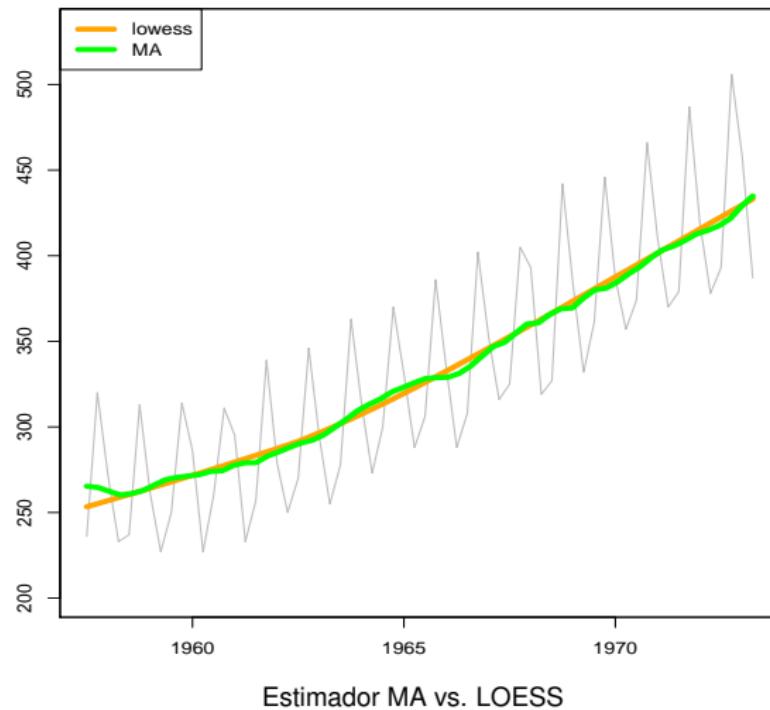
# ANÁLISIS DE TENDENCIAS

# Descomposición Trend + Seasonality + Noise

$$Y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$$



# MA vs. LOESS



# MANN-KENDALL TEST

# Mann-Kendall test

- **M. G. Kendall:** Suppose that in the present population **there is no relationship** between the two qualities under consideration
- Esto puede interpretarse como:
  - 1 Los datos son no correlacionados
  - 2 Los datos son homoscedásticos
  - 3 **Los datos no muestran una tendencia aparente**
- El estadístico:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{sgn}(X_j - X_i),$$

donde  $X_k$  representa la  $k$ -ésima observación, y

$$\text{sgn}(\vartheta) = \begin{cases} 1 & \vartheta > 0 \\ 0 & \vartheta = 0 \\ -1 & \vartheta < 0 \end{cases}.$$

## p-value (de manera general)

- ➊ Supongamos que  $W(\mathbf{X})$  es un **estadístico** tal que valores grandes de  $W(\mathbf{X})$  conceden evidencia en contra de la hipótesis nula  $\mathcal{H}_0$

## p-value (de manera general)

- 1 Supongamos que  $W(\mathbf{X})$  es un **estadístico** tal que valores grandes de  $W(\mathbf{X})$  conceden evidencia en contra de la hipótesis nula  $\mathcal{H}$
- 2 Entonces el **p-valor** asociado a la hipótesis  $\mathcal{H}$  y al estadístico  $W(\mathbf{X})$  se define como:

$$p(x) = \mathbf{P}\{W(\mathbf{X}) \geq W(x)\},$$

donde  $x$  representa valores observados (datos).

## p-value (de manera general)

- 1 Supongamos que  $W(\mathbf{X})$  es un **estadístico** tal que valores grandes de  $W(\mathbf{X})$  conceden evidencia en contra de la hipótesis nula  $\mathcal{H}$
- 2 Entonces el **p-valor** asociado a la hipótesis  $\mathcal{H}$  y al estadístico  $W(\mathbf{X})$  se define como:

$$p(x) = \mathbf{P}\{W(\mathbf{X}) \geq W(x)\},$$

donde  $x$  representa valores observados (datos).

- 3 Un valor pequeño de  $p(x)$ , digamos menor que  $\alpha = 0.05$ , indica que es poco probable que el estadístico  $W(\mathbf{X})$  se encuentre por arriba del valor nominal  $W(x)$ . De forma equivalente, podemos decir que es altamente probable que  $W(x)$  sea grande. Esto último nos permite rechazar la hipótesis nula  $\mathcal{H}$ .

# Mann-Kendall ...

- La versión estandarizada de  $S$  es:

$$Z = \begin{cases} \frac{S-1}{\sqrt{\text{VAR}(S)}} & S > 0 \\ 0 & S = 0 \\ \frac{S+1}{\sqrt{\text{VAR}(S)}} & S < 0 \end{cases}$$

- El p-value puede ser aproximado:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{|Z| > t_n\} &= 1 - \mathbf{P}\{-t_n < Z < t_n\} = 1 - \Phi(t_n) + \Phi(-t_n) \\ &= 2 \Phi(-t_n)\end{aligned}$$

# THEIL-SEN TEST

## Theil-Sen test

- La pendiente de una aparente tendencia puede ser estimada mediante

$$b = \text{mediana} \left( \frac{X_j - X_l}{j - l} \right), \text{ para todo } l < j$$

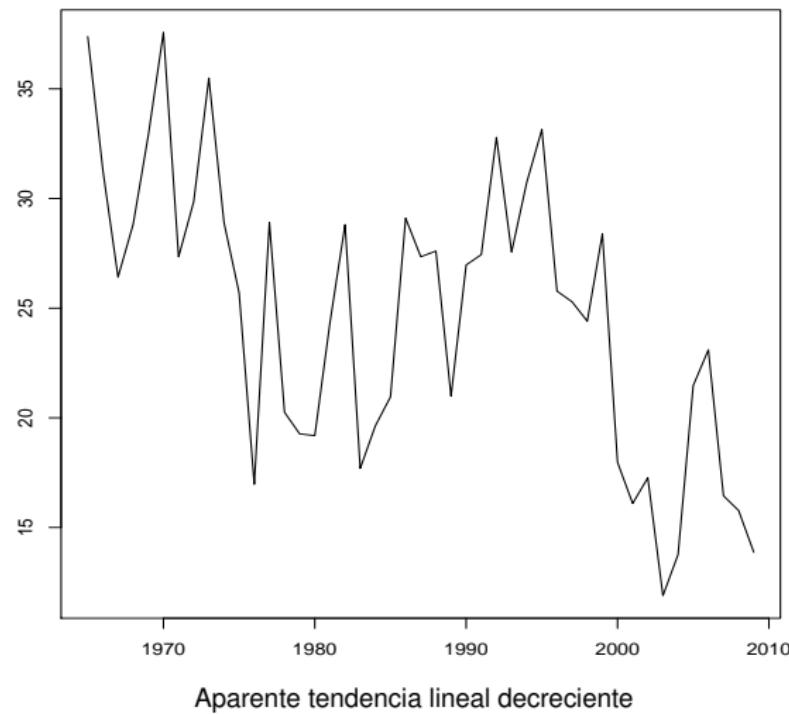
- Este es un estimador de la pendiente **no-paramétrico** y **robusto**
- Con observaciones  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ : para cada  $i$ ,

$$l_i = (X[(i+1) : n] - X[i]) / (([i+1 : n] - [i]),$$

así

$$b = \text{mediana}\{l_i; 1 \leq i \leq n-2\}$$

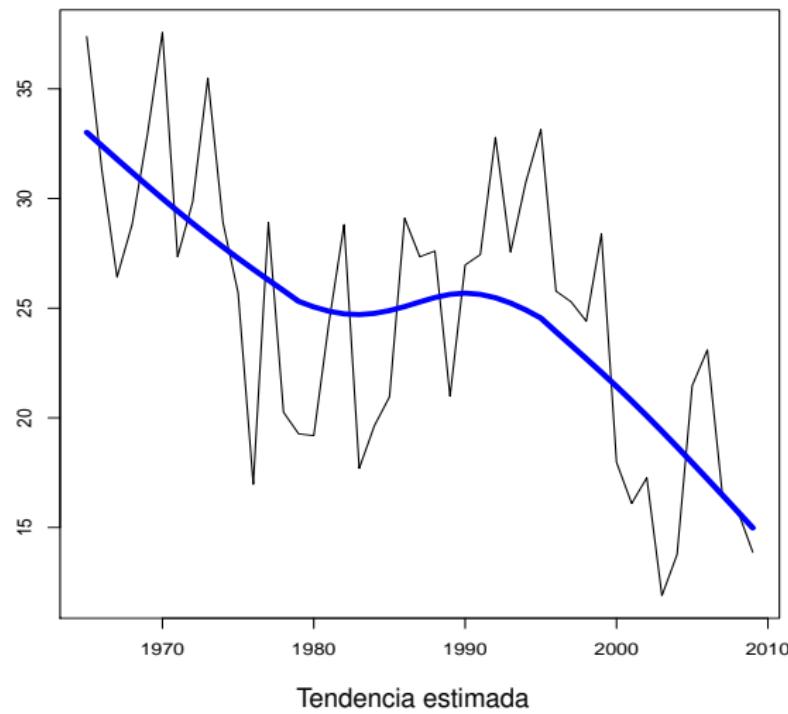
## Ejemplo: Maxau



## Mann-Kendall trend test

```
data: maxau[, "s"]
z = -3.8445, n = 45, p-value = 0.0001208
alternative hypothesis: true S is not equal to 0
sample estimates:
      S          varS          tau
-394.0000000 10450.0000000     -0.3979798
```

# Maxau's trend



## STA: combinando AA y AT

- 1 Supongamos que tenemos una serie de tiempo de la forma

$$(y_{1,A_1} \quad y_{2,A_1} \quad \cdots \quad y_{p,A_1} \quad y_{1,A_2} \quad \cdots \quad y_{p,A_2} \quad \cdots \quad y_{1,A_N} \quad \cdots \quad y_{p,A_N})$$

## STA: combinando AA y AT

- 1 Supongamos que tenemos una serie de tiempo de la forma

$$(y_{1,A_1} \quad y_{2,A_1} \quad \cdots \quad y_{p,A_1} \quad y_{1,A_2} \quad \cdots \quad y_{p,A_2} \quad \cdots \quad y_{1,A_N} \quad \cdots \quad y_{p,A_N})$$

- 2 Aplicando Análisis Armónico podemos estimar, por ejemplo,

$$c_{0,1:N} = (c_{0,A_1} \quad c_{0,A_2} \quad \cdots \quad c_{0,A_N},)$$

recuerda que  $c_0$  representa el coeficiente de la primera armónica en la representación de Fourier

## STA: combinando AA y AT

- 1 Supongamos que tenemos una serie de tiempo de la forma

$$(y_{1,A_1} \quad y_{2,A_1} \quad \cdots \quad y_{p,A_1} \quad y_{1,A_2} \quad \cdots \quad y_{p,A_2} \quad \cdots \quad y_{1,A_N} \quad \cdots \quad y_{p,A_N})$$

- 2 Aplicando Análisis Armónico podemos estimar, por ejemplo,

$$c_{0,1:N} = (c_{0,A_1} \quad c_{0,A_2} \quad \cdots \quad c_{0,A_N},)$$

recuerda que  $c_0$  representa el coeficiente de la primera armónica en la representación de Fourier

- 3 Aplicando Análisis de Tendencias a  $c_{0,1:N}$  podemos determinar (mediante una prueba de hipótesis) si existe evidencia estadística de tendencia, a lo largo de  $N$  años, en la primera armónica

## STA: combinando AA y AT

- 1 Supongamos que tenemos una serie de tiempo de la forma

$$(y_{1,A_1} \quad y_{2,A_1} \quad \cdots \quad y_{p,A_1} \quad y_{1,A_2} \quad \cdots \quad y_{p,A_2} \quad \cdots \quad y_{1,A_N} \quad \cdots \quad y_{p,A_N})$$

- 2 Aplicando Análisis Armónico podemos estimar, por ejemplo,

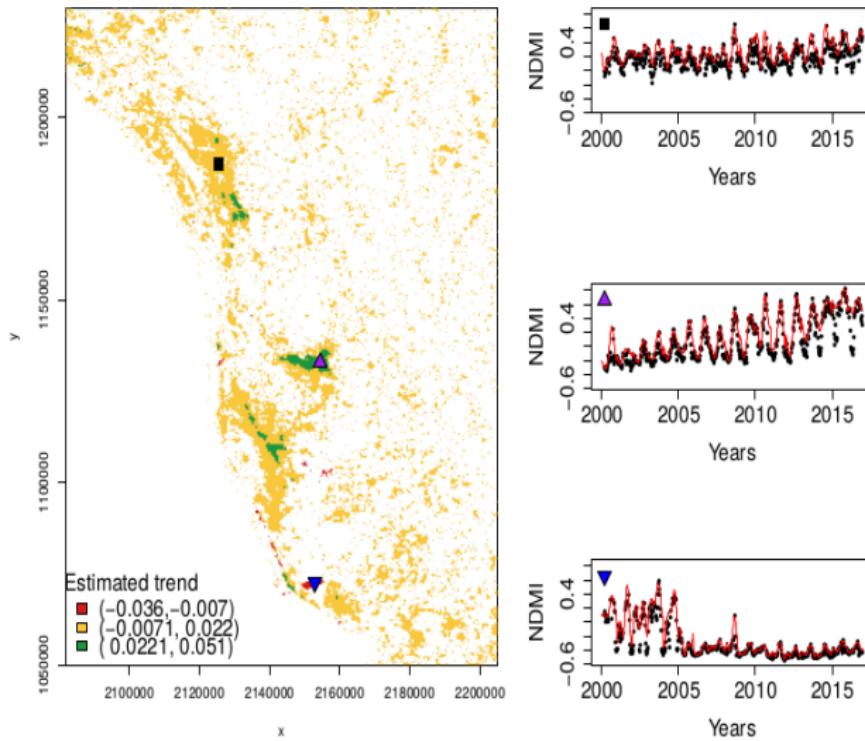
$$c_{0,1:N} = (c_{0,A_1} \quad c_{0,A_2} \quad \cdots \quad c_{0,A_N},)$$

recuerda que  $c_0$  representa el coeficiente de la primera armónica en la representación de Fourier

- 3 Aplicando Análisis de Tendencias a  $c_{0,1:N}$  podemos determinar (mediante una prueba de hipótesis) si existe evidencia estadística de tendencia, a lo largo de  $N$  años, en la primera armónica
- 4 Ronald Eastman et al. (2009)

# Aplicación: STA Marismas Nacionales

Significant trend in mean (at 5%)



## PUNTOS DE CAMBIO

## BFAST Verbesselt et al. (2010)

- Breaks For Additive Seasonal and Trend (BFAST) de Verbesselt et al. (2010)
- Este método detecta cambios significativos en los componentes de tendencia y temporalidad
  - ① En tendencia esto frecuentemente indica disturbios (e.g. incendios, ataques de insectos)
  - ② En temporalidad puede indicar cambios en la fenología (e.g. cambio en el tipo de cobertura de suelo)
- BFAST iterativamente estima el *tiempo* y el *número de cambios*, caracteriza un cambio por su *magnitud* y *dirección*
- Este método no es específico para un tipo particular de datos, puede aplicarse a series de tiempo sin tener que normalizar por tipo de cobertura de suelo, seleccionar un periodo de referencia o un cambio de trayectoria

# El modelo: tendencia

- De forma general se supone que los datos satisfacen:

$$Y_t = T_t + S_t + e_t, \quad t = 1, \dots, n$$

- Se supone que  $T_t$  es lineal a pedazos, con puntos de cambio  $\tau_1, \dots, \tau_m$  ( $\tau_0 = 0$ ):

$$T_t = \alpha_j + \beta_j t, \quad \tau_{j-1} \leq t \leq \tau_j$$

- **Magnitud:** Diferencia entre  $T_{\tau_{j-1}}$  y  $T_{\tau_j}$ :

$$\text{Magnitud} = (\alpha_{j-1} - \alpha_j) + (\beta_{j-1} - \beta_j) t$$

- **Dirección:** Dada por la pendiente de  $T_t$  antes y después del **cambio abrupto**:  $\beta_{j-1}, \beta_j$

## El modelo: temporalidad

- El componente temporal permanece fijo entre puntos de cambio
- Los puntos de cambio en temporalidad se asumen distintos a aquellos en tendencia
- Con puntos de cambio  $\tau_1^S, \dots, \tau_m^S$ , se supone:

$$S_t = \begin{cases} \gamma_{i,j} & \text{si el tiempo } t \text{ está en temporada } i, i = 1, \dots, s-1 \\ -\sum_{i=1}^{s-1} \gamma_{i,j} & \text{si el tiempo } t \text{ está en temporada 0} \end{cases},$$

donde  $s$  es el periodo de temporalidad (e.g. el número de observaciones por año)

- Modelo de regresión con  $s - 1$  variables temporales *dummy*:

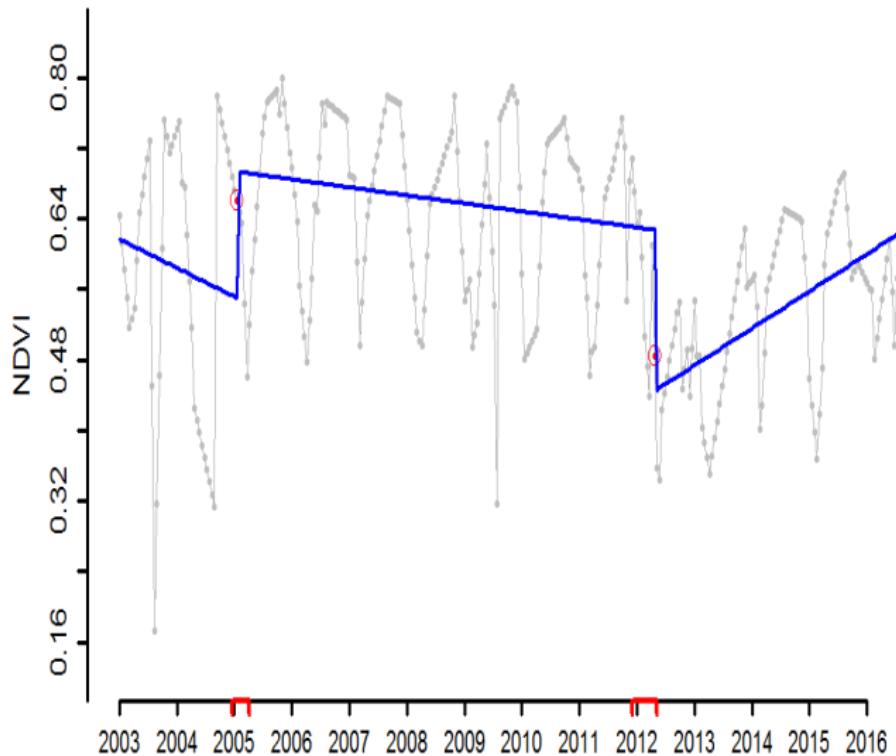
$$S_t = \sum_{i=1}^{s-1} \gamma_{i,j} (d_{t,i} - d_{t,0}),$$

donde  $d_{t,i} = 1$  cuando  $t$  está en la temporada  $i$  y 0 en otro caso

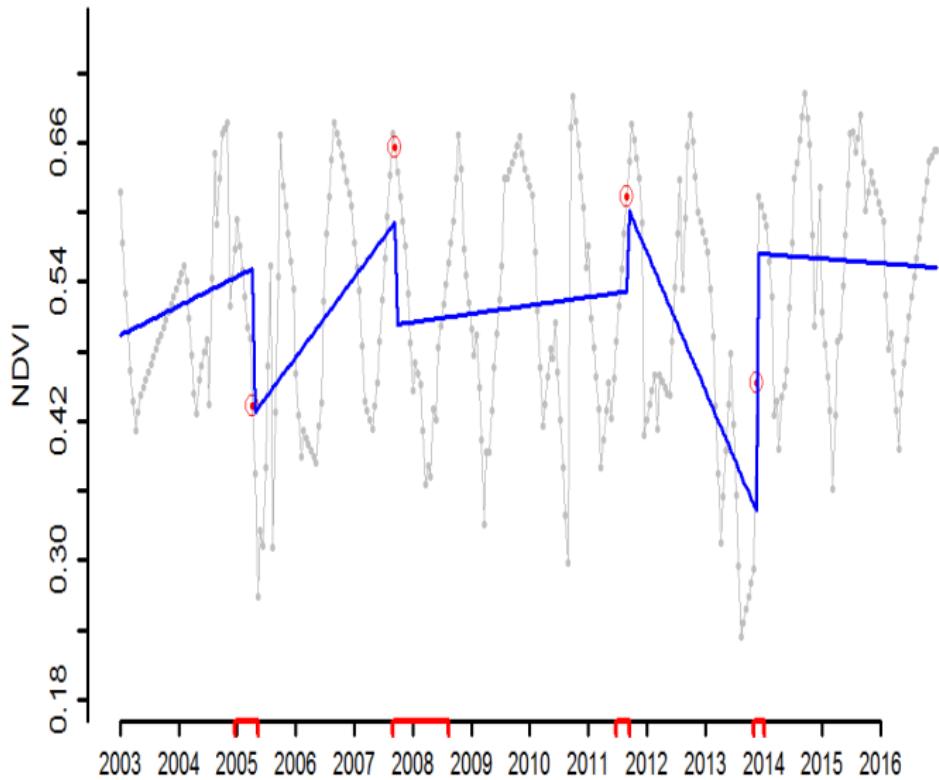
# El algorithmo

- ① Obtener  $\widehat{S}_t$  utilizando la descomposición STL
- ② Un estadístico determina si existen puntos de cambio en la tendencia; los puntos de cambio ( $\tau_1, \dots, \tau_m$ ) se estiman usando la series con temporalidad removida,  $Y_t - \widehat{S}_t$
- ③ Los estimadores de  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  se determinan mediante una regresión robusta; se estima la tendencia,  $\widehat{T}_t = \widehat{\alpha}_j + \widehat{\beta}_j t$ , para  $t = \widehat{\tau}_{j-1} + 1, \dots, \widehat{\tau}_j$
- ④ Un estadístico determina si existen puntos de cambio en la temporalidad; los puntos de cambio ( $\tau_1^S, \dots, \tau_m^S$ ) se estiman usando la series con tendencia removida,  $Y_t - \widehat{T}_t$
- ⑤ Los coeficientes de temporalidad,  $\gamma_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, m$  e  $i = 1, \dots, s-1$  se calculan mediante regresión no paramétrica; se estima el componente temporal,  
$$\widehat{S}_t = \sum_{i=1}^{s-1} \widehat{\gamma}_{i,j} (d_{t,i} - d_{t,0}), \text{ para } t = \widehat{\tau}_{j-1}^S + 1, \dots, \widehat{\tau}_j^S$$

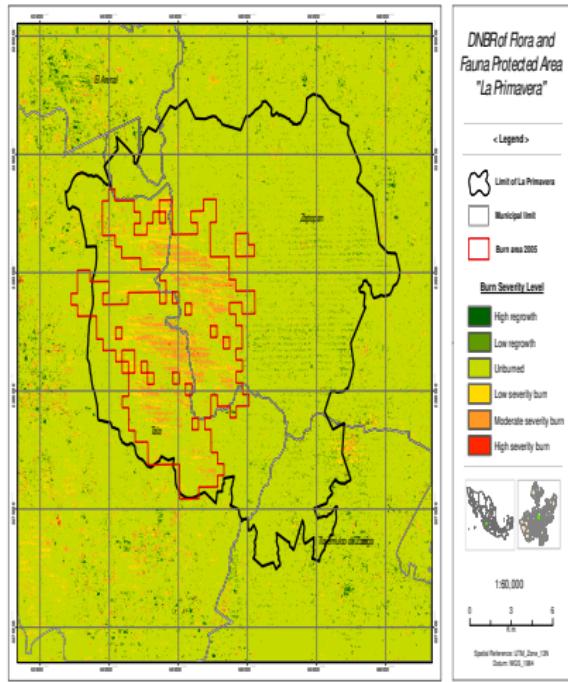
## BFAST (a nivel pixel)



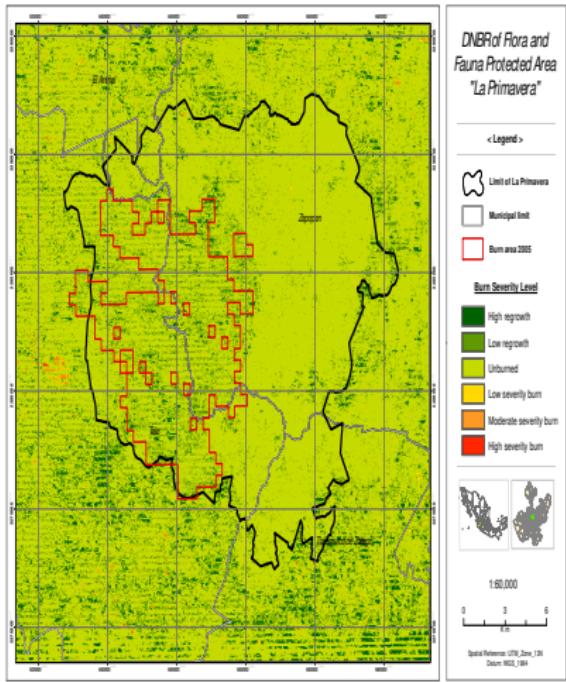
# BFAST (a nivel pixel)



# Proxy burn severity maps

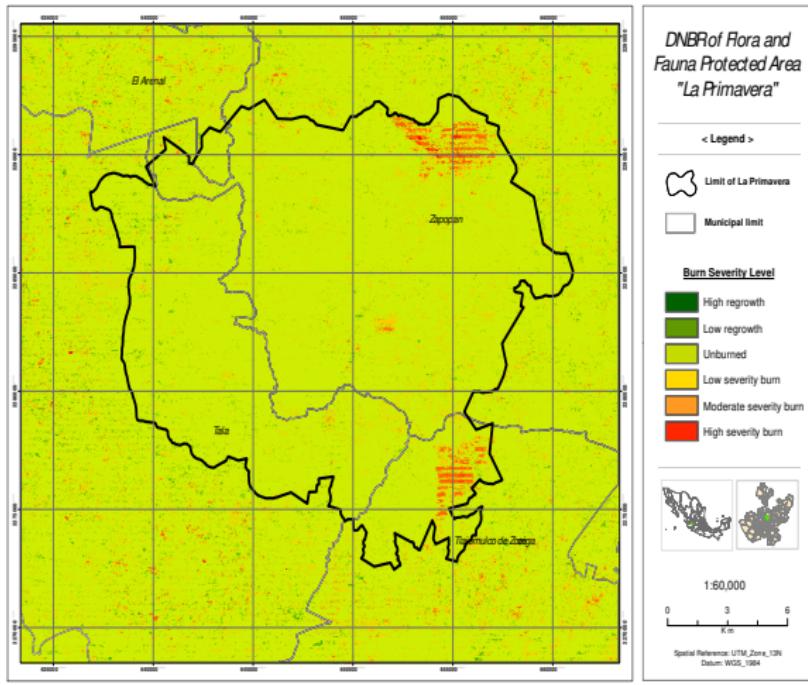


(a) 2005

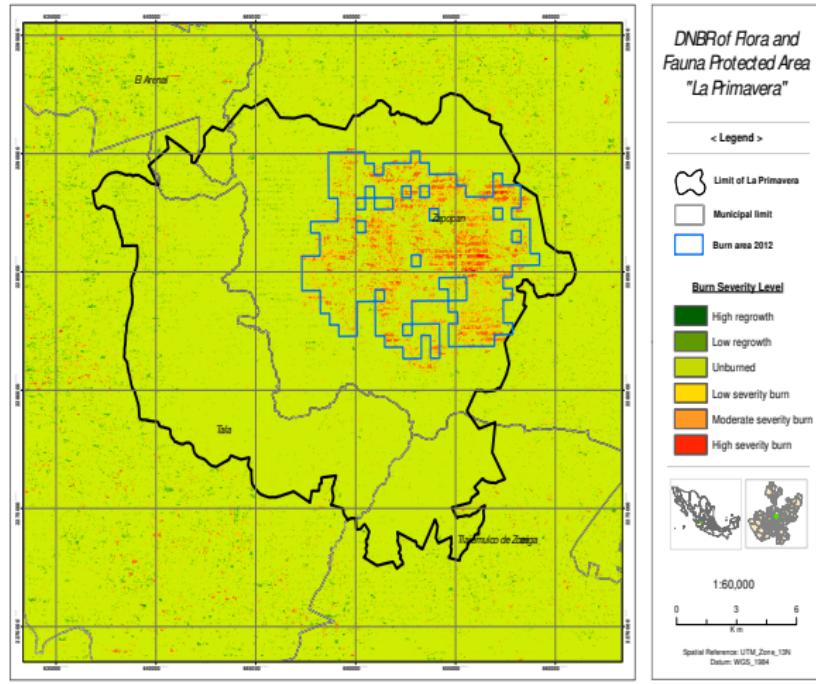


(b) 2006

# Proxy burn severity maps



# Proxy burn severity maps



2012

THAT'S ALL FOLKS!

Ronald Eastman, J., Sangermano, F., Ghimire, B., Zhu, H., Chen, H., Neeti, N., Cai, Y., Machado, E. A., and Crema, S. C. (2009). Seasonal trend analysis of image time series. *International Journal of Remote Sensing*, 30(10):2721–2726.

Verbesselt, J., Hyndman, R., Newnham, G., and Culvenor, D. (2010). Detecting trend and seasonal changes in satellite image time series. *Remote Sens. Environ.*, 114(1):106 – 115.