Algunas definiciones, ejemplos y teoremas de Álgebra Lineal orientados a Ingenieros

desarrollado por:
Gerardo Muñoz gmunoz@udistrital.edu.co
Material en desarrollo, agradezco todas sus sugerencias para mejorarlo.

March 25, 2017

Contents

1 Números, Vectores y Matrices **7**

1.1 Matrices y la teoría del juego 7

1.2 Algunas nociones y definiciones preliminares 9

1.3 Propiedades de los números reales 12

1.4 Notación de matrices 14

1.4.1 Tamaño de una matriz 16

1.4.2 Algunos tipos de matrices 16

1.4.3 Igualdad de matrices 17

1.4.4 Submatrices y vectores 18

1.5 Operación transposición 19

1.6 Operación suma de matrices y vectores 20

1.7 Operaciones opuesto y resta de matrices y vectores 22

1.8 Operación escalar por matriz y escalar por vector 24

1.9 Repaso 25

2 Combinación lineal o transformaciones matriciales **26**

2.1 Introducción a la combinación lineal de vectores 26

2.2 Definición de Combinación lineal 28

2.3 Operación matriz por vector . . . 29

2.4 Multiplicación matricial como muchas combinaciones lineales . . . 30

2.5 Potencia positiva de una matriz . . . 32

2.6 Transformación matricial . . . 32

2.7 Transformaciones de matrices elementales . . . 34

2.8 Transformaciones con $\mathbb{R}^3$ . . . 36

2.9 Multiplicación matricial como composición de transformaciones matriciales . . . 38

2.10 Resumen . . . 39

3 Solución de sistemas de ecuaciones lineales o transformaciones inversas 40

3.1 Matrices extendidas . . . 40

3.2 Clasificación de matrices extendidas . . . 42

3.3 Ejemplo con la matriz identidad . . . 43

3.3.1 Solución del sistema lineal . . . 43

3.3.2 Clasificación de la matriz . . . 43

3.3.3 Representación gráfica . . . 44

3.3.4 Solución con valores arbitrarios . . . 44

3.4 Ejemplo de matriz que no cumple (E4) . . . 46

3.4.1 Solución del sistema lineal . . . 46

3.4.2 Clasificación de la matriz . . . 46

3.4.3 Representación gráfica . . . 47

3.4.4 Solución con valores arbitrarios . . . 49

3.5 Ejemplo de matriz con parámetros . . . 50

3.5.1 Clasificación de la matriz . . . 50

3.5.2 Solución del sistema lineal 51
3.5.3 Representación gráfica 51
3.5.4 Solución con valores arbitrarios 52
3.6 Ejemplo de matriz con renglón de ceros y con codominio en $\mathbb{R}^3$ 53
3.6.1 Clasificación de la matriz 53
3.6.2 Solución del sistema lineal 53
3.6.3 Representación con valores arbitrarios 53
3.7 Resumen 55
3.8 Multiplicación de matrices elementales por matrices extendidas 55
3.9 Eliminación de Gauss 57
3.10 Independencia lineal 58
3.11 Generadores y bases de $\mathbb{R}^m$ 60

4 Sistemas homogéneos y núcleo de la transformación 61

4.1 Imagen de una transformación matricial y subespacios generados en $\mathbb{R}^n$ 61
4.2 Núcleo de una transformación de una matriz escalón 62
4.3 Algunos subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ 63

5 Operaciones de matrices cuadradas o autotransformaciones 64

5.1 Operación inversa 64
5.1.1 Potencia de una matriz 67
5.2 Operación determinante 68
5.2.1 Determinante y desarrollo por cofactores 68
5.2.2 Determinate de una matriz de 3×3 69
5.3 Determinante de matrices triangulares 70

5.4 Determinantes y operaciones elementales . . . 70
5.4.1 Cuando el determinante es cero . . . 73
5.4.2 Cuando el determinante no es cero . . . 74
5.5 Adjunta . . . 75
5.6 Regla de Cramer . . . 75
5.7 Bases e Isomorfismos . . . 77
5.8 Inverso de un Isomorfismo T_B entre $\mathbb{R}^{R(B)}$ y $gen(B)$ . . . 78
5.9 Subespacio propio . . . 79
5.10 Coordenadas de una base . . . 79
5.11 Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ %(cambiar de lugar esta sección y la siguiente) . . . 80
5.12 Transformaciones matriciales entre espacios . . . 80
5.13 Cambio de base . . . 81
5.14 Vectores y bases ortogonales . . . 82
5.15 Bases ortonormales . . . 83
5.16 Matrices ortogonales . . . 84
5.17 vectores propios . . . 85

6 Espacio Euclidiano **88**

6.1 Operación producto punto . . . 88
6.2 Magnitud . . . 90
6.3 Distancia entre dos vectores o dos puntos . . . 91
6.4 Proyección . . . 92
6.5 Ángulo y funciones trigonométricas . . . 93
6.6 Rectas . . . 102

6.7 Planos . . . 109

7 Espacios vectoriales **115**

7.1 Introducción . . . 115

7.2 Subespacio vectorial . . . 117

7.3 Base . . . 118

7.4 Transformaciones lineales . . . 119

7.5 Dominio, Codominio e Imagen de la transformación matricial . . . 124

7.6 Algunos subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ . . . 124

Introducción

En este material se presentan las notas de clase de un curso de Álgebra Lineal para ingenieros con algunos comandos de Scilab para ser usados como referencia en cursos posteriores. Se advierte que, usualmente para los estudiantes que hasta ahora están aprendiendo Álgebra Lineal, Scilab se convierte más en una distracción que en una ayuda y por lo tanto se sugiere ignorar los comandos de Scilab mientras se apropia de los conocimientos de la materia.

Este documento no remplaza el texto guia [NJ99].

—————————— falta completar

Chapter 1

Números, Vectores y Matrices

Borrador de las notas de clase, enviar las sugerencias a gmunoz@udistrital.edu.co. (Bajo licencia GPL)

1.1 Matrices y la teoría del juego

Con el fin de introducir las matrices se presenta un sencillo ejemplo de la teoría de juegos, el conocido juego de piedra, papel o tijera. Este ejemplo fue tomado el primero de agosto de 2012 de

`http://es.wikipedia.org/wiki/Equilibrio_de_Nash`

Consideremos el juego de piedra, papel o tijera con la matriz de pagos para el jugador 1 dada por:

		Jugador 2		
		Piedra	Papel	Tijera
	Piedra	0	-1	+1
Jugador 1	Papel	+1	0	-1
	Tijera	-1	+1	0

Y para el jugador 2 dada por:

		Jugador 2		
		Piedra	Papel	Tijera
	Piedra	0	+1	-1
Jugador 1	Papel	-1	0	+1
	Tijera	+1	-1	0

Si el jugador 1 gana recibe un pago de +1, pero si pierde su pago es de -1, cuando empata su pago es 0. En este Juego siempre que gana un jugador el otro pierde lo mismo, este tipo de juegos se llaman de suma cero, porque si se suma lo que ganan los jugadores siempre da cero. Sin embargo, en la vida real hay muchos juegos que no son de suma cero, por ejemplo usualmente en los negocio es un tipo de juego en el que ambos jugadores ganan. Si se mira el marcador en un partido de fútbol, este es un juego de suma cero, pero si se mira como han mejorado las tácticas del juego a lo largo de la historia, este no es un juego de suma cero ya que después de cada partido gane o pierda siempre todos los equipos pueden mejorar sus estrategias.

Si los recursos de la humanidad fueran fijos, estaríamos jugando un juego de suma cero, por lo tanto el que tiene más recursos sería el más amenazado, porque los demás tratarían que quitárselos. ¿Podría toda la humanidad encontrar una forma de convivencia en la que todos siempre ganen? Yo creo que sí, si el objetivo del juego consistiera en aumentar los recursos de la humanidad, una forma sería aumentando la vida en los desiertos, el fondo marino, incluso en nuestras ciudades; otra forma es consiguiendo nuevos recursos al ir a otros planetas. En este caso cada vez que alguno logre obtener algún recurso sería una alegría para toda la humanidad.

.

1.2 Algunas nociones y definiciones preliminares

Hago una aclaración entre las nociones (letras cursivas) y las definiciones (letras en negrilla), las nociones están basadas en nuestra experiencia, especialmente la que se tiene de los cursos de matemáticas del colegio. Por otro lado las definiciones están basadas en las nociones y en otras definiciones. En matemáticas se busca reducir al máximo el número de nociones con el fin de que dependa al mínimo de las experiencias de cada sujeto, ya que esto puede traer serios problemas como el ocurrido con la paradoja de Roussel con la noción de conjunto. Sin embargo no es posible eliminar todas las nociones debido a que es necesario comenzar de algún punto.

.

La primera noción es la de *elemento* denotado con la letras minúsculas, los elementos le dan sentido a la noción de *conjunto* denotados con las letras mayúsculas. Estas dos primeras nociones se relacionan mediante la *pertenencia* ($\in$). Podemos distinguir dos tipos de conjuntos, los conjuntos *finitos* en los cuales podemos enumerar los elementos, por ejemplo el conjunto de los dígitos $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$. El segundo tipo es el de los conjuntos *infinitos*, de los cuales estamos familiarizados con los conjuntos de números con sus respectivas operaciones como *suma*, *resta*, *producto* y *división*.

- $\mathbb{N}_1 := \{1,2,3,\ldots\}$ es el conjunto de los *números naturales* a partir del número 1, el cual tiene las operaciones de suma y producto.
- $\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,3,\ldots\}$ es el conjunto de los *números naturales* a partir del número 0.
- $\mathbb{Z} := \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ es el conjunto de los *números enteros*, el cual además tiene la operación de resta.
- El conjunto de los **números racionales** se define $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ y } b \in \mathbb{N}_1\}$, teniendo en cuenta que $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ si y sólo si $a_1b_2 = a_2b_1$, el cual además tiene la operación de división entre números diferentes del cero.
- $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los *números reales* los cuales representamos como una *sucesión* 'infinita' de dígitos entre los cuales hay un punto y comienza con un *signo*.
- $\mathbb{C} := \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de los **números complejos** en donde $i^2 = -1$.

Es de resaltar la notación usada para definir los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$, en las cuales ente corchetes primero se colocan los elementos genéricos del conjunto con *variables*, luego se separa con '|' y finalmente las condiciones que deben cumplir las variables.

$$\{ \text{ elementos genéricos } \mid \text{ condiciones } \}$$

Algunas veces indicaremos a que conjunto pertenecen los elementos genéricos de la siguiente forma.

$$\{ \text{ elementos genéricos } \in \mathbb{R} \mid \text{ condiciones } \}$$

Para el tema que nos ocupa, es conveniente considerar el **vector-m** de números reales, que es una *función* del intervalo de números naturales $\{1, 2, \ldots, m\}$ al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, la cual se denota como una columna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

En algunos casos separaremos los renglones con un punto y coma (;) como se hace con el programa Scilab

$$[a_1; a_2; \ldots; a_m]$$

Usualmente los vectores los denotaremos con letras minúsculas con una flecha o línea encima.

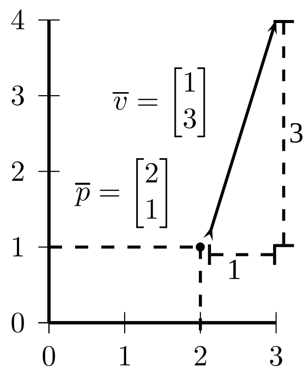
$$\overline{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Cada a_i se denomina **componente** o **elemento** del vector y son *números reales* $(a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R})$ llamados también **escalares**. $m \in \mathbb{N}_1$ indica el **tamaño del vector** o la **dimensión del espacio**, porque el conjunto de todos los vectores-m se llama el **espacio** $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}^m := \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \mid a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \right\}$$

El **vector-m cero** ($\overline{0} := [0; 0; \ldots; 0]$) se puede asociar con el *origen* del *sistema de coordenadas*.

Cuando m es 1, 2 o 3, un vector se puede graficar en una, dos o tres *dimensiones* respectivamente como una flecha, en donde cada componente del vector corresponde a distancia que mide la flecha en cada una de las dimensiones. Algunas veces el vector tan sólo se grafica como un punto en las *coordenadas* del vector.



El dibujo podría representar una partícula en $[2;1]$ que se mueve a una velocidad $[1;3]$.

En $\mathbb{R}^2$ se definen los vectores-2 (vectores de dos elementos)

$$\bar{i} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{j} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y en $\mathbb{R}^3$ se definen los vectores-3 (vectores de tres elementos)

$$\bar{i} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{j} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{k} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Básicamente hay dos diferencias en entre un conjunto finito y un vector,

- la primera radica en que en un conjunto no hay ningún orden entre los elementos, en cambio en un vector hay un primer elemento, un segundo elemento y así sucesivamente;
- la segunda diferencia radica en que en un conjunto no pueden repetirse elementos mientras que en un vector sí.

Dos **conjuntos iguales** son los que tienen los mismos elementos por ejemplo $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n^2 = n\} = \{0,1\}$. Los vectores $\overline{u} := [a_1; a_2; \ldots; a_m]$ y $\overline{v} := [b_1; b_2; \ldots; b_n]$ son **vectores iguales** si cumplen dos cosas:

- el tamaño de $\overline{u}$ es igual al de $\overline{v}$, $(m = n)$.
- las componentes de $\overline{u}$ son las mismas componentes de $\overline{v}$ con el mismo orden, ($a_i = b_i$ con i entre 1 y m).

Observemos que mientras que $\{0,1\} = \{1,0\} = \{1,0,0\}$, por otro lado $[0,1] \neq [1,0] \neq [1,0,0]$. La igualdad, en términos generales, cumple las siguientes propiedades para los números reales a, b y c

(TranIgu) Transitiva de la igualdad, Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$.
(OpIgu) Operaciones iguales, Si $a = b$ entonces al realizar la misma operación a ambos lados se mantiene la igualdad. Por ejemplo en las siguientes operaciones: $a + c = b + c$, $a \cdot c = b \cdot c$ y $a^{-1} = b^{-1}$.

El símbolo := se usan en las definiciones, por ejemplo para definir los elementos de un conjunto se escribe $B := \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = n\}$.

1.3 Propiedades de los números reales

En el álgebra lineal más importante que definir un conjunto de números es definir las propiedades que debe cumplir ese conjunto de números. De hecho, la teoría que se va a presentar basada en los números reales puede ser desarrollada para otro conjunto que tenga suma y producto y cumpla las siguientes propiedades de los número reales $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(ClaSumR) Clausurativa de la suma, $a + b \in \mathbb{R}$. Esta propiedad exige que para cualquier valor de a y de b la suma siempre existe.
(ConSumR) Conmutativa de la suma, $a + b = b + a$. En este caso no importa el orden de los sumandos.
(AsoSumR) Asociativa de la suma, $(a + b) + c = a + (b + c)$. En este caso se pueden eliminar los paréntesis, así: $a + b + c$.
(ModulR) Modulativa de la suma o modulativa, Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todos los elementos $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $a + 0 = a$.
(OpuestR) Opuesto de la suma o opuesto, Para cada uno de los elementos $a \in \mathbb{R}$ se tiene que existe un elemento (el mismo u otro) $(-a) \in A$ tal que $a + (-a) = 0 = (-a) + a$.
(ClaMulR) Clausurativa de la multiplicación, $a \cdot b \in \mathbb{R}$. Esta propiedad exige que para cualquier valor de a y de b la multiplicación siempre existe.
(ConMulR) Conmutativa de la multiplicación, $a \cdot b = b \cdot a$. En este caso no importa el orden de los múltiplos.
(AsoMulR) Asociativa de la multiplicación, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. En este caso se pueden eliminar los paréntesis, así: $a \cdot b \cdot c$.
(IdentR) Modulativa de la multiplicación o identidad, Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que para todos los elementos $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.
(InversR) Opuesto de la multiplicación o inversa, Para cada uno de los elementos $a \in \mathbb{R}$, diferente de 0, se tiene que existe un elemento (el mismo u otro) $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.
(DistrDR) Distributiva a derecha, $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.
(DistrIR) Distributiva a izquierda, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Además, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que:

(MulCeroR) Multiplicación por cero, $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$.
(MulOpuesR) Multiplicar por opuesto, $(-b) \cdot a = (-(b \cdot a))$.

Proof. Primero vamos a probar que $0 \cdot a = 0$.

$$\begin{aligned}
0 \cdot a &= 0 \cdot a + 0 && \text{ModulR.}\\
&= 0 \cdot a + (0 \cdot a + (-(0 \cdot a))) && \text{OpuestR.}\\
&= (0 \cdot a + 0 \cdot a) + (-(0 \cdot a)) && \text{AsoSumR.}\\
&= (0 + 0) \cdot a + (-(0 \cdot a)) && \text{Distr.}\\
&= 0 \cdot a + (-(0 \cdot a)) && \text{ModulR.}\\
&= 0 && \text{OpuestR.}
\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba que $0 = a \cdot 0$. Ahora vamos a probar que $\bar{b} \cdot a = (-(b \cdot a))$.

$$\begin{aligned}
(-b) \cdot a &= (-b) \cdot a + 0 && \text{ModulR.}\\
&= (-b) \cdot a + (b \cdot a + (-(b \cdot a))) && \text{OpuestR.}\\
&= ((-b) \cdot a + b \cdot a) + (-(b \cdot a)) && \text{AsoSumR.}\\
&= ((-b) + b) \cdot a + (-(b \cdot a)) && \text{DistrR.}\\
&= 0 \cdot a + (-(b \cdot a)) && \text{OpuestR.}\\
&= 0 + (-(b \cdot a)) && \text{MulCeroR.}\\
&= (-(b \cdot a)) && \text{ModulR.}
\end{aligned}$$

$\square$

Usualmente entre los matemáticos no se llega a este nivel de detalle en las demostraciones, porque ellos escriben para otros matemáticos que infieren algunos sencillos pasos intermedios. Sin embargo, usualmente los ingenieros trabajan con máquinas a las que es necesario describir cada detalle. Estas demostraciones, así de detalladas, son un buen ejercicio para los ingenieros.

.

Debido a las propiedades vistas de los números reales, se puede simplificar la notación de la siguiente forma

- $a - b$ denota $a + (-b)$.
- ab denota $a \cdot b$.
- a/b o $\frac{a}{b}$ denota $a \cdot (b^{-1})$.

Además se deducen estas dos propiedades para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(SumResR) Sumando opuesto a ambos lados, Si $a + b = c$ entonces $a = c - b$.
(MulDivR) Multiplicando inverso a ambos lados, Si $ab = c$ y $b \neq 0$ entonces $a = c/b$.

Se recomienda hacer ejercicios de despejar ecuaciones para repasar.

1.4 Notación de matrices

Una **matriz** de **tamaño** $m \times n$ es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

y se puede ver como un vector-n (renglón) de vectores-m

$$A = [\overline{v_1}\ \overline{v_2}\ \ldots\ \overline{v_n}]$$

en donde

$$\overline{v_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \overline{v_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \overline{v_n} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cada uno de los valores a_{ij} de llama *entrada* ij *de la matriz* A o *elemento* ij *de la matriz* A y puede ser cualquier numero real, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (a los números reales los vamos a llamar *escalares*).

A continuación se presenta cómo definir una matriz en Scilab

```
A=[1 1 1 175
1 -2 0 0
0 1 -2 0]
```

o así `A=[1 1 1 175;1 -2 0 0; 0 1 -2 0]`,
o por columnas `A=[[1;1;0],[1;-2;1],[1;0;-2],[175;0;0]]`

El elemento del renglón i y columna j de una matriz A se puede denotar por

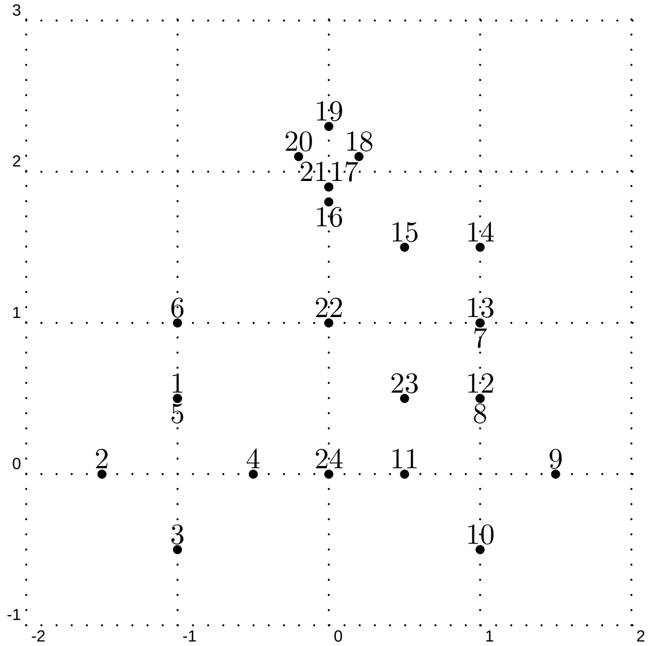
$$(A)_{ij} = a_{ij}.$$

En Scilab se denota con `A(i,j)`.

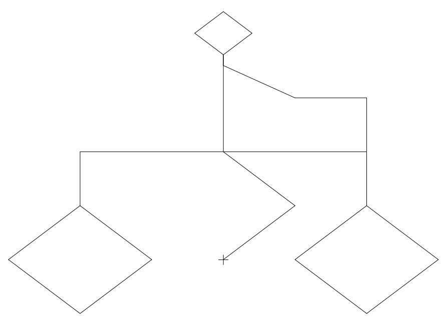
Si vemos un vector como un punto, Una matriz se puede ver como un conjunto de puntos numerados. Por ejemplo la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1 & -0.5 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1.5 & 1 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & -0.2 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 1.5 & 1.8 & 1.9 & 2.1 & 2.3 & 2.1 & 1.9 & 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

corresponde a los siguientes puntos numerados



Al unir los puntos en el orden respectivo se obtiene el siguiente dibujo



el cual se generó con el siguiente código de Scilab.

```
P=[[-1;0.5],[-1.5;0],[-1;-0.5],[-0.5;0],[-1;0.5],[-1;1],
[1;1],[1;0.5],[1.5;0],[1;-0.5],[0.5;0],[1;0.5],[1;1],
[1;1.5],[0.5;1.5],[0;1.8],[0;1.9],[0.2;2.1],[0;2.3],
[-0.2;2.1],[0;1.9],[0;1],[0.5;0.5],[0;0]]
plot2d(0,0,-1,"010"," ",[-1.6,-0.6,1.6,2.6])
xpoly(P(1,:),P(2,:),"lines")
```

De pronto podrá extrañar que, en este texto al igual que otras referencias del curso, la noción de matriz no se da de forma rigurosa. Esto se debe a que al definir la matriz en términos de funciones distrae más de lo que aporta al objetivo principal de este curso. Una matriz de números reales se puede definir como una función $f : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$

.

1.4.1 Tamaño de una matriz

El *tamaño* de una matriz se denota $m \times n$ (con $m \in \mathbb{N}_1$ y $n \in \mathbb{N}_1$) en donde m representa el *número de renglones* y n representa el *número de columnas*. Cuando se desea hacer énfasis en el tamaño de una matriz, este se escribe como subíndice $(A)_{m\times n}$. El conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ se denota $\mathbb{R}^{m\times n}$.

En el ejemplo de la matriz de puntos del ciclista, $m = 2$ es la dimensión de cada punto y $n = 24$ es la cantidad de puntos.

En Scilab el tamaño de la matriz A se define de alguna de las siguientes formas.

- `[m,n]=size(A) //tamaño reng. (m) y col. (n)`
- `m=size(A,"r") //tamaño sólo renglones (m)`
- `n=size(A,"c") //tamaño sólo columnas (n)`

En algunas demostraciones usaremos la notación $size((A)_{m\times n}) = m \times n$. Para indicar que dos matrices A y B tienen el **mismo tamaño** podemos escribir $size(A) = size(B)$, es decir que ambas matrices tienen el mismo número de columnas y el mismo número de renglones.

Las matrices de tamaño $m \times 1$ en este texto corresponden a los vectores-m cuyo tamaño es m. En otros textos también se consideran como vectores las matrices de $1 \times n$.

Hay sólo un problema al hacer corresponder las matrices de 1×1 con los escalares, ya que al multiplicarlos por una matriz dan diferente. En Scilab las matrices de 1×1 se consideran como escalares.

1.4.2 Algunos tipos de matrices

La **matriz cero** $0_{m\times n}$ es una matriz de tamaño $m \times n$ donde todos sus elementos son cero. Es decir $(0_{m\times n})_{ij} = 0$. Si no es importante el tamaño de la matriz se puede denotar $\overline{\overline{0}}$ o simplemente como 0. En Scilab se escribe `zeros(m,n)`.

Una matriz en la que $m = n$ se llama **cuadrada de orden** n. Los elementos a_{ij} con $i = j$ se dice que están en la **diagonal principal**. La **matriz identidad** I_n es una matriz cuadrada de orden n que tiene unos en la diagonal principal y ceros en el resto de elementos. Si no es importante el tamaño de la matriz se puede denotar simplemente como I. En Scilab se escribe `eye(n,n)`.

Una matriz cuadrada se llama **triangular superior** si todas sus componentes abajo de la diagonal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todos sus componentes arriba de la diagonal son cero. Una matriz se llama **diagonal** si todos los elementos que no están sobre la diagonal son cero.

Definir una matriz implica definir dos cosas, el tamaño y cada uno de sus elementos.

1.4.3 Igualdad de matrices

Dos matrices A y B son **iguales** si tienen el mismo tamaño y cada uno de sus entradas son iguales. Dicho de otra forma $A = B$ si y sólo si

- $size(A) = m \times n = size(B)$
- $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ con $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$.

En Scilab para comparar igualdad de matrices o escalares se puede usar `a==b`. Hay que tener cuidado que algunas veces un resultado que debería dar cero, en Scilab y en otros programas da un número muy pequeño pero diferente de cero. Para compara diferencia en Scilab se puede usar `a~=b` o `a<>b`.

Se recomienda ver [NJ99, Pg 154 y 155]

1.4.4 Submatrices y vectores

Una matriz se puede *subdividir* o *partir* en matrices más pequeñas creando *submatrices*. Cada submatriz es una parte rectangular de una matriz en la cual se restringen los renglones y las columnas. En Scilab una submatriz de la matriz A que restringida a los renglones 1 y 2 y a las columnas de la 1 a la 3 se define así `A(1:2,1:3)`. Esta misma submatriz la podemos representar como $(A)_{1\ldots2,1\ldots3}$.

Una **matriz renglón** o simplemente **renglón** es una matriz donde el número de renglones es 1. En Scilab la submatriz renglón i de una matriz A es `A(i,:)`. Si $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$ y $\overline{r_3}$ son matrices renglón entonces se pueden *concatenar verticalmente* estos renglones para formar una matriz

$$A = \begin{bmatrix} \overline{r_1} \\ \overline{r_2} \\ \overline{r_3} \end{bmatrix}$$

En Scilab se puede escribir así `A=[r1;r2;r3]`.

De manera similar, una **matriz columna** o simplemente **columna** o un **vector** es una matriz donde el número de columnas es 1. Cada columna de una matriz es un vector. En Scilab la submatriz columna j de una matriz A es `A(:,j)`. Si $\overline{c_1}$, $\overline{c_2}$ y $\overline{c_3}$ son matrices columna entonces se pueden *concatenar horizontalmente* estos renglones para formar una matriz

$$A = \begin{bmatrix} \overline{c_1} & \overline{c_2} & \overline{c_3} \end{bmatrix}$$

En Scilab se escribe así `A=[c1,c2,c3]`.

En Scilab se puede usar el símbolo `$` para indicar el último valor. Por ejemplo `A(:,$)` indica la última columna y `A(:,$)` indica el último renglón.

Se recomienda ver [NJ99, pg 162 y 163]

1.5 Operación transposición

Si A es una matriz de $m \times n$, entonces la **transpuesta de** A, denotada por A^T, es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones y las columnas, es decir

A^T **Transpuesta de una matriz** A

- A^T existe siempre
- su tamaño es $size(A^T) := n \times m$ en donde $m \times n = size(A)$
- sus elementos son $(A^T)_{ij} := (A)_{ji}$

en Scilab se escribe `A'`

La transpuesta cumple la siguiente propiedad

(TraTra) Una matriz es igual a la transpuesta de su transpuesta, $(A^T)^T = A$.

Una matriz A es **simétrica** si es igual a su transpuesta, $A = A^T$.

Se recomienda ver [NJ99] en las páginas 175 y 176.

1.6 Operación suma de matrices y vectores

En el conjunto de las matrices, la suma no es exactamente una operación, ya que no esta definida entre matrices de tamaños diferentes. Por eso para hablar de la operación suma entre matrices hay que restringirnos a matrices del mismo tamaño $m \times n$.

Si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (A y B pertenecen al conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$) entonces la **suma de matrices** $A + B$ es la matriz obtenida al sumar los elementos de A con los correspondientes elementos de B. En resumen

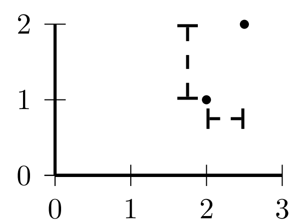
$A + B$ **Suma de dos matrices** A **y** B

- $A + B$ existe si y solo si $size(A) = size(B)$
- su tamaño es $size(A + B) := size(A) = size(B)$
- sus elementos son $(A + B)_{ij} := (A)_{ij} + (B)_{ij}$

en Scilab se escribe `A+B`

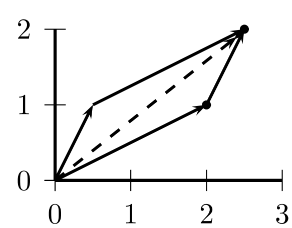
Gráficamente la suma de dos vectores se representa para los puntos como desplazando un punto,

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.5\\2\end{bmatrix}$$



y para las flechas la ley del paralelogramo ilustra la ley conmutativa de la suma [NJ99, 2.1].

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.5\\2\end{bmatrix}$$



Debido a que la suma de los escalares es asociativa, conmutativa, modulativa y con opuesto, se tiene que estas mismas propiedades se extienden a la suma de vectores y matrices, en donde el módulo es el vector cero o la matriz cero, [NJ99, Teorema 2.1.1].

La suma de matrices A, B y C de tamaño $m \times n$ cumple las propiedades:

(ConSumM) Conmutativa de la suma, $A + B = B + A$.
(AsoSumM) Asociativa de la suma, $(A + B) + C = A + (B + C)$.
(ModulM) Modulativa, Existe $0_{m\times n}$ tal que para cada matriz A se tiene que $A + 0_{m\times n} = A$.
(TraSumM) La transpuesta de una suma, $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Las primeras cuatro demostraciones son muy parecidas y consiste en generalizar los axiomas, de la suma, del campo $\mathbb{R}$ a las matrices. La siguiente es la prueba de ConSum de las matrices A y B de $m \times n$. Lo primero que hay que probar es que $size(A + B) = size(B + A)$, lo cual se debe a que al conmutar las matrices los tamaños de los sumandos no varían porque son iguales. Lo siguiente es mostrar que cada uno de los elementos de ambas matrices coinciden.

$$\begin{aligned}
(A + B)_{ij} &= (A)_{ij} + (B)_{ij} && \text{definición de suma matricial}\\
&= (B)_{ij} + (A)_{ij} && \text{ConSumR}\\
&= (B + A)_{ij} && \text{definición de suma matricial}
\end{aligned}$$

Ver [NJ99, Pag 155 y 156]

1.7 Operaciones opuesto y resta de matrices y vectores

La **matriz opuesta** de A es la matriz $-A$ definida como la matriz de los opuestos. En resumen

$-A$ **Opuesto de una matriz** A

- $-A$ existe siempre
- su tamaño es $size(-A) := size(A)$
- sus elementos son $(-A)_{ij} := -(A)_{ij}$

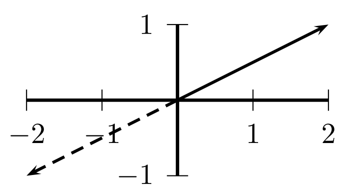
en Scilab se escribe `-A`

El opuesto cumple la siguiente propiedad

(OpuestM) Opuesto, Para cada una de las matrices A se tiene que existe una matriz $-A$ tal que $A + (-A) = 0 = (-A) + A$.

Gráficamente un la operación opuesta sobre una flecha consiste en cambiarle la dirección

$$-\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



La anterior operación permite definir la **resta entre matrices** como $A - B := A + (-B)$.

$A - B$ **Resta de dos matrices** A **y** B

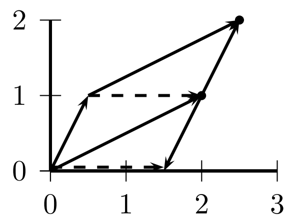
- $A - B$ existe si y sólo si $size(A) = size(B)$
- su tamaño es $size(A - B) := size(A) = size(B)$
- sus elementos son $(A - B)_{ij} := (A)_{ij} - (B)_{ij}$

en Scilab se escribe `A-B`

Esta operación cumple la siguiente propiedad útil para despejar.

(SumRes) Un sumando pasa a restar, Si $A + B = C$ entonces $A = C - B$.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$



1.8 Operación escalar por matriz y escalar por vector

Si A es cualquier matriz y c es cualquier escalar, entonces el **producto de escalar por matriz** cA es la matriz obtenida al multiplicar c por cada elemento de A. Es un error de notación escribir Ac o A/c. Resumiendo

cA **Producto de escalar** c **por matriz** A

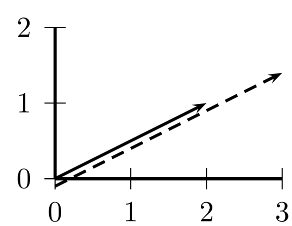
- cA existe siempre
- su tamaño es $size(cA) := size(A)$
- sus elementos son $(cA)_{ij} := c(A)_{ij}$

en Scilab se escribe `c*A`

Es importante que c sea un escalar porque si es una matriz realiza una multiplicación matricial. Aunque en general existen las matrices de 1×1, hay que tener cuidado porque en Scliab se interpretan como escalares.

Gráficamente el producto escalar por un vector se representa por otro vector en la misma dirección pero diferente longitud.

$$1.5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$



Dos vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son **paralelos** si hay un escalar c tal que $\overline{u} = c\overline{v}$.

A diferencia de la suma de matrices, el producto de escalar por matriz es una operación entre dos conjuntos diferentes, el conjunto de los números reales y el conjunto de las matrices. Por este motivo, las propiedades son algo especiales.Sin embargo, las propiedades de la multiplicación entre escalares se pueden nuevamente extender, de tal forma que la multiplicación escalar por matriz cumple las leyes distributiva, asociativa y además $1\overline{u} = \overline{u}$ y $0\overline{u} = \overline{0}$, [NJ99, Teorema 2.1.1]. Aunque la multiplicación entre escalares es conmutativa esta no se extrapola ya que no se va a definir la multiplicación de matriz por escalar.

Las siguientes son algunas propiedades del producto escalar por matriz. Asuma que B y C son matrices de los tamaños apropiados y que a y b son escalares.

(EscCero) Escalar cero, $0A = (0)_{m\times n}$. Esta propiedad es diferente a MulCero, porque los operandos son de diferente tipo.
(EscUno) Escalar uno, $1A = A$. Esta propiedad es diferente a Ident, porque los operandos son de diferente tipo.
(EscOpues) Escalar es opuesto, $(-a)B = a(-B) = -(aB)$. Esta propiedad es diferente a MulOpues, porque los operandos son de diferente tipo.
(EscDisMat) Escalar distribuye en suma de matrices, $a(B + C) = aB + aC$.
(MatDisEsc) Matriz distribuye en suma de escalares, $(a + b)C = aC + bC$.
(EscAsoMat) El producto de escalares es Asociativo con Matriz, $(ab)C = a(bC)$.
(MatAsoEsc) El producto de matrices es Asociativo con Escalar, $a(BC) = (aB)C = B(aC)$.
(TraProEsc) Transpuesta del producto escalar por matriz, $(cA)^T = c(A^T)$.

1.9 Repaso

Usted debe estar en capacidad de identificar estos conceptos para una matriz A: numero de renglones, número de columnas, tamaño, entrada (1,2), entrada (2,1), es cero, es cuadrada, es diagonal, es identidad, es triangular superior, es triangular inferior, es un vector columna, es un vector renglón, columna 2, renglón 2, transpuesta, es simétrica, -3A. Además de la operación suma.

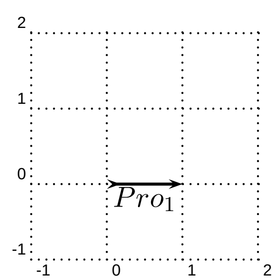
ejercicio calcular y dibujar $\frac{1}{2}\left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right] - \frac{1}{4}\left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$

Chapter 2

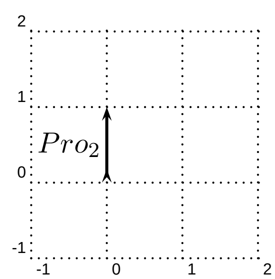
Combinación lineal o transformaciones matriciales

2.1 Introducción a la combinación lineal de vectores

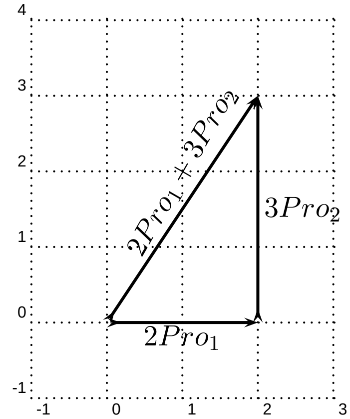
Supongamos que tenemos un robot llamado UALI (la versión Chibcha del de la película) en el espacio lejano (lejos de grandes masas como planetas o estrellas), el cual tan solo se puede mover en linea recta según el propulsor que tenga encendido, por el momento tiene dos propulsores: el propulsor 1 (Pro_1) se encarga de mover al robot a lo largo del eje y_1 (a una velocidad de 1cm/s)



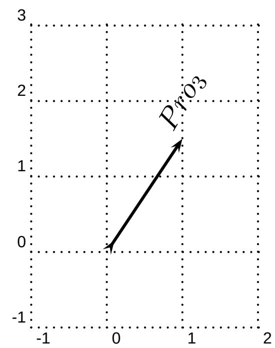
El propulsor 2 (Pro_2) mueve al robot a lo largo del eje y_2 (a la misma velocidad).



Para mover al robot del origen a las coordenadas $\left[\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right]$ (en cm) hay que ordenarle moverse 2 (segundos) al propulsor Pro_1 y 3 (segundos) al Pro_2 lo que resumiremos como $2Pro_1 + 3Pro_2$.

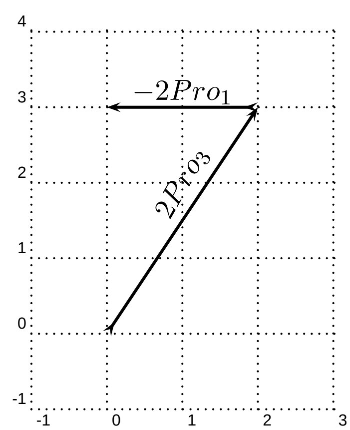


Se puede colocar otro propulsor Pro_3 que mueve al robot al mismo tiempo en el eje y_1 (a una velocidad de 1 cm/s) y en el eje y_2 (a una velocidad de 1.5 cm/s),



de tal forma que si se mueve sólo con Pro_3 durante un segundo quedará en las coordenadas $[\begin{smallmatrix}1\\1.5\end{smallmatrix}]$. Pero si se mueve dos segundos quedará en las coordenadas $[\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}]$. Ahora hay muchas formas de mover al robot para poder llegar a cualquier punto.

Por ejemplo, un forma para mover al robot 3 cm en el eje y_2 consiste en activar solamente Pro_2 tres segundos, $3Pro_2$. Otra forma consiste en activar solamente Pro_1 y Pro_3. ¿Cuanto tiempo hay que activar cada propulsor?. Es de aclarar que un tiempo negativo $(-t)$ implica que el propulsor se mueve en la dirección opuesta un tiempo t.



En el capítulo anterior, los vectores representaban puntos de un dibujo. En este capítulo, los vectores representan la velocidad y se dibujan mediante flechas. Los símbolos matemáticos no distinguen entre puntos o flechas, el significado geométrico o físico lo ponemos los humanos. En este capítulo las columnas de la matriz A usualmente serán vectores de flechas y el vector $\overline{c}$ controla cuanto vamos a 'usar' cada una de esas flechas.

.

2.2 Definición de Combinación lineal

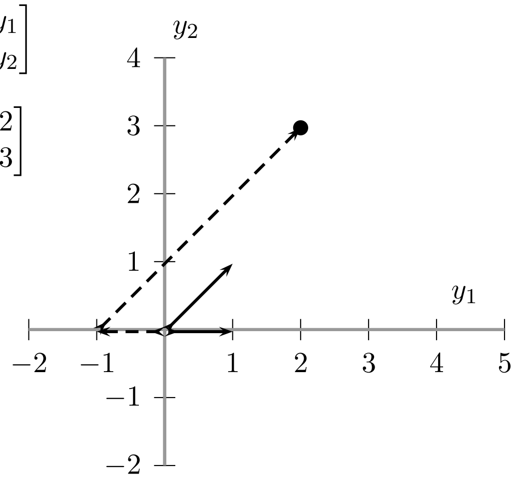
Una **combinación lineal** de los vectores-m $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}$ es de la forma

$$c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \ldots + c_n\overline{v_n}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son escalares llamados **coeficientes de la combinación lineal**. Por ejemplo

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Gráficamente la combinación lineal se puede ver como una sucesión de flechas como se muestra en [NJ99, Figura 2.5, pg 67]

Se sugiere estudiar de la sección [NJ99, 2.1] y realizar los ejercicios 1,3,5,6 y 7.

2.3 Operación matriz por vector

Usando la notación matricial, la combinación lineal se denota como el producto Matriz por vector.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} := c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n \end{bmatrix}$$

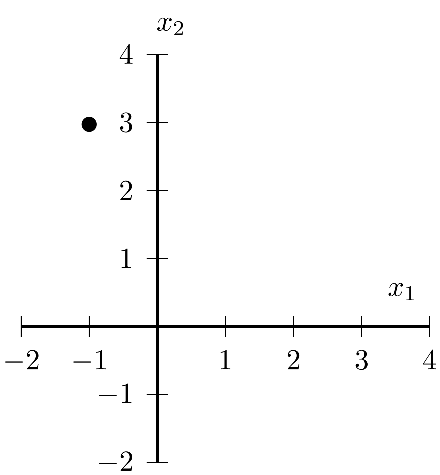
que es equivalente a

$$A\overline{c} := c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \cdots + c_n\overline{v_n}$$

en donde

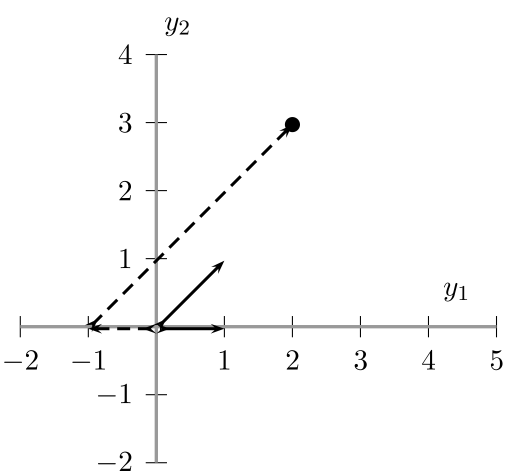
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \overline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \overline{v_i} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Al vector $\overline{c}$ algunos autores lo llaman **valor** y al resultado $A\overline{c}$ lo llaman **covalor**. A continuación se muestra el mismo ejemplo anterior escrito como producto de matriz por vector.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Resumiendo

$A\overline{c}$ **Producto de matriz** A **por vector-**n $\overline{c}$

- $A\overline{c}$ existe si el número de columnas de A es igual a n que es el tamaño del vector $\overline{c}$
- su tamaño es $size(A\overline{c}) := m \times 1,$ donde m el número de renglones de A
- sus elementos son $(A\overline{c})_{ij} := c_1(A)_{i1} + c_2(A)_{i2} + \cdots + c_n(A)_{in}$ donde $j = 1$

en Scilab se escribe `A*c`

Las propiedades de matriz por vector serán un caso particular de las propiedades de la multiplicación entre matrices que se presentan más adelante.

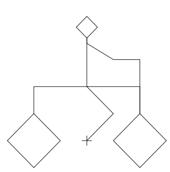
Se sugiere estudiar de la sección [NJ99, 2.5] las paginas 104 a 106 y realizar los ejercicios 1,2,11,12,13.

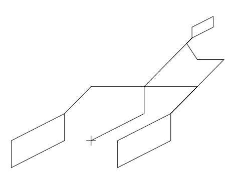
2.4 Multiplicación matricial como muchas combinaciones lineales

Supongamos que las columnas de la matriz $B = [\overline{p_1}\ \overline{p_2}\ \ldots\ \overline{p_n}]$ corresponde los puntos de un dibujo. Y sea A la una matriz con la cual se va a transformar cada uno de los puntos. Entonces se define la **multiplicación matricial** de la siguiente forma.

$$AB = A[\overline{p_1}\ \overline{p_2}\ \ldots\ \overline{p_n}] := [A\overline{p_1}\ A\overline{p_2}\ \ldots\ A\overline{p_n}]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 & -1.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$





En resumen

AB **Producto de la matriz** $A \in \mathbb{R}^{m\times r}$ **por la matriz** $B \in \mathbb{R}^{r\times n}$

- AB existe si el número de columnas de A es igual r que es el número de renglones de B
- su tamaño es $size(AB) := m \times n$
- sus elementos son $(AB)_{ij} := (A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i2}(B)_{2j} + \cdots + (A)_{ir}(B)_{rj}$

en Scilab se escribe `A*B`

La multiplicación matricial no es conmutativa pero si es asociativa y distributiva. Además la multiplicación por una matriz cero da cero y por la matriz identidad da la misma. [NJ99, Teorema 3.1.2] Sin embargo, es de resaltar que la multiplicación de matrices no está definida entre cualquier par de matrices. Para las siguientes propiedades se asumen que las matrices A, B y C tienen los tamaños adecuados para poder realizar las operaciones y no necesariamente son cuadradas.

(AsoMul) Asociativa de la mult., $(AB)C = A(BC)$.
(Ident) Identidad, Existe la matriz I_n tal que para cada matriz A cuadrada de orden n se tiene que $AI_n = A = AI_n$. Esta propiedad se cumple al restringimos a matrices cuadradas de orden n.
(DistrD) Distributiva a derecha, $(B + C)A = (BA) + (CA)$.
(DistrI) Distributiva a izquierda, $A(B + C) = (AB) + (AC)$.
(MulCero) Multiplicación por cero, $0A = 0 = A0$.
(MulOpues) Multiplicar por opuesto, $(-B)A = -(BA)$.
(TraMul) Transpuesta de la multiplicación de matrices, $(AB)^T = B^T A^T$.

Las demostraciones de las propiedades de la multiplicación de matrices son más interesantes que las de la suma de matrices. A continuación se presenta la demostración de DistrI (distributiva a izquierda) de las matrices A de $m \times r$ y B, C de $r \times n$, la cual se presenta en [Ant06][demo. Teorema 1.4.1.d]. Lo primero es demostrar que los tamaños de las matrices son iguales $size(A(B + C)) = size(AB + AC)$.

$$
\begin{aligned}
& size(A_{m\times r}(B_{r\times n} + C_{r\times n})) & \\
& = size(A_{m\times r}(B + C)_{r\times n}) & \text{def. suma matricial} \\
& = size((A(B + C))_{m\times n}) & \text{def. mult. matricial}
\end{aligned}
$$

es $m \times n$, además

$$
\begin{aligned}
& size(A_{m\times r}B_{r\times n} + A_{m\times r}C_{r\times n})) & \\
& = size((AB)_{m\times n} + (AC)_{m\times n}) & \text{def. mult matricial} \\
& = size((AB + AC)_{m\times n}) & \text{def. suma matricial}
\end{aligned}
$$

que también es $m \times n$. Ahora hay que probar que cada uno de los elementos de la matrices son iguales.

$$
\begin{aligned}
& (AB + AC)_{ij} & \\
& = \{(AB)_{ij}\} + \{(AC)_{ij}\} & \text{def. de suma matricial} \\
& = \{(A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i2}(B)_{2j} + \cdots + (A)_{ir}(B)_{rj}\} & \\
& \quad + \{(A)_{i1}(C)_{1j} + (A)_{i2}(C)_{2j} + \cdots + (A)_{ir}(C)_{rj}\} & \text{def. de mult. matricial} \\
& = \{(A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i1}(C)_{1j}\} & \\
& \quad + \{(A)_{i2}(B)_{2j} + (A)_{i2}(C)_{2j}\} & \\
& \quad + \cdots & \\
& \quad + \{(A)_{ir}(B)_{rj} + (A)_{ir}(C)_{rj}\} & \text{ConSum del campo } \mathbb{R} \\
& = \{(A)_{i1}((B)_{1j} + (C)_{1j})\} &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\{(A)_{i2}((B)_{2j}+(C)_{2j})\} && \\
&+\cdots && \\
&+\{(A)_{ir}((B)_{rj}+(C)_{rj})\} && \text{Distr del campo } \mathbb{R} \\
&=\{(A)_{i1}(B+C)_{1j}\} && \\
&+\{(A)_{i2}(B+C)_{2j}\} && \\
&+\cdots && \\
&+\{(A)_{ir}(B+C)_{rj})\} && \text{def. suma matricial} \\
&=(A(B+C))_{ij} && \text{def mult. matricial}
\end{aligned}
$$

Es de resaltar que la multiplicación de matrices en general no es conmutativa, pero se pueden encontrar **matrices que conmutan**, El producto de matriz por columna se puede ver como un caso particular de la multiplicación de matrices.

2.5 Potencia positiva de una matriz

Para una matriz cuadrada A se definen las potencias: $A^0 = I$, para $n \in \mathbb{N}_1$, $A^n = AA \dots A$ n veces

Las siguientes son algunas propiedades de las potencias. Asumiendo que A es cuadrada, que c es un escalar distinto se cero y que $r, s \in \mathbb{N}_0$, se tienen las siguientes propiedades.

(SumaExpN) Suma de Exponentes, $A^r A^s = A^{r+s}$.
(ExpExpN) Producto de exponentes, $((A)^r)^s = A^{rs}$.
(ExpEscMatN) El escalar sale con exponente, $(cA)^r = c^r(A)^r$.

Se sugiere estudiar de la sección [NJ99, 3.1] las páginas 160 en adelante y realizar los ejercicios del 10 en adelante.

2.6 Transformación matricial

Vimos que la operación matriz por vector ($A\overline{x}$) transforma un sólo vector. Además vimos como la multiplicación matricial ($A[\overline{v_1}\ \overline{v_2}\ \dots \overline{v_n}\ ]$) puede transformar muchos vectores al tiempo. Ahora vamos a centrarnos en como la matriz A transforma. Es decir podemos inferir que hace la matriz A sin importar si los puntos que transforma son de una bicicleta, una casa o un carro.

Dado un vector-n fijo $\overline{c}$ (no variable) la combinación lineal $c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \cdots + c_n\overline{v_n}$ o en su respectiva operación matriz por vector generan un vector-m. Pero si $\overline{x}$ es un vector-n variable la combinación lineal $x_1\overline{v_1}+x_2\overline{v_2}+\cdots+x_n\overline{v_n}$ o su respectiva operación matriz por vector $A_{m\times n}\overline{x}$ se pueden ver como una trasformación del espacio $\mathbb{R}^n$ (llamado **dominio**) al espacio $\mathbb{R}^m$ (llamado **codominio**),

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dada por

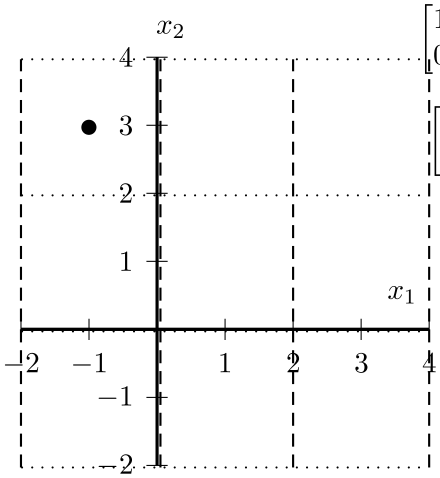
$$T_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Recordemos que este resultado corresponde a

$$T_A(\overline{x}) = A\overline{x}$$

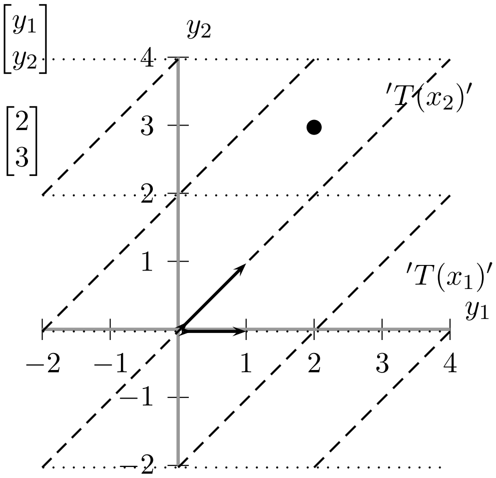
(ver [NJ99, Fig 5.2]). Si $T_A(\overline{x}) = \overline{y}$ algunos autores llaman $\overline{x}$ el **valor** y $\overline{y}$ el **covalor**.

Retomando el ejemplo anterior, T_A transforma el vector $\overline{x}$ en $\overline{y} = T_A(\overline{x})$.



$$\begin{bmatrix} 1(x_1) + 1(x_2) \\ 0(x_1) + 1(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1(-1) + 1(3) \\ 0(-1) + 1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



En la gráfica anterior se observa como se transforman los eje x_1 y x_2

Como la operación de matriz por vector $A\overline{x}$ da un vector $\overline{y}$, entonces podemos ver esta operación como que A transforma a $\overline{x}$ en $\overline{y}$. A la izquierda presentamos el espacio de los $\overline{x}$ y a la derecha el espacio de los $\overline{y}$.

Hasta el momento tenemos tres representaciones equivalentes:

- combinación lineal $-1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
- operación matriz por vector $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y
- transformación matricial $\begin{bmatrix} 1(x_1) + 1(x_2) \\ 0(x_1) + 1(x_2) \end{bmatrix}$.

De esta forma si, por ejemplo, nos referirnos a una combinación lineal (por ejemplo, $-1\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]+3\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$) como una operación matriz por vector estamos haciendo referencia a la única operación matriz por vector correspondiente (por ejemplo, $\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}-1\\3\end{smallmatrix}\right]$). Por otro lado, en una transformación matricial $T_A(\overline{x})=\overline{y}$ asumimos que los vectores $\overline{x}$ y $\overline{y}$ son variables y A es una matriz de escalares. Por eso una transformación matricial se representa

$$T_A(\overline{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \text{ asociada a la matriz } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{Por ejemplo, } T_A(\overline{x}) = \left[\begin{smallmatrix} 1(x_1)+1(x_2) \\ 0(x_1)+1(x_2) \end{smallmatrix}\right] \text{ está asociado a } A = \left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]$$

. Por lo tanto cada transformación matricial está asociado a una (y sólo una) matriz (o a un conjunto de vectores-m). Por lo tanto si nos referimos a una matriz como una transformación matricial, estamos haciendo referencia a la transformación asociada a esa matriz.

2.7 Transformaciones de matrices elementales

A continuación veremos algunas combinaciones lineales de **matriciales elementales**, las cuales consisten en una matriz identidad a la cual se le ha realizdo una (y sólo una) de las siguientes tres operaciones matriciales.

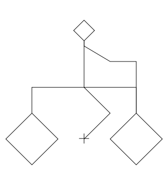
- ($eR_i \to R_i$) Multiplicar los elementos de un renglón por un escalar e.
- ($R_i \leftrightarrow R_j$) Intercambiar dos renglones.
- ($R_i + eR_j \to R_i$) Sumar un múltiplo escalar e de un renglón a otro renglón.

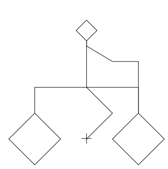
Identidad La combinación lineal de dos vectores, uno en el eje y_1 $\overline{v_1} = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ y otro en el eje y_2 $\overline{v_2} = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, está dada por

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$$

En este caso da el mismo vector $\overline{c}$, por este motivo la matriz $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ se llama la matriz identidad de 2×2.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1.5&-1\\0.5&0&-0.5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&-1.5&-1\\0.5&0&-0.5\end{bmatrix}$$

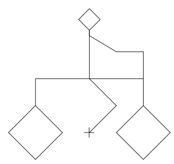


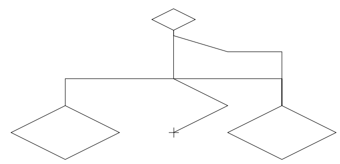


Escalamiento del primer componente con $k = 2$

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

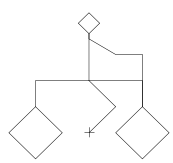


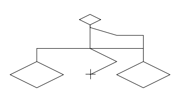


Escalamiento del segundo componente con $k = 0.5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ k\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1 \\ 0.25 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}$$

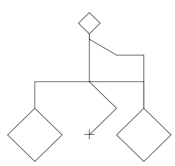


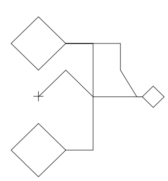


Intercambio de componentes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ -1 & -1.5 & -1 \end{bmatrix}$$





Sumando a la primera componente un múltiplo de la segunda con $k = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + (k\ x_2) \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La combinación lineal del vector del eje x con el vector a 45 grados es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.5 & -1.5 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Sumando a la segunda componente un múltiplo de la primera con $k = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + (k\ x_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 & -1 \\ -0.5 & -1.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio. ¿Cómo queda la figura al aplicarle la transformación

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

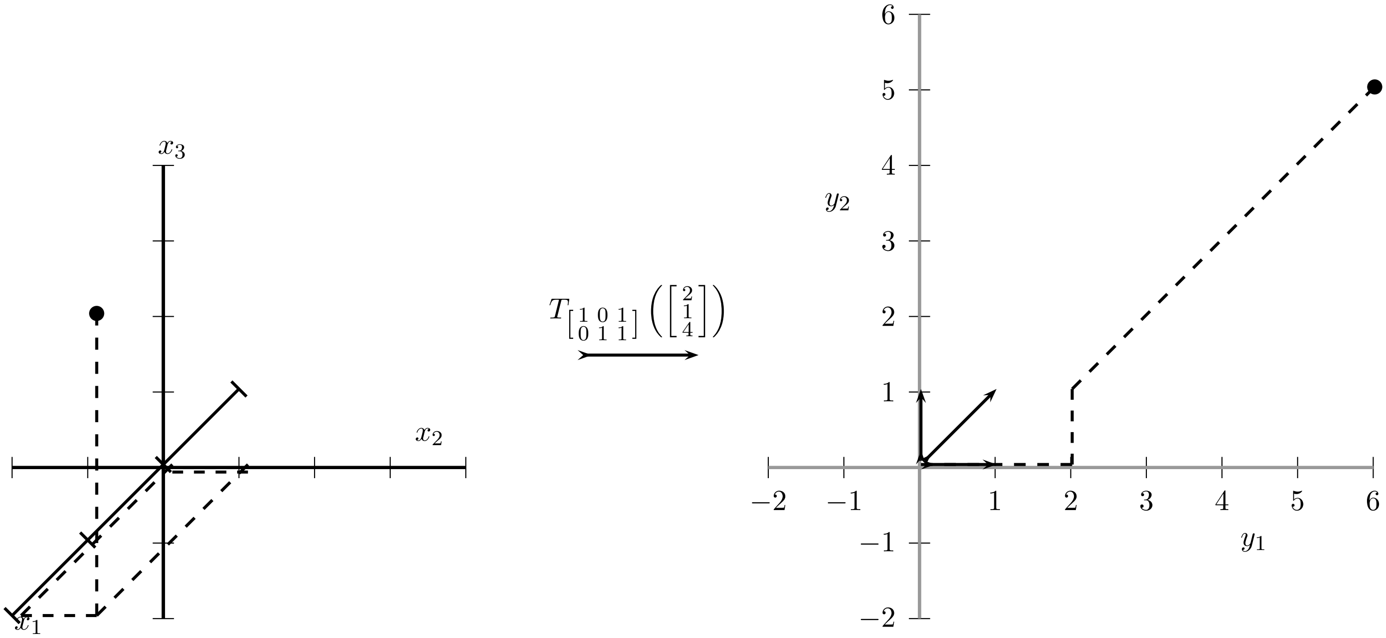
2.8 Transformaciones con $\mathbb{R}^3$

De $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$. Ahora le concatenamos a los dos vectores de la identidad el vector $\overline{v_3} = [\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}]$ de tal forma que ahora la transformación correspondiente convierte vectores de $\mathbb{R}^3$ en vectores de $\mathbb{R}^2$.

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

En particular si queremos dos veces el primer vector, una vez el segundo vector y cuatro veces el tercer vector, la combinación lineal se expresa

$$2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$$



De $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Ahora veamos la combinación lineal de dos vectores en R^3 (vectores-3). La combinación lineal de dos vectores, uno en el eje y_1 $\overline{v_1}=\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right]$ y otro en el eje y_2 $\overline{v_2}=\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right]$, está dada por

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\0\end{bmatrix}$$

Dibuje el punto $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ y $T_{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]}\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)$ en $\mathbb{R}^3$.

De $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. La combinación lineal de los dos vectores anteriores con el vector $\overline{v_3}=\left[\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right]$ es

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3\\x_2+x_3\\0\end{bmatrix}$$

Dibuje el punto $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ y $T_{\left[\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]}\left(\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\right)$ también en $\mathbb{R}^3$.

2.9 Multiplicación matricial como composición de transformaciones matriciales

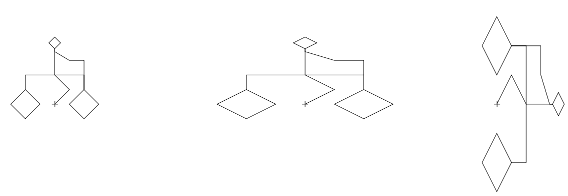
Suponga que $A \in \mathbb{R}^{m\times r}$ (A pertenece al conjunto de las marices de tamaño $m \times r$), que $B \in \mathbb{R}^{r\times n}$ y que $\overline{c}$ es un vector-n. Debido a que la multiplicación matricial es asociativa se tiene la siguiente igualdad al considerar los vectores como matrices columna.

$$A(B\overline{c}) = (AB)\overline{c}$$

Recordemos que una matriz se puede ver como una transformación matricial. ¿Cómo se puede ver las transformaciones en este caso? Para el lado izquierdo de la anterior ecuación se puede ver la *composición* de dos transformaciones matriciales (la cual se ilustra en [NJ99, Figura 5.27 pg 357]), mientras que el lado derecho se puede ver como una transformación matricial de la matriz resultante del producto AB.

$$T_A(T_B(\overline{c})) = T_{AB}(\overline{c})$$

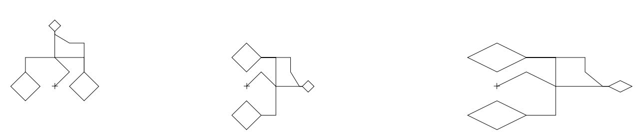
Esto se puede interpretar como que la composición de transformaciones matriciales es la transformación dada por el producto de matrices. Lo cual queda más claro con el siguiente ejemplo. Sabemos que la matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ es la matriz que intercambia componentes y que $B = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ es la matriz que escalona (duplica) la primera componente. $T_A(T_B(\overline{c}))$ significa que primero se duplica la primera componente y luego se intercambian las componente. En la siguiente figura primero se muestra la imagen original, luego escalonada en la primera componente y finalmente se intercambia las componentes.



Por otro lado para graficar T_{AB} hay que calcular el producto

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

la corresponde a una transformación que realiza las dos operaciones en un sólo paso. En la siguiente figura se tienes las imágenes de la composición $T_B(T_A(\overline{c})) = T_{BA}(\overline{c})$ lo cual muestra que ni la composición ni la multiplicación son conmutativas.



Se sugiere mirara [Ant06, pag. 239-243]. De manera opcional se puede ojear la sección [NJ99, 5.5] y se recomienda realizar los ejercicios 8 9 y 10. De manera opcional se pueden hacer los ejercicios del 1 al 17.

2.10 Resumen

- combinación lineal $c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ donde a_{ij} y c_k son escalares y da un vector-m,

- operación matriz por vector $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ donde a_{ij} y c_k son escalares y da un vector-m,

- transformación matricial $\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$ donde los a_{ij} son escalares y los x_k son variables.

En esta sección usted debe estar en capacidad de encontrar el covalor de la transformación de un valor numérico o de un valor arbitrario. Además, dada una transformación matricial (es decir una matriz) debe saber cual es el dominio y el codominio. También debe identificar aquellas transformaciones matriciales que: sólo escalona alguna componente, sólo intercambia componentes, suman una componente a otra. Por último debe componer transformaciones matriciales.

Chapter 3

Solución de sistemas de ecuaciones lineales o transformaciones inversas

Borrador de las notas de clase (Bajo licencia GPL), enviar las sugerencias a gmunoz@udistrital.edu.co.

Regresando a nuestro ejemplo del plotter, sale una pregunta de modo natural. ¿Cuánto tiempo debo prender los motores para poder llegar a unas coordenadas determinadas? para el caso de tener un motor en cada eje la respuesta es sencilla, se complica un poco para cuando están solamente Mot_1 y Mot_3 y se complica aun más cuando están los tres motores. En este capítulo veremos una forma sistemática para resolver esta pregunta.

3.1 Matrices extendidas

En el capítulo ase multiplicó una matríz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ por un vector-n $\overline{c}$ y se obtenía el vector-m $A\overline{c}$. En este capítulo vamos a buscar si existe un vector-m x tal que al ser multiplicado por la matriz A de un vector b. Esto se puede representar de las siguientes maneras

$$A\overline{x} = \overline{b},$$

al remplazar por las componentes queda

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

y como dos vectores son iguales si sus elementos son iguales entonces

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

En particular este último se conocen como un **sistema de ecuaciones lineales** con m ecuaciones y n variables. Las componentes de A se conocen como los **coeficientes del sistema lineal**, las componentes del vector-n $\overline{x}$ se llaman **variables** y las componentes del vector-m $\overline{b}$ se llaman **términos constantes**.

Un sistema de ecuaciones se puede representar con la **matriz extendida** de la siguiente forma

$$[A : b]$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & : & b_m \end{bmatrix}$$

Pero para usar esta notación es necesario fijar el orden de las variables, en este caso es $x_1, x_2, \ldots x_n$. Lo cual personalmente escribo sobre la matriz extendida, aunque esto no se acostumbra en la literatura referenciada para el curso.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & : & b_m \end{bmatrix} \end{array}$$

Cada renglón i de la matriz extendida corresponde a una **ecuación lineal**

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

En una matriz cualquiera, un **renglón cero** sólo tiene ceros. Un **renglón no cero** tiene al menos un elemento diferente de cero. Lo mismo se define en las columnas. El primer elemento no cero de un renglón no cero se llama **elemento delantero**.

3.2 Clasificación de matrices extendidas

Hay unos sistemas de ecuaciones más sencillos de resolver que otros, primero vamos a caracterizar los más sencillos de resolver y después vamos a convertir los demás sistemas a los más sencillos de resolver. Para esto necesitamos algunas definiciones que no sólo se pueden aplicar a las matrices extendidas, sino en general a todas las matrices [NJ99, 1.1].

Una matriz está en forma (renglón) **escalón** si cumple las siguientes dos propiedades.

————Explicar como simplifica cada propiedad el sistema de ecuaciones

(E1) Todos los renglones cero están en la parte inferior de la matriz o si no hay renglones de ceros.

(E2) Para cada elemento delantero $a_{i,j}$ se tiene que el elemento delantero del siguiente renglón $a_{i+1,k}$ (si lo hay) debe estar a la derecha (es decir $j < k$).

A los elementos delanteros de una matriz escalón se les llama **pivotes**. Las **columnas pivote** y **renglones pivote** son aquellos que tienen un elemento pivote.

—— En cada columna y en cada renglón hay máximo un pivote

—— El número de pivotes es menor que el número de columnas y de renglones

En [Gro06] se define una matriz **escalonada** (por renglones) como la matriz que está en forma renglón escalón y además cumple la siguiente propiedad.

(E3) Cada pivote es 1 (y se llama **1 delantero**).

Una matriz está en forma **escalón reducida** o **escalonada reducida** si es una matriz escalonada por renglones y además cumple la siguiente propiedad.

(E4) Arriba y abajo del pivote hay ceros.

Un vector $\overline{x}$ que cumple la ecuación $A\overline{x} = \overline{b}$ se llama **solución particular** del sistema lineal y el conjunto de todas las soluciones particulares se llama **conjunto solución**. Una solución particular escrita en forma genérica se llama **solución general**.

Los siguientes ejemplos permiten comprender como se relacionan la anterior clasificación de matrices extendidas con las soluciones de los sistemas de ecuaciones.

3.3 Ejemplo con la matriz identidad

Queremos encontrar cuales vectores-2 $\overline{x}$ cumplen que

$(A\overline{x} = \overline{b})$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(Matriz extendida)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

(Sistema de ecuaciones)
$$\begin{array}{rcrcl} 1x_1 & + & 0x_2 & = & 2 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & = & 3 \end{array}$$

3.3.1 Solución del sistema lineal

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

(una solución particular)
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(la solución general)
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(el conjunto solución)
$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

en este caso la solución particular y la general coinciden porque la solución es única.

3.3.2 Clasificación de la matriz

En la matriz extendida vemos que cumple:

- (E1) porque no tiene renglones de ceros,
- (E2) porque la entrada $2, 1$ es cero,
- (E3) porque los elementos delanteros $1, 1$ y $2, 2$ son uno,
- (E4) porque la entrada $1, 2$ también es cero.

Como cumple (E1) y (E2) la matriz está en forma escalón y podemos identificar los elementos delanteros, en este caso en el primer renglón el elemento delantero (o pivote) es la entrada $(1, 1)$. Este elemento delantero está asociado a la variable x_1 que fue la variable que se despejó en la primera ecuación.

En el segundo renglón el elemento delantero (o pivote) es la entrada $(2, 2)$. Este elemento delantero está asociado a la variable x_2 que fue la variable que se despejó en la segunda ecuación.

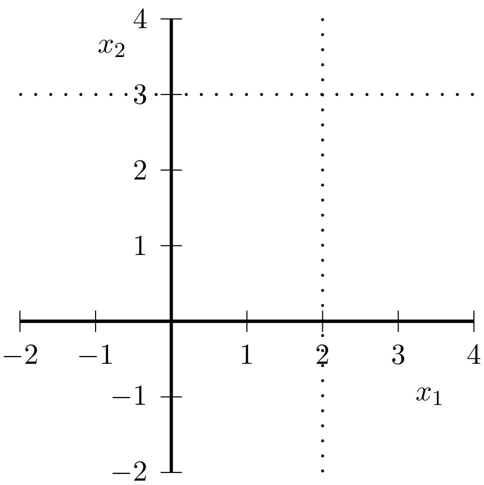
Todos los renglones son pivotes pero sólo las dos primeras columnas son pivotes, las mismas columnas que están asociadas a variables, entonces todas las columnas asociadas a variables son pivotes.

Como cumple (E3) la matriz está en forma escalonada lo cual facilita el despejar las variables x_1 y x_2.

Como también cumple (E4) la matriz está en forma escalón reducida y esto hace que el sistema de ecuaciones ya está despejado.

3.3.3 Representación gráfica

Para representar gráficamente la solución vamos a considerar la variable x_1 como el eje horizontal y x_2 como el eje vertical. Luego se colocan los puntos que resuelven cada una de las ecuaciones.



La primera ecuación $1x_1 + 0x_2 = 2$ corresponde a la línea vertical que cruza el eje de x_1 por 2. La segunda ecuación $0x_1 + 1x_2 = 3$ corresponde a la línea horizontal que cruza el eje de x_2 por 3. La solución del sistema es donde se cruzan las dos líneas.

3.3.4 Solución con valores arbitrarios

Si en vez del vector-2 numérico $\overline{b} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ tenemos el vector-2 arbitrario $\overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$(A\overline{x} = \overline{b})$ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

(Matriz extendida) $$\left[\begin{array}{cccll} 1 & 0 & : & b_1 & \\ 0 & 1 & : & & b_2 \end{array}\right]$$

(Sistema de ecuaciones) $$\begin{array}{ccccc} 1x_1 & + & 0x_2 & = & b_1 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Se han desfasado los valores arbitrarios b_1 y b_2 en la matriz extendida ya que será útil más adelante.

De las ecuaciones se obtiene directamente que $x_1 = b_1$ y $x_2 = b_2$ y por lo tanto para cada valor b_1 y b_2 se tiene

(una solución particular) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

(la solución general) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

(el conjunto solución) $\left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\}$

en este caso también la solución particular y la general coinciden porque la solución es única. Además la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se llama la identidad porque el valor y el covalor son idénticos.

Observe que en este caso al cambiar los términos constantes por los arbitrarios no se afectaron ni los pivotes ni la forma de despejar las variables.

3.4 Ejemplo de matriz que no cumple (E4)

Ahora repetiremos el ejercicio pero para encontrar el vector-2, $\overline{x}$ que cumple

$$
\begin{array}{ll}
(A\overline{x} = \overline{b}) & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
\text{(Matriz extendida)} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix} \\
\text{(Sistema de ecuaciones)} & \begin{array}{ccccc} 1x_1 & + & 1x_2 & = & 2 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & = & 3 \end{array}
\end{array}
$$

3.4.1 Solución del sistema lineal

Este sistema de ecuaciones es un poco más interesante que el anterior, de manera inmediata vemos que $x_2 = 3$ y resolviendo la primera ecuación obtenemos

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 2 \\
x_1 &= 2 - x_2 \\
x_1 &= 2 - 3 \\
x_1 &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{(una solución particular)} & \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\
\text{(la solución general)} & \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\
\text{(el conjunto solución)} & \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}
\end{array}
$$

también en este caso la solución particular y la general coinciden porque la solución es única.

3.4.2 Clasificación de la matriz

En la mariz extendida vemos que cumple:

- (E1) porque no tiene renglones de ceros,
- (E2) porque la entrada $2, 1$ es cero,
- (E3) porque los elementos delanteros $1, 1$ y $2, 2$ son uno,

(E4) no se cumple porque la entrada $1, 2$ no es cero.

Como cumple (E1) y (E2) la matriz está en forma escalón y podemos identificar los elementos delanteros, en este caso en el primer renglón el elemento delantero (o pivote) es la entrada $1, 1$. Este elemento delantero está asociado a la variable x_1 que fue la variable que se despejó en la primera ecuación.

En el segundo renglón el elemento delantero (o pivote) es la entrada $2, 2$. Este elemento delantero está asociado a la variable x_2 que fue la variable que se despejó en la segunda ecuación.

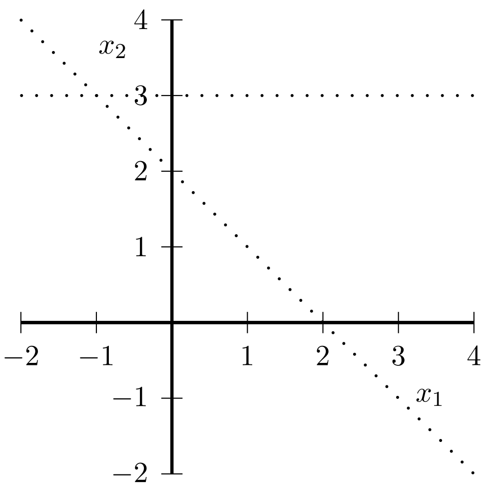
Todos los renglones son pivotes pero sólo las dos primeras columnas son pivotes, las mismas columnas que están asociadas a variables, entonces todas las columnas asociadas a variables son pivotes.

Como cumple (E3) la matriz está en forma escalonada lo cual facilita el despejar las variables x_1 y x_2.

Como no cumple (E4) la matriz no está en forma escalón reducida y esto hace que sea necesario realizar algunos pasos adicionales para despejar x_2.

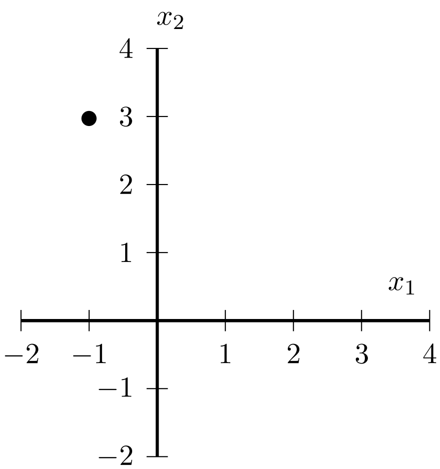
3.4.3 Representación gráfica

La representación gráfica de la solución de las ecuaciones se representa en la siguiente gráfica.



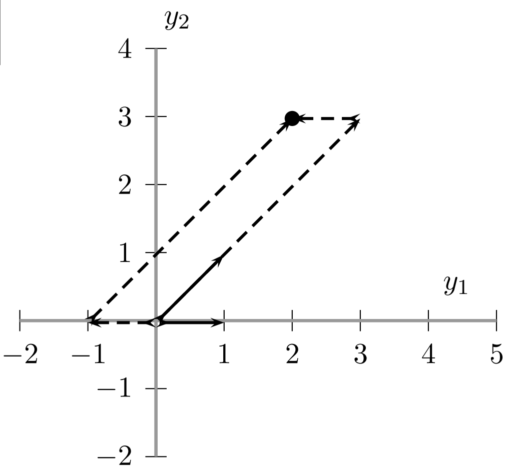
Donde la segunda ecuación $0x_1 + 1x_2 = 3$ queda igual a la línea horizontal que cruza el eje de x_2 por 3. Pero la primera ecuación $1x_1 + 1x_2 = 2$ cambia, para dibujarla podemos despejar cualquier variable por ejemplo $x_1 = 2 - x_2$ y dar valores a x_2 y encontrar los respectivos valores de x_1, por ejemplo $\left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$. Con dos puntos es suficiente porque se dibuja la recta que pasa por esos dos puntos.

En la siguiente figura se relaciona el punto obtenido (a la izquierda) con la combinación lineal de las columnas de la matriz (a la derecha).



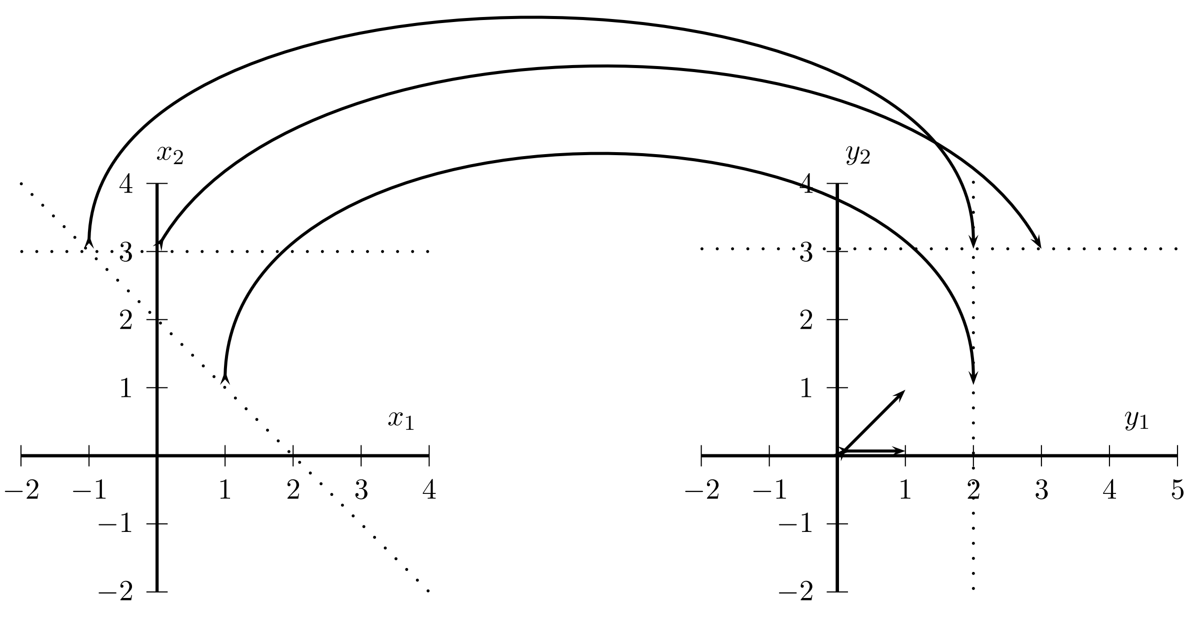
$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$



Recordemos como esta matriz transforma los puntos del dibujo.

Y veamos como transforma las rectas



3.4.4 Solución con valores arbitrarios

Si en vez del vector-2 numérico $\overline{b} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ tenemos el vector-2 arbitrario $\overline{b} = \left[\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right]$ entonces

(A$\overline{x} = \overline{b}$) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

(Matriz extendida) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & : & b_1 & \\ 0 & 1 & : & & b_2 \end{bmatrix}$$

(Sistema de ecuaciones) $$\begin{array}{ccccc} 1x_1 & + & 1x_2 & = & b_1 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Observe que en la matriz extendida los valores arbitrarios están desfasados, esto será de utilidad más adelante.

De manera inmediata concluimos que $x_2 = b_2$ y despejando concluimos que $x_1 = b_1 - 3$. De esta forma obtenemos

(una solución particular) $$\begin{bmatrix} b_1 - 3 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

(la solución general) $$\begin{bmatrix} b_1 - 3 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

(el conjunto solución) $$\left\{ \begin{bmatrix} b_1 - 3 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\}$$

Observe que en este caso al cambiar los términos constantes no se afectaron ni los pivotes ni la forma de despejar las variables.

3.5 Ejemplo de matriz con parámetros

Vamos ahora a encontrar un vector-3 $\overline{x}$

$(A\overline{x} = \overline{b})$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(Matriz extendida)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

(Sistema de ecuaciones)
$$\begin{array}{ccccccc} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 2 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & + & 1x_3 & = & 3 \end{array}$$

Este sistema de ecuaciones es todavía más interesante que el anterior, para empezar no podemos concluir nada de manera inmediata. Por eso antes de encontrar las soluciones vamos a estudiar la matriz extendida para ver que cumple.

3.5.1 Clasificación de la matriz

- (E1) porque no tiene renglones de ceros,
- (E2) porque la entrada $2,1$ es cero y la $2,2$ no,
- (E3) porque los elementos delanteros son uno,
- (E4) porque la entrada $1,2$ también es cero.

Como cumple (E1) y (E2) la matriz está en forma escalón y podemos identificar los elementos delanteros, en este caso en el primer renglón el elemento delantero (o pivote) es la entrada $1,1$. Este elemento delantero está asociado a la variable x_1 la cual se puede despejar en términos de x_3 (ya que el coeficiente de x_2 es cero).

$$x_1 = 2 - 1x_3$$

En el segundo renglón el elemento delantero (o pivote) es la entrada $2,2$. Este elemento delantero está asociado a la variable x_2 la cual se puede despejar en términos de x_3 (ya que el coeficiente de x_1 es cero).

$$x_2 = 3 - 1x_3$$

En este caso no hay un renglón de la matriz (o una ecuación) que permita despejar x_3. Esto se debe a que x_3 no es una variable delantera, es decir que no hay pivote en la columna de x_3. Por este motivo x_3 puede tomar cualquier valor real $x_3 \in \mathbb{R}$, en este caso decimos que x_3 es una **variable libre** o un **parámetro** y por lo tanto hay infinitas soluciones. Algunos autores le asignan otra letra al parámetro por ejemplo

$$x_3 = t$$

Como cumple (E3) la matriz está en forma escalonada lo cual facilita el despejar las variables x_1 y x_2.

Como cumple (E4) la matriz está en forma escalón reducida y esto hace que sea inmediato despejar x_2.

3.5.2 Solución del sistema lineal

Ahora si despejamos las variables obtenemos las siguientes soluciones.

Si la matriz de coeficientes tiene columnas sin pivote (es decir que tiene parámetros) entonces el sistema no puede tener solución única

Si la matriz de coeficientes tiene más columnas que renglones entonces el sistema de ecuaciones no puede tener solución única

(una solución particular, con $t = 0$) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

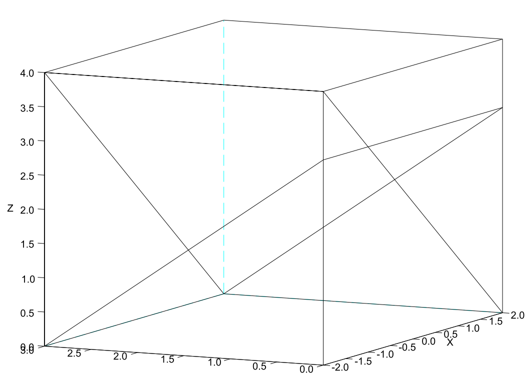
(la solución general) $\begin{bmatrix} 2-t \\ 3-t \\ 0+t \end{bmatrix}$

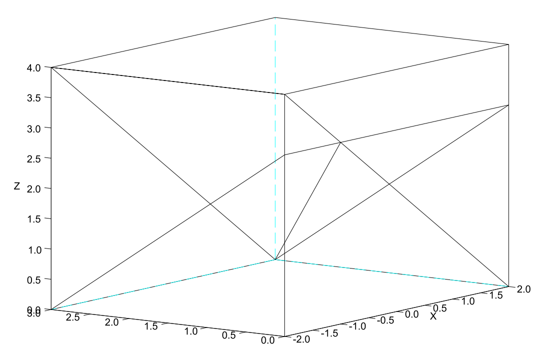
(el conjunto solución) $\left\{ \begin{bmatrix} 2-t \\ 3-t \\ 0+t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

En este caso la solución no es única y ya no coinciden la solución particular con la general.

3.5.3 Representación gráfica

Ahora el vector $\overline{x}$ está en 3 dimensiones y por lo tanto la figura se complica un poco en las 2 dimensiones de esta hoja y sólo podemos presentar algunas proyecciones desarrolladas en Scilab. Las dos ecuaciones $x_1 = 2 - x_3$ y $x_2 = 3 - x_3$ corresponden a planos, los cuales se presentan en la siguiente figura a la izquierda. La figura de la derecha incluye la recta del conjunto solución $\left\{ \begin{bmatrix} 2-t \\ 3-t \\ 0+t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$





Para obtener estas figuras se realizó la siguiente código en Scilab

```
t1=[[2;0;0],[2;3;0],[-2;3;4],[-2;0;4]]
t2=[[-2;3;0],[2;3;0],[2;0;3],[-2;0;3]]
x=[t1(1,:)',t2(1,:)']
y=[t1(2,:)',t2(2,:)']
z=[t1(3,:)',t2(3,:)']
tcolor = [2 3]';
plot3d(x,y,list(z,tcolor));
param3d([2 -1],[3 0],[0 3])
```

3.5.4 Solución con valores arbitrarios

Si en vez del vector-2 numérico $\overline{b} = \left[\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right]$ tenemos el vector-2 arbitrario $\overline{b} = \left[\begin{smallmatrix}b_1\\b_2\end{smallmatrix}\right]$ entonces $x_1 = b_1 - t$, $x_2 = b_2 - t$ y $x_3 = t$.

(una solución particular, con t=0) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(la solución general) $\begin{bmatrix} b_1 - t \\ b_2 - t \\ 0 + t \end{bmatrix}$

(el conjunto solución) $\left\{ \begin{bmatrix} b_1 - t \\ b_2 - t \\ 0 + t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

Observe que en este caso al cambiar los términos constantes no se afectaron ni los pivotes ni la forma de despejar las variables.

3.6 Ejemplo de matriz con renglón de ceros y con codominio en $\mathbb{R}^3$

Encontrmos nuevamente un vecotr-2 $\overline{x}$

$$(A\overline{x} = \overline{b}) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\text{Matriz extendida}) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\text{Sistema de ecuaciones}) \qquad \begin{array}{ccccc} 1x_1 & + & 0x_2 & = & 2 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & = & 0 \end{array}$$

Este sistema de ecuaciones nos recuerda el de la matriz identidad, ya que tan sólo se le adicionó una ecuación trivial $0 = 0$. Sin embargo, al final del ejemplo, veremos una diferencia interesante.

3.6.1 Clasificación de la matriz

- (E1) porque el renglones de ceros está al final,
- (E2) porque las entradas $2,1$ y $3,1$ son cero y la $2,2$ no lo es,
- (E3) porque los elementos delanteros $1,1$ y $2,2$ son uno,
- (E4) porque la entrada $1,2$ también es cero.

3.6.2 Solución del sistema lineal

Despejando obtenemos que $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $0 = 0$. Podemos ignorar que $0 = 0$ y escribimos las soluciones

$$(\text{una solución particular}) \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(\text{la solución general}) \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(\text{el conjunto solución}) \qquad \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

3.6.3 Representación con valores arbitrarios

Si en vez del vector-2 numérico $\overline{b} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ tenemos el vector-2 arbitrario $\overline{b} = \left[\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right]$ entonces al despejar obtenemos $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, $0 = b_3$. Vamos a mirar en detalle que significa que $0 = b_3$.

A primera vista podríamos concluir que b_3 es cero, pero antes habíamos dicho que b_3 era un número arbitrario, entonces entramos en una contradicción. Como $\overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ puede tener cualquier valor vamos a considerar otro valor diferente de $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, por ejemplo consideremos ahora el valor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. En este caso obtenemos

$(A\overline{x} = \overline{b})$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(Matriz extendida)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & : & 4 \end{bmatrix}$$

(Sistema de ecuaciones)
$$\begin{array}{ccccc} 1x_1 & + & 0x_2 & = & 2 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & = & 4 \end{array}$$

La última ecuación es $0 = 4$! esto si es definitivamente una contradicción, lo cual significa que ningún valor de $\overline{x}$ es solución del sistema de ecuaciones, dicho de otro modo ningún valor de $\mathbb{R}^2$ corresponde al covalor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. En este caso las soluciones quedan

(una solución particular)	no hay
(la solución general)	no hay
(el conjunto solución)	conjunto vacío $\{\}$

Es de resaltar que en este caso al cambiar los términos constantes SI se afectaron los pivotes, ya que en los ejemplos anteriores la última columna de la matriz extendida (correspondiente al término independiente) nunca era un pivote, pero en este ejemplo sí. Claro que si $b_3 = 0$, entonces la última columna no tiene pivote y por lo tanto el sistema sí tiene solución. Pero si $b_3 \neq 0$ entonces la última columna tiene pivote y el sistema no tiene solución.

En general, para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si el sistema de ecuaciones $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución para cualquier vector arbitrario $\overline{b}$ entonces se dice que **las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$** o simplemente que A **genera a $\mathbb{R}^m$**. De manera análoga se define que **los renglones de A generan a $\mathbb{R}^n$** si A^T **genera a $\mathbb{R}^n$.**

Una matriz $A \in R^{m \times n}$ genera a $\mathbb{R}^m$ si y sólo si A tiene m pivotes.

Una matriz $A \in$

Una matriz $A \in R^{m \times n}$ que tiene más renglones que columnas no puede generar a $\mathbb{R}^m$.

3.7 Resumen

De los anteriores ejemplos podemos aprender lo siguiente

En una matriz extendida en forma escalón:

- si la última columna es pivote entonces no tiene solución y la matriz se llama **inconsistente**.
- si la ultima columna no tiene pivote entonces sí tiene solución y la matriz se llama **consistente**. En estas matrices:
  - si no tiene parámetros la **solución es única**.
  - si tiene parámetros tiene **infinitas soluciones**.

Además, en esta sección se debe identificar si una matriz extendida tiene las propiedades (E1), (E2), (E3) y (E4) y concluir si una matriz está en forma escalón, escalonada o escalón reducido. Se debe encontrar los pivotes y determinar los renglones y columnas con pivotes y las variables delanteras y los parámetros. Determinar si el sistema de ecuaciones asociado es inconsistente o consistente con solución única o con infinitas soluciones. También se debe relacionar la matriz extendida con el producto de matriz por vector.

3.8 Multiplicación de matrices elementales por matrices extendidas

En la sección de la operación de multiplicación entre matrices se vieron unos ejemplos de como se alteraban los puntos de un dibujo al ser multiplicados por matrices elementales. En esta sección veremos como se alteran las matrices extendidas y sus soluciones al ser multiplicadas por matrices elementales.

Escalamiento del primer componente con $k = 2$ Recordemos como se afecta cada columna en esta operación

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

y para $k = 2$ la matriz extendida es transformada de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & : & 4 \\ 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

la cual corresponde al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & = & 3 \end{array}$$

La segunda ecuación nuevamente es la línea horizontal que cruza el eje de x_2 en 3. La primera ecuación se multiplico por dos a ambos lados de la ecuación, lo que no afecta la solución, por lo tanto queda nuevamente la misma ecuación. Entonces la intersección de las dos líneas es la misma $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$

Escalamiento del segundo componente En el escalamiento del segundo componente sucede algo similar al escalamiento del primer componente y por lo tanto no se altera la solución del sistema de ecuaciones.

Intercambio de componentes Al ser multiplicado por $\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right]$ la matriz extendida intercambian los renglones

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & : & 2\\ 0 & 1 & : & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & : & 3\\ 1 & 1 & : & 2\end{bmatrix}$$

lo cual corresponde a intercambiar las ecuaciones

$$\begin{array}{ccccc} 0x_1 & + & 1x_2 & = & 3\\ 1x_1 & + & 1x_2 & = & 2 \end{array}$$

Por supuesto, esto no genera ningún cambio en la solución del sistema de ecuaciones.

Sumando a la primera componente un múltiplo ($k = 1$) de la segunda Recordemos que con esta operación cada vector es transformado de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 + (k\ x_2)\\ x_2\end{bmatrix}$$

Con $k = 1$, la transformación del la matriz extendida es

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & : & 2\\ 0 & 1 & : & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & : & 5\\ 0 & 1 & : & 3\end{bmatrix}$$

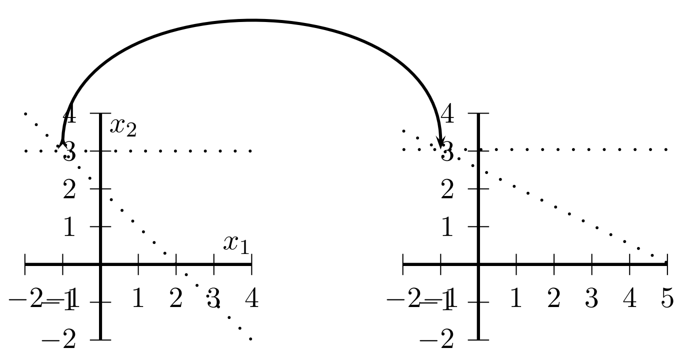
la cual corresponde al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccc} 1x_1 & + & 2x_2 & = & 5\\ 0x_1 & + & 1x_2 & = & 3 \end{array}$$

La segunda ecuación nuevamente es la línea horizontal que cruza el eje de x_2 en 3. La primera ecuación resulta ser la suma de las ecuaciones originales. Para dibujarla despejamos x_1

$$x_1 = 5 - 2x_2$$

y tabulamos algunos valores, por ejemplo si $x_2 = 0$, $x_1 = 5$ pero si $x_2 = 1$ entonces $x_1 = 3$. Por lo tanto a segunda línea pasa por los valores $\left[\begin{smallmatrix}5\\ 0\end{smallmatrix}\right]$ y $\left[\begin{smallmatrix}3\\ 1\end{smallmatrix}\right]$.



Sin embargo, se puede apreciar que al sumar las dos ecuaciones se genera una nueva ecuación cuya solución pasa entre las soluciones las dos ecuaciones originales.

Sumando a la segunda componente un múltiplo de la primera Al sumar al segundo componente un múltiplo del primero sucede algo similar que el caso anterior y por lo tanto no se altera la solución del sistema de ecuaciones.

Los anteriores ejemplos permiten definir las **operaciones elementales**

($cR_i \to R_i$) **Renglón por constante**, Al multiplicar un reglón de una matriz extendida por una constante diferente de cero no se altera la solución.
($R_i \leftrightarrow R_j$) **Intercambia renglones**, Al intercambiar dos reglones de una matriz extendida no se altera la solución.
($R_j + kR_i \to R_j$) **Suma múltiplo de un renglón a otro**, En una matriz extendida, al sumar un múltiplo de un reglón a otro no se altera la solución.

Además, cada uno de estos resultados se puede obtener por medio de una multiplicación matricial de **matrices elementales**, que se construyen al realizar una operación elemental sobre la matriz identidad.

Dos matrices (A y B) son **equivalentes** si una (A) se puede obtener de la otra (B) a partir de aplicar operaciones elementales entre renglones y se denota $A \sim B$.

3.9 Eliminación de Gauss

En esta sección vamos a usar las operaciones elementales para transformar cualquier matriz extendida en matrices en forma escalón o escalón reducido por medio de la eliminación de Gauss. [NJ99]

Los siguientes cuatro pasos permiten convertir una matriz en forma escalón y el último paso la convierte en forma escalón reducida.

(1) Vaya a la columna no cero extrema izquierda.

(2) Si el primer renglón tiene un cero en la columna del paso (1), intercámbielo con uno que tenga un elemento no cero en la misma columna.

(3) Obtenga ceros abajo del elemento delantero, sumando múltiplos adecuados del renglón superior a los renglones debajo de él.

(4) Cubra el renglón superior y repita el mismo proceso comenzando por el paso (1) aplicado a la submatriz restante. Repita este proceso con el resto de los renglones.

(5) Comenzando con el último renglón no cero, avance hacia arriba: para cada renglón obtenga un 1 delantero e introduzca ceros arriba de él, sumando múltiplos adecuados a los renglones correspondientes.

Cualquier par de matrices extendidas equivalentes, en forma escalón, tienen las mismas posiciones pivotes, por lo tanto coinciden sus columnas pivotes y los parámetros

Una matriz extendida es equivalente a muchas matrices en forma escalón pero sólo a una matriz escalón reducida.

La matriz de coeficientes A de tamaño $n \times n$ tiene n pivotes si y sólo si A es equivalente a la identidad.

Si una matriz en forma escalón $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ genera a R^m entonces cualquier matriz equivalente genera a R^m

En una matriz extendida cualquiera A una columna, o su variable asociada, es **pivotes** (o **parámetro**) si esa misma columna es pivote (o **parámetro** respectivamente) en una matriz extendida en forma escalón B equivalente ($A \sim B$).

Se recomienda estudiar [NJ99, Secciones 1.1 y 1.2] y hacer sus ejercicios.

3.10 Independencia lineal

En [NJ99, Ejemplo 1.2.16] se presenta como se aplica la eliminación de Gauss de tal forma que la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & : & -5 \\ -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & : & -2 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 & : & -21 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & : & -8 \end{bmatrix}$$

queda transformada en la matriz en forma escalón

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & : & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & : & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & : & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & : & -0 \end{bmatrix}$$

y en la matriz en forma escalón reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & : & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que las posiciones pivote de las dos últimas matrices son las mismas, aunque los valores cambian. Por este motivo en las <u>tres</u> matrices las columnas pivotes son la primera, la segunda, la cuarta y la quinta. La tercera columna corresponde a un parámetro.

$$x_3 = t$$

Despejando las variables obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 - 4t \\ 1 + 2t \\ 0 + t \\ 2 + 0t \\ 0 + 0t \end{bmatrix}$$

Las columnas que corresponden a parámetros se pueden escribir como una combinación lineal de las columnas pivote de su izquierda (dependen de las columnas pivote). Por el contrario, las columnas pivote no se pueden escribir como combinación lineal de las otras columnas pivote (no dependen de las otras columnas pivote)

Las columnas de una matriz A son **linealmente dependientes** (**L. D.**) si una de ellas se puede escribir como combinación lineal de las otras, en este caso decimos que A es linealmente dependiente. Si ninguna columna se puede escribir como combinación lineal de las otras entonces son **linealmente independientes** (**L. I.**). En este caso decimos que A es linealmente independiente.

> Las columnas de una matriz A son **linealmente dependientes** si y sólo si el sistema homogéneo $[A : 0]$ tiene infinitas soluciones. Las columnas de una matriz A son **linealmente independientes** si y sólo si el sistema homogéneo $[A : 0]$ tiene solución única.

Es de resaltar que cuando decimos que los vectores $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, $\ldots\overline{v_n}$ son L. I. nos referimos a que la matriz $[\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots\overline{v_n}]$ es L. I., lo mismo aplica para L. D.

Los renglones de una matriz A son linealmente independientes (o dependientes) si las columnas de A^T son linealmente independientes (o dependientes respectivamente). En este caso se dice que A es linealmente independiente por renglones (o dependiente por renglones).

Por ejemplo, para la tercera matriz se tiene que

$$4\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$$

para la segunda matriz se tiene

$$4\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}3\\3\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10\\-6\\0\\0\end{bmatrix}$$

y para la primera matriz

$$4\begin{bmatrix}0\\-1\\4\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}3\\3\\-9\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\\-10\\34\\20\end{bmatrix}$$

Los coeficientes (4 y -2) coinciden en las tres porque los tres sistemas son equivalentes (ya que uno se obtiene del otro aplicando operaciones elementales de [NJ99, Ejemplo 1.2.16]) y los sistemas equivalentes tienen la misma solución $\left[\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}-4\\-2\end{smallmatrix}\right]$.

De aquí se concluye que las columnas de la matriz $A = \left[\begin{smallmatrix}0 & 3\\-1 & 3\\4 & 9\\2 & -6\end{smallmatrix}\right]$ son linealmente independientes. Pero los renglones de A son linealmente dependientes porque el cuarto renglón es un múltiplo escalar del segundo. Las columnas de

$$\begin{bmatrix}0 & 3 & -6\\-1 & 3 & -10\\4 & 9 & 34\\2 & -6 & 20\end{bmatrix}$$

son linealmente dependientes, al igual que las columnas de

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 & -3 \\ -1 & 3 & -10 & -4 & -4 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Si una matriz A es linealmente independiente, entonces si se eliminan columnas también es linealmente independiente. Por otro lado si una matriz A es linealmente dependiente, entonces si se aumentan columnas también es linealmente dependiente.

Una matriz que tiene más columnas que renglones no puede ser linealmente independiente

En [NJ99, Ejemplo 1.2.18] es similar a [NJ99, Ejemplo 1.2.16] pero se presentan dos parámetros.

3.11 Generadores y bases de $\mathbb{R}^m$

En la sección 3.6.3 habíamos visto un sistema de ecuaciones que era inconsistente para valores arbitrarios de los términos constantes $\overline{b}$, lo cual permitió obtener algunas definiciones y teoremas que repetimos a continuación.

En general, para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, si el sistema de ecuaciones $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución para cualquier vector arbitrario $\overline{b}$ entonces se dice que **las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$** o simplemente que A **genera a $\mathbb{R}^m$**. De manera análoga se define que **los renglones de A generan a $\mathbb{R}^n$** si A^T **genera a $\mathbb{R}^n$.**

Una matriz $A \in R^{m\times n}$ genera a $\mathbb{R}^m$ si y sólo si A tiene m pivotes.

Una matriz $A \in$

Una matriz $A \in R^{m\times n}$ que tiene más renglones que columnas no puede generar a $\mathbb{R}^m$.

Esto permite definir una **base** de $\mathbb{R}^m$ como un conjunto de vectores L.I. y que genera a $\mathbb{R}^m$. Si las columnas de una matriz A forman una base de $\mathbb{R}^m$ entonces decimos que A es una base de $\mathbb{R}^m$.

Las bases de $\mathbb{R}^m$ son matrices cuadradas de orden m

---

Incluir definición de rectas planos cuando se ven los parámetros

calculo de la pseudo inversa cuando no hay parámetros y como soluciona algunos problemas cuando se requiere despejar varios valores

Chapter 4

Sistemas homogéneos y núcleo de la transformación

4.1 Imagen de una transformación matricial y subespacios generados en $\mathbb{R}^n$

Respecto al ejemplo ???????? nos podemos preguntar si con esos motores podemos dibujar toda la hoja, y si no, entonces que parte de la hoja es la que podemos dibujar.

Para una transformación de la matriz $A = [\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}]$

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$T_A\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\right) = c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \ldots + c_n\overline{v_n}$$

Recordemos que $\mathbb{R}^n$ se llama el dominio de T_A y que $\mathbb{R}^m$ es el codominio de T_A. Vamos a definir la **imagen** de T_A como el conjunto de vectores que se pueden escribir como combinación lineal de $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$, también se le llama el **subespacio generado** por las columnas de A, denotado por $\langle \overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n} \rangle$ o por $Gen\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}\}$, otro nombre es el **subespacio columna** de A, $(Col(A))$. A continuación se presenta los diferentes nombres del mismo conjunto.

.

$$\begin{aligned} Im(T_A) &= \{T_A(\overline{c}) \mid \overline{c} \in \mathbb{R}^m\} = \{A\overline{c} \mid \overline{c} \in \mathbb{R}^m\} = Gen\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}\} \\ &= \langle \overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n} \rangle = Col(A) = \{c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \ldots + c_n\overline{v_n} \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Una transformación matricial T_A se dice que es **sobre** si la imagen es el codominio, ?????????en este caso también se dice que las columnas de A **generan el espacio** $\mathbb{R}^m$.???????????NO?????????

El **subespacio renglón** de una matriz A corresponde al espacio columna de la transpuesta de A, $(Ren(A) = Col(A^T))$

Por simplicidad a estos subespacios algunas veces se les llama espacios.

El **rango** de T_A o simplemente el **rango** de A ???????Es la dimensión de la imagen de T_A??????es el número de pivotes de A y se denotan $R(T_A)$ o $R(A)$ respectivamente. Recordemos que en el ejemplo de los motores de la sección ????? se dijo que el rango corresponde al menor número de motores necesarios para poder dibujar los mismos puntos.

Para que T_A pueda llegar a cualquier punto del codominio, el rango de A debe ser igual a la dimensión del codominio, ????????es decir al número de renglones de A,???????? en este caso se dice que T_A es **sobre**.

Se sugiere mirar el ejemplo 20 y 21 de la sección 2.3 de la página 90 y los ejercicios 1 y 2.

4.2 Núcleo de una transformación de una matriz escalón

En la sección ????? nos preguntamos, con otras palabras, que dado un covalor $\overline{b}$ y una transformación matricial T_A ¿cuáles son los valores del dominio $\overline{x}$ que son transformados en $\overline{b} = T_A(\overline{x})$?. En esta sección repetiremos la misma pregunta pero no con cualquier covalor $\overline{b}$ sino que nos preguntaremos ¿cuáles son los valores del dominio $\overline{x}$ que son transformados en $\overline{0} = T_A(\overline{x})$?

En términos de los motores la pregunta queda, ¿cómo se pueden mover los motores para que el punto final permanezca en el origen?. La respuesta trivial consiste en no mover los motores, pero ¿existirán otras opciones? y ese resultado ¿lo puedo extrapolar a otros puntos?. Para resolver estas inquietudes vamos a introducir las siguientes definiciones.

Si todos los términos constantes son cero el sistema se llama **sistema homogeneo**. Un sistema que no es homogéneo $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene el **sistema homogéneo asociado** $A\overline{x} = \overline{0}$.

Un sistema homogéneo siempre es consistente

.

El **núcleo** o **subespacio nulo** de T_A contiene todos los vectores-n $\overline{x}$ tales que $A\overline{x} = \overline{0}$. La **nulidad** de T_A ??? la dimensión del espacio nulo???? es el número de parámetros de A y se denota $N(T_A)$ o simplemente $N(A)$. Si la nulidad es cero entonces ya vimos que el sistema tiene solamente la solución trivial. En este caso T_A se llama **1 a 1** o **inyectiva** y las columnas de A son **linealmente independientes** (L. I.), las columnas de A que no son linealmente independientes se llaman **linealmente dependientes** (L. D.). Una transformación sobre y 1 a 1 se llama **isomorfismo**. En el ejemplo de los motores de la sección ???? se tiene que la única posibilidad de dibujar el origen es no prender los motores.

En un sistema de ecuaciones $A\overline{x} = \overline{b}$, la solución general corresponde a una solución particular $\overline{p}$ $(A\overline{p} = \overline{b})$ más la solución general del sistema homogéneo asociado $A\overline{x} = \overline{0}$. Esto corresponde a *trasladar* el núcleo de T_A a $\overline{p}$.

4.3 Algunos subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Una **recta que pasa por el origen** es el generado por un vector diferente de cero. En su respectivo espacio ($\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$)

- a la recta $\langle \bar{i} \rangle$ se le conoce como el **eje x**,
- a la recta $\langle \bar{j} \rangle$ se le conoce como el **eje y**
- en R^3 a la recta $\langle \bar{k} \rangle$ se le conoce como el **eje z**.

A estos ejes se les conoce como los ejes coordenados.

Un **plano que pasa por el origen** es el generado por dos vectores no paralelos y diferentes de cero. $\mathbb{R}^2$ es un plano. En $\mathbb{R}^3$ un plano nunca es $\mathbb{R}^2$ (pero si tiene la misma forma y por eso se dice que un plano es isomorfo a $\mathbb{R}^2$) en cambio

- al plano $\langle \bar{i}, \bar{j} \rangle$ se le conoce como el **plano xy**,
- al plano $\langle \bar{i}, \bar{k} \rangle$ se le conoce como el **plano xz**,
- al plano $\langle \bar{j}, \bar{z} \rangle$ se le conoce como el **plano yz**.

A estos planos se les conoce como los planos coordenados.

Ahora nos podemos preguntar que genera el origen y que genera dos vectores paralelos. En el primer caso, el origen genera el mismo origen y nada más. En el segundo caso, para saber que genera dos vectores paralelos vamos a usar el Teorema [NJ99, 2.?.9] que dice:

Si uno de los vectores-m $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}$ es una combinación lineal del resto entonces el generador permanece igual si se elimina ese vector.

Por lo tanto el generado por dos vectores paralelos también es una recta que pasa por el origen.

¿Qué pasa si aplicamos las transformaciones elementales al eje x en $\mathbb{R}^2$?: la identidad, los dos escalamientos y sumando la segunda componente a la primera. Estas transformaciones elementales no afectan al eje x. Pero el intercambio lo transforma en el eje y. Finalmente, sumando la primera componente a la segunda lo transforma en una recta a 45°.

—— colocar aquí cap de espacio euclidiano

——ejercicios

Chapter 5

Operaciones de matrices cuadradas o autotransformaciones

Borrador de las notas de clase (Bajo licencia GPL), enviar las sugerencias a gmunoz@udistrital.edu.co.

Al trabajar con las matrices del mismo tamaño $n \times n$ tenemos la ventaja que la multiplicación matricial está definida entre cualquier par de matrices. Ahora nos podemos preguntar, para cada par de matrices $A, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ¿existe una matriz X tal que $AX = C$?

5.1 Operación inversa

Antes de definir la operación inversa vamos a resolver un sistema arbitrario de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$\begin{array}{ccccc} ax_1 & + & bx_2 & = & c \\ dx_1 & + & ex_2 & = & f \end{array} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

que corresponde a la siguiente matriz extendida en donde se introduce intencionalmente un desface entre c y f que será útil para calcular la inversa

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} a & b & : & c & & \\ d & e & : & & & f \end{bmatrix} \\
R_2 - \frac{d}{a}R_1 \to R_2 &\begin{bmatrix} a & b & : & c & & \\ 0 & e - \frac{d}{a}b & : & -\frac{d}{a}c & + & f \end{bmatrix} \\
\frac{a}{ea-db}R_2 \to R_2 &\begin{bmatrix} a & b & : & c & & \\ 0 & 1 & : & -\frac{d}{ea-db}c & + & \frac{a}{ea-db}f \end{bmatrix} \\
R_1 - bR_2 \to R_2 &\begin{bmatrix} a & 0 & : & \frac{ea}{ea-db}c & - & \frac{ab}{ea-db}f \\ 0 & 1 & : & -\frac{d}{ea-db}c & + & \frac{a}{ea-db}f \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{a}R_1 \to R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & \frac{e}{ea-db}c & - & \frac{b}{ea-db}f \\ 0 & 1 & : & -\frac{d}{ea-db}c & + & \frac{a}{ea-db}f \end{bmatrix}$$

Observe que la solución del sistema de ecuaciones se pueden escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{e}{ea-db}c & - & \frac{b}{ea-db}f \\ -\frac{d}{ea-db}c & + & \frac{a}{ea-db}f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e}{ea-db} & \frac{-b}{ea-db} \\ \frac{-d}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{ea-db} \begin{bmatrix} e & -b \\ -d & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \\
&= B \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}, \text{ con } B = \frac{1}{ea-db} \begin{bmatrix} e & -b \\ -d & a \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Si $ea - db \neq 0$ entonces hemos encontrado una matriz B que permite despejar la ecuación $A\overline{x} = \overline{b}$, quedando la ecuación $\overline{x} = B\overline{b}$.

Para el siguiente sistema de ecuaciones de 2×2, encuentre la matriz de coeficientes A, la matriz inversa A^{-1}, despeje $\overline{x}$ y compruebe el resultado.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 1x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Encontramos que la inversa de $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ d & e \end{smallmatrix}\right]$ es $B = \frac{1}{ea-db}\left[\begin{smallmatrix} e & -b \\ -d & a \end{smallmatrix}\right]$. Observe que pasa al multiplicar las dos matrices (por supuesto asumiendo que $ea - db \neq 0$).

$$AB = I \qquad\qquad BA = I$$

En términos generales decimos que si:

- A es una matriz de tamaño $n \times n$ y
- se puede encontrar una matriz B del mismo tamaño tal que $AB = I = BA$,

entonces se dice que A es **invertible** y B se denomina la **inversa** de A que se denota A^{-1}.

La matriz A de tamaño $n \times n$ se puede invertir si y sólo si el sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución única para cada vector-n $\overline{b}$. Esta solución única esta dada por

$$\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$$

Al comienzo de la sección encontramos la inversa de $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ d & e \end{smallmatrix}\right]$ resolviendo el sistema $\left[\begin{smallmatrix} a & b & : & c \\ d & e & : & f \end{smallmatrix}\right]$. Pero debido a que $\left[\begin{smallmatrix} c \\ f \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} c \\ f \end{smallmatrix}\right]$, el procedimiento para calcular la inversa de la matriz A usualmente se realiza extendiendo la matriz con la matriz identidad, de la siguiente forma.

$$
\begin{array}{rl}
& \begin{bmatrix} a & b & : & 1 & 0 \\ d & e & : & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
R_2 - \dfrac{d}{a}R_1 \to R_2 & \begin{bmatrix} a & b & : & 1 & 0 \\ 0 & e - \frac{d}{a}b & : & -\frac{d}{a} & 1 \end{bmatrix} \\
\dfrac{a}{ea-db}R_2 \to R_2 & \begin{bmatrix} a & b & : & 1 & 0 \\ 0 & 1 & : & -\frac{d}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{bmatrix} \\
R_1 - bR_2 \to R_1 & \begin{bmatrix} a & 0 & : & \frac{ea}{ea-db} & \frac{-ab}{ea-db} \\ 0 & 1 & : & \frac{-d}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{bmatrix} \\
\dfrac{1}{a}R_1 \to R_1 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & \frac{e}{ea-db} & \frac{-b}{ea-db} \\ 0 & 1 & : & \frac{-d}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Este procedimiento se puede generalizar para matrices cuadradas de cualquier tamaño.

La matriz A de tamaño $n \times n$ se puede invertir si y sólo si A tiene n pivotes.

Resumiendo. A^{-1} **Inversa de una matriz A de orden n**

- A^{-1} existe si es cuadrada y tiene n pivotes.
- su tamaño es $size(A^{-1}) := size(A)$
- sus elementos son $(A^{-1})_{ij} := b_{ij}$ que se calcularán usando Gauss-Jordan o la adjunta

en Scilab se escribe `inv{A}`

Para las matrices A y B, es un error de notación escribir A/B, porque como la multiplicación matricial no es conmutativa, entonces A/B se puede interpretar de dos formas o $B^{-1}A$ o AB^{-1}. En Scilab `A/B` equivale a `A*inv(B)` y `A\B` equivale a `inv(A)*B`. ¡Esta notación es únicamente para Scilab NO PARA LA CLASE!. De manera análoga a la multiplicación `A.*B`, las divisiones `A./B` y `B.(A)` dividen elemento a elemento dos matrices del mismo tamaño.

Usando la eliminación de Gauss encuentre la inversa de las siguientes matrices, si es posible.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

Si A y B tienen inversa y c es un escalar distinto de cero entonces las siguientes construcciones son invertibles y cada una cumple la correspondiente igualdad.

(InvUnica) La inversa es única, Si $AB = I = BA$ entonces $B = A^{-1}$.
(InvProd) La inversa del producto, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(InvInv) La inversa de la inversa, $(A^{-1})^{-1} = A$.
(InvEscMat) Escalar sale invertido, $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}(A)^{-1}$.
(InvConmTra) Inversa conmuta con transpuesta, A^T es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

5.1.1 Potencia de una matriz

En la sección 2.5 se vieron algunas propiedades para exponentes de números naturales, ahora se extenderá esta definición para los exponentes de números enteros, pero se restringirá a las matrices invertibles.

Asumiendo que A es invertible, que c es un escalar distinto se cero y que $r, s \in \mathbb{Z}$, se tiene que A^r es invertible y que las siguientes construcciones también los son. Además, cada una cumple la respectiva igualdad.

(SumaExpZ) Suma de Exponentes, $A^r A^s = A^{r+s}$.
(InvConmExpZ) Inversa, exponente conmutan, $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n = A^{-n}$.
(ExpExpZ) Producto de exponentes, $((A)^r)^s = A^{rs}$.
(ExpEscMatZ) El escalar sale con exponente, $(cA)^r = c^r(A)^r$.

Se recomienda hacer los ejerciicos de la sección 3.2 de [NJ99].

5.2 Operación determinante

Recordemos que si $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

En donde al numero $ad - cb$ es determinante para saber si la matriz A de 2×2 tiene inversa y se le conoce como el **determinante** y se denota con líneas verticales.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Gráficamente en $\mathbb{R}^2$ si las columnas de una matriz A representan los lados de un paralelogramo, el determinante de A es el área del paralelogramo ([NJ99, pg388]). En $\mathbb{R}^3$ sucede algo similar con el volumen paralelepípedo ([NJ99, pg118]).

Si el área del paralelogramo o el volumen del paralelepípedo es cero entonces uno de los vectores de A depende de los otros y el determinante es cero. Pero si el determinante es diferente de cero entonces los vectores son independientes.

Observe que el determinante está formado por los productos de elementos que no repiten filas o columnas. En general para una matriz A de $n \times n$, el determinante está formado por la suma de todos los productos (signados) de n elementos de A que no repiten ni fila ni columna. En total hay $n!$ productos, y recordemos que

$$1! = 1 \qquad 2! = 2 \qquad 3! = 6 \qquad 4! = 24 \qquad 5! = 120 \qquad \ldots \qquad 10! = 3\,628\,800$$

Sin embargo esta es una forma complicada de calcularlo, especialmente por el signo. A continuación se presenta una forma para encontrar el determinante.

5.2.1 Determinante y desarrollo por cofactores

[NJ99, 6.1]

El determinante de una matriz de orden n se puede escribir en termino de matrices de orden $n-1$ de la siguiente manera.

- El **menor**(i,j) de una matriz A se representa por M_{ij} y es el determinante que se obtiene eliminando el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A.
- A cada elemento de A se le asigna un signo como un tablero de ajedrez $(-1)^{i+j}$. El **cofactor**(i,j), C_{ij}, es el menor (i,j) multiplicado por el signo. $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.
- Se elije un renglón o una columna y se suman los cofactores — multiplicados por los respectivos elementos.

El **determinante** de A (denotado por $|A|$ o $det(A)$) está dado por

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Resumiendo

$|A|$ **Determinante de una matriz** A

- $|A|$ existe si es cuadrada.
- el resultado es un escalar
- y se calcula por cofactores y se puede simplificar el cálculo mediante la eliminación gaussiana

en Scilab se escribe `det{A}`

[Gro05, Teorema 2.3.1] La expansión por cofactores puede ser desarrollada por cualquier renglón y no necesariamente por el primero.

$$\begin{aligned}|A| =& a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n} \\ =& a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}\end{aligned}$$

Demuestre que los determinante son

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 9 & 6\\ 3 & 2 & 4 & 8\end{vmatrix} = 192$$

$$\begin{vmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix} = 12$$

.

5.2.2 Determinate de una matriz de 3×3

$$\begin{aligned}|A| =& \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ =& + a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ & - a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\\ & + a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Cada una de estas matrices de 2×2 se llaman el **menor** y como cada menor tiene dos productos elementales entonces una matriz de 3×3 tiene 6 productos elementales

$$\begin{aligned} |A| = &+ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Estos seis productos corresponden a las diagonales de la matriz de 3×5 que corresponde al adjuntar a A las primeras dos columnas como se muestra en [Gro05, Sec. 2.1 pg 174].

Demuestre que el determinante es

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

5.3 Determinante de matrices triangulares

Una matriz cuadrada se llama **triangular superior** si todas sus componentes abajo de la diagonal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todos sus componentes arriba de la diagonal son cero. Una matriz se llama **diagonal** si todos los elementos que no están sobre la diagonal son cero.

Sea A una matriz de $n \times n$ triangular superior o inferior. Entonces $|A| = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

5.4 Determinantes y operaciones elementales

A continuación se presenta como se altera el determinante el realizar operaciones elementales o lo que es lo mismo al ser multiplicada por una matriz elemental. (Recordemos que una matriz elemental es a la que se le ha hecho una operación elemental) [NJ99, 6.2] También se indica cual es la operación inversa para restaurar la matiz original o lo que es lo mismo la matriz elemental inversa.

(OpEl) Operacion Elemental,

1. Si la matriz B se obtiene de multiplicar un renglón (o una columna) por una constante k distinta de cero, entonces $|B| = k|A|$. La operación inversa es multiplicar el mismo renglón (o columna) por $\frac{1}{k}$.
2. Si se intercambian dos renglones (o dos columnas) entonce el determinante cambia de signo. La operación inversa es volver a intercambiar los mismos dos renglones (o dos columnas).
3. El determinante no cambia si se suma un múltiplo de un renglón (columna) a otro renglón (columna). La operación inversa es restar el mismo múltiplo.

.

Resumiendo el determinante y la inversa de las matrices elementales se obtiene ([Gro05, Tabla 1.4 y Lema 2.3.1])

operación	ejem.	det.	inversa	ejem.	det. de inv.
$cRi \to Ri$	$\left[\begin{smallmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$	c	$\frac{1}{c}Ri \to Ri$	$\left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$	$\frac{1}{c}$
$Ri \leftrightarrow Rj$	$\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$	-1	$Ri \leftrightarrow Rj$	$\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$	-1
$Ri + cRj \to Ri$	$\left[\begin{smallmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$	1	$Ri - cRj \to Ri$	$\left[\begin{smallmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$	1

De esta tabla se concluyen el siguientes resultado para una matriz A de orden n.

Con el anterior resultado se puede calcular el determinante de una matriz A aplicando primero la eliminación gaussiana. Demuestre que el determinante es

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

```
-->A=[ 1 2 4; 1 3 6; 2 4 3]
 A  =

    1.    2.    4.
    1.    3.    6.
    2.    4.    3.

-->A(1,:)=(1/A(1,1))*A(1,:) // Para que no cambie el det.
                            // se debe multiplicar por A(1,1)=1

    1.    2.    4.
    1.    3.    6.
    2.    4.    3.

-->A(2,:)=A(2,:)-A(2,1)*A(1,:) // Esta operación no cambia el det.

    1.    2.    4.
    0.    1.    2.
    2.    4.    3.

-->A(3,:)=A(3,:)-A(3,1)*A(1,:) // Esta operación no cambia el det.

    1.    2.    4.
    0.    1.    2.
    0.    0.  - 5.

--> // El proceso podría detenerse aquí ya que al tener una matriz
//triangular el determinante es el producto de la diagonal (-5) por 1.

-->A(2,:)=(1/A(2,2))*A(2,:) // Para que no cambie el det.
                            // se debe multiplicar por A(2,2)=1
```

```
    1.    2.    4.
    0.    1.    2.
    0.    0.  - 5.

-->A(3,:)=A(3,:)-A(3,2)*A(2,:) // Esta operación no cambia el det.

    1.    2.    4.
    0.    1.    2.
    0.    0.  - 5.

-->A(3,:)=(1/A(3,3))*A(3,:) // Para que no cambie el det.
                            // se debe multiplicar por A(3,3)=-5


    1.    2.    4.
    0.    1.    2.
    0.    0.    1.
-->// En este caso el producto de la diagonal es 1 el cual hay
// que multiplicar por -5, 1 y 1.
```

Para las siguientes afirmaciones asuma que A, B son matrices de $n \times n$ y que c es un escalar.

(DetTra) Determinante de transpuesta, $|A^T| = |A|$.
(DetEscMat) Determinante de escalar e **por matriz** A, $|cA| = c^n|A|$.
(DetInv) Determinante de la inversa, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$si $|A| \neq 0$.
(DetMul) Determinante de multiplicación de matrices, $|AB| = |A|\ |B|$.

La suma de determinantes NO es el determinante de la suma de matrices, pero es algo parecido. La suma de los determinantes de dos matrices que difieren sólo en un renglón da a una matriz que suma esos dos renglones. Por ejemplo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Es de resaltar que se están sumando determinantes y no matrices debido a que la matriz no tiene corchetes sino líneas.

5.4.1 Cuando el determinante es cero

Cuando el determinante es cero la matriz no es invertible [NJ99, Teorema 6.2.5] Algunos casos cuando el determinante de una matriz A de orden n es cero.

- Si tiene un renglón de ceros. Ej. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. Lo cual se deduce al desarrollar el determinante por el renglón de ceros.
- Si tiene dos renglones que son iguales. Ej. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. Lo cual se debe al hacer la operación elemental de restar los dos renglones ya que obtenemos el resultado anterior.
- Si tiene un renglón múltiplo de otro. Ej. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. Esto se debe al hacer la operación elemental de restar multiplicar el renglón por una constante ya que obtenemos el resultado anterior.
- Si un renglón la suma de múltiplos de otros dos renglones. Ej. el renglón 2 es la suma de los otros dos. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 8 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. En este caso se realizan ambas operaciones elementales de sumar y multiplicar.

5.4.2 Cuando el determinante no es cero

[Gro05, Teorema 1.10.3 y Teorema 2.3.2] y [Ant06, Teorema 2.3.3] Si A es una matriz cuadrada de orden n, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) A es invertible.

(ii) A es el producto de matrices elementales.

(iii) $|A| \neq 0$.

(iv) A no tiene parámetros.

(v) Cada columna de A tiene un pivote.

(vi) A tiene n pivotes.

(vii) Cada renglón de A tiene un pivote.

(viii) El sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución única para cualquier vector $\overline{b} \in \mathbb{R}^n$.

(ix) La única solución del sistema $A\overline{x} = \overline{0}$ es la trivial $\overline{x} = \overline{0}$.

(x) A es equivalente a la identidad.

(xi) Las columnas de A son linealmente independientes.

(xi) Los renglones de A son linealmente independientes.

(xii) Las columnas de A generan a R^n

(xiii) Los renglones de A generan a R^n

(xiv) A es una base de R^n

Una forma para demostrar esta triple equivalencia consiste en mostrar primero que (i) implica (ii), luego se muestra que (ii) implica (iii) y finalmente se muestra que (iii) implica (i).

(i) implica (ii) debido a que la eliminación de Gauss-Jordan aplicada a una matriz invertible da como resultado la identidad entonces es posible multiplicar A por las respectivas matrices elementales para obtener la identidad.

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I$$

Entonces la multiplicación de las inversas de las matrices elementales permiten reconstruir A.

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$$

(ii) implica (iii) debido a que el determinante de cada una de las matrices elementales es diferente de cero y como el determinante del producto es el producto de los determinantes (para matrices elementales hasta ahora) entonces el determinante de A tampoco es cero.

(iii) implica (i) debido a que la eliminación de Gauss-Jordan da como resultado una matriz escalonada R,

$$E_k \dots E_2 E_1 A = R$$

por lo tanto si $det(A) \neq 0$ entonces $det(R) \neq 0$

$$|E_k| \dots |E_2||E_1||A| = |R|$$

Lo cual implica que $R = I$ y por lo tanto A es invertible.

5.5 Adjunta

Sea A una matriz de orden n. La matriz cuyo (i, j)-ésimo elemento es el cofactor C_{ij} de A es la **matriz de cofactores de** A. Su transpuesta es la **adjunta de** A, y se representa por $Adj(A)$.

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Sea A una matriz de orden n. Entonces

$$A \ Adj(A) = det(A) I_n = Adj(A) \ A$$

y por lo tanto si A es invertible

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)$$

5.6 Regla de Cramer

Si $det(A) \neq 0$, la solución del sistema $Ax = b$ es

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, \ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

En donde A_i corresponde a la matriz A remplazando la columna i por b.

——————-incluir el producto cruz y vectores propios

Para estudiar este tema hay que realizar los ejercicios de las secciones 6.1 y 6.2 de [NJ99].

En particular se recomiendan los ejercicios 6.1.{1.a, 3.a, 7, 9, 17, 30.a} 6.2.{1-19, 24, 28, 32, 35, 36, 37, 38, 39}

Dado un sistema de ecuaciones responda

1. escriba la matriz de coeficientes A
2. escriba el vector de las constatntes $\overline{b}$
3. escriba el vector de las variables $\overline{x}$
4. Escriba la matriz extendida $[A : b]$
5. escriba el sistema de ecuaciones como un producto de matriz por vector $A\overline{x} = \overline{b}$
   para la matriz de coeficientes A responda
6. ¿cuál es el tamaño de A?
7. ¿cuál es el número de columnas (n) de A?
8. ¿cuál es el número de renglones (m) de A?
9. ¿es identidad?
10. ¿cual es la diagonal?
11. ¿es diagonal?
12. ¿es triangular superior?
13. ¿es triangular inferior?
14. ¿es simétrica?
15. ¿es el resultado de una operación elemental?
    para la matriz extendida $[A : b]$ responda
16. ¿tiene un renglón ceros?
17. E1 ¿renglones cero en la parte inferior?
18. Escalón E1 y E2 ¿el elemento delantero del siguiente renglón está a la derecha los si?
19. Escalonada E1, E2 y E3 ¿es 1 cada pivote?
20. Escalón reducido E1, E2,E3 y E4 ¿hay ceros arriba y abajo de cada pivote?
    Utilizando operaciones elementales
21. Colocar la matriz en forma escalon pero no escalonada
22. Colocar la matriz en forma escalonada pero no escalón reducida
23. ¿cuales son las posiciones de los pivotes de $[A : b]$?
24. ¿cuales variables son delanteras o pivotes?
25. ¿cuales variables son libres o parámetros?
26. ¿es inconsistente?
27. ¿tiene solución única?

28. ¿tiene infinitas soluciones?
29. encuentre una solución particular
30. escriba la solución general
31. escriba el conjunto solución
32. ¿A genera a $\mathbb{R}^n$?
33. ¿A genera a $\mathbb{R}^m$?
34. ¿Las columnas de da A son L.I.?
35. ¿Los renglones de A son L.I.?
36. ¿A es una base?
37. la matriz A ¿es equivalente a la identidad?
38. Colocar $[A : b]$ en forma escalón reducido
39. Encuentre la inversa de A utilizando operaciones elementales
40. Despeje $\overline{x}$ utilizando A^{-1}
41. Encuentre $|A|$ si es posible.
42. Encuentre la adjunta de A si A es cuadrada.
43. Encuentre A^{-1} usando la adjunta si es posible.
44. Despeje $\overline{x}$ utilizando la regla de Cramer.

5.7 Bases e Isomorfismos

Sea V el espacio generado por las columnas de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se dice que la matriz B es una **base** del espacio V si las columnas de B cumplen dos cosas

- generan a V.
- son linealmente independientes.

El número de columnas de B se llama la **dimensión** del espacio V y se denota $dim(V)$.

Con la notación anterior se tiene que

- $dim(V)$ corresponde al número de columnas pivote de A.
- T_B es un isomorfismo entre $\mathbb{R}^{dim(V)}$ y V.

Para cualquier matriz B se tiene que T_B es un isomorfismo entre $\mathbb{R}^{R(B)}$ y $gen(B)$ si y sólo si B es una base de $gen(B)$

Un isomorfismo T_B entre $\mathbb{R}^{R(B)}$ y $gen(B)$ permite relacionar cada vector de $\overline{b} \in gen(B)$ con uno y sólo un vector de $\overline{c} \in \mathbb{R}^{R(B)}$ llamado **vector de coordenadas** de $\overline{b}$ con respecto a la base B y se denota $\overline{c} = [\overline{b}]_B$.

[Gro05, Teorema 1.10.3 y Teorema 2.3.2] y [Ant06, Teorema 2.3.3] Si A es una matriz cuadrada de orden n, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) A es invertible.

(ii) A es el producto de matrices elementales.

(iii) $|A| \neq 0$.

(iv) A no tiene parámetros.

(v) Cada columna de A tiene un pivote.

(vi) A tiene n pivotes.

(vii) Cada renglón de A tiene un pivote.

(viii) El sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución única para cualquier vector $\overline{b} \in \mathbb{R}^n$.

(ix) La única solución del sistema $A\overline{x} = \overline{0}$ es la trivial $\overline{x} = \overline{0}$.

(x) T_A y A tienen rango n.

(xi) La dimensión de las columnas de A es n

(xii) La nulidad de T_A y de A es cero.

(xiii) A es una base de $\mathbb{R}^n$.

(xiv) T_A es un isomorfismo en $\mathbb{R}^n$

(xv) El espacio generado por los renglones de A es $\mathbb{R}^n$.

???????????????????Algoritmo para econtrar base de la imagen y del núcleo

5.8 Inverso de un Isomorfismo T_B entre $\mathbb{R}^{R(B)}$ y $gen(B)$

Si B es una matriz cuadrada el problema queda resuelto porque el inverso de T_B es $(T_B)^{-1} := (T_{B^{-1}})$. Pero si la matriz no es cuadrada no se puede obtener la matriz inversa y por lo tanto hay problemas.

En este caso procedemos de la misma manera en que encontramos la inversa de una matriz. Resolviendo un sistema de ecuaciones. Lo cual vamos a ilustrar mediante un ejemplo.

Suponga el espacio $V = gen\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$. Debido a que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tenemos que las dos primeras columnas son pivotes y por lo tanto una base de V es $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto T_B es un isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y V. Al ser isomorfismo entonces nos podemos preguntar por la transformación inversa ${T_B}^{-1}$. Para encontrar esta transformación vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & : & y_1 & & \\ 1 & 1 & : & & y_2 & \\ 1 & 1 & : & & & y_3 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & \frac{1}{2}y_1 & + & \frac{1}{2}y_2 & + & 0 \\ 0 & 1 & : & -\frac{1}{2}y_1 & + & \frac{1}{2}y_2 & + & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 & - & y_2 & + & y_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Hemos encontrado una matriz que permite despejar la ecuación $A\overline{x} = \overline{b}$ en la ecuación $\overline{x} = B\overline{b}$.

La tercera ecuación restringe los valores de y_1, y_2 y y_3 para que permanezcan dentro de V, es de resaltar que $0y_1 - y_2 + y_3 = 0$ es la ecuación del plano V generado por B. Las primeras dos ecuaciones nos permites despejar x_1 y x_2.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

—– falta mostrar que es semi-inversa

5.9 Subespacio propio

Un **subespacio propio** de $\mathbb{R}^n$ es cualquier subespacio diferente del mismo $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo los subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son: el origen, las recta que pasan por el origen y los planos que pasan por el origen pero no todo el espacio.

Debido a que la dimensión del subespacio propio es menor a la del espacio entonces la matriz formada por una base del subespacio <u>nunca</u> es cuadrada.

Ejemplo: Encontrar una base para el plano que pasa por el origen $x + 2y + 3z = 0$.

5.10 Coordenadas de una base

Sabemos que dada una base $B = [\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}]$ de un subespacio V podemos definir cualquier vector $\overline{u} \in V$ de manera única, dando los valores de los coeficientes $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, ya que

$$\overline{u} = c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \cdots + c_n\overline{v_n}$$

el vector de coeficientes $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ se llama el **vector coordenado** o **vector de coordenadas** de $\overline{u}$ con respecto a V y se escribe

$$[\overline{u}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Recuerde: Para encontrar las coordenadas del vector $\overline{u}$ en la base B hay que resolver el sistema $[B : \overline{b}]$.

5.11 Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ %(cambiar de lugar esta sección y la siguiente)

Una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ que cumple para todo $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$

- $T(\overline{u} + \overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v})$
- $T(c\overline{u}) = cT(\overline{u})$

Una transformación matricial $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se llama **uno a uno** si a para cualquier par de vectores distintos de $\mathbb{R}^n$ nunca les corresponde el mismo vector en $\mathbb{R}^m$.

T_A es uno a uno
si y sólo si las columnas de A son L. I.
si y sólo si la nulidad es cero.

Las transformaciones matriciales debida a una base B siempre son uno a uno debido a que como cada columna de B tiene pivote entonces el sistema de ecuaciones correspondiente tiene solución única.

Una transformación matricial $T_A : V \to W$ se llama **isomorfismo** si T_A es uno a uno y sobre.

Demuestre que la transformación $T_A : \{\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo.

5.12 Transformaciones matriciales entre espacios

La matriz formada por la base de un espacio $\mathbb{R}^n$ siempre es una matriz cuadrada e invertible. A continuación sólo hablaremos de las bases para $\mathbb{R}^n$.

Cuales de las siguientes matrices son base de $\mathbb{R}^4$...

Las columnas de la matriz identidad corresponden a la base canónica. Pero hay muchas otras bases.

Calcule las coordenadas ... en cada una de las bases

Una Base se puede ver como una transformación

Si tengo las coordenadas en una base como encuentro el vector (en la base canónica)

5.13 Cambio de base

—llegar a la formula usual

5.14 Vectores y bases ortogonales

[NJ99, 8.1]

Dos vectores son **ortogonales** si su producto punto es cero.

En un **conjunto de vectores-m ortogonal** cada par de vectores son ortogonales. Una **base ortogonal** es una base de un subespacio de $\mathbb{R}^n$, cuyo conjunto de vectores es ortogonal.

Si $\overline{u}$ es la combinación lineal de un conjunto de vectores ortogonales

$$\overline{u} = c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \cdots + c_i\overline{v_i} + \cdots + c_n\overline{v_n}$$

entonces

$$c_i = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v_i}}{\overline{v_i} \cdot \overline{v_i}}$$

En cualquier conjunto ortogonal de vectores distintos de cero los vectores son linealmente independientes

Si las columnas de $A = [\overline{v_1} \ \ \overline{v_2} \cdots \overline{v_n}]$ forman un conjunto ortogonal entonces

$$A^T A = \begin{bmatrix} ||\overline{v_1}|| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ||\overline{v_2}|| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & ||\overline{v_n}|| \end{bmatrix}$$

5.15 Bases ortonormales

Una **base ortonormal** es una base ortogonal en la cual cada vector es unitario.

Si los vectores-m $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ forman una base ortonormal de un subespacio V de $\mathbb{R}^m$, entonces cada vector-m $\overline{u}$ de V puede escribirse en forma única

$$\overline{u} = (\overline{u} \cdot \overline{v_1})\overline{v_1} + (\overline{u} \cdot \overline{v_2})\overline{v_2} + \cdots + (\overline{u} \cdot \overline{v_n})\overline{v_n}.$$

Ademas, si $A = [\overline{v_1} \;\; \overline{v_2} \cdots \overline{v_n}]$ es una matriz de $m \times n$ entonces

$$A^T A = I_n$$

5.16 Matrices ortogonales

Una **matriz ortogonal** es una matriz

- cuadrada
- con todas sus columnas son unitarias
- cualquier par de columnas son ortogonales

Para esta matriz un mejor nombre sería matriz ortonormal, pero este nombre no se usa, una matriz que no es cuadrada o que sus columnas no sean unitarias no se llama ortogonal. Las columnas de una matriz ortogonal de $n \times n$ forman una base ortonormal del espacio $\mathbb{R}^n$

Para una matriz cuadrada invertible A se tienen las siguientes equivalencias.

- A es ortogonal (i. e. columnas unitarias y ortgonales).
- $A^{-1} = A^T$.
- $A\overline{u} \cdot A\overline{v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$ para todos los vectores-m $\overline{u}$ y $\overline{v}$.
- $||A\overline{v}|| = ||\overline{v}||$ para todos los vector-m $\overline{v}$.

5.17 vectores propios

Un **vector propio** o **vector característico** v de una matriz A de $n \times n$, es un vector diferente de cero $v \in \mathbb{R}^n$ que cumple

$$Av = \lambda v$$

Donde el escalar λ se conoce como un **valor propio** o **valor característico** de A asociado al vector propio v. Los valores propios pueden ser cero.

–Con la notación anterior, λ es un valor característico de A si y sólo si

$$det(A - \lambda I) = 0$$

esta ecuación se llama **ecuación característica**.
$det(A - \lambda I)$ es él **polinomio característico**,
el cual se puede factorizar

$$(\lambda_1 - \lambda)^{r_1}(\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$$

los números r_i se llaman la **multiplicidad algebraica**.

Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si 0 NO es un valor característico de A.

Los valores propios de una matriz diagonal son sus elementos diagonales

v es un vector propio de A asociado a λ si y sólo si v es una solución no trivial del sistema

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$(A - \lambda I)$ se llama la **matriz característica**

El núcleo de $(A - \lambda I)v = 0$ se llama el **espacio característico** y en [NJ99] se denota con E_λ. La **multiplicidad geométrica** es la dimensión del espacio característico.

Algoritmo para el calculo de valores característicos, vectores característicos y bases de espacio característico.

1. Se encuentran las raíces λ_i del polinomio característico $det(A - \lambda I) = 0$.
2. Para cada valor propio λ_i encontrar una base del núcleo $(A - \lambda I)v = 0$.

Las matrices diagonales tienen las siguientes ventajas

- Cuando multiplican no mezclan renglones
- Es fácil calcular potencias

Dos matrices cuadradas A y B son **semejantes** si existe una matriz invertible C tal que

$$B = C^{-1}AC.$$

Si una matriz cuadrada A es semejante a una matriz diagonal D entonces se dice que A es **diagonalizable**.

> Si A y B son matrices semejantes entones de $n \times n$ entonces A y B tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto los mismos valores característicos

Una matriz A es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal D que es semejante a D.

> Una matriz A es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores característicos linealmente independientes. En este caso la matriz diagonal D que es semejante a A está formada por los valores característicos de A. Si C es una matriz cuyas columnas son vectores característicos linealmente independientes de A, entonces
> $$D = C^{-1}AC$$

Algoritmo para diagonalizar una matriz, cuando es posible.

1. Determinar las bases $B_1, \ldots, B_k$ para cada valor propio y formar la unión $B = [B_1 \cdots B_k]$.
2. Si B no es cuadrada detenerse. A no es diagonalizable.
3. Si B es cuadrada diagonaliza a A ya que $D = B^{-1}AB$, donde D es la matriz diagonal con los valores propios en el respectivo orden de B.

> Si A es diagonalizable por P y D entonces para $k = 1, 2, \ldots$
> $$A^k = PD^kP^{-1}$$
> Si A es invertible entonces es posible que $k = -1, -2, \ldots$

Recordemos que una matriz A es **simétrica** si $A' = A$, es decir si sus columnas son iguales a sus renglones.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \ldots$$

El nombre hace referencia a la simetría que hay respecto a la diagonal.

Sea A una matriz real simétrica de $n \times n$, entonces A tiene n vectores característicos reales ortonormales

Chapter 6

Espacio Euclidiano

6.1 Operación producto punto

Al multiplicar las matrices $C = AB$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ y $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, cada elemento de la matriz C corresponde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

donde $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}$ es el renglón i-esimo de la matriz A y $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{kj}$ es la columna j-esima de la matriz B. Esto define el **producto punto** o **producto escalar** entre dos vectores-m (independientemente si son renglón o columna) $\overline{u} = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ y $\overline{v} = [b_1, b_2, \ldots, b_m]$ que da como resultado un escalar.

$$\begin{aligned}
\overline{u}\cdot\overline{v} &= [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]\cdot[b_1\ b_2\ \cdots\ b_n] \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\cdot[b_1\ b_2\ \cdots\ b_n] \\
&= [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} := a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n
\end{aligned}$$

Si consideramos los vectores como matrices columna entonces el producto punto se puede considerar como un producto matricial.

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = \overline{u}^T\overline{v}$$

Resumiendo

$\overline{v} \cdot \overline{u}$ **Producto punto entre el vector-**m $\overline{v}$ **y el vector-**n $\overline{u}$

- $\overline{v} \cdot \overline{u}$ existe si $m = n$
- el resultado es un escalar
- y se calcula $(\overline{v})_1(\overline{u})_1 + (\overline{v})_2(\overline{v})_2 + \cdots + (\overline{v})_m(\overline{u})_n$

en Scilab se escribe usando la multiplicación matricial y trasponiendo el primer vector, debido a que Scilab no tiene vectores como tal. A continuación se muestra un ejemplo.

```
-->a=[1;2;3];
-->b=[1;1;1];
-->a'*b
 ans  =
    6.
```

Dos vectores-m son **ortogonales** o **perpendiculares** si el producto punto entre ellos es cero. Gráficamente dos vectores ortogonales tienen un *ángulo* de 90°.

Algunas propiedades del producto punto son

(ConPun) Conmutativa del producto punto, $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{v} \cdot \overline{u}$.
(DitrPun) Distributtiva del producto punto, $\overline{u} \cdot (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{v} \cdot \overline{u} + \overline{v} \cdot \overline{w}$.
(AsoPun) Asociativa del producto punto, $c(\overline{u} \cdot \overline{v}) = (c\overline{v}) \cdot \overline{u} = \overline{v} \cdot (c\overline{u})$.
(PosPun) Definición positiva del producto punto, $\overline{u} \cdot \overline{u} \geq 0$. Además, $\overline{u} \cdot \overline{u} = 0$ si y sólo si $\overline{u} = 0$.
(MatVecPun) Producto punto con matriz A **por vector**, $(A\overline{u}) \cdot \overline{v} = \overline{u} \cdot (A^T\overline{v})$.

6.2 Magnitud

[NJ99, pag 79]
La **norma**, **longitud** o **magnitud** de un vector $\overline{u}$ es $||u|| = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}}$
Un **vector unitario** es un vector de magnitud uno.

Si $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son dos vectores-n cualquiera, se tiene

(MagSum) Magit
(Pitágoras) Teore
$||\overline{u}+\overline{v}||^2 = ||\overline{u}||^2 + |$
(MagRes) Magitu
(Cauchy-Schwarz)
cuando $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son pa
(DesTrianM) Des

(MagEscVec) Magnitud de escalar por vector, $||c\overline{u}|| = abs(c)||\overline{u}||$.
(MagPos) La magnitud es positiva, $||\overline{u}|| \geq 0$. Además, $||\overline{u}|| = 0$ si y sólo si $\overline{u} = 0$.
(VectUni) Vector unitario, Si $\overline{u} \neq \overline{0}$ entonces $\frac{1}{||\overline{u}||}\overline{u}$ es un vector unitario.

6.3 Distancia entre dos vectores o dos puntos

$$dist(\overline{u}, \overline{v}) := ||\overline{u} - \overline{v}||$$

Si $\overline{u}, \overline{v}$ y $\overline{w}$ son vectores-m entonces **(DistPos) Distancia positiva**, $dist(\overline{u}, \overline{v}) \geq 0$.
(DistCero) Cistancia cero, $dist(\overline{u}, \overline{v}) = 0$ si y sólo si $\overline{u} = \overline{v}$.
(DistConm) Distancia Conmutativa, $dist(\overline{u}, \overline{v}) = dist(\overline{v}, \overline{u})$.
(DesTrianD) Desigualdad triangular en distancia, $dist(\overline{u}, \overline{v}) \leq dist(\overline{u}, \overline{w}) + dist(\overline{w}, \overline{v})$.

[Ant06, Teorema 4.1.5] Esta distancia se conoce como distancia euclidiana.

6.4 Proyección

[NJ99, pag 86]
La proyección del vector-m $\overline{u}$ sobre el vector $\overline{v}$ se define

$$proy_v(\overline{u}) = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{\overline{v} \cdot \overline{v}} \overline{v}$$

????????? escribirlo como vector unitario

6.5 Ángulo y funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas (Imagen y dominio) Identidades trigonométricas Deducción de la ley del coseno Definición de coseno entre dos vectores Definición del (menor) ángulo entre dos vectores Definición del ángulo de un vector Trigonometría Teorema de coseno

Las funciones trigonométricas se definen

$sen(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$tan(\alpha)$
$\frac{Lo}{Hi}$	$\frac{La}{Hi}$	$\frac{Lo}{La}$

Por el teorema de Pitágoras se obtiene

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

$$sen(\alpha) = sen(\alpha + 2\pi) \qquad sen(-\alpha) = sen(\alpha + \pi) \qquad sen(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi) \qquad \cos(-\alpha) = -\cos(\alpha + \pi) \qquad \cos(\alpha) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + \pi) \qquad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \qquad \tan(\alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Otras entidades útiles serán

$$sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)sen(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp sen(\alpha)sen(\beta)$$

$$asen(\alpha) + b\cos(\alpha) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot sen\left(\alpha + \arctan\frac{b}{a}\right)$$

Teorema de seno y coseno

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)}$$

El teorema del coseno se puede resolver por un sistema de ecuaciones

Después del repaso regresamos a los vectores. En $\mathbb{R}^2$ se cumple que

$$||\overline{u}||\ ||\overline{v}||cos(\alpha) = \frac{1}{2}(||\overline{u}||^2 + ||\overline{v}||^2 - ||\overline{u} - \overline{v}||^2) = \overline{u} \cdot \overline{v}$$

Con esto se encuentra una forma para calcular el coseno entre dos vectores.

$$cos(\alpha) = \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{||\overline{u}||\ ||\overline{v}||}$$

Aunque la formula anterior sólo es válida en $\mathbb{R}^2$, si nos permite definir el **coseno entre dos vectores** para cualquier $\mathbb{R}^m$.

$$cos(\alpha) := \frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{||\overline{u}|| \; ||\overline{v}||}$$

Debido a que la función *arccos* está definida entre 0 y π entonces el ángulo entre dos vectores siempre es el más pequeños de los dos ángulos.

Calcule el ángulo entre dos vectores paralelos y entre dos vectores ortogonales.

Los **cosenos directores** de un vector $\overline{v}$ son los cosenos entre $\overline{v}$ y cada uno de los ejes coordenados.

Demuestre en $\mathbb{R}^2$ que el coseno director de un vector $\overline{v}$ con el eje y es $sen(\alpha)$

En [**?**, pg 223] se define la **dirección de un vector** como el ángulo entre 0 y 2π que forma el vector con el lado positivo del eje x.

Esta definición no es muy usada ya que arccos y arctan no tiene una imagen de 0 a 2π y por lo tanto es necesario definir la dirección mediante 8 casos!.

Definición de **producto cruz** [NJ99, pg 113]

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{bmatrix}$$
$$= \widehat{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \widehat{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \widehat{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$
$$=! \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}!$$

En el último renglón se usa sólo la 'notación' de determinante

Propiedades [NJ99, Teoremas 2.6.{20 y 21}].
Si $\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\overline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, $\overline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

(AconCruz) $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$.

(DistrCruzI) $\overline{u} \times (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{w}$.

(DistrCruzD) $(\overline{v} + \overline{w}) \times \overline{u} = \overline{v} \times \overline{u} + \overline{w} \times \overline{u}$.

(AsoCruz) $c(\overline{u} \times \overline{v}) = (c\overline{v}) \times \overline{u} = \overline{v} \times (c\overline{u})$.

(AnulCruz) $\overline{0} \times \overline{u} = \overline{0} = -\overline{u} \times \overline{0}$.

(AutoAnul) $\overline{u} \times \overline{u} = \overline{0}$.

(CruzCruz) $\overline{u} \times (\overline{v} \times \overline{w}) = (\overline{u} \cdot \overline{w})\overline{v} - (\overline{u} \cdot \overline{v})\overline{w}$.

(PuntoCruz) $\overline{u} \cdot (\overline{v} \times \overline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$.

(MagCruz) $||\overline{u} \times \overline{v}||^2 = ||\overline{u}||^2||\overline{v}||^2 - (\overline{u} \cdot \overline{v})^2$.

(SenCruz) $||\overline{u} \times \overline{v}|| = ||\overline{u}||||\overline{v}||sen(\theta)$.

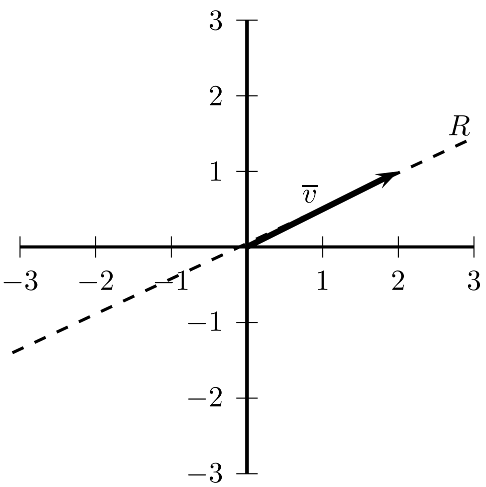
6.6 Rectas

Recordemos que una **recta que pasa por el origen** es el generado por un vector $\overline{v}$ diferente de cero.

$$R = \{t\overline{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y por lo tanto la **ecuación de una recta que pasa por el origen** esta dada por

$$\overline{x} = t\overline{v}$$

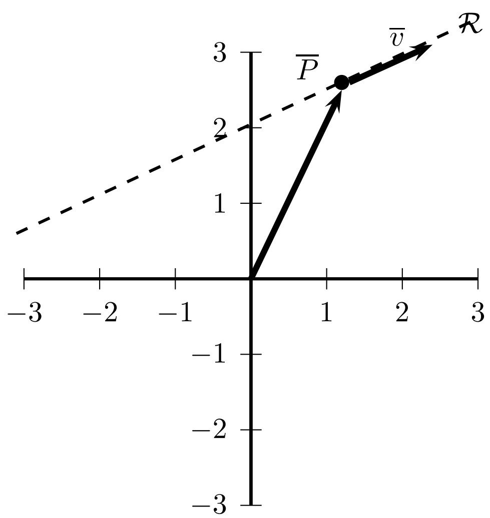


Una **recta** en general se obtiene al trasladar a un punto $\overline{P}$ una recta que pasa por el origen

$$\mathcal{R} = \{\overline{P} + t\overline{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y por lo tanto la **ecuación de una recta** que pasa por $\overline{p}$ esta dada por

$$\overline{x} = \overline{P} + t\overline{v}$$



Cuando se tienen dos puntos $\overline{Q}$ y $\overline{P}$ se puede encontrar el vector dirección

$$\overline{v} = \overline{PQ} = \overline{Q} - \overline{P}$$

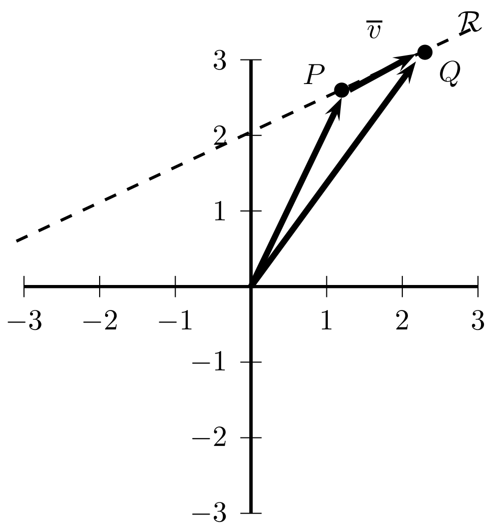
Y por lo tanto el conjunto de puntos de la recta queda

$$\mathcal{R} = \{\overline{P} + t(\overline{Q} - \overline{P}) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y la **ecuación de una recta** que pasa por $\overline{P}$ y $\overline{Q}$ esta dada por

$$\overline{x} = \overline{P} + t(\overline{Q} - \overline{P})$$

Esta ecuación se llama **ecuación paramétrica de la recta**



Una recta se puede escribir como la solución de un sistema de ecuaciones,

En $\mathbb{R}^2$ si a_1 y a_2 no son cero al tiempo entonces la ecuación de la recta se puede representar como la solución de la siguiente ecuación

$$a_1x + a_2y = c$$

si se despeja y cuando $a_2 \neq 0$, la ecuación queda

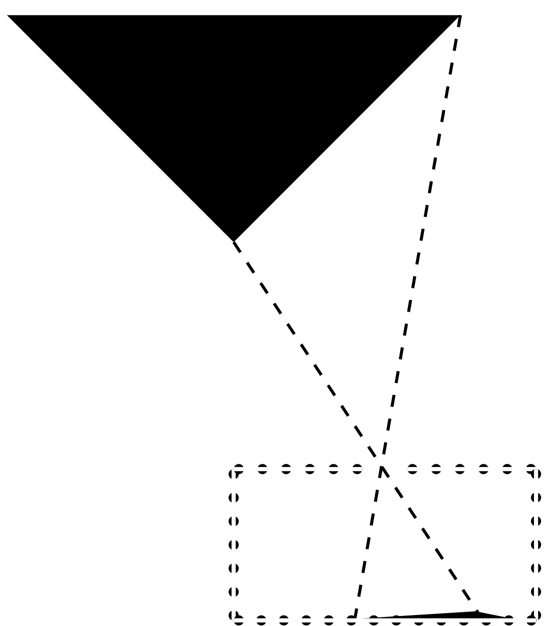
$$y = mx + b$$

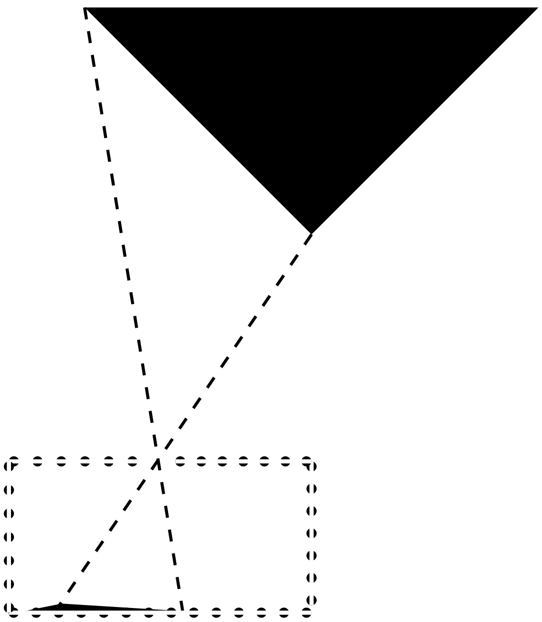
m se conoce como la pendiente y b el punto de corte con el eje y.

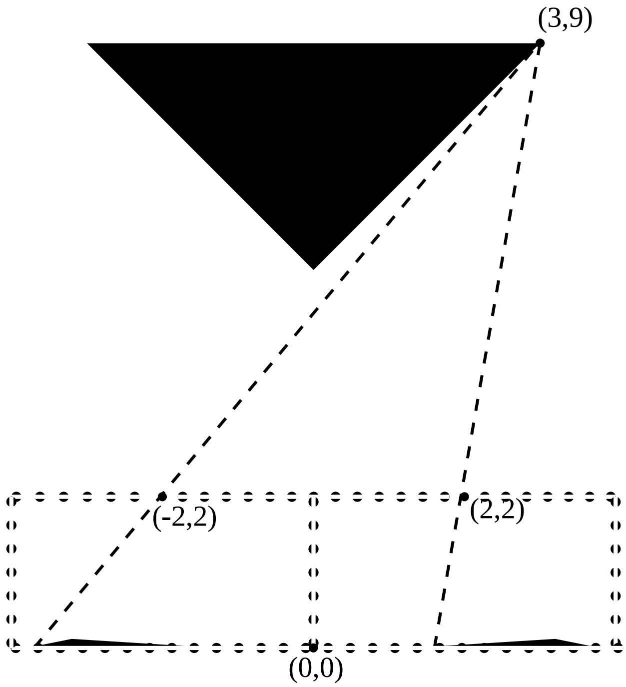
En $\mathbb{R}^3$ si $a \neq 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces la ecuación de la recta se puede escribir como la solución de este par de ecuaciones llamada **ecuación simétrica de la recta**

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

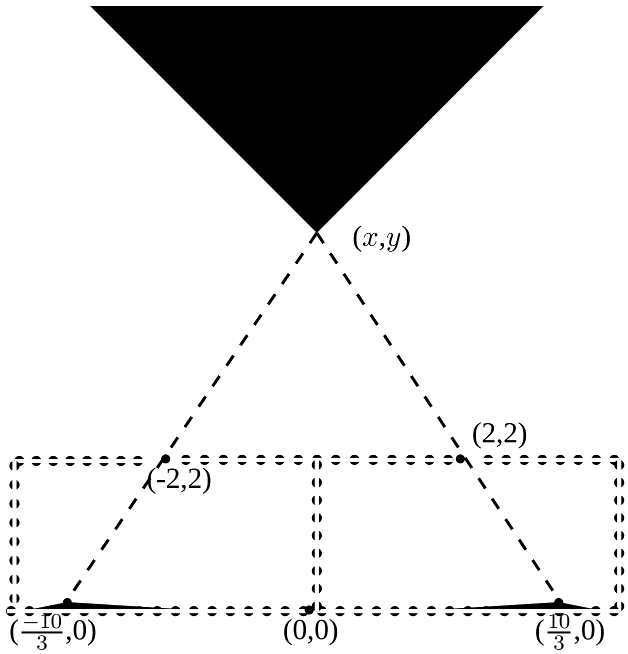
Estas ecuaciones se obtienen despejando el parámetro en todas las ecuaciones e igualándolas.







- Escriba la ecuación paramétrica de cada una de las rectas
- Escriba la ecuación con corte y pendiente de cada recta
- Escriba donde corta cada recta el eje x



- Escriba la ecuación paramétrica de cada una de las rectas
- Escriba la ecuación $a_1x + a_2y = c$ de cada recta
- Resuelva el sistema de las dos ecuaciones para encontrar donde se cruzan las dos rectas

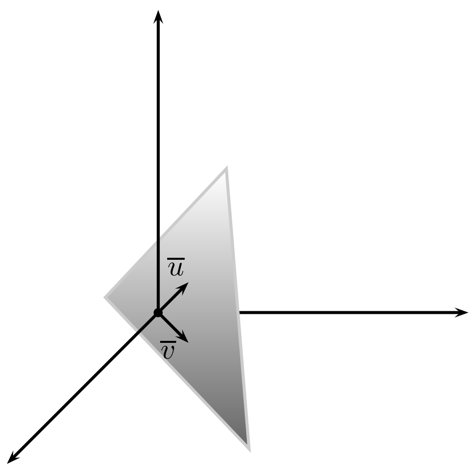
6.7 Planos

Recordemos que un **plano que pasa por el origen** es el generado por dos vectores linealmente independientes.

$$\mathcal{P} = \{s\overline{u} + t\overline{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

y por lo tanto la **ecuación vectorial de un plano que pasa por el origen** esta dada por

$$\overline{x} = s\overline{u} + t\overline{v}$$

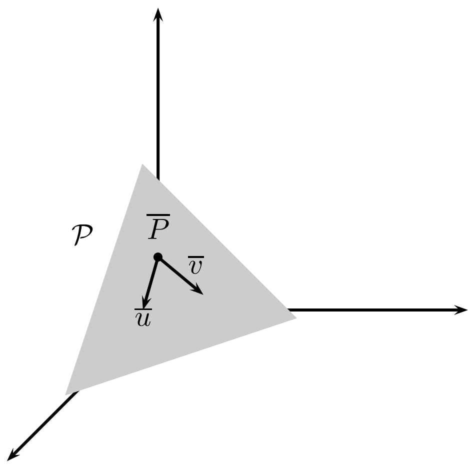


Un **plano** en general se obtiene al trasladar a un punto $\overline{P}$ un plano que pasa por el origen

$$\mathcal{P} = \{\overline{P} + s\overline{u} + t\overline{v} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

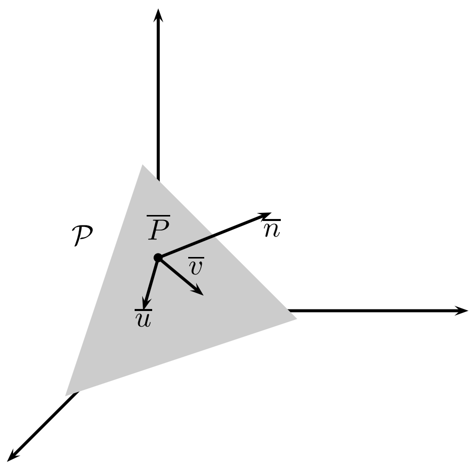
y por lo tanto la **ecuación de una plano** que pasa por $\overline{P}$ esta dada por

$$\overline{x} = \overline{P} + s\overline{u} + t\overline{v}$$

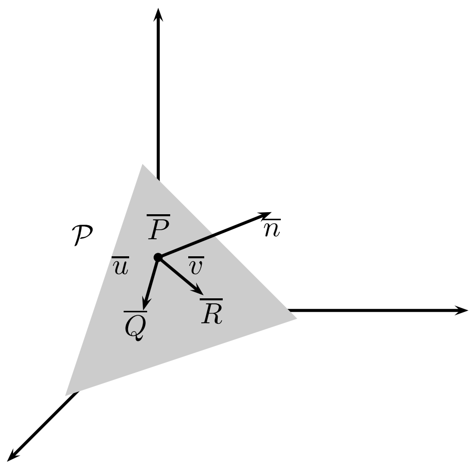


Si los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ generan un plano y si el vector $\overline{n}$ es ortogonal (normal) a $\overline{u}$ y a $\overline{v}$ entonces $\overline{n}$ es ortogonal a todos los vectores $\overline{x}$ del plano. Y por lo tanto se dice que $\overline{n}$ es **ortogonal al plano**. En $\mathbb{R}^3$, el vector $\overline{n} = \overline{u} \times \overline{v}$ es un vector normal al plano.

El ángulo entre dos planos es el ángulo de sus normales.

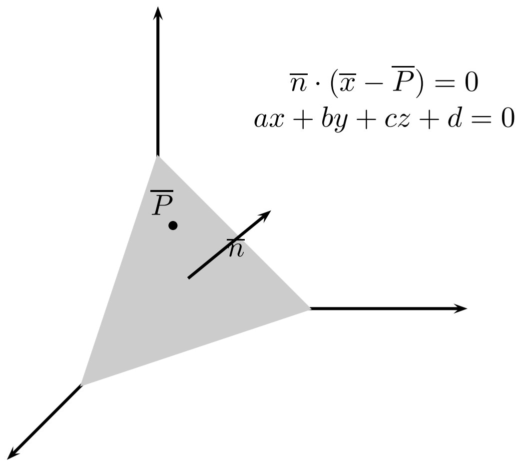


Tres puntos $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$ no colineales pertenecen a un sólo plano. Ademas los vectores $\overline{u} = \overline{PQ}$ y $\overline{v} = \overline{PR}$ generan el plano.



En $\mathbb{R}^3$, si $\overline{n} \neq 0$, entonces los puntos $\overline{x}$ que solucionan la ecuación $\overline{n} \cdot (\overline{x} - \overline{P}) = 0$ forman un plano que pasa por $\overline{P}$ y $\overline{n}$ es ortogonal (normal) al plano, esta ecuación se conoce como **punto-normal**.

En $\mathbb{R}^3$, si $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \overline{0}$, la solución de la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ es un plano cuya normal es el vector $\overline{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.



De un tren que viaja a velocidad constante queremos determinar su velocidad (v) y posición inicial (x_0) para poder determinar su posición en cualquier instante, mediante la ecuación $x = x_0 + vt$. Para lo cual tras personas que han visto el tren nos indican en que momento (t) y en que posición (x) lo vieron.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Pero si resolvemos el sistema de ecuaciones resulta inconsistente, eso quiere decir que ninguna recta pasa por los tres puntos, por lo tanto es necesario encontrar la recta que "más" se acerque a los tres puntos. Para lo cual vamos a formar un plano con los errores de la posición de cada uno de las observaciones y encontramos donde es más cerca ese plano al origen, el punto más cercano corresponde cuando el vector del punto al origen es normal al plano.

Chapter 7

Espacios vectoriales

7.1 Introducción

Un espacio vectorial de dimensión n se puede ver como un conjunto al cual a cada elemento se le asigna uno y sólo un vector de R^n.

Ejemplos:

$$y = mx + b \qquad \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$color \qquad \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}$$

Sin embargo, en la definición formal de un espacio vectorial no se menciona $\mathbb{R}^n$, eso permite tener espacios vectoriales más interesantes, como es el caso de las funciones reales.

Un **Espacio Vectorial** V es un conjunto que cumple las siguientes propiedades, suponga que $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$.

- Tiene una operación **suma** $(+)$ que cumple
  - ley clausurativa $\overline{u} + \overline{v} \in V$
  - ley conmutativa $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$
  - ley asociativa $(\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w} = \overline{u} + (\overline{v} + \overline{w})$
- Tiene un elemento **cero** que cumple la ley modulativa

$$\overline{v} + 0 = 0 + \overline{v}$$

- Para cada elemento $\overline{v}$ hay un elemento **opuesto** $\overline{(-v)}$ que cumple la ley del opuesto

$$\overline{v} + \overline{(-v)} = \overline{(-v)} + \overline{v} = 0$$

- Tiene una **multiplicación por escalar** que cumple
  - ley clusurativa $a\overline{v} \in V$
  - ley distributiva $a(\overline{u} + \overline{v}) = a\overline{u} + a\overline{v} = (\overline{u} + \overline{v})a$
  - ley asociativa $a(b(\overline{v})) = (ab)(\overline{v})$
  - ley de la identidad $1\overline{v} = \overline{v}$

Ejemplos se E. V.

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ y en general $\mathbb{R}^n$.
- $M_{m \times n}$, El conjunto de todas la matrices de $m \times n$.
- P, El conjunto de todos los polinomios.
- $F(R)$, El conjunto de todas las funciones reales.

7.2 Subespacio vectorial

Un **subespacio vectorial** W de un espacio V es

- un subconjunto de V
- con la suma y multiplicación de V
- cumple los axiomas de E.V.

Un subconjunto W de un E. V. V es un subespacio de V si y solo si

- Si $\overline{u}, \overline{v} \in W$ entonces $\overline{u} + \overline{v} \in W$
- Si $c \in \mathbb{R}$ y $\overline{v} \in W$ entonces $c\overline{v} \in W$

7.3 Base

Definir I.L, Gen y Base Demostrar Bases canónicas

Si B es una base de un espacio vectorial V de dimensión finita. Sean $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_n} \in V$. Entonces $\overline{u}$ es una combinación lineal de $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_n} \in V$ si y sólo si $[\overline{u}]_B$ es una combinación lineal de $[\overline{u_1}]_B, [\overline{u_2}]_B, \ldots, [\overline{u_n} \in V]_B$ Además los coeficientes de una combinación lineal corresponden con los coeficientes de la otra combinación lineal

Se extrapolan las nociones de

- Combinación lineal
- Espacio Generado, Espacio Columnas, Imagen
- Independencia lineal
- Base
- Dimensión, rango y nulidad
- Coordenadas
- Espacio nulo

7.4 Transformaciones lineales

Una transformación lineales es....

El dominio y el codominio son...

La **imagen** de una transformación lineal $T : V \to W$ ($Im(T)$) se define

$$Im(T) := \{T(v) \mid v \in V\}$$

Las coordenadas de la imagen corresponden a la imagen de la matriz de la transformación (La imagen de la matriz es el subespacio generado por las columnas de la matriz, llamado también **espacio de las columnas**).

La imagen de $T : V \to W$ es un subespacio vectorial de W Algunas veces se llama espacio a este subespacio.

La dimensión de la imagen de la transformación lineal T se llama **rango** ($\rho(T) = dim(Im(T))$), la cual coincide con la dimensión del espacio de las columnas de la matriz de T.

El **núcleo** o **kernel** de una transformación lineal $T : V \to W$ $(Nu(T))$ es

$$Nu(T) := \{v \in V \mid T(v) = \overline{0}\}$$

$\boxed{\text{Las coordenadas del núcleo corresponden al núcleo de la matriz de la transformación}}$ Algunas veces se llama espacio a este subespacio.

$\boxed{\text{El núcleo es de } T : V \to W \text{ es un subespacio vectorial de } V}$.

La dimensión del núcleo de la transformación lineal T se llama **nulidad** $(\nu(T) = dim(Im(T)))$, la cual coincide con la dimensión de la nulidad de la matriz de T.

Al subespacio generado por los vectores-m de una transformación matricial

$$A = [\overline{v_1}\ \overline{v_2}\ \ldots\ \overline{v_n}]$$

se le llama

- la **imagen** de A, $(Im(A))$ o
- el **subespacio columna** de A, $(Col(A))$.

$$Im(A) = Col(A) := \{A\overline{u} \mid \overline{u} \in \mathbb{R}^m\} = \langle \overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n} \rangle$$

Por simplicidad a estos subespacios algunas veces se les llama espacios.

1a1,sobre, isomorfismo

—————————-

7.5 Dominio, Codominio e Imagen de la transformación matricial

Para una transformación de la matriz $A = [\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}]$

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$T_A\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}\right) = c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \ldots + c_n\overline{v_n}$$

$\mathbb{R}^n$ se llama el **dominio**, $\mathbb{R}^m$ es el **codominio** y la **imagen** es el *conjunto* de vectores que se pueden escribir como combinación lineal de $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}$, también se le llama el **subespacio generado** por las columnas de A, denotado por $\langle\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\rangle$ o por $Gen\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$, otro nombre es el **subespacio columna** de A, $(Col(A))$. A continuación se presenta los diferentes nombres del mismo conjunto.

.

$$\begin{aligned} &Im(T_A) = \{T_A(\overline{c}) \mid \overline{c} \in \mathbb{R}^m\} = \{A\overline{c} \mid \overline{c} \in \mathbb{R}^m\} = Gen\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\} \\ &= \langle\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\rangle = Col(A) = \{c_1\overline{v_1} + c_2\overline{v_2} + \ldots + c_n\overline{v_n} \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Una transformación matricial T_A es se dice que es **sobre** si la imagen es el codominio, en este caso también se dice que las columnas de A **generan el espacio** $\mathbb{R}^m$.

El **subespacio renglón** de una matriz A corresponde al espacio columna de la transpuesta de A, $(Ren(A) = Col(A'))$

Por simplicidad a estos subespacios algunas veces se les llama espacios.

Se sugiere mirar el ejemplo 20 y 21 de la sección 2.3 de la página 90 y los ejercicios 1 y 2.

7.6 Algunos subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Una **recta que pasa por el origen** es el generado por un vector diferente de cero. En su respectivo espacio ($\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$)

- a la recta $\langle \overline{i} \rangle$ se le conoce como el **eje x**,
- a la recta $\langle \overline{j} \rangle$ se le conoce como el **eje y**
- en R^3 a la recta $\langle \overline{k} \rangle$ se le conoce como el **eje z**.

A estos ejes se les conoce como los ejes coordenados.

Un **plano que pasa por el origen** es el generado por dos vectores no paralelos y diferentes de cero. $\mathbb{R}^2$ es un plano. En $\mathbb{R}^3$ un plano nunca es $\mathbb{R}^2$ (pero si tiene la misma forma y por eso se dice que un plano es *isomorfo* a $\mathbb{R}^2$) en cambio

- al plano $\langle \overline{i}, \overline{j} \rangle$ se le conoce como el **plano xy**,
- al plano $\langle \overline{i}, \overline{k} \rangle$ se le conoce como el **plano xz**,
- al plano $\langle \overline{j}, \overline{z} \rangle$ se le conoce como el **plano yz**.

A estos planos se les conoce como los planos coordenados.

Ahora nos podemos preguntar que genera el origen y que genera dos vectores paralelos. En el primer caso, el origen genera el mismo origen y nada más. En el segundo caso, para saber que genera dos vectores paralelos vamos a usar el Teorema [NJ99, 2.?.9] que dice:

> Si uno de los vectores-*m* $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}$ es una combinación lineal del resto entonces el generador permanece igual si se elimina ese vector.

Si dos vectores son paralelos (ver definición en la sección **??**) entonces uno es combinación lineal del otro y por lo tanto se puede eliminar uno de ellos y queda el generado por un vector. Por lo tanto el generado por dos vectores paralelos también es una recta que pasa por el origen.

¿Qué pasa si aplicamos las transformaciones elementales al eje x? La identidad, los dos escalamientos y sumando la segunda componente a la primera, no lo afectan. El intercambio lo transforma en el eje y. Finalmente, sumando la primera componente a la segunda lo transforma en una recta a 45°.

—————————- pasar eso a ecuaciones.

El *renglón i* está asociado con la i-esima ecuación y en Scilab se selecciona así

```
A(i,:)
```

Una *columna j* está asociada con la variable j-esima y en Scilab se describe así

```
A(:,j)
```

La columna de la derecha tiene los términos constantes. Para ver esta columna en Scilab se puede usar el símbolo `$` que se utiliza para indicar el último valor.

```
A(:,$)
```

Bibliography

[Blo00] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamental*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[Ant06] H. Anton, *Álgebra Lineal*, Editorial Limusa, 3a. edición, Mexico 2006.

[Gro05] S. A. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 5a. edición, Mexico 2005.

[NJ99] Nakos, Joyner, *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Editorial Thomson 1999.

[Str3a] G. Strang, *Linear Algebra and its applications*, 3a. edición, Thomson Learning.

[Str3b] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3a. edición, Wellesley Cambridge Press.