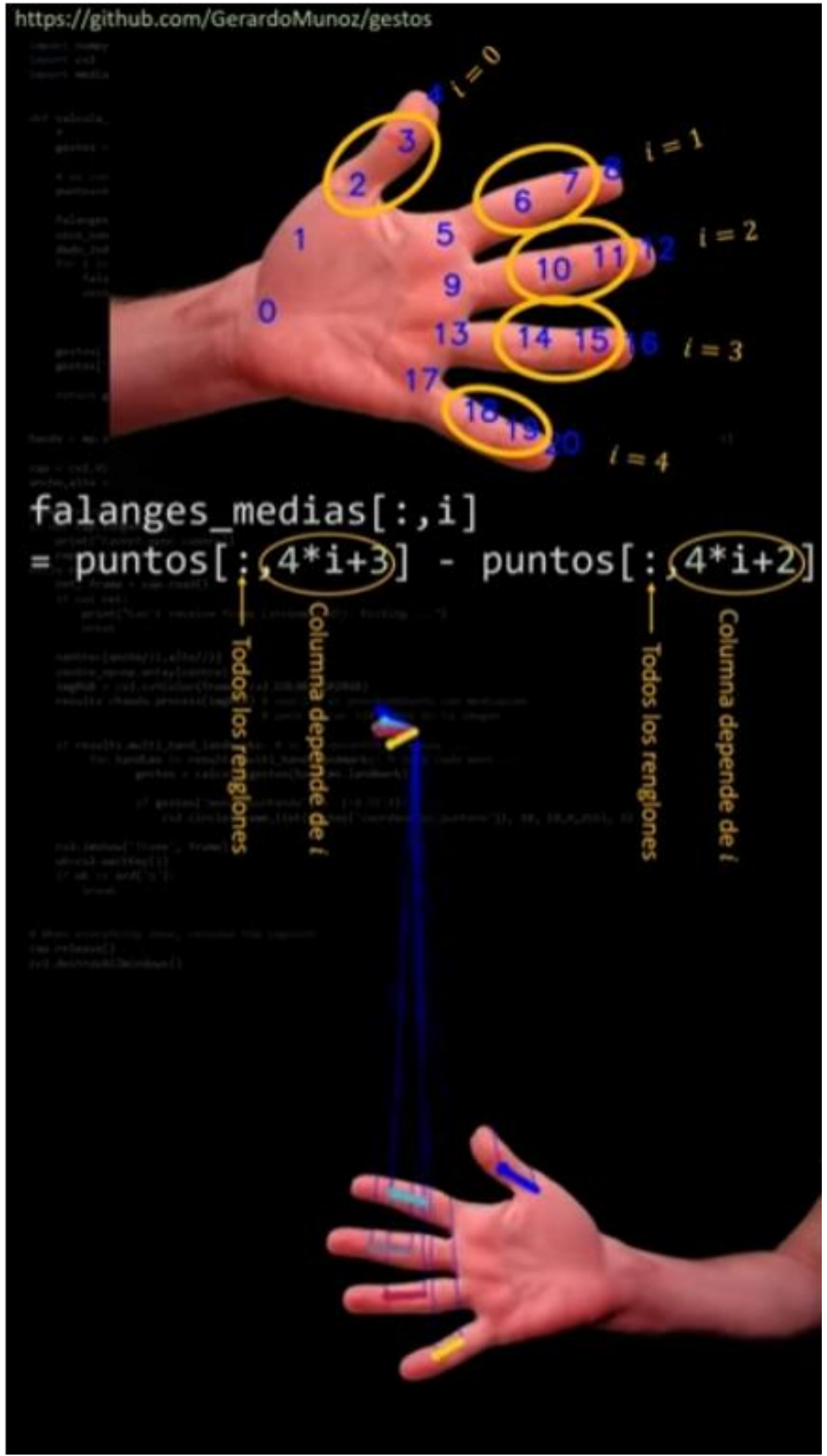


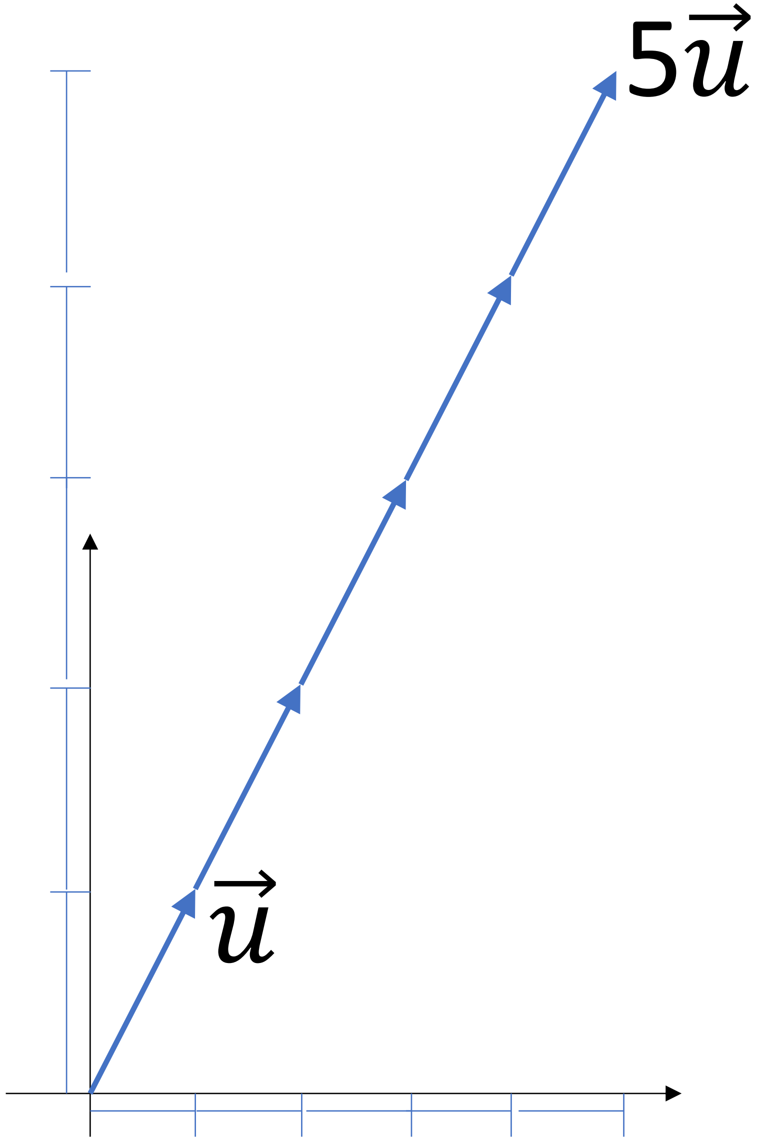
Operaciones Vectoriales

https://www.youtube.com/watch?v=sGDJwilP-oo

Enviar preguntas a

gmunoz@udistrital.edu.co

Escalar por vector



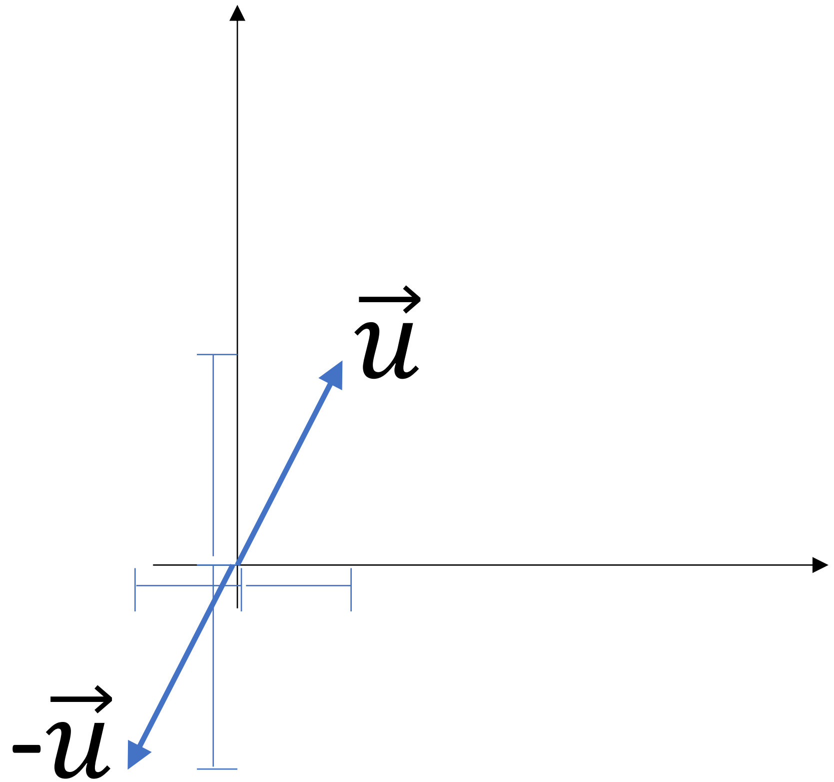
Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(2) \\ 5(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Operaciones entre vectores



Vector Opuesto

Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Operaciones entre vectores

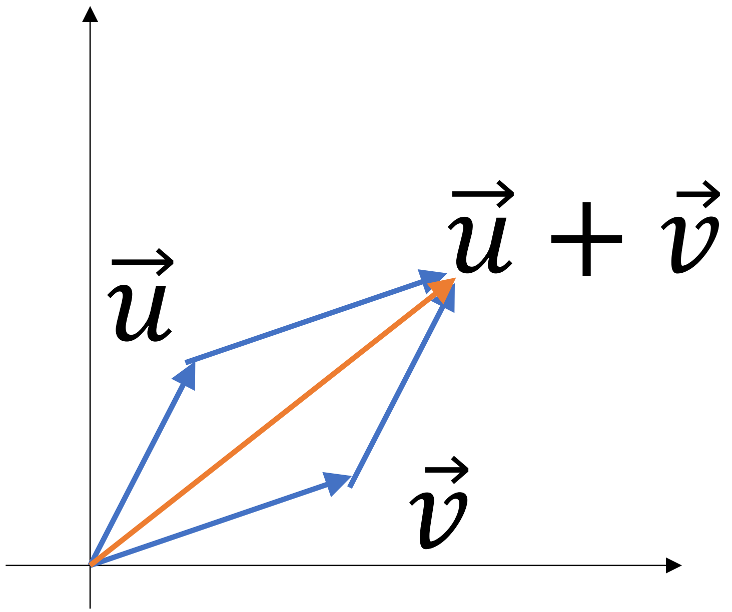
Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Suma de vectores

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 \\ 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Operaciones entre vectores

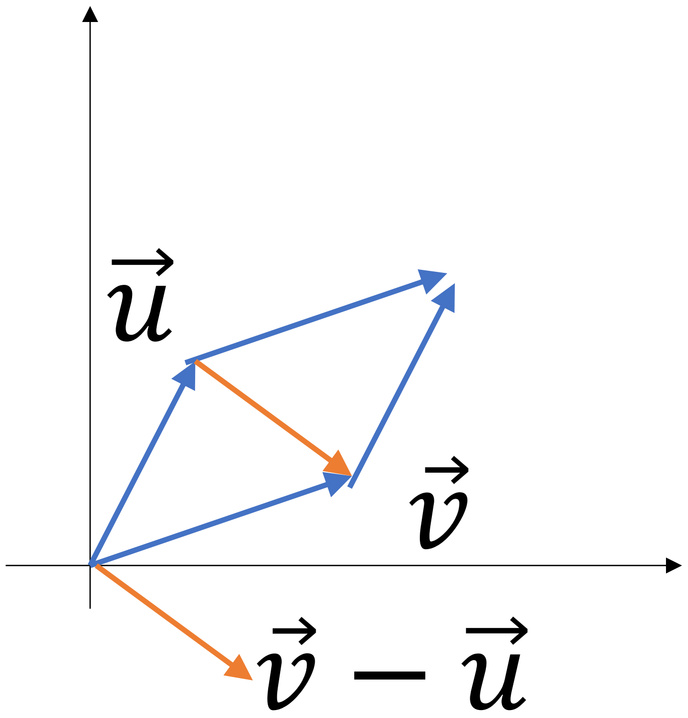
Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Resta entre vectores

Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 \\ 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$



Operaciones entre vectores

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3\\4+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

Operaciones de la Combinación Lineal

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por vector** $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

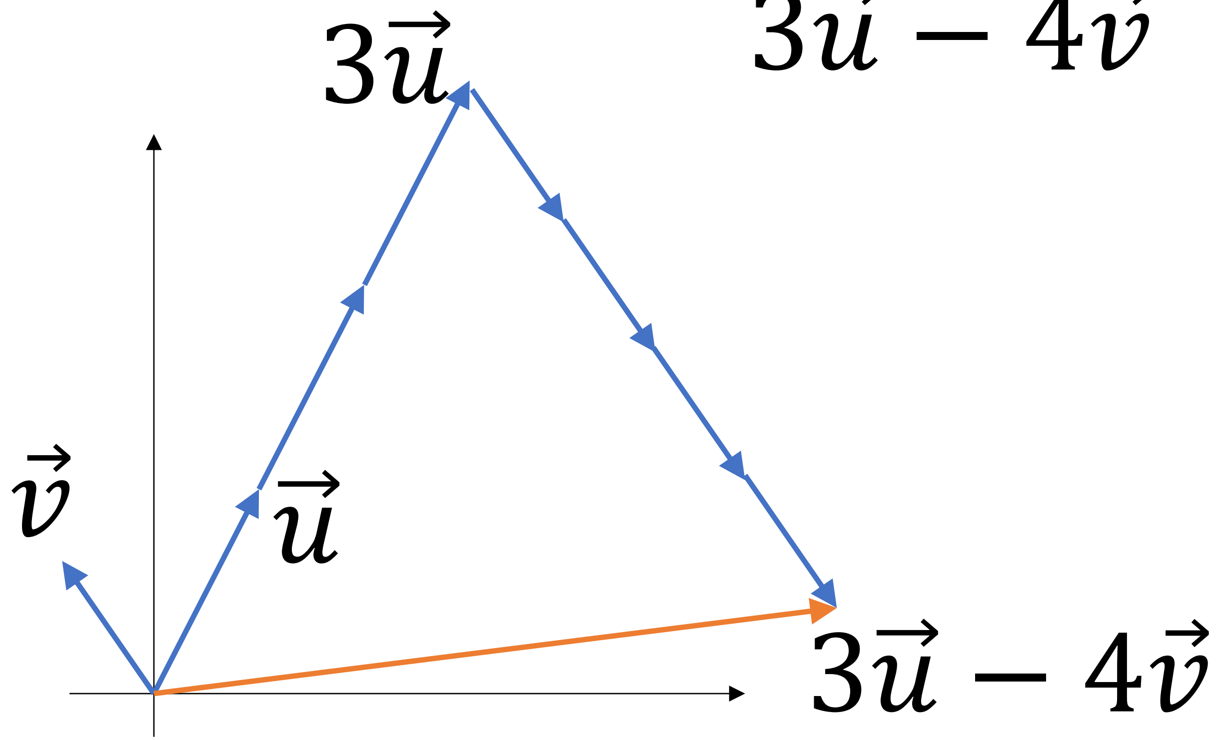
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3\\4+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

Ejemplo: dibujar

$$3\vec{u} - 4\vec{v}$$



Ejercicio: dibujar

$$-2\vec{u} + 5\vec{v}$$

Operaciones entre vectores

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

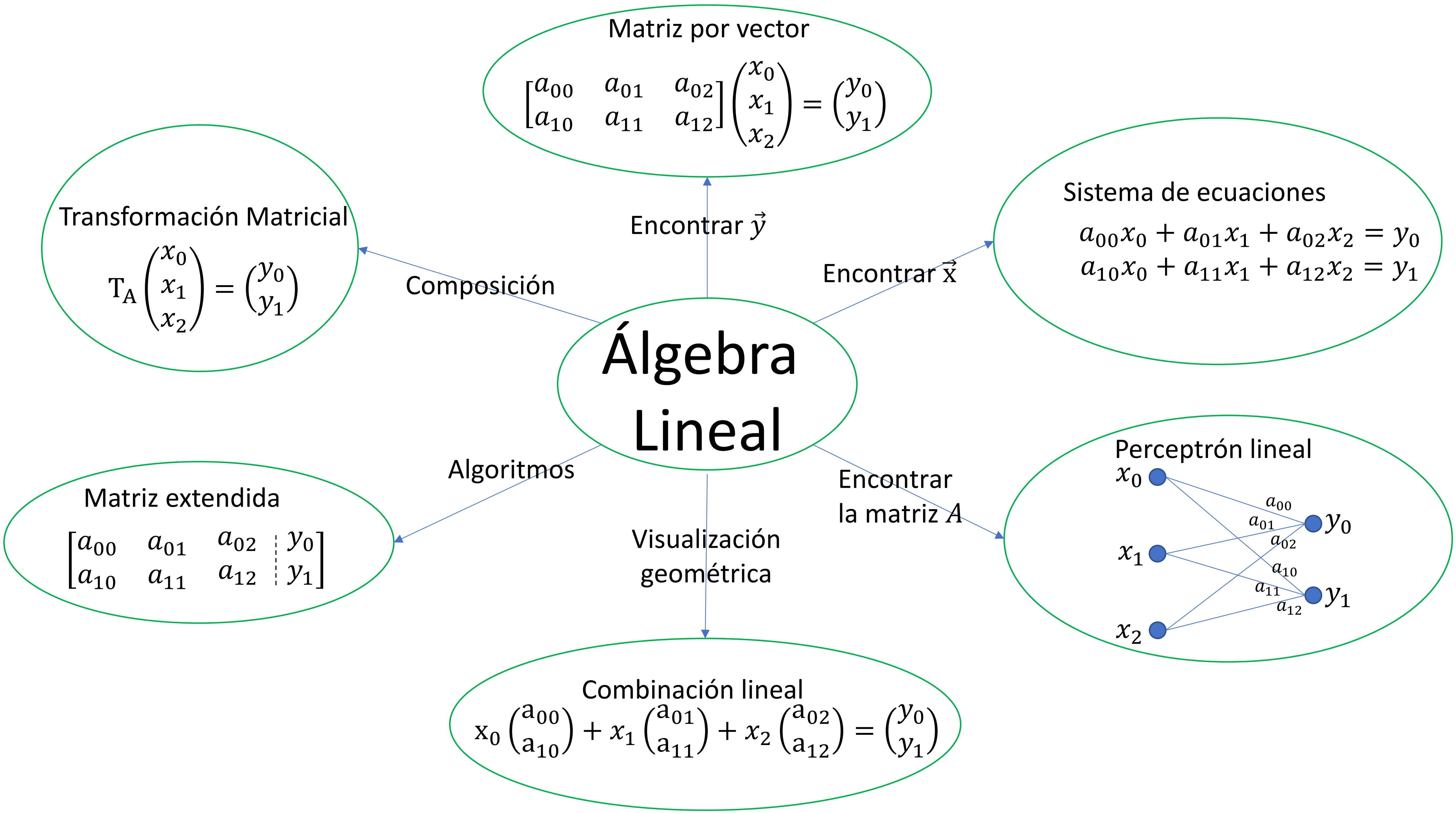
Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

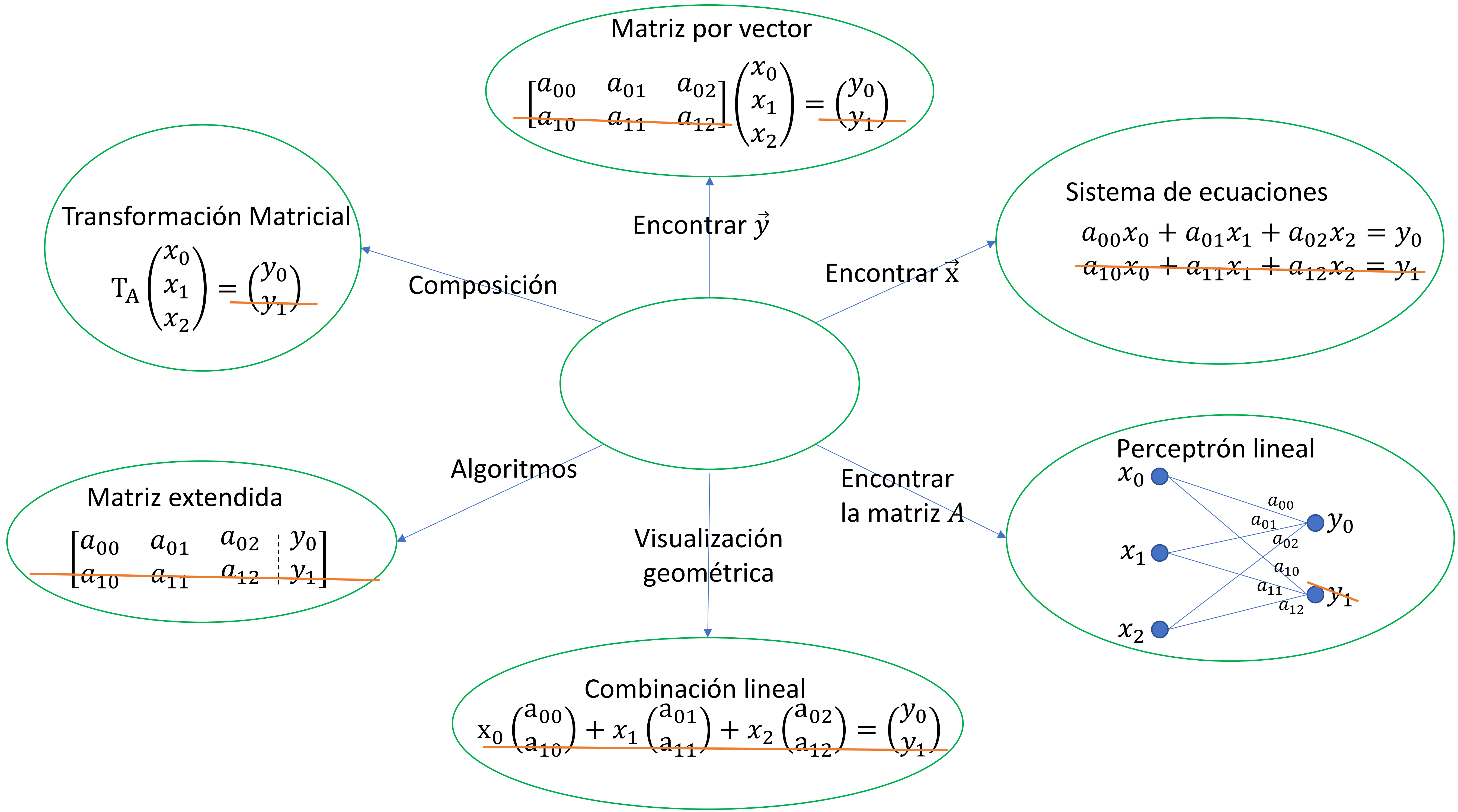
Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

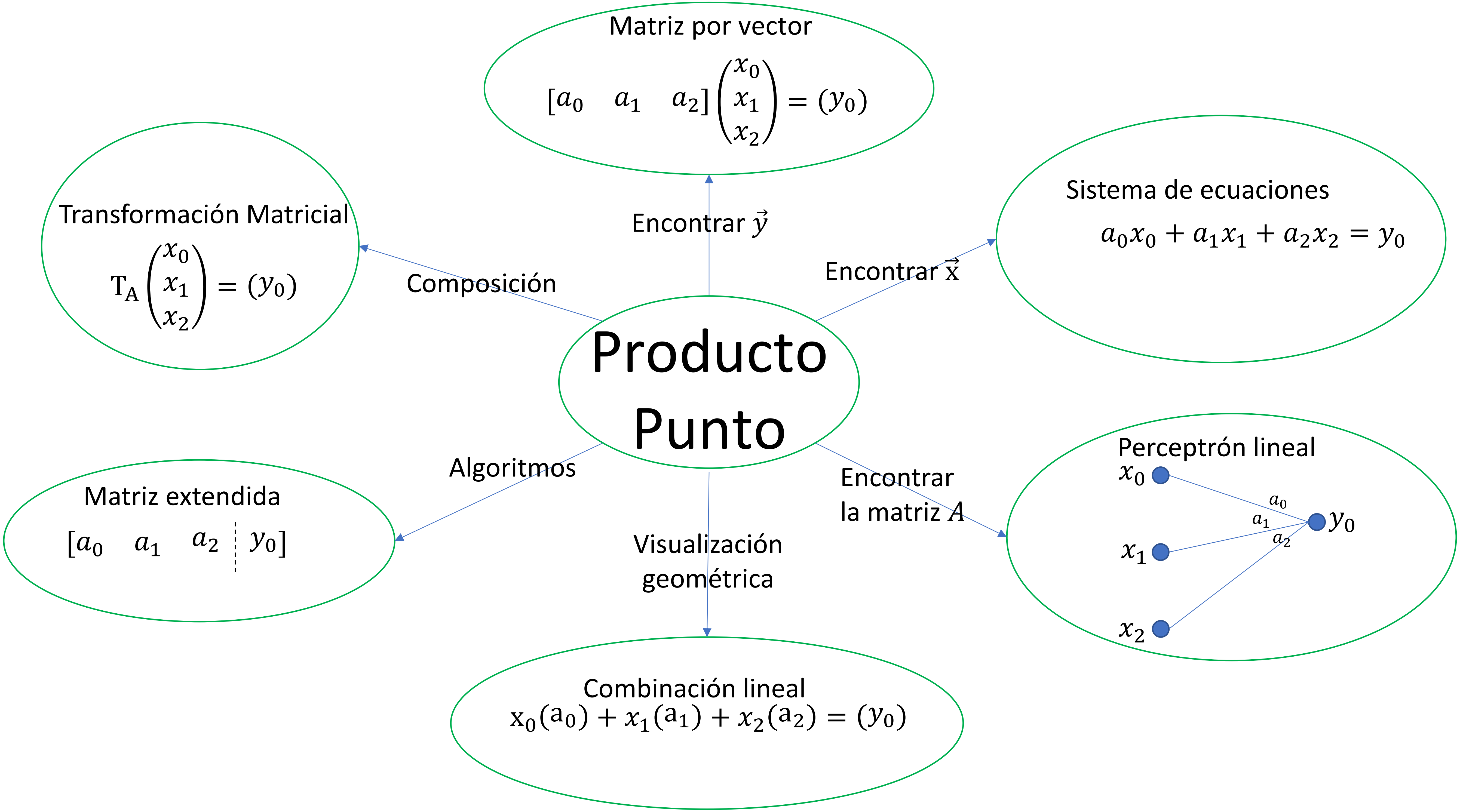
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3\\4+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

Producto punto



Álgebra Lineal
Matriz por vector
$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$
Encontrar $\vec{y}$
Transformación Matricial
$\mathrm{T_A} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$
Composición
Sistema de ecuaciones
$a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 = y_0$
$a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1$
Encontrar $\vec{\mathrm{x}}$
Algoritmos
Matriz extendida
$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{00} & a_{01} & a_{02} & y_0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & y_1 \end{array}\right]$
Visualización geométrica
Combinación lineal
$\mathrm{x}_0 \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{00} \\ \mathrm{a}_{10} \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{01} \\ \mathrm{a}_{11} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{02} \\ \mathrm{a}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$
Encontrar la matriz A
Perceptrón lineal
x_0
x_1
x_2
y_0
y_1
a_{00}
a_{01}
a_{02}
a_{10}
a_{11}
a_{12}


Matriz por vector
$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \cancel{a_{10}} & \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \cancel{y_1} \end{pmatrix}$
Transformación Matricial
$T_A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \cancel{y_1} \end{pmatrix}$
Sistema de ecuaciones
$a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 = y_0$
$\cancel{a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1}$
Encontrar $\vec{y}$
Composición
Encontrar $\vec{x}$
Algoritmos
Encontrar la matriz A
Visualización geométrica
Matriz extendida
$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{00} & a_{01} & a_{02} & y_0 \\ \cancel{a_{10}} & \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{y_1} \end{array}\right]$
Perceptrón lineal
x_0
x_1
x_2
y_0
$\cancel{y_1}$
a_{00}
a_{01}
a_{02}
a_{10}
a_{11}
a_{12}
Combinación lineal
$x_0 \begin{pmatrix} a_{00} \\ \cancel{a_{10}} \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} a_{01} \\ \cancel{a_{11}} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{02} \\ \cancel{a_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \cancel{y_1} \end{pmatrix}$



Producto Punto
Matriz por vector
$[a_0 \quad a_1 \quad a_2]\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (y_0)$
Encontrar $\vec{y}$
Transformación Matricial
$\mathrm{T_A}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (y_0)$
Composición
Sistema de ecuaciones
$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = y_0$
Encontrar $\vec{\mathrm{x}}$
Algoritmos
Matriz extendida
$[a_0 \quad a_1 \quad a_2 \mid y_0]$
Visualización geométrica
Combinación lineal
$\mathrm{x}_0(\mathrm{a}_0) + x_1(\mathrm{a}_1) + x_2(\mathrm{a}_2) = (y_0)$
Encontrar la matriz A
Perceptrón lineal
x_0
x_1
x_2
a_0
a_1
a_2
y_0

Definición de producto punto

Definición:

El <u>producto punto</u> o <u>producto escalar</u> entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ da el escalar dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = (4)(2) + (7)(-3) = -13$$

Operaciones entre vectores

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Producto Punto de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = 2(3) + 4(-1) = 2$$

Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3\\4+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

Producto Punto como operación matricial

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}^T \vec{v} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]^T_{1\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

Propiedades del producto punto

Teorema:

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $A \in M_{n\times n}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Propiedades del producto punto

Teorema:

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $A \in M_{n\times n}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

$$A(B + C) = AB + AC$$

Propiedades del producto punto

Teorema:

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $A \in M_{n\times n}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ No existe ¿Por qué?

Propiedades del producto punto

Teorema:

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $A \in M_{n\times n}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (c\vec{u})$

$c(AB) = (cA)B = A(cB)$

Propiedades del producto punto

Teorema:

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $A \in M_{n\times n}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (c\vec{u})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0.$ Además, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ si y sólo si $\vec{u} = 0$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

Propiedades del producto punto

Teorema:

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $A \in M_{n\times n}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (c\vec{u})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$. Además, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ si y sólo si $\vec{u} = 0$
- $(A\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (A^T\vec{v})$

$$(A\vec{u}) \cdot \vec{v} = (A\vec{u})^T \vec{v}$$
$$= (\vec{u}^T A^T)\vec{v} = \vec{u}^T (A^T \vec{v})$$
$$= \vec{u} \cdot (A^T \vec{v})$$

Definición de magnitud

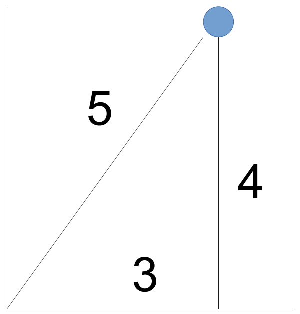
La norma, longitud o magnitud de un vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ es

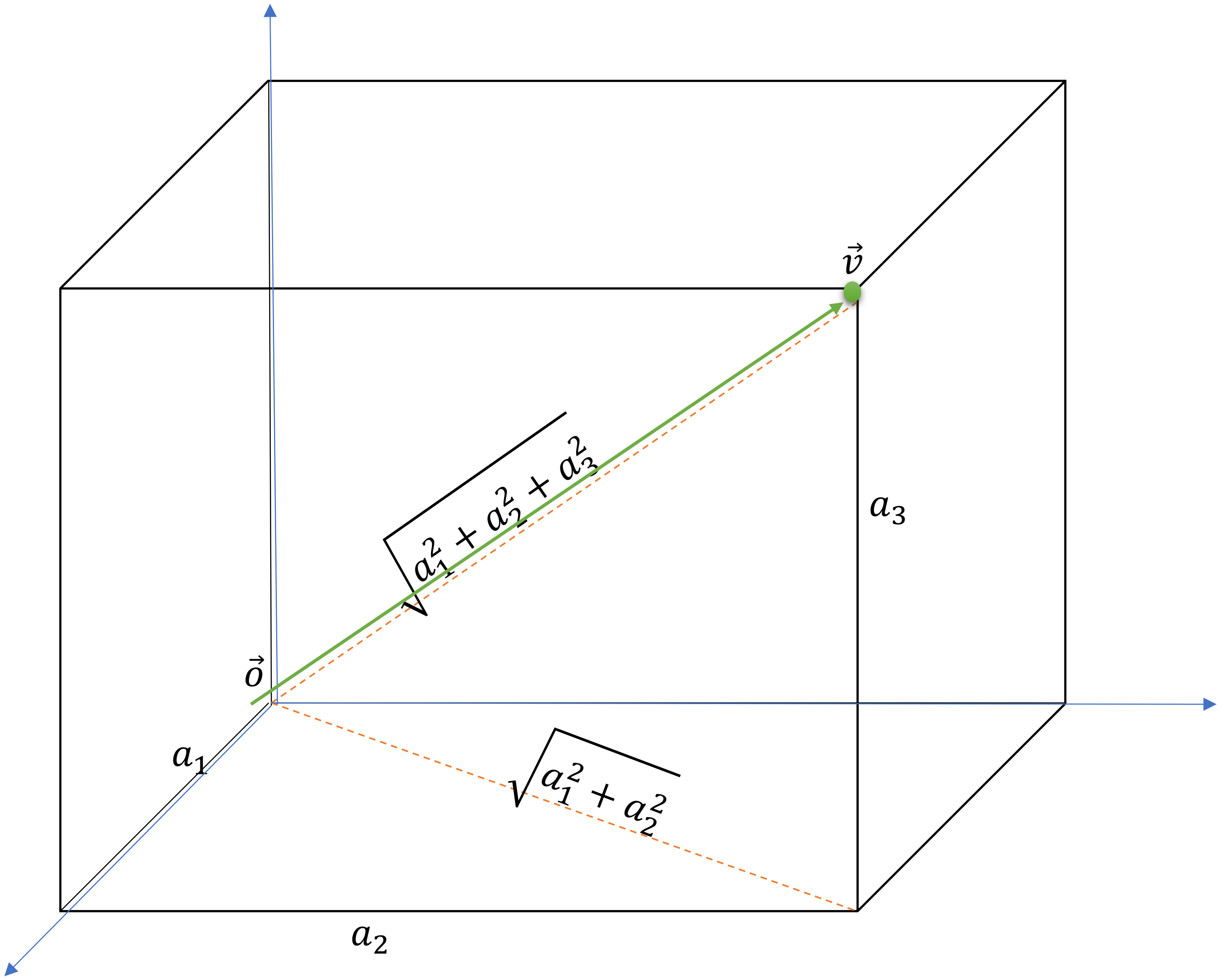
$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \text{que equivale a} \left\| \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Ejemplo:

$$\left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

corresponde con el teorema de pitágoras





$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Operaciones entre vectores

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3\\4+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

Producto Punto de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = 2(3) + 4(-1) = 2$$

Magnitud de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right| = \sqrt{\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

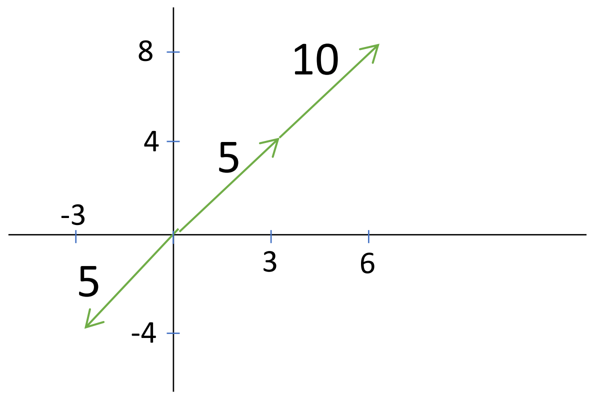
Propiedades de la magnitud

Teorema:

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$, se cumple que

- $|c\vec{u}| = abs(c)|\vec{u}|$

$$|c\vec{u}| = \left\| \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix} \right\|$$
$$= \sqrt{c^2a_1^2 + c^2a_2^2 + \cdots + c^2a_n^2}$$
$$= \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}$$
$$= \text{abs}(c)\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}$$



$$\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 5$$

$$\left|-1\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = abs(-1)5 = 5$$

$$\left|2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = abs(2)5 = 10$$

Propiedades de la magnitud

Teorema:

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$, se cumple que

- $|c\vec{u}| = abs(c)|\vec{u}|$
- $|\vec{u}| \geq 0$. Además, $|\vec{u}| = 0$ si y sólo si $\vec{u} = 0$

$$\sqrt{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Propiedades de la magnitud

Teorema:

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$, se cumple que

- $|c\vec{u}| = abs(c)|\vec{u}|$
- $|\vec{u}| \geq 0$. Además, $|\vec{u}| = 0$ si y sólo si $\vec{u} = 0$
- $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = \left(\sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})}\right)^2$$
$$= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$
$$= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v}$$
$$= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$|\vec{v}|^2 = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}^{\,2} = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$|\vec{w}|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$$

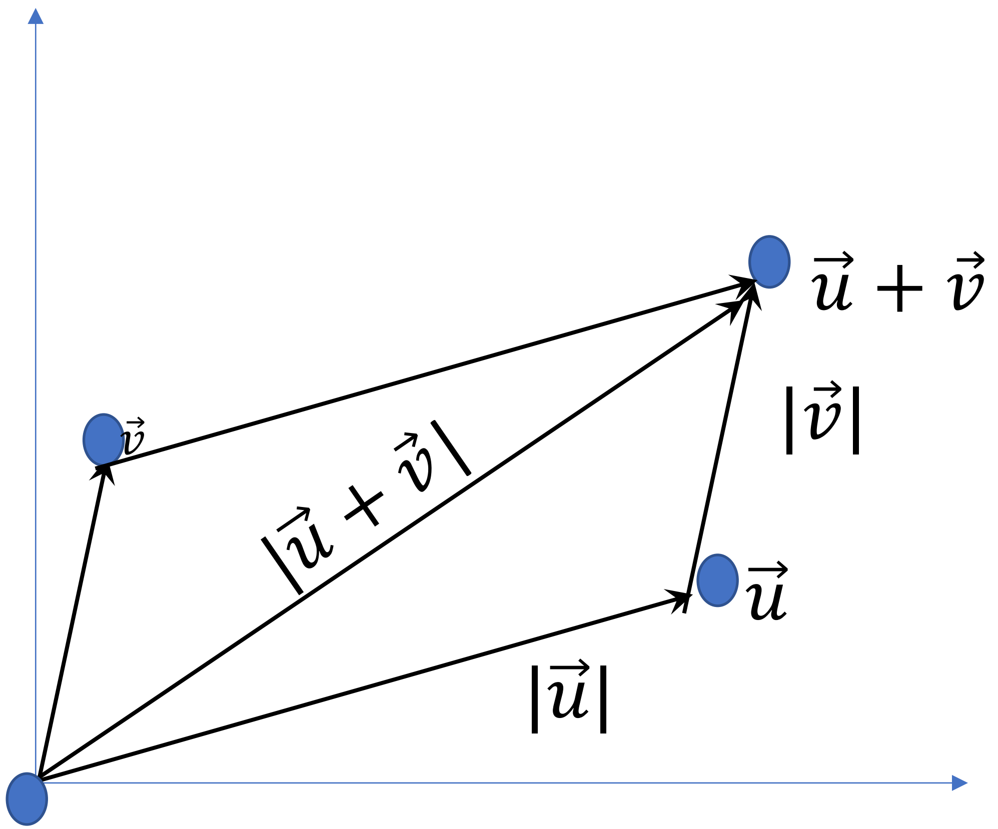
Propiedades de la magnitud

Teorema:

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$, se cumple que

- $|c\vec{u}| = abs(c)|\vec{u}|$
- $|\vec{u}| \geq 0$. Además, $|\vec{u}| = 0$ si y sólo si $\vec{u} = 0$
- $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$
-

Desigualdad triangular



Propiedades de la magnitud

Teorema:

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$, se cumple que

- $|c\vec{u}| = abs(c)|\vec{u}|$
- $|\vec{u}| \geq 0$. Además, $|\vec{u}| = 0$ si y sólo si $\vec{u} = 0$
- $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$
- $abs(\vec{u} \cdot \vec{v}) \leq |\vec{u}| \; |\vec{v}|$

Operaciones entre vectores

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3\\4+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

Producto Punto de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = 2(3) + 4(-1) = 2$$

Distancia entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

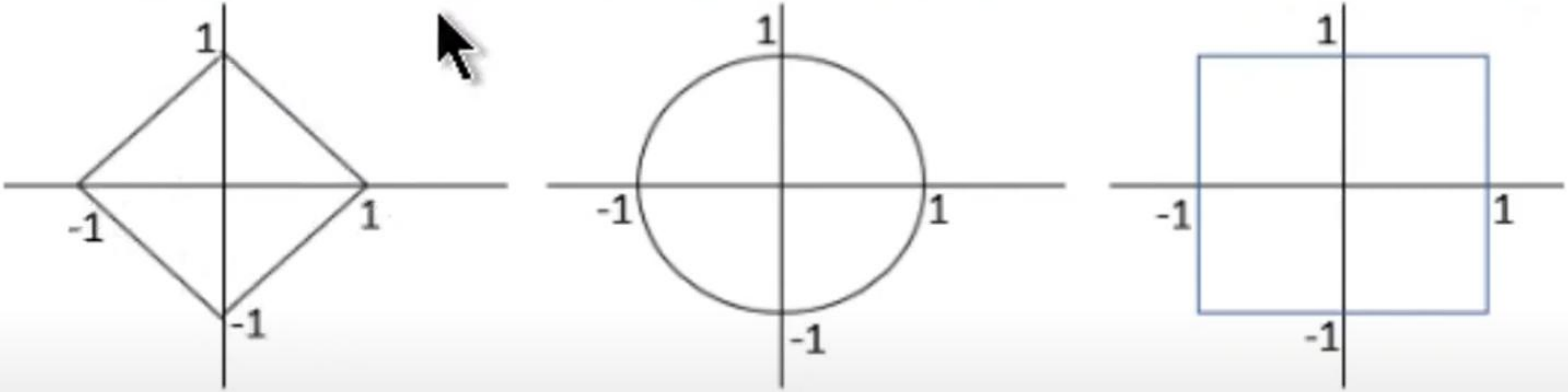
$$Dist(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} - \vec{v}| = Dist\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

Magnitud de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right| = \sqrt{\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Ejemplos de normas en $\mathbb{R}^2$

En la figura se muestran, para cada una de las normas, los puntos que tienen norma 1.



$$u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

$$|\, u \,|_1 = \mathrm{abs}(u_x) + \mathrm{abs}(u_y)$$

Taxista

$$|\, u \,|_2 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Euclidiana

$$|\, u \,|_\infty = \max(\mathrm{abs}(u_x), \mathrm{abs}(u_y))$$

Suprema

Distancia entre vectores

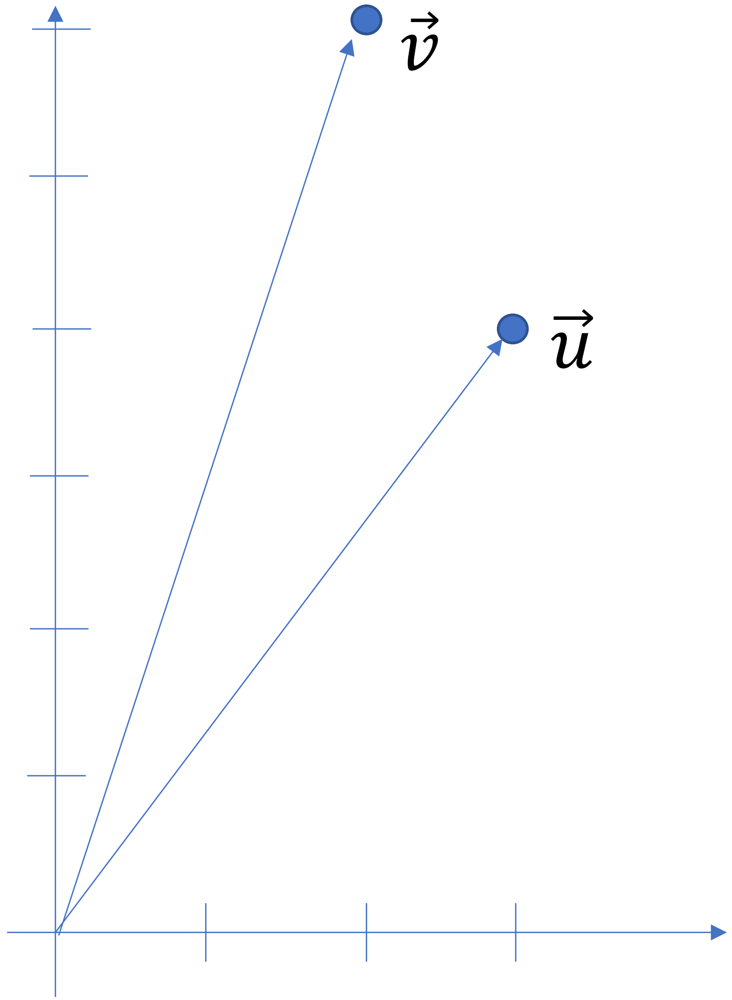
Definición:

La distancia entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est dada por

$$dist(\vec{u}, \vec{v}) := |\vec{u} - \vec{v}|$$

Ejemplo:

$$dist\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$



Distancia entre vectores

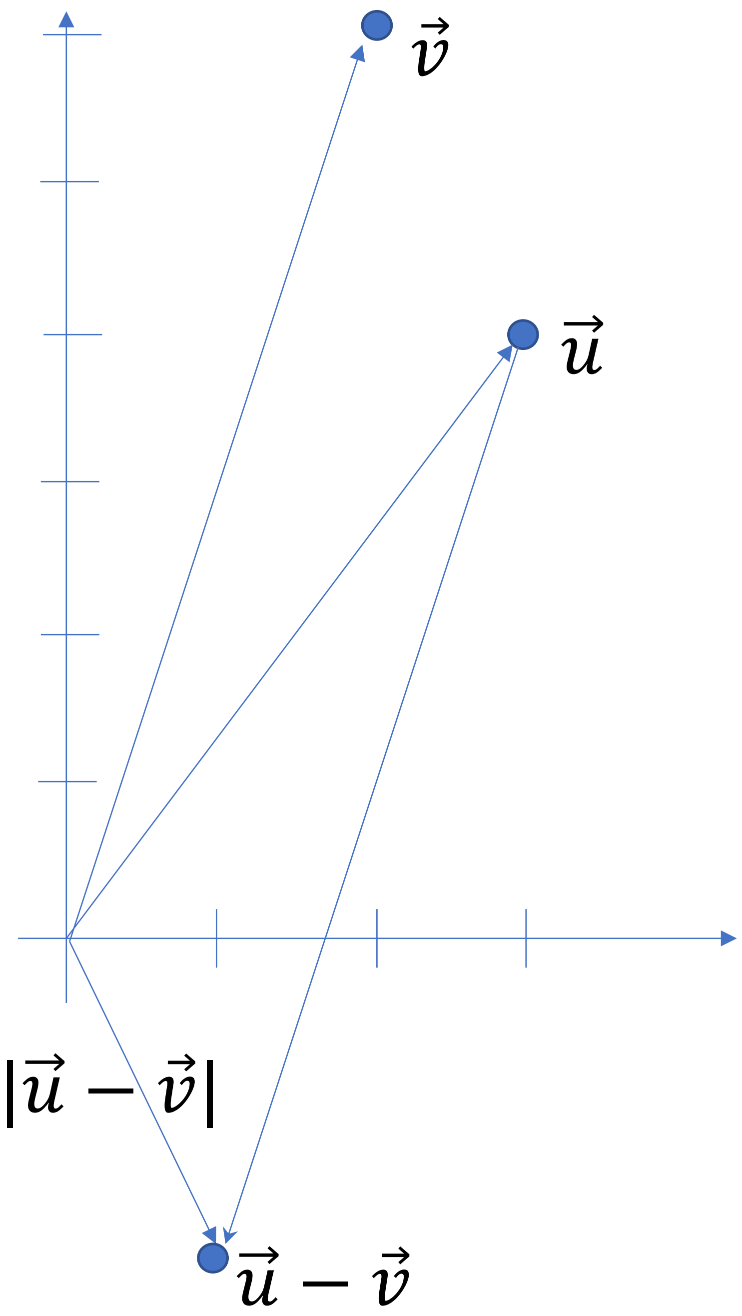
Definición:

La distancia entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est dada por

$$dist(\vec{u}, \vec{v}) := |\vec{u} - \vec{v}|$$

Ejemplo:

$$dist\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$



Distancia entre vectores

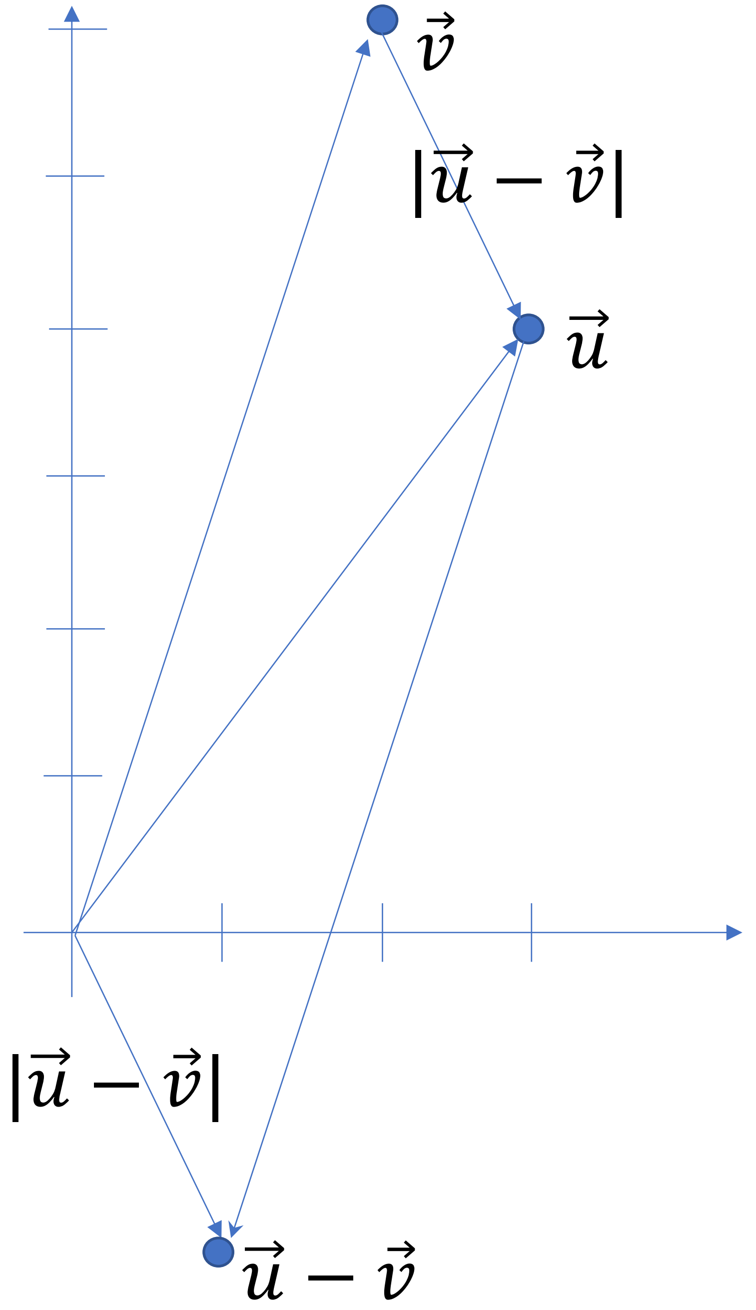
Definición:

La <u>distancia</u> entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est dada por

$$dist(\vec{u}, \vec{v}) := |\vec{u} - \vec{v}|$$

Ejemplo:

$$dist\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$



Distancia entre vectores

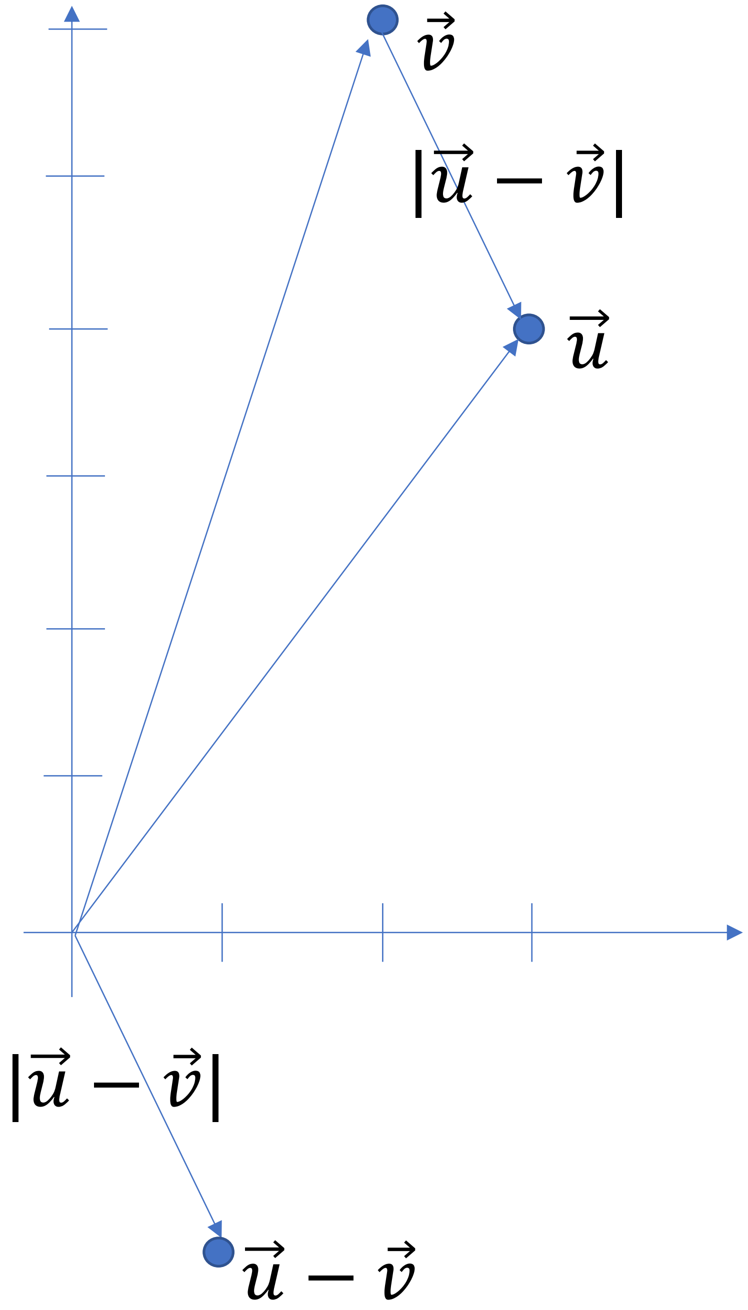
Definición:

La <u>distancia</u> entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est dada por

$$dist(\vec{u}, \vec{v}) := |\vec{u} - \vec{v}|$$

Ejemplo:

$$dist\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$



Propiedades de la distancia

Teorema:
Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

- $dist(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$
- $dist(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si y slo si $\vec{u} = \vec{v}$
- $dist(\vec{u}, \vec{v}) = dist(\vec{v}, \vec{u})$
- $dist(\vec{u}, \vec{v}) \leq dist(\vec{u}, \vec{w}) + dist(\vec{w}, \vec{v})$

Vector unitario

Definición:

Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, el <u>vector unitario</u> de $\vec{v}$ es $\hat{v}=\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$.

Ejemplo:

Si $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ entonces $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$

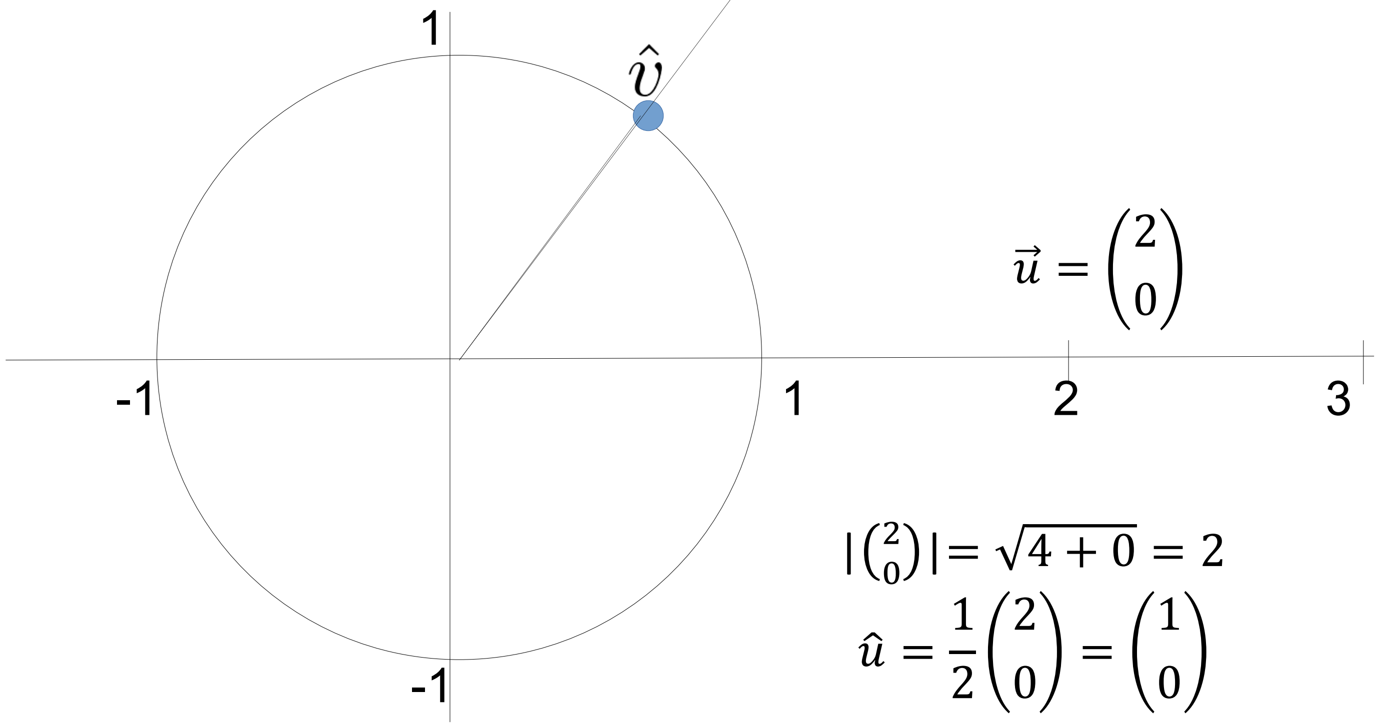
Teorema:

Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$, se cumple:

- $|\hat{v}| = 1$
- $\vec{v} = |\vec{v}|\hat{v}$

Nota:

Todos los vectores unitarios forman un crculo centrado en el origen de radio 1



$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+0} = 2$

$\hat{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Operaciones entre vectores

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3\\4+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

Producto Punto de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = 2(3) + 4(-1) = 2$$

Distancia entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$Dist(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} - \vec{v}| = Dist\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

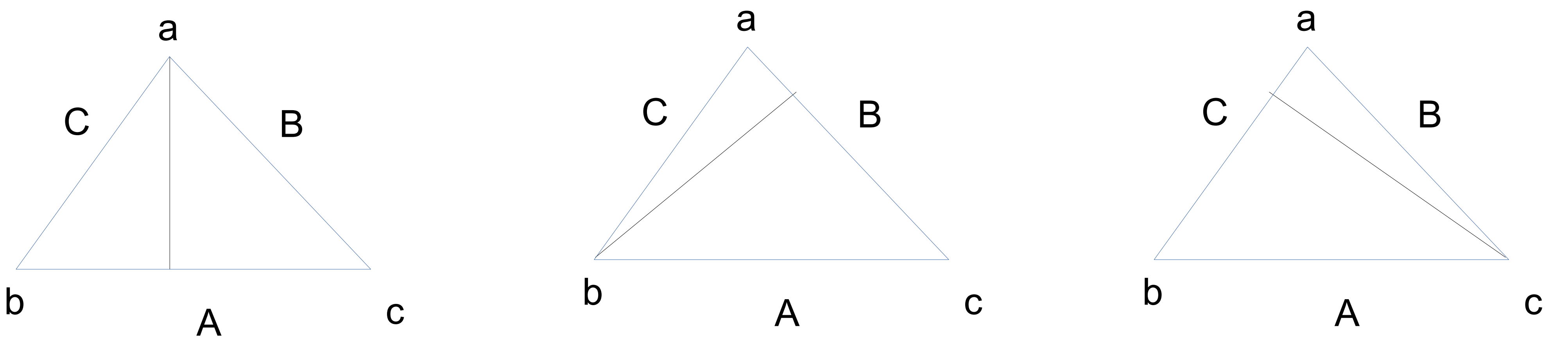
Magnitud de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right| = \sqrt{\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Vector unitario de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/2\sqrt{5}\\4/2\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

Teorema del coseno



$$C\cos(b) + B\cos(c) = A \quad C\cos(a) + A\cos(c) = B \quad A\cos(b) + B\cos(a) = C$$

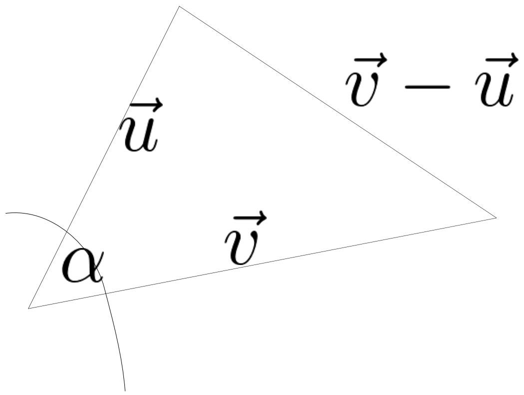
$$x_a = \cos(a) \quad x_b = \cos(b) \quad x_c = \cos(c)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & C & B & : & A \\ C & 0 & A & : & B \\ B & A & 0 & : & C \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C & 0 & A & : & B \\ 0 & C & B & : & A \\ B & A & 0 & : & C \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C & 0 & A & : & B \\ 0 & C & B & : & A \\ 0 & A & -\frac{AB}{C} & : & \frac{C^2-B^2}{C} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} C & 0 & A & : & B \\ 0 & C & B & : & A \\ 0 & 0 & -\frac{2AB}{C} & : & \frac{C^2-B^2-A^2}{C} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{-\frac{2AB}{C}x_a = \frac{C^2-B^2-A^2}{C}} \quad \boxed{-2ABcos(a) = C^2 - B^2 - A^2} \quad \boxed{A^2 - B^2 - 2ABcos(a) = C^2}$$

$$C^2 = A^2 - B^2 - 2ABcos(a)$$

(Otro) significado del producto punto



Ley del coseno

$$|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{u}|\cos(\alpha)$$

Propiedades de la magnitud

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Teorema:
Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \Re^2$ y α el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{u}$ entonces

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\alpha)$$

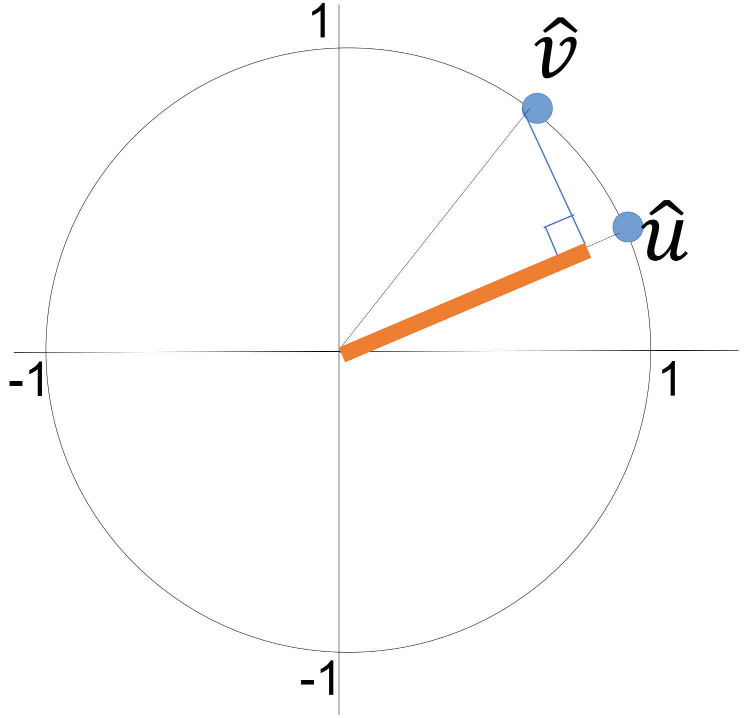
Interpretación gráfica del producto punto

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha)$$

Cuando son unitarios

$$|\hat{u}| = 1 \quad |\hat{v}| = 1$$

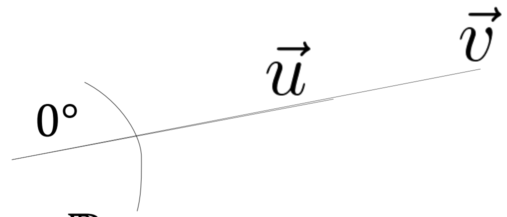
$$\hat{u} \cdot \hat{v} = \cos(\alpha)$$



Cuando son paralelos

$\alpha = 0 \qquad \cos(\alpha) = 1$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|$

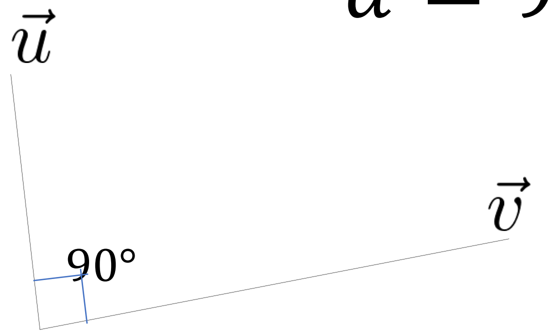


Es este caso $\vec{u} = c\vec{v}$ para algún $c \in \mathbb{R}$

Cuando son perpendiculares

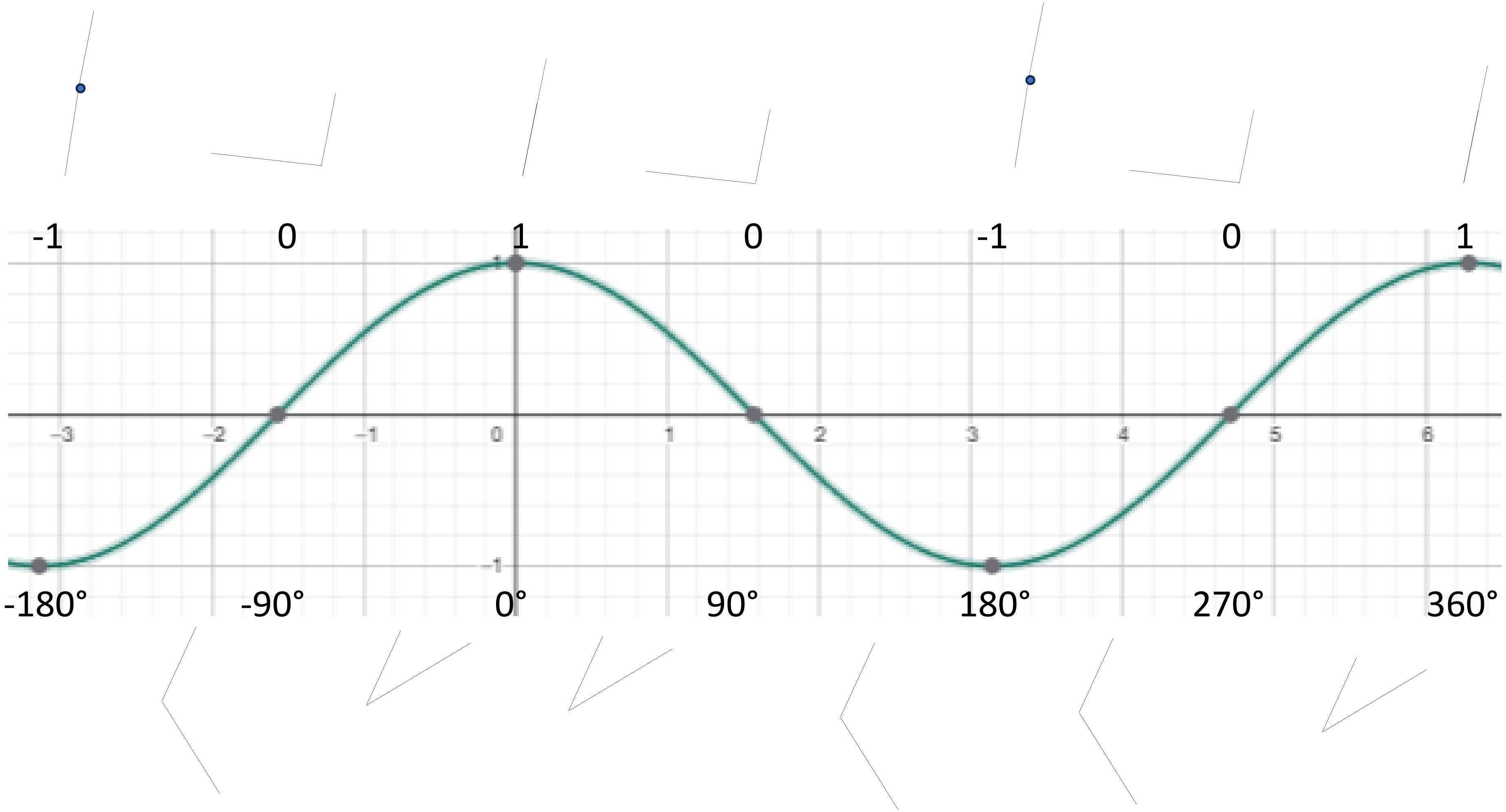
$\alpha = 90° \qquad \cos(\alpha) = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



Similitud Coseno entre dos vectores

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) := \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



Propiedades de la Similitud Coseno

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) := \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

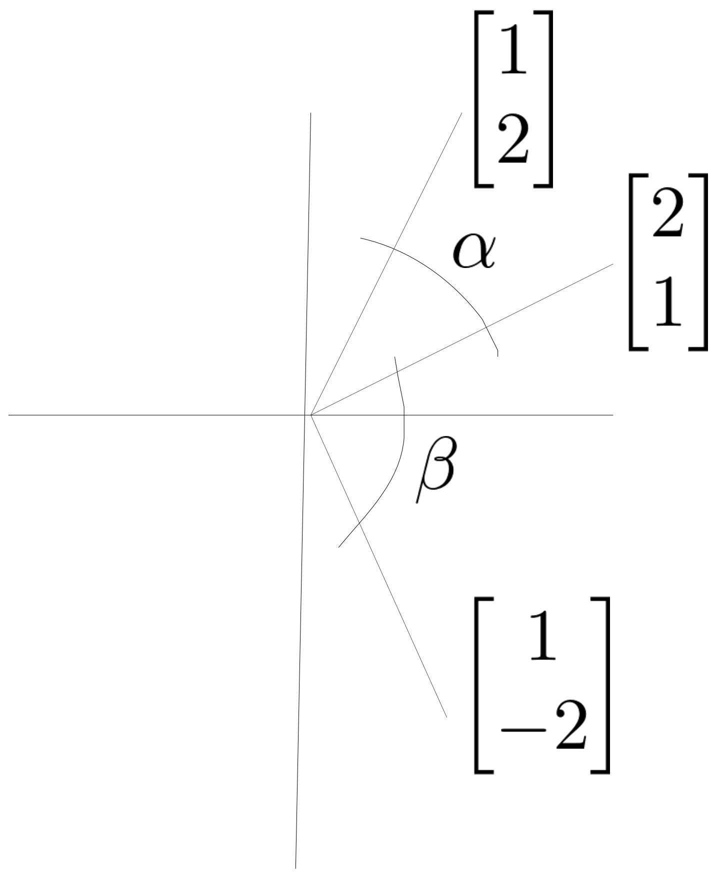
Teorema: Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n,\ a, b \in \mathbb{R}$

- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$ (Conmutativa)
- $-1 \leq \cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq 1$ (Acotada)
- $\cos(-\vec{u}, \vec{v}) = -\cos(\vec{u}, \vec{v})$ (Imparidad)
- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(a\vec{u}, b\vec{v})$ con $a > 0, b > 0$ (Invariante a escala positiva)
- $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(R(\vec{u}), R(\vec{v}))$ donde R es una rotación (Invariante a rotaciones)

- $\mathrm{dcos}(\vec{u}, \vec{v}) \coloneqq 1 - \cos(\vec{u}, \vec{v})$ casi es una distancia pero no siempre cumple la desigualdad triangular.

Similitud Coseno

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) := \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



Ejemplo:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}{\left|\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right| \cdot \left|\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right|}$$

$$= \frac{(1)(2)+(2)(1)}{\sqrt{(1)(1)+(2)(2)}\sqrt{(2)(2)+(1)(1)}} = \frac{4}{5}$$

Ejercicio:

Encuentre $\cos(\beta)$

Operaciones entre vectores

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3\\4+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

Producto Punto de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = 2(3) + 4(-1) = 2$$

Distancia entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$Dist(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} - \vec{v}| = Dist\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

Magnitud de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right| = \sqrt{\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Similitud Coseno entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$Cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = Cos\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}{\left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right| \left|\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right|} = \frac{2}{(2\sqrt{5})(\sqrt{10})}$$

Vector unitario de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/2\sqrt{5}\\4/2\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

Perpendicular y paralelo

Definición:

Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$ son <u>ortogonales</u> o <u>perpendiculares</u> si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Recordemos:

Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$ son <u>paralelos</u> si

$$\vec{u} = c\vec{v}, \text{ para algún } c \in \Re$$

Ejercicio:

Determine cuales vectores son paralelos u ortogonales.

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$

Luego grafique los vectores y compare los resultados obtenidos.

Operaciones entre vectores

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por** vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Producto Punto de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = 2(3) + 4(-1) = 2$$

Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3\\4+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

Magnitud de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right| = \sqrt{\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Distancia entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$Dist(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} - \vec{v}| = Dist\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

Vector unitario de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/2\sqrt{5}\\4/2\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

Similitud Coseno entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

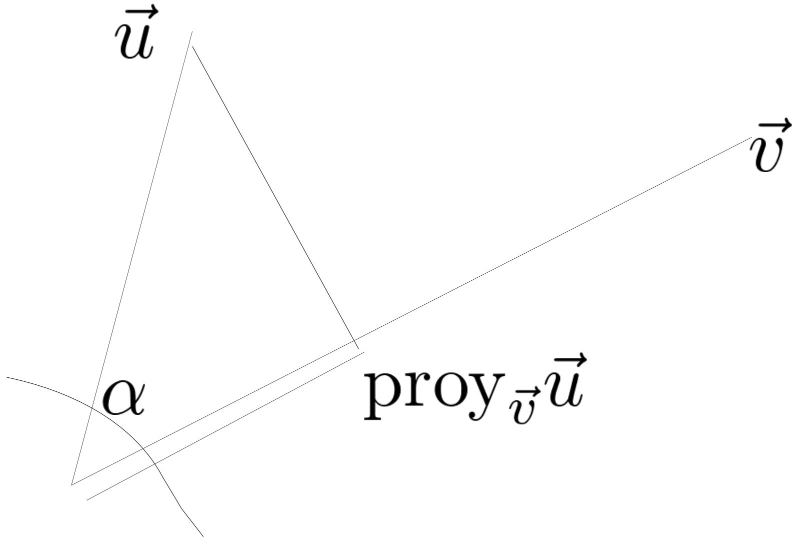
$$Cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = Cos\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}{\left|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right| \left|\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right|} = \frac{2}{(2\sqrt{5})(\sqrt{10})}$$

Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ son **ortogonales** si $cos(\vec{u}, \vec{v})$ =0,

i.e. los vectores son perpendiculares

$$Ort(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} Verdadero\ si\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ Falso\ si\ \vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0 \end{cases} \qquad Ort\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = Falso$$

Proyección



Definición:
Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$ y
α el ángulo entre $\vec{u}, \vec{v}$.

La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ está dada por:

$$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = |\vec{u}| \cos(\alpha)\hat{v}$$
$$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$$

Operaciones entre vectores

Escalar $c \in \mathbb{R}$ **por vector** $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$c\vec{u} = 5\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5(2)\\5(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\20\end{bmatrix}$$

Opuesto del vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$-\vec{u} = (-1)\vec{u} = -1\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1(2)\\-1(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

Suma de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+3\\4-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$$

Resta de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-3\\4+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$$

Producto Punto de dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = 2(3) + 4(-1) = 2$$

Distancia entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$Dist(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} - \vec{v}| = Dist\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \left\|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

Magnitud de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \left\|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Similitud Coseno entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$Cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = Cos\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right\| \; \left\|\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right\|} = \frac{2}{(2\sqrt{5})\,(\sqrt{10})}$$

Vector unitario de un vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/2\sqrt{5}\\4/2\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

La proyección de $\vec{u}$, sobre $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ está dada por:

$$Proy(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v}$$

$$Proy\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = \frac{\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/5\\-1/5\end{bmatrix}$$

Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ son **ortogonales** si $cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$,
i.e. los vectores son perpendiculares

$$Ort(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} Verdadero \; si \; \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ Falso \; si \; \vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0 \end{cases} \qquad Ort\left(\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\right) = Falso$$

Ejercicios

Ejercicios:\\
Sección 2.2 de Nakos