## Pregunta 1 - Álgebra Lineal

**Tema:** Curva de Bézier (2D)

Una curva de Bézier cuadrática se define usando tres puntos y se calcula para un parámetro $t \in [0, 1]$ mediante la fórmula:

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

Dado el conjunto de puntos:

- $P_0 = (1, 0)$
- $P_1 = (0, 1)$
- $P_2 = (1, 2)$

**Solicitado:**

1. Calcule el punto sobre la curva para $t = 0.3$.
2. Calcule el punto sobre la curva para $t = 0.7$.

Presente los resultados como coordenadas con al menos 3 cifras decimales.

## Pregunta 2 - Álgebra Lineal

**Tema:** Actualización Matricial en una Red Neuronal Lineal

Una red neuronal lineal con 3 entradas y 2 salidas (sin activación) utiliza la siguiente regla de actualización para ajustar la matriz de pesos $W$:

$$W_{i+1} = W_i + \eta X^T (Y_r - XW_i)$$

Donde:

- $W_i \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ es la matriz de pesos actual,
- $X \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ es el vector de entrada,
- $Y_r \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ es la salida esperada,
- $\eta \in \mathbb{R}$ es la tasa de aprendizaje (learning rate).

Considere los siguientes valores:

- $W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- $Y_r = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\eta = 0.1$

**Solicitado:**

- a) Calcule el producto $XW_0$
- b) Calcule el error $E = Y_r - XW_0$
- c) Calcule la transpuesta de $X$, es decir $X^T$
- d) Calcule el producto $X^T E$
- e) Calcule $\eta(X^T E)$
- f) Calcule la nueva matriz de pesos $W_1 = W_0 + \eta(X^T E)$

## Pregunta 3 - Álgebra Lineal

**Tema:** Pseudoinversa de una Matriz

Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

La pseudoinversa de Moore-Penrose de una matriz $A$ se puede calcular como:

$$A^{+} = (A^T A)^{-1} A^T$$

**Solicitado:**

a) Calcule la matriz transpuesta $A^T$
b) Calcule el producto $A^T A$
c) Halle la inversa de $A^T A$, si existe
d) Calcule la pseudoinversa $A^{+} = (A^T A)^{-1} A^T$

---

Ahora, considere que la matriz $A$ representa un conjunto de **entradas** y se tiene una matriz de **salidas**:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Calcule la matriz de pesos $W = A^{+T} B$

## Pregunta 4 - Álgebra Lineal

**Tema:** Ortogonalidad, Ángulo y Distancia entre Vectores

Dado el siguiente conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$:

- $u = (1, 2, -1)$
- $w = (0, 1, 1)$
- $v_1 = (2, -1, 0)$
- $v_2 = (-1, 2, 1)$
- $v_3 = (1, 1, 1)$

**Solicitado:**

a) Encuentre un vector $x \in \mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a **ambos vectores** $u$ y $w$.
*(Nota: Puede usar el producto cruzado para hallar dicho vector.)*

b) Determine cuál de los vectores $v_1, v_2, v_3$ forma el **menor ángulo** con el vector $u$.
*(Sugerencia: Compare los cosenos del ángulo usando el producto punto.)*

c) Determine cuál de los vectores $v_1, v_2, v_3$ está a la **menor distancia** del vector $w$.
*(Sugerencia: Calcule las normas de las diferencias $||v_i - w||$ para cada caso.)*

**Instrucciones:** Justifique cada respuesta con los cálculos necesarios: productos punto, normas, diferencias o ángulos. Redondee valores numéricos a tres cifras decimales cuando sea necesario.