Volumen del paralelepípedo

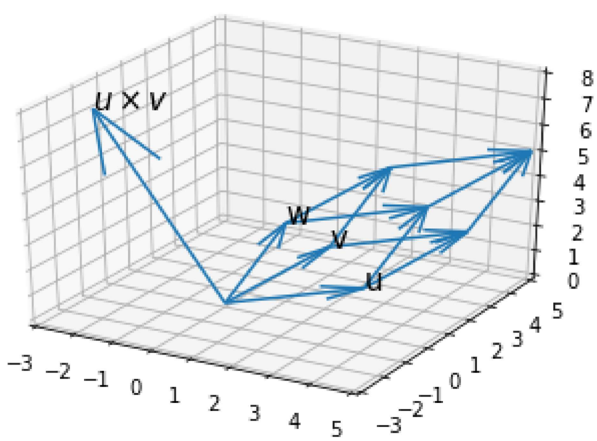
In [1]:
```
from ubogsla18p import *
```

In [2]:
```
A=mat('4 5 ; 4 3')
zeros(*A.shape)
```

Out[2]:
```
Matrix([
[0, 0],
[0, 0]])
```

In [3]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D


u=Matrix([3,1,1])
v=Matrix([1,3,1])
w=Matrix([1,1,3])
o=Matrix([0,0,0])
ax=ejes3d(-3,5,-3,5,0,8)
flecha3d(ax,
         juntar(u,v,u,v,u,v,u,v,w,w,w,w),
         juntar(o,o,v,u,o+w,o+w,v+w,u+w,o,v,u,u+v),
         nombres=['u','v','','','','','','','w','','',''])
flecha3d(ax,u.cross(v),nombres=r'$u \times v$')
plt.show()
```



Con el fin de generalizar el procedimiento para más de tres dimensiones, vamos a intentar repetir en tres dimensiones el procedimiento realizado con dos dimensiones.

Para hallar el área del paralelogramo, lo primero que se hizo fue obtener un vector perpendicular y con la magnitud de la base. En el caso del paralelepípedo debemos encontrar un vector n perpendicular a la base del paralelepípedo y con la magnitud del área de la base, el cual corresponde al producto cruz $n = u \times v$.

El volumen del paralelepípedo está dado por

$$\text{Volumen} = Bh$$

Donde

- B es el área de la base, $B = |u \times v|$.
- h es la altura del paralelepípedo, que corresponde a la proyección de w sobre $u \times v$, es decir $h = |w|\cos(\alpha)$. Donde α es ángulo entre w y $u \times v$.

$$\text{Volumen} = Bh = |u \times v||w|\cos(\alpha) = (u \times v) \cdot w$$

Por lo tanto si el determinante de la matriz formada por los vectores $u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ es el volumen del paralelepípedo tenemos que

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} w_0 - \begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} w_1 + \begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} w_2 \qquad \text{(desarr} \\
&= (u_1 v_2 - u_2 v_1) w_0 - (u_0 v_2 - u_2 v_0) w_1 + (u_0 v_1 - u_1 v_0) w_2 \\
&= u_1 v_2 w_0 - u_2 v_1 w_0 - u_0 v_2 w_1 + u_2 v_0 w_1 + u_0 v_1 w_2 - u_1 v_0 w_2
\end{aligned}$$

Observe que en el último resultado se presenta el determinante como la suma o resta de los todos productos que no repiten fila o columna. Para el determinante de 3×3 se puede utilizar el esquema de Sarrus.