In [*]:
```
from sympy import *
from ubogsla18p import *
```

Ejercicio 1

Demuestre que $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x - z \\ y \end{bmatrix}$ es una transformación lineal y encuentre la respectiva matriz.

Recorderis

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal *sii* para todo $v \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $T(v) = Av$. Donde A es la matriz de $m \times n$ dada por

$$A = T^*(I) = \begin{bmatrix} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) & \cdots & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

Solución

Primero encontraremos la matriz $A = T^*(I)$ y luego comprobaremos que $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x - z \\ y \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A &= T^*\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora probamos que $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x - z \\ y \end{bmatrix}$

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - z \\ y \end{bmatrix}$$

Lo cual prueba que T si es lineal.

Ejercicio 2

Demuestre que $T: P_1 \to P_3$ dada por
$$T(a_0 + a_1 x) = 3a_0 + (2a_0 + a_1)x + (a_0 + 2a_1)x^2 + 3a_1 x^3$$
es una transformación lineal y encuentre la matriz usando las respectivas bases estándar.

Recorderis 1

$B = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_{n-1} \end{bmatrix}$ es una base del espacio vectorial V de dimensión n *sii* la transformación asociada $S_B : \mathbb{R}^n \to V$ dada por
$$S_B\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{(n-1)} \end{bmatrix}\right) = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots + a_{(n-1)} v_{(n-1)}$$
es un isomorfismo.

Recorderis 2

La base estándar de P_1 es $E_{P1} = [1, x]$ y su isomorfismo es
$$S_{P1}\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}\right) = a_0(1) + a_1(x)$$

La base estándar de P_3 es $E_{P3} = [1, x, x^2, x^3]$ y su isomorfismo es
$$S_{P3}\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = a_0(1) + a_1(x) + a_2(x^2) + a_3(x^3)$$

Recorderis 3

Sean V y W espacios vectoriales, sean n y m sus respectivas dimensiones, sean B_V y B_W bases de cada espacio y sean $S_V : \mathbb{R}^n \to V$ y $S_W : \mathbb{R}^m \to W$ sus respectivos isomorfismos.

In [*]:
```
grafo({"V":(1,1,"V"),"W":(2,1,"W"),"V1":(1,2,"R^n"),"W1":(2,2,"R^m")},[("T","V","
    )
```

$T : V \to W$ es una transformación lineal *sii* para todo $v \in V$ se cumple que $S_W^{-1} \circ T \circ S_V(v) = Av$. Donde A es la matriz de $m \times n$ dada por
$$A = S_W^{*-1} \circ T^* \circ S_V^*(I)$$

In [*]:
```
grafo({"V":(1,1,"V"),"W":(2,1,"W"),"V1":(1,2,"R^n"),"W1":(2,2,"R^m")},[("T","V","
    ,[(1.5,1.5,"=")])
```

Solución

Recordemos que

$$T(a_0 + a_1 x) = 3a_0 + (2a_0 + a_1)x + (a_0 + 2a_1)x^2 + 3a_1 x^3$$

Primero encontraremos la matriz $A = S_{P3}^{*-1} \circ T^* \circ S_{P1}^*(I)$ y luego comprobaremos que $A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = S_{P3}^{-1} \circ T \circ S_{P1} \left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \right)$

In [*]:
```
grafo({"V":(1,1,"P_1"),"W":(2,1,"P_3"),"V1":(1,2,"R^2"),"W1":(2,2,"R^4")},
    [("T","V","W"),("S_P1","V1","V"),("S_P3","W1","W"),("T_A","V1","W1")]
   ,[(1.5,1.5,"=")])
```

$$\begin{aligned} A &= S_{P3}^{*-1} \circ T^* \circ S_{P1}^* \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= S_{P3}^{*-1} \circ T^* \left(\begin{bmatrix} S_{P1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) & S_{P1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \right) \\ &= S_{P3}^{*-1} \circ T^* ([1 + 0x, 0 + 1x]) \\ &= S_{P3}^{*-1} ([T(1 + 0x), T(0 + 1x)]) \\ &= S_{P3}^{*-1} \left([3 + 2x + 1x^2 + 0x^3, 0 + 1x + 2x^2 + 3x^3] \right) \\ &= [S_{P3}^{-1}(3 + 2x + 1x^2 + 0x^3), S_{P3}^{-1}(0 + 1x + 2x^2 + 3x^3)] \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora probamos que $A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = S_{P3}^{-1} \circ T \circ S_{P1} \left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \right)$

$$A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \stackrel{?}{?} S_{P3}^{-1} \circ T \circ S_{P1} \left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = S_{P3}^{-1} \circ T(a_0 + a_1 x)$$

$$\begin{bmatrix} 3a_0 \\ 2a_0 + a_1 \\ 1a_0 + 2a_1 \\ 3a_1 \end{bmatrix} = S_{P3}^{-1} \left(3a_0 + (2a_0 + a_1)x + (a_0 + 2a_1)x^2 + 3a_1 x^3 \right)$$

Lo cual prueba que T es una transformación lineal.

Ejercicio 3

Para la transformación de ejercicio 2 encuentre una base para el núcleo, una base para la imagen, la nulidad, el rango y diga si es inyectiva, sobreyectiva o es un isomorfismo.

Recorderis

Usando la notación del Ejercicio 2.

- B_N es base del núcleo de A *sii* $S_V^*(B_N)$ es base del núcleo de V
- B_I es base de la imagen de A *sii* $S_W^*(B_I)$ es base de la imagen de W

Solución

Primero encontraremos el núcleo de A es la solución del sistema homogéneo [A:0]

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & : & 0 \\ 2 & 1 & : & 0 \\ 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 3 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 2 & : & 0 \\ 0 & 3 & : & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Cómo el sistema de ecuaciones no tiene variables libres entonces la solución del sistema homogeneo es el vector cero y su base es el conjunto vació. Por lo tanto, la base del núcleo de A es el conjunto vació. Lo cual implica que la base del núcleo de T es también el conjunto vacío.

Como cada columna de A tiene un l-pivote entonces la base de la imagen de A es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Por lo tanto la base de la imagen de T es

$$\left\{ S_V \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), S_V \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \right\} = \{3 + 2x + x^2, x + x^2 + 3x^3\}$$

Ejercicio 4

Para la transformación $T : P_1 \to P_1$ dada por $T(a_0 + a_1 x) = (a_0 + 2a1) + (2a_0 + a_1)x$ encuentre una base para P_1 donde la matriz de la transformación sea diagonal.

Recorderis

Usando la notación del Ejercicio 2

B es una base de $\mathbb{R}^n$ *sii* $S_V^*(B)$ es una base de V