In [1]:
```
from sympy import * # Librería para operaciones simbólicas
from ubogsla18p import * # Librería personal
```

In [2]:
```
b=Matrix(symbols('b0:3'))
imprimir('b=',b)
```

Out[2]:

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

In [3]:
```
# asignando matrices de variables
A=Matrix(symbols('a:4:3')).reshape(4,3)
imprimir('A=',A)
```

Out[3]:

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Transformaciones

Una **transformación** (**función**) T de un conjunto A en un conjunto B, representada por $T : A \to B$ asocia cada elemento a de A en un elemento b único de B llamado **imagen** de a bajo T.

- A se llama el dominio de T.
- B se llama el codominio de T.
- La **imagen** de T es el conjunto de todas las imágenes de los elementos de A, $Im(T) = \{T(a) \mid a \in A\}$.

Transformación matricial

[Nakos, Sec 5.1]

Una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

donde A es una matriz de tamaño $m \times n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, se conoce como una **transformación matricial**. T aveces la denoto T_A o A aveces la denoto A_T.

In [4]:
```
def T(x):
    return A*x

imprimir('T(',b,')=',T(b))
```

Out[4]:

$$T(\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} a_{00}b_0 + a_{01}b_1 + a_{02}b_2 \\ a_{10}b_0 + a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{20}b_0 + a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \\ a_{30}b_0 + a_{31}b_1 + a_{32}b_2 \end{bmatrix}$$

In [5]:
```
c=Matrix([1, 2, 3])
imprimir('T(',c,')=',T(c))
```

Out[5]:

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} a_{00} + 2a_{01} + 3a_{02} \\ a_{10} + 2a_{11} + 3a_{12} \\ a_{20} + 2a_{21} + 3a_{22} \\ a_{30} + 2a_{31} + 3a_{32} \end{bmatrix}$$

Con las columnas de la identidad $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se pueden recuperar las columnas de A.

In [6]:
```
imprimir('I_3=',eye(3))
```

Out[6]:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In [7]:
```
c0=eye(3).col(0)
imprimir('T(',c0,')=',T(c0))
```

Out[7]:

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{bmatrix}$$

In [8]:
```
c1=eye(3).col(1)
imprimir('T(',c1,')=',T(c1))
```

Out[8]:

$$T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

In [9]:
```
c2=eye(3).col(2)
imprimir('T(',c2,')=',T(c2))
```

Out[9]:

$$T(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}a_{02}\\a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix}$$

Imagen de una matriz bajo transformaciones matriciales

Dada la transformación matricial $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ podemos definir la trantransformación T_A^* de tal forma que la imagen de una matriz $B = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_{k-1} \end{bmatrix}$ bajo la transformación matricial T_A^* es

$$\begin{aligned} T_A^*(B) &= \begin{bmatrix} T_A(v_0) & T_A(v_1) & \cdots & T_A(v_{k-1}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Av_0 & Av_1 & \cdots & Av_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= AB \end{aligned}$$

Teoremas

- Si T_A es una transformación matricial entonces
$$A = T_A^*(I)$$
$$A = \begin{bmatrix} T_A\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right) & T_A\left(\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right) & \cdots & T_A\left(\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$
- Sea una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
  - T es una transformación matricial *sii* $T^*(I)x = T(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Ejercicio:

- Encontrar la imagen la matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ bajo la transformación matricial $T_A\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}y/2\\2x\end{bmatrix}$.

Respuesta:

In [36]:
```
A=Matrix([[0, 0, 0.5,1,1,0],[0, 1,1.5,1,0,0]])

def T1(v):
    return Matrix([v[1]/2,2*v[0]])

imprimir('T^*(',A,')=',fun_cols_mat(T1,A))
```

Out[36]:

$$T^*(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0.75 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Encontrar la matriz A de la transformación $T_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y/2 \\ 2x \end{bmatrix}$

Respuesta:

In [37]:
```
I2=eye(2)
imprimir('T^*(',I2,')=',fun_cols_mat(T1,I2))
```

Out[37]:

$$T^*(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicos:

- Para las siguientes transformaciones encuentre la matriz A_T, si T es una transformación matricial, de lo contrario demuestre que no es una transformación matricial.
  - $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
  - $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5 \end{bmatrix}$
  - $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix}$
  - $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5 + x_2 \end{bmatrix}$

Respuesta del último ejercicio

In [39]:
```
def T2(v):
    return Matrix([v[0],5+v[1]])

A=fun_cols_mat(T2,eye(2))
imprimir('T^*(',eye(2),')=',A)
```

Out[39]:

$$T^*(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

In [44]:
```
x=Matrix(symbols('x0:2'))
imprimir(A,x,'=',A*x)
```

Out[44]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 5x_0 + 6x_1 \end{bmatrix}$$

Entonces $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 5 + x_2 \end{bmatrix}$ no es una transformación matricial

Algunas transformaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

In [12]:
```
v=Matrix(symbols('x y'))
imprimir('v=',v)
```

Out[12]:

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

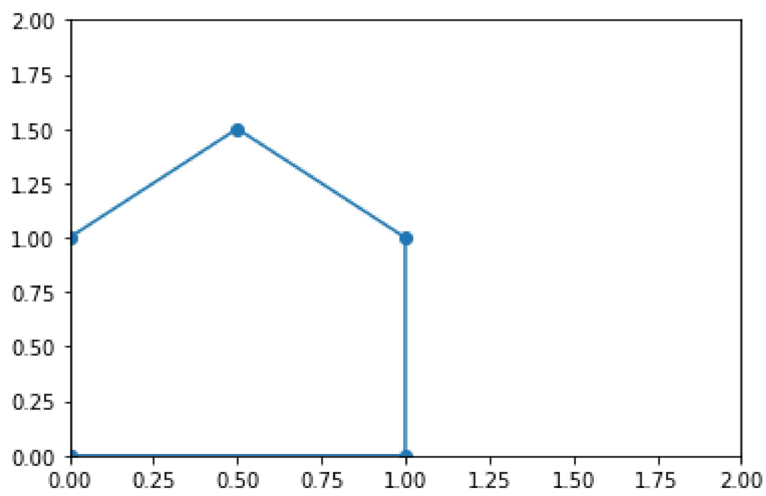
In [13]:
```
B=mat('0 0;0 1;0.5 1.5;1 1;1 0;0 0').T
imprimir('B=',B)
```

Out[13]:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In [14]:
```
plot_mat(B,0,0,2,2)
```

```
<matplotlib.figure.Figure at 0x93a6170>
```



Escalonar ejes

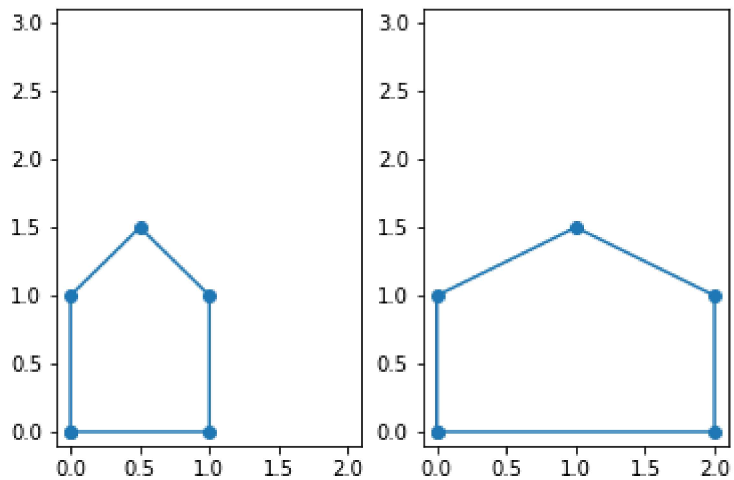
In [15]:
```
A1=mat("2 0;0 1")
B1=A1*B
imprimir(A1,v,'=',A1*v)
```

Out[15]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$$

In [16]:
```
plot_mat2(B,B1,-0.1,-0.1,2.1,3.1)
```

<matplotlib.figure.Figure at 0x937fa50>



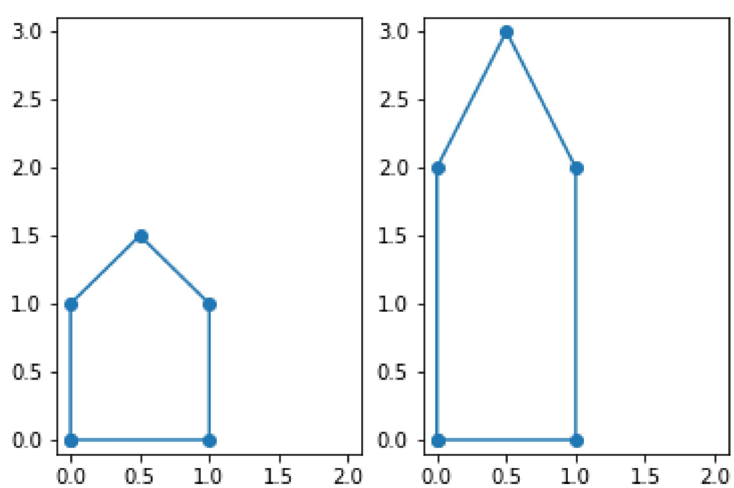
In [17]:
```
A2=mat("1 0;0 2")
B2=A2*B
imprimir(A2,v,'=',A2*v)
```

Out[17]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$$

In [18]:
```
plot_mat2(B,B2,-0.1,-0.1,2.1,3.1)
```

<matplotlib.figure.Figure at 0xa6658b0>



Intercambiar ejes

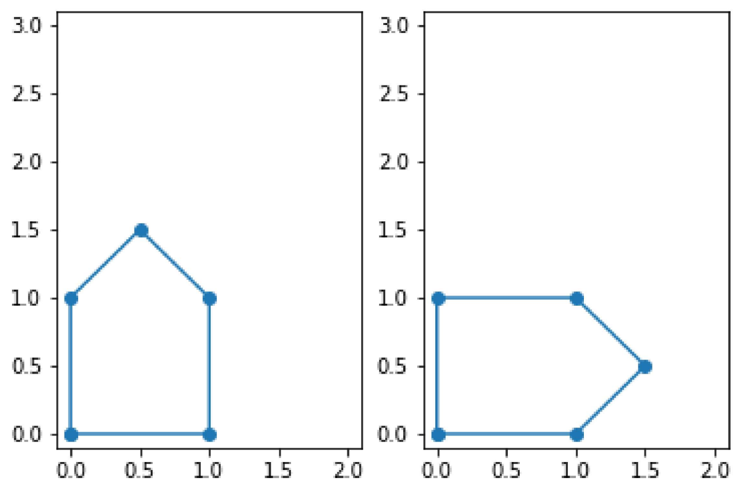
In [19]:
```
A3=mat("0 1;1 0")
B3=A3*B
imprimir(A3,v,'=',A3*v)
```

Out[19]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

In [20]:
```
plot_mat2(B,B3,-0.1,-0.1,2.1,3.1)
```

```
<matplotlib.figure.Figure at 0xa5f2ab0>
```



Deslizar figuras

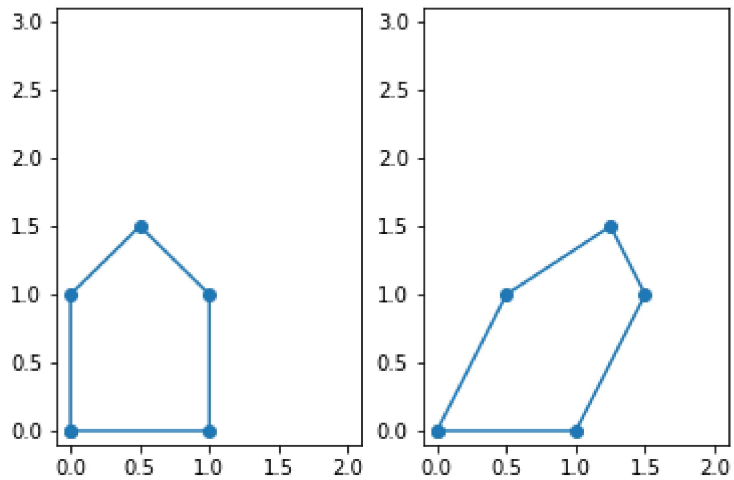
In [21]:
```
A4=mat("1 0.5;0 1")
B4=A4*B
imprimir(A4,v,'=',A4*v)
```

Out[21]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 0.5y \\ y \end{bmatrix}$$

In [22]:
```
plot_mat2(B,B4,-0.1,-0.1,2.1,3.1)
```

<matplotlib.figure.Figure at 0xa82cd70>



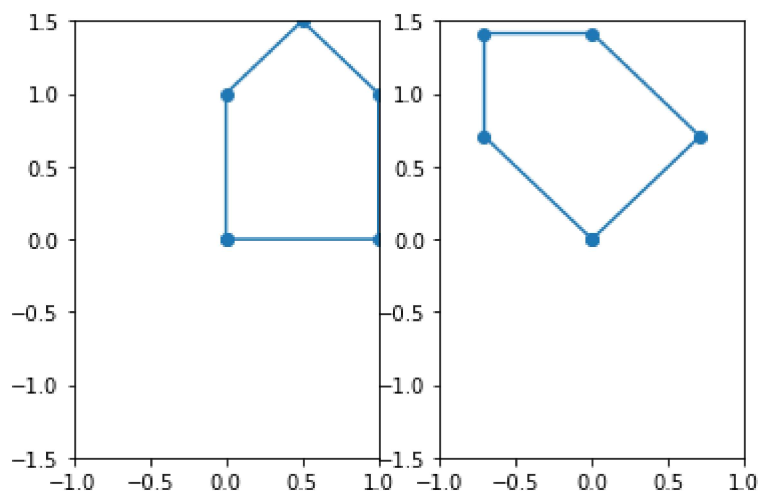
Rotar figuras

In [23]:
```
alpha=pi/4
A5=Matrix([[cos(alpha) , -sin(alpha)],[sin(alpha), cos(alpha)]])
B5=A5*B
imprimir(A5,v,'=',A5*v)
```

Out[23]:
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}y}{2} \\ \frac{\sqrt{2}x}{2} + \frac{\sqrt{2}y}{2} \end{bmatrix}$$

In [24]:
```
plot_mat2(B,B5,-1.0,-1.5,1.0,1.5)
```

<matplotlib.figure.Figure at 0xa602470>



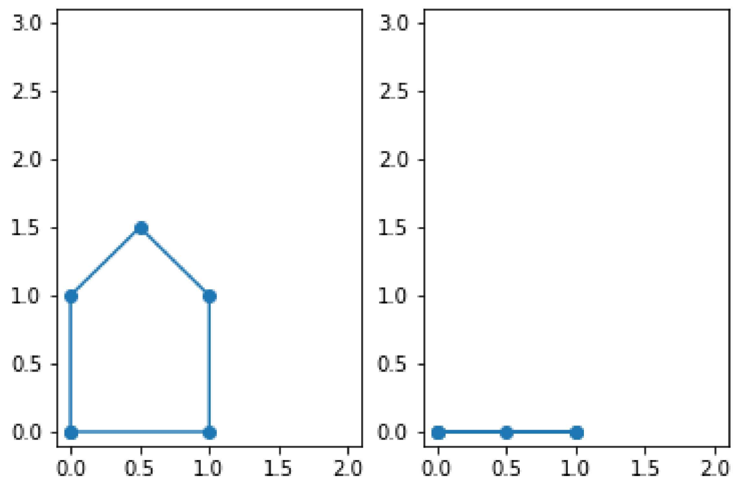
Proyectar sobre ejes

In [25]:
```
A6=mat("1 0;0 0")
B6=A6*B
imprimir(A6,v,'=',A6*v)
```

Out[25]:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

In [26]:
```
plot_mat2(B,B6,-0.1,-0.1,2.1,3.1)
```

```
<matplotlib.figure.Figure at 0xa602570>
```

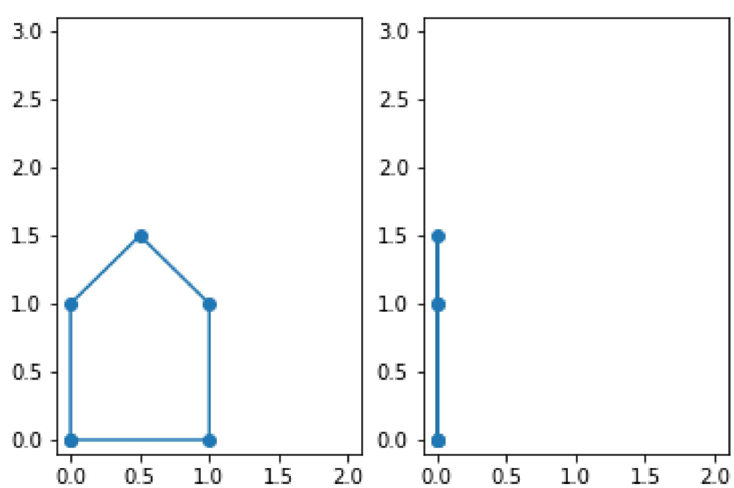


In [27]:
```
A7=mat("0 0;0 1")
B7=A7*B
imprimir(A7,v,'=',A7*v)
```

Out[27]:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

In [28]:
```
plot_mat2(B,B7,-0.1,-0.1,2.1,3.1)
```

```
<matplotlib.figure.Figure at 0xaa591d0>
```



Transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$

In [29]:
```
A8=mat("1 0;1 0;0 1")
B8=A8*B
imprimir(A8,v,'=',A8*v,', \ \ \ \ \ ',A8,B,'=',A8*B)
```

Out[29]:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\x\\y\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1.5 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1.5 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

In [30]:
```
#%matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d

fig=plt.figure()
ax=fig.gca(projection='3d')
ax.plot(B8.T.col(0),B8.T.col(1),B8.T.col(2))
plt.show()
```