Producto punto con ejemplos en 2D

Enviar preguntas a
gmunoz@udistrital.edu.co

Definición de producto punto

Definición:

El <u>producto punto</u> o <u>producto escalar</u> entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\Re^n$ da el escalar dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = (4)(2) + (7)(-3) = -13$$

Propiedades del producto punto

Teorema:

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$, $c \in \Re$ y $A \in M_{n\times n}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

- $c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (c\vec{u})$

- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$. Además, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ si y sólo si $\vec{u} = 0$

- $(A\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (A^T\vec{v})$

Definición de magnitud

Definición:

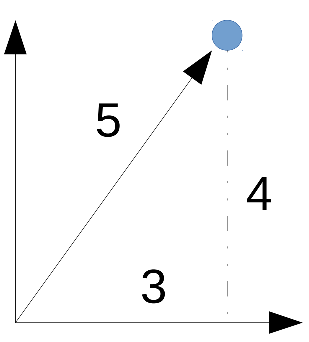
La <u>norma</u>, <u>longitud</u> o <u>magnitud</u> de un vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ es

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \text{que equivale a} \quad \left| \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Ejemplo:

$$\left| \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

corresponde con el teorema de pitágoras



Propiedades de la magnitud

Teorema:

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$ y $c \in \Re$, se cumple que

- $|c\vec{u}| = abs(c)|\vec{u}|$
- $|\vec{u}| \geq 0$. Además, $|\vec{u}| = 0$ si y sólo si $\vec{u} = 0$
- $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $abs(\vec{u} \cdot \vec{v}) \leq |\vec{u}| \ |\vec{v}|$
- $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

Vector unitario

Definición:

Dado $\vec{v} \in \Re^n$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, el <u>vector unitario</u> de $\vec{v}$ es $\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$.

Ejemplo:

Si $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ entonces $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$

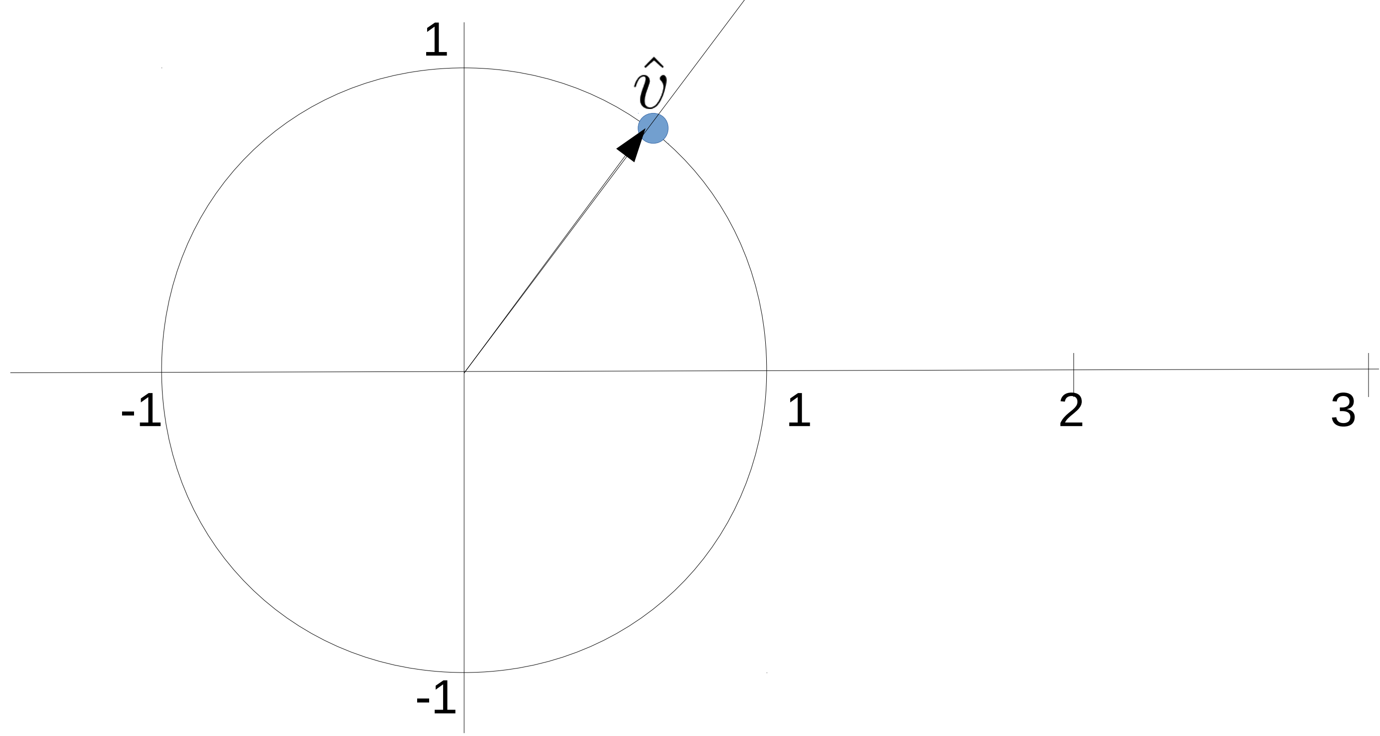
Teorema:

Si $\vec{v} \in \Re^n$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$, se cumple:

- $|\hat{v}| = 1$
- $\vec{v} = |\vec{v}|\hat{v}$

Nota:

Todos los vectores unitarios forman un crculo centrado en el origen de radio 1



Distancia entre vectores

Definición:

La <u>distancia</u> entre dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$ est dada por

$$dist(\vec{u}, \vec{v}) := |\vec{u} - \vec{v}|$$

Ejemplo:

$$dist\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\right) = \left|\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

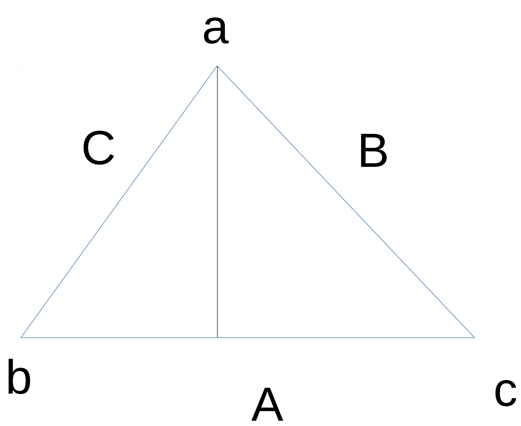
Propiedades de la distancia

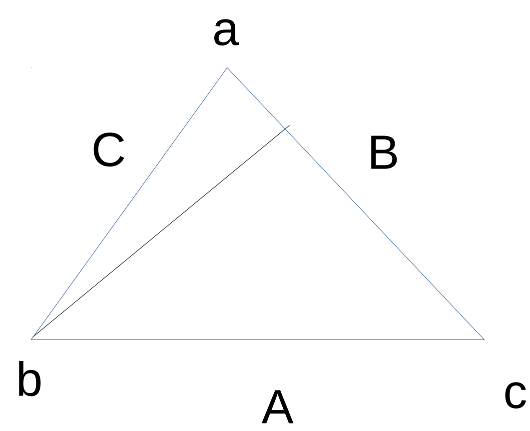
Teorema:

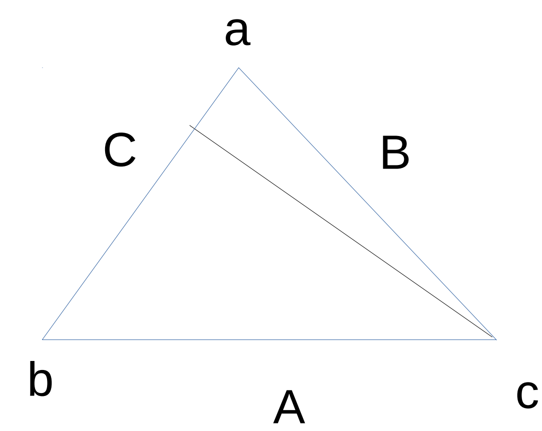
Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \Re^n$

- $dist(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$
- $dist(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ si y slo si } \vec{u} = \vec{v}$
- $dist(\vec{u}, \vec{v}) = dist(\vec{v}, \vec{u})$
- $dist(\vec{u}, \vec{v}) \leq dist(\vec{u}, \vec{w}) + dist(\vec{w}, \vec{v})$

Teorema del coseno







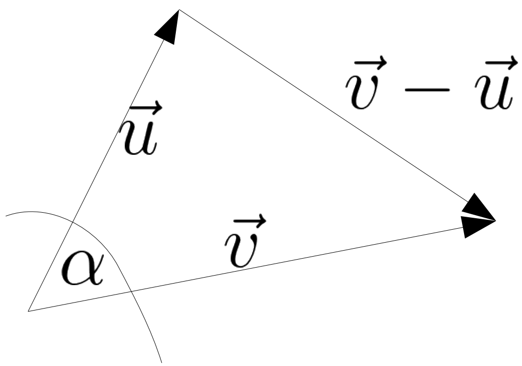
$$C\cos(b) + B\cos(c) = A \quad C\cos(a) + A\cos(c) = B \quad A\cos(b) + B\cos(a) = C$$

$$x_a = \cos(a) \quad x_b = \cos(b) \quad x_c = \cos(c)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & C & B & : & A \\ C & 0 & A & : & B \\ B & A & 0 & : & C \end{bmatrix} \quad x_c = \frac{\begin{bmatrix} 0 & C & A \\ C & 0 & B \\ B & A & C \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & C & B \\ C & 0 & A \\ B & A & 0 \end{bmatrix}} = \frac{0+CBB+ACA-0-0-CCC}{0+CAB+BCA-0-0-0} = \frac{A^2+B^2-C^2}{2AB}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(c)$$

(Otro) significado del producto punto



Ley del coseno

$$|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{u}|\cos(\alpha)$$

Propiedades de la magnitud

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Teorema:

Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \Re^2$ y α el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{u}$ entonces

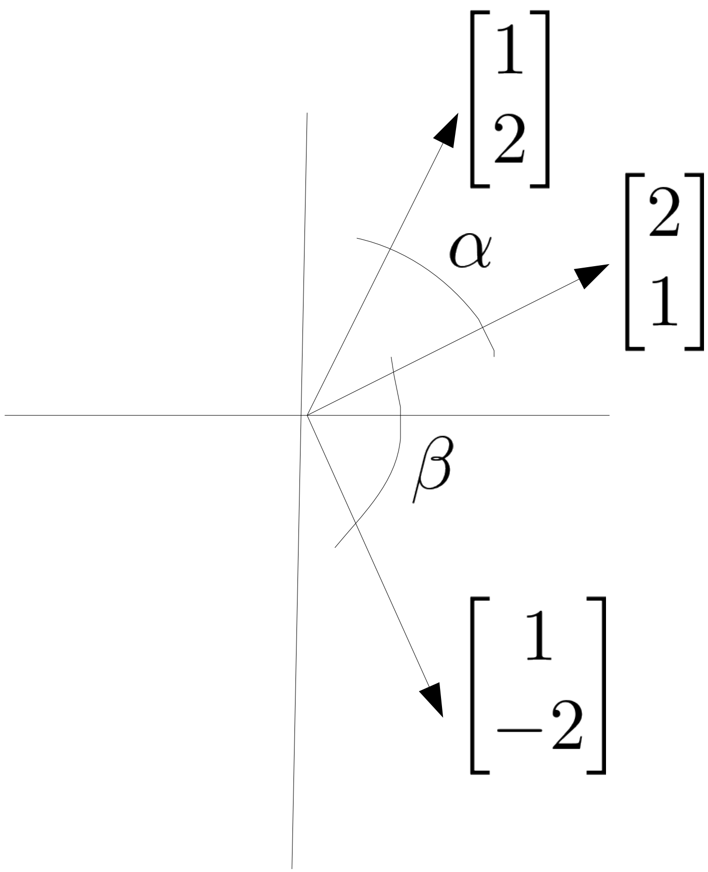
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\alpha)$$

Coseno

Definición:

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$, el coseno del ángulo entre los vectores es:

$$\cos(\alpha) = \hat{u} \cdot \hat{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|}$$



Ejemplo:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left|\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right| \cdot \left|\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right|}$$

$$= \frac{(1)(2)+(2)(1)}{\sqrt{(1)(1)+(2)(2)}\sqrt{(2)(2)+(1)(1)}} = \frac{4}{5}$$

Ejercicio:

Encuentre $\cos(\beta)$

Perpendicular y paralelo

Definición:

Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$ son <u>ortogonales</u> o <u>perpendiculares</u> si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Recordemos:

Dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$ son <u>paralelos</u> si

$$\vec{u} = c\vec{v}, \text{ para algún } c \in \Re$$

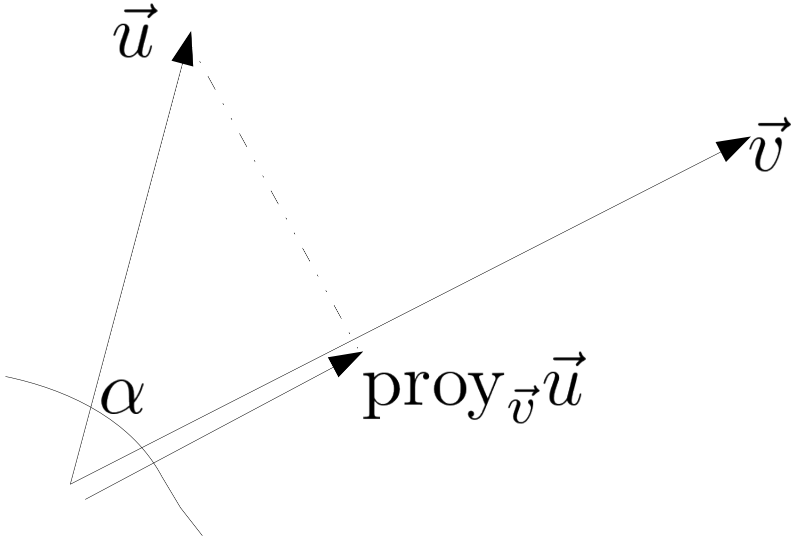
Ejercicio:

Determine cuales vectores son paralelos u ortogonales.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Luego grafique los vectores y compare los resultados obtenidos.

Proyección



Definición:
Sean $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^n$ y
α el ángulo entre $\vec{u}, \vec{v}$.

La proyección de $\vec{u}$
sobre $\vec{v}$ está dada por:

$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = |\vec{u}| \cos(\alpha)\hat{v}$
$\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$

Ejercicios

Ejercicios:\\
Sección 2.2 de Nakos