.

Combinación lineal. De n vectores de m dimensiones. Ejemplo: $x_0 \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}$	**Matriz por Vector**. De m renglones y n columnas. Ejemplo: $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_0\\x_1\end{bmatrix}$	**Transformación matricial**. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Ejemplo: $T\left(\begin{bmatrix}x_0\\x_1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1x_0 + -1x_1\\0x_0 + 1x_1\\2x_0 + 3x_1\end{bmatrix}$	**Sistema de ecuaciones**. De m ecuaciones con n incógnitas. Ejemplo: $\begin{bmatrix}1 & -1 & : & b_0\\0 & 1 & : & b_1\\2 & 3 & : & b_1\end{bmatrix}$
Espacio Generado. $Gen\left(\{\overline{u_0}, \ldots, \overline{u_{(n-1)}}\}\right) = \{x_0\overline{u_0} + \ldots + x_{(n-1)}\overline{u_{(n-1)}} \mid x_0 \cdots x_{(n-1)} \in \mathbb{R}\}$	**Espacio columna**. $Col\,(A) = \{A\overline{x} \mid \overline{x} \in \mathbb{R}^n\}$ <u>Se pueden quitar las columnas que no tienen l-pivotes</u>	**Imagen de la transformación**. $Im(T) = \{T\,(\overline{x}) \mid \overline{x} \in \mathbb{R}^n\}$	
Dimensión de espacio generado	**Rango** de A, $\rho(A)$ $\boxed{\text{Número de l-pivotes de } A}$	**Rango** de T, $\rho(T)$	
Genera todo el espacio $Gen(\{v_0, \ldots, v_{(n-1)}\}) = \Re^m$ $Dim(Gen(S)) = m$	▪ $Col(A) = \Re^m$. ▪ A <u>tiene un l-pivote en cada renglón</u>. A tiene m l-pivotes. ▪ $\rho(A) = m$.	▪ T es **sobreyectiva**. ▪ $\rho(T) = m$.	▪ $[A\ :\ b]$ es **consistente** para cualquier $b \in \Re^m$. ▪ Si $B \sim A$ entonces B no tienen renglones de ceros.
Encontrar coeficientes. Ejemplo: $x_0 \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-1\\-1\end{bmatrix}$	Encontrar $\overline{x}$. Ejemplo: $\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_0\\x_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-1\\-1\end{bmatrix}$	Imagen inversa. Ejemplo: $T^{-1}\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\\-1\end{bmatrix}\right)$	Solucionar el sistema. Ejemplo: $\begin{bmatrix}1 & -1 & : & -2\\0 & 1 & : & -1\\2 & 3 & : & -1\end{bmatrix}$
Coeficientes que dan cero. Ejemplo: $x_0 \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$	**Espacio nulo**. $\mathrm{Nu}(A) = \{\overline{x} \mid A\overline{x} = \overline{0}\}$	**Núcleo** de T. $\mathrm{Nu}(T) = \{\overline{x} \mid T(\overline{x}) = \overline{0}\}$	<u>Solución del sistema homogéneo</u>. Ejemplo: $\begin{bmatrix}1 & -1 & : & 0\\0 & 1 & : & 0\\2 & 3 & : & 0\end{bmatrix}$
-	**Nulidad** de A, $\nu(A)$ $\boxed{(\#\ \text{columnas})-(\#\ \text{l-pivotes})}$	**Nulidad** de T, $\nu(T)$	# de parámetros
▪ Vectores **Linealmente Independientes**. ▪ Ningún vector se puede escribir como combinación lineal de los otros.	<u>A tiene un l-pivote en cada columna</u>. A tiene n l-pivotes. La solución de $A\overline{x} = \overline{0}$ es $\{\overline{0}\}$. $Nu\{A\} = \{\overline{0}\}$ $\nu\{A\} = 0$	▪ $Nu\{T\} = \{\overline{0}\}$ ▪ $\nu\{T\} = 0$ ▪ T es **inyectiva**.	▪ $[A : b]$ no tiene variables libres. ▪ $[A : b]$ no tiene infinitas soluciones. ▪ La única solución de $[A : \overline{0}]$ es la trivial ($\overline{x} = \overline{0}$).
▪ Los vectores forman una **base** de $\Re^n$ (son L.I. y generan $\mathbb{R}^n$).	A es **invertible** (Existe B tal que $AB = I = BA$). <u>A es cuadrada de orden n con n l-pivotes</u>. A es el producto de matrices elementales. $\det(A) \neq 0$.	▪ T_A es un **isomorfismo** de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. ▪ Existe T_A^{-1} tal que $T_A^{-1}(T_A(\overline{x})) = \overline{x}$ y $T_A(T_A^{-1}(\overline{y})) = \overline{y}$.	▪ A es equivalente a la identidad. ▪ $[A : b]$ tiene solución única para todo b.

Con el fin de condensar un poco la tabla, definí un **l-pivote** de una matriz A como el lugar de un pivote en una matriz equivalente A' en forma escalón. Por ejemplo, un el único l-pivote de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ queda en el primer renglón con la primera columna. Ya que es el lugar donde está el único pivote de la matriz equivalente $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1. Ejemplos 2.3.{22, 23} (pg 90), 2.3.{25, 26, 27} (pg 91) y 2.3.28 (pg 92) de [NJ99].
2. Ejemplos 2.4.{31, 33} (pg 97) y 2.4.{34,36} (pg 98) de [NJ99].
3. Ejemplos 5.3.26 (pg 332), 5.3.27 (pg 333) y 5.3.34 (pg 338) de [NJ99]
4. Sea $T(\overline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overline{x}$.
    a) Encuentre el dominio y el codominio de T.
    b) Encuentre $Nu(T)$ y $\nu(T)$.
    c) Encuentre $Im(T)$ y $\rho(T)$.
    d) Dibuje el núcleo.
    e) Dibuje la imagen.

f) ¿Es T sobreyectiva, inyectiva o biyectiva?

g) ¿$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in Nu(T)$?

h) ¿$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in Im(T)$?

5. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden $n = 3$ y sean A' y B' sus matrices equivalentes en forma escalón reducida. Se sabe que A es invertible y que B no lo es. Para cada una de las preguntas diga cual matriz cumple el enunciado, cual matriz no lo cumple y cual matriz no se sabe si cumple o no lo cumple. En el enunciado M remplaza cada una de las matrices A, A', B y B'

   a) Sus columnas son linealmente dependientes.

   b) La solución de $[M : 0]$ tiene parámetros

   c) La única solución del sistema homogéneo $M\overline{x} = 0$ es $\overline{x} = 0$?

   d) El sistema $M\overline{x} = \overline{b}$ tiene solución única para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$?

   e) La transformación T_M es inyectiva.

   f) Todas las columnas tienen lugar de pivotes (Puede considerar los lugares de pivotes de A' y B' como lugares de pivotes de A y de B respectivamente)

   g) El sistema $M\overline{x} = \overline{b}$ es consistente para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$?

h) Las columnas de M generan a $\mathbb{R}^n$.

i) M tiene al menos un renglón de ceros.

j) La transformación T_M es sobreyectiva.

k) Todos los renglones tienen lugares de pivotes (Puede considerar los lugares de pivotes de A' y B' como lugares de pivotes de A y de B respectivamente)

l) Tiene 3 lugares de pivotes (Puede considerar los lugares de pivotes de A' y B' como lugares de pivotes de A y de B respectivamente)

m) Es el producto de matrices elementales.

n) Es la identidad.

ñ) La transformación T_M es un isomorfismo.

o) Las columnas forman una base de $\mathbb{R}^n$

6. Encuentre tres puntos en cada conjunto generado y grafique dicho conjunto.

a) $Gen(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix})$

b) $Gen(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix})$

c) $Gen(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$

d) $Gen(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$

Determine si $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ pertenece a cada uno se los conjuntos de los tres últimos incisos.

7. Para cada una de las transformaciones asociadas a las siguientes matriciales, encuentre la imagen (y grafíquela) y el núcleo (escríbalo como el generado de un conjunto de vectores y grafíquelo).

   a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. Para cada inciso grafique el conjunto solución de cada sistema y compárelos.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 3 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & : & 0 \\ -6 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 & -1 & : & -2 \\ -6 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 0 \\ -2 & 0 & : & 0 \\ 8 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & -1 \\ -2 & 0 & : & 2 \\ 8 & 0 & : & -8 \end{bmatrix}$

   Que concluye de los tres sistemas anteriores.

9. Para cada inciso grafique el conjunto solución de cada sistema y compárelos.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 3 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & : & 0 \\ -6 & 2 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & : & -2 \\ -6 & 2 & 0 & : & 4 \end{bmatrix}$

Bibliografía

[Blo00] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamental*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[Ant06] H. Anton, *Álgebra Lineal*, Editorial Limusa, 3a. edición, Mexico 2006.

[Len13] E. Lengyel, *Matemáticas para videojuegos*, Editorial Cengage Learning, 2a. edición, 2013

[Gro05] S. A. Grossman, *Álgebra Lineal*, Mc Graw Hill, 5a. edición, Mexico 2005.

[NJ99] Nakos, Joyner, *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Editorial Thomson 1999.

[Str03] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3a. edición, Wellesley Cambridge Press.