In [1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
from ubogsla18p import *
#x,y=symbols('x y')
#o2=Matrix([0,0])
#imprimir('o2=',o2)
```

Producto Cruz

El producto cruz de dos vectores $u=\begin{bmatrix}u_0\\u_1\\u_2\end{bmatrix}$ y $v=\begin{bmatrix}v_0\\v_1\\v_2\end{bmatrix}$ es un vector $n=u\times v=\begin{bmatrix}n_0\\n_1\\n_2\end{bmatrix}$ perpendicular a los otros dos vectores, lo cual implica que $n\cdot u=0$ y que $n\cdot v=0$, lo cual genera un sistema de dos ecuaciones y tres variables (n_0, n_1 y n_2).

$$\begin{aligned}u_0n_0+u_1n_1+u_2n_2&=0\\v_0n_0+v_1n_1+v_2n_2&=0\end{aligned}\quad\begin{bmatrix}u_0&u_1&u_2&:&0\\v_0&v_1&v_2&:&0\end{bmatrix}$$

suponiendo que $u_0\neq 0$

$$\begin{bmatrix}u_0&u_1&u_2&:&0\\v_0&v_1&v_2&:&0\end{bmatrix}\frac{1}{u_0}r0\rightarrow r0\begin{bmatrix}1&\frac{u_1}{u_0}&\frac{u_2}{u_0}&:&0\\v_0&v_1&v_2&:&0\end{bmatrix}-v_0r_0+r_1\rightarrow r_1$$
$$\begin{bmatrix}1&\frac{u_1}{u_0}&\frac{u_2}{u_0}&:&0\\0&v_1-v_0\frac{u_1}{u_0}&v_2-v_0\frac{u_2}{u_0}&:&0\end{bmatrix}$$

n_2 es la única variable libres. Por lo tanto, se le asigna un parámetro t

$$n_2=t$$

y despejando las variables delanteras se obtiene

$$\begin{aligned}n_1&=\frac{-\left(v_2-v_0\frac{u_2}{u_0}\right)t}{v_1-v_0\frac{u_1}{u_0}}\\&=\frac{-(v_2u_0-v_0u_2)t}{v_1u_0-v_0u_1}\\n_0&=-\left(\frac{u_2}{u_0}\right)t-\left(\frac{u_1}{u_0}\right)\left(\frac{-(v_2u_0-v_0u_2)t}{v_1u_0-v_0u_1}\right)\\&=\frac{-u_2(v_1u_0-v_0u_1)+u_1(v_2u_0-v_0u_2)}{u_0(v_1u_0-v_0u_1)}t\\&=\frac{-u_2v_1u_0+u_2v_0u_1+u_1v_2u_0-u_1v_0u_2}{u_0(v_1u_0-v_0u_1)}t\\&=\frac{-u_2v_1u_0+u_1v_2u_0}{u_0(v_1u_0-v_0u_1)}t\\&=\frac{-u_2v_1+u_1v_2}{v_1u_0-v_0u_1}t\end{aligned}$$

La solución general del sistema es

$$n = t\begin{bmatrix} \frac{-u_2 v_1 + u_1 v_2}{v_1 u_0 - v_0 u_1} \\ \frac{-v_2 u_0 + v_0 u_2}{v_1 u_0 - v_0 u_1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

El producto cruz corresponde al hacer $t = v_1 u_0 - v_0 u_1$.

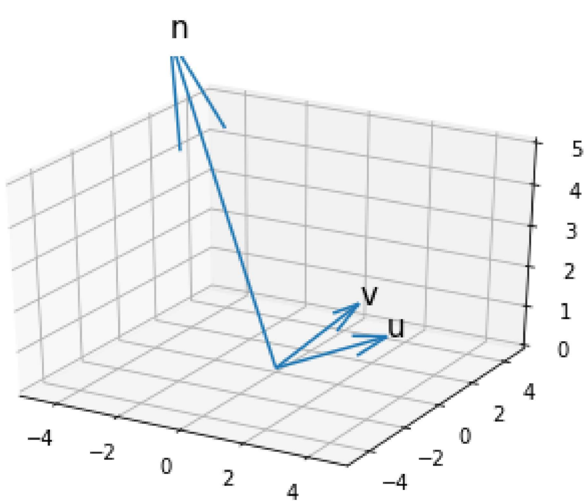
$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_2 - v_1 u_2 \\ u_2 v_0 - v_2 u_0 \\ u_0 v_1 - v_0 u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Observe que los signos se intercalan y que el renglón i corresponde al determinante de la matriz de 2×2 eliminando el elemento i de cada vector. Cada determinante con su respectivo signo se denominará cofactor.

In [2]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

u=Matrix([3,1,1])
v=Matrix([1,3,1])
n=u.cross(v)

ax=ejes3d(-5,5,-5,5,0,5)
flecha3d(ax,juntar(u,v,n),nombres=['u','v','n'])
plt.show()
```



Ejercicio:

1 Sabiendo que $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. complete la siguiente tabla.

×	**i**	**j**	**k**
i			
j			
k			

2 ¿Es el producto cruz conmutativo?

3 Para los vectores i, j y k ¿es el producto cruz asociativo?

Propiedades del producto cruz:

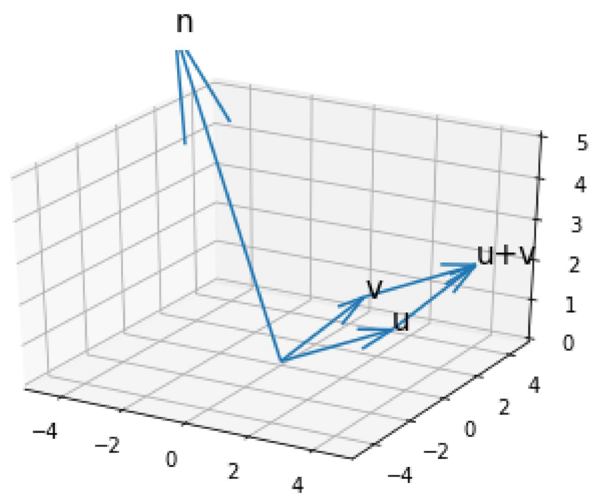
$$\begin{aligned}
&\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}.\\
&\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.\\
&(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}.\\
&c(\vec{u} \times \vec{v}) = (c\vec{v}) \times \vec{u} = \vec{v} \times (c\vec{u}).\\
&\vec{0} \times \vec{u} = \vec{0} = -\vec{u} \times \vec{0}.\\
&\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}.\\
&\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.\\
&\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.\\
&\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| sen(\theta).
\end{aligned}$$

Área del paralelogramo en 3D

In [3]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

u=Matrix([3,1,1])
v=Matrix([1,3,1])
n=u.cross(v)
o3=Matrix([0,0,0])

ax=ejes3d(-5,5,-5,5,0,5)
flecha3d(ax,juntar(u,v,u,v,n),juntar(o3,o3,v,u,o3),nombres=['u','v','u+v','','n']
plt.show()
```



El área del paralelogramo en 3D es

$$\text{Área} = bh$$

Donde

- b es la base, $b = |u|$.
- h es la altura del paralelogramo $h = |v| \sin(\alpha)$

$$\text{Área} = |u||v| \sin(\alpha) = |u \times v|$$

El área de un paralelogramo en 2D es un caso particular del de 3D. Sean $u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

entonces el área del paralelogramo es

$$\left| \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_0 v_1 - u_1 v_0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{0^2 + 0^2 + \begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}^2} = \text{abs}\left(\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \right)$$