Matriz Inversa

Para que el sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

tenga solución única para cualquier valor de $b \in \mathbb{R}^m$:

- A debe ser una matriz cuadrada de orden n con n posiciones de pivotes, ya que debe tener:
  - una posición de pivote en cada renglón (para que el sistema sea consistente para todos los valores de b),
  - una posición de pivote en cada columna (para que la respuesta sea única),
- A debe ser equivalente a la matriz identidad de orden n, ya que es la única matriz cuadrada de orden n con n pivotes en forma escalón reducida.
  $$A \sim I_n$$
- Es posible pasar de A a la identidad I_n por medio de operaciones elementales, o lo que es lo mismo, multiplicar la matriz A por matrices elementales para que de la matriz identidad.
  $$E_k \cdots E_1 E_0 A = I$$
- Existe una **matriz inversa** de A
  $$A^{-1} = E_k \cdots E_1 E_0$$
  que cumple
  $$A^{-1}A = I \quad \text{y} \quad AA^{-1} = I$$
  se dice que A es una matriz **invertible**.
- A se puede escribir como el producto de matrices elementales ya que la inversa de cada matriz elemental es también una matriz elemental.
  $$A = E_0^{-1} E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

El procedimiento para obtener la matriz inversa consiste en escribir las dos matrices $[A : I]$ y realizar las operaciones elementales a ambas matrices hasta que la matriz A se transforme en la identidad y por lo tanto la identidad se transforma en A^{-1}.

$$[A : I] \sim [I : A^{-1}]$$

Al multiplicar A^{-1} a ambos lados del sistema $Ax = b$ se pueden despejar las incógnitas.

$$x = A^{-1}b$$

Inversa de una matriz de 2×2

$$\left[\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$r_1 - \frac{c}{a} r_0 \rightarrow r_1 \left[\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{c}{a} b & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{a}{ea - db} r_1 \rightarrow r_1 \left[\begin{array}{cc:cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{array}\right]$$

$$r_0 - b r_1 \rightarrow r_0 \left[\begin{array}{cc:cc} a & 0 & \frac{ea}{ea-db} & \frac{-ab}{ea-db} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{a} r_0 \rightarrow r_0 \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{d}{ea-db} & \frac{-b}{ea-db} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ea-db} & \frac{a}{ea-db} \end{array}\right]$$

Por lo tanto, la inversa de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es $A^{-1} = \frac{1}{ea-db} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Propiedades:

Si A y B tienen inversa y c es un escalar distinto de cero entonces las siguientes construcciones son invertibles y cada una cumple la correspondiente igualdad.

- La inversa es única: si $AC = I = CA$ entonces $C = A^{-1}$
- La inversa del producto: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- La inversa de la inversa: $(A^{-1})^{-1} = A$
- Escalar sale invertido: $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}(A)^{-1}$
- Inversa conmuta con transpuesta: A^T es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Se recomienda estudiar la sección 3.2 del libro de Nakos

Potencias

Para una matriz invertible A se definen las potencias:

- $A^0 = I$,
- $A^n = AA \dots A$, n veces
- $A^{-n} = A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}$, n veces

para $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$,

Teorema:

Asumiendo que A es invertible, que c es un escalar distinto se cero y que $r, s \in \mathbb{Z}$, se tiene que A^r es invertible, que las siguientes construcciones también lo son y se cumplen las siguientes igualdades.

- Suma de Exponentes: $A^r A^s = A^{r+s}$
- Producto de exponentes: $((A)^r)^s = A^{rs}$
- El escalar sale con exponente: $(cA)^r = c^r (A)^r$

- Inversa, exponente conmutan: $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r = A^{-r}$