Área del paralelogramo en 2D

In [1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
from ubogsla18p import *
x,y=symbols('x y')
o2=Matrix([0,0])
imprimir('o2=',o2)
```

Out[1]:

$$o2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dados los vectores

In [2]:
```
u=Matrix([0.6,0.3])
imprimir('u=',u)
```

Out[2]:

$$u = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

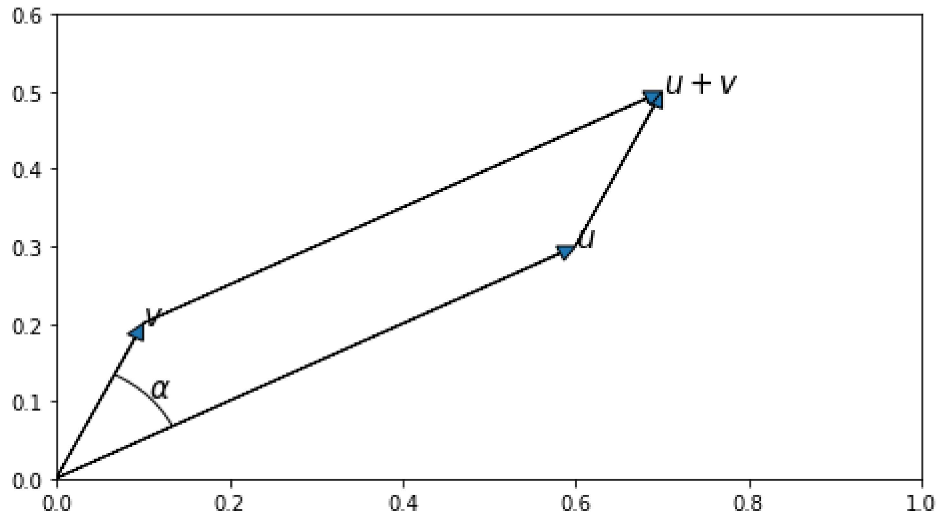
In [3]:
```
v=Matrix([0.1,0.2])
imprimir('v=',v)
```

Out[3]:

$$v = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Podemos dibujar el paralelogramo formado por los dos vectores

In [4]:
```
ax=ejes(0,0,1,0.6)
flecha(ax,v,nombre='$v$')
flecha(ax,u,nombre='$u$')
flecha(ax,v,u,nombre='$u+v$')
flecha(ax,u,v)
angulo(ax,u,v,0.3,nombre=r'$\alpha$')
plt.show()
```



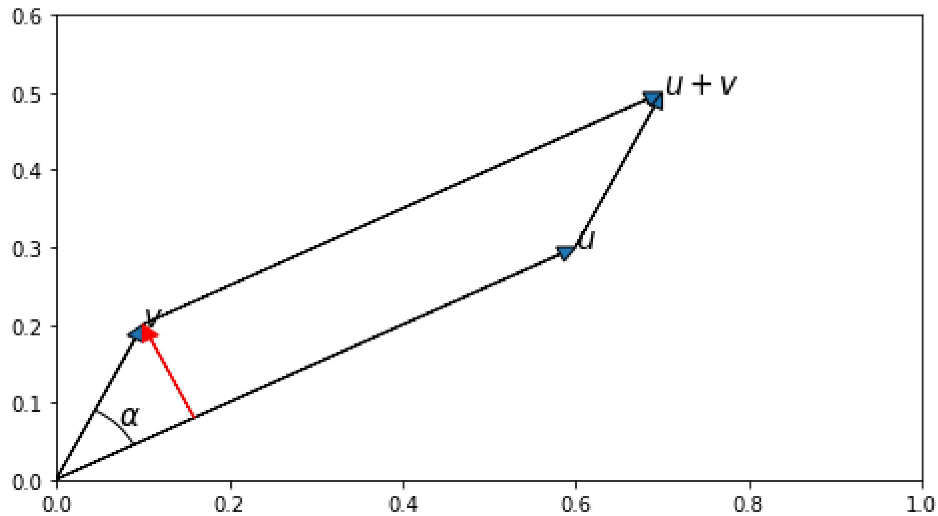
El objetivo es encontrar el área de ese paralelogramo en 2D.

$$\text{Area} = bh$$

Donde

- b es la base, $b = |u|$.
- h es la altura del paralelogramo $h = |v|\sin(\alpha)$\$

In [5]:
```
ax=ejes(0,0,1,0.6)
flecha(ax,v,nombre='$v$')
flecha(ax,u,nombre='$u$')
flecha(ax,v,u,nombre='$u+v$')
flecha(ax,u,v)
uvp=(u.dot(v)/u.dot(u))*u
uvo=v-uvp
flecha(ax,uvo,uvp,color='r')
angulo(ax,u,v,0.2,nombre=r'$\alpha$')
plt.show()
```



In [ ]:

$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$$

Al colocar todo junto

$$\text{Area} = |u|\,|v| \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$$

La ecuación anterior recuerda el producto punto. Sin embargo, el ángulo está rotado -90°. Para solucionar esto podemos rotar -90° el vector v.

In [6]:
```
#Matriz de rotación de -pi/2
alpha=-pi/2
R=Matrix([[cos(alpha), -sin(alpha)],[sin(alpha), cos(alpha)]])
xy=Matrix([x,y])
imprimir(R,xy,'=',R*xy)
```

Out[6]:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$$

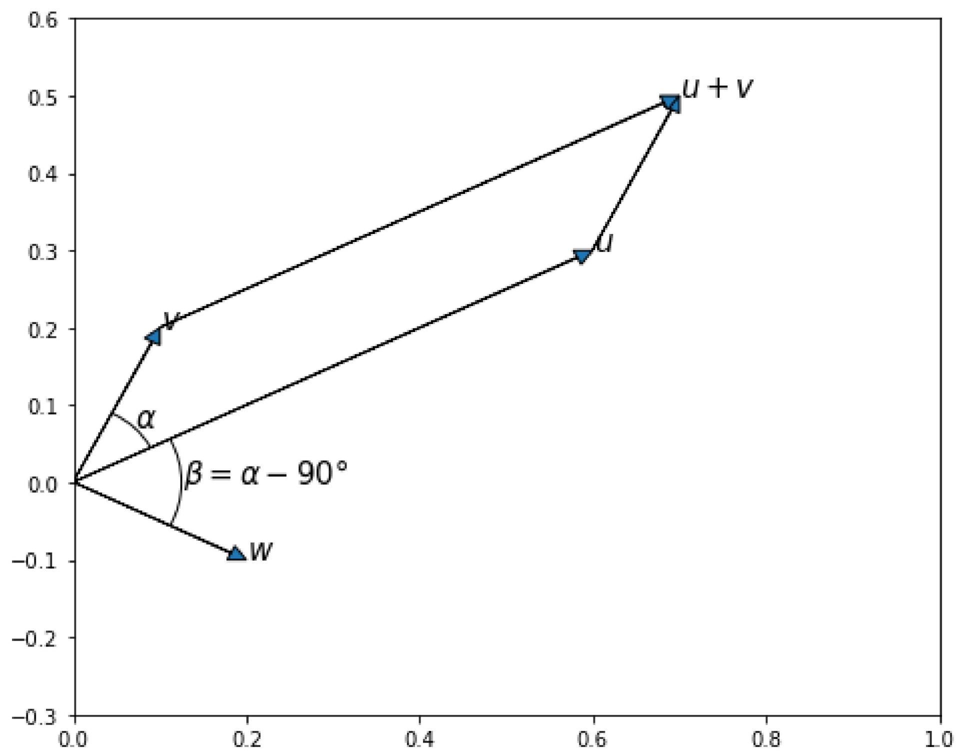
Para rotar un vector -90° basta con intercambiar los renglones y luego cambiar el signo al segundo renglón.

In [7]:
```
w=R*v
imprimir('w=',R,v,'=',w)
```

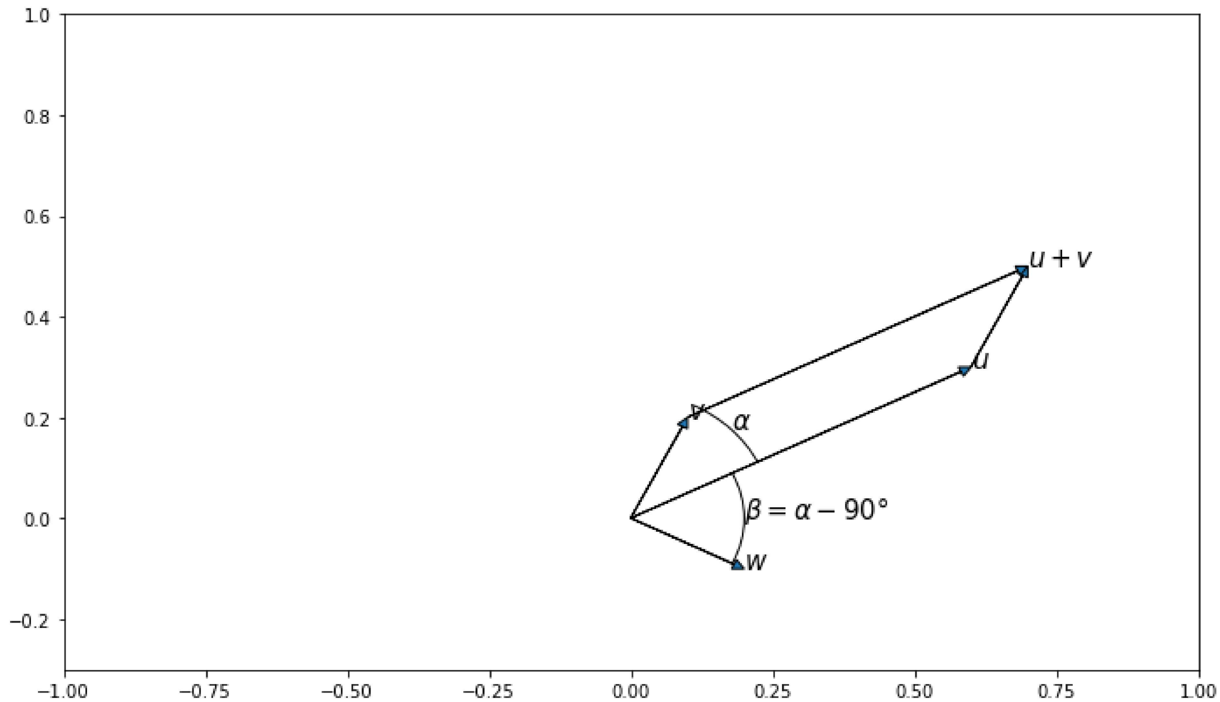
Out[7]:

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

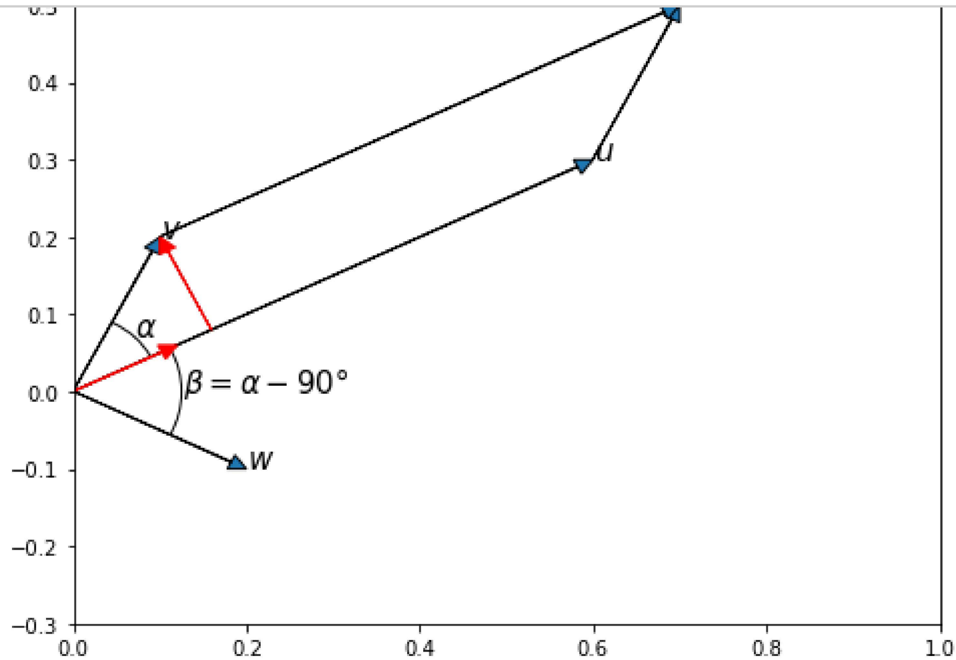
In [8]:
```
ax=ejes(0,-0.3,1,0.6)
flecha(ax,v,nombre='$v$')
flecha(ax,u,nombre='$u$')
flecha(ax,v,u,nombre='$u+v$')
flecha(ax,u,v)
flecha(ax,w,nombre='$w$')
angulo(ax,u,v,0.2,nombre=r'$\alpha$')
angulo(ax,w,u,0.25,nombre=r'$\beta=\alpha-90°$')
plt.show()
```



In [9]:
```
ax = plt.axes((0,0,1.5,1.3))
ax.set_xlim(-1,1)
ax.set_ylim(-0.3,1)
x1=float(v[0])
flecha(ax,v,nombre='$v$')
flecha(ax,u,nombre='$u$')
flecha(ax,v,u,nombre='$u+v$')
flecha(ax,u,v)
flecha(ax,w,nombre='$w$')
angulo(ax,u,v,0.5,nombre=r'$\alpha$')
angulo(ax,w,u,0.4,nombre=r'$\beta=\alpha-90°$')
plt.show()
```



In [10]:
```
ax=ejes(0,-0.3,1,0.6)
flecha(ax,v,nombre='$v$')
flecha(ax,u,nombre='$u$')
flecha(ax,v,u,nombre='$u+v$')
flecha(ax,u,v)
flecha(ax,w,nombre='$w$')
angulo(ax,u,v,0.2,nombre=r'$\alpha$')
angulo(ax,w,u,0.25,nombre=r'$\beta=\alpha-90°$')
proy_v_u=(u.dot(v)/u.dot(u))*u
ort_v_u=v-proy_v_u
flecha(ax,ort_v_u,proy_v_u,color='r')
proy_w_u=(u.dot(w)/u.dot(u))*u
flecha(ax,proy_w_u,color='r')
plt.show()
```



La altura del paralelogramo es igual a la proyección del vector w sobre el vector u

$$|v|\sin(\alpha) = |w|\cos(\beta)$$

Esto permite calcular el área del paralelogramo como un producto punto. Supongamos que $u = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ y si $v = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ entonces $w = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ -b \end{bmatrix}$. Por lo tanto, el área del paralelogramo

$$\begin{aligned} \text{Área} &= |u|\,|v|\sin(\alpha) \\ &= |u|\,|w|\cos(\beta) \\ &= u \cdot w \\ &= \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ -b \end{bmatrix} \\ &= ad - cb \end{aligned}$$

El área formada por los vectores u y v se denota como el determinante de la matriz de 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$