Sistema de ecuaciones

Matrices extendidas

Sabemos que la multiplicación de una matriz A por un vector $\vec{x}$ da un vector $\vec{b}$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

El problema para resolver en esta sección tiene como entrada la **matriz de coeficientes** A y el **vector de términos constantes** $\vec{b}$. La salida es el conjunto de **vectores de incógnitas** $\vec{x}$, los cuales deben cumplir $A\vec{x} = \vec{b}$.

- Si la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-1)0} & a_{(m-1)1} & \cdots & a_{(m-1)(n-1)} \end{bmatrix}$, de tamaño $m \times n$,
- se multiplica por el vector de incógnitas $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \end{bmatrix}$
- da el vector de términos constantes $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{(m-1)} \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-1)0} & a_{(m-1)1} & \cdots & a_{(m-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{(m-1)} \end{bmatrix}$$

Al realizar la multiplicación se obtiene

$$\begin{bmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \ldots + a_{0(n-1)}x_{(n-1)} \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1(n-1)}x_{(n-1)} \\ \vdots \\ a_{(m-1)0}x_0 + a_{(m-1)1}x_1 + \ldots + a_{(m-1)(n-1)}x_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{(m-1)} \end{bmatrix}$$

Igualando cada elemento de los vectores se produce un sistema de m ecuaciones con n incognitas.

$$
\begin{aligned}
a_{00}x_0 \, + a_{01}x_1 \, + \ldots + a_{0(n-1)}x_{(n-1)} \, &= b_0 \\
a_{10}x_0 \, + a_{11}x_1 \, + \ldots + a_{1(n-1)}x_{(n-1)} \, &= b_1 \\
&\vdots \\
a_{(m-1)0}x_0 \, + a_{(m-1)1}x_1 \, + \ldots + a_{(m-1)(n-1)}x_{(n-1)} \, &= b_{(m-1)}
\end{aligned}
$$

Un sistema de ecuaciones se puede representar con la **matriz extendida** de la siguiente forma

$$[A : b]$$

o de manera explícita

$$
\begin{bmatrix}
a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} & : & b_0 \\
a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & : & b_1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
a_{(m-1)0} & a_{(m-1)1} & \cdots & a_{(m-1)(n-1)} & : & b_{(m-1)}
\end{bmatrix}
$$

Es necesario fijar el orden de las variables, lo cual escribo sobre la matriz extendida, aunque no es común en la literatura del curso.

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & x_1 & \cdots & x_{(n-1)} & & \\
\end{array}
$$
$$
\begin{bmatrix}
a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0(n-1)} & : & b_0 \\
a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & : & b_1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
a_{(m-1)0} & a_{(m-1)1} & \cdots & a_{(m-1)(n-1)} & : & b_{(m-1)}
\end{bmatrix}
$$

- Cada renglón $i \in \{0, 1, \cdots, (m-1)\}$ de la matriz extendida corresponde a una **ecuación lineal** $a_{i0}x_0 \, + a_{i1}x_1 \, + \ldots + a_{i(n-1)}x_(n-1) = b_i$
- Un **renglón de ceros** sólo tiene ceros.
- El **elemento delantero** de un renglón no cero es el primer elemento a la izquierda diferente de cero. La variable asociada (si la hay) se llama **variable delantera**. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
0x_0 \, + 3x_1 \, + 0x_2 \, + 1x_3 \, &= 5 \\
0x_0 \, + 0x_1 \, + 0x_2 \, + 0x_3 \, &= 0 \\
2x_0 \, + 1x_1 \, + 0x_2 \, + 2x_3 \, &= 6 \\
0x_0 \, + 0x_1 \, + 0x_2 \, + 1x_3 \, &= 0 \\
0x_0 \, + 0x_1 \, + 0x_2 \, + 0x_3 \, &= 3
\end{aligned}
$$

ordenando las variable alfabéticamente la matriz extendida corresponde a

$$
\begin{bmatrix}
0 & 3 & 0 & 1 & : & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\
2 & 1 & 0 & 2 & : & 6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & : & 3
\end{bmatrix}
$$

- La variable delantera del renglón 0 es x_1.
- El renglón 1 es un renglón de ceros y no tiene variable delantera ni elemento delantero.
- La variable delantera del renglón 2 es x_0.
- La variable delantera del renglón 3 es x_3.
- En el renglón 4 el elemento delantero es el término constante. No tiene variable delantera.

Clasificación de matrices extendidas

E1

'Los renglones de ceros están en la parte inferior de la matriz o no hay renglones de ceros.'

El ejemplo tiene sólo un renglón de ceros que está al final, por lo tanto, cumple E1.

$$\begin{matrix} 0x_0 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & =3 \\ 0x_0 & +3x_1 & +0x_2 & +1x_3 & =5 \\ 0x_0 & +0x_1 & +0x_2 & +1x_3 & =0 \\ 2x_0 & +1x_1 & +0x_2 & +2x_3 & =6 \\ 0x_0 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & =0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & : & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & : & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

E2

'Para cada elemento delantero $a_{i,j}$ se tiene que el elemento delantero del siguiente renglón $a_{i+1,k}$ (si lo hay) debe estar a la derecha (es decir $j < k$).'

En el siguiente ejemplo, los elementos de las variables x_1 y x_3 están abajo a la derecha de x_0 y x_1 respectivamente, por lo tanto, cumple E2.

$$\begin{matrix} 2x_0 & +1x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =6 \\ 0x_0 & +3x_1 & +4x_2 & +1x_3 & =5 \\ 0x_0 & +0x_1 & +0x_2 & +1x_3 & =0 \\ 0x_0 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & =3 \\ 0x_0 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & =0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

- Una matriz está en forma (renglón) **escalón** si cumple (E1) y (E2).
- A los elementos delanteros de una matriz escalón se les llama **pivotes**.
- Una variable que no es delantera se llama **variable libre**

Sustitución hacia atrás

En un sistema escalón se pueden despejar las variables delanteras mediante la sustitución hacia atrás.

Ejemplo:

$$\begin{matrix} 2x_0 & +1x_1 & +2x_2 & +2x_3 & =6 \\ 0x_0 & +3x_1 & +4x_2 & +1x_3 & =5 \\ 0x_0 & +0x_1 & +0x_2 & +1x_3 & =0 \\ 0x_0 & +0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & =0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

- Se remplazan las variables libres por parámetros. En este caso $x_2 = t$
- Se despeja la variable delantera que está más a la derecha remplazando las variables conocidas. $x_3 = 0$

- Se repite con el resto de las variables delanteras, de derecha a izquierda.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4t + 1(0) = 5 &\Rightarrow x_1 = (5-4t)/3 \\ 2x_0 + 1((5-4t)/3) + 2t + 2(0) = 6 &\Rightarrow x_0 = 3 - t - (5-4t)/6 \end{aligned}$$

Propiedades

- En cada columna y en cada renglón de una matriz hay máximo un pivote.
- El número de pivotes de una matriz $A_{m\times n}$ es menor o igual que m y que n.
- Si en la columna de términos constantes de una matriz extendida hay un elemento delantero, el conjunto solución del sistema es vacío. En este caso se dice que el sistema de ecuaciones es **inconsistente** o que no tiene solución.
- Si en la columna de términos constantes de una matriz extendida en forma 'escalón' no hay un elemento delantero entonces el sistema tiene solución y se llama **consistente**.
- Un sistema consistente que tiene variables libres también tiene infinitas soluciones.
- Si el sistema consistente no tiene variables libres entonces tiene solución única.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & : & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

La primera matriz extendida es inconsistente ya que tiene un elemento delantero en los términos constantes.

Las matrices extendidas segunda y tercera son consistentes ya que están en forma escalón y sus pivotes no son términos constantes. La segunda matriz tiene infinitas soluciones ya que tiene al menos una variable libre. La tercera matriz tiene solución única ya que no tiene variables libres.

Para la cuarta matriz extendida, no podemos afirmar a priori que sea inconsistente, porque no tiene elementos delanteros en los términos constantes. Tampoco podemos afirmar a priori que sea consistente, ya que no está en forma escalón.

E3

'Cada elemento delantero es 1 (y se llama **1 delantero**).'

En [Gro06] se define una matriz **escalonada** (por renglones) como la matriz que cumple (E1), (E2) y (E3).

La siguiente matriz es un ejemplo de una matriz escalonada.

$$\begin{aligned} 1x_0 &+ 1x_1 &+ 2x_2 &+ 2x_3 &= 6 \\ 0x_0 &+ 1x_1 &+ 4x_2 &+ 1x_3 &= 5 \\ 0x_0 &+ 0x_1 &+ 0x_2 &+ 1x_3 &= 0 \\ 0x_0 &+ 0x_1 &+ 0x_2 &+ 0x_3 &= 0 \\ 0x_0 &+ 0x_1 &+ 0x_2 &+ 0x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & : & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es la ventaja de E3?

E4

'Arriba y abajo de cada elemento delantero hay ceros.'

Una matriz está en forma **escalón reducida** o es **escalonada reducida** si cumple (E1), (E2), (E3) y (E4).

La siguiente matriz es un ejemplo de una matriz reducida.

$$\begin{aligned} 1x_0 &+ 0x_1 &+ 2x_2 &+ 0x_3 &= 6 \\ 0x_0 &+ 1x_1 &+ 4x_2 &+ 0x_3 &= 5 \\ 0x_0 &+ 0x_1 &+ 0x_2 &+ 1x_3 &= 0 \\ 0x_0 &+ 0x_1 &+ 0x_2 &+ 0x_3 &= 0 \\ 0x_0 &+ 0x_1 &+ 0x_2 &+ 0x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & : & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

En las matrices en escalón reducida, las variables delanteras se encuentran prácticamente despejadas y están en función de las variables libres (a estas últimas hay que asignarle parámetros). Lo cual se puede observar en el ejemplo anterior.

$$\begin{aligned} x_2 &= t \\ x_3 &= 0 \\ x_1 &= 5 - 4t \\ x_0 &= 6 - 2t \end{aligned}$$

Teorema

En una matriz extendida:

- si la última columna tiene un elemento delantero entonces no tiene solución y la matriz se llama **inconsistente**.
- si está en forma escalón y la última columna no tiene pivote entonces sí tiene solución y la matriz se llama **consistente**. En esta matriz: **si no tiene variables libres entonces la solución es única.** si tiene variables libres entonces tiene **infinitas soluciones**.

Resumen

- Propiedades (E1), (E2), (E3) y (E4)
- Forma escalón, escalonada o escalón reducido.
- Pivotes, variables delanteras y libres.

- Sistema de ecuaciones inconsistente y consistente con solución única o con infinitas soluciones.