Conjunto solución

- Un vector $\vec{x}$ que cumple la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ se llama **solución particular** del sistema lineal $[A : \vec{b}]$.
- El conjunto de todas las soluciones particulares se llama **conjunto solución**.
- Una solución particular escrita en forma genérica se llama **solución general**.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 1x_0 + 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 6 \\ 0x_0 + 1x_1 + 4x_2 + 0x_3 &= 5 \\ 0x_0 + 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 3 \\ 0x_0 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \\ 0x_0 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & : & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Variables libres: $x_2 = t$

Variables delanteras:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_1 &= 5 - 4t \\ x_0 &= 6 - 2t \end{aligned}$$

Solución general:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 2t \\ 5 - 4t \\ t \\ 3 \end{bmatrix}$$

Conjunto solución:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 6 - 2t \\ 5 - 4t \\ t \\ 3 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Soluciones particulares:

$$\text{Para } t = 0, \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{para } t = 1, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{para } t = -3, \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Representación gráfica de una ecuación lineal de 2 variables

Una ecuación lineal de n variables corta el espacio $\mathbb{R}^n$ en dos. En particular una ecuación lineal de dos variables $ax + by = c$ representa una recta en el plano, siempre y cuando a y b no sean ambos cero. Para encontrar la recta obtenemos el conjunto solución del sistema de una ecuación dos variables.

Ejemplo: la ecuación

$$1x + 2y = 4$$

se puede escribir como una matriz extendida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$$

Este sistema de una ecuación dos incógnitas está en forma escalón. Como y es la variable libre entonces le asignamos un parámetro.

$$y = t$$

Ahora despejamos la variable delantera x

$$x = 4 - 2t$$

El conjunto solución es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 - 2t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

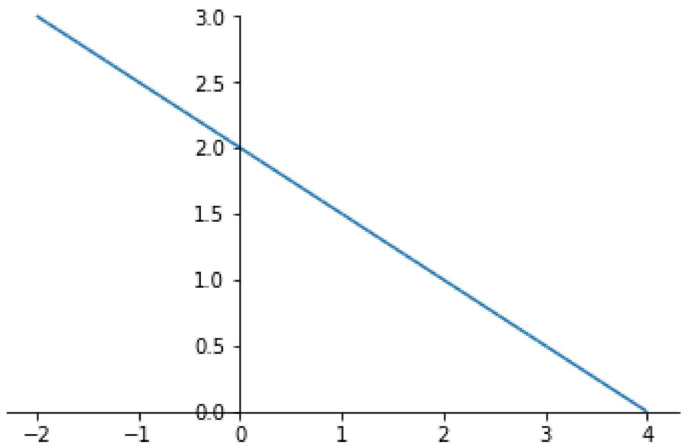
La solución general es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algunas soluciones particulares son:

$$\text{si } t = 0, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\text{si } t = 1, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\text{si } t = 3, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

In [2]:
```
from sympy import *
from sympy.plotting import plot_parametric as plt_par
t = symbols('t')
x=4-2*t
y=t
plt_par(x,y,(t,0,3))
#plt_par(4-2*t,t)
```



Out[2]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x6432ef0>

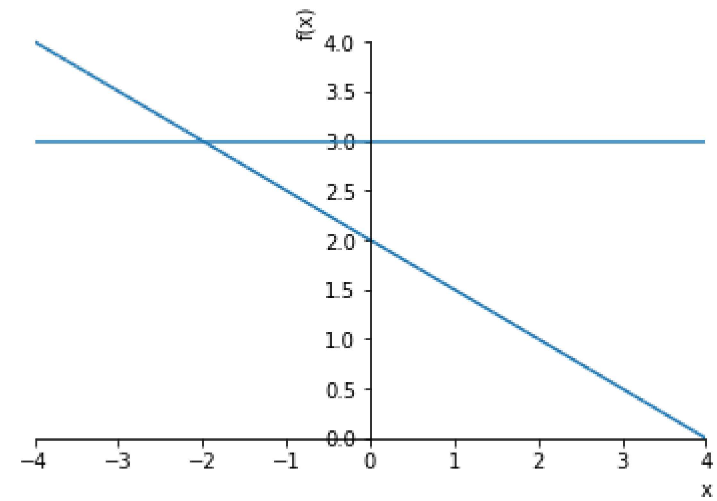
Representación gráfica de dos ecuaciones lineales de 2 variables

El sistema de 2 ecuaciones 2 variables

$$1x + 2y = 4$$
$$0x + 1y = 3$$

se puede graficar como una recta por cada ecuación

In [3]:
```
#Para varias graficas se despeja $y$
from sympy.plotting import plot
x = symbols('x')
y1=2-x/2
y2=3
plot(y1,y2,(x,-4,4))
#plt_par(4-2*t,t)
```



Out[3]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f32510>

```
Este sistema de dos ecuaciones dos incógnitas
\begin{bmatrix}1 & 2&:&4\\0 & 1&:&3\end{bmatrix}
está en forma escalón y no tiene variables libres.
Como la segunda ecuación ya está despejada se tiene
$$ y = 3 $$
Ahora despejamos la variable delantera $x$ de la primera ecuación
$$ x = 4 - 2 (3) = -2 $$
El conjunto solución es un sólo elemento
$$\left\{\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} \right\}$$


La solución general es

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

La única solución particular:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

La solución corresponde a la intersección de las rectas.
```

Representación gráfica de una ecuación lineal de 3 variables

Ejemplo: la ecuación

$$1x + 2y - 1z = 4$$

se puede escribir como una matriz extendida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

Este sistema de una ecuación tres incógnitas está en forma escalón. Como y y z son variables libres entonces se les asigna un parámetro a cada una.

$$y = t$$
$$z = s$$

Ahora despejamos la variable delantera x

$$x = 4 - 2t + z$$

El conjunto solución es

$$\left\{\begin{bmatrix} 4 - 2t + z \\ t \\ s \end{bmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R}\right\}$$
$$\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R}\right\}$$

La solución general es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

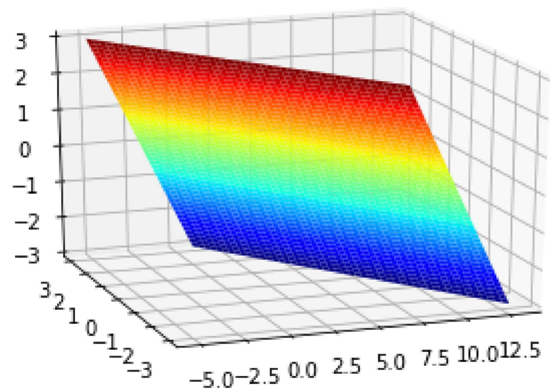
Algunas soluciones particulares son:

$$\text{si } t = 0, s = 0, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\text{si } t = 1, s = 0 \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\text{si } t = 0, s = 1 \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In [ ]:
```
%matplotlib
from sympy import *
from sympy.plotting import plot3d_parametric_surface as plt3D_par
```

In [39]:
```
s, t = symbols('s t')
x=4-2*t-s
y=t
z=s
plt3D_par(x,y,z,(t,-3,3),(s,-3,3))
show
```

```
Using matplotlib backend: nbAgg
```



Out[39]:
```
<function matplotlib.pyplot.show>
```

Una ecuación lineal en de 3 variables corresponde a un plano.

Representación gráfica de dos ecuaciones lineales de 3 variables

```
Ejemplo:
la ecuación
\begin{align}
1x +  2 y - 1 z&=4\\
0x +  1 y + 1 z&=3
\end{align}
```

se puede escribir como una matriz extendida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & : & 4 \\ 0 & 1 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

Este sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas está en forma escalón. Como z es una variable libre entonces se le asigna un parámetro.

$$z = t$$

Ahora despejamos las variables delanteras y y x

$$\begin{aligned} y &= 3 - t \\ x &= 4 - 2(3 - t) + t = -2 + 3t \end{aligned}$$

El conjunto solución es

$$\left\{\begin{bmatrix} -2+3t \\ 3-t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

La solución general es

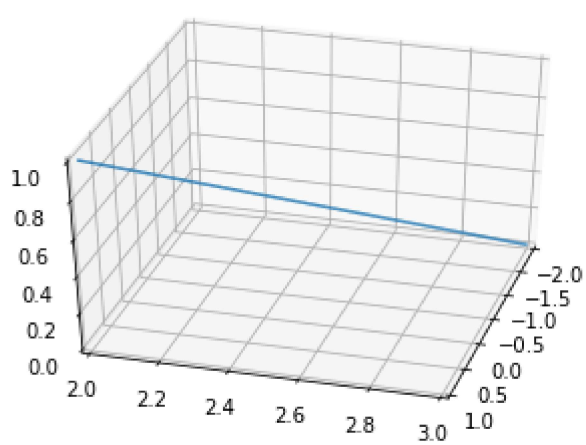
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algunas soluciones particulares son:

$$\text{si } t = 0, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{si } t = 1, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

In [44]:
```
from sympy.plotting import plot3d_parametric_line as plt3D_par
t = symbols('t')
x=-2+3*t
y=3-t
z=t
plt3D_par(x,y,z,(t,0,1))
show
```



Out[44]: `<function matplotlib.pyplot.show>`

El conjunto solución corresponde a una recta en $\mathbb{R}^3$, la cual coincide con la intersección de los planos.