In [1]:
```
from sympy import * # Librería para operaciones simbólicas
from ubogsla18p import * # Librería personal
import u_bog_gauss_18p as gauss # Librería personal parea reducción por el método
```

Operaciones elementales

[Nakos, Sec. 1.1]

Las siguientes operaciones entre los renglones de una matriz:

- Intercambio de renglón. $R_i \leftrightarrow R_j$
- Multiplica un renglones por un escalar (diferente de cero). $kR_i \rightarrow R_i$
- Suma un múltiplo (no nulo) de un renglón a otro. $kR_j + R_i \rightarrow R_i$

se llaman **operaciones elementales** y cumplen que:

- no alteran la solución del sistema de ecuaciones,
- permiten modificar la matriz para que cumplan las propiedades E1, E2, E3 y E4.

Dos matrices se dice que son **equivalentes** si es posible pasar de una a la otra por medio de operaciones elementales y se denota $A \sim B$.

La operación $k_jR_j + k_iR_i \rightarrow R_i$ corresponde a realizar:

- primero $k_iR_i \rightarrow R_i$,
- luego $k_jR_j + R_i \rightarrow R_i$.

A continuación, se dan ejemplos de las operaciones elementales.

In [2]:
```
A=mat("0 3 -6 ;-1 3 -10  ; 4 -9 34 ;2 -6 20")
imprimir('A=',A)
```

Out[2]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$

In [3]:
```
imprimir(A,r' \stackrel{r0 <-> r1}{\longrightarrow} ',
         gauss.op(A,'r0 <-> r1'))
```

```
R0 <-> R1
```

Out[3]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix} \stackrel{r0<->r1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -6 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$

In [4]:
```
imprimir(A,r' \stackrel{2r1->r1}{\longrightarrow} ',
         gauss.op(A,'2r1->r1'))
```

```
2R1 -> R1
```

Out[4]:
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix} \stackrel{2r1->r1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -2 & 6 & -20 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$

In [5]:
```
imprimir(A,r' \stackrel{2r1+r2 -> r2}{\longrightarrow} ',
         gauss.op(A,'2r1+r2 -> r2'))
```

```
2R1+1R2 -> R2
```

Out[5]:
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix} \stackrel{2r1+r2->r2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 2 & -3 & 14 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$

In [6]:
```
imprimir(A,r' \stackrel{2r1-2r2 -> r2}{\longrightarrow} ',
         gauss.op(A,'2r1-2r2 -> r2'))
```

```
-2R1+2R2 -> R2
```

Out[6]:
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix} \stackrel{2r1-2r2->r2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 10 & -24 & 88 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$

Matrices elementales

[Nakos, Sec. 3.3]

Una **matriz elemental** E resulta de aplicar una operación elemental op a la matriz identidad I_m

$$E = op(I_m)$$

y cumple que $EA = op(A)$ para cualquier matriz A de m renglones.

A continuación, se presentan las respectivas matrices elementales de los ejemplos anteriores.

In [7]:
```
I=eye(A.rows)
imprimir('I=',I)
```

Out[7]:
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In [8]:
```
E1=gauss.op(I,'r0 <-> r1')
imprimir(E1,A,'=',E1*A)
```

```
R0 <-> R1
```

Out[8]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 \\ 0 & 3 & -6 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$

In [9]:
```
E2=gauss.op(I,'2r1->r1')
imprimir(E2,A,'=',E2*A)
```

```
2R1 -> R1
```

Out[9]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -2 & 6 & -20 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$

In [10]:
```
E3=gauss.op(I,'2r1+r2 -> r2')
imprimir(E3,A,'=',E3*A)
```

```
2R1+1R2 -> R2
```

Out[10]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 2 & -3 & 14 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$

In [11]:
```
E1=gauss.op(I,'2r1-2r2 -> r2')
imprimir(E1,A,'=',E1*A)
```

```
-2R1+2R2 -> R2
```

Out[11]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 4 & -9 & 34 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & -10 \\ 10 & -24 & 88 \\ 2 & -6 & 20 \end{bmatrix}$$

Eliminación de Gauss

[Nakos, Sec. 1.2]

Una matriz se puede transformar a la forma escalón mediante los siguientes cuatro pasos. El último paso la convierte a la forma escalón reducida.

1. Vaya a la columna extrema izquierda que no sea de ceros.

2. Si el primer renglón tiene un cero en la columna del paso (1), intercámbielo con uno que tenga un elemento no cero en la misma columna.
3. Obtenga ceros abajo del elemento delantero, sumando múltiplos adecuados del renglón superior a los renglones debajo de él.
4. Cubra el renglón superior y repita el mismo proceso comenzando por el paso (1) aplicado a la sub-matriz restante. Repita este proceso con el resto de los renglones. \5. Comenzando con el último renglón no cero, avance hacia arriba: para cada renglón obtenga un 1 delantero e introduzca ceros arriba de él, sumando múltiplos adecuados a los renglones correspondientes.

In [12]:

```
A=mat("0 3 -6 -4 -3 -5;-1 3 -10 -4 -4 -2 ; 4 -9 34 0 1 -21;2 -6 20 2 8 -8")
imprimir('A=',A)
```

Out[12]:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 & -21 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

In [13]:

```
gauss.evaluar(A,'sugerir',1)
oper='r1 <-> r0'
A1= gauss.evaluar(A,oper)
imprimir(A,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A1)
```

```
Nuestro objetivo ahora es obtener un pivote en la columna 0, pero observe que e
n el renglón 0 hay un cero
R1 <-> R0
Super bien, ya no es cero el elemento delantero 0,0
```

Out[13]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 & -21 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & -8 \end{bmatrix} \stackrel{r1<->r0}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 & -21 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

In [14]:

```
gauss.evaluar(A1,'sugerir',1)
oper='4r0+r2 -> r2'
A2= gauss.evaluar(A1,oper)
imprimir(A1,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A2)
```

```
Ahora hay que obtener ceros bajo el pivite
4R0+1R2 -> R2
Bien, obtuvo un cero más
```

Out[14]:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 & -21 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & -8 \end{bmatrix} \stackrel{4r0+r2->r2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & -16 & -15 & -29 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

In [15]:
```
gauss.evaluar(A2,'sugerir',1)
oper='2r0 + r3 -> r3'
A3= gauss.evaluar(A2,oper)
imprimir(A2,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A3)
```

```
Ahora hay que obtener ceros bajo el pivite
2R0+1R3 -> R3
Muy bien, avanzó otra columna
```

Out[15]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & -16 & -15 & -29 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & -8 \end{bmatrix} \stackrel{2r0+r3->r3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & -16 & -15 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

In [16]:
```
gauss.evaluar(A3,'sugerir',1)
oper='-r1 + r2 -> r2'
A4= gauss.evaluar(A3,oper)
imprimir(A3,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A4)
```

```
Ahora hay que obtener ceros bajo el pivite
-1R1+1R2 -> R2
Muy bien, avanzó otra columna
```

Out[16]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & -16 & -15 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -12 \end{bmatrix} \stackrel{-r1+r2->r2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

In [17]:
```
gauss.evaluar(A4,'sugerir',1)
oper='1/12r2 -> r2'
A5= gauss.evaluar(A4,oper)
imprimir(A4,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A5)
```

```
Ahora hay que obtener ceros bajo el pivite
1/12R2 -> R2
Ya obtuvo un divisor en el elemento delantero
```

Out[17]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -12 \end{bmatrix} \stackrel{1/12r2->r2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

In [18]:
```
gauss.evaluar(A5,'sugerir',1)
oper='-6r2+r3 -> r3'
A6= gauss.evaluar(A5,oper)
imprimir(A5,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A6)
```

```
Ahora hay que obtener ceros bajo el pivite
-6R2+1R3 -> R3
Felicitaciones!! la matriz ya está en forma escalón
```

Out[18]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -12 \end{bmatrix} \stackrel{-6r2+r3->r3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

In [19]:
```
oper='1/6r3 -> r3'
A7= gauss.op(A6,oper)
imprimir(A6,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A7)
```

```
1/6R3 -> R3
```

Out[19]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{1/6r3->r3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [20]:
```
oper='r3 + r2 -> r2'
A8= gauss.op(A7,oper)
imprimir(A7,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A8)
```

```
1R3+1R2 -> R2
```

Out[20]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{r3+r2->r2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [21]:
```
oper='3r3 +r1 -> r1'
A9= gauss.op(A8,oper)
imprimir(A8,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A9)
```

```
3R3+1R1 -> R1
```

Out[21]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{3r3+r1->r1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [22]:
```
oper='4r3+r0 -> r0'
A10= gauss.op(A9,oper)
imprimir(A9,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A10)
```

```
4R3+1R0 -> R0
```

Out[22]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{4r3+r0->r0}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [23]:
```
oper='-r2 -> r2'
A11= gauss.op(A10,oper)
imprimir(A10,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A11)
```

```
-1R2 -> R2
```

Out[23]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{-r2->r2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [24]:
```
oper='4r2 +r1 -> r1'
A12= gauss.op(A11,oper)
imprimir(A11,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A12)
```

```
4R2+1R1 -> R1
```

Out[24]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{4r2+r1->r1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [25]:
```
oper='4r2 + r0 -> r0'
A13= gauss.op(A12,oper)
imprimir(A12,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A13)
```

```
4R2+1R0 -> R0
```

Out[25]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{4r2+r0->r0}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [26]:
```
oper='1/3 r1 -> r1'
A14= gauss.op(A13,oper)
imprimir(A13,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A14)
```

```
1/3R1 -> R1
```

Out[26]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{1/3r1->r1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [27]:
```
oper='-3r1 + r0 -> r0'
A15= gauss.op(A14,oper)
imprimir(A14,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A15)
```

```
-3R1+1R0 -> R0
```

Out[27]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -10 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{-3r1+r0->r0}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In [28]:
```
oper='-r0 -> r0'
A16= gauss.op(A15,oper)
imprimir(A15,r' \stackrel{'+oper+r'}{\longrightarrow} ',A16)
```

```
-1R0 -> R0
```

Out[28]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{-r0->r0}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

- Una matriz extendida es equivalente a muchas matrices en forma escalón, pero sólo a una matriz escalón reducida. Es decir, que dos matrices son equivalentes si ambas son equivalentes a la misma matriz escalón reducida.
- Como las matrices equivalentes en forma escalón tienen los pivotes en las mismas posiciones, entonces se extienden estas **posiciones de los pivotes** a todas las matrices equivalentes, aunque no estén en forma escalón.

Ejercicios:

Para la matriz extendida $E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 & 3 & : & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 6 & : & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$ diga:

In [29]:
```
B=mat("2 4 0 5 3 4; 1 0 2 5 6 2; 1 1 3 0 1 3")
B
```

Out[29]:
```
Matrix([
[2, 4, 0, 5, 3, 4],
[1, 0, 2, 5, 6, 2],
[1, 1, 3, 0, 1, 3]])
```

In [30]:
```
B1=gauss.op(B,"r1<->r0")
B1
```

```
R1 <-> R0
```

Out[30]:
```
Matrix([
[1, 0, 2, 5, 6, 2],
[2, 4, 0, 5, 3, 4],
[1, 1, 3, 0, 1, 3]])
```

In [31]:
```
B1=gauss.op(B1,"-2r0+r1->r1")
B1
```

```
-2R0+1R1 -> R1
```

Out[31]:
```
Matrix([
[1, 0,  2,  5,  6, 2],
[0, 4, -4, -5, -9, 0],
[1, 1,  3,  0,  1, 3]])
```

In [32]:
```
B1=gauss.op(B1,"-r0+r2->r2")
B1
```

```
-1R0+1R2 -> R2
```

Out[32]:
```
Matrix([
[1, 0,  2,  5,  6, 2],
[0, 4, -4, -5, -9, 0],
[0, 1,  1, -5, -5, 1]])
```

In [33]:
```
B1=gauss.op(B1,"r1<->r2")
B1
```

```
R1 <-> R2
```

Out[33]:
```
Matrix([
[1, 0,  2,  5,  6, 2],
[0, 1,  1, -5, -5, 1],
[0, 4, -4, -5, -9, 0]])
```

In [34]:
```
B1=gauss.op(B1,"-4r1+r2->r2")
B1
```

```
-4R1+1R2 -> R2
```

Out[34]:
```
Matrix([
[1, 0,  2,  5,  6,  2],
[0, 1,  1, -5, -5,  1],
[0, 0, -8, 15, 11, -4]])
```

1 ¿Cuantas columnas tiene la matriz de coeficientes de E? %R. 5

2 ¿Cuál es el elemento del renglón 1 de los términos constantes de E? %R. 2

3 ¿Cuál es el elemento 2,5 de E?%R. 3

4 ¿Cuantas ecuaciones tiene E? %R. 3

5 ¿Cuantas variables tiene E? %R. 5

6 ¿Cómo queda el elemento 0,4 después de restarle el renglón 1 al renglón 0?%R. -3

7 Encuentre la forma escalón. ¿Cuantos pivotes tiene? %3

8 ¿Máximo cuantos pivotes puede tener una matriz de 5×8? % 5

9 ¿Máximo Cuantos pivotes puede tener una matriz de 7×4?%4

10 ¿Máximo cuantos parámetros puede tener una matriz extendida de 5×8? %7

11 ¿Máximo cuantos parámetros puede tener una matriz extendida de 7×4?%3

12 ¿Cuantos parámetros tiene E? %2

13 Encuentre la forma reducida de E ¿Cuál es el valor del primer término constante?%1

14 ¿Cuál es el valor del segundo término constante?%0.5

15 ¿Cuál es el valor del tercer término constante?%0.5

16 Escriba: 0 si E es inconsistente, 1 si E es consistente y tiene solución única o 2 si E es consistente y tiene infinitas soluciones.%2

17 ¿Por cuánto hay que multiplicar el primer renglón para que al sumarlo al segundo renglón elimine el primer elemento? % -0.5