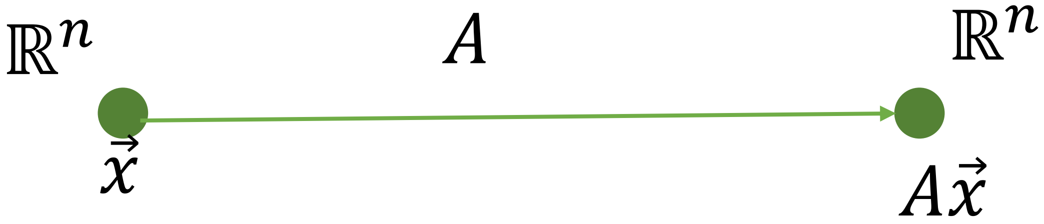
Vectores Propios

gmunoz@udistrital.edu.co

Para la clase de hoy asuma que las matrices A,B,C,D son matrices cuadrades de n x n.

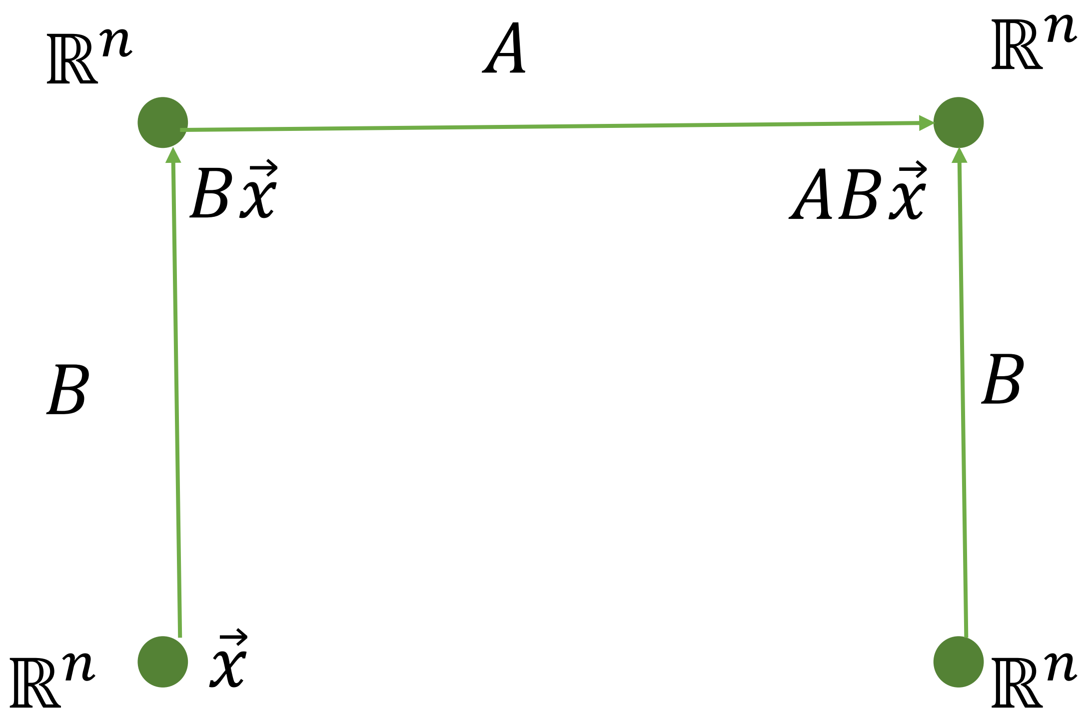
Matrices semejantes



Matrices semejantes

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \quad B\vec{x} \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^n \quad \vec{x} \arrow[u, "B"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}
$$

Matrices semejantes



Matrices semejantes

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \; B\vec{x} \arrow[rr, "A"] & & AB\vec{x} \; \mathbb{R}^n \arrow[d, shift left, "B^{-1}"] \\
\mathbb{R}^n \; \vec{x} \arrow[u, "B"] & & B^{-1}AB\vec{x} \; \mathbb{R}^n \arrow[u, shift left, "B"]
\end{tikzcd}$$

B es invertible

Matrices semejantes

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^n \arrow[u, "B"] \arrow[r, "D = B^{-1}AB."'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}
$$

Matrices semejantes

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "B"] \arrow[r, "D"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

$$D = B^{-1}AB.$$

- Dos matrices A y D son **semejantes** si existe una matriz B invertible tal que

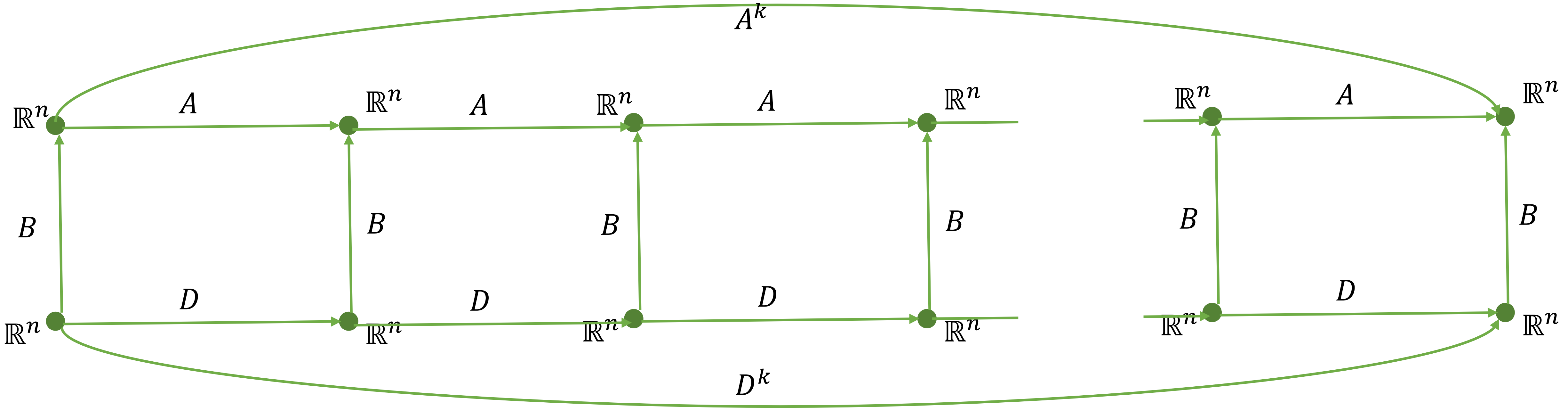
$$D = B^{-1}AB$$

- Si D es una matriz diagonal, entonces se dice que A es **diagonalizable** y que B **diagonaliza** a A

Exponentes en matrices diagonales

- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d+bc \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- $= \begin{bmatrix} a^3+2abc+bcd & a^2b+abd+b^2c+bd^2 \\ a^2c+acd+bc^2+cd^2 & abc+2bcd+d^3 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'^2 & 0 \\ 0 & d'^2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'^2 & 0 \\ 0 & d'^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'^3 & 0 \\ 0 & d'^3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a'^k & 0 \\ 0 & d'^k \end{bmatrix}$



- $D^k = B^{-1}A^kB$

- $BD^kB^{-1} = A^k$

Hay que buscar una matriz invertible B que permita convertir la matriz A, en una matriz diagonal D.

- $D = B^{-1}AB$
- $BD = AB$
- $B\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = A[v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n]$

$$\left[B\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;\; B\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;\; \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} \;\; B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right] = [Av_1 \;\; Av_2 \;\; \cdots \;\; Av_n]$$

$$[\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \cdots \quad \lambda_n v_n] = [Av_1 \;\; Av_2 \;\; \cdots \;\; Av_n]$$

$$\lambda_i v_i = Av_i$$

Las columnas de la matriz

$$B = [v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n]$$

forman una base de $\mathbb{R}^n$

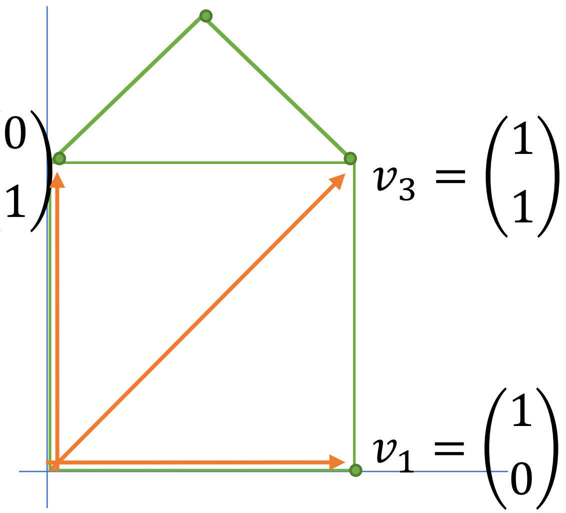
La matriz

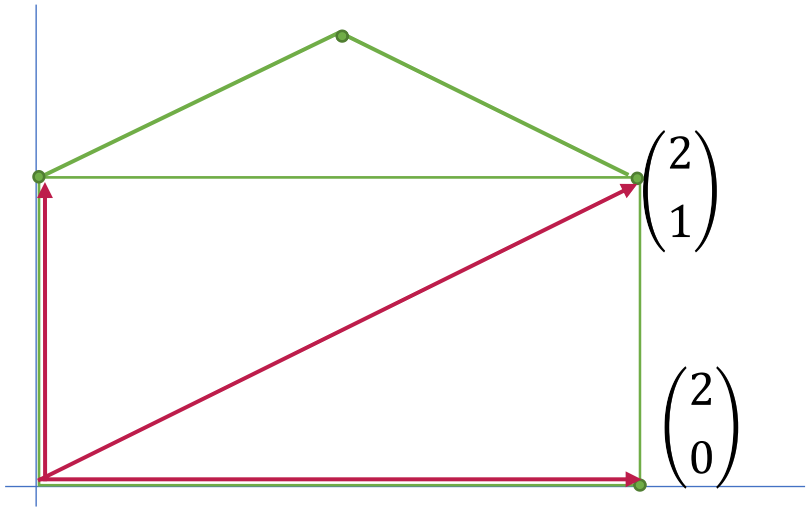
$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal

Los vectores v_i (no nulos) que cumplen esta condición se llaman **vectores característicos** o **vectores propios** o **eigenvectores**
Los escalares λ_i que cumplen esta condición se llaman **valores característicos** o **valores propios** o **eigenvalores**

Geometría de los vectores propios



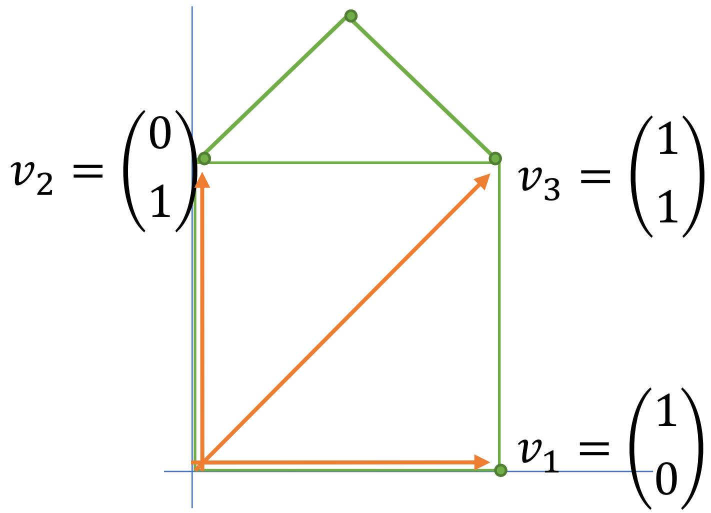


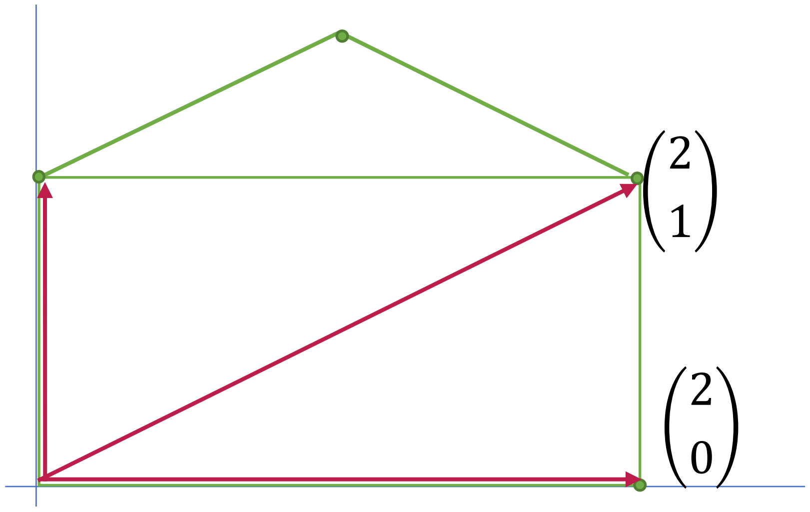
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\lambda_i v_i = A v_i$

- v_i es un vector propio de A si Av_i es paralelo a v_i.
- $Av_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1,$ El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sí es un vector propio de A. El valor propio respectivo es 2.
- $Av_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 v_2,$ El vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sí es un vector propio de A. El valor propio respectivo es 1.
- $Av_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$ El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no es vector propio de A

Geometría de los vectores propios

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\lambda_i v_i = A v_i$





- v_i es un vector propio de A si Av_i es paralelo a v_i.
- $Av_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1$, El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sí es un vector propio de A. El valor propio respectivo es 2.
- $Av_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 v_2$, El vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sí es un vector propio de A. El valor propio respectivo es 1.
- $Av_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no es vector propio de A

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=B^{-1}AB$$

Encontrar los vectores propios

- En la mayoría de los casos no son evidentes los vectores propios, es por esto que toca encontrar un procedimiento para hallarlos.
- $Av_i = \lambda_i v_i$
- Av_i- $\lambda_i v_i = \vec{0}$
- ~~$(A$- $\lambda_i)v_i = \vec{0}$~~
- Av_i- $\lambda_i I_n v_i = \vec{0}$
- $(A$- $\lambda_i I_n)v_i = \vec{0}$

- Vamos a definir la matriz característica

$$C_i = (A - \lambda_i I_n)$$

- $C_i v_i = \vec{0}$
- Tenemos que encontrar la solución del sistema homogéneo $[C_i: 0]$. No sirve que C_i sea invertible porque la solución sería única

$$\cancel{v_i = C_i^{-1}\vec{0} = \vec{0}}$$

- Por lo tanto debemos encontrar los valores λ_i que hacen que C_i no sea invertible, es decir cuando

$$|C_i| = 0$$

Ejemplo de obtención de valores propios

- $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

'Matriz característica'

- $C_i = A - \lambda_i I_n = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \lambda_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5-\lambda_i & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 7-\lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7-\lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7-\lambda_i \end{bmatrix}$

'Multiplicidad algebraica'

- $|C_i| = \begin{vmatrix} 5-\lambda_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5-\lambda_i & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 7-\lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7-\lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7-\lambda_i \end{vmatrix} = (5-\lambda_i)^2(7-\lambda_i)^3$

'polinomio característico'

En una matriz triangular, el determinante es la multiplicación de la diagonal

- $$(5-\lambda_i)^2(7-\lambda_i)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 7, \end{cases}$$

'ecuación característica'

Las raíces del polinomio característico son los 'valores característicos'

Para cada valor propio se encuentra la solución de $[C_i : 0]$, conocido como el **espacio característico**

- Para $\lambda_1 = 5$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 5-5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5-5 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7-5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left\langle\begin{array}{c} R1 \leftrightarrow R2 \\ R2 \leftrightarrow R3 \\ R3 \leftrightarrow R4 \\ R0 \leftrightarrow R1 \\ R1 \leftrightarrow R2 \\ R2 \leftrightarrow R3 \end{array}\right\rangle \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Variables libres: $x_1 = t_1, x_2 = t_2$

Variables delanteras: $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$

Solución general

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Base del espacio característico

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Es un plano en $\mathbb{R}^5$ ya que el rango de C_1 es 2. Por lo tanto la **multiplicidad geométrica** de λ_1 es 2.

- Para $\lambda_2 = 7$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 5-7 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5-7 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 7-7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7-7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7-7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Variables libres: $x_3 = t_1, x_4 = t_2, x_5 = t_3$

Variables delanteras:

$$-2x_2 + 4t_1 + 6t_2 + 8t_3 = 0,$$
$$x_2 = 2t_1 + 3t_2 + 4t_3$$

$$-2x_1 + t_1 + 2t_2 + 3t_3 = 0$$
$$x_1 = \frac{1}{2}t_1 + t_2 + \frac{3}{2}t_3$$

Solución general

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base del espacio característico

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Es un espacio de 3 dimensiones en $\mathbb{R}^5$ ya que el rango de C_2 es 3. Por lo tanto la **multiplicidad geométrica** de λ_2 es 3.

La **multiplicidad geométrica** de λ_i es el rango de la matriz C_i

Respuesta y verificación

	M. Alg.	M. Geom	Base del E.C.
$\lambda_1 = 5$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$
$\lambda_2 = 7$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Como cada una de las multiplicidades algebraicas es igual a la algebraica entonces A sí es diagonalizable.

- $D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&7&0&0\\0&0&0&7&0\\0&0&0&0&7\end{bmatrix}$
- B está formada por las bases de los espacios característicos, en el orden de los vectores característicos.
- $B = \begin{bmatrix}1&0&1/2&1&3/2\\0&1&2&3&4\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$

- Verificación:

- $BD = AB$
- $\begin{bmatrix}1&0&1/2&1&3/2\\0&1&2&3&4\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&7&0&0\\0&0&0&7&0\\0&0&0&0&7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5&0&7/2&7&21/2\\0&5&14&21&28\\0&0&7&0&0\\0&0&0&7&0\\0&0&0&0&7\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}5&0&1&2&3\\0&5&4&6&8\\0&0&7&0&0\\0&0&0&7&0\\0&0&0&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1/2&1&3/2\\0&1&2&3&4\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5&0&7/2&7&21/2\\0&5&14&21&28\\0&0&7&0&0\\0&0&0&7&0\\0&0&0&0&7\end{bmatrix}$

$$e^{A}$$

- Sabemos que

$$e^x = 1 + \mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \frac{\mathrm{x}^3}{3!} + \frac{\mathrm{x}^4}{4!} + \cdots$$

- Para una matriz cuadrada A

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots$$

- En caso de una matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}^3 + \frac{1}{4!}\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}^4 + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \mathrm{d}_1 + \frac{\mathrm{d_1}^2}{2} + \frac{\mathrm{d_1}^3}{3!} + \frac{\mathrm{d_1}^4}{4!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \mathrm{d}_2 + \frac{\mathrm{d_2}^2}{2} + \frac{\mathrm{d_2}^3}{3!} + \frac{\mathrm{d_2}^4}{4!} + \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 \\ 0 & e^{d_2} \end{bmatrix}$$

- Existen diversos tipos de sistemas, como los circuitos pasivos (resistencias, condensadores e inductancias) que se pueden describir con un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}$$

- Donde $y_i' = \frac{dy_i}{dt}$

[Chen 4.7]

- Una solución de la ecuación matricial

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

- está dada por

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\,\vec{y}(0) \qquad \text{[Chen 4.7]}$$

- Diagonalizando se obtiene

$$\vec{y}(t) = Be^{tD}B^{-1}\vec{y}(0)$$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\vec{y}(t) = e^{tA} = Be^{tD}B^{-1}$
- $B^{-1} = \frac{1}{2-3}\begin{bmatrix} a & b \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
- $e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-1t} \end{bmatrix}$
- $\vec{y}(t) = e^{tA} = Be^{tD}B^{-1}$
- $= \begin{bmatrix} \tilde{n} & f \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-1t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g & h \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
- $= \begin{bmatrix} ie^{-2t} & je^{-1t} \\ e^{-2t} & e^{-1t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & l \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
- $= \begin{bmatrix} me^{-2t} + ne^{-1t} & pe^{-2t} - qe^{-1t} \\ -e^{-2t} + e^{-1t} & 3e^{-2t} - 2e^{-1t} \end{bmatrix}$

Ejemplos de vectores propios

- Ver ejemplos de Grossman 546