Rectas y Planos

gmunoz@udistrital.edu.co

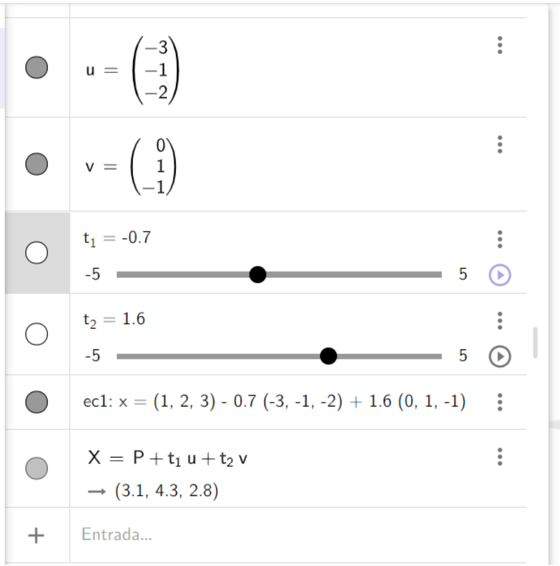
Planos en 3D

Plano en 3D

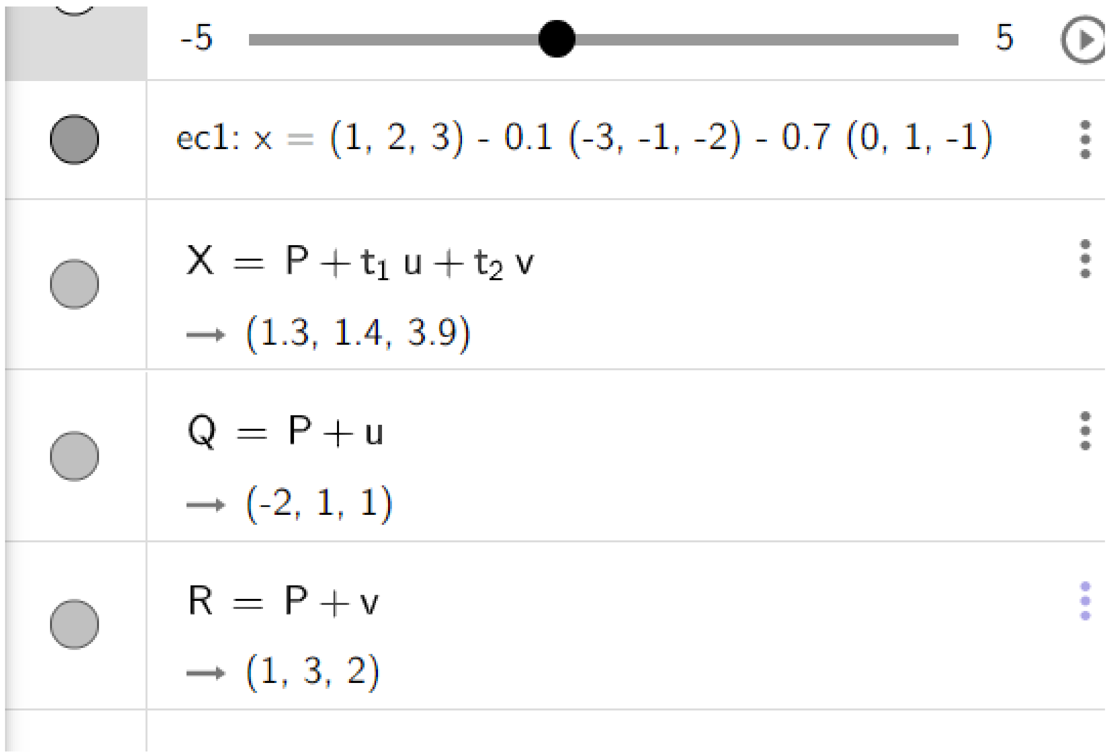
Ecuación vectorial del plano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \mathrm{t}_2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = P + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}$$



Plano en 3D



Ecuación vectorial del plano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \mathrm{t}_2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = P + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}$$

$Q - P = \vec{u}$
$R - P = \vec{v}$

$Q = P + \vec{u}$
$R = P + \vec{v}$

Tres puntos

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix},$$

Plano en 3D

$u = Q - P$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$v = R - P$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$u' = \text{Vector}(P, P + u)$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$v' = \text{Vector}(P, P + v)$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ecuación vectorial del plano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \mathrm{t}_2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = P + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}$$

$Q - P = \vec{u}$
$R - P = \vec{v}$

$Q = P + \vec{u}$
$R = P + \vec{v}$

Tres puntos

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix},$$

Plano en 3D

$w = u \otimes v$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$w' = \text{Vector}(P, P + w)$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ecuación vectorial del plano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \mathrm{t}_2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = P + t_1 \vec{u} + t_2 \vec{v}$$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

Punto, Perpendicular

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = 0$$

$$(\vec{x} - P) \cdot \vec{w} = 0$$

$Q - P = \vec{u}$

$R - P = \vec{v}$

$Q = P + \vec{u}$

$R = P + \vec{v}$

Tres puntos

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$3x - 3y - 3z = 3 - 6 - 9$$

$$3x - 3y - 3z = -12$$

Plano en 3D

Una ecuación lineal con 3 variables

$$w_x x + w_y y + w_z z = d$$

Solución general del sistema de una ecuación

Ecuación vectorial del plano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = P + t_1 \vec{u} + t_2 \vec{v}$$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

Punto, Perpendicular

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = 0$$

$$(\vec{x} - P) \cdot \vec{w} = 0$$

Realizar las operaciones y pasar las constantes a la derecha

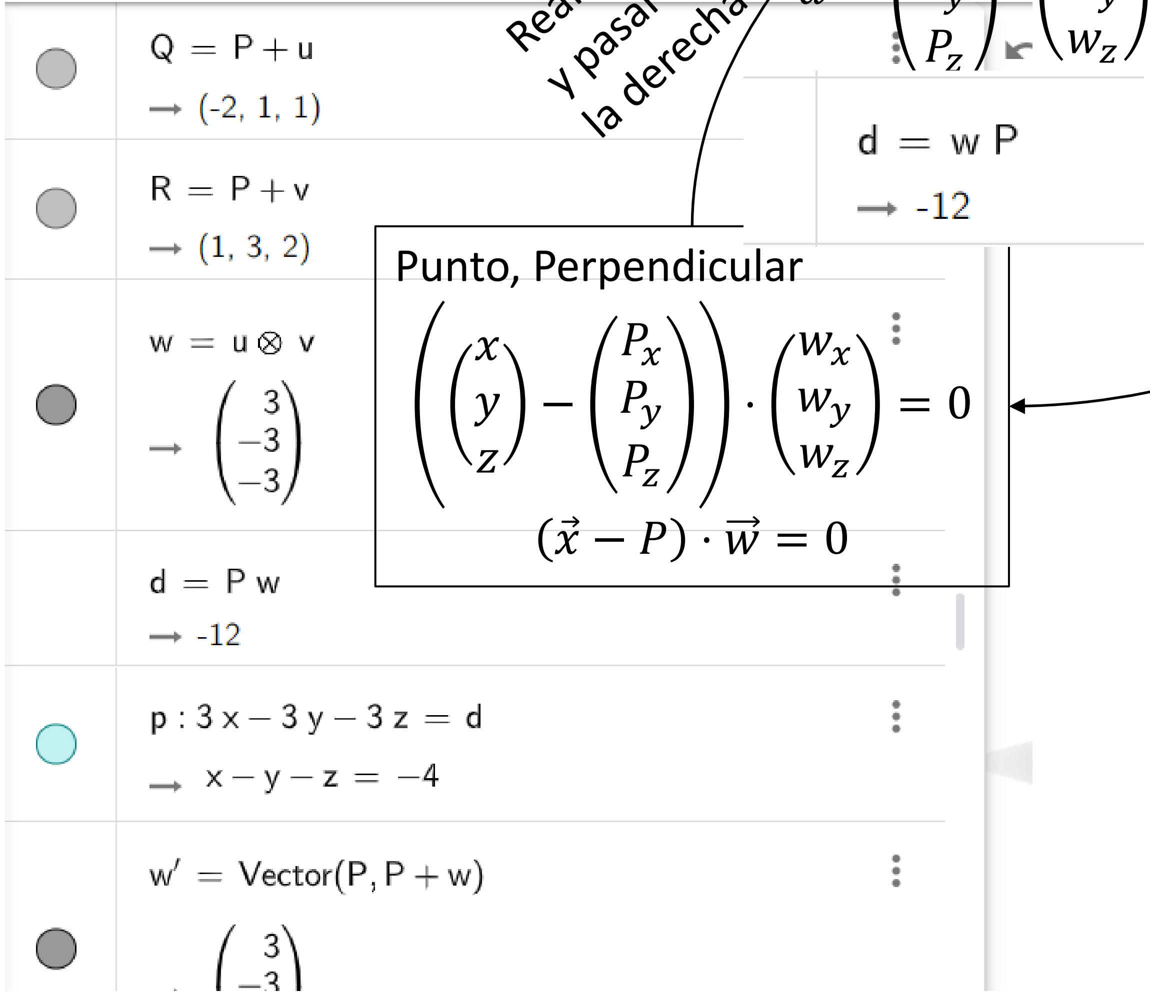
$$d = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

$Q - P = \vec{u}$
$R - P = \vec{v}$

$Q = P + \vec{u}$
$R = P + \vec{v}$

Tres puntos

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix},$$



Plano en 3D

Una ecuación lineal con 3 variables
2 variables libres y 1 variable delantera

$$w_x x + w_y y + w_z z = d$$

Ecuación general (Nakos)
Ecuación cartesiana (W. Mora)

Solución general del sistema de una ecuación

Ecuación vectorial del plano. $\vec{u}, \vec{v}$ son L.I.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \mathrm{t}_2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = P + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}$$

$Q = P + \vec{u}$
$R = P + \vec{v}$

Tres puntos no colineales

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix},$$

$Q - P = \vec{u}$
$R - P = \vec{v}$

$\vec{w} = \vec{\mathrm{u}} \times \vec{v}$

Punto, Perpendicular

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = 0$$

$$(\vec{x} - P) \cdot \vec{w} = 0$$

$\vec{w} \neq \vec{0}$

Ecuación punto, normal (Nakos)
Ecuación normal (W. Mora)

Realizar las operaciones y pasar las constantes a la derecha

$$d = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

Plano en 3D

3x+2y+3z=6

Una ecuación lineal con 3 variables

$$w_x x + w_y y + w_z z = d$$

Ecuación general (Nakos)
Ecuación cartesiana (W. Mora)

Solución general del sistema de una ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ecuación vectorial del plano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = P + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}$$

$Q = P + \vec{u}$
$R = P + \vec{v}$

Tres puntos

$$P = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 2+(-2/3) \\ 0+1 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 2+(-1) \\ 0+0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Q - P = \vec{u}$
$R - P = \vec{v}$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$

$$w = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1*1)-(0*0) \\ -((-2/3*1)-(0*-1)) \\ (-2/3)*0 - 1*(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punto, Perpendicular

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = 0$$

$$(\vec{x} - P) \cdot \vec{w} = 0$$

Ecuación punto, normal (Nakos)
Ecuación normal (W. Mora)

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Realizar las operaciones y pasar las constantes a la derecha

$$d = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

Ecuación lineal

3x+2y+3z=6

$$[3 \quad 2 \quad 3 \quad : \quad 6]$$

y,z son variables libres

$$y = t_1$$

$$z = t_2$$

Despejamos la variable delantera

$$3x = 6 - 2t_1 - 3t_2$$

$$x = 2 - \frac{2}{3}t_1 - t_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{t}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ecuación vectorial del plano

Ejercicio

Complete cada renglón con la respectiva información que corresponde al mismo plano.

Una forma de ecuación lineal	Una forma paramétrica	Tres puntos no colineales	Dibujo
$3x+2y+3z=6$			
	$x=3+2t_1+t_2$ $y=-1+t_1-t_2$ $z=-t_1+4t_2$		
		(3,5,1) (2,4,1) (6,1,1)	

Taller para Hoy

- Ejercicios Nakos 2.7.{17,21,23}