Integración

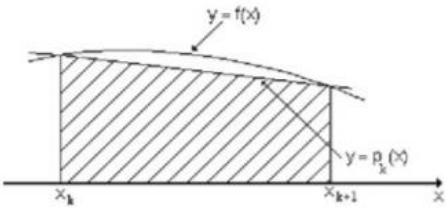
Método del trapecio

La función f se aproxima en cada sub-intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1, \dots, n-1$, mediante un polinomio de interpolación lineal de LaGrange $p_k(x)$, usando los nodos x_k y x_{k+1}. El polinomio de interpolación de LaGrange es:

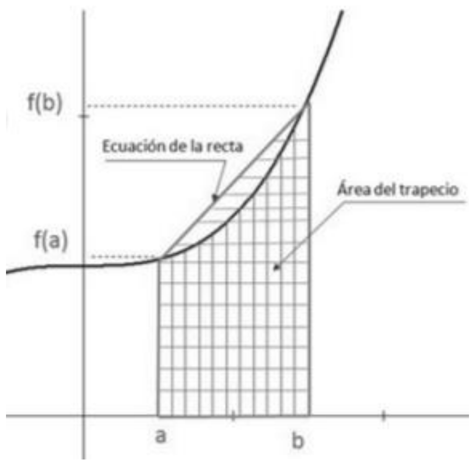
$$p_k(x) = f(x_k)\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1})\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Entonces:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k(x)dx$$



$$= \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\text{Ancho h}} \underbrace{\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}}_{\text{Altura promedio}}$$



Si h = $x_{k+1} - x_k$:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h[f(x_k) + f(x_{k+1})]}{2}$$

Si h es un sub-intervalo de [a,b]:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h[f(x_k) + f(x_{k+1})]}{2}$$

Para n = cantidad de sub-intervalos:

- Si n = 1 entonces h = b-a. La fórmula se reduce a:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

Error método del trapecio simple

$$E_k = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

Método del Trapecio compuesto

Si n >1 entonces:

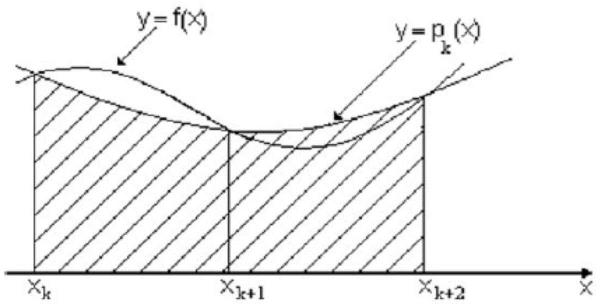
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)]$$

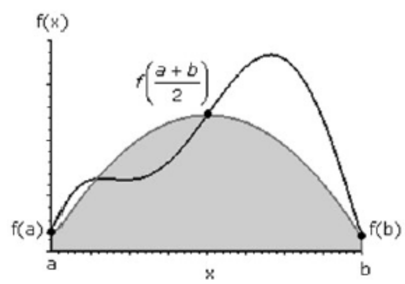
Error método del trapecio compuesto

$$E_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

Método Simpson 1/3

Se aproxima la función f en cada sub-intervalo $[x_k, x_{k+2}]$, k = 0,2, … , n − 2, mediante un polinomio de interpolación de LaGrange de grado menor o igual que dos, usando los nodos $x_{k,}$, x_{k+1} y x_{k+2}.
En este caso, el número de sub-intervalos n debe ser par.





El polinomio de interpolación de LaGrange de grado menor o igual que dos, usando los nodos $x_{k,}$, x_{k+1} y x_{k+2} es:

$$p_k(x) = f(x_k)\frac{(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})} + f(x_{k+1})\frac{(x - x_k)(x - x_{k+2})}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k+2})} + f(x_{k+1})\frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k+2} - x_k)(x_{k+2} - x_{k+1})}$$

Entonces:

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx \approx \underbrace{(x_{k+2} - x_k)}_{\text{Ancho}} \frac{f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})}{6}$$

$$= 2h \frac{f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})}{6} = \frac{h}{3}[f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})]$$

Como $h = \frac{b-a}{2}$ entonces:

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{6}\right) + f(b)]$$

Error método Simpson 1/3 simple

$$E_k = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi_k)$$

Método Simpson 1/3 compuesta

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})]$$

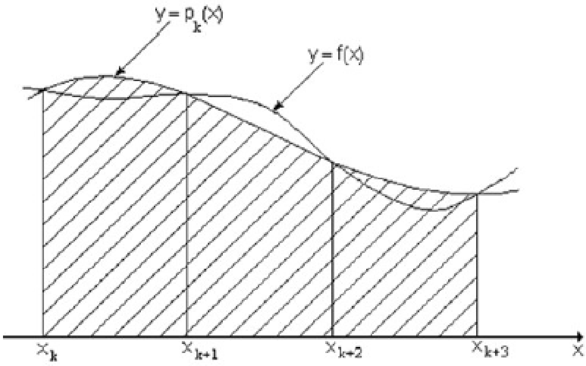
Con n = 2m, m ≥ 2 entero.

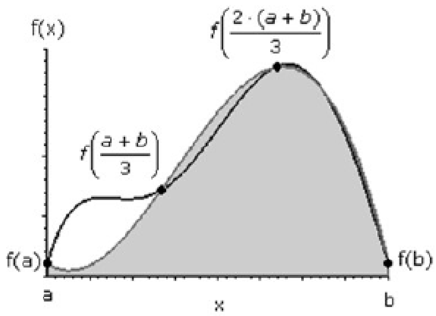
Error método Simpson 1/3 compuesta

$$E_T = h^4 \frac{b-a}{180} f^{(iv)}(\xi)$$

Método Simpson 3/8

Se puede interpolar la función f en cada sub-intervalo $[x_k, x_{k+3}]$, k = 0,3, … , n −3, (lo que requiere que n sea un entero positivo múltiplo de 3) mediante un polinomio de interpolación de LaGrange de grado menor o igual que tres, usando los nodos x_k, x_{k+1}, x_{k+2} y x_{k+3}.





$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx \approx \underbrace{(x_{k+3} - x_k)}_{\text{Ancho}} \frac{f(x_k) + 3f(x_{k+1}) + 3f(x_{k+2}) + f(x_{k+3})}{8}$$

$$= 3\frac{h}{8}[f(x_k) + 3f(x_{k+1}) + 3f(x_{k+2}) + f(x_{k+3})]$$

Si n = 3 entonces $h = \frac{b-a}{3}$, Por lo tanto, la formula se reduce a:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3(b-a)}{24}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right]$$

$$\frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right]$$

Error método Simpson 3/8 simple

$$E_k = -\frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\xi_k), \ \ \xi_k \in (\, x_k, \ x_{k+3}), \qquad k = 0,3, \dots, n-3$$

Método Simpson 3/8 compuesta

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx$$

Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(a) + f(b) + 3\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{3}} f(x_{3k+1}) + 3\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{3}} f(x_{3k+2}) + 2\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{3}} f(x_{3k})\right]$$

Con n = 3m, m ≥ 3 entero.

Error método Simpson 3/8 compuesta

$$E_T = -h^4 \frac{b-a}{80} f^{(iv)}(\xi)$$

Integración de Romberg

Es una técnica diseñada para obtener integrales numéricas de funciones de manera más eficiente. Se basa en aplicaciones sucesivas de la regla del trapecio. Sin embargo, a través de las manipulaciones matemáticas, se alcanzan mejores resultados con menos trabajo. El método de Romberg genera una matriz triangular cuyos elementos son estimaciones numéricas de la integral definida $\int_a^b f(x)$ usando la extrapolación de Richardson de forma reiterada en la regla del trapecio. Si se aplica la regla de los Trapecios sucesivamente para tamaños de intervalo h_k :

$$h_1 = b - a (m_1 = \ 2^0 \ subintervalos)$$

$$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{b-a}{2} (m_2 = \ 2^1 \ subintervalos)$$

$$h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{b-a}{2^2} (m_3 = \ 2^2 \ subintervalos)$$

$$\dots$$

$$h_k = \frac{h_{k-1}}{2} = \frac{b-a}{2^{k-1}} (m_k = \ 2^{k-1} \ subintervalos)$$

Requiere conocer la función o disponer de

$$n = \ m_k + 1 = \left(2^{k-1} + 1\right) puntos$$

En general, 2^{k-1} trapecios:

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \{R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + \frac{2i-1}{2} h_{k-1})\}$$

Integración Gaussian

Gauss, es una cuadratura construida para integrar polinomios de grado $2n - 1$ o menos. Para esto selecciona los puntos de evaluación x_i y los pesos w_i de forma conveniente. La regla suele expresarse para una integral en el intervalo [−1, 1], y viene dada por la siguiente expresión.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

$$f(x) \text{ } es \text{ } un \text{ } polinomio \text{ } de \text{ } grado \text{ } 2n - 1$$

Puntos de evaluación x, pesos de los puntos de evaluación w

Número de puntos, n	Puntos, x_i	Pesos, w_i
1	0	2
2	$\pm\sqrt{1/3}$	1
3	0	$8/9$
	$\pm\sqrt{3/5}$	$5/9$
4	$\pm\sqrt{\left(3-2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\left(3+2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$128/225$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{10/7}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

n	Nodos $x_{n,k}$	Pesos $w_{n,k}$	Error $E_n[f]$
2	±0.5773502692	1.0000000000	$(1/135)\cdot f^{4)}(c)$
3	±0.7745966692 0.0000000000	0.5555555556 0.8888888888	$\frac{1}{15\,750} f^{6)}(c)$
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549	$\frac{1}{3\,472\,875} f^{8)}(c)$
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0.0000000000	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888	$\frac{1}{1\,237\,732\,650} f^{10)}(c)$
6	±0.9324695142 ±0.6612093865 ±0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346	$\frac{2^{13}\cdot 6!^4}{13\cdot 12!^3} f^{12)}(c)$
7	±0.9491079123 ±0.7415311856 ±0.4058451514 0.0000000000	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837	$\frac{2^{15}\cdot 7!^4}{15\cdot 14!^3} f^{14)}(c)$

Cambio de intervalos

Aplicando un cambio de variable lineal, se puede convertir una integral en el intervalo [a, b], en una integral en [−1, 1]:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}\right) du$$

Derivación

Diferencias progresivas

Primera derivada

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{-f(x_i + 2h) + 4f(x_i + h) - 3f(x_i)}{2h}$$

Segunda derivada

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{-f(x_i + 3h) + 4f(x_i + 2h) - 5f(x_i + h) + 2f(x_i)}{h^2}$$

Tercera derivada

$$f'''(x_i) \approx \frac{f(x_i + 3h) - 3f(x_i + 2h) + 3f(x_i + h) - f(x_i)}{h^3}$$

$$f'''(x_i) \approx \frac{-3f(x_i + 4h) + 14f(x_i + 3h) - 24f(x_i + 2h) + 18f(x_i + h) - 5f(x_i)}{2h^3}$$

Diferencias regresivas

Primera derivada

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{3f(x_i) - 4f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{2h}$$

Segunda derivada

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i) - 2f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{h^2}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{2f(x_i) - 5f(x_i - h) + 4f(x_i - 2h) - f(x_i - 3h)}{h^2}$$

Tercera derivada

$$f'''(x_i) \approx \frac{f(x_i) - 3f(x_i - h) + 3f(x_i - 2h) - f(x_i - 3h)}{h^3}$$

$$f'''(x_i) \approx \frac{5f(x_i) - 18f(x_i - h) + 24f(x_i - 2h) - 14f(x_i - 3h) + 3f(x_i - 4h)}{2h^3}$$

Diferencias centrales

Primera derivada

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{-f(x_i + 2h) + 8f(x_i + h) + 8f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{12h}$$

Segunda derivada

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{-f(x_i + 2h) + 16f(x_i + h) - 30f(x_i) + 16f(x_i - h) - f(x_i - 2h)}{12h^2}$$

Tercera derivada

$$f'''(x_i) \approx \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + 2f(x_i - h) - f(x_i - 2h)}{2h^3}$$

$$f'''(x_i) \approx \frac{-f(x_i - 3h) + 8f(x_i + 2h) - 13f(x_i + h) + 13f(x_i - h) - 8f(x_i - 2h) + f(x_i - 3h)}{8h^3}$$

Error

Primera derivada

$Valor\ exacto = f'(x)$

$ERROR = |f'(x_i) - V.E.|$

Segunda derivada

$Valor\ exacto = f''(x)$

$ERROR = |f''(x_i) - V.E.|$

Tercera derivada

$Valor\ exacto = f'''(x)$

$ERROR = |f'''(x_i) - V.E.|$