UNIVERSIDAD DE SONORA

Lic. Fisico-Matematico

Solución Númerica de Ecuaciónes Diferenciales Parciales

Fisica Computacional

Alumno: Gerardo A. Carreón Castro

Maestro: Carlos Lizarraga Celaya

4to Semestre

03 de Mayo de 2021

1 Introducción

Este reporte adjunta de manera concisa y resumida, todo el conocimiento aprendido a lo largo de las últimas 3 actividades de Física Computacional las cuales abarcan de manera parcial pero muy detallada el tópico de Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Una ecuación diferencial parcial, explicado de manera muy general, es aquella ecuación diferencial cuyas incógnitas son funciones de diversas variables independientes pero con la característica de que se hacen presentes también sus derivadas. El orden de una ecuación diferencial parcial está determinado por el grado de la derivada parcial más alto, las EDP (ecuación diferencial parcial) que nos interesan en este momento son la de segundo grado las cuales tienen de manera general la siguiente forma:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + F * u = G$$

De forma general, las Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales se pueden clasificar en 3 grandes familias, esta clasificación se calcula a partir del valor del determinante de la matriz formada por los coeficientes de la EDP:

$$det = \begin{bmatrix} B & A \\ C & B \end{bmatrix}$$

1. <u>Parabólicas</u> (det$= 0$): Ecuación de calor, Ecuación de difusión
2. <u>Hiperbólicas</u> (det> 0): Ecuación de onda
3. <u>Elípticas</u> (det< 0): Ecuación de Laplace

Además, las Ecuaciones Diferenciales Parciales involucran diversos tipos de condiciones de frontera:

- Tipo de Dirichlet
- Tipo de Neumann
- Tipo de Robin

Otro punto muy importante son los métodos de solución numérica, de estos hay una variedad bastante amplia sin embargo, dependiendo del tipo de EDP y el problema nos convendrá utilizar uno u otro. Para estas 3 últimas actividades el método a utilizar fue el de Método de Diferencias Finitas.

Ahora que ya se dio una breve introducción de los temas que se tocaran y el desarrollo de los distintos métodos de solución, se procederá a explicar en mayor profundidad los ejercicios de las actividades 10, 11 y 12 del curso además de temas relevantes al mismo.

2 Descripción de las tres grandes familias de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Parabólica:

La primera descripción será para la familia de las Ecuaciones Diferenciales Parciales Parabólicas. Estas, como ya se mencionó anteriormente, se presentan cuando el valor del determinante de los coeficientes es igual a cero:

$$det = \begin{bmatrix} B & A \\ C & B \end{bmatrix} \longrightarrow det = 0$$

Este tipo de ecuaciones se presentan en muchos fenómenos que involucran fluidos y que dependen del tiempo como conducción de calor, difusión de partículas y muchos otros.

Hiperbólica:

La EDP Hiperbólica tienen como caracteristica que estan asociadas con problemas de en los que no existen procesos disipativos como los de ondas, esto a su vez implica que las condiciones iniciales de frontera tienen discontinuidades que se propagan al interior del dominio.

Para estos casos el valor que debería tomar el determinante deberá ser mayor que cero para poder clasificarse como uno.

$$det = \begin{bmatrix} B & A \\ C & B \end{bmatrix} \longrightarrow det > 0$$

Elíptica:

Una EDP Elíptica es aquella en la que los coeficientes de las derivadas máximas son positivos, estas están relacionadas siempre a problemas de carácter estacionario donde cualquier discontinuidad que pueda existir en el contorno es suavizada en el interior del dominio, uno de los ejemplos más usados para representar este tipo de EDp es la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

El valor del determinante en estos casos debe ser menor a cero para considerarse del tipo elíptica:

$$det = \begin{bmatrix} B & A \\ C & B \end{bmatrix} \longrightarrow det < 0$$

3 Descripción de los tres tipos de Condiciones a la Frontera

Dirichlet:

Nombrada así en honor al matemático aleman Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, la condición a la frontera tipo Dirichlet es aquella en la que se especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio. La cuestión de hallar esas soluciones a esas condiciones con dicha condición se conoce como problema de Dirichlet. Problemas como superficies con temperatura fija, circuito tiene un nodo con voltaje fijo y la condición de no deslizamiento para fluidos viscosos son algunos ejemplos de problemas con este tipo de condición a la frontera.

Para una EDP de manera general:

$$\Delta^2 y + y = 0$$

Donde Δ^2 es el operador de Laplace, las condiciones tipo Dirichlet en el dominio $\Omega \subset R^n$ toman la forma:

$$y(x) = f(x), \forall x \partial\Omega$$

Donde f es la función definida por la frontera $\partial\Omega$

Neumann:

En matematicas la condición a la frontera de tipo Neumann, nombrada así en honor al matemático Carl Neumann, se presenta cuando a una EDO o EDP se le especifican los valores de la derivada de una solución tomada sobre la frontera o contorno del dominio.

Para una EDP de manera general:

$$\Delta^2 y + y = 0$$

Donde Δ^2 es el operador de Laplace, las condiciones tipo Neumann en el dominio $\Omega \subset R^n$ toman la forma:

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x) = f(x), \forall x \partial\Omega$$

Donde n denota la norma a la frontera $\partial\Omega$, y f es una función escalar dada

Robin:

Nombrada así en honor al matemático frances Victor Gustave Robin, la condición a la frontera tipo Robin es aquella donde a una EDO o EDP, se le especifica una combinación lineal de los valores de una función y los valores de su derivada sobre la frontera en el dominio.

Se dice que este tipo de condiciones son "mixto" debido a que se presenta una combinación de condiciones tipo Dirichlet y Neumann en sus problemas. Esta tiene diversos usos en el campo del electromagnetismo.

4 Descripción del Método de Diferencias Finitas

Este método numerico para solucionar ecuaciones diferenciales aproximando derivadas con diferencias finitas, discretiza tanto el dominio espacial como el temporal dando como resultado una aproximacion de la solución resolviendo ecuaciones algebraicas que contienen diferencias finitas y valores de los puntos cercanos. Este método puede convertir EDO y EDP no lineales en sistemas lineales de ecuaciones que pueden ser fácilmente resueltas por técnicas algebraicas.

Las diferencias finitas tienen de manera general 3 formas principales, las centradas, hacia enfrente y hacia atrás siendo las centradas el mejor método que nos proporciona mejores aproximaciones con errores más pequeños.

Todo parte de la series de Taylor para un polinomio de grado 1 para "$x_i + 1$" o "paso hacia delante":

$$f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(\varepsilon)}{2!}h^2$$

Como la aproximación que queremos calcular es la derivada de la función, la despejamos de la ecuación:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(\varepsilon)}{2!}h$$

Al despejar la derivada, el metodo pierde eficiencia por lo que el error baja un grado.
De manera general tenemos que el metodo de diferencias finitas hacia adelante como:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Este mismo modelo lo podemos plantear partiendo de la serie de taylor para un polinomio de orden 1 para "$x_i - 1$"

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

El error de truncamiento sigue siendo de grado 1 o lineal por lo que el método no es muy eficaz aun por lo que, para conseguir un mejor método que nos de una mejor aproximación a la primer derivada de una función lo que haremos será restar los dos anteriores métodos para formar así el método de de diferencias finitas centrado para un polinomio de orden 2:

$$f(x_i + h) = f(x_i) + f'(x_i h) + \frac{f''(x_i}{2!}h^2 + \frac{f'''(\varepsilon)}{6!}h^3$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - f'(x_i h) + \frac{f''(x_i}{2!}h^2 - \frac{f'''(\varepsilon)}{6!}h^3$$

$$f(x_i+h)-f(x_i-h)=2f'(x_ih)+2\frac{f'''(\varepsilon)}{3!}h^3$$

Finalmente:

$$f(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}\varepsilon(h^2)$$

El mismo método se sigue para aproximar las segunda derivadas pero ahora las series de Taylor seran para polinomios de grado 2, "x_i+2" y "x_i-2"

5 Solución de la Ecuación de Calor

La Ecuación de Calor descrita en la actividad 10 tiene la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$$

La cual se puede simplificar a:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$$

Donde "k" es el coeficiente de difusividad termica.

Dicha ecuación describe el flujo de calor en una región mediante los cambios de temperatura.

Aplicamos el método de diferencias finitas centradas utilizando las series de Taylor para obtener la aproximación de una diferencia finita centrada de orden superior:

$$f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}+\mathcal{O}(h^3)$$

Para este caso, utilizamos las condiciones a la frontera tipo Neumann para solucionar los ejercicios con condiciones diferentes. La graficación de las soluciones es otro detalle fundamental ya que nos sirve como comprobación de que la aproximación obtenida es en efecto la solución correcta.

El desarrollo de dicha actividad se encuentra detallado en mayor profundidad en el cuaderno de JupyterNotebook adjunto en el enlace: **https://github.com/GerardoxCarreon/FisicaComputacional1/blob/master/Actividad_10/Actividad10.ipynb**

6 Solución de la Ecuación de Onda

La Ecuación de Onda descrita en la actividad 11 tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + f(x,y,z,t)$$

La cual se puede simplificar a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + f(x,t)$$

Donde "c^2" es la velocidad de la onda, la función $u(x,y,z,t)$ puede representar la presión en una cuerda acústica la intensidad de un campo magnético entre otros posibles ejemplos.

Además de conocer el valor de "c" y de la función $u(x,y,z,t)$ es necesario definir 4 condiciones en el problema, 2 condiciones iniciales y 2 condiciones de frontera

Aplicamos el método de diferencias finitas centradas, en este caso para aproximar la segunda derivada, utilizando las series de Taylor para un polinomio de grado 3:

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} = c^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Cambiando de notación nuestras variables y simplificando obtenemos:

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{C^2}{2} + (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$$

Donde C es $\frac{c^2k^2}{h^2}$

Se procede a sustituir las condiciones iniciales en las expresiones obtenidas y se desarrolla el problema en cuestión.

El desarrollo de dicha actividad se encuentra detallado en mayor profundidad en el cuaderno de JupyterNotebook adjunto en el enlace:
https://github.com/GerardoxCarreon/FisicaComputacional1/blob/master/Actividad_11/Actividad11.ipynb

7 Solución de la Ecuación de Poisson

La Ecuación de Poisson descrita en la actividad 12 tiene la forma:

$$-\Delta^2 u(x, y, z) = f(x, y, z)$$

La cual se puede simplificar a:

$$-\Delta^2 u = f(x, y)$$

Aplicamos el método de diferencias finitas centradas para aproximar la segunda derivada, utilizando las series de Taylor para un polinomio de grado 3 obtenemos:

$$\frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2} + \frac{u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}}{k^2} \approx -f_n^m$$

Para el caso de condiciones a la frontera tipo Dirichlet (especificando valores de la función u) nos queda un problema matricial de la forma:

$$AU = F$$

Donde A es una matriz conocida tridiagonal al igual que F pero, U es deconocida. Se crea el dominio de los valores del espacio-tiempo osea la malla de valores (x,y) para posteriormente definir otra función que genere nuestras condiciones de frontera tipo Dirichlet para que a cada variable se le asigne su espacio de frontera y valor. Finalmente, trabajamos en la solución numerica.

El desarrollo de dicha actividad se encuentra detallado en mayor profundidad en el cuaderno de JupyterNotebook adjunto en el enlace:
https://github.com/GerardoxCarreon/FisicaComputacional1/blob/master/Actividad_12/Actividad12.ipynb

8 Conclusiones

Este conjunto de actividades, sin duda alguna, nos dejó muchos conocimientos que podremos aplicar a lo largo de nuestra carrera profesional, no solo obtuvimos información y técnicas nuevas de cómo resolver problemas que impliquen funciones de diversas variables independientes sino que también aprendimos que manera muy fácil y sencilla cómo se pueden complementar las herramientas y conocimientos vistos en un curso para el favorecimiento de otros. Aunque sea de manera parcial, indagamos de manera muy correcta a mi parecer los distintos tipos de ecuaciones diferenciales y los diversos metodos de solucion numerica que existen, por otro lado el saber aprovechar todas estas técnicas con la herramienta de Python hace que este conocimiento valga mil veces más ya que le estamos sacando todo el partido.

A lo largo del reporte hemos mencionado como estos tipos de problemas los podemos encontrar en diversas áreas de la física, electromagnetismo, fluidos, termodinamica, y mecanica son solo algunas de estas areas que se verán favorecidas por la experiencia ganada en el desarrollo de estas prácticas.

9 Bibliografía

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Parabolic_partial_differential_equation
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_partial_differential_equation
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_partial_differential_equation
5. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttextpid=S1405-77432019000300008
6. https://www.inf.utfsm.cl/parce/cc2/clase15-PA.html
7. https://www.cimat.mx/ angeluh/webpage_EDII/Material/EDP_libro.pdf
8. Cuaderno Jupyter Notebook del profesor Carlos Lizarraga: https://github.com/carloslizarragac/FisicaComputacional1