

“天棚”阻尼是 D.Karnopp 利用最优控制理论在 1974 年提出的一种悬架系统主动控制策略，其控制性能优越，具有一定的鲁棒性，但由于它是基于悬架速度的负反馈主动控制，对于移动的车辆来说无法实现。但将“天棚”阻尼悬架系统作为控制的参考模型，即把“天棚”系统作为实际系统控制的动态目标得到广泛的应用。但由于可调参数只有“天棚”阻尼系数，系统性能无法进一步提高。

本文采用天棚阻尼悬架作为研究对象，将分数阶微积分引入到“天棚”阻尼控制系统中，取代原来的整数阶导数。以 B 级路面为输入信号，根据优化理论找到最优的阶数和阻尼系数。最终，通过分析比较分数阶“天棚”阻尼悬架、整数阶“天棚”阻尼悬架和被动悬架，得出分数阶“天棚”阻尼悬架能够全面提高整数阶“天棚”阻尼悬架的性能。

1 车辆半主动悬架模型

车辆悬架按振动控制的方法分为被动、半主动、主动 3 个类型，其中主动悬架可很好地提高车辆的乘坐舒适性和操纵稳定性，但因其价格昂贵、能耗高、结构复杂、可靠性差，限制了它的推广；被动悬架系统减震器的阻尼特性不能根据路面状况和车辆运行状态进行实时的调节，因而控制效果有限；半主动悬架相比于主动悬架，结构相对简单，能量消耗少，价格低廉，而性能接近主动悬架，特别是磁流变材料的出现，其应用前景非常良好。

以具有两自由度的 1/4 车辆悬架模型作为研究对象，具有磁流变阻尼器的半主动悬架模型如图 1 所示，其动力学方程：

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s = -c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_t) - k_s (x_s - x_t) - F_d \\ m_t \ddot{x}_t = c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_t) + k_s (x_s - x_t) - k_t (x_t - x_g) + F_d \end{cases} \quad (1)$$

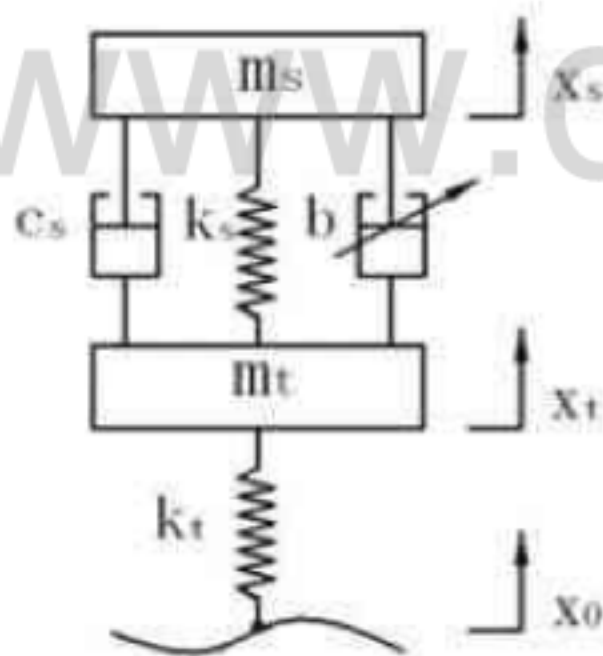


图 1 半主动悬架模型

式中， m_s ——簧载质量， m_t ——簧下质量； c_s ——悬架结构阻尼； k_s ——悬架刚度， k_t ——轮胎刚度； x_s ——车身位移， x_t ——轮胎位移， x_g ——路面位移； F_d ——半主动控制力， Fb ——磁流变阻尼器的可调阻尼系数。

半主动悬架是 1974 年由美国加州大学戴维斯分校机械工程系 D. E. Karnopp

教授等提出的，并利用天棚阻尼控制理论给出半主动悬架的控制策略，近十多年来，基于各种控制理论和磁流变阻尼器技术的半主动悬架控制策略相继发表，例 LQR/LQG 控制、滑模变结构控制、自适应控制、人式神经网络控制、模糊控制、鲁棒控制等，相比较优这些较复杂的控制理论，天棚阻尼控制方法以其简单有效一直在半主动振动控制方面占有重要的一席之地。

2. 分数阶天棚阻尼悬架模型

2.1 天棚阻尼悬架模型

天棚阻尼控制实际是形象化的最优输出反馈控制方法，见图 (2)，其动力学方程为

$$\begin{cases} m_s \ddot{x}_s = -c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_t) - k_s (x_s - x_t) - F_d \\ m_t \ddot{x}_t = c_s (\dot{x}_s - \dot{x}_t) + k_s (x_s - x_t) - k_t (x_t - x_g) \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$F_d = b \cdot \dot{x}_s \quad (3)$$

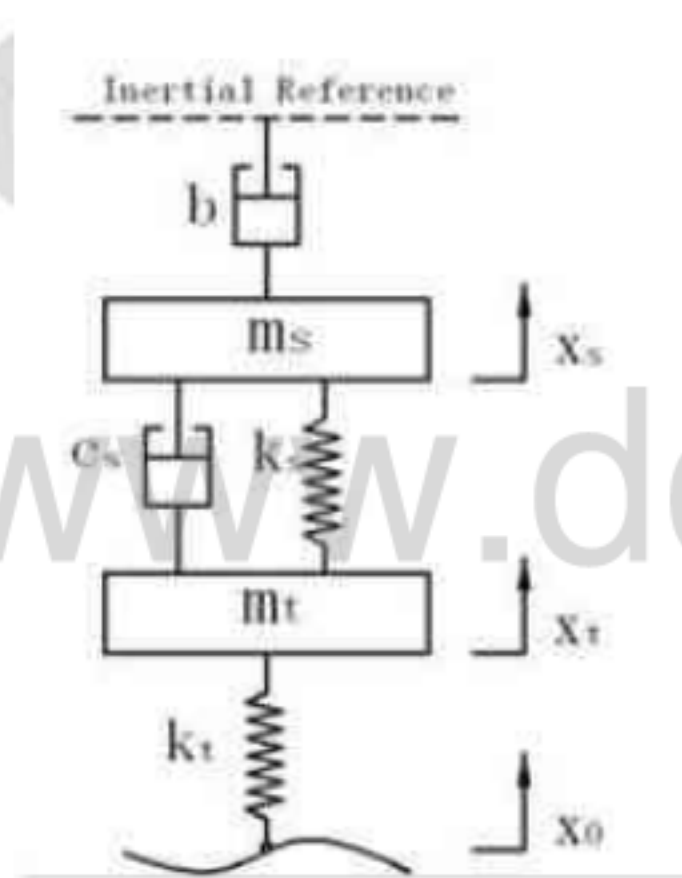


图 2 天棚阻尼悬架模型

这儿的 b 为天棚阻尼系数。由于这种悬架只能是一种存在于实验室中的模型。实际的汽车上并没有“天棚”作为惯性参考，该模型不能在实际悬架上应用，必须通过其它控制策略来间接实现，因此它被广泛地作为悬架控制的理想动力学模型应用于其它控制方法中。

根据 D.KARNOPP 的天棚阻尼半主动悬架理论，半主动悬架阻尼力的控制律为：

$$F_d = \begin{cases} f_{sky} & \dot{x}_s (\dot{x}_s - \dot{x}_t) > 0 \text{ or } (\dot{x}_s - \dot{x}_t) = 0 \\ f_{MR \max} & |f_{sky}| > |f_{MR \max}| \\ f_{MR \min} & \dot{x}_s (\dot{x}_s - \dot{x}_t) < 0 \text{ or } \dot{x}_s = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中, f_{sky} 为天棚阻尼力, $f_{MR \max}$ 为电流(或电压)最大时阻尼器的最大阻尼力; $f_{MR \min}$ 为电流(或电压)最小(0 A)时阻尼器的最小阻尼力, 以美国 LORD 公司生产的 RD-1005 型磁流变阻尼器为例, 此减振器允许的最大输入电流为 2A, 电压 12V, 最大阻尼力为 4448N。即通过阻尼器的电流(或电压)调节部分实现天棚阻尼控制。

2.2 分数阶天棚阻尼及半主动悬架控制策略

天棚阻尼半主动悬架, 控制策略简单且效果理想, 但它毕竟只是简单的一阶系统, 控制效果无法进一步提高, 而其它控制方法比较复杂, 对控制器设计要求高, 下面引入新的天棚阻尼控制方法, 它不仅在性能上比经典的天棚阻尼算法的进一步的提高, 而且其控制器的设计也不复杂, 只是比原控制算法要求增加一些数据存贮和乘法和加法运算。

原天棚阻尼算法是对悬架速度的反馈, 这种算法主要通过调整阻尼系数的大小改变控制力的值, 无法改变控制力的相位, 如果能实现任意调整控制力的大小和相位, 则天棚阻尼控制的效果有望进一步提高。为了实现这一想法, 本文引入分数微积分思想, 用对悬架位移的非整数阶导数代替原一阶导数即速度, 即天棚阻尼控制力 F_d 变为:

$$F_d = b \cdot D^\alpha x_s \quad 0 < \alpha < 2 \quad (5)$$

这儿的 D^α 表示为分数阶微分算子, 其数学定义式常用的有 Riemann-Liouville 定义

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (6)$$

其中 $(n-1 < \alpha < n)$, $\Gamma(\cdot)$ 是 Euler's 伽玛函数,

另一定义式是 Grünwald-Letnikov 定义

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (7)$$

式中 $[\cdot]$ 代表取整数, 当 h 为小量时, (6) 式就是 (5) 式的离散表达, 因此分数阶导数的计算可以通过对函数的离散值进行加权和计算, 这在控制器设计中是易实现的。

从优化角度看, 式 (3) 中 b 是唯一的可优化值, 而式 (5) 中, b 和 α 值都是可优化参数。也就意味着, 当我们优化参数 b 取得最优值之后, 可进一步优化参数 α , 使分数阶系统比整数阶系统有更好的性能。考虑到悬架位移无法测量, 可以利用指数定律, 将 (5) 式变为

$$F_d = b \cdot D^\mu \dot{x}_s \quad -1 < \mu < 1 \quad (8)$$

类似一般文献中半主动悬架的控制方法，按照能耗原则和分数阶天棚阻尼力的计算值，半主动控制力 F_d 的控制策略为

$$F_d = \begin{cases} b \cdot D^\alpha \dot{x}_s, & D^\alpha x_s (\dot{x}_s - \dot{x}_t) > 0 \text{ or } (\dot{x}_s - \dot{x}_t) = 0 \\ f_{MR\max}, & |b \cdot D^\alpha \dot{x}_s| > |f_{MR\max}| \\ 0, & |D^\alpha x_s (\dot{x}_s - \dot{x}_t)| < 0 \text{ or } D^\alpha x_s = 0 \end{cases} \quad (9)$$

2.3 控制参数的选取

为了确定式 (6) 最优的控制参数 b 和 α ，选择标准的 B 级随机路面激励路面谱为路面输入，路面谱在标准 ISO / TC108 / SC2N67 中的定义为

$$Gq(n) = Gq(n_0)(n/n_0)^{-\omega} \quad n < n_0$$

式中 n 为空间频率(m^{-1})， $n_0=0.1m^{-1}$ 为参考空间频率， $Gq(n_0)$ 为参考空间频率 n_0 所对应的路面谱值，即路面不平度系数(m^2/m^{-1})； ω 为频率指数，决定路面谱的频率结构，分级路面的频率指数 $\omega=2$ 。对应于 ISO 的 B 级路面标准， $Gq(n_0)=64 \times 10^{-6} m^2/m^{-1}$ ，构造出时域内的随机激励路面模型。

本文研究的某型号轿车的悬架参数如表 1。

表 1

非悬挂部分质量	m_t	49 kg
悬挂部分质量	m_s	300 kg
悬挂间阻尼系数	c_s	100 N/(m/s)
轮胎垂直刚度	k_t	200000 N/m
悬架刚度	k_s	17000 N/m

取控制泛函指标

$$J = q_1 \cdot \int \ddot{x}_s^2 dt + q_2 \cdot \int (x_s - x_t)^2 dt + q_3 \cdot \int (x_t - x_g)^2 dt, \quad (10)$$

其中 $q_i, i=1,2,3$ 为加权因子。在 B 级公路路面行驶条件下对悬架进行仿真计算，得到(10)式中各项和综合指标 J 在不同 b 和 α 时的曲线(图 3)，当 $\alpha=0.21, b=4500$ 时指标 J 取得极小值。从图 3a 可以看出，当 $\alpha=0.31$ 时，加速度最小；当 $\alpha=0.1$ 时，悬架动挠度最小；当 $\alpha=0.17$ 时，轮胎动载荷最小。同时从图 3a 中还可以看出，当 $\alpha \in (0,0.1)$ 时，四条曲线都单调递减，说明如果 α 在此范围内取值，那么上述悬架状态都将变得更优异。当选取 $\alpha=0.21$ 时，加速度特性将更好，但悬架动挠度并非最优值。

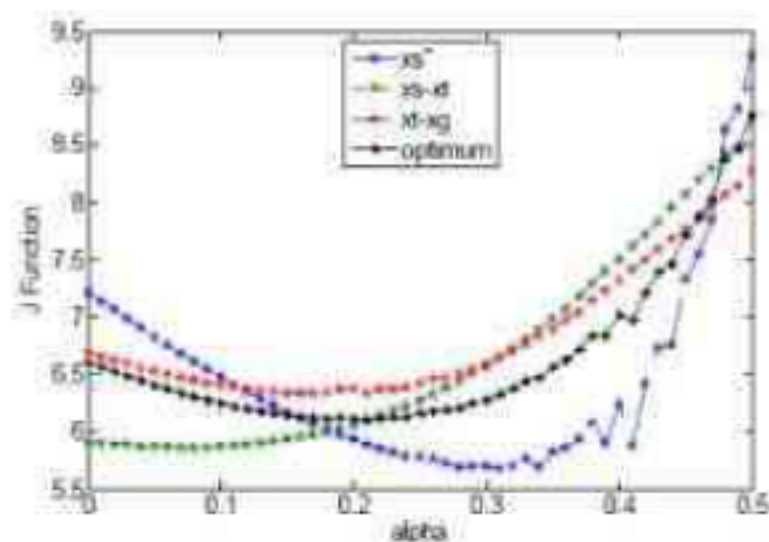


图 3a $J-\alpha$ 曲线

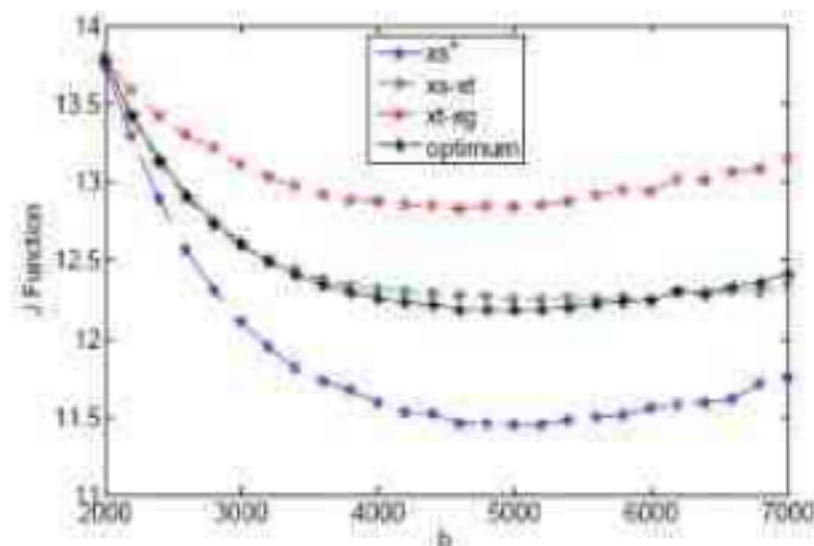


图 3b $J-b$ 曲线

3. 分数阶系统的仿真

目前分数阶微积分的计算方法可分为三类，一类是解析法，其主要有基于双参数指数函数 Mittag—Leffler 函数的级数法、Adomian 分解法和平均法等；第二类为数值法，主要有差分法，样条函数法，预估校正法等；第三类为滤波器算法，例如 Oustaloup 算法, FIR 算法, IIR 算法和 Pade 逼近等。其中滤波器算法主动应用于仿真系统中的分数阶微积分的处理，其原理是用高阶的传递函数近似替代分数阶传递函数。Oustaloup 算法是目前国际上最流行的近似法，首先按系统的要求选择需近似处理的频率范围 $[\omega_b, \omega_h]$ ，考虑频域边界的影响，应选择更大的频率范围 $[\omega_A, \omega_B]$ ，要求 $\omega_A < \omega_b$ ， $\omega_B > \omega_h$ ，然后在选择的范围内对分数阶微积分的拉氏变化进行近似处理，即

$$L\{D^{-m}\} = s^{-m} \cong s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-m}, \quad -1 \leq m < 1$$

对于 $s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-m}$ 的计算采用零点和极点递归计算法

$$s_{[\omega_A, \omega_B]}^{-m} = \lim_{N \rightarrow \infty} G_0 \prod_{i=0}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right)$$

其中零点 ω'_i 和极点 ω_i 的递归计算公式

$$\alpha\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad \alpha = (\alpha\eta)^{1-m}, \quad \eta = (\alpha\eta)^m,$$

$$\omega'_1 = \sqrt{\eta} \omega_b, \quad \omega_N = \frac{\omega_h}{\sqrt{\eta}}, \quad \frac{\omega_i}{\omega'_i} = \alpha > 1, \quad \frac{\omega'_{i+1}}{\omega_i} = \eta > 1$$

其中 N 为逼近函数的阶数，通常取 $5 \sim 10$ 足够， G_0 满足下式：

$$G_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^N \left(\frac{1 + \frac{1}{\omega}}{1 + \frac{1}{\omega}} \right)。$$

5.结束语

汽车行驶的平顺性和操纵稳定性之间是相互矛盾的，悬架的天棚阻尼控制策略提高了汽车的平顺性，让乘客感到更舒适，但却牺牲了部分操纵稳定性。为寻找更优异的控制效果我们将分数阶微积分理论引入到天棚阻尼控制策略中。经过仿真比较，我们发现分数阶天棚阻尼控制策略比整数阶控制策略有更好的行驶平顺性，而且并没有影响其操纵稳定性，相反地，若取得恰当的分阶数，其操纵稳定性还会略微提高。