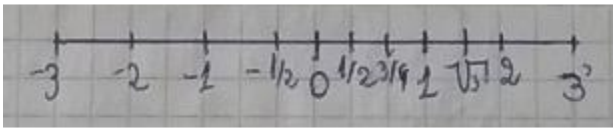
## Tema 1. Funciones y Continuidad en Funciones de una Variable

### El Conjunto de los Números Reales

El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se denomina conjunto de los números reales y se denota como R.
Entonces tenemos que: $R = Q \cup I$
O sea que, tanto los números racionales como los números irracionales son números reales.
Una de las propiedades más importantes de los números reales es poderlos representar por puntos en una línea recta. Se elige un punto llamado origen, para representar el 0, y otro punto, comúnmente a la derecha, para representar el 1.
Cada punto de la recta representa un único número real y a cada número real le corresponde un único punto de la recta. A esta recta se la denomina recta real.
Por ejemplo:




### Valor Absoluto de un Número Real

El valor absoluto de un real "a", se denomina |a|, es el mismo número a cuando es positivo o cero, y el opuesto de a, si a es negativo.

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ a & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$$

Por ejemplo: |5| = 5, |-5| = 5, |0| = 0

### Desigualdades

Es una relación que se establece entre dos valores cuando son distintos. Si son elementos de un conjunto ordenado se los puede comparar.
Las relaciones son:
a > b a es mayor que b
a < b a es menor que b; Son desigualdades estrictas, ya que a no puede ser igual a b.

$a \geq b$ a es mayor o igual a b
$a \leq b$ a es menor o igual a b; Son desigualdades amplias, ya que a puede ser igual a b.

a >> b a es mucho mayor que b
a << b a es mucho menor que b; Representa una diferencia de varias órdenes de magnitud

$a \neq b$ a no es igual a b
$b \neq a$ b no es igual a a; No indica si uno es mayor que el otro o si son comparables

**Intervalo**

Un intervalo es un conjunto de números reales comprendidos entre dos dados: a y b que se los denomina extremos del intervalo.

**Conjuntos Acotados**

Un conjunto acotado es un conjunto que tiene cotas superiores e inferiores, es decir, números que son mayores/menores de todos los elementos del conjunto acotado.

- Conjunto acotado superiormente:
El conjunto A está acotado superiormente $<=> \exists\, c \in R \,/\, \forall\, x \in A,\ x \leq c.$
Al número real c se lo denomina cota superior de A. El supremo de dicho conjunto es la menor de todas las cotas superiores del mismo, además si dicho supremo pertenece al conjunto, se lo denomina máximo de A.

- Conjunto acotado inferiormente:
El conjunto A está acotado inferiormente $<=> \exists\, d \in R \,/\, \forall\, x \in A,\ d \leq x.$
Al número real d se lo denomina cota inferior de A. El ínfimo de dicho conjunto es el mayor de todas las cotas inferiores del mismo, además si dicho ínfimo pertenece al conjunto, se lo denomina mínimo de A.

**Entornos**

Si a es un punto de la recta R y d es un número R, llamaremos entorno de centro a y radio d al intervalo abierto (a – d, a + d).
Entonces:
$E(a,d) = \{x \in R \,/\, a-d < x < a+d\} = \{x \in R \,/\, |x-a| < d\}$

Entorno Reducido:
Si a es un punto de la recta R y d es un número R+, llamaremos entorno reducido al intervalo abierto (a - d, a + d), excluyendo al punto a (centro del entorno).
Entonces:
$E'(a,d) = \{x \in R \,/\, |x-a| < d \wedge x \neq a\}$

**Funciones de una Variable Real**

Una función real f de variable real es una relación que asocia a cada número real x un único número real y = f(x).
Entonces:
f: R -> R
x -> y = f(x)
La variable x se denomina Variable Independiente y la variable y es la Variable Dependiente.

**Clasificación de las Funciones**

Funciones

- Funciones Algebraicas
  - Función Lineal
  - Función Cuadrática
  - Función Racional Entera
  - Función Homográfica
  - Función Racional Fraccionaria
  - Función Irracional
- Funciones Trascendentes
  - Función Potencial
  - Función Exponencial
  - Función Logarítmica
  - Función Trigonométrica
  - Función Trigonométrica Inversa
  - Función Hiperbólica
  - Función Hiperbólica Inversa

- **Funciones Algebraicas**: Surge a partir de la relación de operaciones de suma, resta, multiplicación o división de polinomios.

- **Función Racional Fraccionaria**: Es el cociente de dos polinomios y tiene la forma $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Los valores de x que anulan al denominador y no anulan al numerador se los denomina infinitos de la función. Los valores de x que anulan al numerador y no al denominador se llaman ceros de la función.

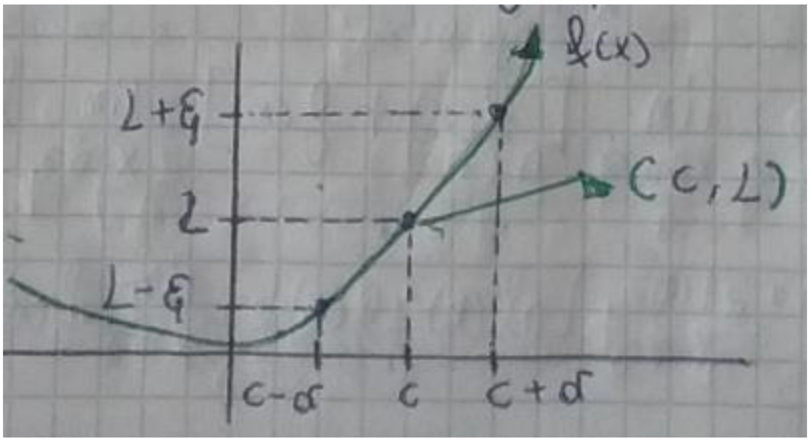
- **Función Irracional**: Es aquella en la que además de las operaciones de suma, resta, producto y cociente, aparecen las potencias con exponentes racionales no enteros. Por ejemplo: $y = \sqrt{x-1}$

- **Funciones Trascendentes**: Estas funciones sobrepasan o trascienden la lógica numérica teniendo reglas especiales para su resolución.

**Límite de una Función. Definición e Interpretación Geométrica**

Sea f(x) una función definida en un intervalo abierto que contiene a c, y L es un número real (R). Entonces: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Se está afirmando que existe un límite de la función cuando x se acerca arbitrariamente a "c" y que ese límite es L.




Se observa que los valores que toma una función f(x) en un intervalo abierto (c – d, c + d) se va aproximando a un punto denominado "c" por ambos lados (izquierda y derecha). Así el límite de f(x) es L cuando x tiende a c.

**Límites Laterales**

- Límite Lateral por Izquierda

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L^- \ si \ dado \ \varepsilon > 0, \exists \ d > 0 \ tal \ que$ si $\mathrm{a - d} < x < a \Rightarrow |f(x) - L^-| < \varepsilon$

Cuando $x \to a^-$ significa que x toma valores menores que a, es decir, valores que se encuentran a su izquierda.

- Límite lateral por derecha

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L^+ \ si \ dado \ \varepsilon > 0, \exists \ d > 0 \ tal \ que$ si $\mathrm{a} < x < a + \mathrm{d} \Rightarrow |f(x) - L^+| < \varepsilon$

Cuando $x \to a^+$ significa que x toma valores mayores que a, es decir, valores que se encuentran a su derecha.

**Propiedades de los Límites**

1) Límite de una constante: $\lim_{x\to a} k = k$

2) Límite de una suma: $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

3) Límite de un producto: $\lim_{x\to a}[f(x) * \ g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) * \ \lim_{x\to a} g(x)$

4) Límite de un cociente: $\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \ si \ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

5) Límite de una potencia: $\lim_{x\to a}[f(x)^{g(x)}] = \lim_{x\to a}[f(x)]^{\lim_{x\to a} g(x)} \ si \ f(x) > 0$

6) Límite de una función: $\lim_{x\to a} g[f(x)] = g \ \lim_{x\to a} f(x)$
"g" puede ser una raíz, un logaritmo, seno, coseno, tangente, etc.

7) Límite de una raíz: $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \ si \ n \ es \ impar; si \ n \ es \ par \ f(x) \geq 0$

8) Límite de un logaritmo: $\lim_{x\to a}[\log_a f(x)] = \log_a[\lim_{x\to a} f(x)]$ si a > 0 y f(x) > 0

**Límites Infinitos**

- Límite infinito (+): El límite de la función f(x) cuando x tiende a mas infinito es mas infinito, cuando, sea cual sea el valor del número real k, es posible encontrar otro número real L, tal que si x es mayor que L, entonces f(x) es mayor que k.
- Límite infinito (-): El límite de la función f(x) cuando x tiende a menos infinito es menos infinito, cuando, sea cual sea el valor del número real k, es posible encontrar otro número real L, tal que si x es mayor que L, entonces f(x) es menor que k.

**Cálculo de Límites Indeterminados**

Las indeterminaciones son: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \ \infty, 0 * \ \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$.
Para la resolución de dichas indeterminaciones, se recurren a artificios del tipo algebraico.

- Las indeterminaciones: $\frac{0}{0} y \ \frac{\infty}{\infty}$, generalmente se resuelven aplicando Ruffini o factorizando la expresión.

- La indeterminación $\infty - \ \infty$ se resuelve utilizando el mínimo común múltiplo. En el 90% la indeterminación produce otra de la forma $\frac{0}{0} \ o \ \frac{\infty}{\infty}$, que se resuelven con el método ya mencionado.

- La indeterminación $0 * \ \infty$ se resuelve: $\lim_{x\to n} f(x) = 0 \ y \ \lim_{x\to n} g(x) = \ \infty =>$

$$=> \ \lim_{x\to n} f(x) * g(x) = 0 * \infty; \ \lim_{x\to n} f(x) - g(x) = \lim_{x\to n} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \ \frac{0}{0}$$

Indeterminación que se resuelve de la forma ya mencionada.

- Para las indeterminaciones $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ se utiliza la definición del número e:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$$

**El Número e**

La variable $(1+\frac{1}{n})^{n}$ tiene su límite comprendido entre los números 2 y 3, cuando $n\to\infty$.
Demostración, según el binomio de Newton:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n\,(n-1)}{1*2}*\left(\frac{1}{n}\right)^{2}+\frac{n\,(n-1)(n-2)}{1*2*3}\left(\frac{1}{n}\right)^{3}+\cdots+\frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1*2*\ldots*n}\left(\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Luego de transformaciones algebraicas:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1}{1*2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1*2*3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

Es creciente cuando “n” crece.

$$\ldots+\frac{1}{1*2*\ldots*n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

**Continuidad**

Una función f(x) es continua en un punto “a” si $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

**Función Continúa en un punto y en un intervalo. Discontinuidad.**

- En un punto: Una función es continua en un punto x=a si se cumplen estas 3 condiciones:
1) $\exists\ f(x)\ en\ x=a\to\ \exists\ f(a)$
2) $\exists\ \lim_{x\to a}f(x)=1$
3) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

Cuando se cumplen las dos primeras condiciones y no la 3ra, se dice que la función es discontinua evitable, porque basta con redefinir la función para que sea continua.
En el caso en el que no se llegase a cumplir la 1ra o la 2da condición, la función es discontinua esencial.
- En un intervalo: Una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si continua en cada punto del intervalo.

**Propiedades de las Funciones Continuas**

Siendo f(x) y g(x) funciones continuas x=a y c una constante, las siguientes funciones también son continuas en x=a.
- $f(x)\ +\ g(x)$
- $c\ *\ f(x)$
- $f(x)\ *\ g(x)$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$

Una función polinómica es continua con tal que tenga un número finito de términos.

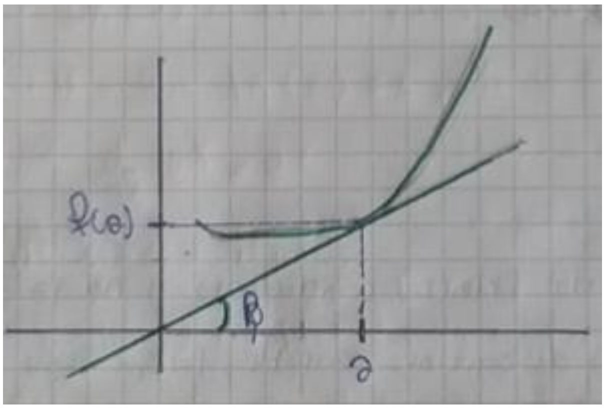
<u>**Tema 2. Derivada de una Función de una Variable**</u>

**Derivada de una Función. Definición e Interpretación Geométrica**

La derivada se define como la función $y = f(x)$, con respecto al argumento x, al límite de la razón del incremento de la función $f(x)$ y el incremento del argumento $x(\Delta x)$ cuando este tiende a 0.

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$   Cociente incremental

Se dice que f(x) es derivable en el punto x si existe el límite del cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$.
Geométricamente, la derivada de una función f(x) en un punto "a" me da la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto "a".




$\beta$ forma un ángulo. Este ángulo estará relacionado con la pendiente de la recta, ya que es el valor de la derivada en el punto de la tangencia. Se concluye entonces que: $\tan\beta = f'(a)$.

**Derivadas de Funciones Algebraicas**

1) La derivada de una constante es igual a cero.
2) La derivada de una variable con relación a ella misma es igual a 1.
3) La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de dichas funciones.
4) La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de dicha función.
5) La derivada de un producto de funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.
6) La derivada de la potencia de una función siendo el exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada al exponente disminuido en una unidad multiplicando esto por la derivada de la función.
7) La derivada de un cociente es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador entre el cuadrado del numerador.
8) La derivada del cociente de una función y una constante es igual a la derivada de la función entre la constante.

**Derivadas de Funciones Compuestas**

Si $y = f(u)$ es una función derivable y además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $f(u)$ es derivable:

$$f'(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = f(u) => \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u} \\ \\ u = g(x) => \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = \dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \end{array}\right\} \quad \frac{\Delta y}{\Delta u} * \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u} * \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$y' = f'(u) * u'$$

**Derivada de Funciones Logarítmicas y Exponenciales**

- Derivada Logarítmica: La derivada de un logaritmo en base "a" es igual a la derivada de la función dividida por la función, y por el algoritmo en base "a" de "e".

$$f(x) = log\ v\ f(x) = \frac{\log e}{v} * \frac{dv}{dx}$$

**Propiedades**
1) Log A = n Log A
2) Log (A*B) = Log A + Log B
3) Log A/B = Log A – Log B

-La derivada de un logaritmo natural es igual a la derivada de la función dividida por la función.

- Derivada Exponencial: Se tiene que $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, es decir, $e^x$ es su propia derivada. Si la base de la función es cualquier número real mayor que 0, entonces su derivada se puede generalizar así: $\frac{d}{dx} a^x = a^x * Ln(a)$
Donde la función $Ln\ (a)$ es el logaritmo natural área. En el caso particular de $a = e$, resulta que $Ln\ (e) = 1$, por lo tanto: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

**Derivadas de Funciones Inversas**

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si f tiene función inversa g, entonces g es derivable para todo x tal que $f'(g(x)) \neq 0$.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x)^{-1})}$$

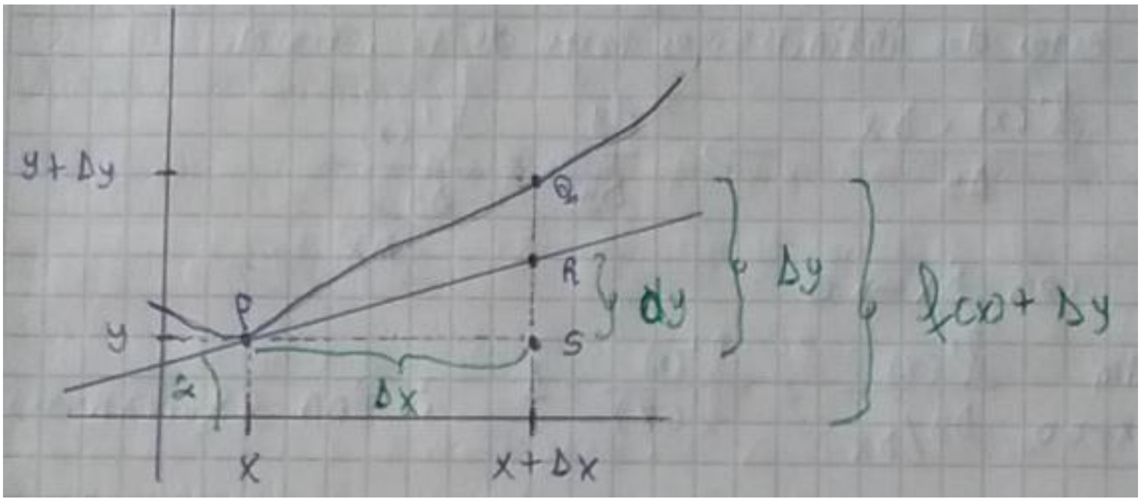
**Derivadas de Funciones Trigonométricas**

- Derivada de la función seno: La derivada del seno de una función es igual al coseno de la función por la derivada de la función.

- Derivada de la función coseno: La derivada del coseno de una función es igual a menos seno de la función por la derivada.

**Diferenciales. Definición. Interpretación Geométrica**

**-** El diferencial de una función $y = f(x)$ se define como el producto de la derivada de la misma por el incremento de la variable independiente.
Entonces: $dy = df(x) = f'(x) * \Delta x$
- Interpretación Geométrica




El diferencial de la función es el incremento de la recta tangente a diferencia del incremento de la función que es el incremento de la ordenada a la curva. Por lo tanto:

$$P\hat{S}R = tg\ \hat{\alpha} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\overline{Rs}}{\overline{Ps}}$$

$$tg\ \hat{\alpha} = f'(x) = \frac{\overline{Rs}}{\Delta x} \rightarrow \overline{Rs} * f'(x) * \Delta x$$

**Relación con el Incremento**

Para saber cuánto vale la diferencia Δ entre la diferencial y el incremento, la cual puede ser positiva o negativa, partimos de la diferenciación de derivadas:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si no podemos llegar al límite, se sabe que una función difiere de su límite en un infinitésimo, y el cociente incremental será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(x) \rightarrow \Delta y = [f'(x) + \varepsilon(\Delta x)] * \Delta x$$

$$\Delta y = \underbrace{f'(x) * \Delta x}_{\text{Diferencial}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon(\Delta x) * \Delta x}}_{\text{Término complementario}} = dy + d$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$; $dy\ y\ \Delta y$ tenderán a cero.
La relación entre estos dos infinitésimos parte de la integral:

$$\frac{dy}{\Delta y} = \frac{f'(x) * \Delta x}{\Delta y} \rightarrow \frac{dy}{\Delta y} = \frac{f'(x)}{\Delta y / \Delta x}$$

Aplicando límite con $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)}{\Delta y / \Delta x} = \frac{f'(x)}{f'(x)} = 1 \quad \therefore\ son\ equivalentes$$

**Cálculos Aproximados**

Cuando la función no es lineal, la diferencial no es igual al incremento, pero puede usarse a la diferencial como buena aproximación del incremento cuando $\Delta x \to 0$ (suficientemente pequeño).

**Errores**

**-** El error absoluto es la diferencia entre el incremento de "y" y el diferencial de "y".

$$A = \Delta y - dy$$

- El error relativo es el cociente entre el error absoluto y el incremento de "y".

$$R = \frac{A}{\Delta y}$$

- El error porcentual obtiene el tanto % de errores.

$$R\ \% = R * 100$$

**Diferencial de Orden Superior**

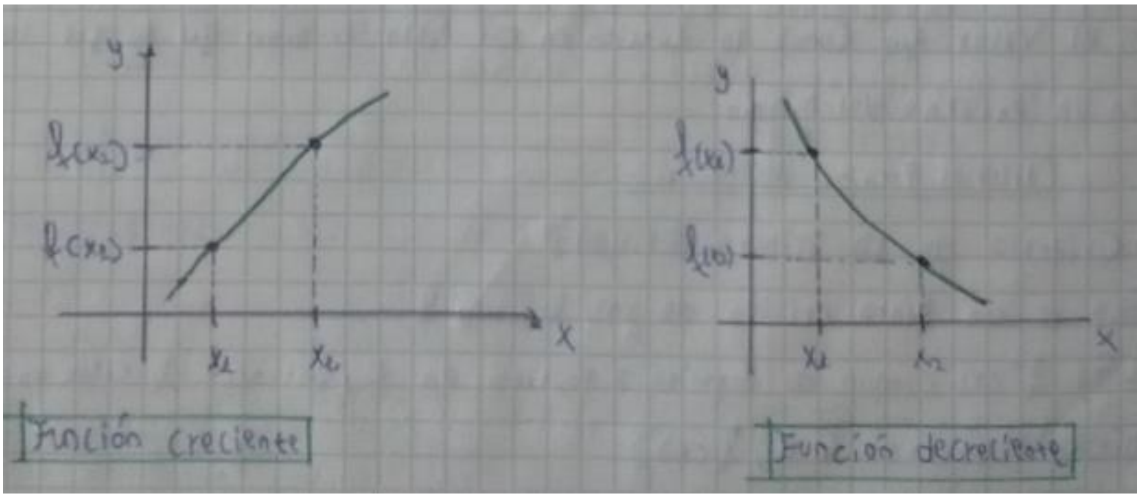
La segunda diferencial de una función es el producto de la segunda derivada por el cuadrado del incremento de la variable independiente.
Demostración:
$d^2y = d(dy) = d(f'(x) * dx) = (f'(x) * dx)' * dx = f''(x) * dx^2$
de orden $n = d^n y = f^n(x) * dx^n$
A partir del segundo diferencial se denominan diferenciales de orden superior.

## Tema 3.Aplicaciones de la Derivada de Funciones de una Variable

**Funciones Crecientes y Decrecientes. Signo de la Derivada.**

- Una función f es creciente en un intervalo abierto (a, b) si para dos números cualquiera x1, x2 del intervalo $x1 < x2 => f(x1) < f(x2)$
$\forall\, x1, x2 \in (a, b) : x1 < x2 => f(x1) < f(x2)$

- Una función es decreciente en un intervalo abierto (a, b) si para dos números cualquiera x1, x2 en el intervalo, $x1 < x2 => f(x1) > f(x2)$
$\forall\, x1, x2 \in (a, b) : x1 < x2 => f(x1) > f(x2)$




- Signo de la derivada:
Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a,b] y derivable en el intervalo abierto (a, b)
1) Si $f'(x) > 0\ \forall\, x \in (a, b), entonces\ f\ es\ creciente\ en\ [a, b]$
2) Si $f'(x) < 0\ \forall\, x \in (a, b), entonces\ f\ es\ decreciente\ en\ [a, b]$
3) Si $f'(x) = 0\ \forall\, x \in (a, b), entonces\ f\ es\ constante\ en\ [a, b]$

**Máximos y Mínimos Relativos y Absolutos**

- Máximo absoluto: Es el mayor valor que puede tomar una función en un intervalo [a, b]. F(x) es máximo absoluto de f(x) en [a, b] si: $\forall\, x \in [a, b]$: $f(x) = f(c)$.

- Mínimo absoluto: Es el menor valor que puede tomar la función en un intervalo [a, b]. F(x) es mínimo absoluto de f(x) en [a, b] si: $\forall\, x \in [a, b]$: $f(c) \leq f(x)$.

- Máximo relativo: Una función f(x) tiene un máximo relativo en $c \in (a, b)$ si el valor que toma la función en ese punto es mayor que los que toma en un entorno del mismo.

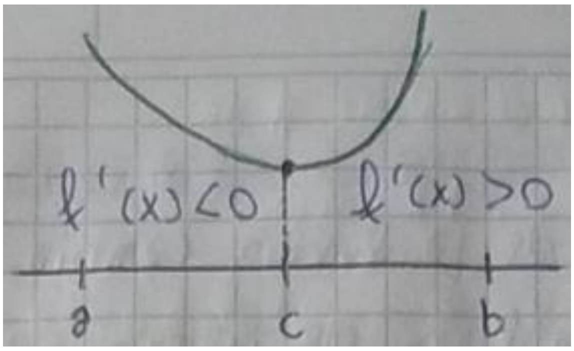
- Mínimo relativo: una función f(x) tiene un mínimo relativo en $c \in (a, b)$ si el valor que toma la función en ese punto es menor que los que toma en un entorno del mismo.

**Criterios para su Determinación**

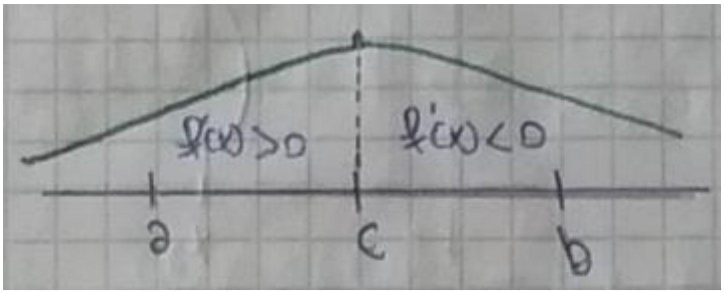
- Criterio de la primera derivada

Sea c un punto crítico de una función f.

1) Si f'(x) cambio de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.




2) Si f'(x) cambio de positivo a negativo en c, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.




- Criterio de la segunda derivada

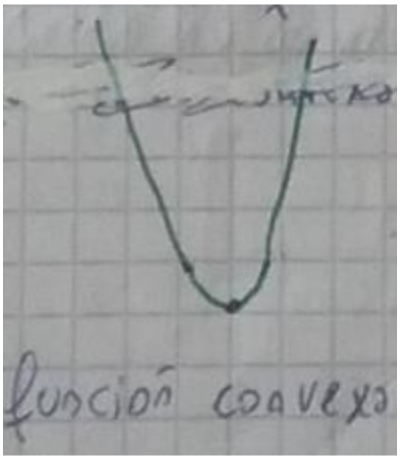
Sea c un punto crítico de f en un intervalo abierto (a, b).

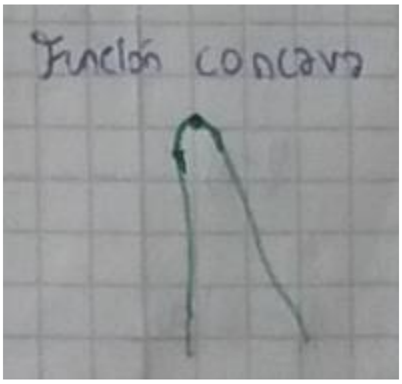
- Si $f''(c) < 0$ existe un máximo relativo en $x = c$
- Si $f''(c) > 0$ existe un mínimo relativo en $x = c$

**Concavidad y Convexidad**

- La función $f(x)$ es concava cuando la recta tg de dicha función está por encima de la curva. Si la $f''(x)$ es < 0 es concava negativa.

- La función es convexa cuando la recta tg de dicha función está por debajo de la curva si la $f''(x) > 0$ es concava positiva.

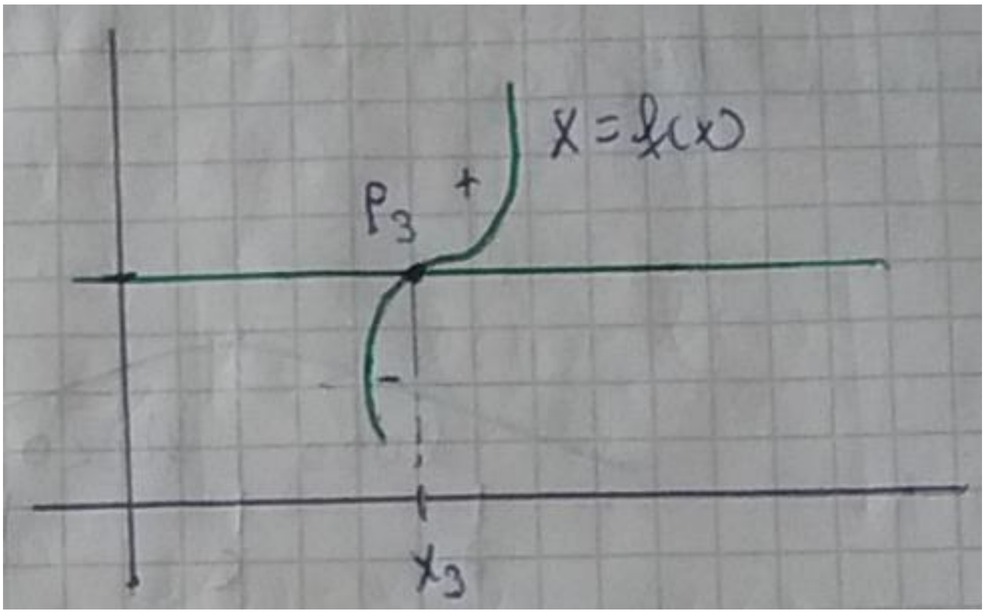


**Puntos de Inflexión**

Son todos los puntos donde la curva de la función cambia el sentido de su concavidad. Con $x = x_3,\ \exists\, un\ punto\ de\ inflexión\ horizonte$. Uso de la derivada:

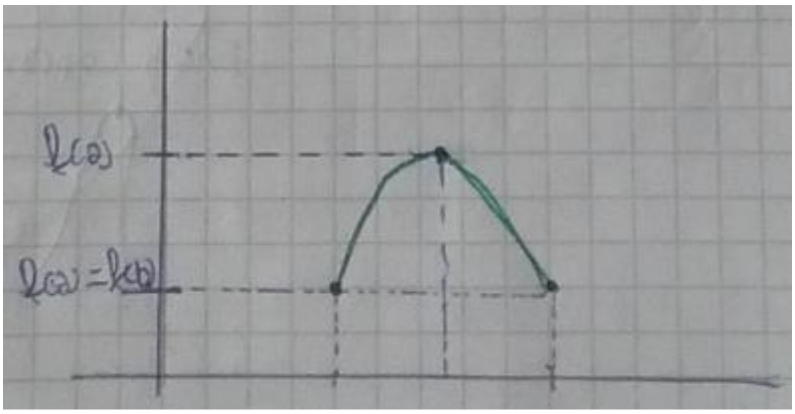
$f'(x_3) = 0$
$f''(x_3) = 0$
$f'''(x_3) \neq 0$




La recta tangente en la función es horizontal, es decir, tg = 0, y el punto de inflexión de izquierda a derecha y su concavidad va de negativo a positivo.
- Condición necesaria: La segunda derivada de la función sec = 0. f''(x) = 0.
- Condición suficiente: Debe existir una derivada de orden superior a la segunda en la absisa del punto de inflexión distinta de cero: $f'''(x) \neq 0$

**Teorema de Rolle**

Si una función es continua en el intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) y además, toma valores iguales en los extremos del intervalo f(a) = f(b), existe por lo menos un punto interior del intervalo en el que la derivada es nula.



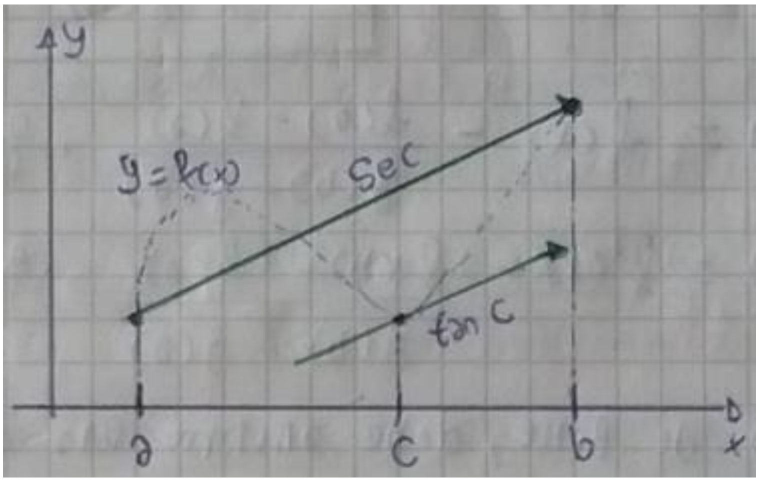

Es contuna por que no tiene interrupción y es derivable porque admite una tangente geométrica única.

**Teorema del Valor Medio. Interpretación Geométrica**

Sea f una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y derivable en el intervalo abierto $(a, b)$, este un punto $c \in (a, b)$ tal que la tangente a la curva en c, es paralela a la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

$$f(b) - f(a) = f'(c)$$

-Interpretación Geométrica




Existe un punto en el intervalo en el que la tangente f(c) es paralela a la secante que pasa por los puntos a y b.

**Teorema de Cauchy**

Sea f(x) y g(x) continuas en [a, b] y derivables en (a, b) entonces el cociente de los incrementos de las funciones en dicho intervalo es igual al cociente de las derivadas de la función en un punto interior del intervalo.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

- Demostración, aplica combinación lineal entre f(x) y g(x)

1) Q(x) = f(x) + k * g(x) donde k es una constante a determinar, entonces cuando:

$x = a \Rightarrow Q(a) = f(a) + k * g(a)$

$x = b \Rightarrow Q(b) = f(b) + k * g(b)$

Por lo que x(a) = x(b) y mediante el teorema de Rolle:

$f(a) + k * g(a) = f(b) + k * g(b)$

$k * g(a) = f(b) - f(a) + k * g(b)$

$-k * g(b) + k * g(a) = f(b) - f(a)$

$-k\,[g(b) - g(a)] = f(b) - f(a)$

$$-k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \Rightarrow k = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Sustituimos en 1) $\mathrm{Q(x)} = \mathrm{f(x)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g(x)$

Luego, derivamos: $\mathrm{Q'(x)} = \mathrm{f'(x)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(x)$

y deacuerdo con el teorema de Rolle, debe anularse una derivada en un punto interiore del intervalo $(Q'(\varepsilon) = 0)$

$$Q'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(\varepsilon) = 0$$
$$f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(\varepsilon) = 0$$
$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} * g'(\varepsilon)$$
$$\therefore \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

**Teorema de L'hopital. Aplicaciones al Cálculo de Distintos Límites Indeterminados**

Mediante la aplicación del teorema de Cauchy se deduce la regla de L'hopital que permite resolver las formas indeterminadas en los límites del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 * \infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$

$\frac{0}{0}$

Si se presenta este tipo de ideterminación cuando tenemos que encontrar el límite de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ y ambas funciones tienden a 0 cuando x -> a.

Sea $f(x) \wedge g(x)$ funciones derivables (la derivabilidad implica continuidad) que se anulan en $x = a$ , es decir que f(a) = g(a) = 0.

Por el teorema de Cauchy: $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ con a $< \varepsilon < x$

Cuando x $\rightarrow$ a, $\varepsilon \rightarrow a$, aplicando límite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\varepsilon\to a} \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$\frac{\infty}{\infty}$

Sea $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando x $\rightarrow$ a se tiene que el $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

Entonces si escribimos $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \frac{1/\infty}{1/\infty} = \frac{0}{0}$ a lo que se aplica L'hopital.

$0 * \infty$

Sea f(x) * g(x), entonces el límite $\lim_{x\to a} f(x) * g(x) = 0 * \infty$

Si escribimos $\lim_{x\to a} f(x) * g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ $o$ $\frac{\infty}{\infty}$ a lo que se aplica L'hopital.

$\infty - \infty$

Sea el $\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$, se puede transformar la expresión en un cociente:

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x) * g(x)}} = \frac{0}{0} \; o \; \frac{\infty}{\infty}$$

$1^{\infty}, 0^0, \infty^0$

Si una función de la forma $f(x)^{g(x)}$ toma una de estas formas se deben tomar logarimos naturales a ambos miembros $\ln y = \ g(x) * \ln f(x)$

$\lim_{x \to a}[\ln y] = \lim_{x \to a}[g(x) \ln f(x)]$ por propiedad de log:

$y = e^{g(x) * \ln\ f(x)}$

$\ln_{\mathrm{e}} a = b <=> a = e^b$

Donde el exponente toma la forma $0 * \ \infty$

**Polinomio de Taylor. Desarrollo de la Fórmula de Taylor**

El polinomio de Taylor de grado n para la función f en el punto a, denotado por Pn,a , es el polinomio:

$$Pn, a\ (x) = \ f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Este polinomio verifica que sus derivadas de orden “n” coinciden con las derivadas de las funciones “f” en el punto “a”. Dada una función “f:R -> R, n+1” veces derivable en un entorno de “a”, el desarrollo o fórmula de Taylor de orden “n” de la función “f” en un entorno de “a” es:

$$f(x) = \ f(a) + \ f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

**Polinomio de Mac Laurin. Desarrollo de la Fórmula de Mac Laurin**

Establece una relación entre los coeficientes de un polinomio en x de grado n y los valores que toma el mismo y sus n primeras derivadas en x = 0.

$$P(x) = p(0) + \ P'(0) * x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{P^n(0)}{n!}x^n$$

## Tema 4. Integrales Indefinidas

### La Función Primitiva o Indefinida

Decimos que una función f(x) es una primitiva de la función f(x) si se cumple:

$$f'(x) = f(x)$$

Esto se denota: $f(x) = \int f(x)dx$. Si f(x) es primitiva de $f'(x)$, también lo es $f(x) + c$ para todo $c \in R$. Entonces:

$$\int f(x)dx = f(x) + c$$

### El Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Si dos funciones son continuas en el intervalo cerrado [a, b] y derivables en el intervalo abierto (a, b) y además tienen igual derivada en cada uno de los puntos de dicho intervalo, ambas funciones difieren en una constante en dicho intervalo.

Hipótesis: $f(x) \wedge g(x)$ son continuas $\forall\ x \in [a,b]$ y derivables $\forall\ x \in (a,b)$
Tesis: $f(x) = g(x) + c \Rightarrow f(x) - g(x) = c$
Desarrollo:
$Q(x) = f(x) - g(x) con\ Q(x)\ continua\ \forall\ x \in [a,b]\ y\ derivable \forall\ x \in (a,b)$. En donde, por hipótesis se tiene que $Q'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, pero por consecuencia del teorema de Rolle, $Q'(x) = 0$. Entonces $Q(x) = c \therefore f(x) - g(x) = c$

### Integrales Inmediatas. Consecuencias Inmediatas de la Definición de Integral

De cada fórmula del cálculo diferencial se puede obtener otra del cálculo integral. Se justifica derivando la función obtenida y demostrando que se obtiene el integrando.

$$\int dx = x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

- Consecuencias:
Definición de Integral -> $\int f(x)dx = f(x) + c$
1) $\int q(x)dx = f(x)dx \rightarrow La\ derivada\ de\ la\ integral\ indefinida\ es\ el\ integrando.$
2) $\int f'(x)dx = f(x) + c$

### Propiedades de las Integrales Indefinidas

1) La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de dichas funciones:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = f(x) + g(x) + c$$

2) La integral de una constante (k) por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int k * f(x)dx = k \int f(x)dx = k * f(x) + c$$

**Métodos de Integración: Por Descomposición, Por Sustitución y Por Partes**

- Por Descomposición: Su principal aplicación es en las funciones del tipo polinómicas, aunque también se suele usar en otros casos.

- Por Sustitución: Este método se utiliza para resolver integrales no inmediatas, en el cual, mediante un cambio de variables se transforma en una integral inmediata.

- Por Partes: Se aplica cuando la integral del primer miembro no es inmediata, y si lo es la del segundo miembro. Éste método permite calcular la integral de un producto de dos funciones aplicando la fórmula:

$$U * V = d(U * V) = (U * V)'dx = [U' * V + U * V']dx = (U' * V)dx + (U * V')dx$$
$$= dU * V + dV * U \rightarrow d(U * V) = U * dV + V * dU$$

Integrando ambos lados:

$$\int d(U * V) = \int U * dV + \int V * dU$$

$$U * V = \int U * dV + \int V * dU$$

$$\int U * dV = U * V - \int V * dU$$

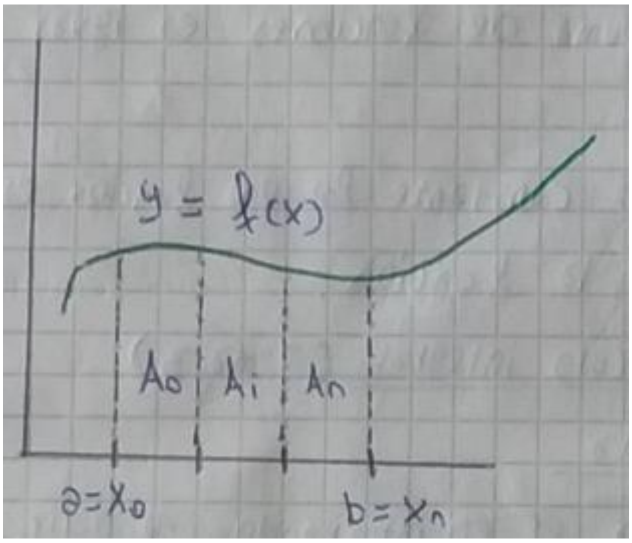
## Tema 5: Integrales Definidas. Aplicaciones

### Definición e Interpretación Geométrica de la Integral Definida

La integral definida f(x) en el intervalo [a, b] es igual al área limitada entre la gráfica de f(x), el eje de abscisas, y las rectas verticales x=a y x=b. Se denota como:

$$\int_a^b f(x)dx \rightarrow$$

- $\int = signo\ de\ integración$
- $a = límite\ inferior\ de\ la\ integración$
- $b = límite\ superior\ de\ la\ integración$
- $f(x) =\ integrando$
- $dx = diferencial\ de\ la\ variable\ de\ la\ función\ que\ se\ va\ a\ integrar, en\ este\ caso\ x$




Consideremos un recinto limitado por la curva y = f(x) (continua), el eje x y lateralmente por las ordenadas correspondientes a los extremos del [a, b]. Dividimos el intervalo [a, b] en subintervalos cuyas respectivas amplitudes llamaremos $A_0, \ldots A_i, \ldots A_n$. En cada subintervalo elegimos un punto $x_0, x_1 \ldots x_i$ a los cuales la función le hace corresponder respectivamente los valores $f(x_0) \ldots f(x_i)$

$A_0 = (x_1 - x_0) * \ f(x_0) = \ \Delta x_0 * f(x_0)$

….

$A_i = (x_{i+1} - x) * \ f(x_i) = \ \Delta x_i * f(x_i)$

….

$$A_n = A_0 + \cdots + A_i + \cdots + A_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \therefore Área\ aproxiimada = \ A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i * f(x_i)$$

El límite de esta suma cuando $n \rightarrow \ \infty$ es lo que llamamos integral definida entre a y b:

$A = \ \lim_{n \to \infty}$

$$A_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i * f(x_i) = \int_a^b f(x)dx$$

**Propiedades de la Integral**

1) El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.
2) Si los límites de integración coinciden, la integración definida vale 0.
3) Si c es un punto interior del intervalo [a, b], la integral definida se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos [a, c] y [c, b].
4) La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales.
5) La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

**Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral (Tema 3)**
**La Derivada de la Integral Definida**

La derivada de la función área es el integrando, es decir, la función área es una primitiva de f(x)

**Cálculo de la Integral Definida Mediante la Primitiva Barrow**

Si f(x) es la primitiva de f(x) en un intervalo [a, b] y es continua en él, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$$

La regla de Barrow consiste en que la integral definida de una función continua f(x) en el intervalo [a, b], es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva f(x) de f(x) en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a) = [f(x)]_a^b$$

**Integrales Generalizadas e Impropias**

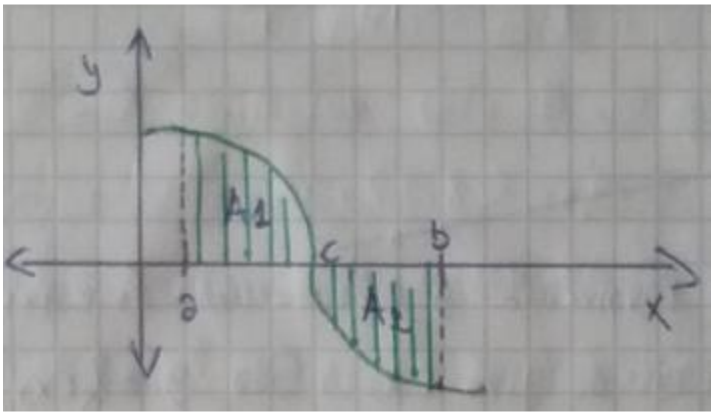
Una integral impropia es el límite de una integral definida cuando uno o ambos extremos del intervalo de integración se acercan a un número real específico ($\infty\ o - \infty$). Además una integral definida es impropia cuando la función integrando de la integral definida no es continua en todo el intervalo de integración. También se pueden dar ambas situaciones.

**Cálculo de Áreas**

- Área positiva y área negativa:

$A = A_1 + A_2$

$A = \int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$




**Cambios de Variables en la Integral Definida**

Supongamos que en la $\int_a^b f(x)dx$, donde f(x) es continua en [a, b], queremos efectuar un cambio de variable $x = Q(t)\ si : Q(\alpha) = a \wedge Q(\beta) = b$

$\left.\begin{matrix} Q(t) \\ Q'(t) \end{matrix}\right\}$ Continuas en $[\alpha, \beta] \wedge f[Q(t)]\ definida\ en\ [\alpha, \beta]$

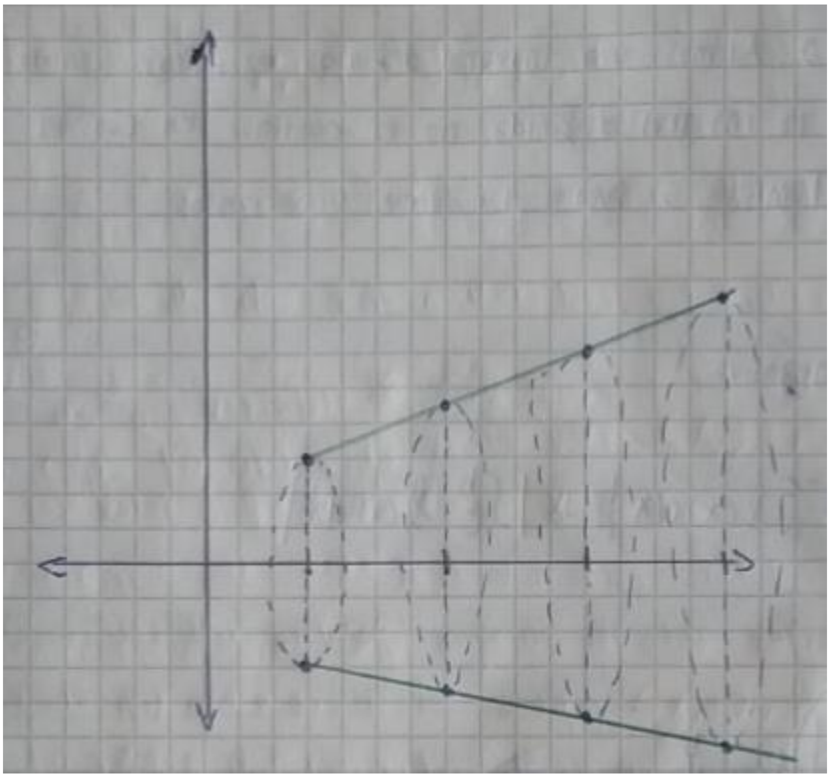
$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[Q(t)] * Q'(t)\ dt$

1) $\int_a^b f(x)dx = f(x) + c = f(b) - f(a)$

2)$\int_\alpha^\beta f[Q(t)] * Q'(t)\ dt = f[Q(t)] + c = f[Q(\beta)] - f[Q(\alpha)] = f(b) - f(a)$

De 1 y 2 resulta = $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[Q(t)] * Q'(t)\ dt$

**Volumen de un Sólido de Revolución**



Consideremos un cuerpo de revolución y efectuemos un corte del mismo con dos planos perpendiculares al eje de giro (x). Sea y = f(x) la ecuación de la curva que fira alrededor del eje 0x y los planos x = a y x = b.

Dividimos el sólido en subintervalos con a $= x_0 < x_n = b$. Consideramos para cada intervalo parcial $(x_i,\ x_i + 1)$, un pequeño cilindro de altura $A_{xi} = (x_i + 1)$ y radio $f(x_i)$. El volumen de este pequeño cilindro es $V_i = \pi * r^2{}_{(x_i)} * \Delta x_i = \pi f^2(x_i) * \Delta x_i$ Se obtendrá un volumen aproximado al buscado si armamos los volúmenes de los n cilindros:

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \pi * \sum_{i=0}^{n-1} f^2(x_i) * \Delta x_i$$

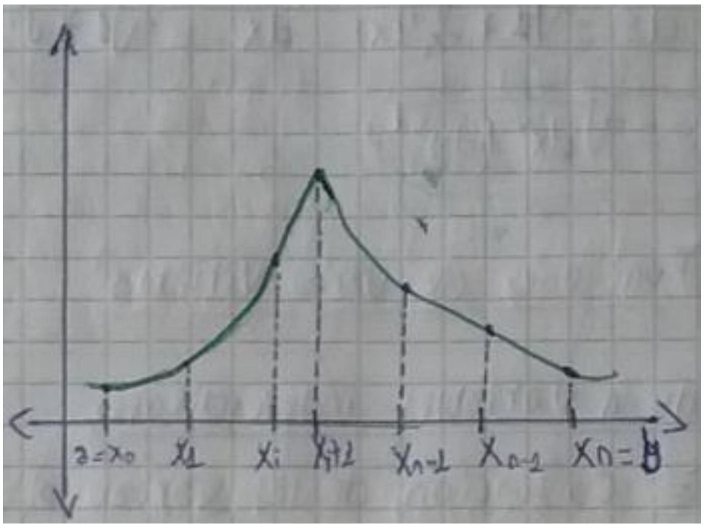
La aproximación será mayor cuanto más fina sea la partición. El valor exacto del volumen es el límite de dicha suma cuando $n \to \infty$

$$V = \lim_{n\to\infty}$$

$$V_n = \lim_{n\to\infty} \pi * \sum_{i=0}^{n-1} f^2(x_i) * \Delta x_i$$

y este límite es por definición una integral definida $V\ = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

**Longitud de un Arco de Curva**



Definimos como longitud de un arco de curva al límite hacia el cual tiende la suma de los lados de la poligonal inscripta en el arco cuando hacemos tender a infinito el número de lados de la misma. Entonces $C_0, C_1, \dots, C_{n-2} \rightarrow Longitud\ de\ los\ lados\ de\ la\ poligonal$

$$P_n = perímetro\ de\ la\ poligonal\ y\ por\ definición : P_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i$$

$$S = longitud\ del\ arco\ de\ curva\ donde : S = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} C_i$$

Pero en la polignoal los lados $C_i$ representan las hipotenusas de triángulos rectángulos de catetos $\Delta x_i \wedge \Delta y_i$ . Por pitágoras:

$$C_i = \sqrt{\Delta x^2{}_i + \Delta y^2{}_i} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x^2{}_i}{\Delta x^2{}_i} + \frac{\Delta y^2{}_i}{\Delta x^2{}_i}\right) * \Delta^2 x_i} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2{}_i}{\Delta x^2{}_i}} * \Delta x_i$$

Y reemplazando en S tendremos:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2{}_i}{\Delta x^2{}_i}} * \Delta x_i$$

Entonces:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} * dx$$

**Diferencial de Arco. Aplicaciones**

Considerando la expresión: $S = \int_a^b \sqrt{1 + {f'}^2(x)} * dx$, el límite superior de integración (b) es variable. Variará también el valor de la integral, ya que la integral será la función de su límite superior $S(x) = \int_a^x \sqrt{1 + {f'}^2(x)} * dt$. Este arco por ser una función de x se llama función *longitud de arco*.

Calculemos la derivada de esta función: $S'(x) = \sqrt{1 + {f'}^2(x)}$ . Multiplicamos esta derivada por la diferencial de la variable independiente y obtenemos la diferencial de arco:

$$ds = \sqrt{1 + {f'}^2(x)} * dx = \sqrt{1 + \frac{d^2y}{dx^2}} dx = \sqrt{\left(1 + \frac{d^2y}{dx^2}\right) dx^2} = \sqrt{\left(\frac{dx^2 + d^2y}{\cancel{dx^2}}\right) \cancel{dx^2}}$$

$$\therefore ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

## Tema 6: Funciones de Varias Variables

### Funciones de Dos y de N Variables Independientes

Sea una variable "z" cofunción de las variables "x" e "y" cuando a cada par ordenado de los valores (x, y), le corresponde solo uno de los valores determinados de la variable "z" con $z = f(x, y)$.
El dominio de la función va a ser el conjunto de pares de valores que pueden tomar "x" e "y" para los cuales la función $z = f(x, y)$ está definida.
El rango de la función va a ser el conjunto de valores de "z" en la cual son imágenes de los pares ordenados (x, y), perteneciente al dominio de la función.

### Curvas y Superficies de Nivel

Supongamos que en el espacio (x, y, z) existe un dominio D en el cual esta toda la función $u = u(x, y, z)$. Los puntos del dominio D, donde la función $u(x, y, z)$ tiene un valor constante "c", $u(x, y, z) = c$. El conjunto de estos puntos forman una superficie. Al tomar otro valor de c, obtenemos otra superficie, las denominadas superficies de nivel.
Si "u" es una función de dos variables "x" e "y", $u(x, y) = u$, las superficies de nivel van a ser iertas curvas de nivel en el plano "xy", $u(x, y) = c$. Si colocamos los valores de "u" a lo largo del eje "z", $z = u(x, y)$, las curvas de nivel en el plano "xy" serán proyecciones de las líneas que se obtienen en la intersección de la superficie $z = u(x, y)$ con los planos z = c.

### Límites de Funciones de Dos Variables Independientes. Límite Doble e Iterado

Dada una función de dos variables independientes $z = f(x, y)$ tendrá como límite "L" en $\rho(\alpha, \beta)$ si para cada número positivo "$\varepsilon$" arbitrario y tan pequeño como se quiera, se puede hallar otro número positivo "$\delta$" que verifique que todos los puntos del entorno rectangular del $\rho(\alpha, \beta)$ tienen valores de la función cuya diferencia con el valor del límite "L" en valor absoluto sea menor que el valor "$\varepsilon$" elegido arbitrariamente.

$$\lim_{\substack{x\to\alpha \\ y\to\beta}} f(x, y) = L <=> \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1 > 0 \ \wedge\ \delta_2 > 0 \,/\, \left.\begin{matrix} 0 < |x-\alpha| < \delta_1 \\ 0 < |y-\beta| < \delta_2 \end{matrix}\right\} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Este límite se defino como Límite Doble.
- Los límites iterados deben interpretarse como límites que se suceden o iteran, es decir, primero nos acercamos hacia el valor $x \to \alpha$ y luego $y \to \beta$. Entonces:

$$\lim_{x\to\alpha}[\lim_{y\to\beta} f(x, y)] = \lim_{x\to\alpha} L(x) = L_1$$
$$\lim_{y\to\beta}[\lim_{x\to\alpha} f(x, y)] = \lim_{y\to\beta} L(y) = L_2$$

### Relación Entre los Límites

- Si los límites iterados son distintos, entonces no existe el límite doble.
- La existencia y la igualdad de los límites iterados no son condiciones suficientes para asegurar la existencia del límite doble.
- Si existe el límite doble y los iterados en un punto, todos ellos son iguales.

**Infinitésimos**

Una función $z = f(x,y)$ es infinitésimo para $(x,y) \rightarrow (a,b)$.
Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = 0$

**Comparación de Infinitésimos**

- Sea $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \alpha$

  - Si $\alpha = 1$, se dice que son infinitésimos equivalentes
  - Si $\alpha = \infty$, $f(x,y)$ es un infinitésimo de orden inferior a $g(x,y)$.
  - Si $\alpha = R$, son del mismo orden.
  - Si $\alpha = 0$, $f(x,y)$ es un infinitésimo de orden superior.

**Continuidad de Funciones de Dos Variables Independientes**

Una función "f" de dos variables independientes es continua en un punto $(x_0,\ y_0)$ de una región abierta "R" si f$(x_0,\ y_0)$ es igual al límite de f$(x,y)$ cuando $(x,y) \rightarrow (x_0,\ y_0)$. Es decir:
$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = (x_0, y_0)$
La función "f" es continua en la región abierta "R" si es continua en todo punto de "R".

**Continuidad de Funciones de N Variables Independientes**

Sea $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\vec{x})\ y\ sea\ \vec{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)\ y\ \vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un punto genérico del dominio, entonces la función $y = f(\vec{x})$ es continua en $\vec{x} = \vec{a}$ si se verifica que $\lim\limits_{x \to a} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.
La función $y = f(\vec{x})$ es continua en un recinto de n-dimensiones si lo es en todos los puntos del mismo.

**Función Compuesta**

Es una función formada por otras dos funciones más. Para ello se aplica sobre el argumento, la función más próxima al mismo, y al resultado del cálulo anterior se le aplica finalmente la función restante.
$x \rightarrow y \rightarrow z => x \rightarrow f(x) \rightarrow g[f(x)]$

**Función Implícita**

Una función se llama implícita cuando los dos valores "x" e "y" se encuentran vinculados y expresados en la forma: $f(x,y) = 0$.
Dada una ecuación $y = f(x)$ que, sustituida en la ecuación anterior la convierte en una función identidad y esta ecuación deriva de la ecuación implícita.

## Tema 7: Derivada de Funciones de Varias Variables

### Derivada de una Función de Dos Variables Independientes

Sea $z = f(x, y)$ función de la variable "y" consideremos un punto fijo (a, b) perteneciente al dominio de la función, formaremos los incrementos de "z" respecto de "x" e "y".
En el incremento con respecto a "x", y = c, entonces:

$$\Delta x\ z = f(a + \Delta x, b) - f(a, b) \therefore x = a => Incremento\ Parcial$$

En el incremento con respecto a "y", x = c, entonces:

$$\Delta y\ z = f(a, b + \Delta y) - f(a, b) \therefore y = b => Incremento\ Parcial$$

Considerando los cocientes incrementales:

$$\frac{\Delta xz}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} => Derivada\ respecto\ a\ "x"$$

$$\frac{\Delta yz}{\Delta y} = \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y} => Derivada\ respecto\ a\ "y"$$

El límite de los coeficientes incrementales cuando los incrementos de las variables "x" e "y" tiende a cero queda:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta xz}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x} = f'x(a, b)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta yz}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y} = f'y(a, b)$$

Si estos límites existen, se llaman derivadas parciales de la función con respecto a "x" e "y" en el punto (a, b).

### Interpretación Geométrica de las Derivadas Parciales

Si $y = y_0\ entonces\ z = f(x, y_0)$ representa la curva intersección de la superficie $z = (x, y)$ con el plano $y = y_0$. Por tanto:

$$fx(x_0, y_0) = pendiente\ de\ la\ curva\ intersección\ en\ \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$$

Análogamente, $f(x_0, y_0)$ es la curva intersección de:

$$z = f(x, y) \quad (superficie)$$
$$x = x_0 \qquad (plano)$$

Y entonces $fy(x_0, y_0) = pendiente\ de\ la\ curva\ intersección\ en\ \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$

Diremos que los valores $\frac{df}{dx}(x_0, y_0), \frac{df}{dy}(x_0, y_0)$ denotan las pendientes de la superficie en las direcciones de "x" e "y", respectivamente.

**Derivadas Parciales de Funciones de N Variables Independientes**

Sea $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una aplicación $R^n \to R\ y$ "$h_j$" el incremento de la variable "$x_j$", tendremos que:

$$\Delta_j y = f\left(x_1, x_2, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n\right) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

El cociente incremental será:

$$\frac{\Delta_j y}{\Delta x_j} = \frac{\Delta y}{hy} = \frac{f\left(x_1, x_2, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n\right) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_j}$$

Consideremos el límite para $h_j \to 0$ nos quedará:

$$\lim_{h_j \to 0} \frac{\Delta_j y}{h_j} = \lim_{h_j \to 0} \frac{f\left(x_1, x_2, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n\right) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_j} = \frac{dy}{dx_j} = \frac{df(x)}{dx_j}$$

Una función es derivable cuando existen las derivadas parciales ocn respecto a cada una de las variables independientes y n derivadas parciales primeras, correspondientes a los n valores que puede tomar “j”.

**Relación Entre la Derivabilidad y la Continuidad**

El teorema nos dice que si una función $y = f(x)$ es derivable en un recinto S, y además las derivadas primeras son acotadas en S, entonces $y = f(x)$ es continua en S.

**Derivadas Parciales de Orden Superior**

El número de derivadas parciales de orden n es $2^n$; sin embargo, por el teorema de Schwarz las derivadas de orden superior al segundo que solo difieren en el orden de la derivación, si son continuas, son iguales:

$$fxxy = fxyx = fyxx \qquad\qquad fyyx = fyxy = fxyy$$

**Diferenciabilidad de Funciones de Dos Variables Independientes**

Si $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b) vamos a llamar diferencial de f en (a, b), y se denota como Df(a, b), a la función de dos variables.

$$Df(a, b)(h_1, h_2) = \frac{df}{dx}(a, b)h_1 + \frac{df}{dy}(a, b)h_2$$

**Diferencial Total**

Definimos como diferencial total a $dz = fx(x, y)dx + fy(x, y)dy$ como la diferencial total de una función $f(x, y)$ correspondiente a los incrementos "Δx" $y$ "$\Delta y$" es igual al incremento correspondiente de la coordenada “z” del plano tg a la superficie $z = f(x, y)$.

**Diferencial de una Función de N Variables Independientes**

Si $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable en un punto, si está definida en el entorno del punto y su incremento total se puede expresar, en donde el diferencial de la función será:
$dy = A_1 * \Delta x_1 + A_2 * \Delta x_2 + \cdots + A_i * \Delta x_i + \cdots + A_n * \Delta x_n$ con los $A_i$ dependiendo de las coordenadas del punto $x_i$ y no de los $\Delta x_i$ y los $\varepsilon_i \to 0\ con\ \Delta x_i \to 0$ .

$$A_i = \frac{df(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{dx_i} => dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{df(\vec{x})}{dx_i} * dx_i$$

**Derivada de la Función Compuesta (Tema 2)**
**Derivada de la Función Implícita**

Para poder derivar una función implícita se usa la regla de la cadena, en el caso de la variable independiente no hay problema ya que se deriva directamente. Para la variable dependiente se considera como una función que a su vez está en función de la variable independiente. Dada una función $f(x, y)$ implícita, si queremos calcular la derivada de "y" respecto de "x":

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Si consideramos que $y = f(x)$ es una función de la variable independiente "x" y $g(y)$ es una función en términos de la variable dependiente "y", dado que $y = f(x)$, entonces para obtener la derivada:

$$dx[g(y)] = dx\left[g\big(f(x)\big)\right] = g'[f(x)] * [f'(x)]$$

**Extremos Relativos de una Función de Dos Variables. Determinación. Aplicaciones**

Sea la función $z = f(x, y)$:
- Alcanza un máximo relativo en un punto $p_0(x_0, y_0)\ si\ \forall(x, y)$ de un entorno reducido de "$p_0$" se verifica que: $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.
- Alcanza un mínimo relativo en un punto $p_0(x_0, y_0)\ si\ \forall(x, y)$ de un entorno reducido de "$p_0$" se verifica que: $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

* Condición necesaria de existencia: La condición necesaria pero no suficiente para la existencia de un extremo relativo es que sus derivadas parciales se anulen en $p_0$. $fx(x_0, y_0) = 0 \ \wedge \ fy(x_0, y_0) = 0$. Si una función posee derivadas parciales continuas de 1º orden en una región del plano, los puntos del dominio donde las derivadas se anulan reciben el nombre de Puntos Críticos.

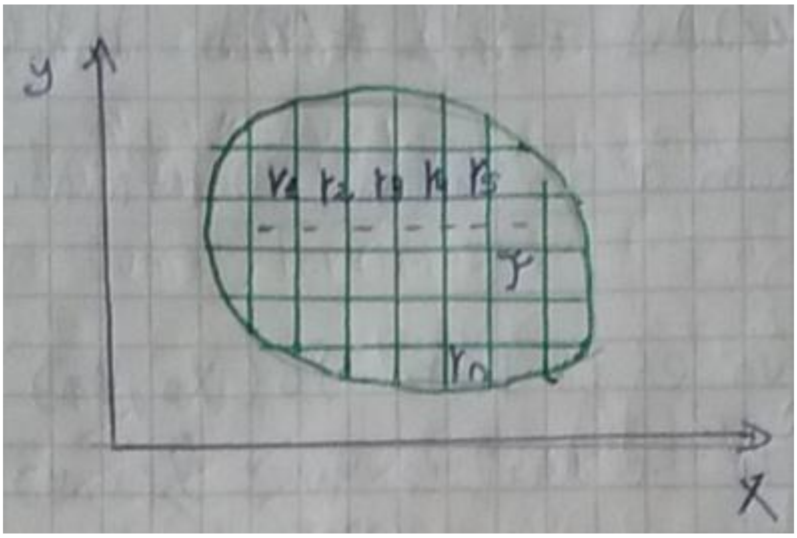
* Condición Suficiente para la existencia: Una función $f(x, y)$ con derivadas de 2do orden continuas, llamaremos Hessiano al determinante funcional:

$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fyx & fyy \end{vmatrix} = fxx * fyy - [fxy]^2$ en donde:

- Si $H(x_0, y_0) > 0 => \ \exists\ extremo\ relativo \rightarrow \begin{matrix} fxx < 0 => Máximo\ Relativo \\ fxx > 0 => Mínimo\ Relativo \end{matrix}$
- Si $H(x_0, y_0) < 0 => \ \exists\ punto\ de\ ensilladura$
- Si $H(x_0, y_0) = 0 =>$ caso dudoso ($no\ sirve\ el\ método$)

**Tema 8: Integrales Múltiples**

**Región de Integración**




Sea $f(x, y)$ una región definida y acotada en un una región cerrada "F" del plano "xy" en rectángulos, suponiendo que hay n rectángulos y los designamos con $r_1, r_2, \dots, r_n$.
Simbolizamos las áreas de estos rectángulos de la subdivisión "Δ", designando las coordenadas del punto con $(\varepsilon_i, n_i)$ y formamos la suma:

$$f(\varepsilon_1, n_1) * A(r_1) + f(\varepsilon_2, n_2) * A(r_2) + \cdots + f(\varepsilon_n, n_n) * A(r_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i, n_i) * A(r_i) \rightarrow Suma\ Integral$$

Los términos de esta suma resultan de multiplicar la función en cada uno de los puntos interiores elegidos por las áreas de las regiones respectivas.
La norma de la subdivisión se indica con "||A||" y es la longitud de la diagonal del mayor rectángulo de la subdivisión "Δ". Si existe el límite de esta suma cuando Δ→ 0 llamaremos a dicho límite Integral Doble de la función $f(x, y)$ en la región "F" y la representaremos por el

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i, n_i) * \ A(r_i) = \iint_F f(x, y) dxdy$$

**Propiedades de la Integral Doble**

1) Si "c" es una constante y $f(x, y)$ es integrable en "F" (región cerrada) =>

$$=> \iint_F f(x,y)dxdy = c \iint_F f(x,y)dxdy$$

2) Si "f" y "g" son funciones integrables en "F" (región cerrada") =>

$$=> \iint_F [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint_F f(x,y)dxdy + \iint_F g(x,y)dxdy$$

3) Supongamos que $f(x, y)$ es integrable en "F" y $m \leq f(x,y) \leq M \ \forall \ (x,y) \in F$ entonces si A(F) designa el área de la región $m * A(F) \leq \iint_F f(x,y)dxdy \leq M * A(F)$.

4) Si "f" y "g" son funciones integrables en "F" y $f(x,y) \leq g(x,y) \forall (x,y) \in F =>$

$$=> \iint_F f(x,y)dxdy \leq \iint_F g(x,y)dxdy$$

5) Si la región de integración se descompone en dos partes "$F_1$" y "$F_2$" tales que: $F_1 \cap F_2 = 0 \ \ y \ \ F_1 \cup F_2 = F \ \ y \ \ f(x,y)$ es continua en "F" se tiene que:

$$\iint_F f(x,y)dxdy = \iint_{F_1} f(x,y)dxdy + \iint_{F_2} f(x,y)dxdy$$

**Cálculo de Integrales Dobles. Integrales Iteradas**

Sea "F" un rectángulo cuyos lados son: $x = a, \ x = b, \ y = c, \ y = d$.
Suponemos que $z = f(x,y)$ es continua en cada $(x,y) \in F$

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)dx \quad (1)$$

La función "A(y)" está definida para $c \leq y \leq d$ y se puede demostrar que si $f(x,y)$ es continua en "F" entonces "A(y)" es continua en [c, d]. Para calcular la integral A(y):

$$\int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \quad (2)$$

También se podría haber fijado primera "x", formando la integral:

$$B(x) = \int_c^d f(x,y)dy => \int_a^b B(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx \qquad (3)$$

Las integrales se calculan sucesivamente por lo cual reciben el nombre de integrales sucesivas o iteradas. En (2) integramos primero con respecto a "x" ("y" es constante), y luego con respecto a "y". En (3) integramos primero con respecto a "y" ("x" es constante) luego con respecto a "x".

**La Integral Triple**

Dada una función continua $f: B \rightarrow R$ donde "R" es algún paralelepípedo rectangular en "$R^3$", podemos definir la integral de "f" en "B" como un límite de sumas. Partimos los tres lados de "B" en "n" partes iguales:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta v$$

donde $c_{ijk} \in B_{ijk}$, el ijk-ésimo paralelepípedo rectangular o caja en la partición de "B" y "$\Delta v$" es el volumen de $B_{ijk}$. Entonces, sea "f" una función acotada de tres variables, definida en "B". La llamamos integral triple y la denotamos como:

$$\iiint_B f(x, y, z) dxdydz$$

**Cambios de Variables**

Sea $(x, y) = \Phi(u, v) = \big(\alpha(u, v), \beta(u, v)\big)$ un cambio de variables de clase "$C^1$" que transforma $(u, v) \in E \ en \ (x, y) \in D = \Phi(\mathrm{E})$

Si el jacobiano $J(u, v) \neq 0$ en el interior de "E", entonces para toda función continua f en D, se cumple:

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{E=\Phi^{-1}(\mathrm{D})} f\big(\alpha(u, v), \beta(u, v)\big) * |J(u, v)| dudv$$

**Tema 9: Ecuaciones Diferenciales**

**Definición**

Se da el nombre de ecuación diferencial a cualquier ecuación que contiene derivadas o diferenciales.
Se denominan "ecuaciones diferenciales ordinarias" a las ecuaciones que solo contienen derivadas diferenciales de una función de una sola variable. En cambio, si contienen derivadas o diferenciales de una función de 20 o más variables se denominan ecuaciones con derivadas parciales.

**Orden y Grado de una Ecuación Diferencial**

El orden de una ecuación diferencial está dado por la derivada o diferencia de mayor orden contenida en la ecuación.
El grado de una ecuación diferencial está dado por el exponente de la derivada de mayor orden que esa ecuación contiene.

**Soluciones de las Ecuaciones Diferenciales. Solución General. Solución Particular**

Se llama solución general de una ecuación diferencial a la función:
$y = z(x, c)$, que depende de "c", y que cumple las siguientes condiciones:
- Se satisface la ecuación diferencial para cualquier valor de "c".
- Cualquiera sea la condición inicial, se puede hallar un valor de "c" que satisfaga la condición.
Se llama solución particular a toda función $y = z(x, c_0)$ deducida de la solución general, dando a la constante "c" un valor determinado.

**Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables**

Cuando los términos de una ecuación diferencial pueden disponerse de manera tal que tome la forma: $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x)}{P(y)} =>$ $\begin{array}{c} \int P(y)dy = \int Q(x)dx \\ P(y) = Q(x) + c \rightarrow Solución\ General \end{array}$
La solución particular se obtiene calculando "c" en la solución general, después de sustituir "x" e "y" por $(x_0, y_0)$.

**Ecuaciones Diferenciales Homogéneas**

Se dice que la función $z = f(x, y)$ es una función homogénea de grado "n" respecto a $(x, y)$ si para todo "$\lambda$" se verifica la identidad: $z = f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n * f(x, y)$ donde "$\lambda$" puede ser una constante o bien una función y "n" un número racional.
Una ecuación diferencial homogénea tiene la siguiente forma:
$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$
Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado, la solución se puede hallar dividiendo ambos miembros por $Q(x, y)$.

**Ecuaciones Diferenciales Lineales**

Una ecuación diferencial de primer orden es lineal si puede escribirse en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) * y = Q(x) \rightarrow Lineal\ en\ "y"$$

$$\frac{dx}{dy} + H(y) * x = S(y) \rightarrow Lineal\ en\ "x"$$

**Ecuaciones Diferenciales Exactas**

Una ecuación diferencial exacta es una ecuación de la forma:
$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ si existe una función: $z(x,y)$ tal que:
$dz = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ por lo cual la ecuación diferencial se puede expresar como:
$dz(x,y) = 0$ y la solución general se puede obtener integrando ambos miembros:

$$\int dz(x,y) = c \rightarrow z(x,y) = c$$

**Condición de Simetría**

Si existe $z(x,y)$ → función primitiva de $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ tal que:
$dz(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
La condición necesaria y suficiente para la existencia de una función primitiva, es decir, para que $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ sea una ecuación diferencial es:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy} \rightarrow Condición\ de\ Simetría$$

Debiendo ser, estas derivadas (segundas cruzadas) funciones continuas.

## Tema 10: Sucesiones y Series Numéricas

### Sucesiones. Concepto

Una sucesión de números reales es una función $a : N \to R \ / \ \forall n \ \in N : a(n) = a_n$, donde "$a_n$" es el enésimo elemento de la sucesión.
El conjunto $a(N) = \{a_n;\ n \in N\} \subset R$ se llama campo de variabilidad de la sucesión dada $\{a_n\}\ con\ n\ \in N.$
Una sucesión es un conjunto de términos formados según una determinada regla.

### Sucesiones Numéricas Acotadas

Una sucesión $\{a_n\}$ admite cota superior si y solo si $\forall\ n \in N :\ a_n\ \leq k\ con\ k \in R.$
Un número real $k'$ es cota inferior de la sucesión $\{a_n\}\ con\ n \in N$ si y solo si $\forall n\ \in N :\ a_n \geq k'$
Se dice que una sucesión está acotada si admite cota superior e inferior; Puede estar acotada superiormente o inferiormente.

### Sucesiones Numéricas Convergentes, Divergentes y Oscilantes

Una sucesión $\{a_n\}\ ;\ n \in N$ se dice convergente si:
$\exists\ L\ \in R\ /\ \forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in N : n \geq n_0\ \ => |a_n - L| < \varepsilon$, donde "L" es límite de la sucesión.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \vee \quad \begin{matrix} a_n \to L \\ n \to \infty \end{matrix}$$

Si una sucesión tiene límite, ese límite es único. Una sucesión $\{a_n\}\ n \in N$ tiene límite infinito si y solo si para cualquier $M\ >\ 0, \exists\ n \in N/\ n \in N, n > n_0 => |a_n| > M$
Si el límite de esta sucesión es infinito => la sucesión es divergente: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
Una sucesión que no es convergente, ni divergente, es una sucesión oscilante.

**Series: Definición y Clasificación**

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Formaremos una nueva sucesión de la forma:

$s_1 = a_1;\ s_2 = a_1 + a_2 \dots s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} ak$

La sucesión asi formada se llama serie y se representa como:

$$S_n = \sum_{n=n}^{\infty} a_n$$

Siendo el número $S_n$ la suma parcial enésima de la serie y el número "$a_n$" el término n-ésimo de la serie.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, divergente u oscilante, según que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ sea convergente, divergente u oscilante.

- Si $\{S_n\} \rightarrow "L"$ diremos que "L" es la suma de la serie y escribiremos:

$$\sum_{n=n}^{+\infty} a_n = L$$

- Si $\{S_n\} \rightarrow " + \infty"$, se denota:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$

- Si $\{S_n\} \rightarrow " - \infty"$, se denota:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$$

**Condición Necesaria Para la Convergencia. Condición Necesaria y Suficiente**

Si la serie $\sum a_n$ converge => $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Si $\sum a_n < \infty => \{S_n\}\ n \in N$ converge, es decir:

$\lim_{n\to\infty} S_n = L\ \wedge\ \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L,\ si\ n \rightarrow \infty, n - 1 \rightarrow \infty$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \underset{n \to \infty}{\rightarrow} L - L = 0$$

Esta es una condición necesaria pero no suficiente. Lo demuestra la serie armónia $\sum \frac{1}{n}$; dado que el límite con $n \rightarrow \infty$ de "$\frac{1}{n}$" es igual a cero, pero la serie diverge.

**Serie Geométrica**

Se llama serie geométrica a aquella en que cada término es igual al anterior, multiplicado por un factor constante:

$$a + a * q + a * q^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a * q^n$$

Para saber si una serie es convergente o no, primero calculamos su enésima suma parcial:

$$S_n = a + a * q + a * q^2 + \cdots + a * q^{n-1}$$

Luego multiplicamos ambos miembros por “q”:

$$S_n * q = (a + a * q + a * q^2 + \cdots + a * q^{n-1}) * q$$

$$S_n = \frac{a * (a - q^n)}{1 - q} => \lim_{n\to\infty}$$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a * (1 - q^n)}{1 - q} \to a\ partir\ de\ esto\ consideramos\ los\ diferentes\ casos$$

1) $|q| < 1 => -1 < q < 1$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 => \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1 - q} = \text{número infinito}, por\ lo\ tanto\ la\ serie\ es\ convergente$$

2) $|q| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty => \lim_{n\to\infty} S_n = \infty => Límite\ divergente$$

3) $q < -1$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \nexists\ Este\ límite\ no\ existe. Los\ valores\ saltan\ de\ un\ positivo\ a\ un\ negativo, por\ lo\ tanto\ es\ oscilante.$$

4) $q = 1$

$$a * 1 + a * 1 + a * n = \infty => \lim_{n\to\infty} S_n = \infty\ es\ divergente$$

5) $q = -1$

$$a - a + a - a + \cdots => Es\ oscilante$$

**Serie Armónica**

Se define a una serie armónica a la que sigue dicha forma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Se llama así porque la longitud de onda de las armónicas de una cuerda que vibra es proporcional a la longitud según la serie.

**Series Reales a Términos Positivos**

Son series $\sum a_n$ en la que $\forall\ n\ \in N : a_n\ \geq 0$. Si se consideran solamente series o suma de series de términos positivos, resultaran series convergentes o divergentes pero nunca oscilantes, dada que la sucesión $S_n$ tenderá a un valor finito o infinito cuando $n \to \infty$.

**Criterios de Comparación**

Sean "$\sum a_n$" y "$\sum b_n$" $< \infty, si\ n\ \in N : a_n \leq b_n => \sum a_n\ < \infty$ y su suma no supera la suma de $\sum b_n$ ($\sum b_n$ es una serie mayorante de $\sum a_n$).

**Criterios Clásicos de Convergencia: Criterio de D'Alambert, Criterio de Cauchy**

Sea $\sum a_n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = L$

- Si $L\ <\ 1\ \ => \sum a_n\ \ converge$
- Si $L\ >\ 1\ \ => \sum a_n\ \ diverge$
- Si $L =\ 1\ \ => nada\ puede\ asegurarse\ sobre\ el\ carácter\ de\ la\ serie$

Criterios de D'Alambert

- Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L < 1, entonces\ la\ serie\ \sum x_n\ \ es\ convergente$

Sin embargo,

- Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L > 1, entonces\ la\ serie \sum x_n\ \ es\ divergente.$

$En\ el\ caso\ de\ que\ L = 1, no\ puede\ asegurarse\ nada\ sobre\ el\ carácter\ de\ la\ serie.$

Criterio de Cauchy