



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## ***ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2***

***Численное решение краевых задач для  
одномерного уравнения теплопроводности***

***Варианты 5, 16***

Студенты \_\_\_\_\_  
ФН2-61Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

И. П. Шаманов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

О. Д. Климов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

С. А. Конев  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2024 г.

# 1. Ответы на контрольные вопросы

1. *Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость.*

Пусть мы рассматриваем задачу о нахождении решения уравнения  $Au = f$  в области  $G$  с дополнительными условиями  $Ru = \mu$  на границе  $\Gamma = \partial G$  области  $G$ :

$$Au = f \text{ в } G, \quad Ru = \mu \text{ на } \Gamma. \quad (1)$$

где  $A, R$  — заданные операторы,  $f, \mu$  — заданные функции.

**Опр.** Задача называется **корректно поставленной**, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Если же не выполнено хотя бы одно из этих условий, то задача называется некорректно поставленной.

**Опр.** Функция, определённая только в узлах сетки, называется сеточной.

**Опр.** Построение разностной схемы — это замена уравнений и дополнительных условий исходной задачи алгебраическими уравнениями для сеточных функций. Производные в исходных уравнениях заменяют конечными разностями, интегралы — квадратурными формулами, прочие члены — алгебраическими соотношениями.

Пусть для точной задачи (1) используется разностная схема

$$A_h u = \varphi \text{ в } G_h, \quad R_h u = \nu \text{ на } \Gamma_h. \quad (2)$$

Сеточные функции  $\psi_h = (\varphi - f_h) + ((Av)_h - A_h v_h)$ ,  $\chi_h = (\nu - \mu_h) + ((Rv)_h - R_h v_h)$  — **погрешности аппроксимации разностной** задачи в  $G_h$  и на  $\Gamma_h$  соответственно ( $v$  есть произвольная функция из области определения оператора  $A$ ).

**Опр.** Говорят, что **разностная схема аппроксимирует исходную задачу**, если  $\|\psi_h\|_\psi \rightarrow 0$ ,  $\|\chi_h\|_\chi \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Аппроксимация имеет  **$p$ -й порядок** ( $p > 0$ ), если  $\|\psi_h\|_\psi = O(h^p)$ ,  $\|\chi_h\|_\chi = O(h^p)$  при  $h \rightarrow 0$ .

**Опр.** Разностные схемы называются **консервативными**, если их решение удовлетворяет дискретному аналогу закона сохранения (баланса), присущему данной задаче. В противном случае схему называют **неконсервативной**, или дисбалансной.

**Опр.** Разностные схемы, в которых расчет ведется по одним формулам и на одном шаблоне во всех узлах сетки без какого-то либо специального выделения имеющих особенностей, называются **однородными**.

**Опр.** Схемы, решение которых удовлетворяет принципу максимума или сохраняет пространственную монотонность (в одномерном случае) при условии, что соответствующие свойства справедливы для исходных задач, называются **монотонными**.

Пусть  $y_1, y_2$  — решения двух задач с одинаковым оператором, соответствующие правым частям  $\varphi_1, \varphi_2$  и граничным условиям  $\nu_1, \nu_2$ .

**Опр.** Говорят, что **разностная схема устойчивая**, если решение уравнений схемы непрерывно зависит от входных данных и эта зависимость равномерна по  $h$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_{\varphi} < \delta, \| \nu_1 - \nu_2 \|_{\nu} < \delta \Rightarrow \| y_1 - y_2 \|_Y < \varepsilon$$

**Опр.** В случае нескольких независимых переменных **устойчивость** называют **безусловной** (или **абсолютной**), если устойчивость имеет место для любого соотношения шагов, и **условной** в противном случае.

Будем различать следующие устойчивости. Устойчивость по правой части: непрерывная зависимость решения разностной задачи от  $\varphi$ . Устойчивость по граничным условиям: непрерывная зависимость решения разностной задачи от  $\nu$  на границе пространственной области. Устойчивость по начальным данным: непрерывная зависимость решения разностной задачи от  $\nu$  на гиперплоскости  $t = 0$ .

**Опр.** Разностное решение  $y$  сходится к решению  $u$  точной задачи, если  $\|y - p_h u\|_Y \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Говорят, что имеет место **сходимость** с  $p$ -м ( $p > 0$ ) порядком, если  $\|y - p_h u\|_Y = O(h^p)$  при  $h \rightarrow 0$ .

*Замечание.*  $f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \forall x \in U(x) : |f(x)| \leq C|g(x)|$ .

**2. Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?**

Рассматриваем задачу с переменными коэффициентом температуропроводности  $k = k(x, t)$ :

$$\begin{cases} u_t = (ku_x)_x, & 0 < x < l, & 0 < t < T; \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = \mu_1(t), & u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

Для такой задачи в лабораторной работе рассматривается схема с весами вида:

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} (\sigma(a_{i+1}y_{x,i}^{j+1} - a_i y_{\bar{x},i}^{j+1}) + (1 - \sigma)(a_{i+1}y_{x,i}^j - a_i y_{\bar{x},i}^j).$$

Запишем её в более компактном виде:

$$y_t = (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x,$$

где  $0 < a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$ .

Вычисления проводим на равномерной сетке. Для анализа устойчивости воспользуемся методом энергетических неравенств.

Если операторы  $A$  и  $B$  не зависят от  $t$ ,  $A = A^* > 0$  и  $B = B^* > 0$ , то разностная схема  $B y_t + A y = 0$  устойчива по начальным данным в норме  $\|\cdot\|_A = \{(A\cdot, \cdot)\}^{1/2}$ , если  $B \geq \frac{\tau}{2} A$ .

А метод энергетических неравенств основывается на приведённом выше утверждении и заключается в следующем. Пусть  $A = A^* > 0$  и  $B = B^* > 0$  и  $B \geq \frac{\tau}{2} A$ . Тогда схема  $B y_t + A y = 0$  устойчива по начальным данным.

Заметим, что

$$y^{(\sigma)} = (1 - \sigma)y + \sigma \hat{y} = y + \sigma \tau \frac{\hat{y} - y}{\tau} = y + \tau \sigma y_t.$$

Тогда схему с весами можно записать в виде:

$$y_t = ay_{\bar{x}x} + \sigma \tau ay_{\bar{x}xt};$$

$$(y - \sigma \tau ay_{\bar{x}x})_t = ay_{\bar{x}x}.$$

Сравнивая схему со схемой  $B y_t + A y = 0$ , получим, что в нашем случае:

$$A y = -y_{\bar{x},x}, \quad B = E + \tau \sigma A.$$

Надо показать, что  $E + \tau \sigma A \geq \frac{\tau}{2} A$ .

Воспользуемся известной оценкой собственных значений задачи Штурма-Лиувилля в дискретном случае. То есть для задачи

$$\begin{cases} -y_{\bar{x},x} = \lambda^2 y, \\ y_0 = 0, & y_n = 0 \end{cases}$$

знаем, что  $\frac{9}{l^2} \leq \lambda_k^2 \leq \frac{4}{h^2}$ .

Отсюда можно сделать вывод, что для нашего случая

$$\frac{9a_{\min}}{l^2} \|y\|_2^2 \leq (Ay, y) \leq \frac{4a_{\max}}{h^2} \|y\|_2^2.$$

$$E \geq \tau \left( \frac{1}{2} - \sigma \right) A;$$

$A$  — положительно определённый оператор, тогда

$$1 \geq \tau \frac{4a_{\max}}{h^2} \left( \frac{1}{2} - \sigma \right);$$

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a_{\max}\tau}.$$

Из этой оценки получаем, что схема должна удовлетворять условию устойчивости для всего интервала изменения  $a$ , реализуемого в задаче. То есть на практике выбираем фиксированное значение  $a$ , исследуем схему на устойчивость при этом значении параметра. После этого выбираем  $\sigma$ -вес, что удовлетворяет всему интервалу изменения  $a$ .

Однако сделаем замечания. Данный приём называется „принцип замороженных коэффициентов”. Он, вообще говоря, является нестрогим, но часто даёт нужные результаты (не для всех схем). Так как  $a(x, t)$  является непрерывной функцией, то её значения на достаточно большом разбиении отрезка в двух соседних пространственных узлах одного временного слоя мало различимы (нет разрыва), то можно считать в этой окрестности  $a$  постоянным коэффициентом. И тогда можно провести исследование на  $a_{\max}$ , выбрать устойчивую конфигурацию (выбрать нужные  $\tau, h, \sigma$ ). Получим некую устойчивость „с запасом” для случаев  $a < a_{\max}$ .

**3. Будет ли смешанная схема иметь второй порядок аппроксимации при  $a_i = \frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i)+K(x_{i-1})}$  ?**

Имеем однородную консервативную схему

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}(\sigma(a_{i+1}y_{x,i}^{j+1} - a_i y_{\bar{x},i}^{j+1}) + (1 - \sigma)(a_{i+1}y_{x,i}^j - a_i y_{\bar{x},i}^j),$$

Преобразовав данное в вопросе выражение, имеем

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K_i} + \frac{1}{K_{i-1}} \right)$$

Разложим в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2}$ :

$$\frac{1}{K_i} = \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{2K'_{i-\frac{1}{2}}}{(K_{i-\frac{1}{2}})^2} \frac{1}{2!} \frac{h}{2} + O(h^2), \quad \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{2K'_{i-\frac{1}{2}}}{(K_{i-\frac{1}{2}})^2} \frac{1}{2!} \frac{h}{2} + O(h^2)$$

Подставим и получим

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K_i} + \frac{1}{K_{i-1}} + O(h^2) \right) = \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} + O(h^2) \Rightarrow a_i = K_{i-\frac{1}{2}} + O(h^2)$$

Следовательно при  $K_{i-\frac{1}{2}}$  получаем порядок аппроксимации  $O(h^2)$ .

---

4. *Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации граничных условий (2.5), (2.6) с порядком точности  $O(\tau + h^2)$ ,  $O(\tau^2 + h^2)$ ,  $O(\tau^+ h)$  вы знаете?*

---

5. При каких  $h$ ,  $\tau$  и  $\sigma$  смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.



---

6. *Какие ограничения на  $h$ ,  $\tau$  и  $\sigma$  накладывают условия устойчивости прогонки?*

---

7. В случае  $K = K(u)$  чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?

---

8. Для случая  $K = K(u)$  предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.

## Список использованных источников

1. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2018. 592 с.