Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности
Варианты 5, 16

Студенты ФН2-61Б
(Группа)

И. П. Шаманов
(Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

О. Д. Климов
(Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

Преподаватель

С. А. Конев
(Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

2024 г.

1. Ответы на контрольные вопросы

1. ***Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость.***

Пусть мы рассматриваем задачу о нахождении решения уравнения $Au = f$ в области G с дополнительными условиями $Ru = \mu$ на границе $\Gamma = \partial G$ области G:

$$Au = f \text{ в } G, \quad Ru = \mu \text{ на } \Gamma. \tag{1}$$

где A, R — заданные операторы, f,μ — заданные функции.

Опр. **Задача** называется **корректно поставленной**, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Если же не выполнено хотя бы одно из этих условий, то задача называется некорректно поставленной.

Опр. Функция, определённая только в узлах сетки, называется сеточной.

Опр. Построение разностной схемы — это замена уравнений и дополнительных условий исходной задачи алгебраическими уравнениями для сеточных функций. Производные в исходных уравнениях заменяют конечными разностями, интегралы — квадратурными формулами, прочие члены — алгебраическими соотношениями.

Пусть для точной задачи (1) используется разностная схема

$$A_h y = \varphi \text{ в } G_h, \quad R_h y = \nu \text{ на } \Gamma_h. \tag{2}$$

Сеточные функции $\psi_h = (\varphi - f_h) + ((Av)_h - A_h v_h), \quad \chi_h = (\nu - \mu_h) + ((Rv)_h - R_h v_h)$ — **погрешности аппроксимации разностной** задачи в G_h и на Γ_h соответственно (v есть произвольная функция из области определения оператора A).

Опр. Говорят, что **разностная схема аппроксимирует исходную задачу**, если $||\psi_h||_\psi \to 0$, $||\chi_h||_\chi \to 0$ при $h \to 0$. Аппроксимация имеет ***p*-й порядок** ($p > 0$), если $||\psi_h||_\psi = O(h^p)$, $||\chi_h||_\chi = O(h^p)$ при $h \to 0$.

Опр. Разностные схемы называются **консервативными**, если их решение удовлетворяет дискретному аналогу закона сохранения (баланса), присущему данной задаче. В противном случае схему называют **неконсервативной**, или дисбалансной.

Опр. Разностные схемы, в которых расчет ведется по одним формулам и на одном шаблоне во всех узлах сетки без какого-то либо специального выделения имеющихся особенностей, называются **однородными**.

Опр. Схемы, решение которых удовлетворяет принципу максимума или сохраняет пространственную монотонность(в одномерном случае) при условии, что соответствующие свойства справедливы для исходных задач, называются **монотонными**.

Пусть y_1, y_2 — решения двух задач с одинаковым оператором, соответствующие правым частям φ_1, φ_2 и граничным условиям ν_1, ν_2.

Опр. Говорят, что **разностная схема устойчивая**, если решение уравнений схемы непрерывно зависит от входных данных и эта зависимость равномерна по h, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \| \varphi_1 - \varphi_2 \|_{\varphi} < \delta, \| \nu_1 - \nu_2 \|_{\nu} < \delta \Rightarrow \| y_1 - y_2 \|_Y < \varepsilon$$

Опр. В случае нескольких независимых переменных **устойчивость** называют **безусловной**(или **абсолютной**), если устойчивость имеет место для любого соотношения шагов, и **условной** в противном случае.

Будем различать следующие устойчивости. Устойчивость по правой части: непрерывная зависимость решения разностной задачи от φ. Устойчивость по граничным условиям: непрерывная зависимость решения разностной задачи от ν на границе пространственной области. Устойчивость по начальным данным: непрерывная зависимость решения разностной задачи от ν на гиперплоскости $t = 0$.

Опр. Разностное решение y сходится к решению u точной задачи, если $\|y - p_h u\|_Y \to 0$ при $h \to 0$. Говорят, что имеет место **сходимость** с p-м ($p > 0$) порядком, если $\|y - p_h u\|_Y = O(h^p)$ при $h \to 0$.

Замечание. $f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \forall x \in U(x) : |f(x)| \leqslant C|g(x)|$.

2. ***Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?***

Рассматриваем задачу с переменными коэффициентом температуропроводности $k = k(x,t)$:

$$\begin{cases} u_t = (ku_x)_x, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t < T; \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(l,t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

Для такой задачи в лабораторной работе рассматривается схема с весами вида:

$$c\rho\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}(\sigma(a_{i+1}y_{x,i}^{j+1} - a_i y_{\bar{x},i}^{j+1}) + (1-\sigma)(a_{i+1}y_{x,i}^j - a_i y_{\bar{x},i}^j).$$

Запишем её в более компактном виде:

$$y_t = (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}))_x,$$

где $0 < a_{min} \leqslant a \leqslant a_{max}$.

Вычисления проводим на равномерной сетке. Для анализа устойчивости воспользуемся методом энергетических неравенств.

Если операторы A и B не зависят от t, $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$, то разностная схема $By_t + Ay = 0$ устойчива по начальным данным в норме $\|\cdot\|_A = \{(A\cdot,\cdot)\}^{1/2}$, если $B \geqslant \frac{\tau}{2}A$.

А метод энергетических неравенств основывается на приведённом выше утверждении и заключается в следующем. Пусть $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$ и $B \geqslant \frac{\tau}{2}A$. Тогда схема $By_t + Ay = 0$ устойчива по начальным данным.

Заметим, что

$$y^{(\sigma)} = (1-\sigma)y + \sigma\hat{y} = y + \sigma\tau\frac{\hat{y} - y}{\tau} = y + \tau\sigma y_t.$$

Тогда схему с весами можно записать в виде:

$$y_t = ay_{\bar{x}x} + \sigma\tau a y_{\bar{x}xt};$$

$$(y - \sigma\tau a y_{\bar{x}x})_t = ay_{\bar{x}x}.$$

Сравнивая схему со схемой $By_t + Ay = 0$, получим, что в нашем случае:

$$Ay = -y_{\bar{x},x}, \qquad B = E + \tau\sigma A.$$

Надо показать, что $E + \tau\sigma A \geqslant \frac{\tau}{2}A$.

Воспользуемся известной оценкой собственных значений задачи Штурма-Лиувилля в дискретном случае. То есть для задачи

$$\begin{cases} -y_{\bar{x},x} = \lambda^2 y, \\ y_0 = 0, \qquad y_n = 0 \end{cases}$$

знаем, что $\dfrac{9}{l^2} \leqslant \lambda_k^2 \leqslant \dfrac{4}{h^2}$.

Отсюда можно сделать вывод, что для нашего случая

$$\frac{9a_{min}}{l^2}\|y\|_2^2 \leqslant (Ay, y) \leqslant \frac{4a_{max}}{h^2}\|y\|_2^2.$$

$$E \geqslant \tau(\frac{1}{2} - \sigma)A;$$

A — положительно определённый оператор, тогда

$$1 \geqslant \tau\frac{4a_{max}}{h^2}(\frac{1}{2} - \sigma);$$

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a_{max}\tau}.$$

Из этой оценки получаем, что схема должна удовлетворять условию устойчивости для всего интервала изменения a, реализуемого в задаче. То есть на практике выбираем фиксированное значение a, исследуем схему на устойчивость при это значении параметра. После этого выбираем σ-вес, что удовлетворяет всему интервалу изменения a.

Однако сделаем замечания. Данный приём называется „принцип замороженных коэффициентов". Он, вообще говоря, является нестрогим, но часто даёт нужные результаты (не для всех схем). Так как $a(x, t)$ является непрерывной функцией, то её значения на достаточно большом разбиении отрезка в двух соседних пространственных узлах одного временного слоя мало различимы (нет разрыва), то можно считать в этой окрестности a постоянным коэффициентом. И тогда можно провести исследование на a_{max}, выбрать устойчивую конфигурацию (выбрать нужные τ, h,σ). Получим некую устойчивость „с запасом" для случаев $a < a_{max}$.

3. ***Будет ли смешанная схема иметь второй порядок аппроксимации при*** $a_i = \frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i)+K(x_{i-1})}$ ***?***

Имеем однородную консервативную схему

$$c\rho\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}(\sigma(a_{i+1}y_{x,i}^{j+1} - a_i y_{\bar{x},i}^{j+1}) + (1-\sigma)(a_{i+1}y_{x,i}^j - a_i y_{\bar{x},i}^j),$$

Преобразовав данное в вопросе выражение, имеем

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_i} + \frac{1}{K_{i-1}}\right)$$

Разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2}$:

$$\frac{1}{K_i} = \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{2K'_{i-\frac{1}{2}}}{(K_{i-\frac{1}{2}})^2}\frac{1}{2!}\frac{h}{2} + O(h^2), \quad \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{2K'_{i-\frac{1}{2}}}{(K_{i-\frac{1}{2}})^2}\frac{1}{2!}\frac{h}{2} + O(h^2)$$

Подставим и получим

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{K_i} + \frac{1}{K_{i-1}} + O(h^2)\right) = \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} + O(h^2) \quad \Rightarrow \quad a_i = K_{i-\frac{1}{2}} + O(h^2)$$

Следовательно при $K_{i-\frac{1}{2}}$ получаем порядок аппроксимации $O(h^2)$.

4. ***Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации граничных условий (2.5), (2.6) с порядком точности*** $O(\tau+h^2)$, $O(\tau^2+h^2)$, $O(\tau+h)$ ***вы знаете?***

Граничные условия (2.5), (2.6) являются граничными условиями 2-го рода. Погрешность аппроксимации граничных условий задаёт погрешность всего метода.

Рассмотрим уравнение вида $u_t = (ku_x)_x$ с граничными условиями второго рода (например, слева):

$$-ku_x + \alpha u = p(t), \qquad x = 0.$$

Один из способов аппроксимации граничного условия — непосредственно записать дифференциальные операторы через разностные соотношения:

$$-k\frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} + \alpha\hat{y}_0 = \hat{p}.$$

В таком случае

$$\psi_h = \hat{p} - \alpha\hat{u}_0 + k\frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h} = \hat{p} - \alpha\hat{u}_0 + \frac{k}{h}(\hat{u}_0 + h\hat{u}_{x,0} + \frac{h^2}{2}\hat{u}_{xx,0} - \hat{u}_0 + O(h^3)) =$$
$$= \hat{p} - \alpha\hat{u}_0 + k\hat{u}_{x,0} + O(h) = 0 + O(h).$$

Однако, первый порядок по пространству нас может не устроить, если, например, мы применяем схему $y_t = k\hat{y}_{\bar{x},x}$ с порядком точности $O(\tau+h^2)$. Решим эту проблему, применив интегро-интерполяционный метод.

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} u_t dxdt = \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} (ku_x)_x dxdt;$$

$$\int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} (\hat{u}_0 - u_0)dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} ((ku_x)|_{x_{\frac{1}{2}}} - (ku_x)|_{x_0})dt.$$

Заменяем операторы разностными аналогами и учитываем граничные условия.

$$\frac{\hat{y}_0 - y_0}{\tau}\tau\frac{h}{2} = k\tau\frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} + \tau\hat{p} - \tau\alpha\hat{y}_0;$$

Домножаем обе части уравнения на $\frac{h}{2}$:

$$y_{t,0} = \frac{2}{h}(k\hat{y}_{x,0} + \hat{p} - \alpha\hat{y}_0).$$

В таком случае:

$$\psi_h = -\frac{h}{2}u_{t,0} + \hat{p} - \alpha\hat{u}_0 + k\frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h} = O(h^2).$$

Причём, получили безусловную аппроксимацию.

Помимо интегро-интерполяционного метода можно использовать и аппроксимацию ENO и WENO (взвешенные, существенно не осциллирующие схемы, в которых аппроксимация будет происходить с помощью кубического полинома).

5. ***При каких h, τ и σ смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.***

Рассматриваем схему с весами:

$$c\rho\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}(\sigma(a_{i+1}y_{x,i}^{j+1}-a_iy_{\bar{x},i}^{j+1})+(1-\sigma)(a_{i+1}y_{x,i}^j-a_iy_{\bar{x},i}^j).$$

Для определения монотонности схемы будем проверять выполнение для неё условия положительности коэффициентов.

$$c\rho\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{h^2}(\sigma(a_{i+1}(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1})-a_i(y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}))+(1-\sigma)(a_{i+1}(y_{i+1}^j-y_i^j)-a_i(y_i^j-y_{i-1}^j));$$

$$\left(\frac{\sigma(a_{i+1}+a_i)}{h^2}+\frac{c\rho}{\tau}\right)y_i^{j+1}=\frac{\sigma a_{i+1}}{h^2}y_{i+1}^{j+1}+\frac{\sigma a_i}{h^2}y_{i-1}^{j+1}+\frac{(1-\sigma)a_{i+1}}{h^2}y_{i+1}^j+\frac{(1-\sigma)a_i}{h^2}y_{i-1}^j+$$
$$+\left(\frac{c\rho}{\tau}-\frac{(1-\sigma)(a_{i+1}+a_i)}{h^2}\right)y_i^j.$$

Условие положительности коэффициентов можно записать в виде системы неравенств.

$$\begin{cases}A=\dfrac{\sigma(a_{i+1}+a_i)}{h^2}+\dfrac{c\rho}{\tau}>0,\\ B_1=\dfrac{\sigma a_{i+1}}{h^2}>0,\\ B_2=\dfrac{\sigma a_i}{h^2}>0,\\ B_3=\dfrac{(1-\sigma)a_{i+1}}{h^2}>0,\\ B_4=\dfrac{(1-\sigma)a_i}{h^2}>0,\\ B_5=\dfrac{c\rho}{\tau}-\dfrac{(1-\sigma)(a_{i+1}+a_i)}{h^2}>0,\\ D=A-\sum_{i=1}^5 B_i\geqslant 0.\end{cases}$$

Известно, что $\sigma\in(0,1)\Rightarrow\sigma>0$; $\rho>0$; $c>0$; $K(x)>0\Rightarrow a_i>0$; $h>0$; $\tau>0$. Из условия $B_5>0$ следует:

$$\frac{c\rho}{\tau}>\frac{(1-\sigma)(a_{i+1}+a_i)}{h^2};$$

$$\frac{h^2}{\tau(1-\sigma)}>\frac{(a_{i+1}+a_i)}{c\rho}; \qquad (3)$$

Соотношение $(a_{i+1}+a_i)$ определяется из способа вычисления a_i. Таким образом, схема, для которой неравенство (3) выполнено, является монотонной.

Приведём иллюстрации монотонного и немонотонного расчёта. Рассмотрим алюминиевый стержень длины 1 м. Согласно ГОСТ 22233-83 имеем следующие параметры: $\rho = 2600\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $c = 840\frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}$. Коэффициент $K = 221\frac{\text{Вт}}{\text{м К}}$ будем считать постоянным. Зададим начальное распределение температуры:

$$u(x,0) = u_0 - 500 - x(L-x), \qquad x \in (0, L),$$

где $u_0 = 800$К. На концах стержня будем поддерживать постоянную температуру u_0. Расчёт будет вести до момента времени $T = 100$с.

Так как $K = const$, получаем $a_{i+1} + a_i = 221 + 221 = 442$.При выборе параметров схемы $h = 0.05$, $\tau = 0.009$ и $\sigma = 0.5$:

$$\frac{0.05^2}{0.009(1-0.5)} > \frac{442}{840 \cdot 2600};$$

$$\frac{5}{9} > \frac{17}{84000} \Rightarrow \text{У.П.К. выполнено и схема монотонна.}$$

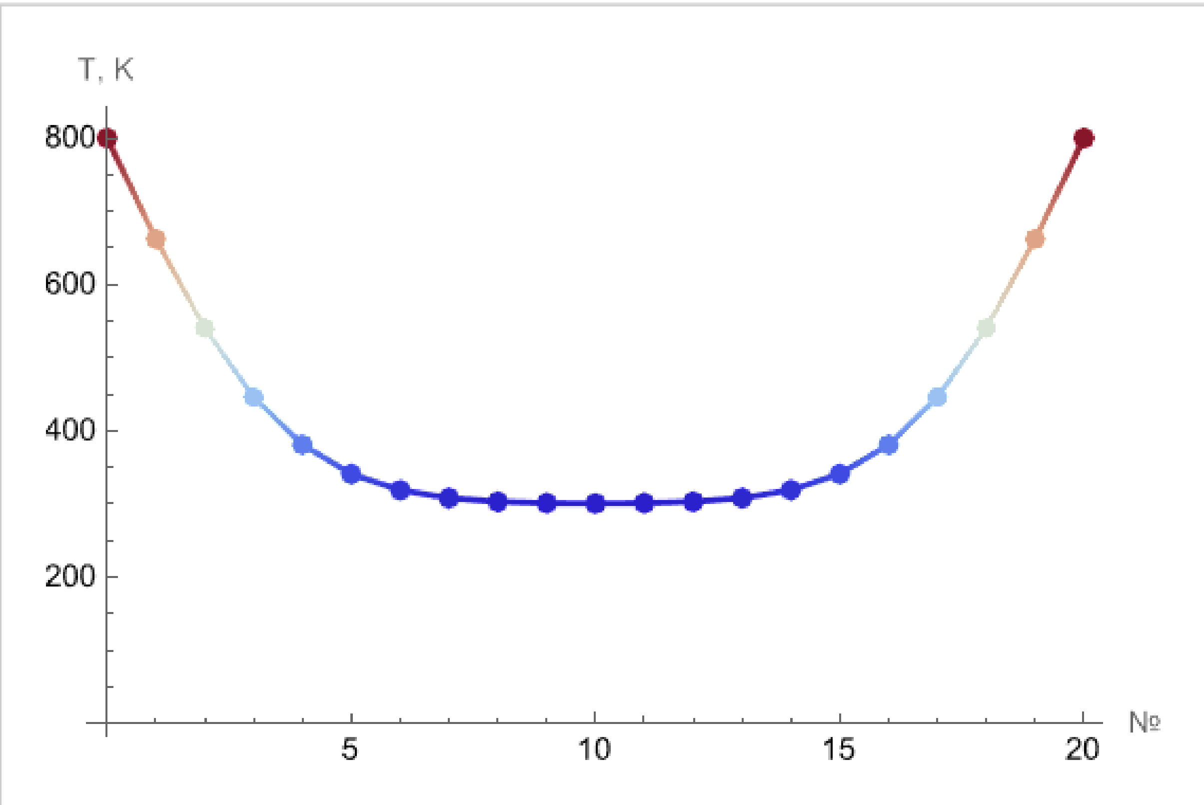

Рис. 1. Распределение температуры в стержне при $t = 100$с (монотонная схема)

Нарушим монотонность схемы, выбрав значения $h = 0.005$, $\tau = 1$, $\sigma = 0$.

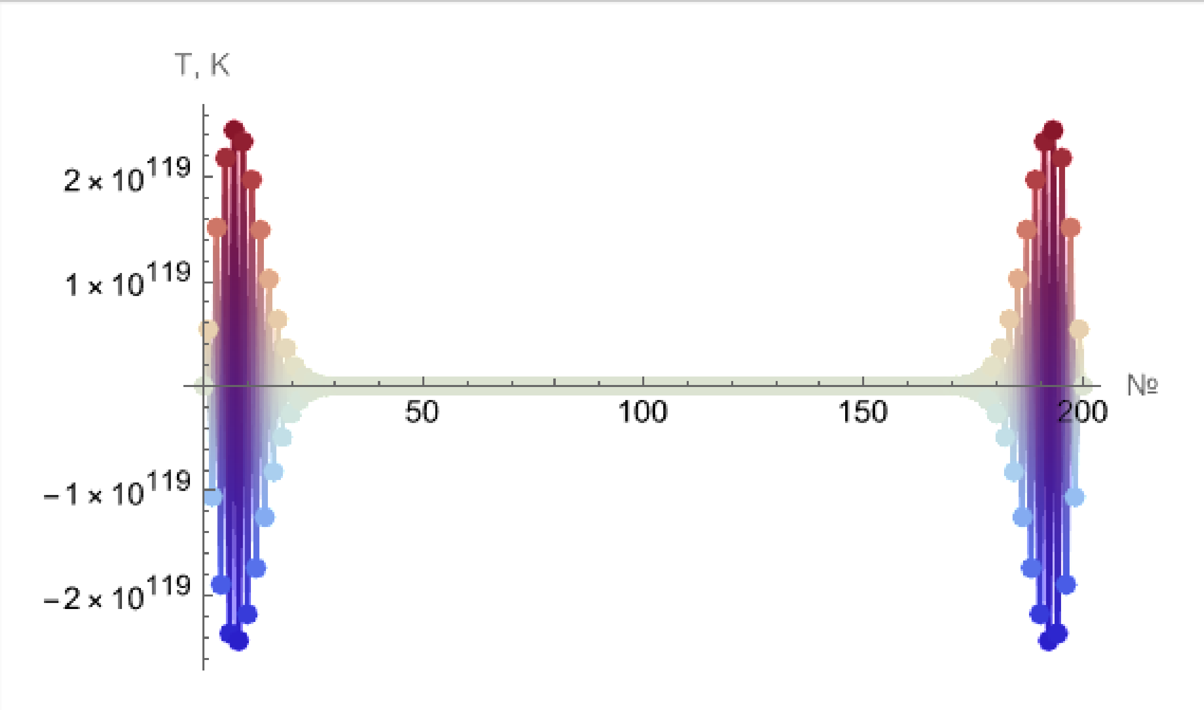

Рис. 2. Распределение температуры в стержне при $t = 100$с (немонотонная схема)

6. ***Какие ограничения на h, τ и σ накладывают условия устойчивости прогонки?***

7. ***В случае*** $K = K(u)$ ***чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?***

8. ***Для случая $\boldsymbol{K = K(u)}$ предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.***

Список использованных источников

1. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2018. 592 с.