



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## *ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2*

*Численное решение краевых задач для  
одномерного уравнения теплопроводности*

*Варианты 5, 16*

Студенты \_\_\_\_\_  
ФН2-61Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

И. П. Шаманов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

О. Д. Климов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

С. А. Конев  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2024 г.

# 1. Ответы на контрольные вопросы

1. *Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость.*

Пусть мы рассматриваем задачу о нахождении решения уравнения  $Au = f$  в области  $G$  с дополнительными условиями  $Ru = \mu$  на границе  $\Gamma = \partial G$  области  $G$ :

$$Au = f \text{ в } G, \quad Ru = \mu \text{ на } \Gamma. \quad (1)$$

где  $A, R$  — заданные операторы,  $f, \mu$  — заданные функции.

**Опр.** Задача называется **корректно поставленной**, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Если же не выполнено хотя бы одно из этих условий, то задача называется некорректно поставленной.

**Опр.** Функция, определённая только в узлах сетки, называется сеточной.

**Опр.** Построение разностной схемы — это замена уравнений и дополнительных условий исходной задачи алгебраическими уравнениями для сеточных функций. Производные в исходных уравнениях заменяют конечными разностями, интегралы — квадратурными формулами, прочие члены — алгебраическими соотношениями.

Пусть для точной задачи (1) используется разностная схема

$$A_h u = \varphi \text{ в } G_h, \quad R_h u = \nu \text{ на } \Gamma_h. \quad (2)$$

Сеточные функции  $\psi_h = (\varphi - f_h) + ((Av)_h - A_h v_h)$ ,  $\chi_h = (\nu - \mu_h) + ((Rv)_h - R_h v_h)$  — **погрешности аппроксимации разностной** задачи в  $G_h$  и на  $\Gamma_h$  соответственно ( $v$  есть произвольная функция из области определения оператора  $A$ ).

**Опр.** Говорят, что **разностная схема аппроксимирует исходную задачу**, если  $\|\psi_h\|_\psi \rightarrow 0$ ,  $\|\chi_h\|_\chi \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Аппроксимация имеет  **$p$ -й порядок** ( $p > 0$ ), если  $\|\psi_h\|_\psi = O(h^p)$ ,  $\|\chi_h\|_\chi = O(h^p)$  при  $h \rightarrow 0$ .

**Опр.** Разностные схемы называются **консервативными**, если их решение удовлетворяет дискретному аналогу закона сохранения (баланса), присущему данной задаче. В противном случае схему называют **неконсервативной**, или дисбалансной.

**Опр.** Разностные схемы, в которых расчет ведется по одним формулам и на одном шаблоне во всех узлах сетки без какого-то либо специального выделения имеющих особенностей, называются **однородными**.

**Опр.** Схемы, решение которых удовлетворяет принципу максимума или сохраняет пространственную монотонность (в одномерном случае) при условии, что соответствующие свойства справедливы для исходных задач, называются **монотонными**.

Пусть  $y_1, y_2$  — решения двух задач с одинаковым оператором, соответствующие правым частям  $\varphi_1, \varphi_2$  и граничным условиям  $\nu_1, \nu_2$ .

**Опр.** Говорят, что **разностная схема устойчивая**, если решение уравнений схемы непрерывно зависит от входных данных и эта зависимость равномерна по  $h$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\varphi < \delta, \|\nu_1 - \nu_2\|_\nu < \delta \Rightarrow \|y_1 - y_2\|_Y < \varepsilon$$

**Опр.** В случае нескольких независимых переменных **устойчивость** называют **безусловной** (или **абсолютной**), если устойчивость имеет место для любого соотношения шагов, и **условной** в противном случае.

Будем различать следующие устойчивости. Устойчивость по правой части: непрерывная зависимость решения разностной задачи от  $\varphi$ . Устойчивость по граничным условиям: непрерывная зависимость решения разностной задачи от  $\nu$  на границе пространственной области. Устойчивость по начальным данным: непрерывная зависимость решения разностной задачи от  $\nu$  на гиперплоскости  $t = 0$ .

**Опр.** Разностное решение  $y$  сходится к решению  $u$  точной задачи, если  $\|y - p_h u\|_Y \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Говорят, что имеет место **сходимость** с  $p$ -м ( $p > 0$ ) порядком, если  $\|y - p_h u\|_Y = O(h^p)$  при  $h \rightarrow 0$ .

*Замечание.*  $f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \forall x \in U(x) : |f(x)| \leq C|g(x)|$ .

**2. Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?**

Рассматриваем задачу с переменными коэффициентом температуропроводности  $k = k(x, t)$ :

$$\begin{cases} u_t = (ku_x)_x, & 0 < x < l, & 0 < t < T; \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = \mu_1(t), & u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

Для такой задачи в лабораторной работе рассматривается схема с весами вида:

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} (\sigma(a_{i+1}y_{x,i}^{j+1} - a_i y_{\bar{x},i}^{j+1}) + (1 - \sigma)(a_{i+1}y_{x,i}^j - a_i y_{\bar{x},i}^j).$$

Запишем её в более компактном виде:

$$y_t = (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x,$$

где  $0 < a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$ .

Вычисления проводим на равномерной сетке. Для анализа устойчивости воспользуемся методом энергетических неравенств.

Если операторы  $A$  и  $B$  не зависят от  $t$ ,  $A = A^* > 0$  и  $B = B^* > 0$ , то разностная схема  $B y_t + A y = 0$  устойчива по начальным данным в норме  $\|\cdot\|_A = \{(A\cdot, \cdot)\}^{1/2}$ , если  $B \geq \frac{\tau}{2} A$ .

А метод энергетических неравенств основывается на приведённом выше утверждении и заключается в следующем. Пусть  $A = A^* > 0$  и  $B = B^* > 0$  и  $B \geq \frac{\tau}{2} A$ . Тогда схема  $B y_t + A y = 0$  устойчива по начальным данным.

Заметим, что

$$y^{(\sigma)} = (1 - \sigma)y + \sigma \hat{y} = y + \sigma \tau \frac{\hat{y} - y}{\tau} = y + \tau \sigma y_t.$$

Тогда схему с весами можно записать в виде:

$$y_t = ay_{\bar{x}x} + \sigma \tau ay_{\bar{x}xt};$$

$$(y - \sigma \tau ay_{\bar{x}x})_t = ay_{\bar{x}x}.$$

Сравнивая схему со схемой  $B y_t + A y = 0$ , получим, что в нашем случае:

$$A y = -y_{\bar{x},x}, \quad B = E + \tau \sigma A.$$

Надо показать, что  $E + \tau \sigma A \geq \frac{\tau}{2} A$ .

Воспользуемся известной оценкой собственных значений задачи Штурма-Лиувилля в дискретном случае. То есть для задачи

$$\begin{cases} -y_{\bar{x},x} = \lambda^2 y, \\ y_0 = 0, \quad y_n = 0 \end{cases}$$

знаем, что  $\frac{9}{l^2} \leq \lambda_k^2 \leq \frac{4}{h^2}$ .

Отсюда можно сделать вывод, что для нашего случая

$$\frac{9a_{\min}}{l^2} \|y\|_2^2 \leq (Ay, y) \leq \frac{4a_{\max}}{h^2} \|y\|_2^2.$$

$$E \geq \tau \left( \frac{1}{2} - \sigma \right) A;$$

$A$  — положительно определённый оператор, тогда

$$1 \geq \tau \frac{4a_{\max}}{h^2} \left( \frac{1}{2} - \sigma \right);$$

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a_{\max}\tau}.$$

Из этой оценки получаем, что схема должна удовлетворять условию устойчивости для всего интервала изменения  $a$ , реализуемого в задаче. То есть на практике выбираем фиксированное значение  $a$ , исследуем схему на устойчивость при этом значении параметра. После этого выбираем  $\sigma$ -вес, что удовлетворяет всему интервалу изменения  $a$ .

Однако сделаем замечания. Данный приём называется „принцип замороженных коэффициентов”. Он, вообще говоря, является нестрогим, но часто даёт нужные результаты (не для всех схем). Так как  $a(x, t)$  является непрерывной функцией, то её значения на достаточно большом разбиении отрезка в двух соседних пространственных узлах одного временного слоя мало различимы (нет разрыва), то можно считать в этой окрестности  $a$  постоянным коэффициентом. И тогда можно провести исследование на  $a_{\max}$ , выбрать устойчивую конфигурацию (выбрать нужные  $\tau, h, \sigma$ ). Получим некую устойчивость „с запасом” для случаев  $a < a_{\max}$ .

**3. Будет ли смешанная схема иметь второй порядок аппроксимации при  $a_i = \frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i)+K(x_{i-1})}$  ?**

Имеем однородную консервативную схему

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h}(\sigma(a_{i+1}y_{x,i}^{j+1} - a_i y_{\bar{x},i}^{j+1}) + (1 - \sigma)(a_{i+1}y_{x,i}^j - a_i y_{\bar{x},i}^j),$$

Преобразовав данное в вопросе выражение, имеем

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K_i} + \frac{1}{K_{i-1}} \right)$$

Разложим в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2}$ :

$$\frac{1}{K_i} = \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{2K'_{i-\frac{1}{2}}}{(K_{i-\frac{1}{2}})^2} \frac{1}{2!} \frac{h}{2} + O(h^2), \quad \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{2K'_{i-\frac{1}{2}}}{(K_{i-\frac{1}{2}})^2} \frac{1}{2!} \frac{h}{2} + O(h^2)$$

Подставим и получим

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{K_i} + \frac{1}{K_{i-1}} + O(h^2) \right) = \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}}} + O(h^2) \Rightarrow a_i = K_{i-\frac{1}{2}} + O(h^2)$$

Следовательно при  $K_{i-\frac{1}{2}}$  получаем порядок аппроксимации  $O(h^2)$ .

**4. Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации граничных условий (2.5), (2.6) с порядком точности  $O(\tau + h^2)$ ,  $O(\tau^2 + h^2)$ ,  $O(\tau + h)$  вы знаете?**

Граничные условия (2.5), (2.6) являются граничными условиями 2-го рода. Погрешность аппроксимации граничных условий задаёт погрешность всего метода.

Рассмотрим уравнение вида  $u_t = (ku_x)_x$  с граничными условиями второго рода (например, слева):

$$-ku_x + \alpha u = p(t), \quad x = 0.$$

Один из способов аппроксимации граничного условия — непосредственно записать дифференциальные операторы через разностные соотношения:

$$-k \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} + \alpha \hat{y}_0 = \hat{p}.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \psi_h &= \hat{p} - \alpha \hat{u}_0 + k \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h} = \hat{p} - \alpha \hat{u}_0 + \frac{k}{h} (\hat{u}_0 + h \hat{u}_{x,0} + \frac{h^2}{2} \hat{u}_{xx,0} - \hat{u}_0 + O(h^3)) = \\ &= \hat{p} - \alpha \hat{u}_0 + k \hat{u}_{x,0} + O(h) = 0 + O(h). \end{aligned}$$

Однако, первый порядок по пространству нас может не устроить, если, например, мы применяем схему  $y_t = k \hat{y}_{\bar{x},x}$  с порядком точности  $O(\tau + h^2)$ . Решим эту проблему, применив интегро-интерполяционный метод.

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} u_t dx dt &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} (ku_x)_x dx dt; \\ \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} (\hat{u}_0 - u_0) dx &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} ((ku_x)|_{x_{\frac{1}{2}}} - (ku_x)|_{x_0}) dt. \end{aligned}$$

Заменяем операторы разностными аналогами и учитываем граничные условия.

$$\frac{\hat{y}_0 - y_0}{\tau} \tau \frac{h}{2} = k \tau \frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} + \tau \hat{p} - \tau \alpha \hat{y}_0;$$

Домножаем обе части уравнения на  $\frac{h}{2}$ :

$$y_{t,0} = \frac{2}{h} (k \hat{y}_{x,0} + \hat{p} - \alpha \hat{y}_0).$$

В таком случае:

$$\psi_h = -\frac{h}{2} u_{t,0} + \hat{p} - \alpha \hat{u}_0 + k \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h} = O(h^2).$$

Причём, получили безусловную аппроксимацию.

Помимо интегро-интерполяционного метода можно использовать и аппроксимацию ENO и WENO (взвешенные, существенно не осциллирующие схемы, в которых аппроксимация будет происходить с помощью кубического полинома).

5. При каких  $h$ ,  $\tau$  и  $\sigma$  смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.

Рассматриваем схему с весами:

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} (\sigma(a_{i+1}y_{x,i}^{j+1} - a_i y_{\bar{x},i}^{j+1}) + (1 - \sigma)(a_{i+1}y_{x,i}^j - a_i y_{\bar{x},i}^j).$$

Для определения монотонности схемы будем проверять выполнение для неё условия положительности коэффициентов.

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} (\sigma(a_{i+1}(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - a_i(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1})) + (1 - \sigma)(a_{i+1}(y_{i+1}^j - y_i^j) - a_i(y_i^j - y_{i-1}^j)));$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma(a_{i+1} + a_i)}{h^2} + \frac{c\rho}{\tau} \right) y_i^{j+1} &= \frac{\sigma a_{i+1}}{h^2} y_{i+1}^{j+1} + \frac{\sigma a_i}{h^2} y_{i-1}^{j+1} + \frac{(1 - \sigma)a_{i+1}}{h^2} y_{i+1}^j + \frac{(1 - \sigma)a_i}{h^2} y_{i-1}^j + \\ &+ \left( \frac{c\rho}{\tau} - \frac{(1 - \sigma)(a_{i+1} + a_i)}{h^2} \right) y_i^j. \end{aligned}$$

Условие положительности коэффициентов можно записать в виде системы неравенств.

$$\begin{cases} A = \frac{\sigma(a_{i+1} + a_i)}{h^2} + \frac{c\rho}{\tau} > 0, \\ B_1 = \frac{\sigma a_{i+1}}{h^2} > 0, \\ B_2 = \frac{\sigma a_i}{h^2} > 0, \\ B_3 = \frac{(1 - \sigma)a_{i+1}}{h^2} > 0, \\ B_4 = \frac{(1 - \sigma)a_i}{h^2} > 0, \\ B_5 = \frac{c\rho}{\tau} - \frac{(1 - \sigma)(a_{i+1} + a_i)}{h^2} > 0, \\ D = A - \sum_{i=1}^5 B_i \geq 0. \end{cases}$$

Известно, что  $\sigma \in (0, 1) \Rightarrow \sigma > 0$ ;  $\rho > 0$ ;  $c > 0$ ;  $K(x) > 0 \Rightarrow a_i > 0$ ;  $h > 0$ ;  $\tau > 0$ . Из условия  $B_5 > 0$  следует:

$$\begin{aligned} \frac{c\rho}{\tau} &> \frac{(1 - \sigma)(a_{i+1} + a_i)}{h^2}; \\ \frac{h^2}{\tau(1 - \sigma)} &> \frac{(a_{i+1} + a_i)}{c\rho}; \end{aligned} \tag{3}$$

Соотношение  $(a_{i+1} + a_i)$  определяется из способа вычисления  $a_i$ . Таким образом, схема, для которой неравенство (3) выполнено, является монотонной.



Приведём иллюстрации монотонного и немонотонного расчёта. Рассмотрим алюминиевый стержень длины 1 м. Согласно ГОСТ 22233-83 имеем следующие параметры:  $\rho = 2600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $c = 840 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ . Коэффициент  $K = 221 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$  будем считать постоянным. Зададим начальное распределение температуры:

$$u(x, 0) = u_0 - 500 - x(L - x), \quad x \in (0, L),$$

где  $u_0 = 800\text{К}$ . На концах стержня будем поддерживать постоянную температуру  $u_0$ . Расчёт будет вести до момента времени  $T = 100\text{с}$ .

Так как  $K = \text{const}$ , получаем  $a_{i+1} + a_i = 221 + 221 = 442$ . При выборе параметров схемы  $h = 0.05$ ,  $\tau = 0.009$  и  $\sigma = 0.5$ :

$$\frac{0.05^2}{0.009(1 - 0.5)} > \frac{442}{840 \cdot 2600};$$

$$\frac{5}{9} > \frac{17}{84000} \Rightarrow \text{У.П.К. выполнено и схема монотонна.}$$

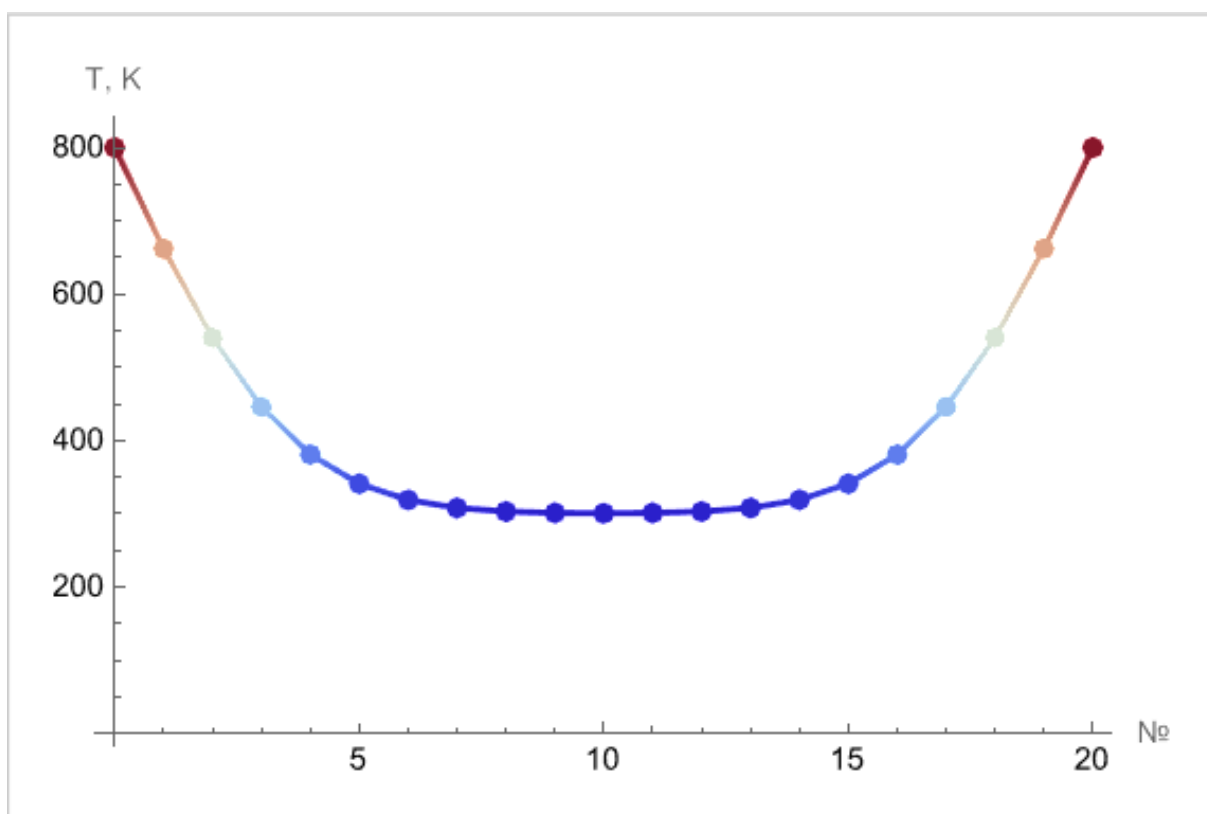


Рис. 1. Распределение температуры в стержне при  $t = 100\text{с}$  (монотонная схема)

Нарушим монотонность схемы, выбрав значения  $h = 0.05$ ,  $\tau = 14$ ,  $\sigma = 0$ .

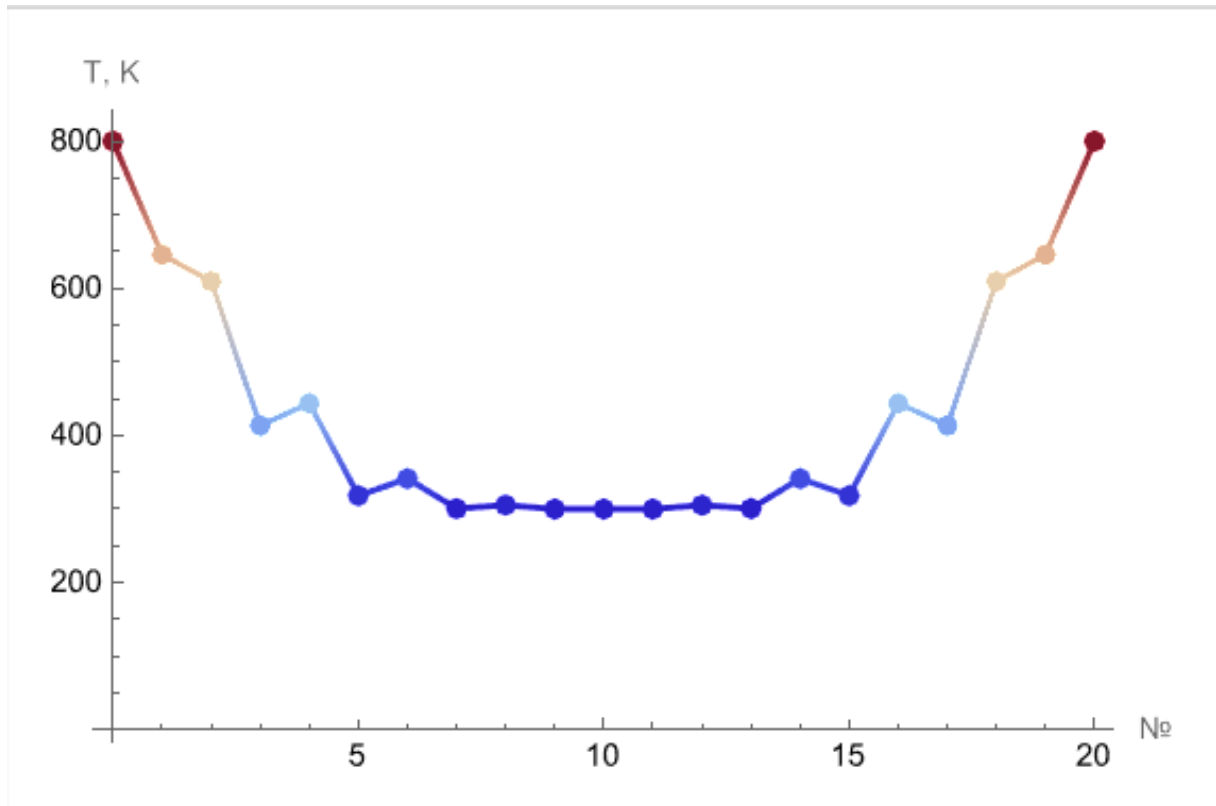


Рис. 2. Распределение температуры в стержне при  $t = 100c$  (немонотонная схема)

### 6. Какие ограничения на $h$ , $\tau$ и $\sigma$ накладывают условия устойчивости прогонки?

Рассмотрим схему с весами:

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} (\sigma(a_{i+1}y_{x,i}^{j+1} - a_i y_{\bar{x},i}^{j+1}) + (1 - \sigma)(a_{i+1}y_{x,i}^j - a_i y_{\bar{x},i}^j).$$

Из полученного ранее:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma(a_{i+1} + a_i)}{h^2} + \frac{c\rho}{\tau} \right) y_i^{j+1} &= \frac{\sigma a_{i+1}}{h^2} y_{i+1}^{j+1} + \frac{\sigma a_i}{h^2} y_{i-1}^{j+1} + \frac{(1 - \sigma)a_{i+1}}{h^2} y_{i+1}^j + \frac{(1 - \sigma)a_i}{h^2} y_{i-1}^j + \\ &+ \left( \frac{c\rho}{\tau} - \frac{(1 - \sigma)(a_{i+1} + a_i)}{h^2} \right) y_i^j. \end{aligned}$$

Домножим обе части равенства на  $h^2$  и соберём неизвестные слагаемые слева.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma a_i}{h} y_{i-1}^{j+1} - \left( \frac{\sigma a_i}{h} + \frac{\sigma a_{i+1}}{h} + \frac{c\rho h}{\tau} \right) y_i^{j+1} + \frac{\sigma a_{i+1}}{h} y_{i+1}^{j+1} &= \\ = -\frac{(1 - \sigma)a_{i+1}}{h} y_{i+1}^j - \frac{(1 - \sigma)a_i}{h} y_{i-1}^j - \left( \frac{c\rho h}{\tau} - \frac{(1 - \sigma)(a_{i+1} + a_i)}{h} \right) y_i^j. \end{aligned}$$

С помощью аппроксимации граничных условий получаем явное выражение для  $y_0^{j+1}$  и  $y_N^{j+1}$  (при условии  $N$  шагов по пространству). Таким образом, перед нами — система линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей.

$$a_i y_{i-1}^{j+1} - b_i y_i^{j+1} + c_i y_{i+1}^{j+1} = -d_i, \quad 0 \leq i \leq N; \quad a_0 = c_N = 0.$$

Хотелось бы применить для её разрешения метод прогонки, например, правой.

**Теорема.** Если в трёхдиагональной матрице выполнено условие диагонального преобладания:  $|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$ , где хотя бы для одного  $i$  выполнено строгое неравенство, то исходная система уравнений имеет решение, которое может быть получено с помощью метода прогонки. Алгоритм прогонки в указанных условиях является корректным и устойчивым (все знаменатели прогоночных коэффициентов не обращаются в нуль, и все  $|a_i| \leq 1$ ).

В таком случае, для устойчивости прогонки необходимы следующие условия на параметры схемы.

Для  $i = 1, \dots, N - 1$ :

$$\left| \frac{\sigma a_i}{h} + \frac{\sigma a_{i+1}}{h} + \frac{c\rho h}{\tau} \right| \geq \left| \frac{\sigma a_i}{h} \right| + \left| \frac{\sigma a_{i+1}}{h} \right|$$

Из положительности коэффициентов  $c$ ,  $\rho$ ,  $\tau$ ,  $h$  и  $\sigma$  следует, что условие диагонального преобладания выполнены, причём мы можем заявить о строгом неравенстве.

Для  $i = \alpha$ , где  $\alpha \in \{0, N\}$ :

- 1) Случай граничного условия первого рода (постоянная температура на границе):

$$y_\alpha^{j+1} = u_0 \Rightarrow a_\alpha = 0, b_\alpha = 1, c_\alpha = 0, d_\alpha = u_0 \Rightarrow \text{У.Д.П. выполнено.}$$

- 2) Случай граничного условия второго рода (заданный поток на границе):

$$y_\alpha^{j+1} = \varkappa^{(\alpha)} y_{\alpha - \text{sign}(\alpha - 1)}^{j+1} + \mu^{(\alpha)},$$

$$\text{где } \varkappa^{(\alpha)} = \begin{cases} \frac{\sigma a_1/h}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_1/h}, & \alpha = 0 \\ \frac{\sigma a_N/h}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_N/h}, & \alpha = N \end{cases};$$

$$\mu^{(\alpha)} = \begin{cases} \frac{\sigma P(t_{j+1}) + (1 - \sigma)(w_{\frac{1}{2}}^j + P(t_j)) + \frac{c\rho h}{2\tau} y_0^j}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_1/h}, & \alpha = 0 \\ \frac{\sigma P(t_{j+1}) + (1 - \sigma)(P(t_j) - w_{N-\frac{1}{2}}^j) + \frac{c\rho h}{2\tau} y_N^j}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_N/h}, & \alpha = N \end{cases}.$$

$$\text{Тогда } a_\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha = 0, \\ \varkappa^{(N)}, & \alpha = N \end{cases}; b_\alpha = 1; c_\alpha = \begin{cases} \varkappa^{(0)}, & \alpha = 0, \\ 0, & \alpha = N \end{cases}; d_\alpha = \mu^{(\alpha)}.$$

Для выполнения У.Д.П. необходимо:

$$1 \geq |a_\alpha + c_\alpha|;$$

$$\begin{cases} 1 \geq |\varkappa^{(0)}|, & \alpha = 0, \\ 1 \geq |\varkappa^{(N)}|, & \alpha = N. \end{cases};$$

$$\begin{cases} 1 \geq \left| \frac{\sigma a_1/h}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_1/h} \right|, & \alpha = 0, \\ 1 \geq \left| \frac{\sigma a_N/h}{c\rho h/(2\tau) + \sigma a_N/h} \right|, & \alpha = N. \end{cases};$$

Таким образом, получили необходимые соотношения.

7. В случае  $K = K(u)$  чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?

Тест 1. Поставим задачу квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), & 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = \text{initState}(x), & 0 < x < L, \\ u(0, t) = u_0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(L, t) = u_0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

где  $\rho = 2600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $c = 840 \frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}$ ,  $u_0 = 800\text{К}$ ,  $\text{initState}(x) = u_0 - 500 - x(L - x)$ ,  $L = 1\text{м}$ ,  $T = 100\text{с}$ ,  $K(u) = 13.7 + 0.0017u + 0.000003u^2$ .

Будем оценивать количество внутренних итераций эмпирически. Критерий сходимости  $\|y^{s+1} - y^s\| < \varepsilon_i$ , где  $\varepsilon_i \in \{10^{-4}, 10^{-7}, 10^{-10}\}$ . Число итераций на каждом временном слое для различных  $\varepsilon_i$  представлены на рисунках ниже.

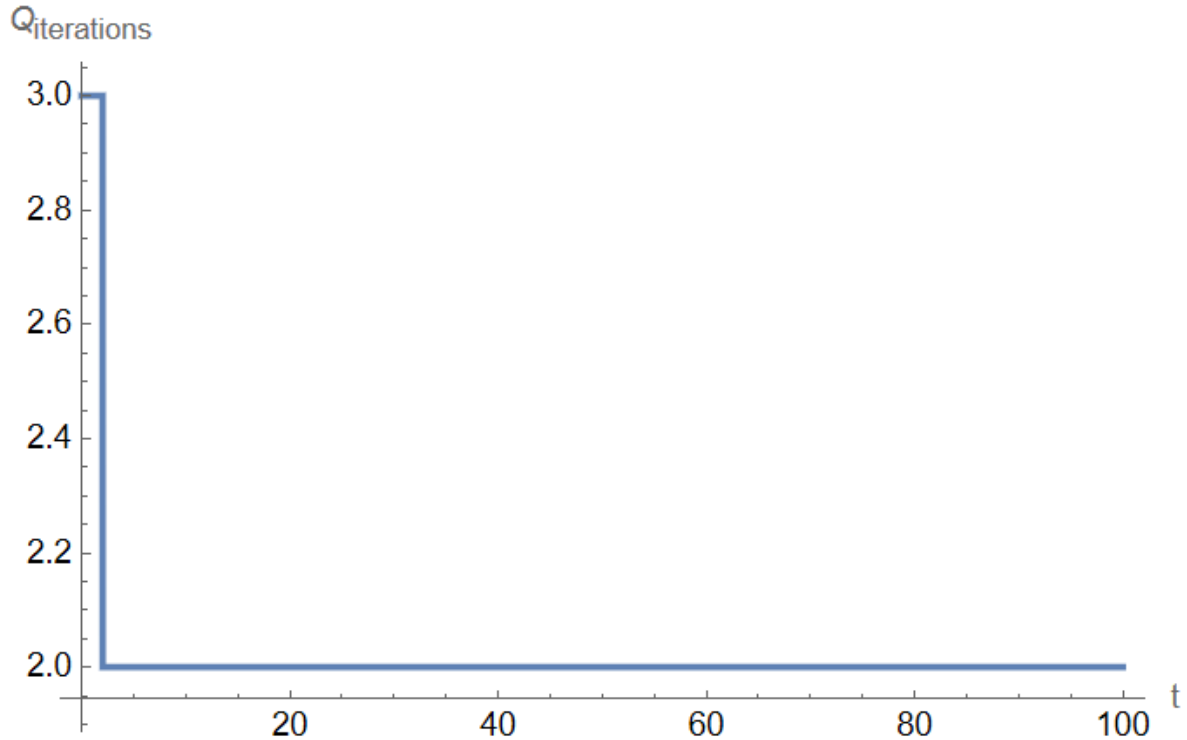
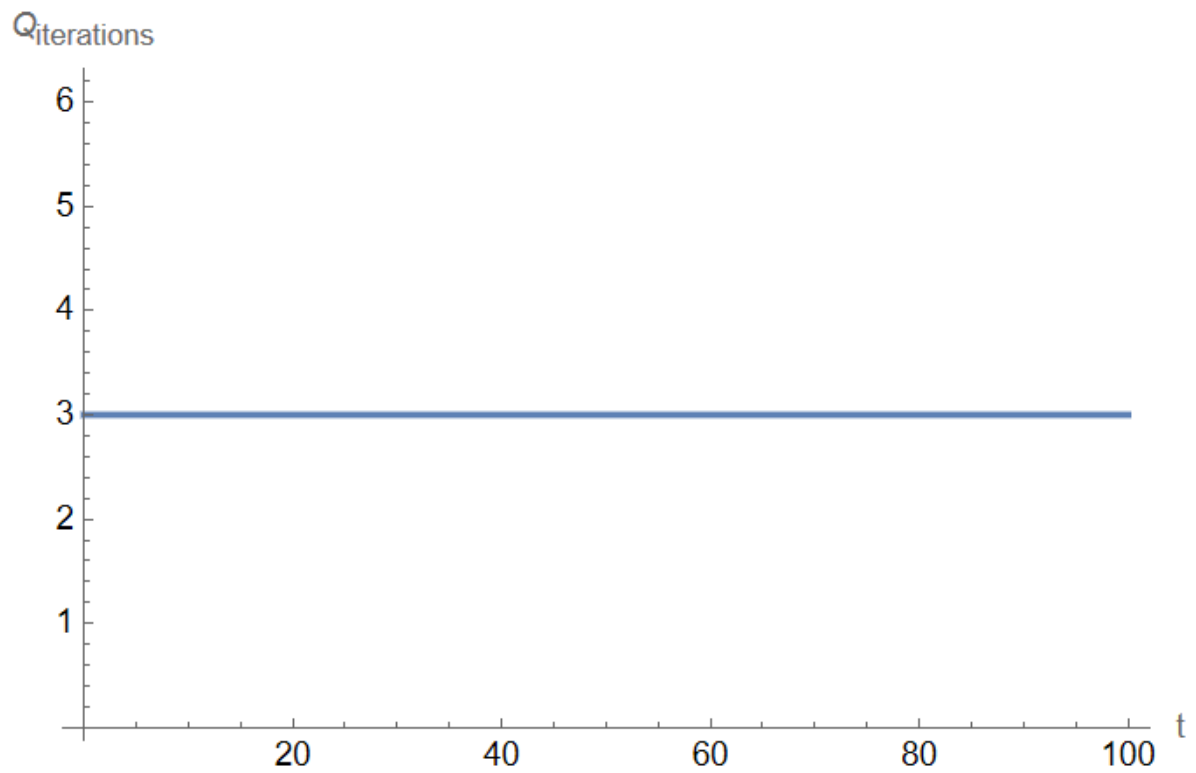
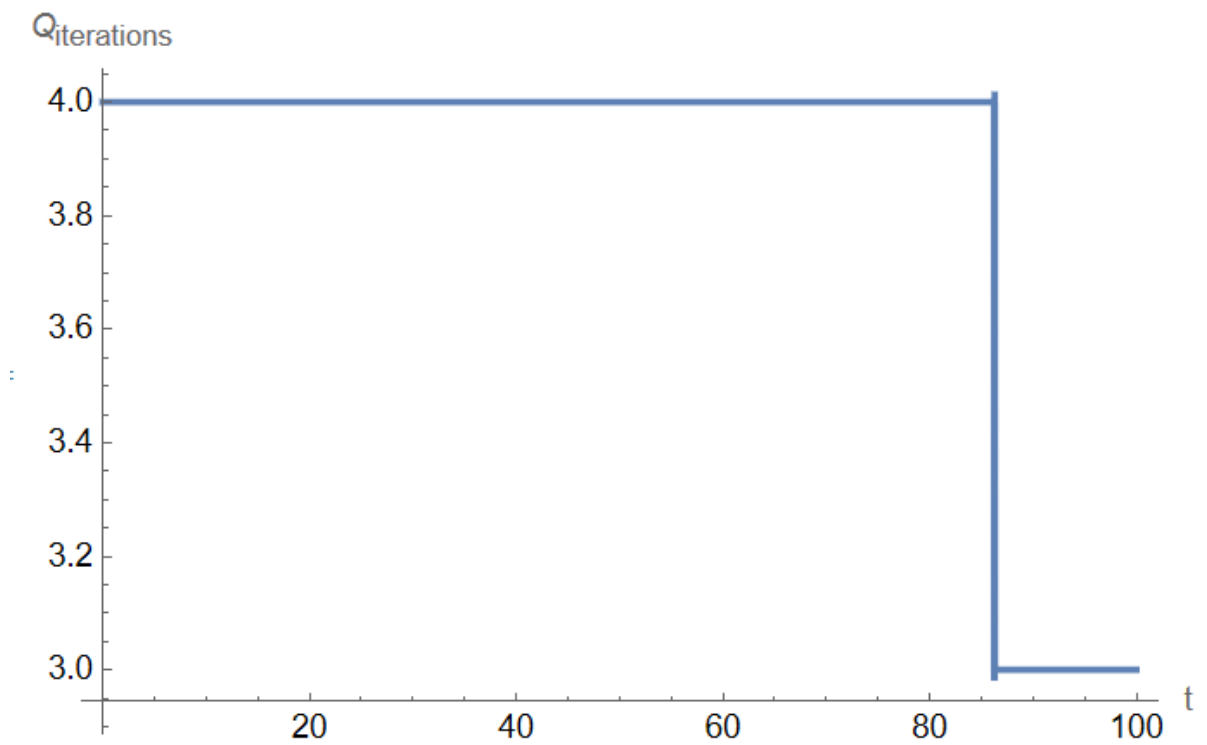


Рис. 3. Тест 1,  $\varepsilon_i = 10^{-4}$

Рис. 4. Тест 1,  $\varepsilon_i = 10^{-7}$ Рис. 5. Тест 1,  $\varepsilon_i = 10^{-10}$

**Тест 2.** Рассмотрим также задачу следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 0.5 \cdot u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), & 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < L, \\ u(0, t) = \sqrt{\frac{2 \cdot 5^2}{0.5}} t^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq t \leq T, \\ K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \big|_{(L,t)} = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

Расчёты будем проводить с шагами  $h = 0.2$ ,  $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ . Выберем  $L = 10$ ,  $T = 1$ . Критерий сходимости  $\|y^{s+1} - y^s\| < \varepsilon_i$ , где  $\varepsilon_i \in \{10^{-4}, 10^{-7}, 10^{-10}\}$ . Число итераций на каждом временном слое для различных  $\varepsilon_i$  представлены на рисунках ниже.

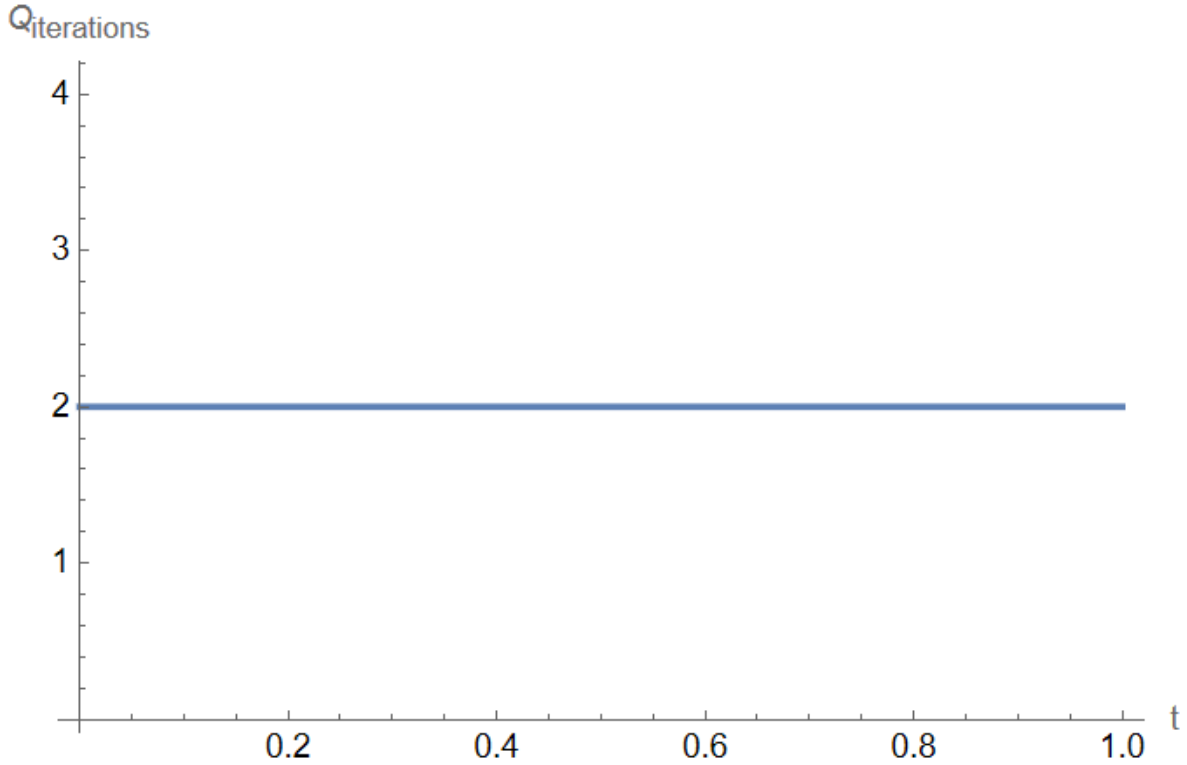
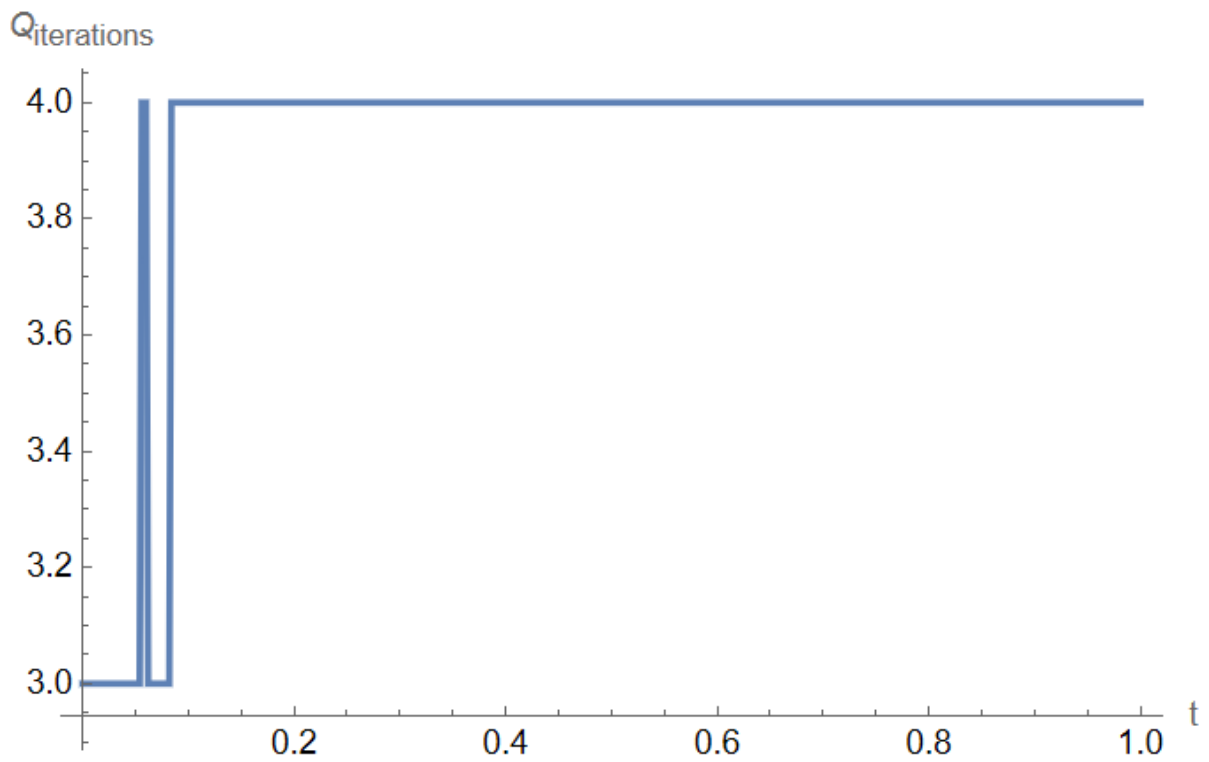
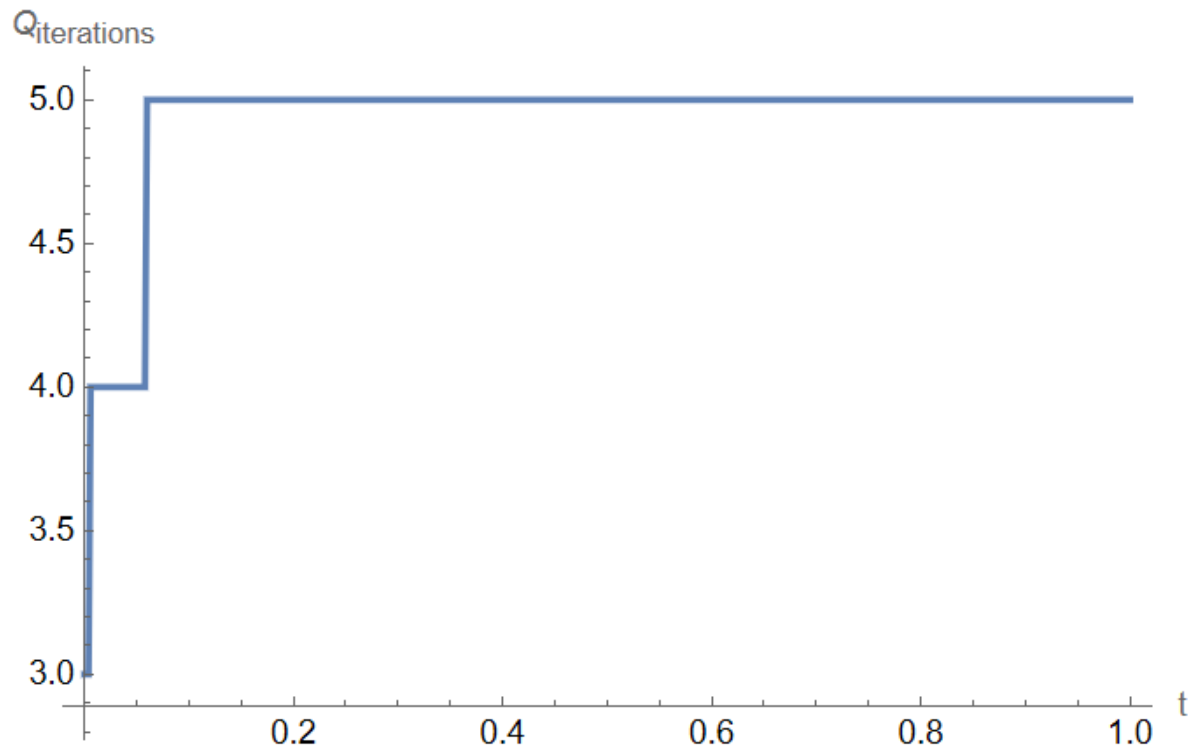


Рис. 6. Тест 2,  $\varepsilon_i = 10^{-4}$

Рис. 7. Тест 2,  $\varepsilon_i = 10^{-7}$ Рис. 8. Тест 2,  $\varepsilon_i = 10^{-10}$



8. Для случая  $K = K(u)$  предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.

В статье [5] предлагается алгоритм решения квазилинейного уравнения теплопроводности, основанный на использовании явной разностной схемы. Зависимость коэффициентов уравнения от температуры преодолевается введение новой искомой функции — первообразной теплопроводности.

Авторы предлагают уравнение

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

заменой

$$G(u) = \int_0^u K(\xi) d\xi$$

получить уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2(u) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2},$$

где  $a(u) = \sqrt{K(u)/(c\rho)}$  — коэффициент температуропроводности. Функция  $G(u)$  является строгой монотонной функцией температуры.

Шаблон разностной схемы предлагается выбрать следующим:

$$\frac{dG_i(t)}{dt} = a^2(u_i) \frac{G_{i-1}(t) - 2G_i(t) + G_{i+1}(t)}{h^2}, \quad t \in [0, \tau], \quad i = 2, \dots, N-1.$$

Аппроксимация значений  $G_{i-1}(t)$  и  $G_{i+1}(t)$  с точностью до членов первого порядка малости даёт следующую схему

$$\frac{dG_i(t)}{dt} + \frac{2a^2(u_i)}{h^2} G_i(t) = \frac{a^2(u_i)}{h^2} \left( G_{i-1}(0) + G_{i+1}(0) + \left( \frac{dG_{i-1}(t)}{dt}(0) + \frac{dG_{i+1}(t)}{dt}(0) \right) t \right).$$

Решением полученного уравнения является функция

$$G_i(t) = (G_i(0) - B) \exp\left\{-\frac{2a^2(u_i)}{h^2} t\right\} + At + B, \quad t \in [0, \tau],$$

$$\text{где } A = \frac{1}{2} \left( \frac{dG_{i-1}(t)}{dt}(0) + \frac{dG_{i+1}(t)}{dt}(0) \right), \quad B = \frac{G_{i-1}(0) + G_{i+1}(0)}{2} - A \cdot \frac{h^2}{2a^2(u_i)}.$$

Записав разностные аппроксимации для производных по времени,

$$\frac{dG_{i-1}}{dt}(0) = \frac{G_{i-1}^{(+\frac{1}{2})} - G_{i-1}^{(-\frac{1}{2})}}{\tau},$$

$$\frac{dG_{i+1}}{dt}(0) = \frac{G_{i+1}^{(+\frac{1}{2})} - G_{i+1}^{(-\frac{1}{2})}}{\tau},$$

получим:

$$G_i^{(+1)} = (G_i - B) \exp\left\{-\frac{2a^2(u_i)}{h^2} t\right\} + A\tau + B,$$

где  $A = \frac{1}{2\tau}(G_{i-1}^{(+\frac{1}{2})} - G_{i-1}^{(-\frac{1}{2})} + G_{i+1}^{(+\frac{1}{2})} - G_{i+1}^{(-\frac{1}{2})})$ ,  $B = \frac{G_{i-1} + G_{i+1}}{2} - A \cdot \frac{h^2}{2a^2(u_i)}$ .

Для применения схемы необходимо по заданному значению  $G_i$  найти температуру  $u_i$  такую, что  $G_i = \int_0^{u_i} q(\xi)d\xi$ . В силу монотонности функции  $G(u)$  эту задачу можно решить, например, методом дихотомии (деления отрезка пополам) или методом Ньютона.

## 2. Вычислительные эксперименты

Проверим консервативность конечной схемы для разных весов  $\sigma$  на задаче, рассмотренной в контрольном вопросе №7, однако зададим другие граничные условия, а именно — теплоизоляцию на концах (нулевые потоки на границах) стержня.

Для проверки консервативности по результатам расчётов построим графики разностного аналога закона сохранения:

$$\text{ConservativeDifference} = \Delta = \frac{h}{2}y_0^{j+1} + h \sum_{i=1}^{N-1} y_i^{j+1} + \frac{h}{2}y_N^{j+1} - \left( \frac{h}{2}y_0^j + h \sum_{i=1}^{N-1} y_i^j + \frac{h}{2}y_N^j \right).$$

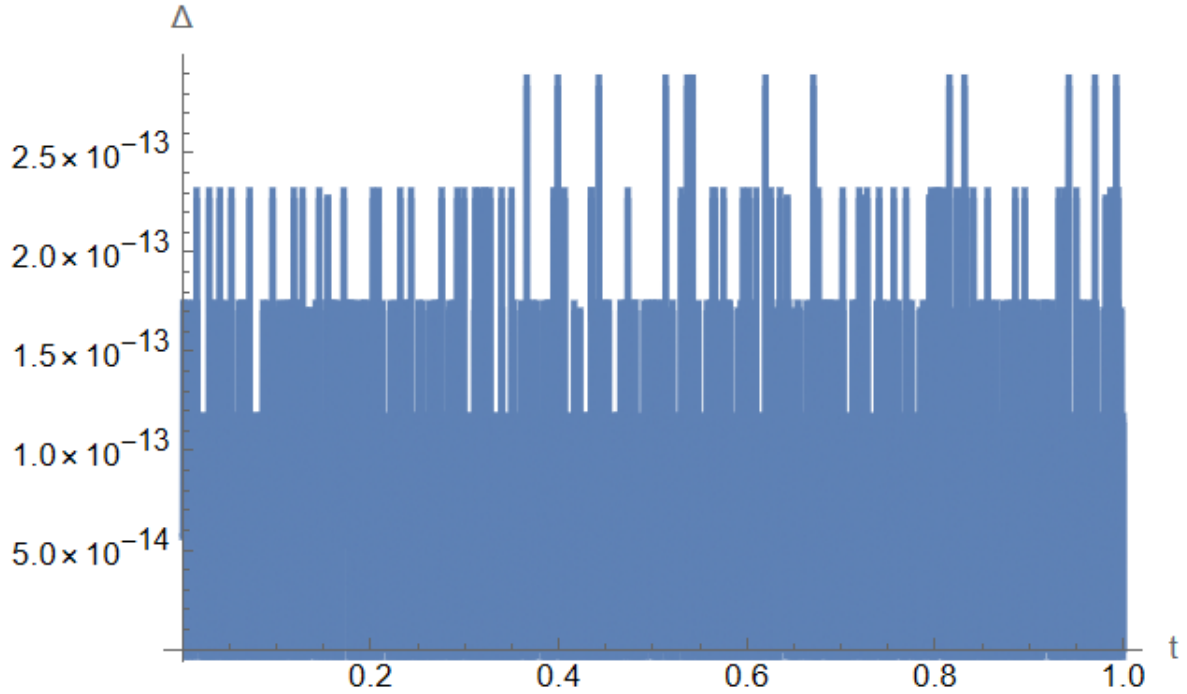
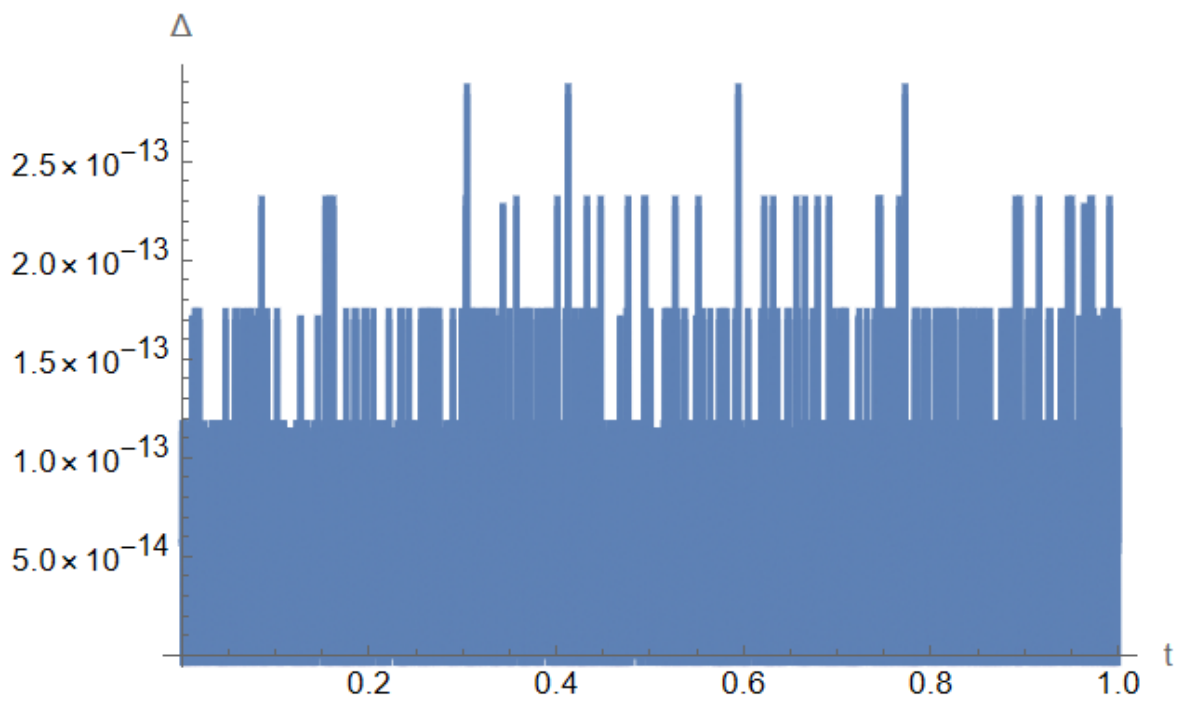
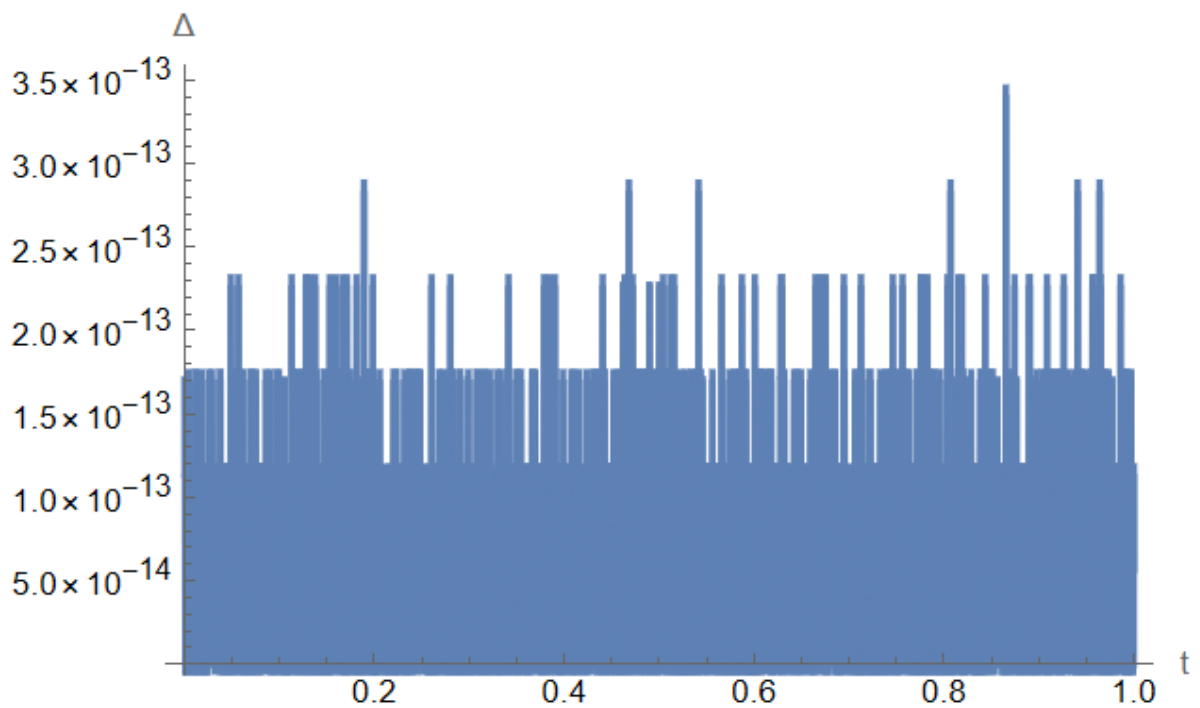


Рис. 9. ConservativeDifference для веса  $\sigma = 0$

Рис. 10. ConservativeDifference для веса  $\sigma = 0.5$ Рис. 11. ConservativeDifference для веса  $\sigma = 1$

## Список использованных источников

1. Галанин М. П., Савенков Е. Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. 592 с.
2. Марчевский И. К., Щерица О. В. Численные методы решения задач математической физики: методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Методы вычислений». М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. 63 с.
3. Калиткин Н. Н. Численные методы: учеб. пособие. — 2-е изд., исправленное. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
4. Y.-T. Zhang, C.-W. Shu ENO and WENO schemes, Handbook of Numerical Analysis, Volume 17, Handbook of Numerical Methods for Hyperbolic Problems: Basic and Fundamental Issues. North-Holland, Elsevier, Amsterdam, 2016.
5. А. В. Геренштейн, М. З. Хайрисламов Явная разностная схема решения одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности. Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. 2013. №1.