



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## ***ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3***

***Численное решение краевых задач для  
одномерного волнового уравнения***

***Варианты 5, 16***

Студенты \_\_\_\_\_  
ФН2-61Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

И. П. Шаманов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

О. Д. Климов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2024 г.

# 1. Ответы на контрольные вопросы

1. Предложите разностные схемы, отличные от схемы "крест" для численного решения задачи (3.1)-(3.4).

Рассмотрим начально-краевую задачу для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x), \\ u(0, t) = \varphi(t), \quad u(L, t) = \psi(t). \end{cases} \quad (1)$$

Предложим несколько схем:

1) Трехслойная схема с весами на девятиточечном шаблоне

$$y_{\bar{t}t} - a^2(\sigma \hat{y}_{\bar{x}x} + (1 - 2\sigma)y_{\bar{x}x} + \sigma \check{y}_{\bar{x}x}) = 0$$

При выборе постоянного веса схема имеет порядок по крайней мере  $O(\tau^2 + h^2)$ .

А схема с весом  $\sigma = \frac{1}{12} - \frac{h^2}{12a^2\tau^2}$  имеет погрешность аппроксимации  $O(\tau^4 + h^4)$ .

Расчет по схеме ведется только при известных значениях  $y$  на первых двух временных слоях, где соответственно первое задается начальным условием, а второе рассчитывается по начальному решению и скорости.

2) Двухслойная схема на основе введения скорости. Пусть  $v = u_t$ . Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = a^2 u_{xx}. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда можно решить такую задачу с помощью соответствующей двухслойной схемы. Данный подход снимает вопрос о расчете решения на первом временном слое, который не задан начальными данными.

3) Двухслойная схема на основе введения потенциала скорости. Пусть  $v = \int_0^x u_t d\xi$ . Тогда исходное уравнение второго порядка сведется к системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} u_t = v_x, \\ v_t = a^2 u_x. \end{cases} \quad (3)$$

2. Постройте разностную схему с весами для уравнения колебаний струны. Является ли такая схема устойчивой и монотонной.

Пусть  $u_{tt} \approx y_{\bar{t}t}$  и  $u_{xx} \approx y_{\bar{x}x}$ . Тогда запишем трехслойную разностную схему

$$y_{\bar{t}t} - a^2(\sigma \hat{y}_{\bar{x}x} + (1 - 2\sigma)y_{\bar{x}x} + \sigma \check{y}_{\bar{x}x}) = 0 \quad (4)$$

или

$$y_{\bar{t}t} = a^2(\sigma \hat{y}_{\bar{x}x} + (1 - 2\sigma)y_{\bar{x}x} + \sigma \check{y}_{\bar{x}x})$$

на девятиточечном шаблоне.

В уравнении схемы входят решения  $\check{y}$  и  $y$  с известных временных слоев и неизвестное сеточное решение  $\hat{y}$ .

Очевидно, что при любом постоянном весе  $\sigma$  данная схема в силу своей симметричности относительно слоя  $t$  имеет порядок аппроксимации по крайней мере  $O(\tau^2 + h^2)$ . Подбором  $\sigma$  можно добиться повышенного порядка аппроксимации.

Исследуем схему на устойчивость. Обозначим  $Ay = a^2 y_{\bar{x}x}$  и воспользуемся равенством

$$\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y} = y + \sigma \tau^2 y_{\bar{t}t}$$

Тогда перепишем исходную схему в виде

$$(E - \sigma \tau^2 A)y_{\bar{t}t} = Ay.$$

Используем для доказательства энергетический метод. Умножим скалярно уравнение схемы на

$$y_t^\circ = \frac{y_t + y_{\bar{t}}}{2}.$$

Так как

$$y_{\bar{t}t} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau},$$

то

$$(y_{\bar{t}t}, y_t^\circ) = \frac{1}{2}(\|y_{\bar{t}}\|^2)_t, \quad (Ay_{\bar{t}t}, y_t^\circ) = a^2(y_{\bar{x}\bar{t}t}, y_{\bar{x}t}^\circ) = -\frac{1}{2}a^2(\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2)_t.$$

Последнее равенство следует из формулы интегрирования по частям. Здесь и далее для сокращения записи знак нормы без специального индекса используется для гильбертовой нормы. В частности,

$$\|y_{\bar{x}\bar{t}}\| = (y_{\bar{x}\bar{t}}, y_{\bar{x}\bar{t}}).$$

Таким образом,

$$((R - \sigma \tau^2 A)y_{\bar{t}t}, y_t^\circ) = \frac{1}{2}(\|y_{\bar{t}}\|^2 + a^2 \sigma \tau^2 \|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2)_t.$$

Преобразуем выражение

$$(Ay, y_t^\circ) = -a^2(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}t}^\circ)$$

используя формулу Грина, то есть суммирование по частям. Так как для любой сеточной функции справедливы соотношения

$$y = \frac{1}{2}(y^{(0,5)} + \check{y}^{(0,5)} - \frac{1}{2}\tau^2 y_{\bar{t}t}), \quad y_t^\circ = (y^{(0,5)})_{\bar{t}} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{2},$$

то

$$(Ay, y_{\circ}) = -\frac{1}{2}a^2(\|\check{y}_{\bar{x}}^{(0,5)}\|^2)_t + \frac{1}{8}a^2\tau^2(\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2)_t$$

В результате имеем равенство

$$\frac{1}{2}((\|y_{\bar{t}}\|^2) + \sigma\tau^2a^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2)_t = (-\frac{1}{2}a^2\|y_{\bar{x}}\|^2 + \frac{1}{8}a^2\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2)_t$$

то есть

$$\|\hat{y}\|_*^2 = \|y\|_*^2$$

где

$$\|y\|_*^2 = \|y_{\bar{t}}\|^2 + a^2(\sigma - \frac{1}{4})\tau^2\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2 + a^2\|\check{y}_{\bar{x}}^{(0,5)}\|^2.$$

При  $\sigma \geq \frac{1}{4}$  величина  $\|y\|_*$  является величиной типа нормы, точнее полунормы — величины типа нормы, для которой несправедливо первое условие нормы. Рассмотрим другие параметры для чего запишем неравенство типа вложения из метода разделения переменных:

$$\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2 \leq \frac{4}{h^2}\|y_{\bar{t}}\|^2.$$

Отсюда

$$\|y\|_*^2 \geq (\frac{h^2}{4} + (\sigma - \frac{1}{4})\tau^2a^2)\|y_{\bar{x}\bar{t}}\|^2 + c^2\|\check{y}_{\bar{x}}^{(0,5)}\|^2$$

Правая часть отрицательна при

$$a^2(\sigma - \frac{1}{4})\tau^2 + \frac{h^2}{4} \geq 0$$

Значит

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4a^2\tau^2}$$

Отсюда видно, что явная схема с  $\sigma = 0$  устойчива при  $\tau < \frac{h}{a}$ , то есть при выполнении критерия Куранта. При выполнении условия устойчивости справедливо неравенство

$$\|y\|_* \geq a^2\|\check{y}_{\bar{x}}^{(0,5)}\|^2$$

Из него следует, что с учетом начальных и граничных условий данной задачи величина  $\|y\|_*$  действительно является нормой. А именно, если  $\|y\|_* = 0$ , то  $\|\check{y}_{\bar{x}}^{(0,5)}\| = 0$ . Из неравенства вложения  $\|z\|_C \geq \sqrt{l}\|z_{\bar{x}}\|$  получаем  $\check{y}^{(0,5)} = 0$ . Это равенство справедливо в силу однородных граничных условий первого рода. Однородные начальные условия дают  $y \equiv 0$ , следовательно,  $\|y\|_*$  — норма.

Из изложенного следует сходимость данной трехслойной разностной схемы со скоростью по крайней мере  $O(\tau^2 + h^2)$  при выполнении условия устойчивости

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4a^2\tau^2}$$

Исследуем на монотонность. Приведем схему к виду

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = a^2 \left( \sigma \frac{\hat{y}_{+1} - 2\hat{y} + \hat{y}_{-1}}{h^2} + (1 - 2\sigma) \frac{y_{+1} - 2y + y_{-1}}{h^2} + \sigma \frac{\check{y}_{+1} - 2\check{y} + \check{y}_{-1}}{h^2} \right)$$

и приведя подобные получим

$$\begin{aligned} \hat{y}(1 + 2\sigma \frac{a^2 \tau^2}{h^2}) + y(-2 + (1 - 2\sigma) \frac{a^2 \tau^2}{h^2}) + \check{y}(1 + 2\sigma \frac{a^2 \tau^2}{h^2}) = \\ = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} (\sigma \hat{y}_{+1} + \hat{y}_{-1}) + (1 - 2\sigma)(y_{+1} + y_{-1}) + \sigma(\check{y}_{+1} + \check{y}_{-1}). \end{aligned}$$

Так как коэффициент перед  $y$  может быть отрицательным, то не выполняется условие положительности коэффициентов, а значит схема не является чисто монотонной.

### 3. Предложите способ контроля точности полученного решения.

Стоит упомянуть, что довольно "робастный" способ — проводить расчеты на произвольных значениях шагов по сеткам и соответственно изменению вычисленной ошибки уменьшать шаг по определенной сетке.

Для контроля точности можно использовать аналог правила Рунге. Так как схема имеет порядок  $O(\tau^2 + h^2)$ , то вычисляя  $y^{j+1}$  при шаге  $\tau^{j+1}$  и  $h^{j+1}$ , найдем этот же  $y^{j+1}$  при шаге  $\frac{\tau^{j+1}}{2}$  и  $\frac{h^{j+1}}{2}$ . Если норма разности полученных решений меньше заданной нами параметра точности, то решение при шаге  $\tau^{j+1}$  и  $h^{j+1}$  нас удовлетворяет. В противном случае продолжаем процесс дробления шага до получения необходимой нам точности. Стоит отметить, что данный алгоритм имеет свои недостатки, например при быстрорастущем решении крайне быстро возрастает количество вычислений.

### 4. Приведите пример трехслойной схемы для уравнения теплопроводности. Как реализовать вычисления по такой разностной схеме? Является ли эта схема устойчивой?

Рассмотрим задачу вида:

$$\begin{cases} u_t = (ku_x)_x, & 0 < x < l, & 0 < t < T; \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = \mu_1(t), & u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

Рассмотрим две схемы.

- 1) Схема Ричардсона (Крест). Выберем шаблон из точек с номерами  $(i-1, j)(i, j)(i, j+1)(i, j+1)$  и запишем на нем схему

$$y_t^\circ = ky_{\bar{x}x}$$

Схема имеет погрешность аппроксимации  $O(\tau^2 + h^2)$ , соответствующую наличию центральной разностной производной по времени и второй разностной производной по пространству. Схема является явной.

Исследуем схему на устойчивость методом гармоник. Подставим в схему решение вида  $y_i^j = \rho \exp(\tilde{i}i\varphi)$ , где  $\tilde{i}$  – мнимая единица ( $\tilde{i}^2 = -1$ ). Тогда для определения  $\rho$  получим уравнение

$$\frac{\rho - \rho^{-1}}{\tau} = -\frac{8k}{h^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

откуда

$$\rho^2 + \frac{8\tau k}{h^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rho - 1 = 0.$$

Видно, что дискриминант  $D = \left(\frac{4\tau k}{h^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 + 4$ , следовательно один из корней по модулю заведомо больше единицы. Значит схема является безусловно неустойчивой и непригодной для расчетов.

- 2) Схема Дюфорта-Франкела(Ромб). Для построения схемы исключим в предыдущем шаблоне точку  $(i, j)$  и заменим в правой части  $y$  на  $\frac{1}{2}(\hat{y} + \check{y})$ . Тогда

$$y_i^\circ = ky_{\bar{x}x} - k\frac{\tau^2}{h^2}y_{\bar{t}t}.$$

В таком случае шаблон "Крест" превращается в "Ромб". Нетрудно видеть, что погрешность аппроксимации данной схемы есть величина  $O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^4}{h^2})$ , то есть является условной. Для обеспечения сходимости параметры  $\tau$  и  $h$  должны стремиться к нулю так, чтобы  $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0$ . Исследуем схему на устойчивость методом гармоник. Подставим в схему решение вида  $y_i^j = \rho \exp(\tilde{i}i\varphi)$ , где  $\tilde{i}$  – мнимая единица ( $\tilde{i}^2 = -1$ ). Тогда для определения  $\rho$  получим уравнение

$$\left(1 - \frac{4\tau k}{h^2}\right)\rho^2 + \frac{4\tau k}{h^2} \cos(\varphi)\rho + \left(\frac{4\tau k}{h^2} - 1\right) = 0.$$

Тогда дискриминант  $D = 4 - 16\frac{4\tau k}{h^2} \sin^2(\varphi)$ . Выражение для  $\rho$  имеет вид

$$\rho = \frac{2\tau k \cos(\varphi) \pm \sqrt{h^4 - 4\tau^2 k^2 \sin^2(\varphi)}}{h^2 + 4\tau k}.$$

По модулю  $\rho$  будет заведомо меньше и равен единице, следовательно схема является безусловно устойчивой.

Стоит отметить, что схема имеет условную аппроксимацию при  $\tau < h$ .

Можно реализовать итерационный процесс по данной схеме таким образом: получить из начальных условий нулевой слой, найти первый временной слой с помощью симметричной схемы и далее использовать трехслойную схему.

## 2. Численные эксперименты

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x_0 < x < X, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < X, \\ u(0, t) = \varphi(t), \quad u(X, t) = \psi(t), & t > 0. \end{cases}$$

### 2.1. Тест 1: погрешность вычислений

**А.** Исходные данные:  $f(x) = \sin \pi x$ ,  $g(x) = 0$ ,  $\varphi(t) = 0$ ,  $\psi(t) = 0$ ,  $x_0 = 0, X = 1$ ,  $T = 1$ .

Точное решение:  $u(x, t) = \sin \pi x \cos \pi t$ . Параметры сетки:  $h = 0.02$ ,  $\tau = 0.001$ .

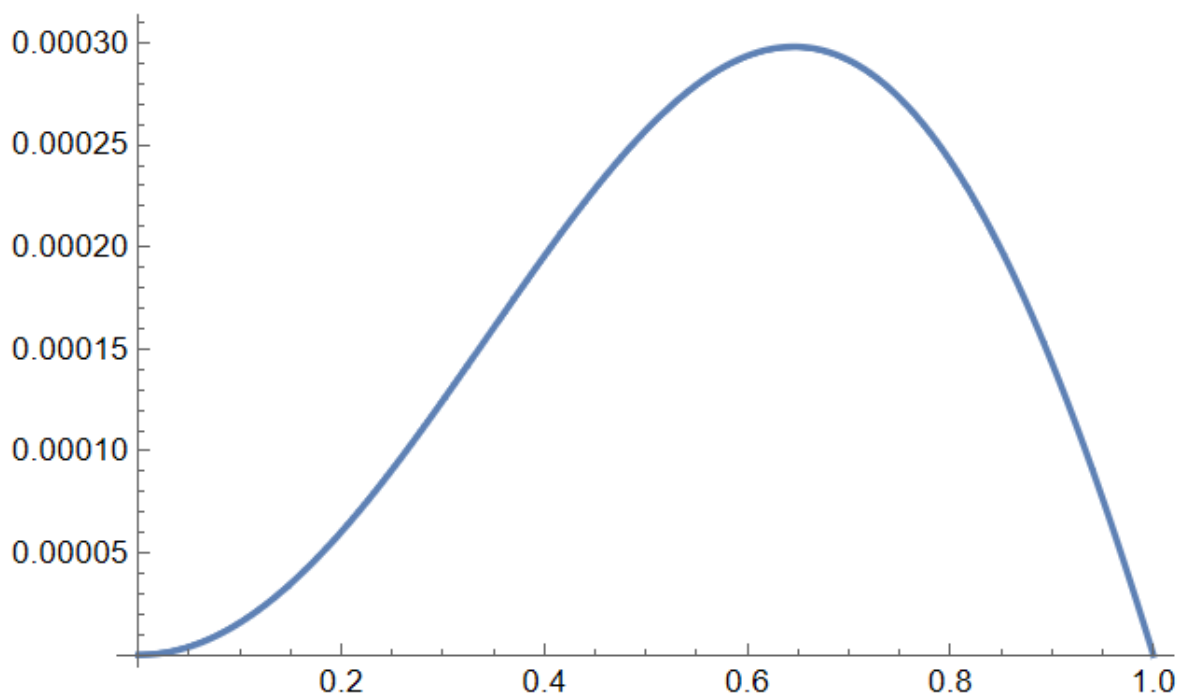


Рис. 1. График ошибки численного решения в случае А

**Б.** Исходные данные:  $f(x) = x(1 - x)$ ,  $g(x) = 0$ ,  $\varphi(t) = 0$ ,  $\psi(t) = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $X = 1$ ,  $T = 1$ .

Точное решение:

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin(2n+1)\pi x \cos(2n+1)\pi t.$$

Параметры сетки:  $h = 0.02$ ,  $\tau = 0.001$ .

В качестве точного решения были выбраны слагаемые до номера  $k = 80$  (требуемая погрешность:  $\varepsilon = 10^{-5}$ ).

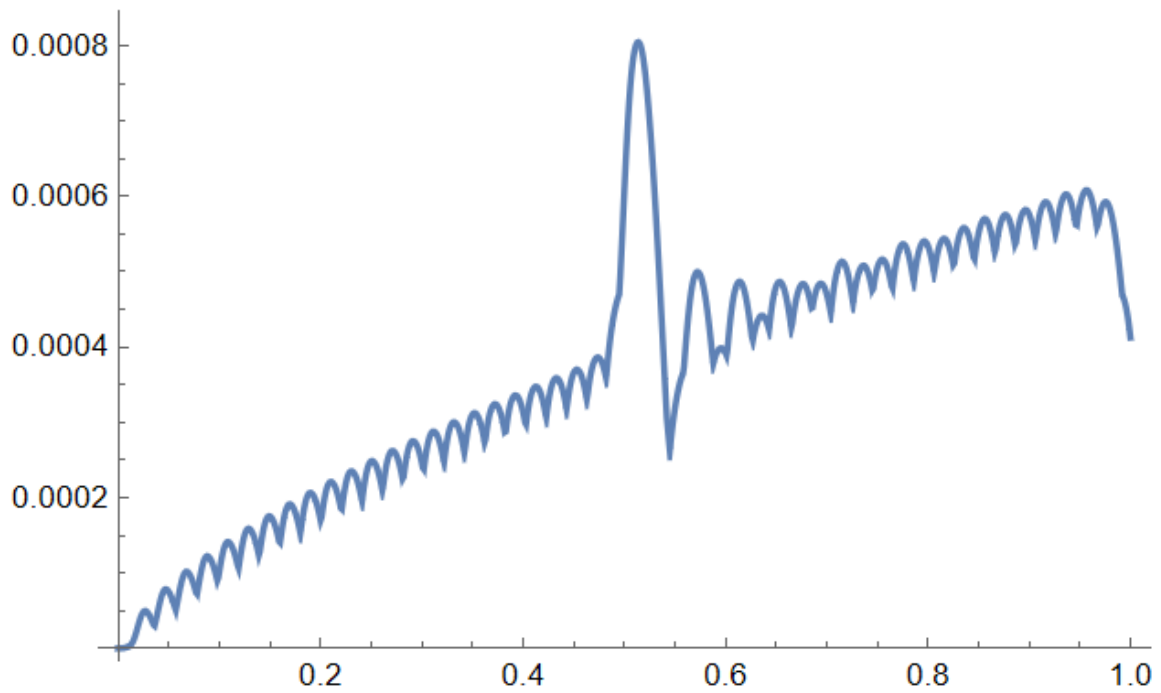


Рис. 2. График ошибки численного решения в случае Б

## 2.2. Тест 2: число Куранта

Расчёты будем производить с числами Куранта  $\gamma = 0.1, 0.5, 0.75, 1.0$ .

**А.** Исходные данные:  $f(x) = 1$ ,  $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ,  $g(x) = 0$ ,  $\varphi(t) = 0$ ,  $\psi(t) = 0$ ,  $x_0 = -2$ ,  $X = 2$ ,  $T = 1$ .

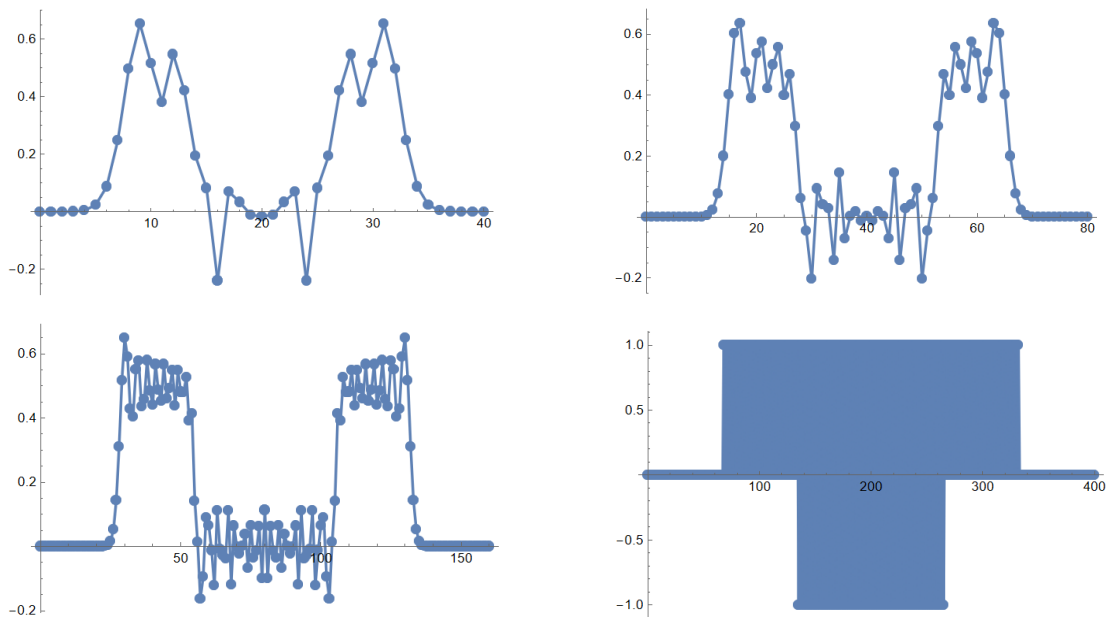


Рис. 3. Решения 2А для разных  $\gamma$  (слева направо и сверху вниз: 0.1, 0.5, 0.75, 1.0) в момент времени  $T$



**Б.** Исходные данные:  $g(x) = 1 - 2|x|$ ,  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $\varphi(t) = 0$ ,  $\psi(t) = 0$ ,  $x_0 = -1$ ,  $X = 1$ ,  $T = 1$ .

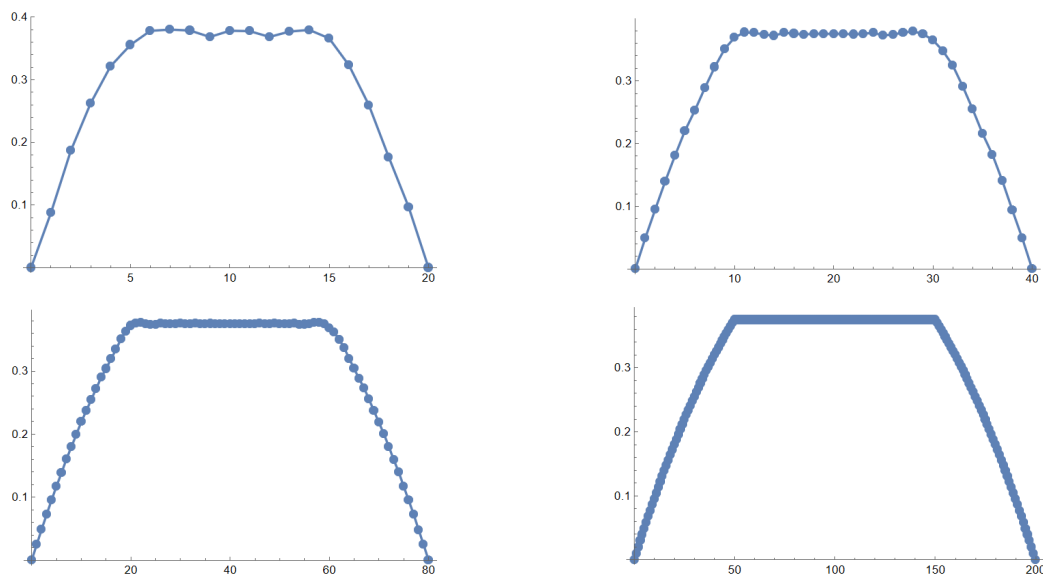


Рис. 4. Решения 2Б для разных  $\gamma$  (слева направо и сверху вниз: 0.1, 0.5, 0.75, 1.0) в момент времени  $T$

**В.** Исходные данные:  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = 0$ ,  $\varphi(t) = \sin t$ ,  $\psi(t) = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $X = 4\pi$ ,  $T = 1$ .

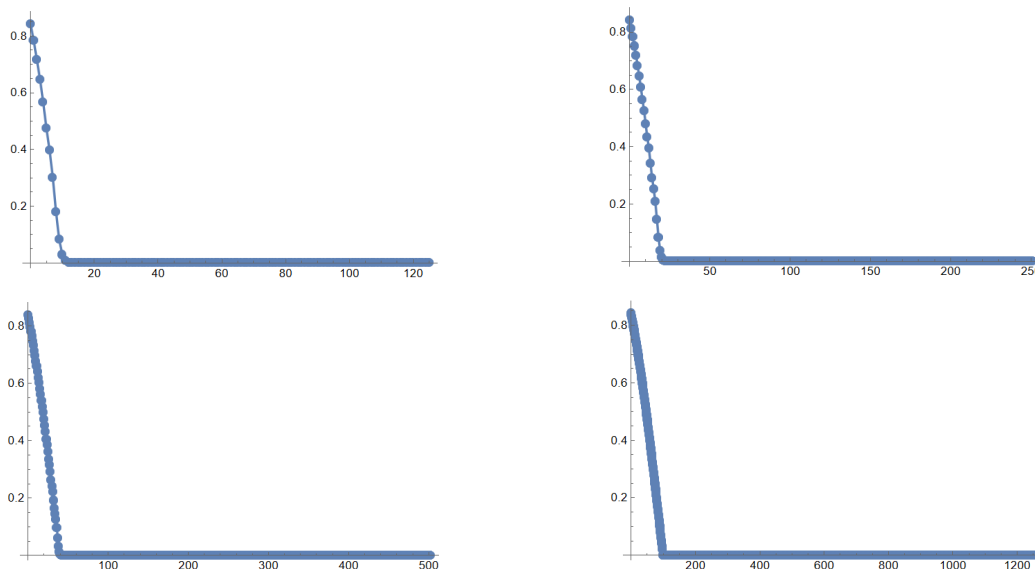


Рис. 5. Решения 2В для разных  $\gamma$  (слева направо и сверху вниз: 0.1, 0.5, 0.75, 1.0) в момент времени  $T$

## Список использованных источников

1. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2018. 592 с.