Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:

Распозновние графиков решения одномерного линейного уравнения переноса

Студент ФН2-61Б (Группа) ____________ (Подпись, дата) О. Д. Климов (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы ____________ (Подпись, дата) М. П. Галанин (И. О. Фамилия)

2024 г.

Оглавление

Введение

Необходимость распознавания графика функций возникает в совершенно разных прикладных задачах науки и техники. Например, она непосредственно связана с проблемой восстановления графика решений уравнений по неточно заданным данных о решениях. В силу нелинейности распознавания изображений нахождение точных алгоритмов для такой задачи испытывало ряд трудностей. Однако с развитием программирования и вычислительной техники стало возможным решать данную задачу методами нейронных сетей.

1. Постановка задачи

1.1. Формулировка

Необходимо изучить методы численного решения линейного одномерного уравнения переноса. Составить и отладить программу для нахождения численного решения задачи Коши для указанного уравнения. Использовать шесть различных разностных схем:

1) Явную схема с левой разностью на двух точках
2) Явную схема с левой разностью на трех точках
3) Неявную схема с левой разностью на двух точках
4) Неявную схема с левой разностью на трех точках
5) схема Лакса
6) схема Лакса-Вендрофа

Для всех схем использовать одинаковую систему тестов:

1) Левый треугольник
2) Правый треугольник
3) Прямоугольник
4) Синус
5) "Зуб"

Реализовать модель нейронной сети для распознавания решения на языке программирования Python. На основе модели разработать программу, которая по неточному решению возвращает более точное известное решение.

1.2. Пример

Основная задача работы состоит в том, чтобы создать программу, которая получала бы на вход неточное решение уравнения переноса и выдавала более точное соответствующее решение.

2. Задача Коши для линейного одномерного уравнения переноса

Уравнение переноса является одним из фундаментальных уравнений математической физики, которое широко используется для описания движения сплошной среды. Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial (au)}{\partial x} = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \quad \text{где } u = u(x,t), \quad a = const > 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{1}$$

Приведем аналитическое решение. Уравнение можно записать в виде:

$$u_t + au_x = 0$$

Запишем и решим характеристическое уравнение:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a} = \frac{du}{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u = C_1, \\ x = at + C_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = u, \\ C_2 = x - at \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u = \psi(x-at).$$

Применим граничные условия:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \Longrightarrow \quad \psi(x) = u_0(x), \quad \Longrightarrow \quad u = u_0(x-at).$$

Получим аналитическое решение уравнения $u = u_0(x - at)$.

3. Численные методы решения задачи

3.1. Описание методов

Для численного решения задачи Коши для линейного одномерного уравнения переноса рассмотрим следующие схемы:

1) **Явная схема с левой разностью по двум точкам:**

$$\widehat{y} = (1-\gamma)y + \gamma y_{-1}.$$

2) Неявная схема с левой разностью по двум точкам:

$$\widehat{y} = \frac{\gamma}{1+\gamma}\widehat{y}_{-1} + \frac{1}{1+\gamma}y.$$

3) Явная схема с левой разностью по трем точкам:

$$\widehat{y} = (1 - \frac{3}{2}\gamma)y + \gamma(2y_{-1} - \frac{1}{2}y_{-2}).$$

4) Неявная схема с левой разностью по трем точкам:

5) Схема Лакса:

$$\widehat{y} = \frac{(y_{+1} + y_{-1}) - \gamma(y_{+1} - y_{-1})}{2}.$$

6) Схема Лакса-Вендрофа:

$$\widehat{y} = y - \gamma(F_p - F_l),$$

где $F_p = \dfrac{(y_{+1} + y) - \gamma(y_{+1} - y)}{2}, \quad F_l = \dfrac{(y + y_{-1}) - \gamma(y - y_{-1})}{2}$**.**

3.2. Реализация

3.3. Тестирование

4. Метод улучшения решения с помощью нейронной сети

4.1. Модель сверточной нейронной сети

4.2. Распознавание решения

4.3. Результаты работы программы

5. Актуальность и перспективы задачи

Заключение

Список использованных источников

1. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2018. 592 с.
2. Tariq Rashid Make Your Own Neural Network // CreateSpace Independent Publishing Platform; 1st edition SAND96-0583 (March 31, 2016)