

# Optymalizacja – pojęcie i zastosowania

Bernard Pokorski

30.11.2023

# Plan prezentacji

- 1 Definicje
- 2 Zastosowanie optymalizacji
- 3 Podejścia w rozwiązywaniu problemów
- 4 Alogrytmy optymalizacyjne

## Ekstremum funkcji

Nazywamy minimum lub maksimum funkcji.

- **Ekstremum lokalne** dotyczy pewnego otoczenia punktu (przedziału otwartego)
- **Ekstremum globalne** największa lub najmniejsza wartość funkcji w całej jej dziedzinie.

## Pola

- **Pole skalarne** przypisanie każdemu punktowi w przestrzeni fizycznej lub w przestrzeni abstrakcyjnej pewnej wielkości skalarnej, czyli liczby.
- **Pole wektorowe** funkcja, która każdemu punktowi przestrzeni przyporządkowuje pewną wielkość wektorową.

## Gradient

**Gradient** ( $\nabla$ ) To pole wektorowe wskazujące kierunek i szybkość wzrostu danego pola skalarnego w określonym punkcie, gdzie moduł (długość) każdego wektora jest równy szybkości wzrostu pola skalarnego w kierunku jego największej wartości.

# Co to jest optymalizacja?

## Definicja

Optymalizacja to proces znajdowania **najlepszego** rozwiązania spośród zestawu możliwych rozwiązań dla danego problemu. Może to obejmować minimalizację lub maksymalizację pewnej funkcji celu przy uwzględnieniu ograniczeń.

**Przykład:** Rozważmy problem minimalizacji kosztów transportu. Mając dane różne środki transportu i odległości między lokalizacjami, celem jest znalezienie najtańszego sposobu przewiezienia towarów z jednego punktu do drugiego.

## Przykład 1

### Zadanie liniowe z ograniczeniami

- 1 **Problem alokacji zasobów:** Jak zoptymalizować alokację budżetu na różne projekty przy określonych ograniczeniach finansowych?
- 2 **Planowanie produkcji:** Jak zoptymalizować produkcję różnych produktów w fabryce przy ograniczonych zasobach surowców i czasie pracy?
- 3 **Zrównoważony transport:** Jak zoptymalizować trasę dostaw towarów przy minimalnych kosztach transportu?

## Przykład 2

### Zadanie kwadratowe z ograniczeniami

- 1 **Projektowanie struktury:** Jak zoptymalizować kształt mostu, tak aby zużycie materiałów było minimalne przy zachowaniu określonych kryteriów wytrzymałościowych?
- 2 **Problemy regresji:** W przypadku analizy danych, jak znaleźć krzywą dopasowującą się najlepiej do punktów danych?

## Przykład 3

### Zadanie nieliniowe z ograniczeniami

- 1 **Optymalizacja marketingowa:** Jak zoptymalizować strategię marketingową, uwzględniając różne czynniki wpływające na rynek?
- 2 **Projektowanie systemów energetycznych:** Jak zoptymalizować układ energetyczny w mieście, biorąc pod uwagę różne źródła energii, popyt i ograniczenia?



## Przykład 4

### Zadanie liniowe całkowitoliczbowe z ograniczeniami

- 1 **Problem plecakowy:** Jak wybrać zestaw przedmiotów o różnych wagach i wartościach, aby ich suma w plecaku nie przekroczyła określonej wartości?
- 2 **Planowanie tras:** Jak zoptymalizować trasę dostawy w mieście, biorąc pod uwagę ograniczenia czasowe i liczbowe pojazdów?

## Przykład 5

### Zadanie nieliniowe bez ograniczeń

- 1 **Funkcje celu w analizie numerycznej:** Jak znaleźć maksimum lub minimum funkcji bez jakichkolwiek ograniczeń, co ma zastosowanie w naukach ścisłych?
- 2 **Optymalizacja procesów przetwarzania danych:** Jak zoptymalizować algorytmy przetwarzania danych w celu zmaksymalizowania wydajności?

# Podjęcie zachłanne a ewolucyjne/dynamiczne

## Podjęcie zachłanne

To podejście polega na podejmowaniu lokalnie optymalnych decyzji na każdym kroku, w nadziei osiągnięcia globalnej optymalizacji. Algorytm podejmuje najlepsze dostępne rozwiązanie w danym momencie, nie analizując całego zbioru możliwości. Przykładem jest algorytm Dijkstry do znajdowania najkrótszej ścieżki w grafie.

## Podjęcie dynamiczne/ewolucyjne

Metoda dynamiczna polega na rozwiązywaniu problemów przez podział na mniejsze podproblemy, rozwiązywanie ich i wykorzystywanie uzyskanych wyników do rozwiązania głównego problemu.

## Przykład:

Problem plecakowy to klasyczny problem optymalizacyjny, gdzie próbujemy wybrać zestaw przedmiotów o różnych wagach i wartościach, aby ich suma wag nie przekroczyła określonej pojemności plecaka, a suma wartości była jak największa.

**Tabela:** Tabela przedmiotów, wag i wartości

Przedmiot	Waga	Wartość
A	5	10
B	8	14
C	3	7
D	4	8

## Podjęcie zachłanne

Rozwiązanie zachłanne mogłoby polegać na wyborze przedmiotu o największym stosunku wartości do wagi. W tym przypadku, można zastosować algorytm, który wybiera przedmioty według wartości na wagę, co prowadzi do wyboru przedmiotu A (10 wartości przy wadze 5) jako pierwszego.

Założmy, że zaczynamy z przedmiotem A o wartości 10 i wadze 5. Następnie wybieramy kolejny przedmiot o najwyższym stosunku wartości do wagi spośród pozostałych, co jest algorytmem zachłannym. W tym przypadku, kolejnym wyborem byłby przedmiot C o wartości 7 i wadze 3. Całkowita wartość wynosi 17, a waga 8, co mieści się w pojemności plecaka.

## Podjęcie dynamiczne

Algorytm programowania dynamicznego do rozwiązania problemu plecakowego opiera się na podejściu bottom-up, rozwiązując najpierw mniejsze podproblemy i wykorzystując je do rozwiązania całego problemu. W przypadku problemu plecakowego, algorytm dynamiczny tworzy tablicę, gdzie komórki przechowują maksymalną wartość, jaką można uzyskać dla określonej pojemności plecaka i dla różnych kombinacji przedmiotów. Wartości te są obliczane iteracyjnie, wykorzystując wcześniej obliczone wartości dla mniejszych pojemności plecaka i mniejszych zbiorów przedmiotów.

# Algorytmy optymalizacyjne

## Algorytmy ewolucyjne

**Algorytm genetyczny** Inspirowane procesami ewolucji biologicznej, wykorzystują selekcję naturalną, krzyżowanie i mutacje, aby generować nowe rozwiązania.

## Algorytm metaheurystyczne

**Algorytm roju (PSO)** Inspirujące się zachowaniami roju zwierząt do znalezienia optymalnego rozwiązania poprzez interakcje między "częstkami".

## Sieci neuronowe

**Sieci neuronowe nie są algorytmami optymalizacyjnym!**

Podczas procesu uczenia sieci neuronowych algorytm optymalizacji jest używany do dostosowania wag połączeń między neuronami w sieci, tak aby zminimalizować funkcję kosztu

## Algorytmy gradientowe

Gradient to wektor zawierający pochodne cząstkowe funkcji celu względem każdego z parametrów modelu. Ogólna idea algorytmów gradientowych opiera się na iteracyjnym aktualizowaniu parametrów modelu w kierunku przeciwnym do gradientu funkcji celu.