

LA FATTORIZZAZIONE CARTESIANA NELLA LIBRERIA PPLITE

Luigi Zaccone

February 18, 2019

INDICE

1	INTRODUZIONE	5
2	FATTORIZZAZIONE CARTESIANA	7
2.1	Blocchi e fattori	7
2.2	Partizione ammissibile	8
2.3	Operazioni	9
2.3.1	Inclusion Test (\sqsubseteq)	11
2.3.2	Join (\sqcup)	12
2.3.3	Meet (\sqcap)	13
2.3.4	Conditional	14
2.3.5	Assignment	15
2.3.6	Widening (∇)	16
3	IMPLEMENTAZIONE	19
3.1	FPoly	19
3.1.1	check_inv()	20
3.2	Operazione di base	23
3.2.1	refactor	24
3.2.2	least_upper_bound	25
3.2.3	add_con	27
3.2.4	affine_image e affine_preimage	28
3.3	Altre operazioni	29
3.3.1	add_space_dims e remove_space_dims	29
4	CONCLUSIONE	33
	BIBLIOGRAFIA	35

1 INTRODUZIONE

2 FATTORIZZAZIONE CARTESIANA

La fattorizzazione cartesiana permette di avere una complessità di esecuzione minore sulle operazioni applicate ai poliedri. L'idea è che i poliedri utilizzati nell'analisi dei programmi non mettono in relazione tutte le variabili del programma in un solo vincolo. Per esempio: un ipercubo

$H_n = \{0 \leq x_i \leq 1 \mid i = 1, \dots, n\}$ richiede 2^n generatori per essere rappresentato, tramite la decomposizione invece ne sono necessari solo $2n$. La terminologia e gli esempi saranno ispirati al lavoro svolto in [1].

2.1 BLOCCHI E FATTORI

Sia $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un insieme di n variabili. Dato un poliedro, \mathcal{X} può essere partizionato in un sottoinsieme \mathcal{X}_k che chiamiamo *blocchi* tale che i vincoli esistono solo tra variabili presenti nello stesso *blocco*. Quindi, ogni variabile priva di vincoli risiede in un singoletto. Ci riferiamo a questo insieme come $\pi = \pi_P = \{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_t\}$.

Esempio 2.1.1. Consideriamo

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \{x_1, x_2, x_3\} \text{ e} \\ P &= \{x_1 + 2x_2 \leq 3\}.\end{aligned}$$

In questo caso \mathcal{X} viene partizionato in due blocchi: $\mathcal{X}_1 = \{x_1, x_2\}$ e $\mathcal{X}_2 = \{x_3\}$.

Per ogni blocco, quindi, sarà presente un *fattore* P_k che sarà composto solo dalle variabili presenti nel suo blocco. In qualsiasi momento il poliedro originale può essere recuperato applicando l'unione dei vincoli \mathcal{C}_{P_k} e il prodotto cartesiano dei generatori \mathcal{G}_{P_k} .

Esempio 2.1.2. Consideriamo un poliedro \mathcal{P} con i seguenti vincoli e generatori:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \{-x_1 \leq -1, x_1 \leq 4, -x_2 \leq -2, x_2 \leq 4\} \\ \mathcal{G} &= \{\{(1), (2)\}, \{(1), (4)\}, \{(4), (2)\}, \{(4), (4)\}\}\end{aligned}$$

Il poliedro non ha vincoli tra le variabili x_1 e x_2 . Quindi, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ può essere partizionato nei blocchi: $\pi_P = \{\{x_1\}, \{x_2\}\}$ con i risultanti fattori $P_1 = (\mathcal{C}_{P_1}, \mathcal{G}_{P_1})$ e $P_2 = (\mathcal{C}_{P_2}, \mathcal{G}_{P_2})$ dove:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{P_1} &= \{-x_1 \leq -1, x_1 \leq 4\} & \mathcal{C}_{P_2} &= \{-x_2 \leq -2, x_2 \leq 4\} \\ \mathcal{G}_{P_1} &= \{\{(1), (4)\}, \emptyset, \emptyset\} & \mathcal{G}_{P_2} &= \{\{(2), (4)\}, \emptyset, \emptyset\}\end{aligned}$$

Il poliedro originale può essere ricavato da P_1 e P_2 come $P = P_1 \bowtie P_2 = (\mathcal{C}_{P_1} \cup \mathcal{C}_{P_2}, \mathcal{G}_{P_1} \times \mathcal{G}_{P_2})$

L'insieme \mathcal{L} che consiste in tutte le partizioni possibili di \mathcal{X} forma un *reticolo di partizioni* $(\mathcal{L}, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$. Gli elementi π del reticolo sono ordinati come segue: $\pi \sqsubseteq \pi'$, se ogni blocco di π è incluso in qualche blocco di π' . Questo reticolo contiene anche i soliti operatori di *least upper bound* (\sqcup) e *greatest upper bound* (\sqcap). È da notare che nel reticolo della partizione $\top = \{\mathcal{X}\}$ e $\perp = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}\}$.

2.2 PARTIZIONE AMMISSIBILE

Una partizione *ammissibile* $\bar{\pi}$ è tale se, dato un poliedro P , non esistono variabili x_i e x_j in diversi blocchi di π relazionati da un vincolo di P , ovvero $\pi \sqsubseteq \bar{\pi}$. Le partizioni ammissibili sono un sottoinsieme chiuso superiormente del reticolo, chiameremo questo sottoinsieme \mathcal{B} . Se $\bar{\pi} \in \mathcal{B}$ allora lo saranno anche tutte le $\bar{\pi}'$ tali che $\bar{\pi}, \bar{\pi}' \in \mathcal{L}$ e $\bar{\pi} \sqsubseteq \bar{\pi}'$. Le partizioni ammissibili sono dotate di elemento minimo ovvero la più fine partizione appartenente a \mathcal{B} , partizione che verrà anche considerata come la migliore. Questa partizione minima viene calcolata come spiegato nell'**esempio 2.1.1**.

Il nostro obiettivo è quello di cercare di utilizzare sempre la partizione ammissibile minima.

2.3 OPERAZIONI

In questo paragrafo verrà spiegato l'effetto che alcune operazioni dei poliedri generano sui fattori. Innanzitutto è fondamentale che, nelle operazioni binarie, i poliedri abbiano lo stesso numero di dimensioni. Per descrivere meglio queste operazioni, è necessario prima dare una specifica di alcune funzioni utilizzate all'interno delle prime.

Convert Constraint. Funzione che mappa le dimensioni di un vincolo o generatore all'interno di un fattore. La PPLite utilizza dimensioni nel range $[0, \dots, n]$ per i poliedri. Tramite la fattorizzazione è quindi necessario tradurre gli indici esterni a quelli interni dei vari blocchi.

Least Upper Bound. Questa funzione estrae il *lub* di due partizioni. Dall'Algoritmo 1 si può notare come sia necessario generare l'insieme delle unioni dei due blocchi $\pi_{\mathcal{P}}$ e $\pi_{\mathcal{Q}}$ in $\bar{\pi}$. Successivamente si uniscono tra loro tutti i blocchi di $\bar{\pi}$ che hanno un'intersezione non vuota, calcolando successivamente la partizione corretta.

Algoritmo 1 Least-Upper-Bound

```

1: function LEAST-UPPER-BOUND( $\pi_{\mathcal{P}}, \pi_{\mathcal{Q}}$ )
2:    $\bar{\pi} := \emptyset$ 
3:   for each  $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_i}$  in  $\pi_{\mathcal{P}}$  do
4:      $\mathcal{A} := \emptyset$ 
5:     for each  $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}_k}$  in  $\pi_{\mathcal{Q}}$  do
6:       if  $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_i} \cap \mathcal{X}_{\mathcal{Q}_k} \neq \emptyset$  then
7:          $\mathcal{A} := \mathcal{B} \cup \mathcal{X}_{\mathcal{Q}_k}$ 
8:      $\bar{\pi}.\text{add}(\mathcal{A})$ 
9:   while  $\exists$  coppie  $(\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j), i \neq j$  t.c.  $\bar{\pi}_i \cap \bar{\pi}_j \neq \emptyset$  do
10:     $\bar{\pi} := \{\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j\} \cup \{\bar{\pi}_i \cup \bar{\pi}_j\}$ 
  return  $\bar{\pi}$ 

```

Merge. Definito come \uparrow , quando si ha l'operazione $\pi \uparrow \mathcal{A}$, dove π è una

partizione di un poliedro e \mathcal{A} è un sottoinsieme delle sue variabili (non per forza connesse da vincoli), genera una partizione π_{merge} tale che:

- $\exists \mathcal{X}_i \in \pi_{merge} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}_i$
- $\pi \sqsubseteq \pi_{merge}$

Viene quindi generata una nuova fattorizzazione unendo i blocchi del poliedro che hanno variabili in comune con \mathcal{A} . Questa unione genera un blocco unico \mathcal{D} , tale che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Algoritmo 2 Merge

```

1: function MERGE( $\pi, \mathcal{A}$ )
2:    $\pi_{\mathcal{O}} := \emptyset$ 
3:    $\mathcal{D} := \emptyset$ 
4:   for each  $\mathcal{X}_i$  in  $\pi$  do
5:     if  $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$  then
6:        $\mathcal{D} := \mathcal{D} \cup \mathcal{X}_i$ 
7:     else
8:        $\pi_{\mathcal{O}}.\text{add}(\mathcal{X}_i)$ 
9:    $\pi_{\mathcal{O}}.\text{add}(\mathcal{D})$ 
10:  return  $\pi_{\mathcal{O}}$ 

```

Refactor. Questa operazione ha come argomenti un poliedro fattorizzato e una fattorizzazione ammissibile $\bar{\pi}$ per questo poliedro. Non fa altro che convertire i fattori rispetto alla seconda fattorizzazione. È importante notare che la partizione ammissibile non sarà più fine di $\pi_{\mathcal{P}}$, visto che i blocchi non vengono divisi bensì solo uniti.

La refactor è un'operazione necessaria in quanto, avendo due poliedri \mathcal{P} e \mathcal{Q} definiti sullo stesso insieme di variabili $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e presi $\bar{\pi}_{\mathcal{P}} = \{X_{\mathcal{P}_1}, X_{\mathcal{P}_2}, \dots, X_{\mathcal{P}_r}\}$, $\bar{\pi}_{\mathcal{Q}} = \{X_{\mathcal{Q}_1}, X_{\mathcal{Q}_2}, \dots, X_{\mathcal{Q}_s}\}$ partizioni corrette di \mathcal{P} e \mathcal{Q} in genere abbiamo che $\bar{\pi}_{\mathcal{P}} \neq \bar{\pi}_{\mathcal{Q}}$. È necessario che, come in molte operazioni comuni nell'analisi e manipolazione dei poliedri, le dimensioni delle partizioni utilizzate siano uguali in quantità e valori. Se si applica la fattorizzazione su poliedri aventi gli stessi blocchi non si fa altro che calcolare il *lub* ($\bar{\pi} = \bar{\pi}_{\mathcal{P}} \sqcup \bar{\pi}_{\mathcal{Q}}$).

Algoritmo 3 Refactor

```

1: function REFACTOR( $\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \bar{\pi}$ )
2:    $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}} := \emptyset$ 
3:   for each  $i$  in  $\{1, \dots, r\}$  do                                 $\triangleright r = \text{numero blocchi di } \pi_{\mathcal{P}}$ 
4:      $\mathcal{O}_i, \pi_{\mathcal{O}_i} := \emptyset$ 
5:     for each  $j$  in  $\{1, \dots, m\}$  do                                 $\triangleright m = \text{numero blocchi di } \bar{\pi}$ 
6:       if  $\pi_{\mathcal{P}_i} \cap \bar{\pi}_i \neq \emptyset$  then
7:          $\mathcal{O}_i := \mathcal{O}_j \bowtie \mathcal{P}_i$ 
8:          $\pi_{\mathcal{O}_i} := \pi_{\mathcal{O}_i} \bowtie \pi_{\mathcal{P}_i}$ 
9:        $\mathcal{O}.\text{add}(\mathcal{O}_i)$ 
10:       $\pi_{\mathcal{O}}.\text{add}(\pi_{\mathcal{O}_i})$ 
11:   REMAP-DIMENSIONS( $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}}, \bar{\pi}$ )
12:   return  $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}}$ 

```

Come spiegato precedentemente, la refactor prende in input un poliedro fattorizzato \mathcal{P} e la sua partizione $\pi_{\mathcal{P}}$ per rifattorizzarlo in base al terzo parametro $\bar{\pi}$. Non fa altro che unire i fattori che hanno intersezione dei relativi blocchi non vuota tra $\pi_{\mathcal{P}}$ e $\bar{\pi}$ e generare il blocco finale. È importante ri-mappare le dimensioni dei fattori di output in base a quelle descritte nel blocco di $\bar{\pi}$.

2.3.1 INCLUSION TEST (\sqsubseteq)

Operazione necessaria per controllare se un poliedro è incluso in un altro, disponendo di una doppia rappresentazione è possibile controllarlo se, dati due poliedri \mathcal{P} e \mathcal{Q} tutti i generatori in $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ soddisfano tutti i vincoli in $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$.

Nel nostro caso e, come mostrato nell'Algoritmo 4, è stata implementata tramite wrapper. In particolare vengono rifattorizzati i poliedri con il *lub* $\pi_{\mathcal{P}} \sqcup \pi_{\mathcal{Q}}$ e successivamente viene applicata l'*inclusion* in ordine su ogni coppia di fattori: il test avrà successo se tutti i test ritornano *True*.

Algoritmo 4 Inclusion Test

```

1: function INCLUSION( $\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}$ )
2:    $\bar{\pi} := \text{LEAS-UPPER-BOUND}(\pi_{\mathcal{P}}, \pi_{\mathcal{Q}})$ 
3:    $\mathcal{P}' := \text{REFACTOR}(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \bar{\pi})$ 
4:    $\mathcal{Q}' := \text{REFACTOR}(\mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}, \bar{\pi})$ 
5:   for each  $k$  in  $\{1, \dots, r\}$  do                                 $\triangleright r = \text{numero di blocchi in } \bar{\pi}$ 
6:     if  $\mathcal{P}'_k$  non include  $\mathcal{Q}'_k$  then
7:       return False
8:   return True

```

2.3.2 JOIN (\sqcup)

Tramite la doppia rappresentazione, i generatori $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ dove \mathcal{O} è il risultato del *join*, sono semplicemente l'unione dei generatori dei poliedri presi in input dalla funzione, ovvero $\mathcal{G}_{\mathcal{O}} = \mathcal{G}_{\mathcal{P}} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{Q}}$. I vincoli $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ sono ottenuti aggiungendo incrementalmente i generatori di $\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}$ al poliedro definito da $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$.

Algoritmo 5 Join

```

1: function JOIN( $\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}}$ )
2:   if IS_EMPTY( $\mathcal{P}$ ) then
3:      $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}} := \mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}$ 
4:   else if IS_EMPTY( $\mathcal{Q}$ ) then
5:      $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}} := \mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}$ 
6:   else
7:      $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}} := \text{JOIN-POLY}(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}})$ 
8:   return  $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}}$ 

```

Avendo un sistema di poliedri fattorizzati, è necessario per prima cosa ri-fattorizzare \mathcal{P} e \mathcal{Q} utilizzando il loro *lub*. Per ogni coppia di fattori $(\mathcal{P}'_i, \mathcal{Q}'_i)$ uguali, se ne aggiunge uno con il rispettivo blocco $\bar{\pi}_i$ al risultato. Se invece i due fattori risultano diversi, ognuno viene unito a un fattore comune $(\mathcal{P}'_i, \mathcal{Q}'_i)$ e successivamente si calcola la *join* di questi due fattori e si inserisce insieme al rispettivo blocco nel poliedro di output.

Un caso speciale è stato assegnato ai poliedri *vuoti*. Dati \mathcal{P} come poliedro *vuoto* e \mathcal{Q} un poliedro generico allora $\mathcal{Q} \cup \mathcal{P} = \mathcal{Q}$ e anche $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \mathcal{Q}$.

Se invece $\bar{\pi} = \bar{\pi}_{\mathcal{P}} \sqcup \bar{\pi}_{\mathcal{Q}}$ e $\mathcal{U} = \{\mathcal{X}_k \mid \mathcal{P} = \mathcal{Q}, \mathcal{X}_k \in \bar{\pi}\}$ allora la partizione ammissibile, in questo caso, sarà uguale a:

$$\bar{\pi}_{\mathcal{P} \sqcup \mathcal{Q}} = \mathcal{U} \cup \bigcup_{\mathcal{T} \in \bar{\pi} \setminus \mathcal{U}} \mathcal{T}$$

Algoritmo 6 Join-Poly

```

1: function JOIN-POLY( $\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}}$ )
2:    $\bar{\pi} := \pi_{\mathcal{P}} \sqcup \pi_{\mathcal{Q}}$ 
3:    $\mathcal{P}' := \text{REFACTOR}(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \bar{\pi})$ 
4:    $\mathcal{Q}' := \text{REFACTOR}(\mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}, \bar{\pi})$ 
5:   for each  $i$  in  $\{0, \dots, |\mathcal{P}'|\}$  do
6:     if  $\mathcal{P}'_i = \mathcal{Q}'_i$  then
7:        $\mathcal{O}.\text{add}(\mathcal{P}'_i)$ 
8:        $\pi_{\mathcal{O}}.\text{add}(\mathcal{X}'_i)$ 
9:     else
10:       $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} := \mathcal{X}_{\mathcal{T}} \cup \bar{\pi}_i$ 
11:       $\mathcal{P}_{\mathcal{T}} := \mathcal{P}_{\mathcal{T}} \bowtie \mathcal{P}'_i$ 
12:       $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}} := \mathcal{Q}_{\mathcal{T}} \bowtie \mathcal{Q}'_i$ 
13:    $\mathcal{P}_{\mathcal{T}} := \mathcal{P}_{\mathcal{T}} \sqcap \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ 
14:    $\pi_{\mathcal{O}}.\text{add}(\mathcal{X}_{\mathcal{T}})$ 
15:    $\mathcal{O}.\text{add}(\mathcal{P}_{\mathcal{T}})$ 
16:   return  $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}}$ 

```

2.3.3 MEET (\sqcap)

Per la doppia rappresentazione, $\mathcal{P} \sqcap \mathcal{Q}$ genera un poliedro i cui vincoli $\mathcal{C}_{\mathcal{P} \sqcap \mathcal{Q}}$ sono risultati dall'unione di $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$, mentre $\mathcal{G}_{\mathcal{P} \sqcap \mathcal{Q}}$ si ottiene aggiungendo incrementalmente i vincoli di $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ al poliedro \mathcal{P} . Se $\mathcal{P} \sqcap \mathcal{Q}$ risulta non soddisfacibile allora $\mathcal{P} \sqcap \mathcal{Q} = \perp$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{P} \sqcap \mathcal{Q}} = \emptyset$.

Per quanto riguarda i poliedri fattorizzati è necessario generare $\bar{\pi} = \bar{\pi}_{\mathcal{P}} \sqcap \bar{\pi}_{\mathcal{Q}}$ e rifattorizzare i due poliedri \mathcal{P} e \mathcal{Q} tramite essa, generando quindi \mathcal{P}' e \mathcal{Q}' . Per tutte le r coppie di fattori \mathcal{P}'_i e \mathcal{Q}'_i , se sono uguali aggiungo \mathcal{P}'_i con il rispettivo blocco al poliedro di output \mathcal{O} , altrimenti creo un fattore $\mathcal{F} = \mathcal{P}'_i \sqcap \mathcal{Q}'_i$. Se \mathcal{F} dovesse risultare vuoto, allora il risultato dell'intera operazione di *meet* sarebbe un poliedro \perp . Se al contrario non fosse vuoto, aggiungo \mathcal{F} a \mathcal{O} per poi riprendere il ciclo fino all'esaurimento dei fattori e ritornando infine \mathcal{O} e il suo blocco (rappresentato dal *lub* di $\pi_{\mathcal{P}}$ e $\pi_{\mathcal{Q}}$) come risultato. $\bar{\pi}_{\mathcal{P} \sqcap \mathcal{Q}} = \pi_{\mathcal{P}} \sqcap \pi_{\mathcal{Q}}$ è una partizione ammissibile se $\mathcal{P} \sqcap \mathcal{Q} \neq \perp$, altrimenti \perp è ammissibile.

Algoritmo 7 Meet

```

1: function MEET( $\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}$ )
2:    $\bar{\pi} := \pi_{\mathcal{P}} \sqcup \pi_{\mathcal{Q}}$ 
3:    $\mathcal{P}' := \text{REFACTOR}(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \bar{\pi})$ 
4:    $\mathcal{Q}' := \text{REFACTOR}(\mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}, \bar{\pi})$ 
5:    $\mathcal{O} := \emptyset$ 
6:   for each  $i$  in  $\{1, \dots, r\}$  do                                 $\triangleright r = \text{numero di blocchi in } \bar{\pi}$ 
7:     if  $\mathcal{P}'_i = \mathcal{Q}'_i$  then
8:        $\mathcal{O}.\text{add}(\mathcal{P}'_i)$ 
9:     else
10:       $\mathcal{F} := \mathcal{P}'_i \sqcap \mathcal{Q}'_i$ 
11:      if IS_EMPTY( $\mathcal{F}$ ) then
12:        return  $\perp, \perp$ 
13:       $\mathcal{O}.\text{add}(\mathcal{F})$ 
14:    $\pi_{\mathcal{O}} := \bar{\pi}$ 
15:   return  $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}}$ 

```

2.3.4 CONDITIONAL

Questa operazione viene utilizzata per aggiungere nuovi vincoli tra le variabili di un poliedro. Tramite la doppia rappresentazione è possibile aggiungendo un vincolo arbitrario c all'insieme $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$. Se dopo l'inserimento il sistema di vincoli risulta insoddisfacibile allora il poliedro diventa vuoto. Il sistema di generatori

è, come sempre, ricavato dall'aggiunta incrementale del vincolo c nel poliedro attraverso la conversione.

Utilizzando poliedri fattorizzati è necessario ricavare il blocco \mathcal{B} che contiene le variabili utilizzate nel vincolo, rifattorizzando \mathcal{P} con $\bar{\pi}_{\mathcal{P}} \uparrow \mathcal{B}$ si genera \mathcal{P}' . Successivamente bisogna prendere il fattore relativo contenente le variabili di \mathcal{B} , convertire il vincolo con le dimensioni *interne* del fattore e aggiungerlo a quest'ultimo utilizzando un'operazione per normali poliedri. Si controlla, infine, che il sistema di vincoli sia ancora soddisfacibile e, in caso negativo i blocchi e i fattori in \perp vengono modificati e il poliedro si rende *vuoto*. È importante far notare che, dato \mathcal{O} un poliedro risultante dall'aggiunta di un vincolo, $\bar{\pi}_{\mathcal{O}} = \bar{\pi}_{\mathcal{P}} \uparrow \mathcal{B}$ è ammissibile se $\mathcal{O} \neq \perp$, altrimenti $\bar{\pi}_{\mathcal{O}} = \perp$.

Algoritmo 8 Conditional

```

1: function CONDITIONAL( $con$ )
2:    $\mathcal{B} := \text{EXTRACT\_BLOCK}(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, con)$ 
3:    $\bar{\pi} := \pi_{\mathcal{P}} \uparrow \mathcal{B}$ 
4:    $\mathcal{P}' := \text{REFACTOR}(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \bar{\pi})$ 
5:   for each  $i$  in  $\{1, \dots, r\}$  do ▷  $r$  = numero di blocchi in  $\bar{\pi}$ 
6:     if  $\mathcal{B} \cap \bar{\pi}_i \neq \emptyset$  then
7:        $con_{int} := \text{CONVERT\_CON}(\bar{\pi}_i, con)$ 
8:        $\mathcal{F} := \text{ADD\_CON}(\mathcal{P}'_i, con_{int})$ 
9:        $\mathcal{O}.\text{add}(\mathcal{F})$ 
10:      if  $\text{IS\_EMPTY}(\mathcal{O})$  then
11:        return  $\perp, \perp$ 
12:       $\mathcal{O}.\text{add}(\mathcal{P}'_i)$ 
13:    $\pi_{\mathcal{O}} := \bar{\pi}$ 
14:   return  $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}}$ 

```

2.3.5 ASSIGNMENT

Per quanto riguarda il dominio dei poliedri fattorizzati, l'operazione di *assignment* è molto simile alla *conditional*. Dopo aver estratto il blocco \mathcal{B} che indica le variabili utilizzate nell'espressione lineare, si fattorizza il poliedro \mathcal{P} con $\bar{\pi}_{\mathcal{P}} = \pi_{\mathcal{P}} \uparrow \mathcal{B}$ ottenendo \mathcal{P}' , successivamente si prende il blocco con le variabili

di \mathcal{B} e si applica al relativo fattore un *assignment* come per i poliedri non fattorizzati, rimappando correttamente le variabili esterne rispetto a quelle interne al fattore. La partizione ammissibile per un poliedro risultante da questa operazione è $\bar{\pi}_{\mathcal{P}} \uparrow \mathcal{B}$.

Algoritmo 9 Assignment

```

1: function ASSIGNMENT( $\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, stmt$ )
2:   let  $stmt = (x_i = ax + \epsilon)$ 
3:    $\mathcal{B} := \text{EXTRACT\_BLOCK}(stmt)$ 
4:    $\bar{\pi} := \pi_{\mathcal{P}} \uparrow \mathcal{B}$ 
5:    $\mathcal{P}' := \text{REFACTOR}(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \bar{\pi})$ 
6:   for each  $i$  in  $\{1, \dots, r\}$  do  $\triangleright r = |\mathcal{P}|$ 
7:     if  $\bar{\pi}_i \subseteq \mathcal{B}$  then
8:        $stmt_{int} := \text{CONVERT}(\bar{\pi}, stmt)$ 
9:        $\mathcal{F} := \text{ASSIGNMENT}(\mathcal{P}'_i, stmt_{int})$   $\triangleright$  Poliedri non fattorizzati
10:       $\mathcal{O}.\text{add}(\mathcal{F})$ 
11:      if  $\mathcal{P}'_i := \emptyset$  then
12:        return  $\perp, \perp$ 
13:      else
14:         $\mathcal{O}.\text{add}(\mathcal{P}'_i)$ 
15:   return  $\mathcal{O}, \bar{\pi}$ 

```

2.3.6 WIDENING (∇)

Per la doppia rappresentazione, l'operatore di *widening* necessita come parametri i generatori e i vincoli di \mathcal{P} e i vincolo di \mathcal{Q} . Il risultato dell'operazione $\mathcal{P} \nabla \mathcal{Q}$ conterrà i vincoli $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ che sono presenti in $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ o che possono sostituirne un vincolo senza cambiare \mathcal{P} .

Per implementarlo è necessario effettuare una rifattorizzazione \mathcal{P}' del primo argomento \mathcal{P} con $\bar{\pi} = \pi_{\mathcal{P}} \sqcup \pi_{\mathcal{Q}}$, mentre non è necessario rifattorizzare il secondo argomento. Successivamente, per ogni fattore \mathcal{Q}_i del secondo argomento si individua il fattore corrispondente \mathcal{P}'_k in \mathcal{P}' e si procede a individuare l'insieme $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}_i}$ di vincoli di \mathcal{Q}_i che sono *stabili* rispetto a \mathcal{P}'_k : questi vincoli costituiscono il risultato del widening rispetto a quel fattore. È possibile, come caso spe-

ciali, che se $\pi_{\mathcal{P}'_k} = \pi_{\mathcal{Q}_i}$, allora è possibile applicare direttamente l'operatore di widening per poliedri non fattorizzati.

Algoritmo 10 Meet

```

1: function WIDENIND( $\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}$ )
2:    $\bar{\pi} := \pi_{\mathcal{P}} \sqcup \pi_{\mathcal{Q}}$ 
3:    $\mathcal{P}' := \text{REFACTOR}(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}, \bar{\pi})$ 
4:    $\mathcal{O} := \emptyset$ 
5:   for each  $i$  in  $\{1, \dots, r\}$  do                                 $\triangleright q = \text{numero di blocchi in } \pi_{\mathcal{Q}}$ 
6:      $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_i} := \emptyset$ 
7:      $k := j$ , t.c.  $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}_i} \subseteq \mathcal{X}_j, \mathcal{X}_j \in \bar{\pi}$ 
8:     if  $\bar{\pi}_k = \bar{\pi}_{\mathcal{Q}_i}$  then
9:        $\mathcal{Q}_i := \text{WIDENING}(\mathcal{P}'_k, \mathcal{Q}_i)$ 
10:    else
11:       $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_i} := \text{SELECT\_STABLE\_CON}(\mathcal{C}_{\mathcal{Q}_i}, \mathcal{P}'_k)$ 
12:       $\mathcal{Q}_i := \text{NEW\_FACTOR}(\mathcal{C}_{\mathcal{O}_i})$ 
13:       $\mathcal{O}.\text{add}(\mathcal{O}_i)$ 
14:   return  $\mathcal{O}, \pi_{\mathcal{O}}$ 

```

3 IMPLEMENTAZIONE

Questo capitolo tratterà dell'implementazione effettiva dei poliedri fattorizzati e di alcune loro operazioni. La struttura è stata basata su di un *wrapper* preesistente nella *PPLite* mentre alcune delle implementazioni sono state attuate effettuando un porting dalla libreria *PPL*. La maggiorparte delle operazioni sono state sviluppate come un wrapper per la *PPLite*, difatti le operazioni sui singoli poliedri sono gestite da essa. Lo scopo principale è quello di inserirsi all'interno dell'analisi statica e utilizzare i poliedri fattorizzati se e quando vengono generati poliedri che implicano un alto overhead per essere gestiti, in questo caso i suddetti poliedri vengono fattorizzati in maniera tale da diminuire il carico computazionale. L'implementazione è stata sviluppata interamente in *C++11* con l'obiettivo di utilizzare i metodi della *Standard Library* così da incrementare la leggibilità del codice. L'efficienza non è stata presa come obiettivo principale durante lo sviluppo, dando importanza alla correttezza e alla leggibilità del codice.

3.1 F_Poly

La classe dove sono compresi gran parte dei metodi è `F_Poly`. È stata definita nel file `F_Poly.hh` dove sono presenti 92 metodi pubblici e 14 metodi privati.

Per la costruzione/distruzione degli oggetti è stata seguita la *Rule of Five*, quindi abbiamo:

- Un costruttore esplicito, un costruttore per copia, un costruttore per spostamento
- Operazioni di assegnamento per copia e per spostamento;
- Un distruttore;

3 Implementazione

Abbiamo anche:

- Un metodo `check_inv()` per controllare che le invarianti di classe non siano state violate;
- Le operazioni principali descritte nel Capitolo 2.3;
- Funzioni di appoggio per gestire il poliedro;

Sono inoltre presenti delle strutture dati per la gestione dei fattori:

- **Block**: un `std::vector`¹ di `dim_type` che rappresenta un blocco \mathcal{X}_i che contiene alcune dimensioni del poliedro;
- **Blocks**: un `std::vector` di **Block** che esprime le partizioni del poliedro;
- **Factor**: un fattore è un poliedro, difatti **Factor** è un alias per oggetti di tipo `Poly`;
- **Factors**: un `std::vector` di **Factor**;

Sono inoltre presenti tre variabili:

- `dim_type dim`: indicante le dimensioni del poliedro
- `Topol topol`: indicante la topologia del poliedro
- `bool is_empty`: indicante se il poliedro è vuoto o no

3.1.1 CHECK_INV()

Il metodo menzionato contiene tutti i controlli necessari per verificare che l'invariante di classe non sia stata violata, e che quindi il poliedro su cui si sta lavorando è in condizioni di correttezza. Le invarianti di classe che devono essere rispettate sono le seguenti:

- La dimensione minima del poliedro deve essere ≥ 0

¹`template<class T, class Allocator = std::allocator<T>> class vector;`

```

if (dim < 0) {
    reason = "F_Poly broken: invalid space dimension";
    maybe_dump();
    return false;
}

```

- Se il poliedro è vuoto, i fattori e i blocchi devono essere anch'essi vuoti

```

if (is_empty()) {
    if (!(factors.empty() && blocks.empty())) {
        reason = "F_Poly broken: empty polyhedron has factors";
        maybe_dump();
        return false;
    }
    // No other check for an empty polyhedron.
    return true;
}

```

- Il numero di blocchi deve essere uguale al numero di fattori

```

if (factors.size() != blocks.size()) {
    reason = "F_Poly broken: #factors != #blocks";
    maybe_dump();
    return false;
}

```

- La cardinalità dei blocchi deve essere uguale a dim

```

dim_type dim_ = 0;
for (const auto& block : blocks)
    dim_ += block.size();
if (dim != dim_) {
    reason = "F_Poly broken: space dimension mismatch";
    maybe_dump();
    return false;
}

```

- Le dimensioni di un fattore devono essere uguali alle dimensioni del blocco che lo rappresenta

3 Implementazione

```
// Each factor space dim should match its block.
for (dim_type i = 0; i < num_rows(factors); ++i)
    if (factors[i].space_dim() != num_rows(blocks[i])) {
        reason = "F_Poly broken: factor vs block space dim mismatch";
        maybe_dump();
        return false;
    }
```

- Nessun fattore deve essere vuoto

```
if (std::any_of(factors.begin(), factors.end(),
               std::mem_fn(&Poly::is_empty))) {
    reason = "F_Poly broken: empty factor";
    maybe_dump();
    return false;
}
```

- Ogni dimensione dello spazio deve apparire una e una volta soltanto nei blocchi e non devono esserci blocchi vuoti

```
std::vector<bool> dims(dim, false);
for (const auto& block : blocks) {
    if (block.size() == 0) {
        reason = "F_Poly broken: found empty block";
        maybe_dump();
        return false;
    }
    for (const auto d : block) {
        if (d < 0 || d >= dim) {
            reason = "F_Poly broken: block contains an illegal
                    space dim";
            maybe_dump();
            return false;
        }
    }
    if (dims[d]) {
        reason = "F_Poly broken: repeated space dim in blocks";
        maybe_dump();
        return false;
    }
}
```

```

    }
    dims[d] = true;
  }
}

```

- Ogni dimensione dello spazio deve essere presente in un blocco

```

if (std::find(dims.begin(), dims.end(), false) != dims.end()) {
    reason = "F_Poly broken: a space dim is missing from blocks";
    maybe_dump();
    return false;
}

```

3.2 OPERAZIONE DI BASE

Durante la lettura di questo paragrafo, sarà palese la diversa notazione utilizzata rispetto a [1]: questo perché, per motivi di compatibilità e trasparenza si è deciso di implementare le varie operazioni utilizzando i nomi con il loro corrispettivo della *PPLite*.

Inizialmente il lavoro si è basato sul attuare un porting dai poliedri fattorizzati implementati nella *PPL*, successivamente il focus è stato nell'adattarli al meglio alle strutture utilizzate nella *PPLite*, permettendo una semplificazione nella codifica e nel testing. Il principio base sotto all'implementazione di alcune operazioni è stato quello di preparare strutturalmente i poliedri fattorizzati in maniera tale da rendere possibile richiamare le varie operazioni.

Diverse sono le funzioni più significative definite all'interno di `F_Poly.hh`:

```

static Factors refactor(const Factors& f,
                        const Blocks& b1, const Blocks& b2);
static Blocks least_upper_bound(const Blocks& b1, const Blocks& b2);
static Blocks merge(const Blocks& b, const Block& added);
void join(const Factors& f, const Blocks& b);
void join(const F_Poly& f);
void affine_image(Var var, const Linear_Expr& expr,
                  const Integer& inhomom = Integer::zero(),
                  const Integer& den = Integer::one());

```

```
void affine_preimage(Var var, const Linear_Expr& expr,
                    const Integer& inhomo = Integer::zero(),
                    const Integer& den = Integer::one());
void add_con(const Con& c);
void add_gen(const Gen& c);
bool inclusion(const Factors& f, const Blocks& b) const;
```

3.2.1 REFACTOR

La semantica rimane invariata rispetto a quanto descritto nell'Algoritmo 3. Per la *join* (\bowtie) tra i fattori è stata utilizzata la `concatenate_assign()` della PPlite, una funzione omonima, per quanto riguarda il join dei blocchi, è stata implementata utilizzando `std::insert`². È importante notare che questa operazione sia ammissibile in quanto non c'è alcuna possibilità di dimensioni doppie all'interno dei blocchi interessati.

```
Blocks bs(bs2.size());
Factors res(bs.size(), Factor(0, Spec_Elem::UNIVERSE));
for (dim_type i = 0; i != num_rows(bs1); ++i)
    for (dim_type j = 0; j != num_rows(bs2); ++j) {
        if (detail::are_disjoint(bs1[i], bs2[j]))
            continue;
        res[j].concatenate_assign(fs[i]);
        concatenate_assign(bs[j], bs1[i]);
    }
```

Per rimappare le dimensioni in maniera corretta viene utilizzata la funzione `map_space_dims()`, che prende come argomento un oggetto di tipo `Dims` che viene riempito delle varie dimensioni dei blocchi che saranno rimappati in base all'indice in cui si trovano.

```
// Remap those factors res[i] s.t. bs[i] != bs2[i]
for (dim_type i = 0; i != num_rows(bs2); ++i) {
```

²template <class InputIt> iterator insert(const_iterator pos, InputIt first, InputIt last);


```

const auto& b = bs[i];
const auto& b2 = bs2[i];
assert(b.size() == b2.size());
if (b == b2)
    continue;
Dims pf(b.size());
for (auto j = b.size(); j-- > 0; )
    pf[b[j]] = b2[j];
res[i].map_space_dims(pf);
}
return res;

```

Il metodo `are_disjoint(const Block& b1, const Block& b2)` viene utilizzato per vedere se due blocchi sono uguali.

```

inline bool
are_disjoint(const Block& b1, const Block& b2) {
    return std::find_first_of(b1.begin(), b1.end(),
                              b2.begin(), b2.end()) == b1.end();
}

```

Utilizza `std::find_first_of`³ e ritorna falso se trova un elemento che è presente in un insieme e non in un altro.

3.2.2 LEAST_UPPER_BOUND

L'implementazione di questo metodo non è stata menzionata in [1] ma ne è stato solo descritto l'aspetto matematico. In termini più pratici questa operazione prende due parametri `const Blocks& b1, const Blocks& b2` e, inizialmente, crea un blocco `lub` che sarà composto dalle dimensioni non in comune tra `b1` e `b2`:

```

Blocks lub; dim_type i = 0;
bool first = true;

```

³`template <class InputIt, class ForwardIt> InputIt find_first_of(InputIt first, InputIt last, ForwardIt s_first, ForwardIt s_last);`

3 Implementazione

```
for (const auto &b1 : b1)
  for (const auto &b2 : b2)
    if (!detail::are_disjoint(b1, b2)) {
      if (first) {
        lub.push_back(b2);
        first = false;
      }
      else {
        lub[i] = block_union(lub[i], b2);
      }
    }
  ++i;
first = true;
}
```

Successivamente si itera su `lub` per unire i blocchi che presentavano dimensioni comuni fino a costruire la partizione `lub`.

```
for (auto it1 = lub.begin(); it1 != lub.end(); ++it1)
  for (auto it2 = it1 + 1; it2 != lub.end(); ++it2)
    if (!detail::are_disjoint(*it1, *it2)) {
      *it1 = block_union(*it1, *it2);
      lub.erase(it2);
      --it2;
    }
}
```

Per unire i blocchi è stata utilizzata la funzione `block_union(const Block& b1, const Block& b2)` che permette di unire i blocchi ed evitare che si vengano a creare dimensioni doppie.

```
F_Poly::Block
F_Poly::block_union(const Block& b1, const Block& b2) {
  Block out(b1);
  bool add = true;
  for (const auto dim2 : b2) {
    for (const auto dim1 : b1)
      if (dim1 == dim2) {
        add = false;
      }
  }
}
```

```

        break;
    }
    if (add)
        out.push_back(dim2);
    else
        add = true;
}
return out;
}

```

3.2.3 ADD_CON

Il metodo `add_con` non è altro che l'implementazione dell'Algoritmo 8. Per poter sviluppare questa operazione sono necessarie due diverse funzioni helper oltre a `refactor` e `merge`:

- `extract_block()`: una funzione che, preso un vincolo, restituisce il blocco contenente tutte le variabili utilizzate in esso:

```

inline Block
extract_block(const Linear_Expr& e) {
    Block var_block;
    for (dim_type i = 0; i != e.space_dim(); ++i)
        if (e.get(Var(i)) != 0)
            var_block.push_back(i);
    return var_block;
}

```

non facciamo altro che iterare una `Linear_Expr` inserendo tutte le variabili presenti in quest'ultima in un `std::vector`.

- `convert`: è una funzione che permette di mappare le dimensioni di un vincolo. Definendo come *esterne* le dimensioni del poliedro nella sua interezza e *interne* quelle di un suo fattore, questo metodo effettua la traduzione da vincolo esterno a vincolo interno in base al blocco che viene passato.

3.2.4 AFFINE_IMAGE E AFFINE_PREIMAGE

Questa funzione è l'implementazione dell'operazione *assignment* vista nell'Algoritmo 9. A differenza di quest'ultimo, per rimanere coerenti con le definizioni della PPLite, la funzione prende in input:

- Una variabile `var` di tipo `Var`;
- Un'espressione lineare `expr` di tipo `Linear_Expr`;
- Un intero `inhomo` di tipo `Integer` che rappresenta l'*inhomogeneous term*;
- Un intero `den` di tipo `Integer` che rappresenta il *denominatore*.

Questi parametri formeranno lo statement $var = \frac{expr}{den} + inhomo$ equivalente a $x_i = ax + \epsilon$ dell'Algoritmo 9. Le uniche differenze con lo pseudocodice sono che è necessario convertire sia `var` che `expr` in base al blocco corrispondente. Una volta convertite non si fa altro che chiamare la `affine_image` della PPLite per ogni fattore.

```
void
F_Poly::affine_image(Var var, const Linear_Expr& expr,
                    const Integer& inhomo, const Integer& den) {
    Block b = detail::extract_block(expr);
    detail::add_var(b, var);
    Blocks bs_out = merge(blocks, b);
    factors = refactor(factors, blocks, bs_out);
    blocks = bs_out;
    for (dim_type i = 0; i < num_rows(factors); ++i) {
        if (detail::are_disjoint(b, blocks[i]))
            break;
        Var v_int = detail::convert(var, blocks[i]);
        Linear_Expr le_int = detail::convert(expr, blocks[i]);
        factors[i].affine_image(v_int, le_int, inhomo, den);
        if (factors[i].is_empty())
            set_empty();
    }
}
```

La funzione `affine_preimage` è identica a quella appena descritta, con l'unica differenza di chiamare la `affine_preimage` della PPLite per ogni fattore.

3.3 ALTRE OPERAZIONI

Oltre alle operazioni descritte in [1] ne sono state aggiunte altre per rendere più completa la classe. Tutte le operazioni descritte successivamente non sono altro che il corrispettivo sui poliedri fattorizzati di metodi omonimi presenti nella PPLite.

3.3.1 ADD_SPACE_DIMS E REMOVE_SPACE_DIMS

Funzioni che permettono l'aggiunta e la rimozione di dimensioni del poliedro, ne sono state implementate tre versioni:

- `add_space_dims`: permette di aggiungere n (con n parametro della funzione) dimensioni al poliedro. Quest'ultimo viene incorporato nel nuovo spazio vettoriale. Avendo dei fattori implica che per ogni dimensione aggiunta deve essere aggiunto un nuovo blocco singoletto contenente la nuova dimensione e un rispettivo fattore *universo* di dimensione 1. È presente anche un parametro `bool project` (settato a `false` di default) che permette, se passato come `true` di non incorporare il poliedro nel nuovo spazio vettoriale. Difatti, per ogni dimensione aggiunta viene creato un blocco singoletto che contiene la dimensione `dim` del poliedro, mentre il fattore viene creato da un sistema di vincoli che indica che la sua unica dimensione è vincolata ad assumere il valore 0:

```
void
F_Poly::add_space_dims(dim_type m, bool project) {
    assert(m >= 0);
    if (m == 0)
        return;
    if (is_empty()) {
        dim += m;
        return;
    }
```

3 Implementazione

```
    }  
    Factor f(1, Spec_Elem::UNIVERSE, topology());  
    if (project)  
        f.add_con(Var(0) == 0);  
    factors.insert(factors.end(), m, f);  
    for (dim_type i = 0; i != m; ++i) {  
        blocks.emplace_back(1, dim);  
        ++dim;  
    }  
}
```

- `remove_space_dim`: permette di rimuovere una dimensione dal poliedro. Il problema principale è che, rimuovendo una dimensione, è necessario riorganizzare i blocchi in modo tale da essere uniformati all'insieme $\{1, \dots, dim\}$. Questa operazione è riservata a una funzione chiamata `reduce_blocks`:

```
void  
F_Poly::remove_space_dim(const dim_type v) {  
    for (dim_type i = 0; i < num_rows(blocks); ++i)  
        for (dim_type j = 0; j < num_rows(blocks[i]); ++j)  
            if (v == blocks[i][j]) {  
                if (num_rows(blocks[i]) == 1) {  
                    blocks.erase(blocks.begin() + i);  
                    factors.erase(factors.begin() + i);  
                    reduce_blocks(blocks, v);  
                }  
                else {  
                    blocks[i].erase(blocks[i].begin() + j);  
                    factors[i].remove_space_dim(Var(v));  
                    reduce_blocks(blocks, v);  
                }  
                --dim;  
                return;  
            }  
}
```

È presente anche la versione `remove_space_dims(const Index_Set& vars)` che permette di rimuovere tutte le dimensioni presenti dentro `vars`.

- `remove_higher_space_dims`: la sua implementazione utilizzare la funzione precedente e non fa altro che rimuovere le n dimensioni (con n parametro della funzione) del poliedro:

```
void
F_Poly::remove_higher_space_dims(dim_type new_dim) {
    if (is_empty()) {
        dim = new_dim;
        return;
    }

    for (dim_type i = space_dim(); i-- > new_dim; )
        remove_space_dim(i);
}
```


4 CONCLUSIONE

BIBLIOGRAFIA

- [1] Martin Vechev Gagandeep Singh, Markus Püschel. Fast polyhedra abstract domain. Technical report, 2017.