9. Метод простейших итераций. Принцип сжимающих отображений для СЛУ.

Дана система нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Где x_i – неизвестные, $i = \overline{1, n}$

Прямых методов решения таких систем нет, но существуют итерационные методы: метод простейших итераций и метод Зейделя.

Систему эквивалентно преобразовываем к системе вида: $\Phi_i = x_i + F_i(x_1, \dots, x_n)$

Где Φ_i – дифференциируемые функции в некоторой области, $i = \overline{1, n}$.

Создаем итерационный процесс:

$$\left. \begin{matrix} x_1 = \Phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = \Phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right| \Rightarrow \; x^H = \Phi(x^C)$$

где x^H – новое значение, $x^{\text{С}}$ – старое значение.

Если система имеет несколько решений, их нужно отделить.

Запишем Якобиан: $I(x^*) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{\bar{x}=\bar{x}^*}$

Если существует Якобиан такой, что норма матрицы Якобиана $\|I(x^*)\| < q < 1, \forall x \in X$, то отображение Ф является сжимающим в X и выполняется $\rho(x_n, x^*) = \frac{q^k}{1-q}\rho(x_2, x_1)$

Если $\Phi - \text{сжимающееся отображение, то } x_{n+1} = \Phi_{n+1}(x_1, \dots, x_n)$ сходится к точному решению x^*.

Поэтому необходимым и достаточным условием сходимости метода простых итераций к решению x* системы является требование, чтобы все собственные числа матрицы были по модулю меньше 1. То есть $\|I(x^*)\| < 1$.

Функция Ф должна иметь все частные производные (для этого условие дифференциируемости).

Итерационные методы используются, но гарантии сходимости и хорошего приближения нет: $\| \; x^H - \; x^{\text{С}} \; \| < \varepsilon$.

Принцип сжимающихся отображений для СЛУ.

СЛУ $Ax = b$ преобразуем в эквивалентную форму $x = Bx + c$.

Определение. Пусть в пространстве R_n определён оператор $T: R_n \to R_n$. Он называется сжимающим на R_n, если существует такое $0 < \alpha < 1$, что для $\forall$ точек $x_k, y_k \; \in R_n, \; 1 \le k \le n$ выполняется:

$$\rho(Tx_k, Ty_n) = \; \alpha\rho(x_k, y_n)$$

Принцип: У сжимающегося отображения T на пространстве R_n существует, и притом ровно одна, неподвижная точка $x^* \in R_n$:

$$Tx^* = x^*.$$

Иные доказательства и леммы – Вержбицкий «Основы численных методов», стр 93