

9. Метод простых итераций.

Дана система нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Где x_i – неизвестные, $i = \overline{1, n}$

Прямых методов решения таких систем нет, но существуют итерационные методы: метод простейших итераций и метод Зейделя.

Систему эквивалентно преобразовываем к системе вида: $\Phi_i = x_i + F_i(x_1, \dots, x_n)$

Где Φ_i – дифференцируемые функции в некоторой области, $i = \overline{1, n}$.

Создаем итерационный процесс:

$$\begin{cases} x_1 = \Phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = \Phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \Rightarrow x^H = \Phi(x^C)$$

где x^H – новое значение, x^C – старое значение.

Если система имеет несколько решений, их нужно отделить.

$$\text{Запишем Якобиан: } I(x^*) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{array} \right) \Bigg|_{\vec{x}=\vec{x}^*}$$

Если существует Якобиан такой, что норма матрицы Якобиана $\|I(x^*)\| < q < 1, \forall x \in X$, то отображение Φ является сжимающим в X и выполняется $\rho(x_n, x^*) = \frac{q^k}{1-q} \rho(x_2, x_1)$

Если Φ – сжимающееся отображение, то $x_{n+1} = \Phi_{n+1}(x_1, \dots, x_n)$ сходится к точному решению x^* .

Поэтому необходимым и достаточным условием сходимости метода простых итераций к решению x^* системы является требование, чтобы все собственные числа матрицы были по модулю меньше 1. То есть $\|I(x^*)\| < 1$.

Функция Φ должна иметь все частные производные (для этого условие дифференцируемости).

Итерационные методы используются, но гарантии сходимости и хорошего приближения нет: $\|x^H - x^C\| < \varepsilon$.

Принцип сжимающихся отображений для СЛУ.

СЛУ $Ax = b$ преобразуем в эквивалентную форму $x = Bx + c$.

Определение. Пусть в пространстве R_n определён оператор $T: R_n \rightarrow R_n$. Он называется сжимающим на R_n , если существует такое $0 < \alpha < 1$, что для \forall точек $x_k, y_k \in R_n, 1 \leq k \leq n$ выполняется:

$$\rho(Tx_k, Ty_n) = \alpha \rho(x_k, y_n)$$

Принцип: У сжимающегося отображения T на пространстве R_n существует, и притом ровно одна, неподвижная точка $x^* \in R_n$:

$$Tx^* = x^*.$$