11. Метод Зейделя. Условия применения.

Дана система уравнений, где x_i – неизвестные, $i = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Прямых методов решения таких систем нет, но существуют итерационные методы: метод простейших итераций и метод Зейделя.

Систему эквивалентно преобразовываем к системе вида: $\Phi_i = x_i + F_i(x_1, \dots, x_n)$

Где Φ_i – дифференциируемые функции в некоторой области, $i = \overline{1,n}$.

Создаем итерационный процесс:

$$\begin{aligned} x_1^H &= \Phi_1(x_1^C, x_2^C, \dots, x_n^C) \\ x_2^H &= \Phi_2(x_1^H, x_2^C, \dots, x_n^C) \\ x_3^H &= \Phi_3(x_1^H, x_2^H, \dots, x_n^C) \\ &\dots \\ x_n^H &= \Phi_n(x_1^H, x_2^H, \dots, x_n^C) \end{aligned}$$

где x^H – новое значение, $x^С$ – старое значение.

Если система имеет несколько решений, их нужно отделить.

Запишем Якобиан: $I(x^*) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{\bar{x}=\bar{x}^*}$

Если существует Якобиан такой, что норма матрицы Якобиана $\|I(x^*)\| < q < 1, \forall x \in X$, то отображение Ф является сжимающим в X и выполняется $\rho(x_n, x^*) = \frac{q^k}{1-q}\rho(x_2, x_1)$

Если $\Phi -$ сжимающееся отображение, то $x_{n+1} = \Phi_{n+1}(x_1, \dots, x_n)$ сходится к точному решению x^*.

Поэтому необходимым и достаточным условием сходимости метода простых итераций к решению x* системы является требование, чтобы все собственные числа матрицы были по модулю меньше 1. То есть $\|I(x^*)\| < 1$.

Функция Ф должна иметь все частные производные (для этого условие дифференциируемости).

Итерационные методы используются, но гарантии сходимости и хорошего приближения нет:

$$\| \ x^H - \ x^С \ \| < \varepsilon$$

<u>Принцип сжимающихся отображений.</u>

Определение. Пусть в пространстве X определён оператор $T: X \to X$. Он называется сжимающим на X, если существует такое $0 < \alpha < 1$, что для $\forall$ точек $x, y \in X, \ 1 \le k \le n$ выполняется:

$$\rho(Tx, Ty) = \alpha\rho(x, y)$$

Принцип: У сжимающегося отображения T на пространстве R_n существует, и притом ровно одна, неподвижная точка $x^* \in X$:

$$Tx^* = x^*.$$
