



UNIVERSITÀ DI PISA

RELAZIONE PER L'ESAME:
ESPERIENZE DI
PROGRAMMAZIONE

A.A. 2019/2020

Domenico Profumo e Gerlando Gramaglia | Corso B

INDICE

1. Introduzione al problema numerico	2
2. Integrazione numerica	3
2.1. Formule di Newton-Cotes	4
2.2. Formule Composte	6
3. Interpolazione polinomiale	7
4. Polinomi Ortogonali e proprietà	8
4.1 Polinomio di Chebychev	8
4.2 Polinomio di Legendre	9
5. Integrazione di Gauss	9
5.1 Gauss-Chebychev	11
5.2 Gauss-Legendre	11
6. Implementazione funzioni utilizzando il linguaggio MATLAB	12
6.1 Trapezi	12
6.2 Cavalieri-Simpson	13
6.3 Gauss-Chebychev	14
6.4 Gauss-Legendre	15
6.3 Alcuni esempi di applicazione	16
7. Considerazioni finali	21
8. Bibliografia	22

Introduzione al problema numerico

Nella seguente relazione parleremo dell'integrazione numerica semplice, concentrandoci sull'analisi dell'integrale definito mediante l'uso di diversi metodi in quanto il calcolo di $\int_a^b f(x)dx$ spesso risulta difficile per via analitica, infatti nel caso in cui si riuscisse a trovare una primitiva della f , l'espressione funzionale sarebbe così complessa rispetto alla funzione integranda da suggerire l'uso di approcci diversi.

Un altro inconveniente è quello di trovarsi di fronte ad una funzione definita solo per punti, in questo caso non è affatto possibile procedere con un approccio analitico.

Pertanto, supponendo di conoscere o di poter valutare la funzione integranda f in punti prefissati oppure da noi scelti, andremmo a costruire due metodi dell'integrazione numerica: le formule di Newton-Cotes e la quadratura di Gauss (che sfrutta i polinomi interpolatori per il calcolo dell'integrale).

Per quanto riguarda i polinomi utilizzati per quest'ultimo metodo, ci rifaremo a due polinomi in particolare, ovvero quello di Chebychev e quello di Legendre. Ciò che forniremo infine sarà un errore dell'accuratezza ottenuto dal confronto tra il valore "esatto" dell'integrale e il valore ottenuto dai metodi di quadratura numerica, mettendo in risalto la loro velocità di convergenza.

Per finire, questi, verranno implementate mediante funzioni in linguaggio MATLAB e verranno testate utilizzando un set di funzioni da integrare.

Integrazione numerica

L'integrale definito di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a,b]$ è un numero reale che misura l'area S compresa tra la funzione e l'asse delle ascisse, delimitata dai due segmenti verticali che congiungono gli estremi $[a,b]$ al grafico della funzione.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

La funzione $f(x)$ è detta funzione integranda nell'intervallo di integrazione $[a,b]$.

Come detto precedentemente, spesso risulta difficile o impossibile determinare tale valore analiticamente, pertanto, supponendo di conoscere o di poter valutare la funzione integranda f in punti $\{x_i\}$ prefissati, oppure da noi scelti (seguendo determinati criteri), esaminiamo la costruzione di formule dette di quadratura, del tipo:

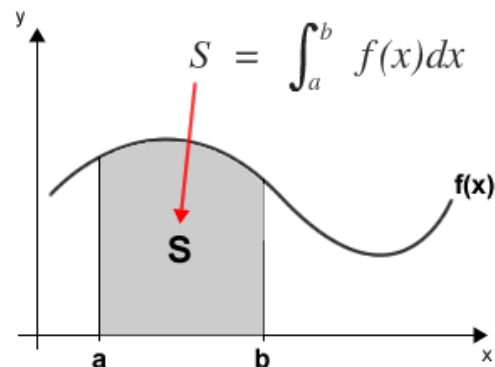
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum w_i f(x_i)$$

dove i punti $\{x_i\}$ vengono chiamati nodi, e in base alla scelta di questi ultimi si hanno diverse formule di quadratura che danno luogo a differenti condizioni di convergenza, rapidità, stabilità e costo computazionale.

Le formule di quadratura non si sostituiscono ai classici metodi analitici, anzi, sono proprio questi a dare dei suggerimenti per semplificare il problema e per scegliere la formula di quadratura più adatta.

Una formula di integrazione che utilizza il valore della funzione agli estremi, $f(a)$ o $f(b)$, è chiamata formula chiusa, in essa si assume che il valore di una funzione f è noto nei punti equidistanti x_i , per $i = 0, \dots, n$.

I metodi di quadratura si basano, in un modo o nell'altro, nel sommare i valori dell'integrando in una sequenza di ascisse nell'intervallo di integrazione moltiplicati per una certa quantità. L'obiettivo consiste



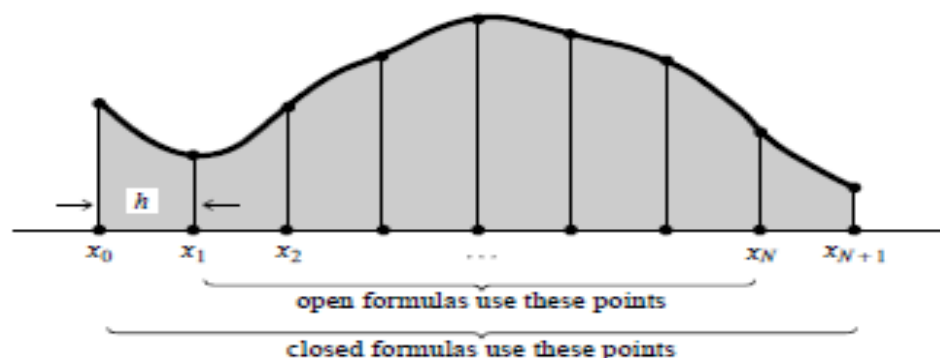
nell'ottenere l'integrale nel modo più accurato possibile con il minor numero di valutazioni delle funzioni dell'integrando.

Formule di Newton-Cotes

In questa sezione descriveremo le formule di Newton-Cotes con cui faremo un confronto con le formule di quadratura Gaussiane, integreremo quindi la funzione $f(x)$ tra un limite inferiore a e un limite superiore b .

Supponiamo di avere una funzione definita su un intervallo limitato $[a, b]$, e scegliamo n nodi equidistanti, abbiamo quindi una sequenza di ascisse, indicata con $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ che sono distanziati da un passo costante h , dove

$$x_i = a + ih \quad i=0, 1, \dots, n \quad \text{con} \quad h = \frac{b-a}{n}$$



Una funzione $f(x)$ ha valori noti in corrispondenza di x_i con $f(x_i) \equiv f_i$.

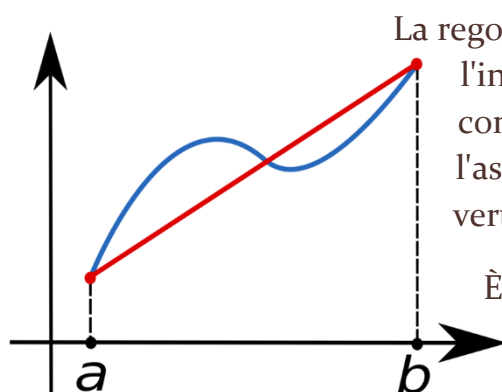
Una formula di integrazione che utilizza il valore della funzione agli estremi, $f(a)$ o $f(b)$, è chiamata formula *chiusa*.

Tra quest'ultime andremo ad affrontare:

- Regola del trapezio
- Cavalieri-Simpson
- Cavalieri Simpson (con fattore $3/8$)
- Regola di Bode's

REGOLA DEL TRAPEZIO

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f_1 + f_2] + O(h^3 f^{(2)})$$



La regola del trapezio propone di approssimare l'integrale, cioè l'area della regione piana compresa fra il grafo della funzione $f(x)$ e l'asse delle ascisse, con l'area del trapezio di vertici: $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(b, 0)$ e $(a, 0)$.

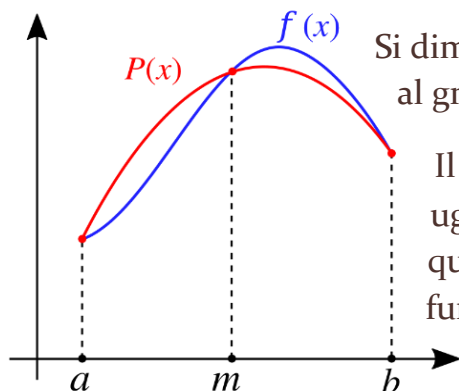
È esatta per i polinomi fino al grado 1 compreso, vale a dire $f(x)=mx+q$.

Qui il termine di errore $O()$ indica la differenza tra la stima dell'integrale e l'integrale "esatto". Questa quantità è il prodotto di alcuni coefficienti ovvero h alla terza per la derivata seconda della funzione valutata nell'intervallo di integrazione.

CAVALIERI-SIMPSON

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{h}{3} [1f_1 + 4f_2 + 1f_3] + O(h^5 f^{(4)})$$

La formula di Cavalieri-Simpson usa come punti i due estremi dell'intervallo, più il punto medio di essi.



Si dimostra che è esatta anche per i polinomi fino al grado 3 compreso.

Il termine di errore $O()$ in questo caso, è uguale ad h alla quinta per $f^{(4)}$, dove quest'ultima indica la derivata quarta della funzione f valutata nell'intervallo di integrazione.

CAVALIERI-SIMPSON (con fattore 3/8)

$$\int_{x_1}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{8} [3f_1 + 9f_2 + 9f_3 + 3f_4] + O(h^5 f^{(4)})$$

REGOLA DI BODE'S

$$\int_{x_1}^{x_5} f(x) \approx \frac{h}{45} [14f_1 + 64f_2 + 24f_3 + 64f_4 + 14f_5] + O(h^7 f^{(6)})$$

Per polinomi fino al grado 5.

Formule Composte

Nelle formule precedenti abbiamo osservato che, gli errori, sia nella formula dei trapezi che in quella di Cavalieri-Simpson, dipendono dall'ampiezza dell'intervallo che stiamo considerando, quindi per ottenere una certa accuratezza dalle formule di Newton-Cotes, il passo h deve essere piccolo; ciò significa che l'intervallo di integrazione $[a,b]$ dovrà essere anch'esso piccolo, il che non è sempre vero.

Per questo motivo, sceglieremo adesso di calcolare l'integrale dividendo l'intervallo $[a,b]$ in tanti piccoli sotto intervalli, ai quali si applicano di volta in volta le formule di Newton-Cotes, e sommando poi i risultati. Da questo procedimento si ottengono le formule composte, prendiamo quindi l'intervallo $[a,b]$ e lo scomponiamo in n sotto intervalli equidistanti ottenendo i punti $x_0 < x_1 < \dots < x_N$, $h_N = \frac{(b-a)}{n}$ in ognuno dei quali applichiamo la formula che abbiamo scelto.

Si mostrino adesso vedere come vengono modificate la formula dei trapezi e di Cavalieri-Simpson:

FORMULA TRAPEZI COMPOSTA

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

FORMULA CAVALIERI SIMPSON COMPOSTA

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + 4f(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}) + f(x_{i+1}))$$

Interpolazione Polinomiale

Dati un insieme di punti $\{x_i\}$ e conoscendo il valore degli $f(x_i)$, per una data funzione f , lo scopo dell'interpolazione è quello di approssimare il valore di $f(x_k)$, con x_k compreso tra il massimo e il minimo dell'insieme degli $\{x_i\}$ ma non appartenente ad esso. L'interpolazione Polinomiale è un caso particolare di interpolazione, che tenta di “approssimare”, mediante la costruzione di un polinomio, una certa funzione f .

Teorema (Condizione di esistenza ed unicità):

Data una funzione $f(x)$ continua su un certo intervallo $[a, b]$ appartenente ai Reali e dati $n+1$ punti arbitrari appartenenti all'intervallo dato $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, esiste ed è unico il polinomio interpolatore, di grado non superiore ad n e del tipo $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, verificante le condizioni $f(x_i) = P_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + \dots + a_nx_i^n$ per ogni $i = 0 \dots n$.

Tuttavia, l'interpolazione polinomiale non risulta particolarmente esatta nell'intero dominio della funzione, ciò che si può verificare è il “Fenomeno di Runge”[5] secondo cui: l'interpolazione polinomiale su nodi equi spaziati con polinomi di grado elevato porta all'aumento dell'ampiezza dell'errore in prossimità degli estremi dell'intervallo. È possibile ottenere uno schema di interpolazione il cui errore diminuisca all'aumentare del numero dei nodi utilizzando i nodi di Chebyshev.

Questi vengono ottenuti dal rispettivo Polinomio di Chebyshev che fa parte di una famiglia più ampia di polinomi detti Polinomi Ortogonali, che vengono anche utilizzati per il calcolo della quadratura di Gauss. Di seguito vediamo in cosa consistono questi polinomi e come vengono usati per il calcolo dell'integrale.

Polinomi ortogonali e proprietà

Vediamo adesso cos'è una famiglia di polinomi ortogonali:

def: Sia $w(x)$ una funzione peso sull'intervallo $[a,b]$ tale che:

$$w(x) > 0 \text{ e } \int_a^b w(x) dx < +\infty$$

Indichiamo con $\{f_k, k=0 \dots\}$ una famiglia di polinomi algebrici con $\text{grado}(f_k) = k$.

Diremo che $\{f_k, k = 0..\}$ è una famiglia di polinomi ortogonali rispetto a $w(x)$ sull'intervallo $[a,b]$ se risulta:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_a^b w(x) f_n(x) g_m(x) dx = 0 \quad \text{per ogni } n, m \text{ con } m \neq n$$

Teorema:

Sia $\{P_0, P_1, \dots, P_n, \dots\}$ una famiglia di polinomi ortogonali su $[a,b]$ rispetto ad una funzione peso w non negativa. Allora il polinomio P_n ha esattamente n radici reali distinte sull'intervallo aperto $]a; b[$.

E' possibile costruire diverse "sotto-famiglie" di polinomi ortogonali, tra i più conosciuti, e usati nel calcolo della quadratura gaussiana, troviamo:

- Polinomi di Chebyshev
- Polinomi di Legendre

POLINOMI DI CHEBYCHEV

I polinomi appartenenti a questa famiglia sono definiti sull'intervallo $]-1,1[$ rispetto al peso: $w(x)=1/\sqrt{1-x^2}$

Il generico polinomio è definito dall'espressione:

$$T_k(x) = \cos(k\alpha) \text{ con } \alpha = \arccos(x) \text{ e } k \geq 0$$

Tenendo presente

$$T_0(x) = 1;$$

$$T_1(x) = x;$$

è possibile ottenere i polinomi di Chebyshev di grado k utilizzando la seguente formula ricorsiva:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Analizzando il Polinomio di Chebychev troviamo che gli $n+1$ zeri del polinomio di grado $n+1$ sono della forma:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

POLINOMI DI LEGENDRE

I polinomi di Legendre sono definiti nell'intervallo $]-1,1[$ rispetto al peso: $w(x)=1$.

Il generico polinomio è definito dalla ricorrenza:

$$P_0(x)=1;$$

$$P_1(x)=x;$$

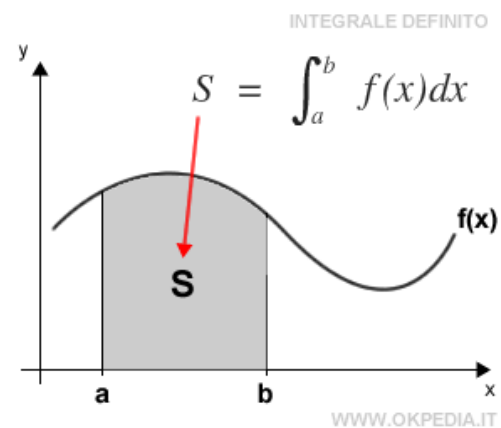
$$(k+1) P_{k+1}=(2k+1)xP_k(x)-(k+1)P_{k-1}(x)$$

Per il calcolo della derivata viene fornita la seguente formula [3]:

$$(x^2-1) P'_k(x)=k P_{k+1}(x)-k P_{k-1}(x).$$

Integrazione Gauss

In analisi numerica, le formule gaussiane di quadratura sono formule di quadratura numerica di massimo grado di precisione, utilizzate per l'approssimazione di un integrale definito della forma $\int_a^b f(x)dx$ conoscendo $n+1$ valori della funzione $f[a,b]$.



L'idea è quella di avere maggiore libertà nella scelta dei pesi e nelle posizioni delle ascisse in cui la funzione deve essere valutata.

L'integrale viene approssimato mediante la seguente formula:

$$\int_a^b W(x)f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Dove w_i rappresentano i pesi e $f(x_i)$ il valore della funzione nel punto di ascissa x_i

Le formule di Gauss sono formule di quadratura interpolatorie il cui grado di precisione si evince dal seguente teorema:

Th. Dati $n+1$ punti nodali $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ in un intervallo $[a, b]$, e una funzione $f(x)$, il grado di precisione di una formula interpolatoria di quadratura $\sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$ è uguale a $2n+1$ se questi nodi sono gli zeri di un polinomio ortogonale $P_{n+1}(x)$ in $[a, b]$ rispetto ad una funzione peso $w(x)$.

Dal teorema si evince che i punti scelti devono essere quelli di un polinomio ortogonale mentre i pesi scelti derivano dalla seguente formula

$$w_J = \frac{\langle P_{n-1} | P_{n-1} \rangle}{P_{n-1}(x_J) P'_n(x_J)}$$

Nel caso generale la quadratura di Gauss può essere sintetizzata nei seguenti passi:

1. Calcolo del polinomio ortogonale n-esimo
2. Calcolo degli zeri del polinomio
3. Calcolo dei pesi
4. Applicazione della funzione negli zeri del polinomio e successiva sommatoria dei prodotti tra i pesi i-esimi (precedentemente calcolati) e i rispettivi valori di $f(x_i)$

I concetti appena descritti ci portano a identificare, tra i tanti, due polinomi con le caratteristiche date, ovvero il polinomio di Chebychev e di Legendre con i quali poter calcolare i nodi necessari per la quadratura numerica.

A questo punto, utilizzando i polinomi descritti precedentemente, otteniamo le seguenti formule di quadratura:

CHEBYCHEV

Preso il polinomio n-esimo:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

$$\text{con} \quad x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$w_i = \frac{\pi}{n+1}$$

LEGENDRE

Preso il polinomio n-esimo:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

$$\text{Con } w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_N(x_i)]^2} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Implementazione funzioni utilizzando il linguaggio MATLAB

TRAPEZIO

```
function integrale = trapezio(fun, x, num_it )
% fun = funzione da integrare
% x = [x1,x2] intervallo su cui calcolare l'integrale
% num_it = numero max di punti di ascissa su cui calcolare l 'integrale:
2^num_it

%la funzione restituisce un vettore contenente una stima degli errori di
integrazione
%calcolati sulla funzione fun con cardinalità dei punti di ascissa che
vanno
%da 2^1 a 2^num_it.

%inizializzo il vettore contenente i valori degli integrali
integrale = zeros(num_it, 1);
n = 1;
for i= 1: num_it
    %cardinalità punti di ascissa
    n = n *2;
    %distanza tra due punti di ascissa adiacenti
    h = (x(2) -x(1)) / n;
    %vettore dei punti di ascissa equidistanti compresi tra x(1) e x(2)
    points = linspace ( x(1), x(2), n+1);
    %calcolo dell'integrale i-esimo mediante formula dei trapezi
    for j = 1: length(points) -1
        integrale(i) = integrale(i) + 0.5*h*(fun(points(j)) +
fun(points(j+1)));
    end
end
end
```

CAVALIERI-SIMPSON

```
function integral = Cavalieri_Simpson ( fun , x, num_it)

% fun = funzione da integrare
% x = [x1,x2] intervallo su cui calcolare l'integrale
% num_it = numero max di punti di ascissa su cui calcolare l 'integrale:
2^num_it

%la funzione restituisce un vettore contenente una stima degli errori di
%integrazione calcolati sulla funzione fun con cardinalità dei punti di
%ascissa che vanno da 2^1 a 2^num_it.

%inizializzo il vettore contenente i valori degli integrali
integral = zeros(num_it, 1);
n = 1;
for j= 1: num_it
    %cardinalità punti di ascissa
    n = n*2;
    %distanza tra due punti di ascissa adiacenti
    h = (x(2) - x(1)) / n;
    %vettore dei punti di ascissa equidistanti compresi tra x(1) e x(2)
    points = linspace(x(1), x(2), n+1);
    %calcolo dell'integrale mediante la formula cavalieri_simpson
    integral(j) = (h/3)*(fun(points(1)) + fun(points(length(points)))));
    for i = 2:length(points) -1
        if ( mod(i, 2) == 0)
            integral(j) = integral(j) + (4/3)*h*fun(points(i));
        else
            integral(j) = integral(j) + (2/3)*h*fun(points(i));
        end
    end
end end
```

GAUSS-CHEBYCHEV

```
function integrale = g_cheb (f, num_it)
% f = funzione da integrare
% num_it = numero max di nodi: 2^num_it

%la funzione restituisce un vettore contenente una stima degli errori di
%integrazione calcolati sulla funzione fun con cardinalità dei punti di
%ascissa che vanno da 2^1 a 2^num_it.

integrale = zeros (num_it, 1);
n = 1;
for j = 1: num_it
    %numero dei nodi di cheb
    n = n*2;
    %peso
    w= pi/n;
    for i=1:n
        %calcolo del nodo i-esimo
        x=cos(((2*i-1)/(2*n))*pi);
        %calcolo di w / W(x) con x nodo i-esimo di chebyshev
        wf=w*sqrt(1-x^2);
        %calcolo dell'integrale
        integrale(j)=integrale(j)+wf*f(x);
    end
end
```

GAUSS-LEGENDRE

```
function accuracy=gausslege(f,n)
%la funzione restituisce una stima dell'errore di integrazione calcolato
%sulla funzione fun mediante il metodo di Gauss_Legendre utilizzando il
%polinomio di grado n

xu=linspace(-1,1,n)';

%approssimazione iniziale delle radici
x=cos((2*(0:(n-1))'+1)*pi/(2*(n-1)+2))+(0.27/n)*sin(pi*xu*(n-1)/(n+1));
x0=2;
% Matrice contenente gli n polinomi di legendre
M=zeros(n,n+1);

% approssimazione delle n+1 radici del polinomio di legendre usando il
% metodo delle tangenti di Newton
% iteriamo fino a quando la differenza tra il punto x(i) e x(i+1) è
% maggiore di eps(precisione di macchina)

while max(abs(x-x0))>eps

    M(:,1)=1;
    M(:,2)=x;
    Mder(:,1)=0;
    Mder(:,2)=1;

    for k=2:n
        %calcolo degli n polinomi di legendre
        M(:,k+1)=( (2*k-1)*x.*M(:,k)-(k-1)*M(:,k-1) )/k;
    end
    %derivata del polinomio n-esimo
    Mder=(n)*( M(:,n)-x.*M(:,(n+1)) )./(1-x.^2);

    %metodo delle tangenti di Newton
    x0=x;
    x=x0-M(:,(n+1))./Mder;
end

% calcolo dei pesi
w=2./((1-x.^2).*Mder.^2);

%calcolo l'integrale
I=0;
for i=1:n
    %calcolo dell'integrale
    I=I+w(i)*f(x(i));
end
%calcolo l'accuratezza

accuracy=abs(integral(f,-1,1)-I);
end
```


Alcuni esempi di applicazione

Preso N il numero di nodi utilizzati per la valutazione della funzione $f(x)$, i valori all'interno della tabella rappresentano la differenza tra il valore dell'integrale effettivo e il valore della quadratura utilizzando i diversi metodi con gli N :

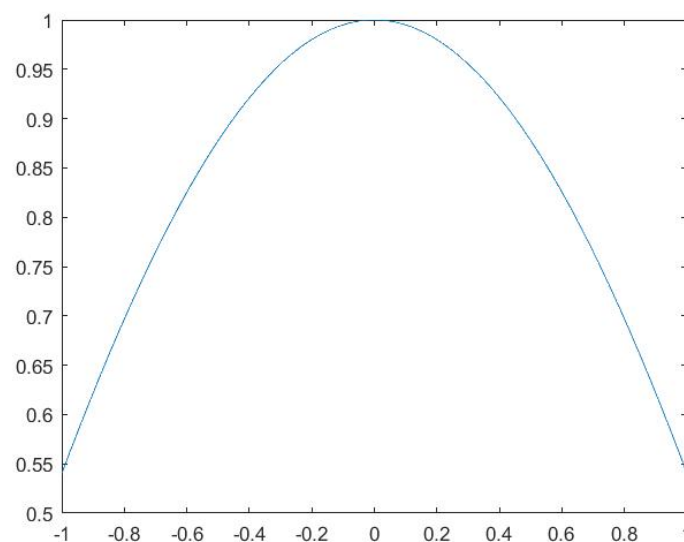
$$E_{acc} = |v_{eff} - v_m|$$

Con:

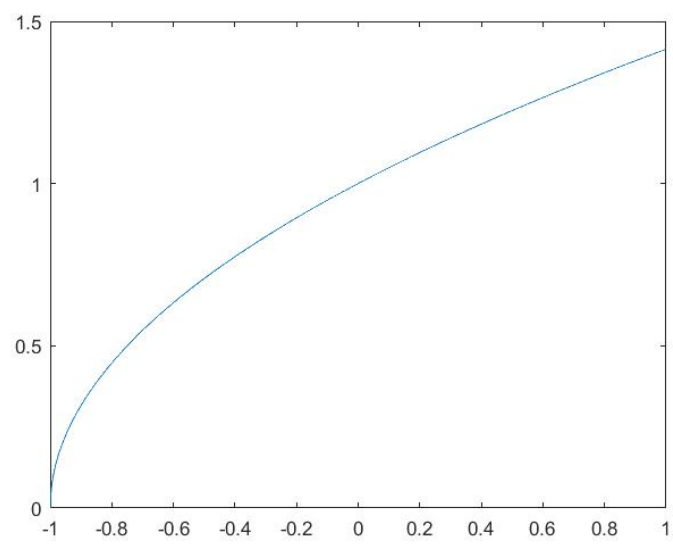
- E_{acc} : errore accuratezza
- v_{eff} : valore effettivo dell'integrale
- v_m : valore dell'integrale approssimato

Prenderemo in esame tre tipi di funzioni che verranno integrate nell'intervallo $[-1,1]$.

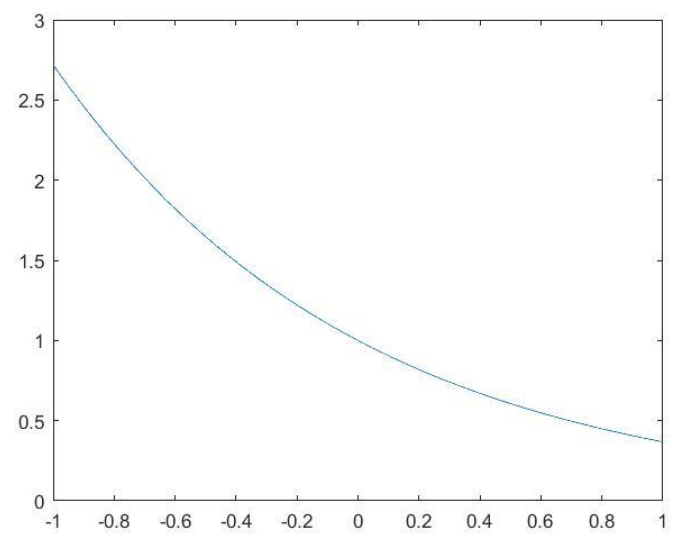
1. $\cos(x)$



2. $\sqrt{1+x}$



3. e^{-x}



$$\int_{-1}^1 \cos(x) dx = 1.68294196961579$$

<i>N</i>	Trapezi	Cavalieri-Simpson
0	1.682941969615793e+00	1.682941969615793e+00
2	1.426396637476532e-01	1.059290096296706e-02
4	3.520825479135015e-02	6.022148607507383e-04
8	8.774466911338763e-03	3.679571533155013e-05
16	2.191901561019227e-03	2.286889086988708e-06
32	5.478683419077868e-04	1.427311291379851e-07
64	1.369603972882771e-04	8.917584004564105e-09
128	3.423968134663724e-05	5.572999839387194e-10
256	8.559894214110741e-06	3.482947263933056e-11
512	2.139971919667971e-06	2.176259172870232e-12
1024	5.349928782205637e-07	1.347810751894940e-13

<i>N</i>	Gauss-Chebyshev	Gauss-Legendre
0	1.682941969615793e+00	1.682941969615793e+00
2	5.896904971406380e-03	7.118314225807776e-03
4	2.562262947023441e-02	2.809198191844331e-07
8	6.823956483636984e-03	4.440892098500626e-16
16	1.728620362876132e-03	6.661338147750939e-16
32	4.335165069522251e-04	4.440892098500626e-16
64	1.084633970653837e-04	1.110223024625157e-15
128	2.712110342373286e-05	8.881784197001252e-16
256	6.780604042688765e-06	2.220446049250313e-16
512	1.695171519822125e-06	4.440892098500626e-16
1024	4.237941615414798e-07	2.220446049250313e-16

$$\int_{-1}^1 e^{-x} dx = 2.3504023872$$

<i>N</i>	Trapezi	Cavalieri-Simpson
0	2.350402387287603e+00	2.350402387287603e+00
2	1.926782475276410e-01	1.165136925589305e-02
4	4.876389532639980e-02	7.924445926525969e-04
8	1.222894629760773e-02	5.062995467675080e-05
16	3.059623087179109e-03	3.182017036085227e-06
32	7.650551368914016e-04	1.991534612777457e-07
64	1.912731227968756e-04	1.245143232964097e-08
128	4.781886441085348e-05	7.782823274737893e-10
256	1.195475258608525e-05	4.864508795776601e-11
512	2.988690425365093e-06	3.039346552213829e-12
1024	7.471727481167534e-07	1.914024494453770e-13

<i>N</i>	Gauss-Chebyshev	Gauss-Legendre
0	2.350402387287603e+00	2.350402387287603e+00
2	4.499285939436239e-01	7.706299377873371e-03
4	8.482667384919740e-02	2.951312252363891e-07
8	2.013364818206487e-02	1.776356839400250e-15
16	4.976019237501905e-03	4.440892098500626e-16
32	1.240534542855887e-03	1.776356839400250e-15
64	3.099184787895837e-04	1.332267629550188e-15
128	7.746619916781938e-05	8.881784197001252e-16
256	1.936571142646670e-05	8.881784197001252e-16
512	4.841375464526010e-06	8.881784197001252e-16
1024	1.210340593971182e-06	8.881784197001252e-16

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x} dx = 1.8856180831$$

<i>N</i>	Trapezi	Cavalieri-Simpson
0	1.885618083164127e+00	1.885618083164127e+00
2	1.785113019775793e-01	8.088022903976189e-02
4	6.613886628178478e-02	2.868138771651996e-02
8	2.414471270629837e-02	1.014666151446963e-02
16	8.727026445033204e-03	3.587797691277483e-03
32	3.133134675546767e-03	1.268504085718103e-03
64	1.119647834505688e-03	4.484855541577737e-04
128	3.988347265004855e-04	1.585636904986032e-04
256	1.417542342185829e-04	5.606073678987578e-05
512	5.030390653248951e-05	1.982046397164261e-05
1024	1.783167083169168e-05	7.007592264018925e-06

<i>N</i>	Gauss-Chebyshev	Gauss-Legendre
0	1.885618083164127e+00	1.885618083164127e+00
2	1.667262227899351e-01	2.042314457871708e-02
4	3.753470699015282e-02	3.283743669458161e-03
8	9.159228562603650e-03	4.777593370741684e-04
16	2.276246027945072e-03	6.495435606024280e-05
32	5.682209783781644e-04	8.487264639089886e-06
64	1.420028206124968e-04	1.085356632790635e-06
128	3.549743035446973e-05	1.372460733950476e-07
256	8.874152940041569e-06	1.725585452305722e-08
512	2.218525444241948e-06	2.163287549095116e-09
1024	5.546305594794632e-07	2.708033797205189e-10

Considerazioni finali

Dagli esempi delle funzioni precedenti si evince che:

- Nel calcolo dell'integrale della funzione $\cos(x)$ limitata nell'intervallo $[-1,1]$ con $n=1024$, il metodo del trapezio è accurato fino alle 6 cifre decimali dopo la virgola mentre la formula di cavalieri-simpson riesce a fornire un grado di accuratezza che è circa il doppio di quella calcolata con la formula dei trapezi arrivando ad un grado di precisione di 13 cifre decimali. La formula di Gauss-Chebyshev in questo caso non fornisce un risultato efficiente, fermandosi alla sola di precisione di 6 cifre decimali (molto simile all'accuratezza ottenuta con la formula dei trapezi) mentre la più accurata risulta essere quella di Gauss-Legendre arrivando a coprire le 16 cifre decimali già da $n=16$.
- L'integrale della funzione e^{-x} limitata nell'intervallo $[-1,1]$ con $n=1024$, tutti e quattro i metodi forniscono un'accuratezza pressoché simili a quelli dell'integrale calcolato con la funzione $\cos(x)$.
- L'ultimo integrale $\sqrt{1+x}$ differisce dai precedenti per la lenta accuratezza mostrata da tutti e quattro i metodi, in particolare, la formula dei trapezi per $n=1024$ arriva ad un grado di accuratezza fino alle 5 cifre decimali risultando pertanto il meno accurato, ad esso segue il metodo di cavalieri simpson con le 6 cifre decimali. Il metodo di Gauss-Chebyshev invece, in questo caso riesce a raggiungere un grado di accuratezza più elevato dei due metodi precedenti arrivando alle 7 cifre decimali ma peggiore di quello di Gauss-Legendre che risulta essere il migliore dei precedenti arrivando alle 10 cifre decimali ma questa volta con un andamento più lineare rispetto al calcolo con le funzioni precedenti.

Bibliografia

[1] Saul Teukolsky e William H. Press (1986): NUMERICAL RECIPES IN C: THE ART OF SCIENTIFIC COMPUTING (cap 3,4)

[2] Appunti Prof. Calogero Vetro, Università degli Studi di Palermo.

[3] Dispense Appendice B: Strumenti Analitici. Prof. Antonio Giorgilli, Università degli Studi di Milano.

[4] Quadratura di Gauss. Wikipedia, L'enciclopedia libera, 04 maggio 2019.
<https://it.wikipedia.org/wiki/Quadratura_di_Gauss>

[5] Fenomeno di Runge. Wikipedia, L'enciclopedia libera, 12 agosto 2018.
<https://it.wikipedia.org/wiki/Fenomeno_di_Runge>