APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EL ANÁLISIS DE VIBRACIONES EN UNA BARRA Y UNA PLACA CON EL MODELO SPRING-MASS

ALUMNOS:

- GERMAIN ROSADIO
- KATHERINE MIRANDA
- JAVIER JARA MEZA

OBJETIVOS

- ***Generales:***

1. Verificar la validez del modelo Spring-Mass.
2. Aplicar los métodos numéricos.
3. Con los resultados obtenidos, simular las vibraciones longitudinales de una barra y una placa.

- ***Específicos:***

1. Discretizar una barra y placa delgada según el modelo Spring-Mass.
2. Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado.
3. Implementación del método Runge-Kutta de orden 4.
4. Con los resultados obtenidos del cálculo numérico, simular las vibraciones longitudinales del sistema en el entorno de Matlab.

ANTECEDENTES

APPLICATIONS OF SPRING-MASS MODEL ON CRYSTALLINE LATTICES

Applications of Spring-Mass Model on Crystalline Lattices

Roberto Augusto Del Carpio Minaya
Programa de Doctorado en Computación
Universidad Nacional del Altiplano (UNAP)
Puno, Perú
Email: rdelcarpio1969@hotmail.com

Yalmar Ponce Atencio
Programa de Doctorado en Computación
Universidad Nacional del Altiplano (UNAP)
Puno, Perú
Email: yalmar@gmail.com

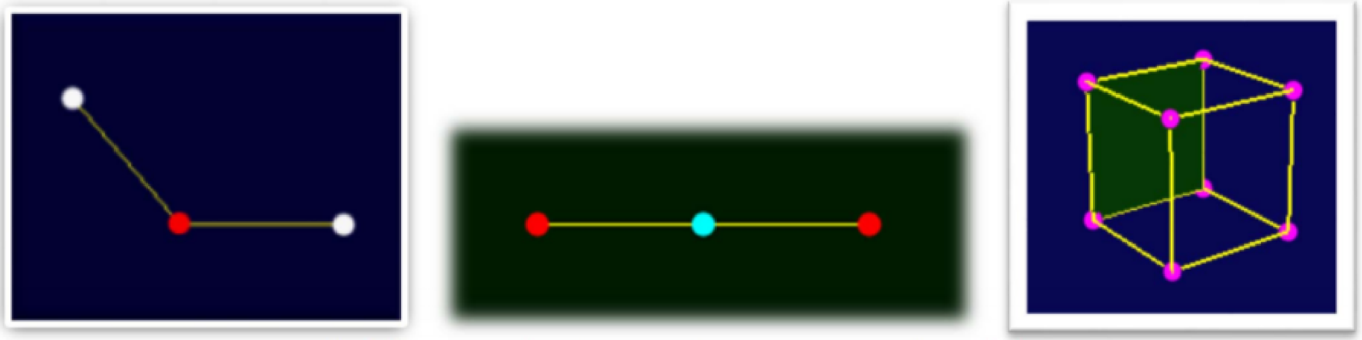


Fig. 1. Distintos tipos de configuraciones de masas propuestos para la simulación.

Abstract **– In this work we present a study of different one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional arrangements of masses coupled by springs, to which are made to vibrate by small oscillations, achieving a vibration over the entire systeml called "mode of vibration". To achieve the vibrations, the model Spring-Mass is used, that is a proposed mathematical-physical model by using systems of linear differential equations of second degree with constant coefficients, considering the forces applied to the masses as linear-elastic restitution forces with small displacements. Then the system is discretized and solved numerically by using the Euler-Cromer integration method.**

las vibraciones de la carrocería de un vehículo, en estructuras de concreto, en estructuras metálicas, en el hardware de los computadores y en la vibración de moléculas.

Un tipo de vibración muy especial es el llamado Movimiento Armónico Simple (MAS), que se caracteriza principalmente por realizar pequeños desplazamientos proporcionales a la aceleración. Con este MAS se puede implementar un modelo físico matemático llamado Spring-Mass (Masa-Resorte) que consiste en colocar en los extremos de uno o varios resortes, masas intercaladas a manera de una red interconectada, de tal manera que al hacer vibrar una de las masas, esta vibración se propague en toda la estructura,

OSCILACIONES Y ONDAS

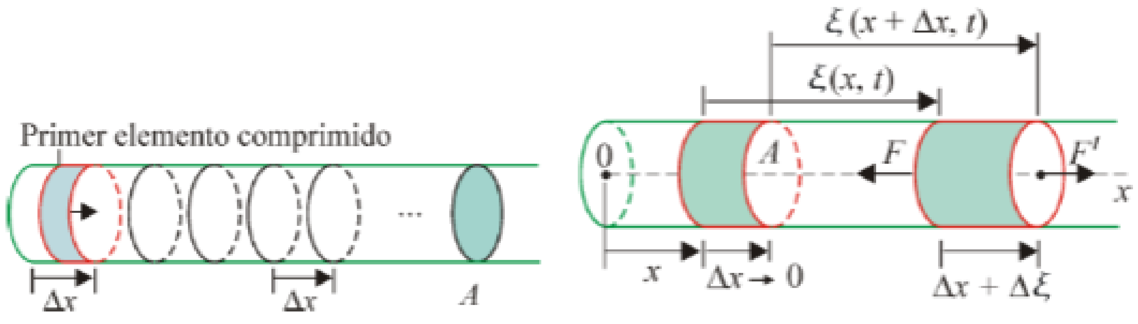
Oscilaciones y Ondas

Alicia Guerrero de Mesa

Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá

FUNDAMENTO TEORICO

- ***Oscilaciones longitudinales en una barra***



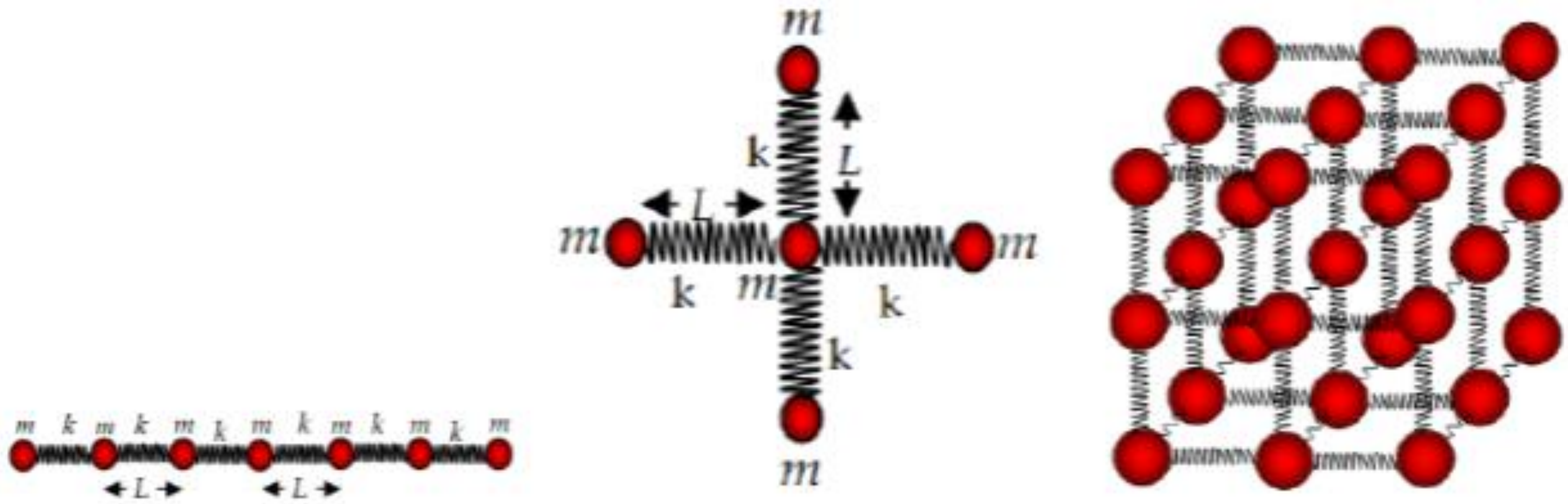
(a) Barra divida en elementos de volumen. (b) Deformación de un elemento.

Figura 1: Esquema de las oscilaciones longitudinales en una barra.

Fuente: H. Alzate López, Física de las ondas. Universidad de Antioquia, 2007.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$



(a) Arreglo unidimensional. (b) Arreglo bidimensional. (c) Arreglo tridimensional.

Figura 2: Arreglo espacial de masas de una barra, placa y cubo por medio del modelo Spring-Mass.

Fuente: R. A. Del Carpio Minaya and Y. P. Atencio, “Applications of spring-mass model on crystalline lattices,”2017 43rd Latin American Computer Conference,CLEI 2017, vol. 2017-Janua, pp. 1–8, 2017

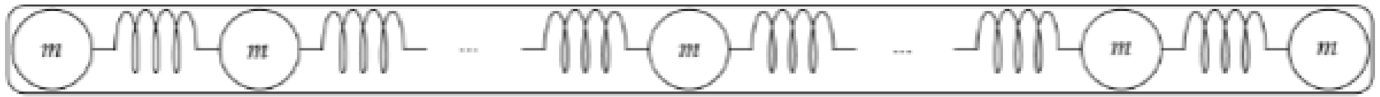
MODELO SPRING-MASS

APLICACIONES DEL MODELO SPRING-MASS

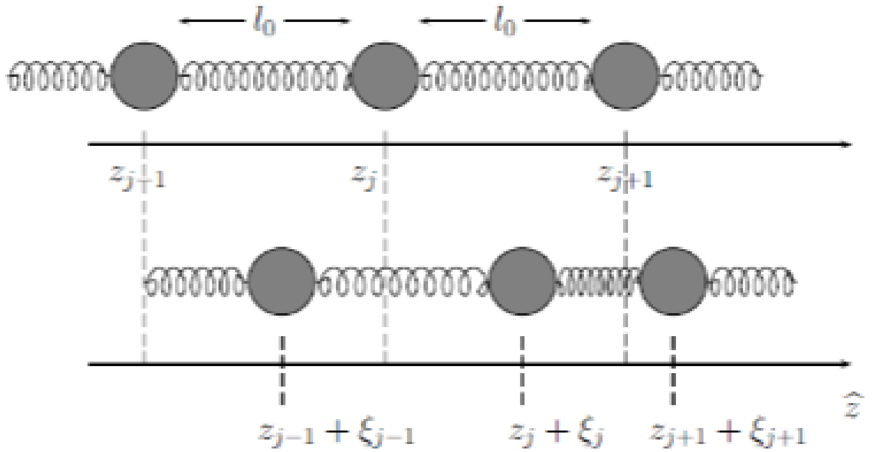
BIOMECANICA: LOCOMOCION HUMANA A LA ROBOTICA

SIMULACION GRAFICA: TELA EN MOVIMIENTOY MOVIMIENTO DEL CABELLO HUMANO

FISICA DEL ESTADO SOLIDO: RED CRISTALINA



(a) Discretización de una barra delgada por el modelo Spring-Mass.



(b) Análisis del desplazamiento de las masas acopladas por resorte.

$$m\ddot{\xi}_i - k(\xi_{i+1} - \xi_i) + k(\xi_i - \xi_{i-1}) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

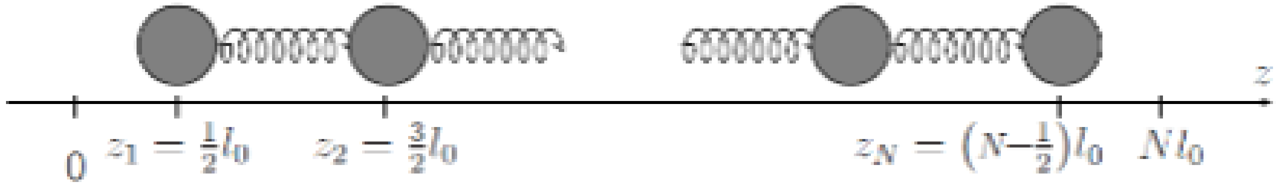
Figura 3: Aplicación del modelo Spring-Mass en el análisis de las oscilaciones longitudinales de una barra delgada.

Fuente: Guerrero de Mesa, Oscilaciones Y Ondas. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia Sede, 2005.

OSCILACIONES LONGITUDINALES EN UNA BARRA POR MEDIO DEL MODELO SPRING-MASS

OSCILACIONES EN UNA RED DE MASAS ACOPLADAS POR RESORTES

(a) Coordenadas de equilibrio en red de masas con extremos fijos.



(b) Coordenadas de equilibrio en red de masas con extremos libres.

Figura 4: Red unidimensional de masas acopladas por resortes.

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 &= -\frac{k}{m}\xi_1 + \frac{k}{m}(\xi_2 - \xi_1) \\ \ddot{\xi}_i &= -\frac{k}{m}(\xi_i - \xi_{i-1}) + \frac{k}{m}(\xi_{i+1} - \xi_i), \quad i = 2, 3, \ldots, N-1 \\ \ddot{\xi}_N &= -\frac{k}{m}(\xi_N - \xi_{N-1}) - \frac{k}{m}\xi_N \end{cases}$$

Fuente: Guerrero de Mesa, Oscilaciones Y Ondas. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia Sede, 2005.

METODO RUNGE-KUTTA ORDEN 4

Algoritmo del Método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4)

ENTRADA puntos finales a, b; número de ecuaciones m; entero N; condicional inicial α_1, ... α_m
SALIDA Aproximaciones w_i a $u_i(t)$ en $(N + 1)$ evaluado en t
Paso 1 Defino $h = (b - a)/N$;
$t = a.$
Paso 2 For $j = 1, 2, \dots, m$ set $w_i = \alpha_j$
Paso 3 SALIDA $(t, w_1, w_2, \dots, w_m)$.
Paso 4 **For** Para $i = 1, 2, \dots, N$ hacer pasos 5-11
Paso 5 **For** $j = 1, 2, \dots, m$ set
$k_{1,j} = hf_j(t, w_1, w_2, \dots, w_m)$
Paso 6 **For** $j = 1, 2, \dots, m$ set
$k_{2,j} = hf_j(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, w_m + \frac{1}{2}k_{1,m})$
Paso 7 **For** $j = 1, 2, \dots, m$ set
$k_{3,j} = hf_j(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, w_m + \frac{1}{2}k_{2,m})$
Paso 8 **For** $j = 1, 2, \dots, m$ set
$k_{4,j} = hf_j(t + h, w_1 + k_{3,1}, w_2 + k_{3,2}, \dots, w_m + k_{3,m})$
Paso 9 **For** $j = 1, 2, \dots, m$ set
$w_j = w_j + (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j})/6.$
Paso 10 t = a + ih.
Paso 11 SALIDA $(t, w_1, w_2, \dots, w_m)$
Paso 12 STOP.

METODOLOGIA

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 = & \dfrac{k}{m}(\xi_2 - \xi_1) \\ \ddot{\xi}_i = & \dfrac{k}{m}(\xi_{i-1} - 2\xi_i + \xi_{i+1}); \quad i = 2, 3, \ldots, N-1 \\ \ddot{\xi}_N = & \dfrac{k}{m}(\xi_{N-1} - \xi_N) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y_{i1} & = & \xi_i \\ y_{i2} & = & y'_{i1} \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} y'_{i1} & = y_{i2}; \quad i = 1, 2, \ldots, N \\ y'_{12} & = \dfrac{k}{m}(y_{21} - y_{11}) \\ y'_{i1} & = \dfrac{k}{m}(y_{i-1,1} - 2y_{i1} + y_{i+1,1}); \quad i = 2, 3, \ldots, N-1 \\ y'_{N2} & = \dfrac{k}{m}(y_{N-1,1} - y_{N1}) \end{cases}$$

Código 1: Condición inicial de deformación aleatoria de la red.

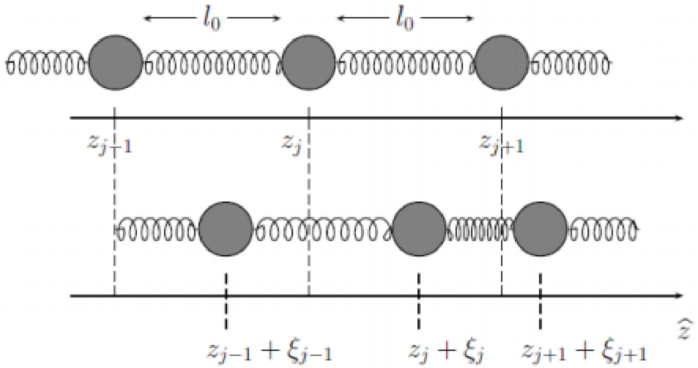
```
alpha(:,1) = -L0/2 + L0*rand(N,1);
```

Código 2: Condición inicial de tracción desde los extremos de la red

```
if(mod(N,2)==0)
    alpha(1:N/2,1) = -L0/2;
    alpha(N/2+1:N,1) = L0/2;
else
    alpha(1:(N-1)/2,1) = -L0/2;
    alpha((N+1)/2,1) = 0;
    alpha((N+1)/2+1:N,1) = L0/2;
end
```

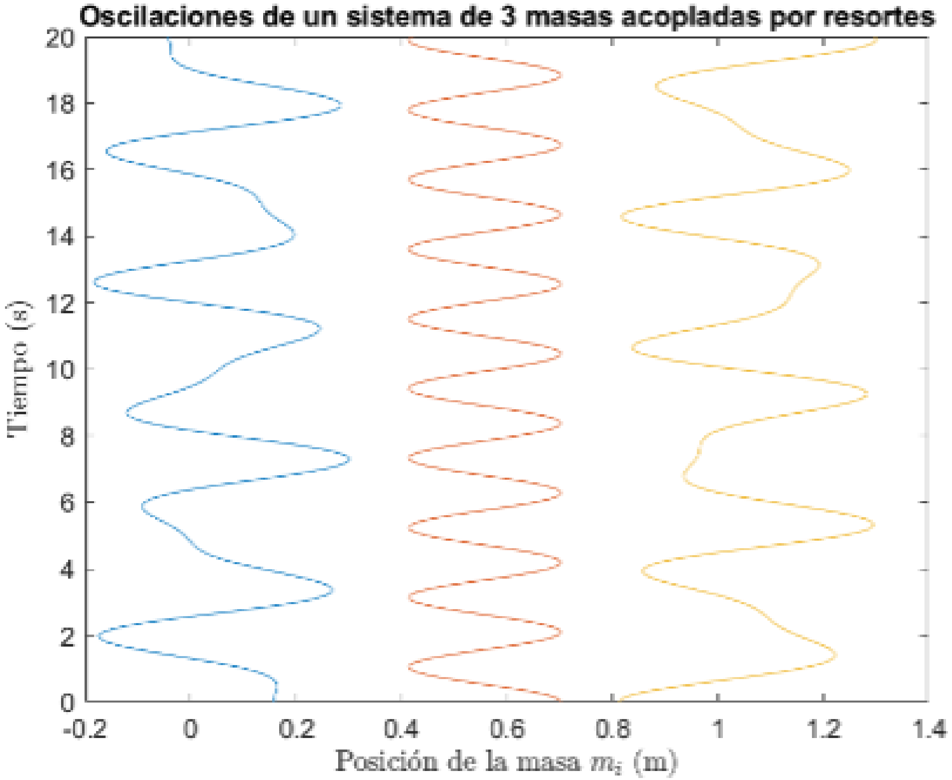
Código 3: Condición inicial de compresión desde los extremos de la red.

```
if(mod(N,2)==0)
    alpha(1:N/2,1) = L0/2;
    alpha(N/2:N,1) = -L0/2;
else
    alpha(1:(N-1)/2,1) = L0/2;
    alpha((N+1)/2,1) = 0;
    alpha((N+1)/2+1:N,1) = -L0/2;
end
```

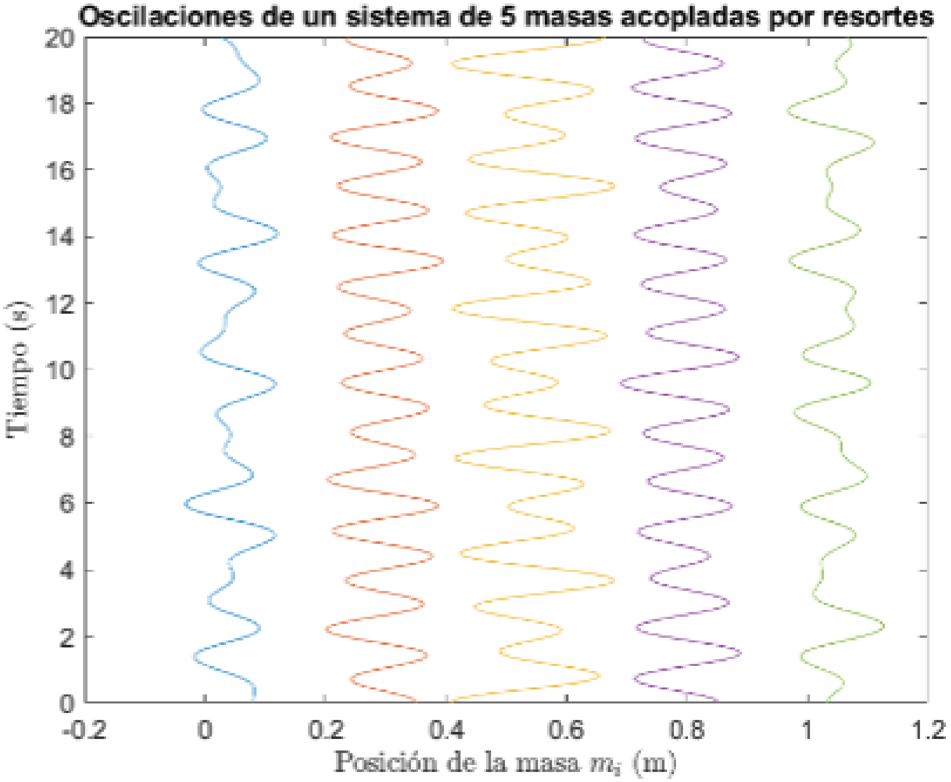


RESULTADOS

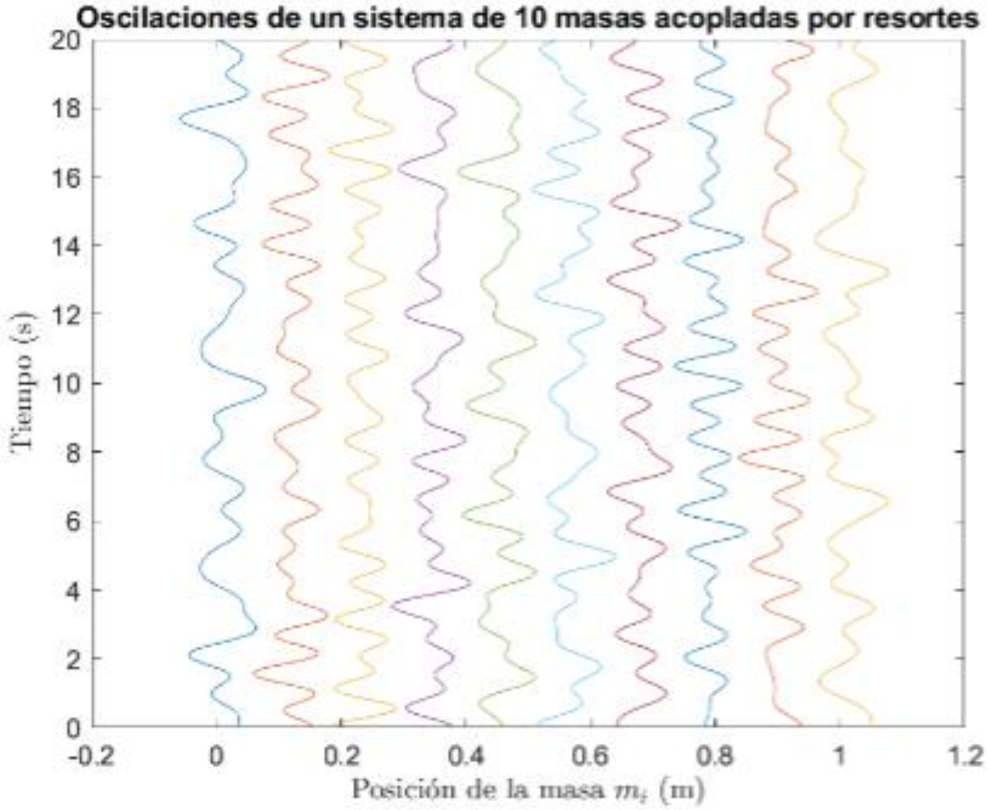
Resultados en 1D



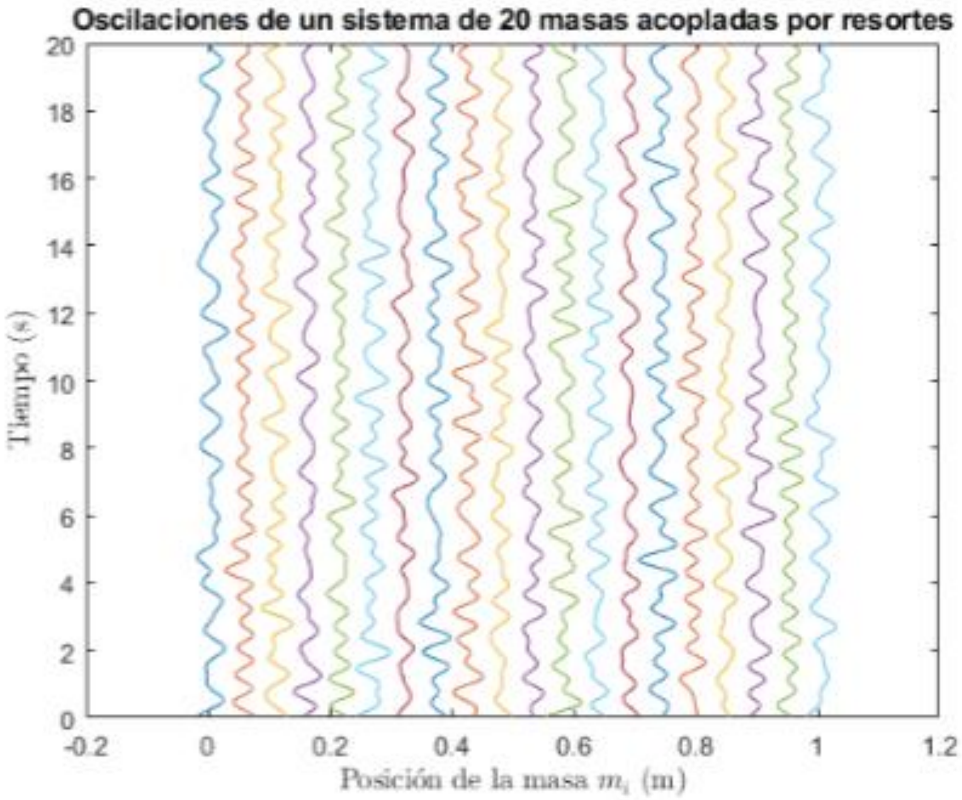
(a) Tiempo de ejecución: 820.7 segundos (13 minutos).



(b) Tiempo de ejecución: 2070.8 segundos (35 minutos).

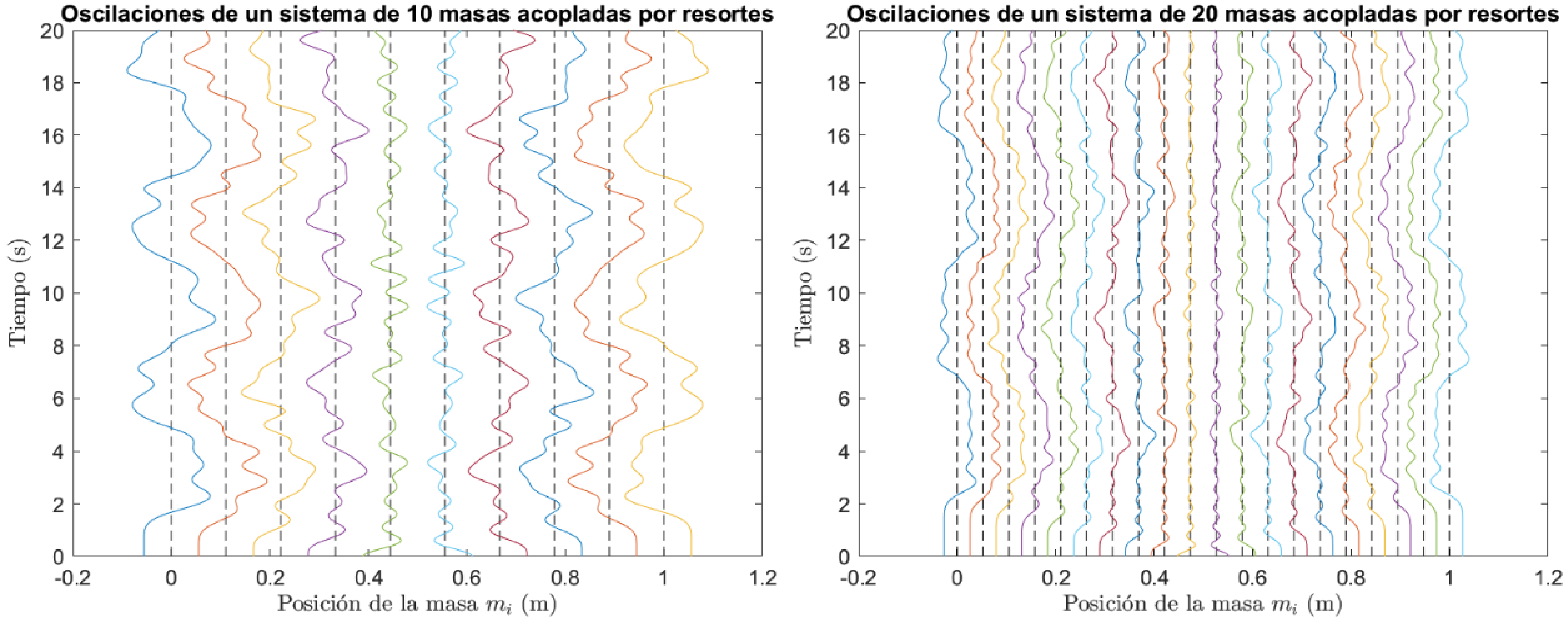


(c) Tiempo de ejecución: 2826.4 segundos (47 minutos).



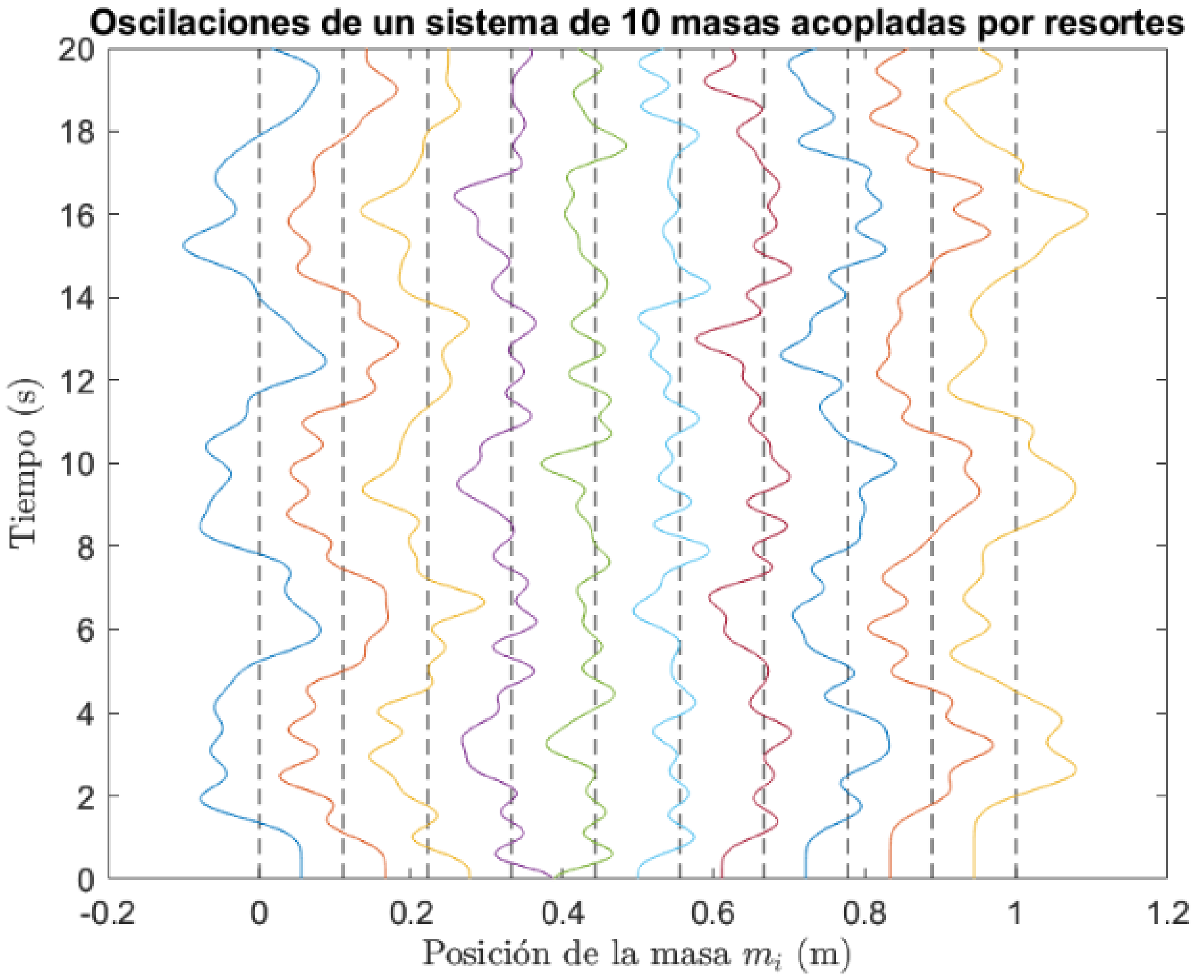
(d) Tiempo de ejecución: 11535.4 segundos (3 horas).

RESULTADOS EN 1D

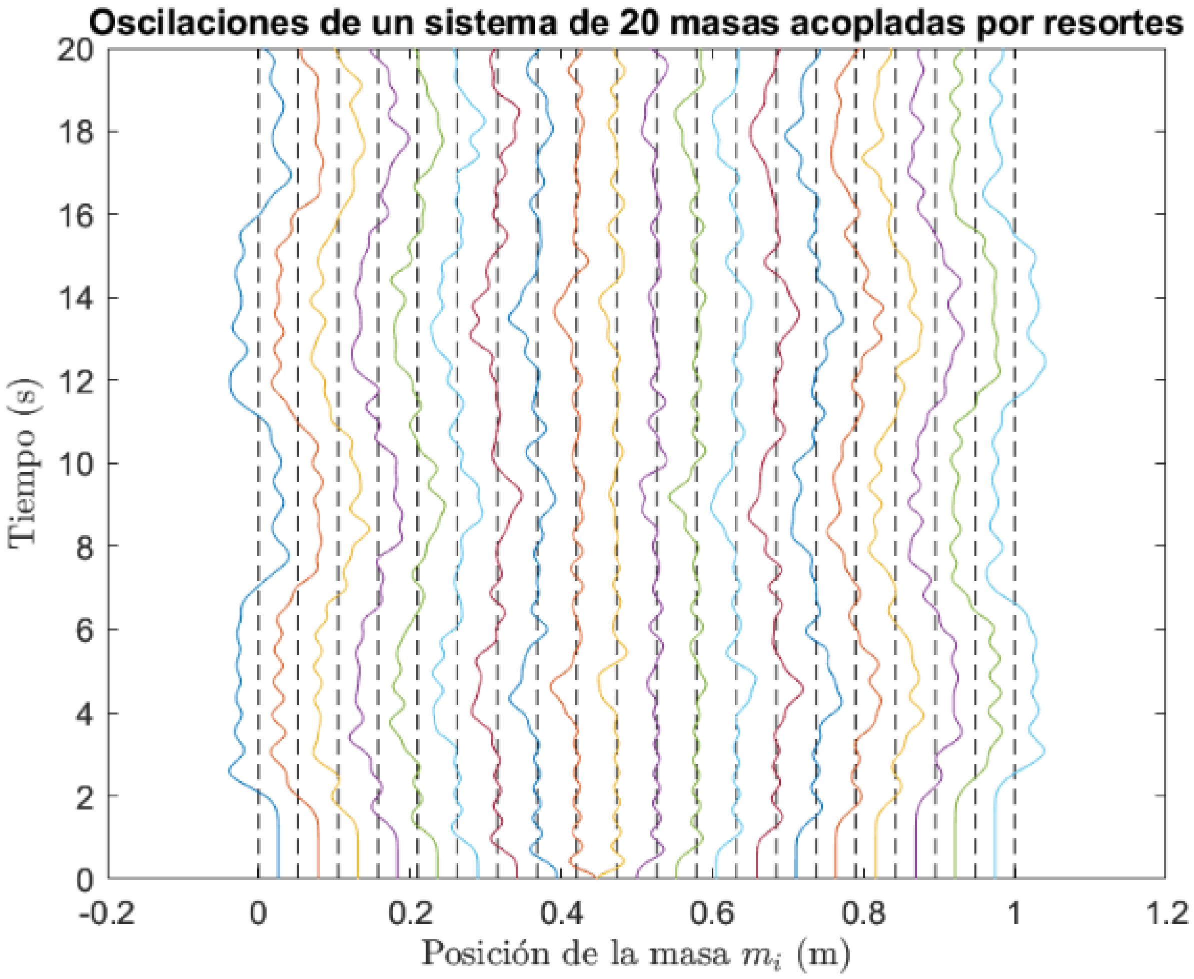

Oscilaciones de un sistema de 10 masas acopladas por resortes
Tiempo (s)
Posición de la masa m_i (m)
Oscilaciones de un sistema de 20 masas acopladas por resortes
Tiempo (s)
Posición de la masa m_i (m)

(a)

(b)


Oscilaciones de un sistema de 10 masas acopladas por resortes
Tiempo (s)
Posición de la masa m_i (m)

(a)


Oscilaciones de un sistema de 20 masas acopladas por resortes
Tiempo (s)
Posición de la masa m_i (m)

(b)

OSCILACIONES DE UNA MALLA DE MASAS ACOPLADAS POR RESORTES

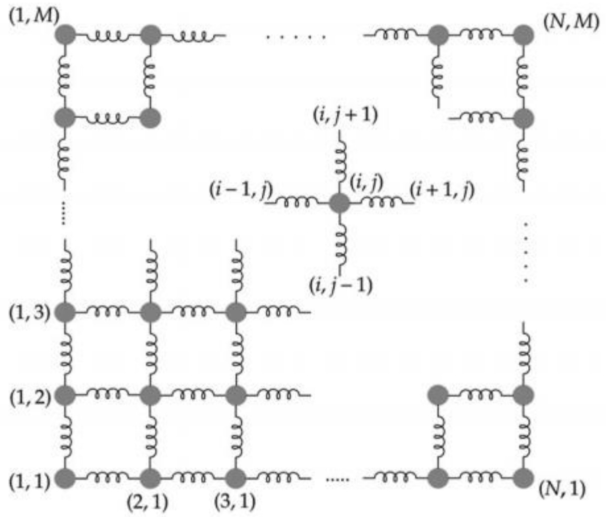


Figura 5: Red bidimensional de masas acopladas por resortes. Fuente: Elaboración propia.

Para oscilaciones horizontales (eje x)

$$\begin{cases} \ddot{x}_{i,j} = -\frac{k}{m}(x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}); & donde\ i = 2,3,4\ y\ j = 1,2,3,4,5 \\ \ddot{x}_{1,j} = \frac{k}{m}(x_{2,j} - x_{1,j}); & donde\ j = 1,2,3,4,5; \\ \ddot{x}_{5,j} = \frac{k}{m}(x_{4,j} - x_{5,j}); & donde\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

Para oscilaciones verticales (eje y)

$$\begin{cases} \ddot{y}_{i,j} = -\frac{k}{m}(y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j} - 1); & donde\ i = 2,3,4,5\ y\ j = 1,2,3,4 \\ \ddot{y}_{i,1} = \frac{k}{m}(y_{i,2} - y_{i,1}); & donde\ i = 1,2,3,4,5 \\ \ddot{y}_{i,5} = \frac{k}{m}(y_{i,4} - y_{i,5}); & donde\ i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

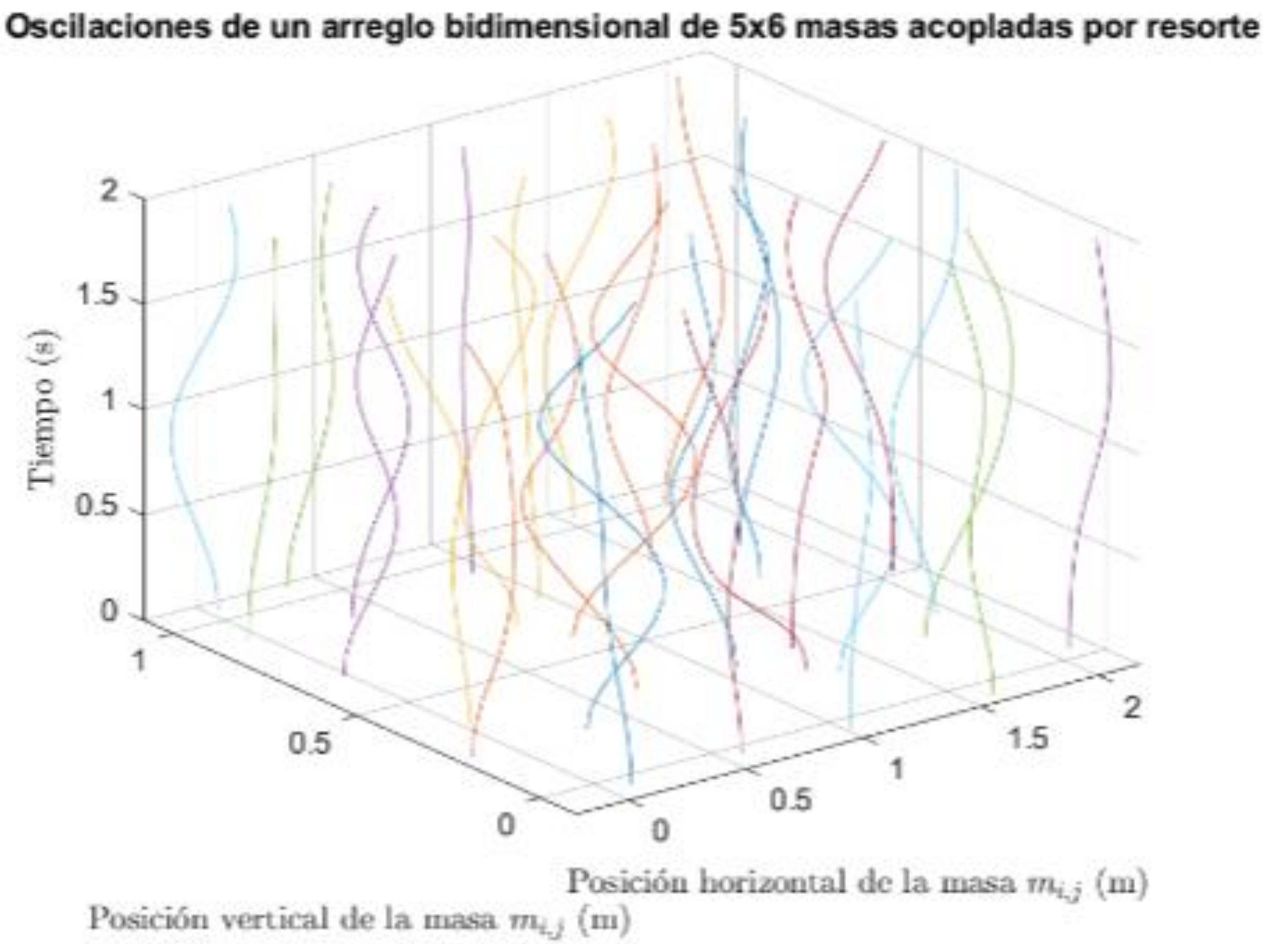
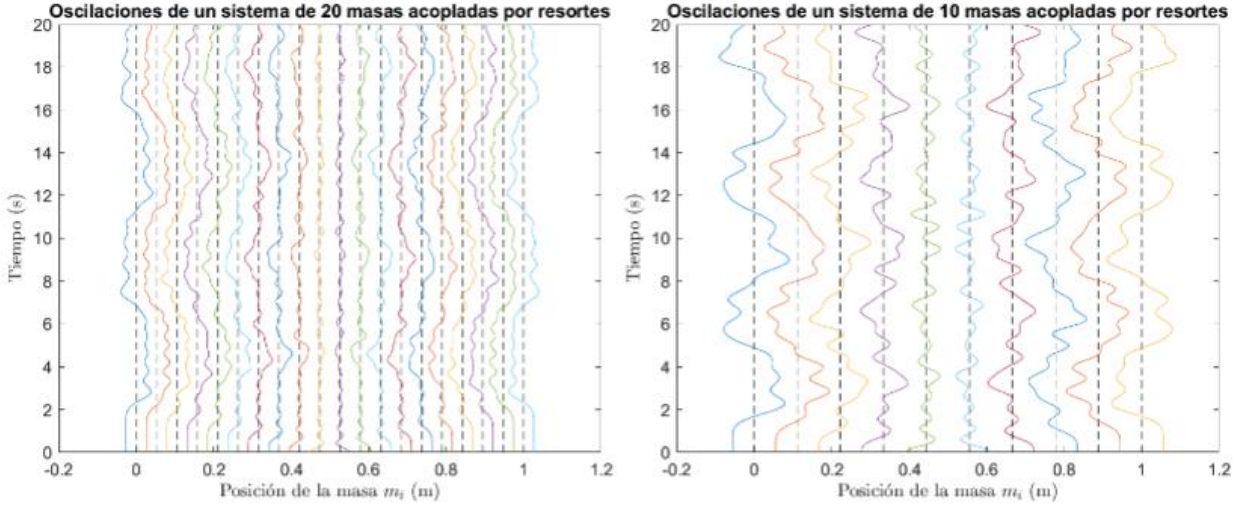


Figura 9: Tiempo de compilación: 2082.6 segundos (35 min).

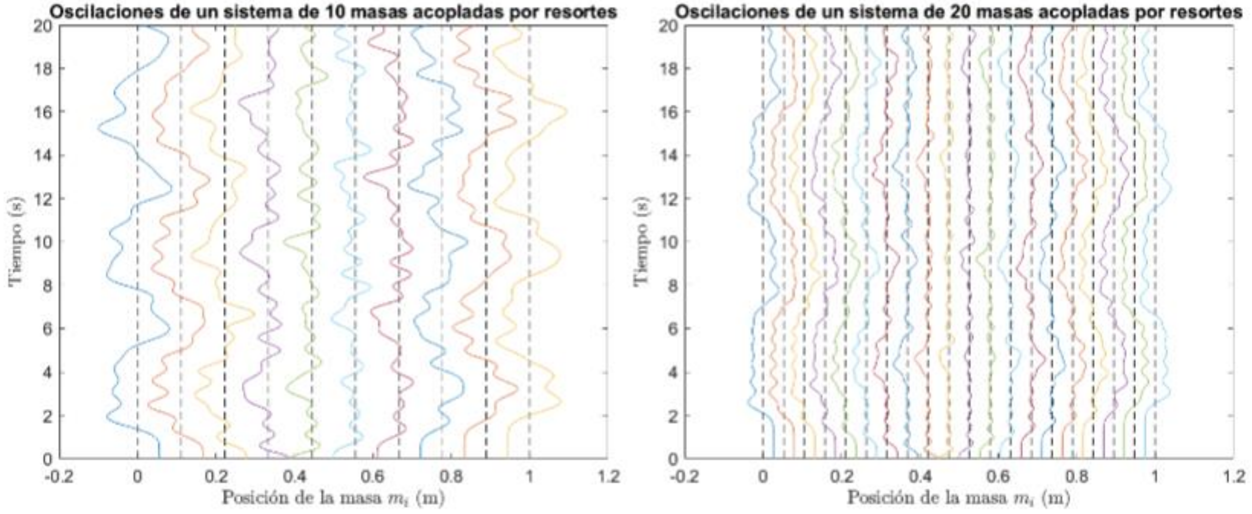
CONCLUSIONES

- Se realiza el arreglo unidimensional correspondiente a la discretización de la barra a partir del cual se analiza las oscilaciones longitudinales de las masas y se encuentra el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado. Posteriormente se plantea el problema de valor inicial, obteniendo el sistema el cual es implementado en el pseudoc´odigo de Runge-Kutta orden 4 para resolver el sistema en el entorno de Matlab. Se realiza el arreglo unidimensional correspondiente a la discretización de la barra a partir del cual se analizadas oscilaciones longitudinales de las masas y se encuentra el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado.



(a) (b)

Figura 7: Oscilaciones longitudinales en un arreglo unidimensional de masas acopladas por resorte con condiciones iniciales de tracción desde los extremos.



(a) (b)

Figura 8: Oscilaciones longitudinales en un arreglo unidimensional de masas acopladas por resorte con condiciones iniciales de compresión desde los extremos.

CODIGO ENMATLAB PARA LAS OSCILACIONES LONGITUDINALES DE UNA RED1D

```
clear
tic
%%Datos de entrada:
    %Intervalo de tiempo [a,b]
    a = 0; %(s)
    b = 20; %(s)
    %N mero de masas
    N = 5;
    %Constante del resorte k, masa total M, longitud total L
    k =1; %(N/m)
    M = 1; %(kg)
    L = 1; %(m)
    %Incremento
    h=0.1; %(s)

%%Par metros auxiliares
n = 2*N; %N mero de EDOs de primer orden
iter = (b-a)/h; %N mero de iteraciones
m = M/N; %Masa individual
L0 = L/(N-1); %Longitud individual de cada resorte

%%Definiendo las funciones f
syms 'y%d' [N 2]
g(:,1) = y(:,2);
g(N+1,1) = (k/m).*(y21 - y11);%-(k/m)*y11;% T rmino para extremo inicial fijo
for i = 2:N-1
    g(N+i,1) = (k/m).*(y(i-1,1) - 2*y(i,1) + y(i+1,1));
end
g(n,1) = (k/m).*(y(N-1,1) - y(N,1));%-(k/m)*y(N,1);% T rmino para extremo final fijo

f = cell(n,1);
for i=1:n
    f{i} = symfun(g(i),[y(:,1); y(:,2)]);
end
varY = [y(:,1); y(:,2)]; %Contiene todas las variables y_ij
clearvars y*

%%Asignando condiciones iniciales
    %Inicializando la matriz t e y
    t = zeros(iter,1);
    w = zeros(n,iter);
    %Instante inicial
    t(1) = a;

    %Condiciones iniciales w(0) = alpha, w'(0) = beta
    alpha(:,1) = -L0/2 + L0*rand(N,1); %Deformaci n aleatoria
```

```matlab

%       if(mod(N,2)==0)  %Condicion de traccion en ambos extremos
%           alpha(1:N/2,1) = -L0/2;
%           alpha(N/2+1:N,1) = L0/2;
%       else
%           alpha(1:(N-1)/2,1) = -L0/2;
%           alpha((N+1)/2,1) = 0;
%           alpha((N+1)/2+1:N,1) = L0/2;
%       end

    if(mod(N,2)==0)  %Condicion de compresion en ambos extremos
        alpha(1:N/2,1) = L0/2;
        alpha(N/2:N,1) = -L0/2;
    else
        alpha(1:(N-1)/2,1) = L0/2;
        alpha((N+1)/2,1) = 0;
        alpha((N+1)/2+1:N,1) = -L0/2;
    end


    beta(:,1) = zeros(N,1);  %Comienza del reposo
    for i = 1:N
        w(i,1) = alpha(i);
        w(i+N,1) = beta(i);
    end
%%Implementaci n del algoritmo de Runge-Kutta orden 4
k1 = zeros(n,1);
k2 = zeros(n,1);
k3 = zeros(n,1);
k4 = zeros(n,1);
for j=1:iter
    for i=1:n
        k1(i,1) = h*subs(f{i},varY,w(:,j));
    end
    for i=1:n
        k2(i,1) = h*subs(f{i},varY,w(:,j)+k1(:)/2);
```

```
    end
    for i=1:n
        k3(i,1) = h*subs(f{i},varY,w(:,j)+k2(:)/2);
    end
    for i=1:n
        k4(i,1) = h*subs(f{i},varY,w(:,j)+k3(:));
    end
    w(:,j+1) = w(:,j) + (1/6)*(k1(:) + 2*k2(:) + 2*k3(:) + k4(:));
    t(j+1) = t(1) + j*h;
end
w = w';

%%Transformaci n de la deformaci n w a coordenada posici n z
z = zeros(size(w,1),size(w,2)/2); % Posici n de cada masa
Vz = zeros(size(w,1),size(w,2)/2); % Velocidad de cada masa
for i=1:size(w,1)
    for j=1:N
        z(i,j) = (j-1)*L0 + w(i,j);
        Vz(i,j) = w(i,N+j);
    end
end
%%Visualizaci n mediante gr ficas
figure(1)
```

```
figure(1)
for i=1:N
    plot([(i-1)*L0 (i-1)*L0],[a b],'k--') % Posicion de equilibrio de las
    %masas, no es valido para condiciones iniciales aleatorias
```

```
    hold on
    plot(z(:,i),t)
end
hold off
% xlim([-0.05 1.2])
% ylim([0.0 20.0])
xlabel(Posición de la masa m_i (m),'Interpreter',latex);
ylabel('Tiempo (s)','Interpreter',latex);
title(['Oscilaciones de un sistema de ',num2str(N),' masas acopladas por resortes'])
toc
```

CODIGO EN MATLAB PARA LAS OSCILACIONES LONGITUDINALES DE UNA RED2D

```
clear
%%Datos de entrada para la funcion dise ada:
    %Intervalo de tiempo [a,b]
    a = 0;  %(s)
    b = 2;  %(s)
    %Numero de masas horizontales
    N = 5;
    %Numero de masas verticales
    M = 6;
    %Constante del resorte k, masa total M, longitud total L
    k =1;  %(N/m)
    Mt = 1;  %(kg)
    Lx = 2;  %(m)
    Ly = 1;  %(m)
    %Incremento
    h=0.1;  %(s)
%%Parametros auxiliares
Lx0 = Lx/(N-1);  %Longitud individual de cada resorte en x
Ly0 = Ly/(M-1);  %Longitud individual de cada resorte en y
x = cell(N,M);  y = cell(N,M);  %inicializando variables
%%Procedimiento
%Resolucion de las oscilaciones en el eje x para un determinado j
for j=1:M
    [t, z, Vz] = SEDO_red1D(a,b,N,k,Mt,Lx,h);
    for i=1:N
        x{i,j} = z(:,i);
    end
end
%Resolucion de las oscilaciones en el eje y para un determinado i
for i=1:N
    [t, z, Vz] = SEDO_red1D(a,b,M,k,Mt,Ly,h);
    for j=1:M
        y{i,j} = z(:,j);
    end
```

```
            y{i,j} = z(:,j);
        end
end
toc
%%Visualizacion de las vibraciones bidimensionales
for i=1:N
    for j=1:M
        plot3(x{i,j},y{i,j},t)
        hold on
    end
end
hold off
grid on
xlabel(Posición horizontal de la masa $m_{i,j}$ (m),'Interpreter',latex);
ylabel(Posición vertical de la masa $m_{i,j}$ (m),'Interpreter',latex);
zlabel('Tiempo (s)','Interpreter',latex);
title(['Oscilaciones de un arreglo bidimensional de ',num2str(N),'x',num2str(M),'
    masas acopladas por resortes'])
```