



### ESCUELA DE INGENIERIA FISICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS PERFIL DE PROYECTO

#### 1. DATOS GENERALES

##### 1.1 TITULO DEL PROYECTO

Análisis numérico de las vibraciones en una estructura mediante el modelo masa-resorte

##### 1.2 ASIGNATURA

Curso	Cálculo Numérico II (IF-392A)
Profesor	Solano Salinas, Carlos Javier
E-mail	<a href="mailto:jsolano@uni.edu.pe">jsolano@uni.edu.pe</a>

##### 1.3 INTEGRANTES

Alumno	Rosadio Vega, Germain
Código UNI	20171304I
Teléfono	997813640
E-mail	<a href="mailto:grosadiov@uni.pe">grosadiov@uni.pe</a>

Alumno	Miranda Ticse, Katherine
Código UNI	20172742J
Teléfono	956306623
E-mail	<a href="mailto:kmirandat@uni.pe">kmirandat@uni.pe</a>

Alumno	Jara Meza, Javier
Código UNI	20172718A
Teléfono	980495997
E-mail	<a href="mailto:jjara@uni.pe">jjara@uni.pe</a>

##### Publicaciones relacionadas al tema

- 1) “Applications of Spring-Mass Model on Crystalline Lattices”
- 2) “Methodology to solve Mass-Spring-Dashpot (MSD) models through global optimization algorithms”  
**Revista UIS Ingenierías- Año: 2019.**
- 3) “Dinámica estructural – modelo Interactivo con Matlab’



**ESCUELA DE INGENIERIA FISICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS  
PERFIL DE PROYECTO**

## **2 PROYECTO EN EXTENSO**

### **2.1 RESUMEN DEL PROYECTO Y PALABRAS CLAVES**

Existen diversos métodos para el análisis de las vibraciones que tienen lugar en alguna estructura sólida, unos más complejos que otros. Entre estos se encuentra el modelo de masa-resorte, o en inglés Spring-Mass Model, el cual consiste en la discretización de un medio continuo a un sistema equivalente de masas acopladas mediante resortes en un arreglo tridimensional.

Para realizar el análisis de este modelo es necesario plantear el sistema de ecuaciones diferenciales que rigen dichas oscilaciones, así como sus condiciones iniciales o de contorno (es decir un Problema de Valor Inicial); por lo tanto, estas ecuaciones deben ser resueltas para encontrar el modo de vibración de la estructura, pero al ser sistemas de miles de variables, resulta un trabajo y tiempo inmenso el resolverlas analíticamente. Dicho sistema de EDOs puede ser resuelto numéricamente mediante un algoritmo elaborado en algún lenguaje de programación especializado para tales cálculos. Este trabajo se enfoca en resolver numéricamente el sistema de EDOs que describen las vibraciones de una estructura sólida.

*Palabras clave: Métodos numéricos, modelo masa-resorte, Runge-Kutta orden 4, vibraciones.*

### **2.2 OBJETIVO GENERAL Y OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

#### **GENERAL**

- Modelar un arreglo espacial de masa-resorte de acuerdo con la geometría y las propiedades físicas de una estructura continua.
- Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias del arreglo espacial de masa-resorte por métodos numéricos.

#### **ESPECÍFICO**

- Plantear el Problema de Valor Inicial del arreglo espacial de masa-resorte de una estructura.
- Diseñar e implementar un código en MATLAB que resuelva el PVI del sistema masa-resorte mediante el método de Runge-Kutta de orden 4.
- Con los resultados obtenidos se buscará simular las vibraciones de la estructura con determinadas perturbaciones.



**ESCUELA DE INGENIERIA FISICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS  
PERFIL DE PROYECTO**

**2.3 ANTECEDENTES DEL TRABAJO**

**Applications of Spring-Mass Model on Crystalline Lattices[1]**

Al realizar la simulación unidimensional, se configura la molécula lineal de Dióxido de Carbono ( $\text{CO}_2$ ), Ajustando adecuadamente las condiciones iniciales para la posición de los átomos se simuló gráficamente dos modos normales para esta molécula, el modo de vibración de tensión simétrica y el modo de tensión asimétrica (stretching).

Para la configuración bidimensional de la molécula de agua ( $\text{H}_2\text{O}$ ), Para las condiciones iniciales para la posición de los átomos se simuló gráficamente tres modos normales para esta molécula, el modo de vibración de tensión simétrica (stretching), el modo de vibración asimétrica (stretching) y el modo de vibración de flexión de tijera (bending).

Para la simulación tridimensional, se consideró la configuración del cristal cúbico de Plutonio (Pu) debido a que este elemento es el único que presenta esta configuración especial como arreglo cúbico en la naturaleza. Se simuló el modo de vibración de tipo “achataamiento” lateral y el modo de vibración de tipo “respiración”.

Es posible aplicar el modelo Spring-Mass al movimiento vibracional de una red de iones o red cristalina y analizar su movimiento en forma gráfica, considerando adecuadamente las posiciones iniciales de las masas. El poder visualizar las vibraciones con aproximación armónica mediante una animación gráfica permite entender mejor algunas características de los materiales y comprender mejor la física del estado sólido. El modelo puede ser modificado adecuadamente para la simulación de vibración de redes cristalinas complejas como el Cloruro de Sodio, el cristal Grafeno, el cristal de Silicio, etc.

**Methodology to solve Mass-Spring-Dashpot (MSD) models through global optimization algorithms[2]**

Los resultados mostraron que utilizar un algoritmo de optimización global, para determinar las frecuencias naturales en sistemas Masa Resorte Amortiguador, es una alternativa viable, ya que se logran resultados con una precisión promedio del 0,001 % con respecto a la solución teórica, y en poco tiempo de simulación (menos de 10 s), usando un computador personal típico. Para sistemas pequeños no se observó una ventaja evidente. Debido a que la inicialización del algoritmo se realiza de forma aleatoria, resultó muy ventajoso para la optimización, en la que no se conocían los puntos iniciales a priori. Finalmente, mediante la estrategia



### ESCUELA DE INGENIERIA FISICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS PERFIL DE PROYECTO

propuesta para la solución de sistemas MRA, el usuario puede concentrarse más en el análisis de los sistemas, y no en la resolución misma de las ecuaciones diferenciales, que en muchas ocasiones suele ser un trabajo rutinario.

#### 2.4 DESCRIPCION TÉCNICA Y METODOLOGÍA[3], [4]

Dado que muchos modelos o sistemas de la naturaleza se expresan a través de las ecuaciones diferenciales debido al cambio constante que sufren estas, es necesario entender, conocer y cómo interpretarlos para un análisis correcto. Las ecuaciones diferenciales las podemos interpretar de tres formas, las cuales son de forma analítica, cualitativa y numéricamente.

- Analíticamente: es la resolución matemática de ecuaciones a través de los símbolos lógicos matemáticos.
- Cualitativamente: es el análisis e interpretación de la ecuación en términos generalmente gráficos para conocer el comportamiento del fenómeno simulado
- Numéricamente: es el estudio de las ecuaciones diferenciales mediante la utilización de construcción de algoritmos computaciones para dar aproximaciones más exactas, mediante un trabajo computacional.

El análisis numérico es una herramienta muy valiosa en el campo de la ingeniería dado que permite la resolución de muchos problemas prácticos. Una forma de definir a los métodos numéricos podría ser como una técnica en la cual se formula un problema para, posteriormente, aplicando operaciones aritméticas menos complejas llegar a ser resuelto, otra forma de definir el análisis numérico en términos más “computacionales” sería como el grupo de conocimientos matemáticos relacionados con el diseño y análisis de algoritmos necesarios para resolver, mediante un trabajo computacional, problemas de ciencia e ingeniería.

#### Métodos de Runge-Kutta

son un conjunto de métodos genéricos iterativos, explícitos e implícitos, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Métodos desarrollados a partir del trabajo de los alemanes Carl David Tolmé Runge, 1856-1927, y Martin Wilhelm Kutta, 1867-1944. Este método es factible usarlo cuando el planteamiento del problema analítico es bastante complejo al usar herramientas matemáticas básicas, por consiguiente, este método, entre otros, constituirá las basases para la solución y simulación de problemas complejos utilizando un ordenador.



### ESCUELA DE INGENIERIA FISICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS PERFIL DE PROYECTO

El objetivo de los métodos numéricos de Runge-Kutta, es el análisis y solución de los problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), estos son una extensión del método de Euler para resolver las (EDO'S), pero con un orden de exactitud más alto que este.

#### Ventajas del método de Runge-Kutta

- logran la exactitud del procedimiento de una serie de Taylor sin requerir el cálculo de derivadas superiores.
- Suele usarse para mayos exactitud.
- Es fácil para su programación.

#### desventajas del método de Runge-Kutta

- Al aplicar el método, es necesario repetir muchas operaciones en la evaluación.
- El consumo de tiempo y costo es mayor que otros métodos.

El avance, de este método, se realiza mediante una expresión general como vemos a continuación

$$y_{i+1} = y_i + h\phi \quad (1)$$

Donde:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4 + \dots a_n k_n \quad (2)$$

donde los coeficientes  $a_i$  son unos pesos de aproximaciones  $k_i$  de las distintas derivadas por medio de la función  $f(t, y)$  evaluada en distintos puntos.

Los valores de las  $k_i$  se obtienen mediante unas fórmulas de este corte:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(t_i + p_n h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned}$$

Donde los valores de  $k_i$  depende de los  $k_{i-1}$  previamente hallados; y los coeficientes  $p_s$  y  $q_s$  son coeficientes numéricos que se calcularán imponiendo la condición de que el error sea del mismo orden que en el método de Taylor de orden similar

Aplicamos para este método para deducir la fórmula de Runge-Kutta de orden 2



### ESCUELA DE INGENIERIA FISICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS PERFIL DE PROYECTO

$$y_{i+1} = y_i + h\phi \quad (3)$$

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 \quad (4)$$

Donde  $k_1$  y  $k_2$  sería:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (5)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad (6)$$

Entonces  $y_{i+1}$  sería:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h \quad (7)$$

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 f(t_i, y_i) + a_2 f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)) h \quad (8)$$

$$y_{i+1} = y_i + f_i(a_1 + a_2)h + a_2(f_{ti}p_1 + f_{yi} \cdot f_i \cdot q_{11}k_1)h^2 \quad (9)$$

Luego desarrollando por el método de Taylor de segundo orden tenemos:

$$y_{i+1} = y_i + y'(t_i)h + \frac{h^2}{2!}y''(t_i) \quad (10)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2!}(f_{ti} + f_{ti} \cdot f_i) \quad (11)$$

Finalmente comparando la ecuación (11) y (9) se llega a estas tres ecuaciones con cuatro incógnitas en la que dando algunos valores  $a_2$  se obtiene los demás coeficientes.

$$a_2 + a_2 = 1 \quad (12)$$

$$a_2 a_2 = \frac{1}{2} \quad (13)$$

$$a_2 a_2 = \frac{1}{2} \quad (14)$$

De esta manera podemos hallar valores para fórmulas de Runge-Kutta de orden superior a 2  
Para orden 3

$$y_{i+1} = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f(t_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

Para orden 4

$$y_{i+1} = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3 h)$$



### ESCUELA DE INGENIERIA FISICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS PERFIL DE PROYECTO

#### 2.5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. A. Del Carpio Minaya and Y. P. Atencio, “Applications of spring-mass model on crystalline lattices,” *2017 43rd Lat. Am. Comput. Conf. CLEI 2017*, vol. 2017-Janua, pp. 1–8, 2017, doi: 10.1109/CLEI.2017.8226473.
- [2] K. Manuel Guerra, J. M. Cruz-Duarte, and C. R. Correa-Cely, “Metodología para la solución de modelos Masa-Resorte-Amortiguador(MRA) mediante algoritmos de optimización global,” *Rev. UIS Ing.*, vol. 18, no. 1, pp. 49–60, 2019, doi: 10.18273/revuin.v18n1-2019004.
- [3] S. C. C. y R. P. Canale, *Métodos numéricos para ingenieros*, 5ta ed. México: Mc Graw Hill, 2007.
- [4] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*, 9th ed. Cengage Learning, 2011.