Unidad 4: Vectores

Vectores en el plano $(\mathbb{R}^2)$

Definición algebraica de un vector

Un **vector** $\vec{v}$ en el plano xy es un par ordenado de números reales $(v_x; v_y)$.

Definición geométrica de un vector

El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina una *representación* del vector.

Par ordenado

$\vec{v} = (v_x; v_y)$

Forma Canónica

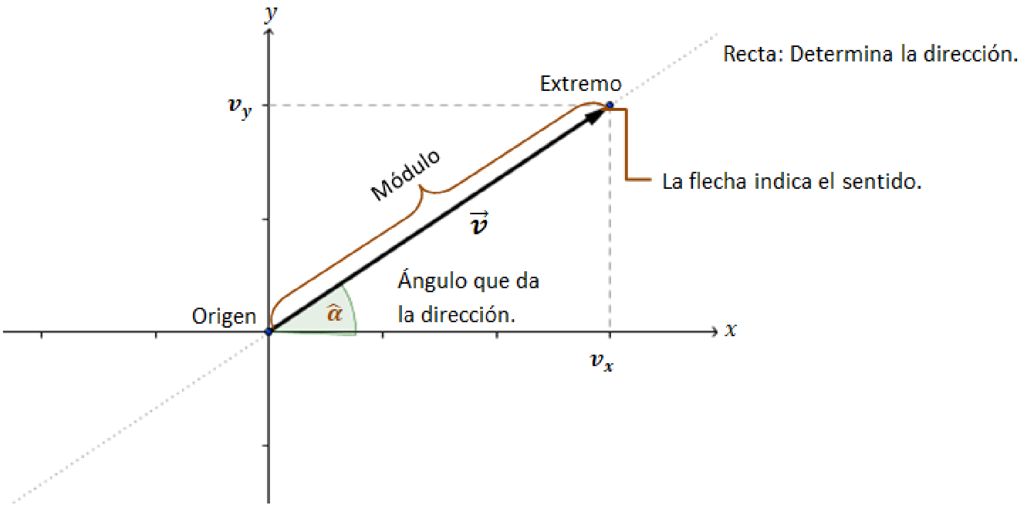
$\vec{v} = v_x\check{\imath}+v_y\check{\jmath}$

Módulo

$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$

Dirección

$tg\ \hat{\alpha} = \dfrac{v_y}{v_x}$



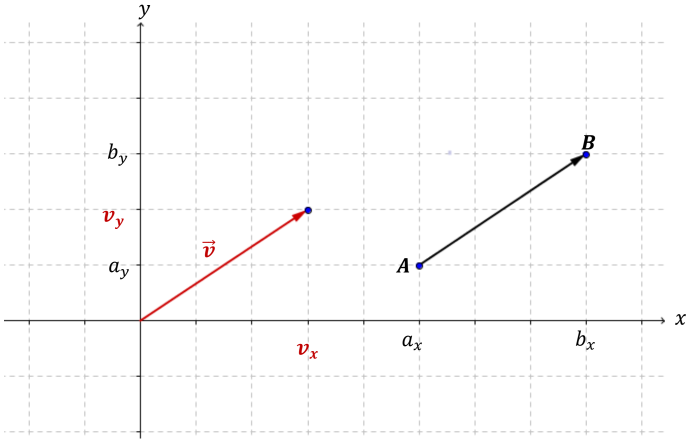
Componentes de un vector:

- **Módulo o Norma:** la longitud del segmento expresado en términos de un valor numérico y una unidad. La longitud del vector es proporcional a la magnitud que representa (escala). Por definición, el módulo del vector siempre es positivo.
- **Dirección:** la posición de la recta que contiene al vector, por ejemplo, si es horizontal, o vertical, o tiene cierta inclinación respecto a los ejes de referencia.
- **Sentido:** la orientación del segmento, del origen al extremo del vector. Por ejemplo, si es hacia arriba o hacia abajo, izquierda o derecha, etc. Para cada recta de acción habrá dos sentidos posibles.

Los vectores que están incluidos en rectas paralelas tienen igual dirección.

- Si dos vectores tienen igual módulo, dirección y sentido son **vectores equipolentes**.
- Si dos vectores tienen igual módulo, dirección y sentido contrario son **vectores opuestos**.
- Si el origen de un vector coincide con el extremo se lo denomina **vector nulo** ($\vec{v} = (\mathbf{0}; \mathbf{0})$).
- Si el módulo de un vector es igual a 1, se lo denomina **vector unitario o versor**.

Para trabajar con vectores, en un sistema de ejes cartesianos, se considera el origen del vector al origen de coordenadas. Para referir un vector al origen de coordenadas, se restan las componentes del extremo con las del origen.



$$\overrightarrow{AB}\begin{cases} A = (a_x; a_y) \\ B = (b_x; b_y) \end{cases}$$

$$\vec{v} = (v_x; v_y)$$

$$v_x = b_x - a_x$$

$$v_y = b_y - a_y$$

Álgebra de Vectores:

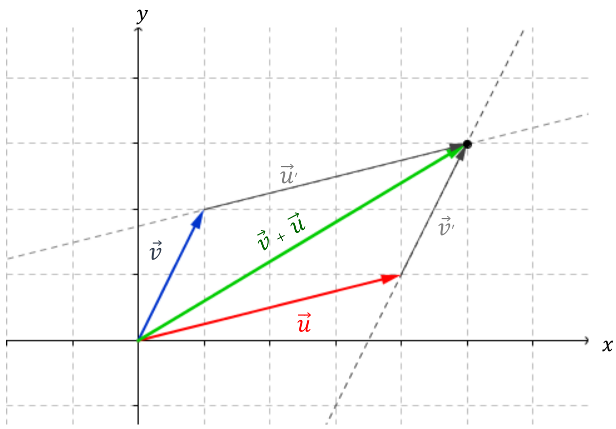
Adición:

Para sumar dos vectores, se procede de las siguientes maneras:

Analíticamente: La suma de dos vectores es igual a otro vector, donde sus componentes son la suma de las componentes de los vectores sumandos.

$$\vec{v} = (v_x; v_y) \text{ y } \vec{u} = (u_x; u_y) \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} = (v_x + u_x; v_y + u_y)$$

Gráficamente: Para realizar la suma de dos vectores se utiliza la "***regla del paralelogramo***", que consiste en dibujar los vectores con el origen en común; por el extremo de cada vector se traza la paralela al otro y se determina un paralelogramo. La diagonal del paralelogramo, con origen en el origen de los vectores, es el vector suma o resultante.



Propiedades:

1. Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
2. Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. Existencia de elemento neutro : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. Existencia de elemento opuesto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

↗ ***Sustracción***

Para restar dos vectores, se procede como en la suma, es decir, para obtener $\vec{v}-\vec{u}$, se procede a efectuar la operación $\vec{v}+(-\vec{u})$, obteniéndose así una suma de dos vectores.

↗ ***Producto de un vector por un escalar***

Si Multiplicamos un vector $\vec{v}$ por un número (escalar) α distinto de cero, obtenemos otro vector que tiene:

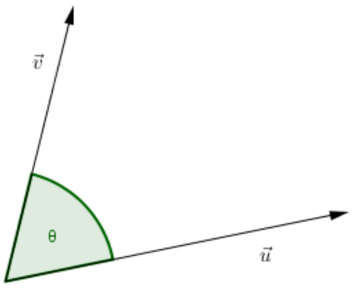
- La misma dirección que $\vec{v}$.
- Si α es positivo tiene el mismo sentido.
- Si α es negativo tiene sentido contrario.

$$\vec{v}=\left(v_x;v_y\right) \text{ y } \alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha.\vec{v}=(\alpha.v_x;\alpha.v_y)$$

Propiedades:

1. Distributividad respecto de la suma de vectores: $\alpha.(\vec{u}+\vec{v})=\alpha.\vec{u}+\alpha.\vec{v}$
2. Distributividad respecto de la suma de escalares: $(\alpha+\beta).\vec{u}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{u}$
3. Asociatividad mixta : $\alpha.(\beta.\vec{u})=(\alpha.\beta).\vec{u}$

↗ ***Producto escalar de dos vectores***



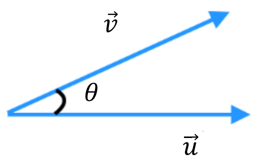
El producto escalar entre dos vectores da como resultado un número. El símbolo que usamos para expresar al producto escalar es " · "

El producto escalar permite averiguar analíticamente el ángulo θ determinado por dos vectores $\vec{v},\vec{u}$ no nulos.

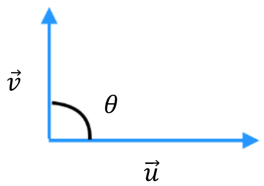
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\,.\,v_x+u_y.\,v_y$

Tipo de ángulos según el signo del producto escalar

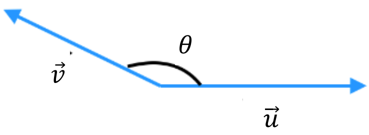
Si el producto escalar es **positivo**, entonces, el ángulo es **agudo**.



Si el producto escalar es **cero**, entonces, el ángulo es **recto (vectores perpendiculares)**



Si el producto escalar es **negativo**, entonces, el ángulo es **obtuso**.



Vectores en el espacio $(\mathbb{R}^3)$

Par ordenado

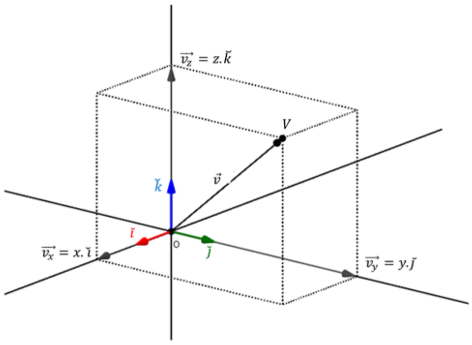
$\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$

Forma Canónica

$\vec{v} = v_x\check{\imath} + v_y\check{\jmath} + v_z\check{k}$

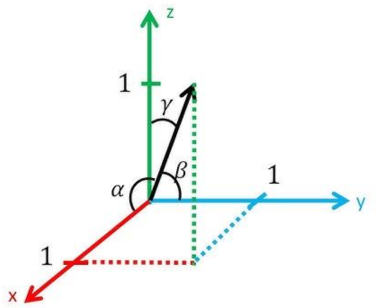
Módulo

$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$



Ángulos Directores

Se llaman ángulos directores de un vector a cada uno de los ángulos α, β, γ que forma con los ejes coordenados x, y, z.



$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

↗ *Producto vectorial entre vectores*

El producto vectorial entre vectores, es un vector perpendicular al plano determinado por los vectores.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \check{\imath} & \check{\jmath} & \check{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Propiedades:

Sea $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ y k un escalar:

1. $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ Anticonmutativa
3. $(k.\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$ Asociatividad mixta
4. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$ Distributiva
5. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ Triple producto escalar
6. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = 0$ entonces $(\vec{u} \times \vec{v})$ es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
7. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos entonces $\vec{u}$ es paralelo a $\vec{v}$ si y solo si $\vec{u} \times \vec{v} = 0$