Unidad 2: Matrices y Determinantes

Matrices

Definición:

Se llama **matriz** a una disposición rectangular de números reales, a los cuales se les denomina **elementos** de la matriz. Cada elemento tiene dos subíndices, el primero indica la fila **i** y el segundo la columna **j**.

2da columna

$$\begin{array}{r c} & \\ \text{3ra fila} \quad A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \end{array}$$

Dimensión de la matriz $m \times n$

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, A^{m\times n} \ / \ A = (A_{ij})$$

En **programación**, una matriz o “arreglo bidimensional” de dimensión m x n es aquella que contiene información almacenada del mismo tipo de datos (int, float, char, etc). Este tipo de arreglos necesita dos subíndices para ser declarado o para acceder a la información de un elemento en específico, a diferencia de una matriz unidimensional o vector que solo necesita un subíndice. Un arreglo bidimensional es utilizado cuando queremos guardar mucha información sobre un tipo de dato en específico en distintas filas.

Código:

```
tipo_dato nombre_arreglo [tamaño_fila][tamaño_columna];
```

Ejemplo:

Por ejemplo, si queremos crear una matriz de 3 filas y 4 columnas de tipo de dato int y con nombre “matriz”, lo haríamos de la siguiente manera:

Código:

```
int matriz[3][4];
```

Clases de Matrices

- **Matriz fila:** formada por una sola fila. También se conoce como vector fila.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}_{1\times n}$$

- **Matriz columna:** formada por una sola columna. También se conoce como vector columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

- **Matriz cuadrada:** es una matriz en la cual el número de filas es igual al número de columnas $m = n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

- **Matriz nula:** es una matriz en la que todos los elementos son ceros. Se simboliza N o O.
  En símbolos $\forall_i, \forall_j;\ n_{ij} = 0$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

- **Matriz escalar:** es una matriz diagonal en la que todos los términos no nulos toman el mismo valor.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Leftrightarrow \forall_i, \forall_j; \begin{cases} si, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \\ si, i = j \Rightarrow a_{ij} = k \end{cases} k \in \mathbb{R}$$

- **Matriz unidad o identidad:** es una matriz escalar, cuya diagonal principal es 1.

$$I_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_a \in \mathbb{R}^{n\times n} \Leftrightarrow \forall_i, \forall_j; \begin{cases} si, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \\ si, i = j \Rightarrow a_{ij} = 1 \end{cases}$$

- **Matriz diagonal:** es una matriz cuadrada de modo que son igual a 0 todos los elementos situados fuera de la diagonal principal.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad D \in \mathbb{R}^{n\times n} \Leftrightarrow \forall_i, \forall_j; i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

- **Matriz triangular superior:** es una matriz donde todos los elementos por debajo de la diagonal son ceros.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad T \in \mathbb{R}^{n\times n} \Leftrightarrow \forall_i, \forall_j; i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

- **Matriz triangular inferior:** es una matriz donde todos los elementos por encima de la diagonal son ceros.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad T \in \mathbb{R}^{n\times n} \Leftrightarrow \forall_i, \forall_j; i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

- **Matriz escalonada:** es aquella en la que el primer elemento distinto de cero (llamado pivote) está a la derecha del pivote de la fila anterior. Debajo de cada pivote, todos los elementos de la matriz son iguales a 0.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• **Matriz transpuesta:** Es una matriz que resulta de intercambiar ordenadamente las filas por columnas. Así, la primera fila se transformará en la primera columna, la segunda fila en segunda columna, etc. Se representa por A^t. Si $A = (a_{ij})$, entonces $A^t = (a_{ji})$. Si A es $m \times n$, entonces A^t es $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times2} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

- **Propiedades:**

I. Para la matriz A, $\quad (A^t)^t = A$

II. Para la matriz A y el número real k, $\quad (k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

III. Para las matrices A y B, $\quad (A + B)^t = A^t + B^t$

IV. Para las matrices A y B, $\quad (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

• **Matriz simétrica:** es una matriz cuadrada que es igual a su transpuesta.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A$ es simétrica $\Leftrightarrow A = A^t$

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Propiedad:** La suma de una matriz cuadrada y su transpuesta es una matriz simétrica.

• **Matriz antisimétrica:** es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su transpuesta. En toda matriz antisimétrica los elementos de la diagonal son nulos.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A$ es antisimétrica $\Leftrightarrow A = -A^t$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Propiedad:** La resta entre una matriz cuadrada y su transpuesta es una matriz antisimétrica.

• **Matriz involutiva:** A es involutiva si y solo si $A^2 = I$, siendo I la identidad.

• **Matriz idempotente:** A es idempotente si y solo si $A^2 = A$.

Operaciones con Matrices

Adición:

Dadas dos matrices de la misma dimensión, se denomina **matriz suma** a la que se obtiene de sumar los términos correspondientes.

Sea $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}: A + B = C$ siendo $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n} / \forall_i, \forall_j: c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & a_{14} + b_{14} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & a_{24} + b_{24} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & a_{34} + b_{34} \end{pmatrix} = (a_{ij} + b_{ij})$$

La diferencia de matrices A y B se representa por $A - B$, y se define como la suma de A con la opuesta de B: $A - B = A + (-B)$

- **Propiedades:**

I. **Ley de Composición Interna:** La adición de matrices es una nueva matriz.

$$\forall\ \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}: A + B = C / C \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

II. **Conmutativa:** $\forall\ \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}: A + B = B + A$

III. **Asociativa:** $\forall\ \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}: A + (B + C) = (A + B) + C$

IV. **Elemento neutro:** $\forall\ \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}: A + N = N + A = A$ donde N es la matriz nula.

V. **Elemento inverso o simétrico:** $\forall\ \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}: A + A' = A' + A = N$; siendo $A' = -A$ La Matriz $-A$ (opuesta) se obtiene cambiando de signo los elementos de A.

Multiplicación

Producto de una matriz por un escalar

Dada una matriz A y un número real k, el producto es la matriz del mismo orden que A, donde sus elementos se obtienen de multiplicar cada elemento de A por k.

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{entonces } k.A = (k.a_{ij})$$

$$k.A = k.(a_{ij}) = k.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & k.a_{13} \\ k.a_{21} & k.a_{22} & k.a_{23} \\ k.a_{31} & k.a_{32} & k.a_{33} \end{pmatrix} = (k.a_{ij})$$

- **Propiedades**

I. **Elemento absorbente:** $\exists 0 \in \mathbb{R} / \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}: 0.\mathrm{A} = \mathrm{N}$

$$\text{Si } \alpha.A = N \Rightarrow \alpha = 0 \vee A = N$$

II. **Elemento neutro:** $\exists 1 \in \mathbb{R} / \forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}: 1.\mathrm{A} = \mathrm{A}$

III. **Distributividad del "·" respecto a la adición de matrices:** $\alpha.(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha.\mathrm{A} + \alpha.\mathrm{B}$

IV. **Distributividad del "·" respecto a la adición de escalares:** $(\alpha + \beta).\mathrm{A} = \alpha.\mathrm{A} + \beta.\mathrm{A}$

V. **Asociatividad mixta:** $(\alpha.\beta).A = \alpha.(\beta.A)$

Producto entre matrices

Solo es posible multiplicar dos matrices si la primera es de dimensión $m \times n$ y la segunda de dimensión $n \times p$, o sea, si el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda.

Fila

$$(a_{ij})_{m,n} \cdot (b_{ij})_{n,p} = (c_{ij})_{m,p}$$

Posible Columnas

$$A.B = C / A \in \mathbb{R}^{m\times n}\ y\ B \in \mathbb{R}^{n\times p} \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

Cada elemento se obtiene como una combinación lineal de la fila y la columna correspondiente a cada posición; es decir:

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{in}.b_{nj}$$

- Conclusiones

I. **El producto de matrices no es conmutativo.** $A.B \neq B.A$
II. **Cuando se verifica que** $A.B = B.A$
III. **Hay matrices cuyo producto da por resultado la matriz nula y, sin embargo, ninguna de ellas es la matriz nula.**

- Propiedades

I. **Propiedad asociativa:** Si A es una matriz de dimensión $m \times n$, B de dimensión $n \times p$ y C de dimensión $p \times r$.

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

II. **Elemento neutro:** Si A es una matriz cuadrada e I es la matriz identidad del mismo orden que A.

$$A.I = I.A = A$$

III. **Propiedad distributiva a la izquierda:** Si A es una matriz de dimensión $m \times n$, B y C de dimensión $n \times r$.

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

IV. **Propiedad distributiva a la derecha:** Si A y B son matrices de dimensión $m \times n$, C de dimensión $n \times r$.

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Rango de una Matriz

Es número máximo de vectores canónicos distintos que se pueden obtener de una matriz aplicando sucesivas operaciones elementales.

Vector canónico: Es una fila o una columna que tiene por elementos un 1 y el resto 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 3 \qquad \rho(B) = 2 \qquad \rho(C) = 2$$

Método de Gauss para el cálculo del rango de una matriz

El método de **Gauss** para calcular el rango de una matriz dada se basa en una triangulación superior y luego otra inferior de la matriz a la cual se le quiere calcular el rango; esta triangulación se lleva a cabo aplicando transformaciones elementales:

Las transformaciones elementales son las siguientes:

- Permutar 2 filas ó 2 columnas.
- Multiplicar una línea por un escalar no nulo.
- Suprimir las filas o columnas que sean nulas.
- Sumar o restar a una línea otra paralela multiplicada por un número no nulo.

- Propiedades

I. $\forall \text{ A} \in \mathbb{R}^{n \times n}: A$ es regular (inversible) $\Leftrightarrow \rho(A) = n$

II. $\forall \text{ A, B} \in \mathbb{R}^{n \times n}: A$ es singular (no inversible) $\Leftrightarrow \rho(A) < n$

Matriz Inversa

Sea A una matriz cuadrada, se dice que admite inversa si existe una matriz simbolizada por A^{-1} que multiplicada a derecha y a izquierda por la matriz dada A da como resultado la matriz identidad.
En símbolos:

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ \exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} / A\,.\,A^{-1} = A^{-1}\,.\,A = I$$

Si una matriz admite inversa se dice que es inversible, regular o no singular.

- **Propiedades**

I. Si una matriz A tiene matriz inversa, entonces, ésta es única.

II. Si A es una matriz inversible, $(A^{-1})^{-1} = A$

III. Si las matrices A y B son inversibles $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

IV. Si A es una matriz inversible, $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$

Método de Gauss-Jordan para obtener matriz inversa.

El método para calcular la matriz inversa de una dada se basa en una triangulación superior y luego otra inferior de la matriz a la cual se le quiere calcular la inversa.
Dada una matriz A de orden n, para calcular su inversa hay que transformar la matriz (A/I) mediante transformaciones elementales por filas en la matriz (I/A^{-1}). La matriz A^{-1}será la inversa de A.

Las transformaciones elementales son las siguientes:

- Permutar 2 filas ó 2 columnas.
- Multiplicar una línea por un escalar no nulo.
- Suprimir las filas o columnas que sean nulas.
- Sumar o restar a una línea otra paralela multiplicada por un número no nulo.

$$\begin{array}{c|c} A & I \\ I & A^{-1} \end{array}$$

Regla del rectángulo:

Es un procedimiento práctico para hallar la inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordan abreviando las operaciones elementales.

1. Se elige un pivote (elemento distinto de cero; preferentemente 1)
2. La fila del pivote se divide por el pivote (si es 1 omito este paso)
3. Los elementos de la columna del pivote se transforman en cero, excepto el pivote que se transforma en 1
4. Los demás elementos se transforman por la regla del rectángulo.
5. Repito el procedimiento eligiendo otro pivote que no pertenezca ni a la fila ni a la columna del pivote elegido anteriormente.

$$\begin{array}{c|c} A & I \\ I & A^{-1} \end{array}$$

Determinantes

Definición:

Se llama **determinante** de una matriz cuadrada a la función que le asigna un número real y se simboliza $|A|\ o \det A$.

Cálculo de determinantes de segundo orden (2×2)

Dada una matriz cuadrada de segundo orden:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Se llama determinante de A al número real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Cálculo de determinantes de tercer orden (3×3)

Regla de Sarrus

Procedimiento:

Se repiten las 2 primeras filas del determinante debajo de la tercera fila y se realiza la sumatoria del producto de los elementos de la diagonal, menos la sumatoria del producto de los elementos de la contra-diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$

Cálculo de determinantes de cualquier orden $(n \times n)$

Regla de Laplace

Menor complementario:

La matriz correspondiente a un elemento de una matriz cuadrada, se obtiene eliminando la fila y la columna que corresponde a la posición de ese elemento, está asociado a un determinante denominado "Menor Complementario" correspondiente al elemento a_{ij} (M_{ij})
Ej:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

Adjunto o cofactor:

El adjunto o cofactor de un elemento a_{ij} es el producto entre el M_{ij} y $(-1)^{i+j}$; se lo indica A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij} \qquad Si \begin{cases} (i+j)\ es\ par \Rightarrow (-1)^{i+j} = 1 \\ (i+j)\ es\ impar \Rightarrow (-1)^{i+j} = (-1) \end{cases}$$

El determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es igual a la suma de los elementos de una fila o columna multiplicados por sus adjuntos:

$|A| = a_{i1}\,.A_{i1} + a_{i2}\,.A_{i2} + a_{i3}\,.A_{i3}$ Sería el desarrollo por la i-ésima fila

$|A| = a_{1j}\,.A_{1j} + a_{2j}\,.A_{2j} + a_{3j}\,.A_{3j}$ Sería el desarrollo por la j-ésima columna

Ejemplos: desarrollos de un determinante de orden 3

Desarrollo por primera columna de un determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Desarrollo por tercera fila de un determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix} = a_{31}.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32}.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}.(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Método de la Adjunta para invertir matrices

Conceptos previos:

Matriz Cofactor: Es la matriz que se obtiene al reemplazar cada elemento de la matriz dada por su cofactor.

$$\mathrm{Cof}(A_{ij}) = A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Matriz Adjunta: Es la matriz transpuesta de la matriz cofactor.

$$\mathrm{Adj}(A) = [\mathrm{Cof}(A)]^t$$

Si se cumple que: $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{\mathrm{Adj}(A)}{|A|}$

Propiedades

1) Si es un determinante todos los elementos de una línea son nulos; el determinante vale 0.

Ej: 1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{a} & \boxed{b} \end{vmatrix} = 0.b - a.0 = 0$ 2) $\begin{vmatrix} \boxed{0} & a \\ \boxed{0} & b \end{vmatrix} = 0.b - 0.a = 0$

2) Si en un determinante, se intercambian dos filas o columnas; entonces el determinante cambia de signo.

Ej: 1) $\begin{vmatrix} \boxed{a} & \boxed{b} \\ \boxed{c} & \boxed{d} \end{vmatrix} = a.d - c.b$ $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = c.b - a.d = -(a.d - c.b)$

2) $\begin{vmatrix} \boxed{a} & \boxed{b} \\ \boxed{c} & \boxed{d} \end{vmatrix} = a.d - c.b$ $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = b.c - d.a = -(a.d - c.b)$

3) El determinante de una matriz coincide con el de su transpuesta

$$|A| = |\,A^t|$$

Ej: 1) $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - c.b \qquad |\,A^t| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$

4) Si en un determinante, una línea está multiplicada por un número real; entonces el determinante queda multiplicado por ese número.

Ej: 1) $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - c.b \qquad |A'| = \begin{vmatrix} \boxed{k.}a & \boxed{k.}b \\ c & d \end{vmatrix} = k.a.d - c.k.b = k.\boxed{(a.d - c.b)} = k.|A|$

5) Para toda matriz cuadrada A de dimensión n, el determinante del producto entre un escalar k y A es igual al producto entre k^n y el determinante de A.

$$|k.A_{n\times n}| = k^n.|A|$$

Ej: 1) $|k.A_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} k.a & k.b \\ k.c & k.d \end{vmatrix} = a.d.k^2 - c.b.k^2 = k^2.(a.d - c.b) = k^2.|A|$

2) $|k.A_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} k.a & k.b & k.c \\ k.d & k.e & k.f \\ k.g & k.h & k.i \end{vmatrix} = k^3.|A|$

6) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ej: 1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a.d.f$

7) Para toda matriz cuadrada de igual dimensión:

$$|A.B| = |A|.|B|$$

8) El determinante de una matriz inversa es igual a la inversa del determinante de la matriz dada.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

9) Si una fila o columna es suma de varios sumandos, se descompone en tantos determinantes como sumandos haya.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se cumple que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$