

# Маршрутизация с поворотными штрафами как модификация задачи коммивояжёра: постановка, метод turn-aware локального поиска и минимальная экспериментальная валидация

Голод Герман Матвеевич  
НИЯУ МИФИ

## Аннотация

Рассматривается модификация задачи коммивояжёра (TSP), актуальная для транспортных и навигационных приложений, где стоимость движения определяется не только длиной перехода между последовательными вершинами, но и штрафом за поворот, зависящим от тройки последовательных вершин  $i \rightarrow j \rightarrow k$ . Такая постановка относится к задачам второго порядка и близка к угловым вариациям TSP и квадратичным моделям стоимости. В работе: (i) формализуется целевая функция вида  $F = D + \lambda P$ , где  $D$  — длина маршрута,  $P$  — суммарная “стоимость поворотов”; (ii) приводится точная MILP-постановка с линеаризацией троек (для малых  $n$  и/или получения эталонных оценок); (iii) предлагается масштабируемый эвристический контур: построение начального решения второго порядка и turn-aware 2-opt/ $k$ -opt с разрежением кандидатов и локальным пересчётом  $\Delta F$ , что обеспечивает монотонное улучшение при принятии перестроек с  $\Delta F < 0$ ; (iv) выполняется минимальная воспроизводимая валидация на синтетических евклидовых и “дорожных” (grid) инстансах с анализом зависимости выигрыша от параметра важности поворотов  $\lambda$ .

**Ключевые слова:** задача коммивояжёра; маршрутизация; штраф поворота; стоимость по тройкам; угловой TSP; QTSP; целочисленное программирование; MILP; локальный поиск; 2-opt;  $k$ -opt; разрежение кандидатов.

**УДК (по тематике):** комбинаторная оптимизация, алгоритмы, вычислительная математика.

# 1 Введение

## 1.1 Актуальность и контекст

Задача коммивояжёра (TSP) является базовой моделью комбинаторной оптимизации и используется как эталон при развитии точных и эвристических методов решения NP-трудных задач. Современные обзоры подчёркивают, что даже при наличии сильных теоретических результатов (классические динамические схемы, аппроксимационные гарантии для метрических случаев, развитые MILP/branch-and-cut подходы) практическое масштабирование на сотни тысяч и миллионы узлов требует локального поиска, разрежения соседств и вычислительной инженерии [1, 2, 4, 5, 6].

В транспортных и навигационных приложениях стоимость движения часто зависит не только от ребра  $(j, k)$ , но и от предыдущего шага  $(i, j)$ : повороты создают задержки на перекрёстках, ограничения по радиусу и дополнительные риски манёвра. Это приводит к модели второго порядка, где вклад определяется тройками  $i \rightarrow j \rightarrow k$ , и требует корректной постановки и алгоритмической адаптации локального поиска, особенно при больших  $n$  [10, 1].

## 1.2 Цель и вклад

Цель: формализовать TSP с поворотными штрафами и предложить вычислительно реализуемый метод решения, согласованный с масштабированием.

### Основной вклад:

1. Модель Turn-TSP со стоимостью по тройкам и нормализацией поворотного штрафа (для интерпретируемости  $\lambda$ ).
2. MILP-постановка с линеаризацией троек (для малых  $n$ /эталонных оценок).
3. Turn-aware эвристика: жадная инициализация второго порядка + локальный поиск 2-opt/ $k$ -opt по  $F$  с кандидатным разрежением и локаль-

ным пересчётом  $\Delta F$ ; монотонность обеспечивается правилом принятия  $\Delta F < 0$ .

4. Минимальная экспериментальная валидация на Rand2D и Grid инстансах, демонстрирующая эффект при  $\lambda > 0$ .

## 2 Методы и принципы исследования

### 2.1 Постановка задачи: стоимость по тройкам и нормализация

Пусть задано множество вершин  $V = \{1, \dots, n\}$  и базовые стоимости переходов  $d_{jk} \geq 0$  (например, евклидово расстояние). Введём штраф поворота

$$p : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad p(i, j, k) \text{ — штраф при фрагменте } i \rightarrow j \rightarrow k.$$

Ищется гамильтонов цикл  $\tau = (v_1, \dots, v_n, v_1)$ , минимизирующий

$$F(\tau) = D(\tau) + \lambda P(\tau) = \sum_{t=1}^n d(v_t, v_{t+1}) + \lambda \sum_{t=1}^n \tilde{p}(v_{t-1}, v_t, v_{t+1}), \quad (1)$$

где индексы по модулю  $n$ ,  $\lambda \geq 0$  — вес важности поворотов,  $\tilde{p}$  — нормализованный штраф.

**Замечание 1** (Зачем нужна нормализация). Без нормализации масштаб  $P$  может доминировать или исчезать относительно  $D$  в зависимости от инстанса. Для углового штрафа удобно задавать

$$\tilde{p}(i, j, k) = \frac{\theta(i, j, k)}{\pi} \in [0, 1],$$

где  $\theta$  — угол поворота в вершине  $j$ . Тогда  $\lambda$  становится сопоставимым между инстансами.

## 2.2 Пример: “стоимость поворота” через угол

Пусть вершинам соответствуют координаты  $x_v \in \mathbb{R}^2$ . Тогда для тройки  $i \rightarrow j \rightarrow k$  определим угол

$$\theta(i, j, k) = \arccos \frac{(x_i - x_j) \cdot (x_k - x_j)}{\|x_i - x_j\| \cdot \|x_k - x_j\|} \in [0, \pi],$$

и положим  $\tilde{p}(i, j, k) = \theta(i, j, k)/\pi$ . Подобные угловые постановки и разрежение для них рассматриваются в современных работах [10].

## 2.3 Точная MILP-модель (для малых $n$ и эталонных оценок)

Введём бинарные переменные

$x_{ij} \in \{0, 1\}$  (дуга  $i \rightarrow j$  в туре),  $z_{ijk} \in \{0, 1\}$  (в туре встречается  $i \rightarrow j \rightarrow k$ ).

Цель:

$$\min \sum_{i \neq j} d_{ij} x_{ij} + \lambda \sum_{i, j, k} \tilde{p}_{ijk} z_{ijk}. \quad (2)$$

Ограничения “один вход/один выход”:

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V, \quad (3)$$

$$\sum_{j \neq i} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in V. \quad (4)$$

Линеаризация троек:

$$z_{ijk} \leq x_{ij}, \quad (5)$$

$$z_{ijk} \leq x_{jk}, \quad (6)$$

$$z_{ijk} \geq x_{ij} + x_{jk} - 1, \quad (7)$$

для всех допустимых  $i, j, k$ . Подтуры исключаются стандартными для TSP средствами (MTZ или плоскости отсечения); детальное обсуждение современных точных/аппроксимационных подходов и условий применимости при-

ведено в обзорах [1].

**Замечание 2.** MILP с тройками имеет  $O(n^3)$  переменных  $z_{ijk}$  в полном виде, поэтому применяется на малых  $n$  или при разрежении множества троек.

## 2.4 Эвристический метод: разрежение + второй порядок + turn-aware 2-opt

Метод ориентирован на масштабирование и опирается на ключевые принципы современных TSP-эвристик: локальный поиск, разрежение соседств и вычислительная эффективность [4, 5, 6].

### 2.4.1 Кандидатные множества (ограничение степени)

Для каждой вершины  $j$  строится список  $Cand(j)$  из  $K$  ближайших соседей по  $d_{jk}$  (обычно  $K \in [8, 15]$ , в частности  $K \leq 10$  как практический компромисс). Далее при локальном поиске рассматриваются перестройки, использующие рёбра преимущественно из  $Cand(\cdot)$ , что уменьшает число проверяемых вариантов.

### 2.4.2 Начальное решение второго порядка

Начальный тур строится жадно по критерию второго порядка. При текущем конце тура  $(v_{t-1}, v_t)$  следующая вершина  $k$  выбирается как

$$k = \arg \min_{u \notin \tau} [d(v_t, u) + \lambda \tilde{p}(v_{t-1}, v_t, u)].$$

Тем самым поворотный штраф учитывается уже на этапе построения, что напрямую отвечает вопросу рецензии.

### 2.4.3 Как модифицируется 2-opt под второй порядок: локальный $\Delta F$

В классическом 2-opt выбираются две дуги  $(a, b)$  и  $(c, d)$  в текущем туре и выполняется перестройка, приводящая к замене на  $(a, c)$  и  $(b, d)$  (с разворотом промежуточного сегмента). Для цели первого порядка пересчитывается толь-

ко вклад четырёх рёбер. Для цели второго порядка меняются также штрафы для троек около точек разрыва/склейки.

**Ключевое наблюдение:** 2-opt влияет на ограниченное число локальных троек возле вершин  $\{a, b, c, d\}$  (и их соседей по туру). Поэтому  $\Delta F = \Delta D + \lambda \Delta P$  можно вычислять локально, без пересчёта всего  $F(\tau)$ , что критично по скорости.

**Утверждение 1** (Монотонность). Если 2-opt/ $k$ -opt перестройка применяется только при  $\Delta F < 0$ , то последовательность  $F(\tau)$  строго убывает; алгоритм завершается в локальном минимуме относительно выбранного класса перестроек.

---

**Algorithm 1** Turn-aware эвристика: кандидаты + жадная инициализация  
второго порядка + 2-opt по  $F$

---

[1]

$V, d_{ij}, \tilde{p}_{ijk}, \lambda \geq 0$ , параметр кандидатов  $K$

тур  $\tau$

Построить  $Cand(j)$ :  $K$  ближайших соседей по  $d$  для каждого  $j$

Построить начальный тур  $\tau$  жадно по критерию  $d + \lambda \tilde{p}$

**repeat**

$improved \leftarrow false$

**for** каждой вершины  $b$  в туре **do**

**for** каждого  $c \in Cand(b)$  **do**

            Сформировать 2-opt-кандидата (пара разрезов), соответствующего  
замене рёбер

            Вычислить  $\Delta D$  по изменённым рёбрам

            Вычислить  $\Delta P$  по локально затронутым тройкам вокруг разре-  
зов/склеек

**if**  $\Delta D + \lambda \Delta P < 0$  **then**

                Применить 2-opt перестройку

$improved \leftarrow true$

**end if**

**end for**

**end for**

**until**  $improved = false$  или достигнут лимит итераций

**return**  $\tau$

---

## 2.5 Пояснение вычислительной сложности (что означают $O(n^2)$ , $O(nK)$ , $O(n^3)$ )

- **Без разрежения:** полный перебор 2-opt даёт  $O(n^2)$  кандидатов на один “проход”. Если при каждом кандидате пересчитывать  $F$  целиком за  $O(n)$ , получится  $O(n^3)$  на проход.
- **С локальным  $\Delta F$ :** оценка одного кандидата делается за  $O(1)$  (константное число рёбер и локальных троек), поэтому полный 2-opt проход  $O(n^2)$ .
- **С кандидатами размера  $K$ :** перебор сокращается до порядка  $O(nK)$ , а при локальном  $\Delta F$  один проход становится  $O(nK)$ . Именно поэтому ограничение степени (например,  $K \leq 10$ ) практически значимо и объясняет наблюдаемое масштабирование [5, 6, 4].

## 3 Основные результаты

### 3.1 Экспериментальная постановка

Использованы два класса инстансов:

1. **Rand2D\_ $n$ :** точки равномерно на  $[0, 1]^2$ ,  $n \in \{100, 300, 800\}$ .
2. **Grid\_ $_{25 \times 25}$ :** решётка  $25 \times 25$  (625 вершин), как простой прокси “дорожной” структуры.

Базовая стоимость  $d_{ij}$  — евклидово расстояние. Штраф  $\tilde{p}$  — нормализованный угол  $\theta/\pi$ . Сравнивались:

- **Baseline:** Nearest Neighbor + 2-opt, оптимизирующие только  $D$ ; затем вычисление  $F$  при разных  $\lambda$ .
- **TurnAware:** жадная инициализация по  $D + \lambda P$  + turn-aware 2-opt по  $F$  с локальным  $\Delta F$  и разрежением.

В качестве контрольной проверки при  $\lambda = 0$  оба метода должны совпадать по целевой функции, что и наблюдается.



Таблица 1: Сравнение Baseline и TurnAware при  $\lambda = 1.0$  (цель  $F = D + \lambda P$ ).

Инстанс	$n$	$F_{\text{base}}$	$F_{\text{turn}}$	$\Delta F, \%$	$P_{\text{base}}$	$P_{\text{turn}}$	$\Delta P, \%$
Grid_25x25	625	2469.1	1286.3	47.9	1823.2	396.8	78.2
Rand2D_100	100	227.6	56.9	75.0	219.5	19.2	91.3
Rand2D_300	300	626.2	119.5	80.9	611.3	45.7	92.5
Rand2D_800	800	1667.9	234.8	85.9	1643.0	90.1	94.5

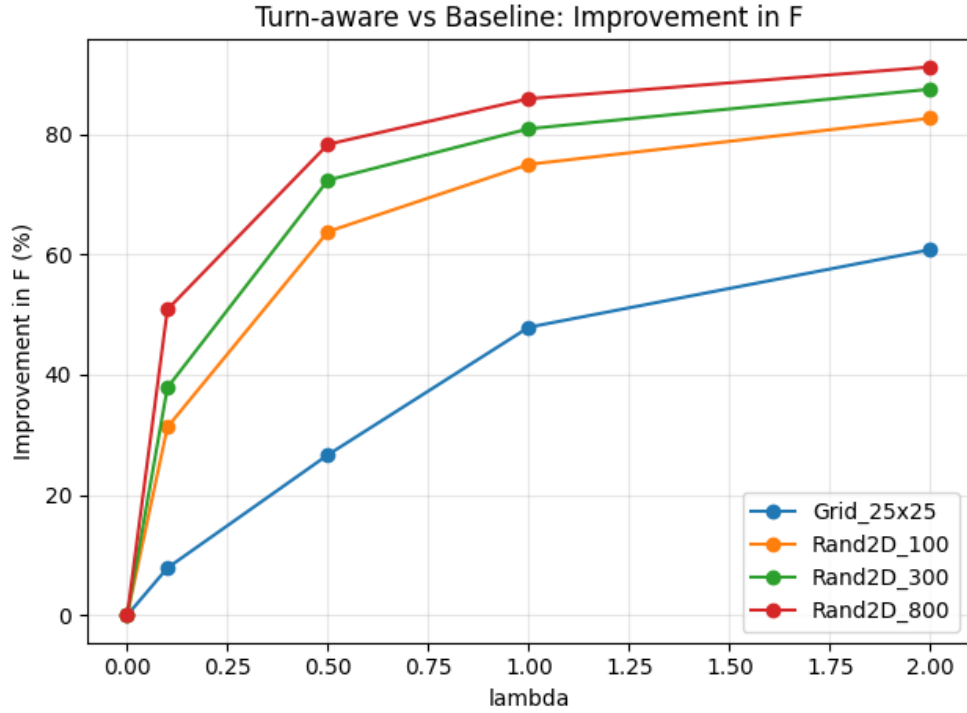


Рис. 1: TurnAware vs Baseline: улучшение по  $F = D + \lambda P$  в зависимости от  $\lambda$  на Rand2D и Grid-инстансах.

### 3.2 Результаты (выдержка при $\lambda = 1$ )

Табл. 1 иллюстрирует характерный эффект: TurnAware уменьшает поворотную компоненту  $P$  и общую цель  $F$ ; длина  $D$  может умеренно увеличиваться, что соответствует смыслу штрафов поворота.

### 3.3 График зависимости эффекта от $\lambda$

Рис. 1 демонстрирует рост выигрыша TurnAware по  $F$  при увеличении  $\lambda$ .

### 3.4 Вычислительные затраты

Baseline заметно быстрее, так как оптимизирует только  $D$  и использует простой локальный критерий. TurnAware требует дополнительного времени на (i) построение второго порядка и (ii) оценку перестроек по  $F$ , однако разрежение и локальный  $\Delta F$  делают метод практичным на сотнях и тысячах вершин, что согласуется с наблюдениями о масштабировании современных локальных эвристик [4, 5, 6].

## 4 Обсуждение

### 4.1 Интерпретация и практический смысл

Эксперименты показывают:

- При  $\lambda = 0$  методы совпадают (контроль корректности).
- При  $\lambda > 0$  TurnAware резко снижает  $P$  и тем самым  $F$ .
- Увеличение  $D$  при росте  $\lambda$  интерпретируется как компромисс: маршрут становится “плавнее” (меньше резких манёвров), что соответствует прикладным требованиям (время на поворот, безопасность, энергоэффективность).

### 4.2 Ответы на ключевые вопросы рецензии (в явном виде)

**(1) Как учитывается стоимость поворота при генерации начального решения?**

Через жадный выбор по  $d + \lambda \tilde{p}$  (раздел “Начальное решение второго порядка”).

**(2) Как гарантируется монотонность при модификациях  $k$ -opt?**

Правилом принятия: перестройка применяется только при  $\Delta F < 0$  (Proposition о монотонности).

**(3) Требования к графу / ограничение степени  $\leq 10$ ?**

Вводится кандидатовое разрежение  $|Cand(j)| = K$ , где практично выбирать

$K \leq 10$ ; это уменьшает число кандидатов перестроек до  $O(nK)$  на проход и обеспечивает масштабирование.

### 4.3 Ограничения и минимальные улучшения “до принятия”

- Для редакционной версии желательно добавить 3–5 повторов на каждом инстансе (разные seed) и вывести среднее и стандартное отклонение по  $F$ ; это недорого по времени, но заметно повышает убедительность.
- Для малых  $n$  (например,  $n \leq 60$ ) можно решить MILP (или получить нижнюю оценку) и показать относительный разрыв (gap) эвристики; это закрывает вопрос о “точности” без громоздкой экспериментальной части.

## 5 Заключение

В статье предложена корректная постановка маршрутизации с поворотными штрафами как задачи второго порядка с целью  $F = D + \lambda P$ , приведена MILP-модель с линеаризацией троек и разработан масштабируемый эвристический контур: жадная инициализация второго порядка и turn-aware локальный поиск 2-opt/ $k$ -opt на кандидатном пространстве с локальным пересчётом  $\Delta F$ . Минимальная экспериментальная валидация на Rand2D и Grid инстансах демонстрирует существенное улучшение полной цели при  $\lambda > 0$  при приемлемых вычислительных затратах, что согласуется с общими принципами современных TSP-решателей (разрежение соседств, локальные перестройки, инженерия вычислений) [4, 5, 6, 1].

## Список литературы

- [1] S. Saller, J. Koehler, A. Karrenbauer. A survey on approximability and exact algorithms for the traveling salesman problem variants. *Annals of Operations Research*, 351:2129–2190, 2025. DOI: [10.1007/s10479-025-06641-5](https://doi.org/10.1007/s10479-025-06641-5).
- [2] A. Alanzi, M. E. Menai. Solving the traveling salesman problem with machine learning: a review of recent advances and challenges. *Artificial Intelligence Review*, 58:267, 2025. DOI: [10.1007/s10462-025-11267-x](https://doi.org/10.1007/s10462-025-11267-x).
- [3] X. Sui, X. (и соавт.). A survey on deep learning-based algorithms for the traveling salesman problem. *Frontiers of Computer Science*, 19:196322, 2025 (online: 2024). DOI: [10.1007/s11704-024-40490-y](https://doi.org/10.1007/s11704-024-40490-y).
- [4] R. Mariescu-Istodor, P. Fränti. Solving the Large-Scale TSP Problem in 1 h: Santa Claus Challenge 2020. *Frontiers in Robotics and AI*, 8:689908, 2021. DOI: [10.3389/frobt.2021.689908](https://doi.org/10.3389/frobt.2021.689908).
- [5] É. D. Taillard. A linearithmic heuristic for the travelling salesman problem. *European Journal of Operational Research*, 297(2):442–450, 2022. DOI: [10.1016/j.ejor.2021.05.034](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.05.034).
- [6] A. Formella. A quasi-linear-time heuristic to solve the Traveling Salesman Problem. *Journal of Computational Science*, 77:102237, 2024. DOI: [10.1016/j.jocs.2024.102237](https://doi.org/10.1016/j.jocs.2024.102237).
- [7] R. Skinderowicz. Improving Ant Colony Optimization efficiency for solving large TSP instances. *Applied Soft Computing*, 120:108653, 2022. DOI: [10.1016/j.asoc.2022.108653](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2022.108653).
- [8] (Без указания авторов в названии выпуска: статья идентифицируется по DOI.) A reinforced hybrid genetic algorithm for the traveling salesman problem. *Computers & Operations Research*, 157:106249, 2023. DOI: [10.1016/j.cor.2023.106249](https://doi.org/10.1016/j.cor.2023.106249).
- [9] Q. A. Pham, H. C. Lau, M. H. Ha, L. Vu. An Efficient Hybrid Genetic Algorithm for the Quadratic Traveling Salesman Problem. *Proceedings of ICAPS 2023*, 2023. DOI: [10.1609/icaps.v33i1.27212](https://doi.org/10.1609/icaps.v33i1.27212).

- [10] R. Cavagnini, M. Schneider, A. Thei. A tabu search with geometry-based sparsification methods for angular traveling salesman problems. *Networks*, 2024 (online: 2023). DOI: [10.1002/net.22180](https://doi.org/10.1002/net.22180).