Задача коммивояжёра и маршрутирование с поворотными штрафами: теоретический обзор, постановка и подход к сведению к ATSP/QTSP

Голод Герман
НИЯУ МИФИ

22 декабря 2025 г.

1 Введение

1.1 Актуальность

Задача коммивояжёра (Traveling Salesman Problem, TSP) является базовой моделью комбинаторной оптимизации и теоретической информатики: она демонстрирует типичную структуру NP-трудных задач, стимулирует развитие методов целочисленного программирования, эвристик и метаэвристик, а также служит испытательным полигоном для алгоритмических идей (кандидатные множества, локальный поиск, разрежение графов, гибридные процедуры) [?, ?, ?, ?].

В прикладных задачах маршрутизации по улично-дорожной сети (логистика, робототехника, беспилотники) существенную роль играют *повороты* (задержки на перекрёстках, ограничения по радиусу поворота, штрафы за манёвры). Классическая постановка TSP учитывает лишь стоимость перехода между двумя последовательными вершинами, тогда как стоимость реального движения часто зависит от *тройки* последовательных вершин (или пары последовательных рёбер): «куда вошли в вершину» и «куда вышли» [?, ?].

1.2 Обзор литературы

Классическая TSP и точные методы. Классические результаты включают динамическое программирование Беллмана и подход Хелда–Карпа [?, ?]. NP-полнота евклидовой TSP показана Пападимитриу [?], общий аппарат NP-полноты систематизирован в книге Гарея–Джонсона [?]. Для метрической TSP известен алгоритм Христофидеса с аппроксимационным отношением 3/2 [?]. Для евклидовой TSP существует PTAS (в фиксированной размерности) [?, ?].

Практически эффективные эвристики и «state-of-the-art». Лин–Керниган и особенно его эффективная реализация ЛКХ (LKH) стали «золотым стандартом» для больших инстансов [?, ?]. Сильный вклад внесён в инженерные решения и вычислительное исследование TSP/Concorde [?]. Для экстремально больших размеров важны методы разрежения/кандидатных рёбер и ускорения: POPMUSIC и построение хороших кандидатных списков [?], а также линейлогарифмическая эвристика Таилларда [?]. Отдельные направления демонстрируют масштабирование на миллионы узлов в ограниченное время (Santa Claus Challenge) [?].

Вариации с поворотными/квадратичными стоимостями. Модели, где стоимость зависит от пары последовательных рёбер (или тройки вершин), естественно приводят к *квадратичной* структуре цели и к постановкам QTSP и близким (включая угловые версии) [?, ?]. Для таких моделей важно уметь: (i) корректно сформулировать задачу (как QTSP/AngleTSP), (ii) сводить её к (A)TSP или MILP, (iii) применять зрелые решатели/эвристики (LKH, branch-and-cut) на трансформированной модели.

1.3 Формулировка темы

Тема работы: *теоретический анализ классической задачи коммивояжёра и разработка теоретического подхода к вариации маршрутизации на графе с поворотными штрафами, включая корректную постановку как QTSP/ATSP и обсуждение алгоритмических схем (редукции, MILP, эвристики) на уровне идеи.*

1.4 Аннотация

В работе дан систематизированный теоретический обзор TSP: постановки, вычислительная сложность, аппроксимации и наиболее практично значимые семейства алгоритмов. Далее формализована вариация маршрутизации с поворотными штрафами как задача с зависимостью стоимости от тройки последовательных вершин, связанная с QTSP и угловыми модификациями. Предложен теоретический путь доведения вариации «граф с поворотами» до уровня научной постановки: (1) корректная математическая модель, (2) два взаимодополняющих направления решения — MILP/branch-and-cut и редукции к ATSP с использованием зрелых эвристик (LKH/кандидатные множества), (3) анализ вычислительной сложности, ограничений и ожидаемого поведения на больших размерах.

1.5 Ключевые слова

Задача коммивояжёра; TSP; ATSP; QTSP; локальный поиск; Lin–Kernighan; LKH; POPMUSIC; поворотные штрафы; угловая TSP; целочисленное программирование; редукции.

1.6 Методы исследования

Используются:

- формализация задач и доказательные рассуждения (связь моделей, редукции);
- анализ вычислительной сложности (асимптотика, NP-трудность);
- обзор и сравнительный анализ алгоритмических семейств (точные методы, аппроксимации, эвристики);
- построение теоретической схемы решения варианта с поворотами: MILP-модель с тройками и редукция к ATSP/QTSP-подходам.

2 Основная часть

2.1 Главные мысли и предложение решения проблемы

2.1.1 1. Классическая постановка TSP и базовые классы

Определение 1 (Симметричная TSP (STSP))**.** Дан полный неориентированный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, и функция стоимости $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Требуется найти гамильтонов цикл минимальной стоимости:

$$\min_{\tau \in \mathcal{H}(V)} \sum_{\{i,j\} \in \tau} c_{ij},$$

где $\mathcal{H}(V)$ — множество гамильтоновых циклов на V.

Определение 2 (Асимметричная TSP (ATSP))**.** Дан полный ориентированный граф на V и стоимости дуг c_{ij}. Найти ориентированный гамильтонов цикл минимальной стоимости:

$$\min_{\tau \in \mathcal{H}^{\to}(V)} \sum_{(i,j) \in \tau} c_{ij}.$$

Определение 3 (Метрическая TSP)**.** Говорят, что STSP метрична, если стоимости удовлетворяют неравенству треугольника: $c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}$ для всех i, j, k.

Комментарий. Метрический случай важен для аппроксимаций (например, алгоритм Христофидеса [**?**]). Для евклидовой TSP (точки в $\mathbb{R}^d$ и $c_{ij} = \|x_i - x_j\|$) известны PTAS [**?**, **?**].

2.1.2 2. NP-трудность и границы применимости точных методов

Утверждение 1 (NP-трудность)**.** Классическая TSP NP-трудна, а евклидова TSP NP-полна [**?**, **?**].

Следствие для практики. Для больших n точные методы (DP [?, ?], branch-and-cut) становятся применимы лишь при сильной структуре/разрежении и мощной инженерии [?]. Поэтому основная практическая линия на масштабах 10^4–10^6+ опирается на эвристики (LK/LKH, кандидаты, локальные улучшения, разрежение) [?, ?, ?, ?, ?].

2.1.3 3. Современная «практическая теорема»: почему работает LKH

Семейство Lin–Kernighan решает задачу через последовательность *k-opt* перестроек тура, выбирая перспективные замены ребер. Ключевой технологический компонент — *кандидатные множества рёбер*: вместо полного $O(n^2)$ перебора рассматривается малое число «хороших» соседей для каждой вершины [?, ?]. Эффективность LKH основана на:

- качественных кандидатных множествах (альфа-меры, POPMUSIC и родственные подходы) [?, ?];
- агрессивных локальных улучшениях и аккуратной организации поиска;
- высокой повторяемости и комбинировании решений, что важно на больших n [?, ?, ?].

2.1.4 4. Постановка вариации: TSP на графе с поворотными штрафами

Рассмотрим модель, в которой переходная стоимость зависит от *двух последовательных перемещений*. Это естественно для дорожных сетей: стоимость «поворота» проявляется в вершине при смене направления.

Определение 4 (Turn-TSP (стоимость по тройкам вершин))**.** Пусть задан ориентированный или неориентированный граф движения $G = (V, E)$ и функция базовой стоимости рёбер $d : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Пусть также задана функция штрафа за поворот

$$p : V \times V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad p(i, j, k) \text{ определяет штраф при переходе } i \to j \to k.$$

Требуется найти гамильтонов цикл $\tau = (v_1, \ldots, v_n, v_1)$, минимизирующий

$$\min_{\tau} \left(\sum_{t=1}^{n} d(v_t, v_{t+1}) \;+\; \lambda \sum_{t=1}^{n} p(v_{t-1}, v_t, v_{t+1}) \right),$$

где индексы по модулю n, а $\lambda \geq 0$ — коэффициент важности поворотов.

Замечание 1. Если $p \equiv 0$, получаем классическую TSP. Следовательно, Turn-TSP не проще TSP и как минимум NP-трудна.

Связь с QTSP. Такая цель имеет квадратичную/второго порядка структуру по последовательным рёбрам и естественно относится к классу QTSP и смежных постановок

[?]. Угловая версия (AngleTSP), где $p(i, j, k)$ соответствует углу поворота в вершине j, исследована как геометрическая вариация [?].

2.1.5 5. Научно корректное доведение вариации до «решаемой» модели

Далее предлагается теоретическая схема, которую можно развивать до полноценной научной статьи (и впоследствии — до экспериментального исследования).

5.1. MILP-модель с переменными для троек Введём бинарные переменные:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{(дуга/ребро } i \to j \text{ включено в тур)}, \qquad z_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \text{(в туре встречается фрагмент } i \to$$

Базовые ограничения тура (ATSP-стиль).

$$\sum_{j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \qquad \text{(ровно один выход)}, \tag{1}$$

$$\sum_{j \neq i} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in V \qquad \text{(ровно один вход)}, \tag{2}$$

$$\text{(ограничения против подтуров, например MTZ или cut'ы)}. \tag{3}$$

Связь z с x. Для всех различных i, j, k:

$$z_{ijk} \leq x_{ij}, \tag{4}$$

$$z_{ijk} \leq x_{jk}, \tag{5}$$

$$z_{ijk} \geq x_{ij} + x_{jk} - 1. \tag{6}$$

Целевая функция.

$$\min \sum_{i \neq j} d_{ij} x_{ij} + \lambda \sum_{i,j,k} p_{ijk} \, z_{ijk}.$$

Комментарий по научной новизне. Данная MILP-постановка сама по себе известна как стандартный путь линеаризации «стоимостей по тройкам». Научно значимое развитие здесь — выбор:

- класса ограничений (cutting planes) и нижних оценок;
- специальных структур p_{ijk} (например, угловая геометрическая структура) [?];
- схемы разрежения и построения кандидатов, чтобы уйти от полного $O(n^3)$ по тройкам.

5.2. Редукция Turn-TSP к QTSP/ATSP и использование зрелых эвристик Литература по QTSP демонстрирует, что квадратичная структура может быть сведена к классическим постановкам через полиномиальные преобразования и далее решаться стандартным ПО [?]. Для практической линии (когда нужен масштаб) целесообразна архитектура:

1. **Упорядочивание модели:** фиксировать $p(i, j, k)$ как локальную функцию поворота (угол/категория манёвра), допускающую быстрый доступ.

2. **Разрежение:** строить для каждого j кандидатные множества выходов $k \in Cand(j)$ и входов $i \in Cand^{-}(j)$, чтобы число потенциальных троек (i, j, k) стало управляемым. Здесь применимы идеи кандидатных рёбер, POPMUSIC и ускоренного построения хороших ребёр [?, ?, ?].

3. **Эвристика на редуцированном пространстве:** применить локальный поиск уровня LK/LKH на расширенном представлении (где «состояние» учитывает входящее ребро) либо использовать QTSP-ориентированные эвристики и матэвристики (подзадачи оптимизируются точно) [?, ?].

5.3. Концептуальная схема «расширения состояния» (edge-based state space) Интуитивно поворотная стоимость делает задачу *второго порядка*: стоимость следующего шага зависит от предыдущего. Стандартный трюк в оптимизации на графах — расширить пространство состояний.

Определение 5 (Граф состояний по ориентированным рёбрам)**.** Пусть базовый граф движения имеет ориентированные дуги $(u \to v)$. Введём состояние $s = (u \to v)$ как «мы приехали в v из u». Переход $s = (u \to v) \to s' = (v \to w)$ имеет стоимость $d_{vw} + \lambda p(u, v, w)$.

Далее задача выбора тура превращается в задачу выбора цикла по состояниям с дополнительными ограничениями «посетить каждую вершину ровно один раз» (это приводит к постановкам семейства generalized TSP / ATSP на трансформированном графе). На уровне научной статьи здесь важно:

- строго описать преобразование и доказать эквивалентность;
- оценить рост размерности после преобразования;
- выделить условия, при которых разрежение кандидатов делает подход вычислимо осуществимым.

2.1.6 6. Теоретические оценки сложности и ожидаемое поведение

Базовая трудность. Turn-TSP NP-трудна уже потому, что включает TSP как частный случай ($p \equiv 0$).

Размерность моделей.

- MILP с x_{ij} имеет $O(n^2)$ переменных, а с тройками z_{ijk} — $O(n^3)$ в худшем случае, что требует разрежения.
- Расширение состояния по ориентированным рёбрам даёт число состояний порядка $O(|E|)$ (или $O(n^2)$ для полного графа), что может быть приемлемо только при сильном разрежении.

Почему разрежение принципиально. Классические LKH/POPMUSIC идеи демонстрируют, что качество решения в значительной мере определяется качеством небольшого набора кандидатов [**?**, **?**, **?**]. Поэтому «научно корректная» стратегия для Turn-TSP на больших n — построить кандидаты так, чтобы:

$$\forall j : \ |Cand(j)| = O(\log n) \text{ или константа, при сохранении качества тура.}$$

Это переводит число учитываемых троек к $O(n \cdot |Cand^{-}(j)| \cdot |Cand(j)|)$, что становится практически приемлемым.

2.1.7 7. Алгоритмическая схема (уровень идеи)

Ниже приведена схема, которую можно развить до реализации и экспериментальной части (при необходимости).

Algorithm 1 Turn-TSP на основе разрежения и локального поиска (идея)

[1]

множество вершин V, базовые стоимости d_{ij}, штрафы p_{ijk}, параметр λ

тур τ

Построить кандидатные множества $Cand(j)$ (например, по d_{ij} и/или по эвристике построения «хороших рёбер»)

Инициализировать тур τ_0 (например, жадный nearest neighbor на d_{ij}, затем улучшить 2-opt по d_{ij})

Определить функцию стоимости тура $F(\tau) = \sum d + \lambda \sum p$ по тройкам

repeat

Выполнить локальное улучшение тура (обобщение k-opt), рассматривая перестройки, затрагивающие только рёбра из кандидатов

Принять улучшение, если $F(\tau)$ уменьшилась

until нет улучшений или достигнут лимит

return τ

Что делает это «научным». Чтобы довести до уровня научной статьи, нужны:

- строгое определение кандидатов и доказуемые/эмпирические аргументы, почему качество не деградирует слишком сильно;
- формальный анализ трудоёмкости одного шага локального поиска;
- сравнение с базовыми подходами: (i) MILP на малых n, (ii) эвристика без поворотных штрафов, (iii) специализированные QTSP/AngleTSP эвристики [?, ?].

2.1.8 8. Плюсы и минусы предложенного подхода

Плюсы:

- корректная математическая постановка (Turn-TSP как QTSP-подобная задача) [?];
- совместимость с богатой экосистемой TSP-алгоритмов (LK/LKH, разрежение, кандидаты) [?, ?, ?, ?];
- естественная интерпретация для транспортных сетей и робототехники (штрафы за манёвр).

Минусы/риски:

- рост размерности при учёте троек (теоретически $O(n^3)$);
- необходимость аккуратно строить кандидаты и вычислять p_{ijk};
- возможная асимметрия и «неметричность» стоимости, что осложняет аппроксимационные гарантии.

3 Завершение

3.1 Выводы

1. TSP остаётся центральной задачей комбинаторной оптимизации; теоретические результаты (NP-полнота, аппроксимации, PTAS для евклидова случая) формируют границы применимости [?, ?, ?, ?, ?].
2. Практическая эффективность на больших размерах обеспечивается эвристиками семейства Lin–Kernighan и инженерными приёмами разрежения/кандидатов [?, ?, ?, ?, ?].
3. Вариация «граф с поворотами» естественно формализуется как задача со стоимостью по тройкам вершин и связана с QTSP/AngleTSP [?, ?]. Это позволяет строго обосновать NP-трудность и корректно выбрать инструментарий.
4. Предложен теоретический путь доведения до научного уровня: (i) MILP-модель с линеаризацией троек, (ii) редукции/расширение состояния и применение зрелых эвристик с разрежением, (iii) анализ сложности и рисков.

3.2 Список литературы

Список литературы

[1] R. Bellman. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem. *Journal of the ACM*, 9(1):61–63, 1962.

[2] M. Held and R. M. Karp. A dynamic programming approach to sequencing problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 10(1):196–210, 1962.

[3] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.

[4] C. H. Papadimitriou. The Euclidean travelling salesman problem is NP-complete. *Theoretical Computer Science*, 4(3):237–244, 1977.

[5] N. Christofides. Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Technical Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, 1976.

[6] S. Arora. Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. *Journal of the ACM*, 45(5):753–782, 1998. DOI: 10.1145/290179.290180.

[7] J. S. B. Mitchell. Guillotine subdivisions approximate polygonal subdivisions: A simple polynomial-time approximation scheme for geometric TSP, k-MST, and related problems. *SIAM Journal on Computing*, 28(4):1298–1309, 1999. DOI: 10.1137/S0097539796309764.

[8] E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, and D. B. Shmoys (eds.). *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. Wiley, 1985.

[9] D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal, and W. J. Cook. *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*. Princeton University Press, 2006.

[10] K. Helsgaun. An effective implementation of the Lin–Kernighan traveling salesman heuristic. *European Journal of Operational Research*, 126(1):106–130, 2000.

[11] C. Rego, D. Gamboa, F. Glover, and C. Osterman. Traveling salesman problem heuristics: Leading methods, implementations and latest advances. *European Journal of Operational Research*, 211(3):427–441, 2011.

[12] É. D. Taillard and K. Helsgaun. POPMUSIC for the travelling salesman problem. *European Journal of Operational Research*, 272(2):420–429, 2019. DOI: 10.1016/j.ejor.2018.06.039.

[13] É. D. Taillard. A linearithmic heuristic for the travelling salesman problem. *European Journal of Operational Research*, 297(2):442–450, 2022. DOI: 10.1016/j.ejor.2021.05.034.

[14] R. Skinderowicz. Improving Ant Colony Optimization efficiency for solving large TSP instances. *Applied Soft Computing*, 120:108653, 2022. DOI: 10.1016/j.asoc.2022.108653.

[15] R. Mariescu-Istodor and P. Fränti. Solving the Large-Scale TSP Problem in 1 h: Santa Claus Challenge 2020. *Frontiers in Robotics and AI*, 8:689908, 2021. DOI: 10.3389/frobt.2021.689908.

[16] A. Fischer, F. Fischer, G. Jäger, J. Keilwagen, P. Molitor, and I. Grosse. Exact algorithms and heuristics for the Quadratic Traveling Salesman Problem with an application in bioinformatics. *Discrete Applied Mathematics*, 166:97–114, 2014. DOI: 10.1016/j.dam.2013.09.011.

[17] R. Staněk, P. Greistorfer, K. Ladner, and U. Pferschy. Geometric and LP-based heuristics for angular travelling salesman problems in the plane. *Computers & Operations Research*, 108:97–111, 2019. DOI: 10.1016/j.cor.2019.01.016.

[18] Google OR-Tools. How to cite OR-Tools and its solvers (routing library). *Developers documentation*, accessed 2025. URL: developers.google.com/optimization/support/cite.