Investigación Operativa

C.C. Lauritto & Ing. Casanova

Guía 07: Programación No Lineal

Fecha de Entrega: 08 de Febrero de 2017

Ravera P. & Rivera R.

Índice

Solución de Problemas

Punto 01 - Máximos y Mínimos Locales y Globales

Máximos y Mínimos Locales

Siendo f:

$$f(x) = 48x - 60x^2 + x^3$$
$$f'(x) = 48 - 120x + 3x^2$$
$$x_1 = 39.59 \wedge x_2 = 0.40$$
$$f''(x) = -120 + 6x$$
$$f''(x_1) = 117.6 \geq 0 \rightarrow x_1 \text{es un Mínimo local}$$
$$f''(x_2) = -117.6 \leq 0 \rightarrow x_2 \text{es un Máximo local}$$

Máximos y Mínimos Globales

$f(x)$ no es ni convexa ni Cóncava ya que si se iguala la segunda derivada a 0, se encuentra que en 20 la misma modifica su concavidad.

Punto 02 - Cóncava o Convexa

Función A

Función: $f(x) = 10x - x^2$.
Derivada Primera: $f'(x) = 10 - 2x$.
Derivada Segunda: $f''(x) = -2$.
Siendo la derivada segunda menor a 0, vemos que la función A es Cóncava.

Función B

Función: $f(x) = x^4 + 6x^2 + 12x$.
Derivada Primera: $f'(x) = 4x^3 + 12x + 12$.
Derivada Segunda: $f''(x) = 12x^2 + 12$.
Para todo valor de X, la función es convexa.

Función C

Función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.
Derivada Primera: $f'(x) = 6x^2 - 6x$.
Derivada Segunda: $f''(x) = 12x - 6$.
La concavidad se modifica en $x = 1/2$, en el intervalo $(-\infty, 1/4]$ la misma es Cóncava, y en $[1/4, \infty)$ es convexa.

Punto 02 cont. en pág. siguiente...

Función D

Función: $f(x) = x^4 + x^2$.
Derivada Primera: $f'(x) = 4x^3 + 2x$.
Derivada Segunda: $f''(x) = 12x^2 + 2$.
Para todo valor de x, la función es convexa.

Función E

Función: $f(x) = x^3 + x^4$.
Derivada Primera: $f'(x) = 3x^2 + 4x^3$.
Derivada Segunda: $f''(x) = 6x + 12x^2$.
Si $x \in [0, -1/2)$ entonces en Cóncava, para todo otro valor es convexa.

Punto 03 - Cóncava o Convexa 02

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 4x^{-1} \\ f'(x) &= 1 - 4x^{-2} \\ f''(x) &= 8x^{-3} \end{aligned}$$

Para $x = 0$ la función es indefinida. Luego, la función es convexa para $x \in (0, +\infty)$ y Cóncava para $(-\infty, 0)$.

Punto 04 - Máximo, Seccion Aurea

Siendo los datos iniciales:

$$\begin{aligned} &r = 0.618 \quad \varepsilon = 0.1 \\ &a = 0 \quad b = 2 \end{aligned}$$

Iteración 01

$$L = b - a = 2 - 0 = 2 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} x_1 &= b - r\,(b - a) = 0.764 \\ x_2 &= a + r\,(b - a) = 1.236 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f(x_1) = 6 \quad f(x_2) = 4.473 \\ &f(x_1) \geq f(x_2) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (a, x_2) \end{aligned}$$

Punto 04 cont. en pág. siguiente…

Iteración 02

$$L = x_2 - a = 1.236 - 0 = 1.236 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_3 = x_2 - r\,(x_2 - a) = 0.472$$
$$x_4 = a + r\,(x_2 - a) = 0.764$$

$$f(x_3) = 8.947 \quad f(x_4) = 6$$
$$f(x_3) \geq f(x_4) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (a, x_4)$$

Iteración 03

$$L = x_4 - a = 0.764 - 0 = 0.764 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_5 = x_4 - r\,(x_4 - a) = 0.292$$
$$x_6 = a + r\,(x_4 - a) = 0.472$$

$$f(x_5) = 14 \quad f(x_6) = 8.947$$
$$f(x_5) \geq f(x_6) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (a, x_6)$$

Iteración 04

$$L = x_6 - a = 0.472 - 0 = 0.472 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_7 = x_6 - r\,(x_6 - a) = 0.18$$
$$x_8 = a + r\,(x_6 - a) = 0.292$$

$$f(x_7) = 22.4 \quad f(x_8) = 14$$
$$f(x_7) \geq f(x_8) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (a, x_8)$$

Iteración 05

$$L = x_8 - a = 0.292 - 0 = 0.292 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_9 = x_8 - r\,(x_8 - a) = 0.112$$
$$x_{10} = a + r\,(x_8 - a) = 0.18$$

$$f(x_9) = 35.286 \quad f(x_{10}) = 22.402$$
$$f(x_9) \geq f(x_{10}) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (a, x_{10})$$

Punto 04 cont. en pág. siguiente…

Iteración 06

$$L = x_{10} - a = 0.18 - 0 = 0.18 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_{11} = x_{10} - r\,(x_{10} - a) = 0.069$$
$$x_{12} = a + r\,(x_{10} - a) = 0.112$$

$$f(x_{11}) = 58.06 \quad f(x_{12}) = 35.826$$
$$f(x_{11}) \geq f(x_{12}) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (a, x_{12})$$

Iteración 07

$$L = x_{12} - a = 0.112 - 0 = 0.112 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_{13} = x_{12} - r\,(x_{12} - a) = 0.043$$
$$x_{14} = a + r\,(x_{12} - a) = 0.069$$

$$f(x_{13}) = 93.066 \quad f(x_{14}) = 58.04$$
$$f(x_{13}) \geq f(x_{14}) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (a, x_{14})$$

Iteración 08

$$L = x_{14} - a = 0.069 - 0 = 0.069 \rightarrow L \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, con un error de 0.069 podemos decir que existe en $x = 0.043$ un Máximo.

Punto 05 - Mínimo, Seccion Aurea

Siendo los datos iniciales:

$$r = 0.618 \quad \varepsilon = 0.1$$
$$a = -1 \quad b = 1$$

Iteración 01

$$L = b - a = 1 - (-1) = 2 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_1 = b - r\,(b-a) = -0.236$$
$$x_2 = a + r\,(b-a) = 0.236$$

$$f(x_1) = 0.236 \quad f(x_2) = 0.236$$
$$f(x_1) \geq f(x_2) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_1, b)$$

Iteración 02

$$L = b - x_1 = 1 - (-0.236) = 1.236 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_3 = b - r\,(b-x_1) = 0.236$$
$$x_4 = x_1 + r\,(b-x_1) = 0.527$$

$$f(x_3) = 0.236 \quad f(x_4) = 0.527$$
$$f(x_3) \leq f(x_4) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_1, x_4)$$

Iteración 03

$$L = x_4 - x_1 = 0.527 - (-0.236) = 0.763 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_5 = x_4 - r\,(x_4-x_1) = 0.055$$
$$x_6 = x_1 + r\,(x_4-x_1) = 0.236$$

$$f(x_5) = 0.055 \quad f(x_6) = 0.236$$
$$f(x_5) \leq f(x_6) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_1, x_6)$$

Iteración 04

$$L = x_6 - x_1 = 0.236 - (-0.236) = 0.472 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_7 = x_6 - r\,(x_6-x_1) = -0.055$$
$$x_8 = x_1 + r\,(x_6-x_1) = 0.055$$

$$f(x_7) = 0.055 \quad f(x_8) = 0.055$$
$$f(x_7) \geq f(x_8) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_7, x_6)$$

Punto 05 cont. en pág. siguiente…

Iteración 05

$$L = x_6 - x_7 = 0.236 - (-0.55) = 0.291 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_9 = x_6 - r\,(x_6 - x_7) = 0.055$$
$$x_{10} = x_7 + r\,(x_6 - x_7) = 0.124$$

$$f(x_9) = 0.055 \quad f(x_{10}) = 0.124$$
$$f(x_9) \leq f(x_{10}) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_7, x_{10})$$

Iteración 06

$$L = x_{10} - x_7 = 0.124 - (-0.055) = 0.069 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_{11} = x_{10} - r\,(x_{10} - x_7) = 0.013$$
$$x_{12} = x_7 + r\,(x_{10} - x_7) = 0.055$$

$$f(x_{11}) = 0.013 \quad f(x_{12}) = 0.055$$
$$f(x_{11}) \leq f(x_{12}) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_7, x_{12})$$

Iteración 07

$$L = x_{12} - x_7 = 0.055 - (-0.055) = 0.011 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_{13} = x_{12} - r\,(x_{12} - x_7) = -0.013$$
$$x_{14} = x_7 + r\,(x_{12} - x_7) = 0.013$$

$$f(x_{13}) = 0.013 \quad f(x_{14}) = 0.013$$
$$f(x_{13}) \geq f(x_{14}) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_{13}, x_{12})$$

Iteración 08

$$L = L = x_{12} - x_{13} = 0.055 - (-0.013) = 0.068 \rightarrow L \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, con un error de 0.068 podemos decir que existe en $x = 0.013$ un Mínimo.

Punto 06 - Hughesco

Siendo los datos iniciales:

$$r = 0.618 \quad \varepsilon = 50$$
$$a = 0 \quad b = 600$$

Iteración 01

$$L = b - a = 600 - 0 = 600 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_1 = b - r\,(b - a) = 229.2$$
$$x_2 = a + r\,(b - a) = 370.8$$

$$f(x_1) = 39 \quad f(x_2) = 81$$
$$f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_1, b)$$

Iteración 02

$$L = b - x_1 = 600 - 229.2 = 370.8 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_3 = b - r\,(b - x_1) = 370.7$$
$$x_4 = x_1 + r\,(b - x_1) = 458.2$$

$$f(x_3) = 81 \quad f(x_4) = 82$$
$$f(x_3) \leq f(x_4) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_3, b)$$

Iteración 03

$$L = b - x_3 = 600 - 370.7 = 229.3 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_5 = b - r\,(b - x_3) = 458.29$$
$$x_6 = x_3 + r\,(b - x_3) = 512.40$$

$$f(x_5) = 82 \quad f(x_6) = 79$$
$$f(x_5) \geq f(x_6) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_3, x_5)$$

Punto 06 cont. en pág. siguiente...

Iteración 04

$$L = x_5 - x_3 = 458.29 - 370.7 = 87.59 \to L \geq \varepsilon$$

$$x_7 = x_5 - r\left(x_5 - x_3\right) = 404.15$$
$$x_8 = x_3 + r\left(x_5 - x_3\right) = 424.83$$

$$f(x_7) = 85 \quad f(x_8) = 84$$
$$f(x_7) \geq f(x_8) \to \text{ Nuevo Intervalo } = (x_3, x_7)$$

Iteración 05

$$L = x_7 - X - 3 = 404.15 - 370.7 = 33.45 \to L \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, con un error de 33.45 podemos decir que existe en $x = 404$ un Máximo.

Punto 07 - Ascenso Acelerado

Siendo la función multivariable:

$$z(x_1, x_2) = -\left(x_1 - \sqrt{5}\right)^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10$$

Ascenso Acelerado

Siendo el gradiente de la función:

$$\nabla z(x_1, x_2) = \left(-2x_1 + 2\sqrt{5}; -2x_2 + 2\Pi\right)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (2; 3)$.

Iteración 01

$$X_1 = (2 + 0.47\lambda; 3 + 0.28\lambda)$$
$$z(X_1) = -10.076 + 0.3012\lambda + 0.3\lambda^2$$
$$\frac{\partial z'(X_1)}{\partial \lambda} = -0.6\lambda + 0.3012 = 0 \to \lambda = 0.5$$
$$X_1(0.5) = (2.235; 3.14)$$
$$||\nabla z(X_1)|| = 3.836x10^{-3} \leq 0.05$$

Por lo tanto, con un error de $3.836x10^{-3}$ se puede afirmar que existe un Máximo en $X = (2.235; 3.14)$.

Newton Raphson

Siendo el gradiente de la función:

$$\nabla z(x_1, x_2) = \left(-2x_1 + 2\sqrt{5}; -2x_2 + 2\Pi\right)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (2; 3)$.

Iteración 01

$$\mathcal{H}_z = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \to \mathcal{H}_z^{-1}(x_0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 + 2\sqrt{(5)} \\ -6 + 2\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ \pi \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se puede afirmar que existe un Máximo en $X = \left(\sqrt{5}; \pi\right)$.

Punto 08 - Optimización no Restringida

Siendo la función multivariable:

$$z(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

Ascenso Acelerado

Utilizando la siguiente expresión como paso general:

$$X^{k+1} = X^k - \lambda^k . \nabla z \left(X^k\right)$$

Siendo el gradiente de la función:

$$\nabla z(x_1, x_2) = (2x_2 - 2x_1; 2x_1 + 1 - 4x_2)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (1; 1)$ con un error $\varepsilon = 0.25$.

Iteración 01

$$\begin{aligned} & X^1 = X^0 - \lambda^0 . \nabla z \left(X^0\right) = (1; 1 - \lambda) \\ & z(X^1) = -2\left(1 - \lambda\right)^2 - 3\lambda + 2 \\ & \frac{\partial z'(X^1)}{\partial \lambda} = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2} = 0 \to \lambda = 0.50 \\ & X^1(0.50) = \left(1; \frac{3}{4}\right) \\ & ||\nabla z(X^1)|| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon \end{aligned}$$

Iteración 02

$$X^2 = X^1 - \lambda^1.\nabla z\left(X^1\right) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}; \frac{3}{4}\right)$$
$$z(X^2) = -\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{27}{8} - \frac{3\lambda}{4}$$
$$\frac{\partial z'(X^2)}{\partial \lambda} = 1 - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0.25$$
$$X^2(0.25) = \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$$
$$||\nabla z(X^2)|| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

Iteración 03

$$X^3 = X^2 - \lambda^2.\nabla z\left(X^2\right) = \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$$
$$z(X^3) = -2\left(\frac{3}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{5\lambda}{4} + \frac{21}{16}$$
$$\frac{\partial z'(X^3)}{\partial \lambda} = \frac{1}{4} - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0.25$$
$$X^3(0.25) = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$$
$$||\nabla z(X^3)|| = \frac{1}{4} \leq \varepsilon$$

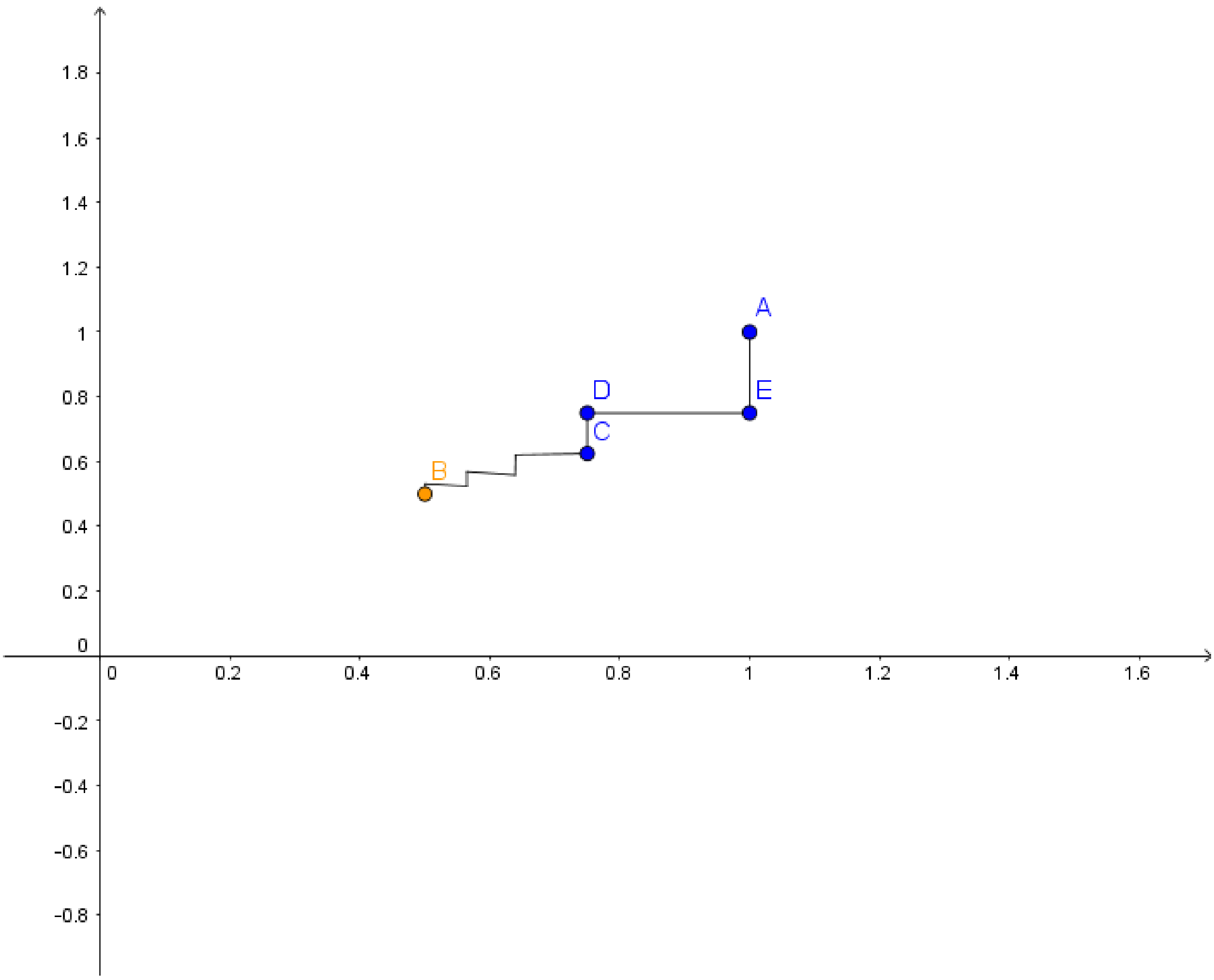
Por lo tanto, con un error de 0.25 se puede afirmar que existe un Máximo en $X = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$.

Sistema de Ecuaciones

$$\nabla z(x_1, x_2) = 0$$
$$\nabla z(x_1, x_2) = (2x_2 - 2x_1; 2x_1 + 1 - 4x_2) = (0; 0)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 - 2x_1 &= 0 \\ 2x_1 + 1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

Trayectoria



Trayectoria estimada

Punto 09 - Municipalidad y Hospital

Variables de Decisión:

- X: coordenada en el eje X del nuevo hospital.
- Y: coordenada en el eje Y del nuevo hospital.

Función Objetivo:

$$Min\ Z = \sqrt{(X-2)^2 + Y^2} + \sqrt{(X-8)^2 + (Y-3)^2} + \sqrt{X^2 + (Y-6)^2}$$

Luego de cargar el problema en el software **LINGO**, la solución obtenida fue que la distancia sera 12.31, con coordenadas (2.91;2.27).

Punto 10 - Dos mercados

Problema Lineal

Función Objetivo:

$$Max\ Z = (60q_1 + (100 - q_2)\, q_2) - (q_1 + q_2)^2$$

Solución Iterativa

Utilizando la siguiente expresión como paso general:

$$X^{k+1} = X^k - \lambda^k.\nabla z\left(X^k\right)$$

Siendo el gradiente de la función:

$$\nabla z(q_1, q_2) = (60 - 2q_1 - 2q_2; 100 - 4q_2 - 2q_1)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (5; 10)$ con un error $\varepsilon = 0.1$.

Iteración 01

$$\begin{aligned}
&X^1 = X^0 - \lambda^0.\nabla z\left(X^0\right) = (5 + 30\lambda; 10 + 50\lambda)\\
&z(X^1) = 60(5 + 30\lambda) + (100 - (10 + 50\lambda))(10 + 50\lambda) - ((5 + 3\lambda) + (10 + 50\lambda))^2\\
&\frac{\partial z'(X^1)}{\partial \lambda} = -17800\lambda + 300 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{17}{89}\\
&X^1\left(\frac{17}{89}\right) = \left(\frac{955}{89}; \frac{1740}{89}\right)\\
&||\nabla z(X^1)|| = 0.655 \geq \varepsilon
\end{aligned}$$

Iteración 02

$$\begin{aligned}
&X^2 = X^1 - \lambda^1.\nabla z\left(X^1\right) = \left(\frac{955}{89} - \frac{50}{89}\lambda; \frac{1740}{89} + \frac{30}{89}\lambda\right)\\
&z(X^2) = \frac{-}{1300}7921\lambda^2 + \frac{3400}{7921}\lambda + \frac{115675}{89}\\
&\frac{\partial z'(X^2)}{\partial \lambda} = \frac{-}{2600}7921\lambda + \frac{3400}{7921} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{17}{13}\\
&X^2\left(\frac{17}{13}\right) = \left(\frac{11565}{1157}; \frac{23130}{1157}\right)\\
&||\nabla z(X^2)|| = 0.05042 \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, con un error de 0.05042 se puede afirmar que existe un Máximo en $X = \left(\frac{11565}{1157}; \frac{23130}{1157}\right)$.

Solución Analítica

Condición Necesaria:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial z}{\partial q_1} = 0 \rightarrow 60 - 2q_1 - 2q_2 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial q_2} = 0 \rightarrow 100 - 4q_2 - 2q_1 = 0 \end{array}\right\} q_1 = 10 \wedge q_2 = 20$$

Condición Suficiente:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} [2]\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 q_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial q_2 q_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

A partir del análisis de los determinantes de la hessiana, comprobamos que la condición de óptimo local se cumple, por lo que podemos asegurar encontrarnos frente a un Máximo.

Punto 11 - Publicidad

Programa Lineal

Variables de Decisión:

- x: cantidad de minutos a comprar de comerciales en tv.
- y: cantidad de minutos a comprar de comerciales en radio.

Función Objetivo:

$$Max\ Z = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} 3000x + 1000y &\leq 10000 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Solucion

Para obtener el mejor rendimiento del dinero destinado a publicidad, recomendamos que la compañía adquiera 2.46 minutos de comerciales en TV y 2.6 en radio. De seguir este plan, los ingresos obtenidos ascenderían a los 15017.86

Condición Necesaria:
Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange.

$L(x, y, \lambda) = -2x^2 - y@ + xy + 8x + 3y + \lambda\,(10000 - 3000x - 1000y)$
$\nabla L = (-x + y + 8 - 3000\lambda; -2y + x + 3 - 1000\lambda; 10000 - 3000x - 1000y) = (0; 0; 0)$
$x = \dfrac{69}{28}$
$y = \dfrac{73}{28}$
$\lambda = \dfrac{1}{4000}$

Condición Suficiente:

$$\mathcal{H}\left(\frac{69}{28}, \frac{73}{28}, \frac{1}{4000}\right) = \begin{bmatrix} [2]0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3000 & 1000 \\ 3000 & -4 & 1 \\ 1000 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Analizando los determinantes del Hessiano Orlado, observamos que la condición suficiente de óptimo local es verificada por el punto hallado anteriormente, con lo que podemos asegurar entonces que el mismo es un Máximo.

Gastar $1000 extras?

Teniendo en cuenta el valor de λ el cual representa qué tanto mejoraría nuestro funciónal por unidad monetaria extra que se disponga, nos inclinamos a des aconsejar la compra de minutos de publicidad extra, ya que de hacer esto, si bien la ganancia aumentaría, la inversión necesaria para obtener esta mejora séria mayor que dicha diferencia.

Punto 12 - Quilmes

Programa Lineal

Variables de Decisión:

- x: cantidad de dinero a invertir en publicidad en Buenos Aires.
- y: cantidad de dinero a invertir en publicidad en el Interior.

Función Objetivo:

$$Max\ Z = 30\sqrt{x} + 20\sqrt{y}$$

Punto 12 cont. en pág. siguiente. . .

Sujeta a:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 100 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Para lograr maximizar los beneficios obtenidos, recomendamos la inversión de \$69.23 en publicidad destinada a Buenos Aires y el resto (\$30.76) al interior. Con esto, se alcanzaria un ingreso de \$360.55.

Condiciónes de Óptimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \leq 0 &\rightarrow \frac{15}{\sqrt{69.23}} - \lambda \leq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \leq 0 &\rightarrow \frac{10}{\sqrt{30.77}} - \lambda \leq 0 \end{aligned}$$

Ya que tanto x como y son distintas de cero, las expresiónes anteriores son iguales a 0, por lo que entonces:

$$\lambda = 1.80$$

Ademas, en el punto candidato a solución Óptima:

$$\lambda \left[g(x) - b \right] = 0 \rightarrow \lambda \left[x + y - 100 \right] = 0$$

Debido a lo anterior, podemos asegurar que se cumplen las condiciónes de Óptimalidad.

Un peso más...

Teniendo en cuenta el valor de λ el cual representa que tanto mejoraria nuestro funciónal por unidad monetaria extra que se disponga podemos asegurar que la ganancia, de disponer de un peso más detinado a inversión en pubilicidad, aumentaria en \$1.8 extra.

Punto 13 - Paquete

Variables de Desicion:

- x: Ancho del paquete.
- y: Profundidad del paquete.
- z: Altura del paquete.

Función Objetivo:

$$Max\ Z = xyz$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} &2(x+y)+z \leq 108 \\ &x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

La solución es:

- $x = 18cm$.
- $y = 18cm$.
- $z = 36cm$.

Con un volumen total de $11664cm^3$.