Dualidad y análisis de sensibilidad

"El interés teórico de la ingeniería de sistemas y la investigación de operaciones recae en el hecho de que sea posible someter al análisis de sistemas entidades cuyos componentes son de lo más heterogéneos: hombres, máquinas, edificios, valores monetarios y de otros, insumos de materia prima, salida de productos y otras muchas cosas."

Ludwig von Bertalanffy

Ejercicios

I. Considere el siguiente modelo:

$\text{MÁX } Z = 3x_1 + 5x_2$

s.a.

$2x_1 + x_2 \leq 230$

$x_1 + 2x_2 \leq 250$

$x_2 \leq 120$

$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$

1. Resuelva mediante software y complete la tabla.

C_k	X_k	b_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Z							

2. Suponga que se dispone de una unidad más del recurso 1. Resuelva el nuevo modelo mediante software y compare la solución obtenida con la información de la tabla anterior.
3. Suponga que se dispone de una unidad menos de recurso 2. Resuelva el nuevo modelo mediante software y compare la solución obtenida con la información de la primer tabla.

II. Para el modelo del punto anterior, suponga que no se estimó correctamente el parámetro c_1. Realice un análisis sobre el efecto de cualquier cambio en dicho parámetro sobre el funcional. *Nota*: será de gran ayuda el gráfico de la región factible.

III. Considere los siguientes programas lineales. Para cada uno de ellos, encontrar sus soluciones primal y dual mediante software. Verifique el cumplimiento de los teoremas referentes a la dualidad vistos en clase. Luego complete la tabla:

a) Máx z = 2x1 + 4x2
S.A.
x1 + 2x2 <= 5
x1 + x2 <= 4
x1,x2>=0

b) Máx Z=2x1+8x2
S.A.
2x1 + 4x2 >= 8
2x1 - 5x2 <= 0
-x1 + 5x2 <= 5
x1,x2>=0

c) Máx z = 2x1 + x2
S.A.
x1 - x2 <= 10
2x1 <= 40
x1,x2>=0

d) Máx z = 3x1 + 9x2
S.A.
x1 + 4x2 >= 9
x1 + 2x2 <= 4
x1,x2>=0

Problema	Tipo de Solución Primal/Dual	Correspondencia de las variables	Variables básicas y sus valores	Variables no básicas
a				
b				
c				
d				

IV. Completar la siguiente tabla con las propiedades de la solución (optimalidad, factibilidad) afectada por el cambio en los parámetros, y los procedimientos para volver a lograr la optimidad, si es posible hacerlo, desde los programas primal y/o dual.

Cambios en los parámetros	Propiedad de la solución afectada	Procedimiento para reoptimizar desde el primal	Procedimiento para reoptimizar desde el dual
Cambio en c_j			
Cambio en b_i			
Cambio en a_{ij} no básica			
Cambio en a_{ij} básica			
Agregado de una nueva actividad			
Agregado de una nueva restricción			

Solución de problemas

1. La fábrica de muebles Dakota fabrica escritorios, mesas y sillas. Cada producto necesita madera, trabajo de carpintería y trabajo de acabado; como se describe en la tabla. Maximice la ganancia semanal.

Recurso	Escritorio	Mesa	Silla	Disponibilidad
Madera (pie tablón)	8	6	1	48
Horas de acabado	4	2	1.5	20
Horas de carpintería	2	1.5	0.5	8
Precio($)	60	30	20	

   (a) Resuelva mediante simplex el problema dado.
   (b) Determine para que intervalo de variación de c3 (precio de las sillas) la base actual permanecerá optima.
   (c) Encuentre e interprete los precios sombra.
   (d) Si se dispusieran de 18 horas de acabado, ¿cuál sería el ingreso de Dakota?
   (e) Dakota muebles planea producir mesas para PC's. Una mesa para PC se vende a $36 y requiere 6 pies de madera, 2 horas de acabado y 2 horas de carpintería. La empresa tendría que fabricar algunas unidades de este producto?
   (f) Expresar el problema dual asociado e interpretarlo económicamente.

(g) Un reciente estudio de mercado determinó que la demanda mínima de sillas es de 6 unidades. ¿Cómo afectaría a la solución? Si es necesario calcule la nueva solución óptima.
(h) El estudio de mercado anterior estaba equivocado (la demanda mínima de sillas sería de 9 unidades). Cómo afectaría este cambio a la solución actual? Si es necesario vuelva a obtenerla.
(i) Por razones de mercado se debe fabricar mesas. ¿Cuál será el precio al que deberá vender Dakota para que la actividad se vuelva rentable?

2. Una compañía se dedica a la preparación de concentrados de citrus, para ello tiene una máquina que opera 150hs a la semana destilando jugos de naranja y de pomelo en concentrados. La máquina puede destilar jugo de naranja a una tasa de 25 lts por hora en 17,5 lts de concentrado o 20 lts de jugo de pomelo en 10 lts de concentrado. Hasta 1000 lts de cada concentrado se pueden almacenar en tanques separados después de su procesamiento. La ganancia neta por cada litro de jugo de naranja procesado es de $0,55 y de jugo de pomelo de $0,40
   (a) Determinar el número de litros de jugo de naranja y pomelo a destilar para maximizar la ganancia. Expresar la solución en términos económicos.
   (b) La compañía recibió una oferta de un proveedor local para venderle nuevos tanques de almacenamiento de concentrado a los siguientes precios: 1500 lts a $500; 2500 lts a $800 y 3000 lts a $1000. ¿Cuántos y cuáles tanques deberían comprar? Justifique
   (c) Un competidor ofrece horas de maquinaria ociosa a $8,20 la hora.¿Se debe aceptar la oferta? En caso de una respuesta afirmativa ¿cuántas horas debe comprar? Justifique.

3. Un criador de aves brinda como componente principal de la dieta de sus animales dos alimentos balanceados. Estos alimentos contienen como componentes principales carbohidratos, grasas no saturadas y componentes ricos en calcio. El costo de los alimentos es de $50 y $25 respectivamente. Cada uno de los alimentos brinda la siguiente cantidad de los componentes esenciales (por kilogramo):

Cantidad por kg	Alimento 1	Alimento 2
Grasas no saturadas	0,1	0,3
Carbohidratos	0,3	0,4
Comp. ricos en calcio	0,3	0,1

   Como mínimo la dieta de los animales requiere: 8kg de grasas no saturadas, 19kg de carbohidratos y 7kg de componentes ricos en calcio. El criador busca satisfacer la dieta de sus animales con un mínimo costo.
   (a) Plantee y resuelva el problema utilizando el método simplex
   (b) Exprese el problema dual asociado e interprételo económicamente
   (c) Un cambio en la dieta reduce la cantidad mínima de carbohidratos a 10kg. ¿permanecerá óptima la solución actual? En caso de ser afirmativo ¿cuál sería el costo?
   (d) Un cambio en la dieta incrementa la cantidad mínima de carbohidratos en 10kg. ¿permanecerá óptima la solución actual?
   (e) Si el costo del alimento 1 se incrementa a $81 ¿Puede asegurar que la solución aún incluirá el alimento 1?
   (f) Exprese los rangos de variación de los costos y los niveles de recursos del problema. Encuentre e interprete económicamente los precios sombra del primal.

4. Una heladería manufactura tres sabores de helado (Chocolate, Vainilla y Dulce de Leche). Debido a la alta demanda, la compañía tiene un déficit de abastecimiento en tres de sus ingredientes: leche, azúcar y crema. Por esto la empresa deberá determinar las cantidades a producir de cada sabor para maximizar su ganancia de acuerdo a las limitaciones en los citados ingredientes. Los sabores Chocolate, Vainilla y Dulce de Leche proporcionan

respectivamente una ganancia de \$1,00, \$0,90 y \$0,95 por litro vendido. La empresa solo dispone de 200 litros de leche, 150 kilos de azúcar y 60 litros de crema en su inventario. Además, para fabricar cada litro de helado de Chocolate se emplean: 450 ml de leche, ½ kilo de azúcar y 100 ml de crema; para cada litro de helado de Vainilla se usan: ½ litro de leche, 400 gr de azúcar y 150 ml de crema y para cada litro de helado de Dulce de Leche se usan: 400 ml de leche, 400 gr de azúcar y 200 ml de crema.

(a) Plantee el modelo de programación lineal.
(b) Resuelva el problema utilizando el método simplex.
(c) Plantee el modelo dual asociado e interprételo económicamente.
(d) Suponga que la ganancia por litro de helado de dulce de leche se eleva a \$1,00. Cambia la solución óptima? Cuál será su efecto sobre la ganancia total?
(e) Suponga que la ganancia por litro de helado de dulce de leche baja a \$0,92. Cambia la solución óptima? Cuál será su efecto sobre la ganancia total?
(f) Se determina que tres litros de crema se han agriado, por lo que deben ser descartados. Cambia la solución óptima? Cuál será su efecto sobre la ganancia total?
(g) Se presenta la oportunidad de comprar 15 Kg adicionales de azúcar a \$15. Deben comprarla? Justifique.
(h) De un informe de sensibilidad sobre el recurso leche.

5. Supongamos una empresa que puede fabricar 3 productos P1, P2 y P3 para los que requiere recursos de mano de obra (MO), materia prima (MP) y maquinaria (MA). Existen restricciones de disponibilidad de los recursos (DMi), limitaciones comerciales de cantidad mínima del producto P3 (MN3) y de cantidad máxima del producto P2 (MX2) a elaborar por mes.
Los datos se indican en la siguiente tabla:

Producto / **Recurso**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**Costo**	**Disponibilidad mensual**
MO	5 hs	4 hs	6 hs	\$4/h	1200
MP	0.2 kg	0.3 kg	0.1 kg	\$1/h	300
MA	1.1 hs	0.8 kg	1.3 kg	\$15/kg	800
MN3			70 u		
MX2		200 u			
Precio de venta unitario	\$500	\$400	\$600		

(a) Formular el modelo matemático correspondiente al problema planteado.
(b) Usar el software de programación lineal LINDO para resolver el problema.
(c) Interpretar económicamente los resultados obtenidos en el reporte de la solución obtenida con LINDO.
(d) Formular el planteo dual del problema. Interpretarlo económicamente.

6. Para el ejercicio 5 del capítulo 2, de La Falda:
(a) Un paro de transportistas hace que el precio de transportar 1 kg de amaranto desde el almacén de Valle Hermoso aumente a \$3. ¿Cómo afecta ésto a la solución?
(b) Por un error administrativo el proveedor informa que sólo tiene disponibles 25 cajas de salud vital. ¿Afecta ésto a la solución?
(c) Los pronósticos indican que las demandas de quinoa cambiarán en breve. ¿Qué fluctuaciones se permiten con el plan actual?

(d) Un nuevo proveedor está interesado en vender amaranto y quinoa. ¿Cuánto es lo más que el almacén debe estar dispuesto a pagar por cada unidad de amaranto y de quinoa que el proveedor le ofrezca?

7. Para el ejercicio 6 del capítulo 2, sobre el ganador de la lotería:
   (a) Como a fin de cuentas no estaba del todo convencido del riesgo de las acciones tipo A, la persona decide poner como tope para A 8 millones. ¿Cómo afecta este cambio en la solución?

8. Para el ejercicio 10 del capítulo 2, sobre el criador de perros:
   (a) Formule el problema dual e interprete económicamente
   (b) Realice un análisis sobre los precios sombra

9. *(Ejercicio extraído del examen final del día 11/01/2014)*
   La compañía Gem de Vivian elabora dos tipos de joyas: el tipo 1 y el tipo 2. Las joyas de tipo 1 constan de 2 rubíes y 4 diamantes. Una joya tipo 1 se vende en 10 dólares y cuesta 5 dólares producirla. Las joyas del tipo 2 constan de 1 rubí y un diamante. Una joya tipo 2 se vende en 6 dólares y cuesta 4 dólares producirla. Se dispone de un total de 30 rubíes y 50 diamantes. Es posible vender todas las joyas que se elaboran, pero las consideraciones mercadotécnicas señalan que se produzcan por lo menos 11 joyas del tipo 1. Suponga que Vivian quiere maximizar la utilidad.
   (a) Modele el problema mediante PL, resuélvalo y elabore el informe económico para Vivian.
   (b) ¿Cuál sería la utilidad de Vivian si hubiera disponible 46 diamantes?
   (c) Si las joyas del tipo 2 se vendieran por sólo 5.50 dólares, ¿cuál sería la solución óptima para el problema?
   (d) ¿Cuál sería la utilidad de Vivian si tuviera que fabricar 12 joyas del tipo 1?
   (e) Vivian ha estado trabajando en un nuevo tipo de joya, y está evaluando lanzarla al mercado. Las nuevas joyas se venden a $5 cada una, cuesta $2 producirlas, y se componen de 1 rubí y 3 diamantes. ¿Conviene que Vivian produzca este nuevo tipo de joya? Si es así, ¿cuál sería el nuevo plan de producción?

10. *(Ejercicio extraído del examen final del día 27/01/2014)*
    Se ha concedido permiso a un nuevo tour operador para realizar vuelos entre Madrid y las Islas Baleares e interinsulares. Para ello, debe comprar turborreactores con los que cubrir los vuelos entre Madrid y las islas, así como aviones de hélice y/o helicópteros con los que servir los vuelos interinsulares. El presupuesto de compra es de 28 millones de euros. Las características de los aparatos que puede comprar el operador se resumen en la tabla.

Tipo de aparato	**Coste/u ($x10^6$ euros)**	**Mant./u (euros/día)**	**Tripulación**			**Capacidad (pas./mes)**
			Piloto	**Copiloto**	**Azafata**	
Turborreact.	3	1200	2	-	2	4000
A. hélice	1	600	1	1	1	300
Helicóptero	0.5	300	1	-	-	100

Se pueden contratar hasta 10 pilotos y 16 azafatas. Se desea emplear al menos a 3 copilotos. El tráfico entre Baleares y Madrid se estima en 8000 pas./mes (pasajeros por mes) y el interinsular en 500 pas./mes. El permiso concedido requiere que el número mínimo de aparatos sea 15. La compañía desea operar con coste de mantenimiento mínimo.
(a) Formular un modelo de programación lineal que proporcione el plan óptimo de compra.

(b) Resolverlo e interpretar la solución.
(c) Si existe la posibilidad de contratar a 10 pilotos más, ¿cuál será la nueva solución?
(d) Suponga que además de la modificación del punto (c), un cambio en el contrato reduce el número mínimo de aparatos a 14. ¿Cuál es el efecto de esta modificación?

11. *(Ejercicio extraído del examen final del día 06/03/2014)*
David, Diana y Lidia son los únicos socios y empleados en una compañía que produce relojes finos. David y Diana pueden trabajar un máximo de 40 horas por semana, mientras Lidia sólo puede trabajar 20 horas semanales.
La empresa hace dos tipos de relojes: el reloj de pedestal y el de pared. Para hacer un reloj, David (ingeniero mecánico) ensambla las partes internas del reloj y Diana (ebanista) produce las cajas de madera labradas a mano. Lidia es responsable de recibir pedidos y enviar los relojes. El tiempo requerido para cada tarea se muestra en la tabla.

	Tiempo requerido	
Tarea	**Reloj de pedestal**	**Reloj de pared**
Ensamblar mecanismo	6 horas	4 horas
Labrar caja de madera	8 horas	4 horas
Enviar	3 horas	3 horas

Cada reloj de pedestal construido y enviado deja una ganancia de \$300, mientras que cada reloj de pared proporciona una ganancia de \$200.
Los tres socios ahora desean determinar cuántos relojes de cada tipo deben producir por semana para maximizar la ganancia total.
(a) Formule un problema de programación lineal para el caso de David, Diana y Lidia. Resuélvalo e interprete la solución.
(b) Suponga que la estimación respecto de la ganancia por el reloj de pedestal cambia de \$300 a \$375. ¿La solución seguirá siendo óptima?
(c) Repita el inciso anterior si, además del cambio en el reloj de pedestal, la ganancia unitaria por el reloj de pared cambia de \$200 a \$175.
(d) Para aumentar la ganancia total, los tres socios acordaron que uno de ellos aumentaría un poco el número máximo de horas de trabajo por semana. La elección se basa en quién aumentará más la ganancia total. Use el análisis de sensibilidad para realizar la elección.
(e) ¿Es válido usar los precios sombra dados en el análisis de sensibilidad para determinar el efecto si Lidia cambiara su máximo de horas semanales de 20 a 25? Si es así, ¿cuál sería el incremento en la ganancia total?

12. *(Ejercicio extraído del examen final del día 08/05/2014)*
En un laboratorio se fabrican cuatro productos P_i, i = 1, 2, 3, 4, que consumen un día por unidad en su proceso completo de producción, aunque se pueden producir varias unidades simultáneamente. El espacio en el almacén (m^2) y la mano de obra (número de trabajadores) disponibles limitan la producción. La tabla contiene los datos relevantes del proceso de producción, así como los costos de fabricación y precios de venta en pesos:

Producto	P_1	P_2	P_3	P_4	Disponibilidad
Área (m^2/u)	10	30	80	40	900
Trabajadores/u	2	1	1	3	80

Costo/u	20	30	45	58
Precio venta/u	30	50	85	90

Se pide:

(a) Encontrar el plan de producción de beneficio máximo
(b) El informe para el cliente
(c) La firma podría alquilar 150 m^2 más de superficie de almacén con coste de 70 pesos (por día). ¿Debería alquilar ese espacio?
(d) El departamento de I+D del laboratorio desarrolló un nuevo producto, P_5, el cual ocupa 20 m^2/u y 2 trabajadores/u, con un costo de 50 y un precio de venta de 65. ¿Conviene producir P_5?

13. Considere el siguiente problema.

$$
\begin{aligned}
&Máx\, Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\
&s.a. \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\
&x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\
&2x_2 + x_2 \leq 2 \\
&x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Suponga que se empleó el método de la gran M para obtener la solución básica factible inicial. Sea la variable μ_1 artificial correspondiente a la primera restricción, x_4 la variable de superávit de la segunda restricción, μ_2 la variable artificial de la misma, y x_5 la variable de holgura de la tercera restricción. El conjunto de ecuaciones final correspondiente que proporciona la solución óptima es:

$$
\begin{aligned}
&(0) Z + 5x_2 + (\mathrm{M}+2)\mu_1 + \mathrm{M}\mu_2 + x_5 = 8 \\
&(1) x_1 - x_2 + \mu_1 - x_5 = 1 \\
&(2) 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\
&(3) 3x_2 + \mu_1 + x_4 - \mu_2 = 2
\end{aligned}
$$

Suponga que la función objetivo original se cambia a $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$, y que la tercera restricción original se cambia a $2x_2 + x_3 \leq 1$. Utilice el procedimiento de análisis de sensibilidad para revisar el conjunto de ecuaciones final (en forma de tabla) y convertirlo a la forma apropiada de eliminación de Gauss para identificar y evaluar la solución básica actual. Después prueba la factibilidad y optimalidad de esta solución (no reoptimice).