

Investigación Operativa

C.C. Lauritto & Ing. Casanova

Guia 06: Programación Entera

Fecha de Entrega: 04 de Diciembre de 2016

Ravera P. & Rivera R.

Índice

Ejercicios	3
Punto 01 - Ejercicio 01	3
Punto 02 - Ejercicio 02	4
Solución de Problemas	5
Punto 03 - Compañía	5
Problema Lineal	5
Gravámenes	5
Punto 04 - Industria: Servicios - Sector: Finanzas - Objeto: Selección de Proyectos	6
Punto 05 - Industria: Servicios Eléctricos - Sector: Producción - Objeto: Programación	7
Punto 06 - Industria: General - Sector: Logística - Objeto: Distribución	8
Programa de Distribución	8
Costos fijos	9
Precio de Venta	9
Cierre	9
Punto 07 - Industria: Servicios - Sector: Logística - Objeto: Localización	10
20 minutos	10
15 Minutos	10
Punto 08 - Sophilos	11
Punto 09 - Mainframe Universidad	12
Punto 10 - Instalación de Alta Montaña	13

Ejercicios

Punto 01 - Ejercicio 01

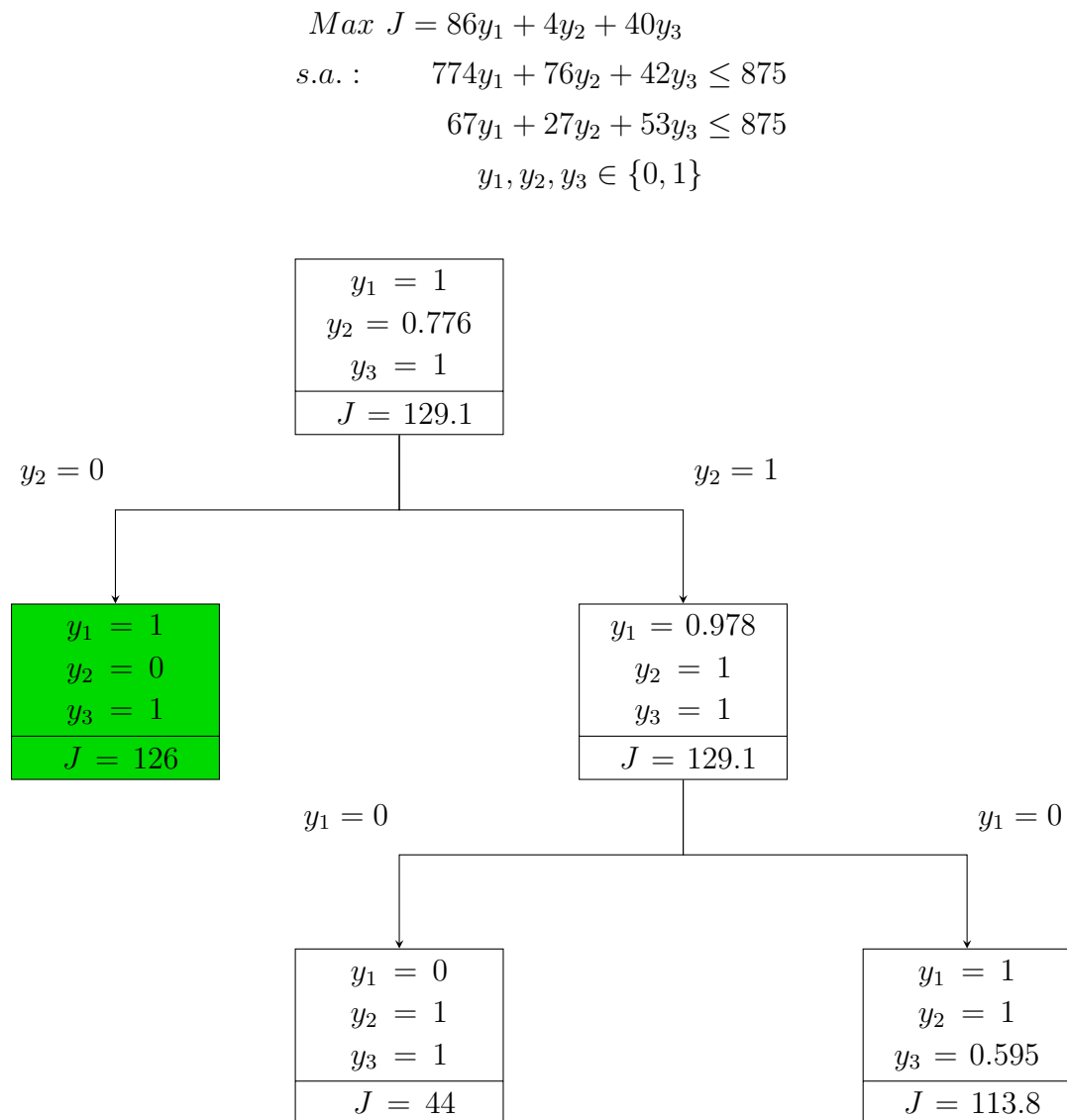


Figura 1: Branch & Bound, Ejercicio 01

Entonces la solución óptima para el problema entero es:

- $y_1 = 1$.
- $y_2 = 0$.
- $y_3 = 1$.

Punto 02 - Ejercicio 02

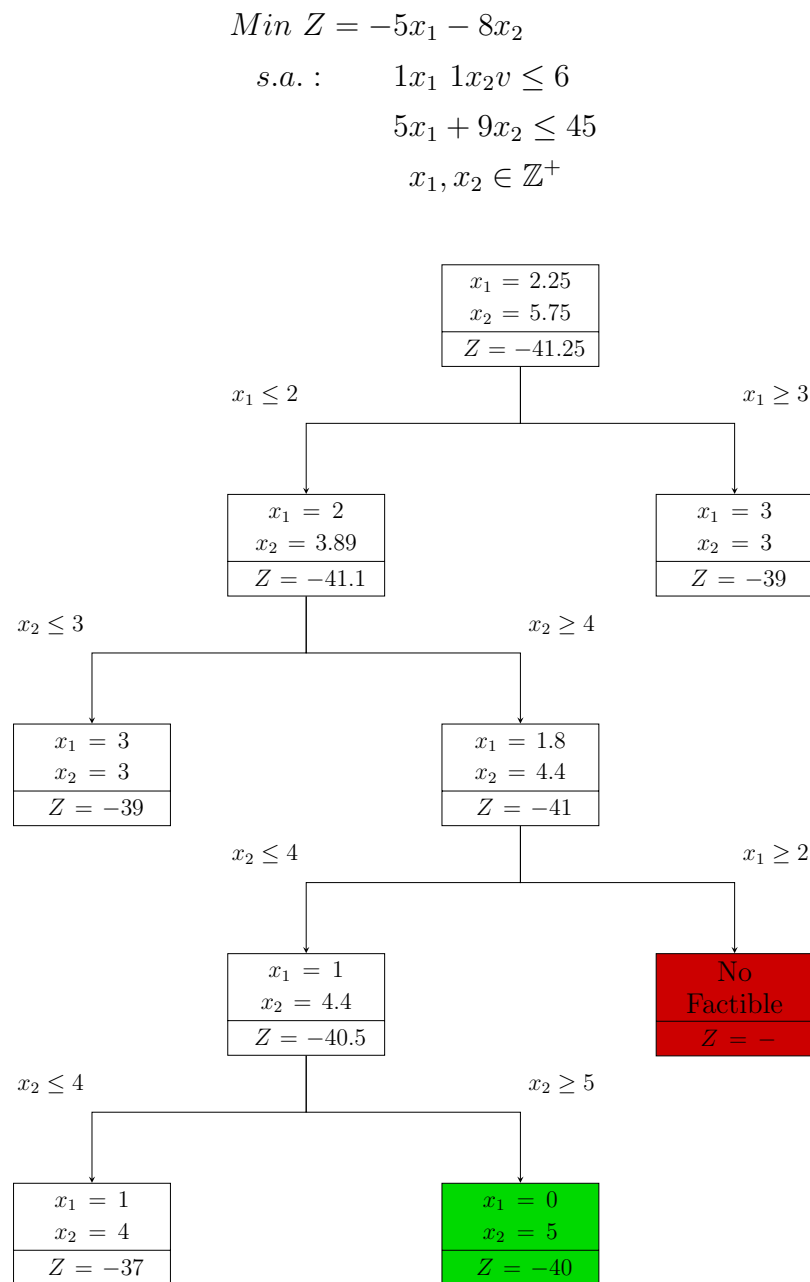


Figura 2: Branch & Bound, Ejercicio 02

Entonces la solución óptima para el problema entero es:

- $x_1 = 0$.
- $x_2 = 5$.

Solución de Problemas

Punto 03 - Compañía

Problema Lineal

Variables de decisión:

- X_1 cantidad de plantas del tipo A.
- X_2 cantidad de plantas del tipo B.

Función Objetivo

$$\text{Max } Z = 4 \left[\frac{um}{A} \right] X_1 [A] + 3 \left[\frac{um}{B} \right] X_2 [B]$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} 2 \left[\frac{ing}{A} \right] X_1 [A] + 1 \left[\frac{ing}{B} \right] X_2 [B] &\leq 18 [ing] \\ 1 \left[\frac{eco}{A} \right] X_1 [A] + 3 \left[\frac{eco}{B} \right] X_2 [B] &\leq 15 [eco] \end{aligned}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Según *LINGO* la solución óptima consiste en establecer 8 plantas del tipo A y 2 del tipo B, obteniendo un beneficio de 38u.m.

Gravámenes

Variables de decisión:

- X_1 cantidad de plantas del tipo A.
- X_2 cantidad de plantas del tipo B.
- X_3 Unidades producidas.
- X_4 Unidades por las que nos penalizan.

Función Objetivo

$$\text{Max } Z = 4 \left[\frac{um}{A} \right] X_1 [A] + 3 \left[\frac{um}{B} \right] X_2 [B] + 0X_3 - 2 \left[\frac{um}{u} \right] X_4 [u]$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned}
 2 \left[\frac{ing}{A} \right] X_1 [A] + 1 \left[\frac{ing}{B} \right] X_1 [B] &\leq 18 [ing] \\
 1 \left[\frac{eco}{A} \right] X_1 [A] + 3 \left[\frac{eco}{B} \right] X_1 [B] &\leq 15 [eco] \\
 600 \left[\frac{u}{A} \right] X_1 [A] + 1800 \left[\frac{u}{B} \right] X_1 [B] &\geq 5400 [u] \\
 600 \left[\frac{u}{A} \right] X_1 [A] + 1800 \left[\frac{u}{B} \right] X_1 [B] &= X_3 [u] \\
 (X_3 - 2500) [u] &= X_4 [u] \\
 X_1, X_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Según *LINGO* la solución optima consiste en establecer 9 plantas del tipo A y 0 del tipo B, produciendo exactamente 5400 unidades, siendo penalizados por 2900 y teniendo una perdida igual a -5764

Punto 04 - Industria: Servicios - Sector: Finanzas - Objeto: Selección de Proyectos

Siendo la formula del VAN: $VAN = \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{(a+k)^i} - I_0$
Entonces debemos maximizar la siguiente función:

$$Max Z = \sum_{i=0}^6 X_i V_i$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^6 X_i P_{i0} &\geq -1000 \\
 \sum_{i=1}^6 X_i P_{i1} &\geq -250 \\
 \sum_{i=1}^6 X_i P_{i2} &\geq 0 \\
 \sum_{i=1}^6 X_i P_{i3} &\leq 150 \\
 X_1 + X_3 + X_5 + X_6 &\geq 2 \\
 X_1 + X_3 &= 1 \\
 X_3 &= X_5 \\
 -X_1 + X_2 &\leq X_4 + 1
 \end{aligned}$$

Punto 05 - Industria: Servicios Eléctricos - Sector: Producción - Objeto: Programación

La función objetivo en este caso es:

$$\begin{aligned} MIN = & 6(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 5(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + \\ & 8(X_{31} + X_{32} + X_{33}) + 4000(Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} - A1 - A2) + \\ & 3000(Y_{21} + Y_{23} + Y_{23} - B1 - B2) + 2000(Y_{31} + Y_{32} + Y_{33} - C1 - C2) \end{aligned}$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

$$(X_{11} + X_{21} + X_{31}) \geq 2500$$

$$(X_{12} + X_{22} + X_{32}) \geq 1800$$

$$(X_{13} + X_{23} + X_{33}) \geq 3500$$

$$400Y_{11} \leq X_{11}$$

$$300Y_{21} \leq X_{21}$$

$$500Y_{31} \leq X_{31}$$

$$400Y_{12} \leq X_{12}$$

$$300Y_{22} \leq X_{22}$$

$$500Y_{32} \leq X_{32}$$

$$400Y_{13} \leq X_{13}$$

$$300Y_{23} \leq X_{23}$$

$$500Y_{33} \leq X_{33}$$

$$2300Y_{11} \geq X_{11}$$

$$2000Y_{21} \geq X_{21}$$

$$3300Y_{31} \geq X_{31}$$

$$2300Y_{12} \geq X_{12}$$

$$2000Y_{22} \geq X_{22}$$

$$3300Y_{32} \geq X_{32}$$

$$2300Y_{13} \geq X_{13}$$

$$2000Y_{23} \geq X_{23}$$

$$3000Y_{33} \geq X_{33}$$

$$(1 - Y_{11}) + (1 - Y_{12}) + A1 \geq 1$$

$$(1 - Y_{12}) + (1 - Y_{13}) + A2 \geq 1$$

$$(1 - Y_{21}) + (1 - Y_{22}) + B1 \geq 1$$

$$(1 - Y_{22}) + (1 - Y_{23}) + B2 \geq 1$$

$$(1 - Y_{31}) + (1 - Y_{32}) + C1 \geq 1$$

$$(1 - Y_{32}) + (1 - Y_{33}) + C2 \geq 1$$

Las variables de decisión de la forma X_{ij} representan la producción del generador i en el periodo j . Por otra parte, las variables de activación asociadas Y_{ij} nos indican si el generador i estuvo activo en el periodo j . Por ultimo, las variables $[A|B|C]_{1|2}$ nos permiten determinar si el generador A,B,C estuvo activo en periodos continuos y por lo tanto no debemos pagar el costo de puesta en marcha del mismo.

Punto 06 - Industria: General - Sector: Logística - Objeto: Distribución

Cuadro 1: Datos sobre Fabricas

Fabrica N	Limite	Costo [\$/u]	Costo fijo	Venta
1	390	\$ 60	\$ 15,000	\$ 200
2	460	\$ 72	\$ 10,000	\$ 200
3	360	\$ 48	\$ 8,000	\$ 200
4	420	\$ 60	\$ 5,000	\$ 200

Cuadro 2: Datos sobre almacenes

	Almacen 1	Almacen 2	Almacen 3	Almacen 4	Almacen 5	Almacen 6
Fabrica 1	\$ 28	\$ 40	\$ 36	\$ 38	\$ 30	\$ 45
Fabrica 2	\$ 18	\$ 28	\$ 24	\$ 30	\$ 25	\$ 20
Fabrica 3	\$ 42	\$ 54	\$ 52	\$ 54	\$ 49	\$ 45
Fabrica 4	\$ 36	\$ 48	\$ 40	\$ 46	\$ 45	\$ 45
Requerimiento	180	280	150	200	170	180

Programa de Distribución

Las variables de decisión toman la forma X_{ij} , representando la cantidad de unidades producida en la fabrica i y transportada al almacén j . Al mismo tiempo, existen los valores C_i y T_{ij} , que indican los costos por unidades producida en la fabrica i y los costos de transporte por unidad de la fabrica i hacia el almacén j respectivamente. Por ultimo, las variables R_j y L_i representan los requerimientos a satisfacer del almacén j y el limite de producción de la fabrica i

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 C_i X_{ij} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 T_{ij} X_{ij}$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3, 4 & \quad \sum_{j=1}^6 X_{ij} \leq L_i \\ \forall j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 & \quad \sum_{i=1}^4 X_{ij} \geq R_i \\ \forall i = 1..4, j = 1..6 & \quad X_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

Costos fijos

Ahora se agrega la variable de activación Y_i que nos indica si en la fabrica i se produjo al menos una unidad y el costo fijo por fabrica i , F_i

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 C_i X_{ij} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 T_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^4 Y_i F_i$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3, 4 & \quad \sum_{j=1}^6 X_{ij} \leq L_i Y_i \\ \forall j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 & \quad \sum_{i=1}^4 X_{ij} \geq R_i \\ \forall i = 1..4, j = 1..6 & \quad X_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

Precio de Venta

Se modifica la función objetivo acorde al precio de venta por unidad de \$200.

$$\text{Max } Z = 200 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 X_{ij} - \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 C_i X_{ij} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 T_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^4 Y_i F_i \right)$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3, 4 & \quad \sum_{j=1}^6 X_{ij} \leq L_i Y_i \\ \forall j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 & \quad \sum_{i=1}^4 X_{ij} \geq R_i \\ \forall i = 1..4, j = 1..6 & \quad X_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

Cierre

Se impone la restricción de que solo 3 fabricas puedan operar

$$\text{Max } Z = 200 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 X_{ij} - \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 C_i X_{ij} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 T_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^4 Y_i F_i \right)$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 Y_i &= 3 \\ \forall i = 1, 2, 3, 4 \quad \sum_{j=1}^6 X_{ij} &\leq L_i Y_i \\ \forall j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad \sum_{i=1}^4 X_{ij} &\geq R_i \\ \forall i = 1..4, j = 1..6 \quad X_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

Punto 07 - Industria: Servicios - Sector: Logística - Objeto: Localización

20 minutos

La variable de decisión X_i nos indica si debemos establecer un centro de reparación en la ciudad i . Función Objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^6 X_i$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} 1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\geq 1 \\ 1X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 1X_6 &\geq 1 \\ 1X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 1X_6 &\geq 1 \\ 0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 1X_5 + 0X_6 &\geq 1 \\ 0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 1X_5 + 1X_6 &\geq 1 \\ 0X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 1X_6 &\geq 1 \end{aligned}$$

15 Minutos

Función Objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^6 X_i$$

Sujeta a:

$$1X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 \geq 1$$

$$1X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 1X_6 \geq 1$$

$$0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0X_6 \geq 1$$

$$0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 1X_5 + 0X_6 \geq 1$$

$$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 1X_5 + 1X_6 \geq 1$$

$$0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 1X_6 \geq 1$$

Punto 08 - Sophilos

Variables:

▪ X_1 cantidad de vasijas de fondo oscuro a comprar.

▪ X_2 cantidad de vasijas de fondo claro a comprar.

$$\text{▪ } Y_d = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 + X_2 \geq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{▪ } Y_o = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 \geq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{▪ } Y_c = \begin{cases} 1 & \text{si } X_2 \geq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{▪ } Y_p = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 + X_2 \geq 9 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Función Objetivo:

$$\text{Min } Z = 20X_1 + 28X_2 - (100Y_d) - (X_1 + X_2) \times (10(1 - Y_p) + 8Y_p)$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned}
 X_1 + X_2 &\geq 10Y_d \\
 X_1 &\geq 1Y_o \\
 X_2 &\geq 1Y_c \\
 Y_o + Y_c &\leq 1 \\
 X_1 + X_2 &\geq 9Y_p \\
 X_1 &\geq A.Y_o \\
 X_2 &\geq B.Y_c \\
 X_1, X_2 &\in \mathbb{Z}^+ \quad Y_c, Y_o, Y_p \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Punto 09 - Mainframe Universidad

Se busca minimizar el costo de realizar backups de las bases de datos de un Mainframe, el cual es proporcional a la cantidad de GB utilizados. Contamos con 10 cintas de distintas capacidades, siendo el siguiente el vector de costos:

$$capac = [1.3, 5, 3.1, 4.3, 5.1, 4, 3, 1, 2, 10.2]$$

Entonces nuestras variables de decisión tienen la forma:

- X_{ij} Representa si a la base de datos $i \in \{A, B, C, D, E\}$ se le realiza un backup en la cinta $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Y la función de capacidades utilizadas es:

$$Min Z = \sum_{j=1}^{10} \left[capac_j \sum_{i=A}^E X_{ij} \right]$$

sujeta a:

$$\begin{aligned}
 X_{A3}, X_{A6}, X_{A7}, X_{A10} &= 0 \\
 X_{B2}, X_{B4}, X_{B5}, X_{B7}, X_{B8}, X_{B9}, X_{B10} &= 0 \\
 X_{C1}, X_{C3}, X_{C4}, X_{C6}, X_{C8}, X_{C9} &= 0 \\
 X_{D1}, X_{D2}, X_{D4}, X_{D5}, X_{D7}, X_{D9}, X_{D10} &= 0 \\
 X_{E3}, X_{E5}, X_{E8} &= 0 \\
 X_{ij} &\in \{0, 1\} \quad \forall i = A...E, j = 1...10
 \end{aligned}$$

Punto 10 - Instalación de Alta Montaña

Se busca maximizar la utilidad de los equipos de reparación que el operario puede llevar a la montaña atendiendo a el limite de peso que el mismo puede cargar. Se trata de un caso del **Problema de la Mochila**

Variables de Decisión:

- Y_i si el operario lleva el equipo i .

Función Objetivo:

$$\text{Max } Z = 100Y_1 + 60Y_2 + 70Y_3 + 15Y_4 + 15Y_5$$

Sujeta a:

$$52Y_1 + 23Y_2 + 35Y_3 + 15Y_4 + 7Y_5 \leq 60$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \in \{0, 1\}$$

Luego de cargar el problema en *LINGO* el mismo indica que lo mas conveniente es llevar los equipos 2 y 3 consiguiendo una utilidad en reparaciones de 130