# Investigacion Operativa

C.C. Lauritto & Ing. Casanova

# Guia 05: Modelos de Red

Fecha de Entrega: 04 de Diciembre de 2016

Ravera P. & Rivera R.

# Índice

Solucion de Problemas	3
Punto 01 - Reemplazo de Equipos	. 3
Punto 02 - Ruta mas Segura	. 4
Punto 03 - Aceleracion de Proyectos	. 6
Punto 04 - Problema de la Ruta mas corta como problema PL	. 8
Punto 05 - Interconexion de Nodos	. 8
Punto 06 - Interconexion de Nodos 02	. 9
Punto 07 - Interconexion de Nodos 03	. 10
Punto 08 - Flujo maximo en la Industria del Petroleo	. 11
Punto 09 - Flujo Maximo de Informacion	. 13
Punto 10 - Problema de Flujo Maximo como Problema de Programacion Lineal	. 17
Punto 11 - Flujo de costo Minimo 01	. 17
Punto 12 - Flujo de costo Minimo 02	. 18
Punto 13 - Stanley Morgan	. 19
Trayectorias y Longitudes	. 19
Tiempos	. 19
Retrasos	. 21
Punto 14 - Lockhead Aircraft	. 21
Media y Varianza	. 21
Ruta Critica Media	. 22
Probabilidad 100 semanas	. 22
Posibilidad	. 22
Punto 15 - Aceleracion Lockhead	. 22
Programa Lineal	. 22
Solucion	. 23
Informe	. 24

# Solucion de Problemas

## Punto 01 - Reemplazo de Equipos

Problema Lineal:

$$\begin{aligned} Min~Z &= 4000X_{12} + 4300X_{23} + 4800X_{34} + 4900X_{45} \\ &+ 5400X_{13} + 9800X_{14} + 6200X_{24} + 8700X_{25} + 7100X_{35} \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n-1} X_{1j} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_{i5} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_{ik} = \sum_{j=1}^{5} X_{kj} \quad \forall k \neq 1, 5$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} X_{ij} \in \{0, 1\}$$

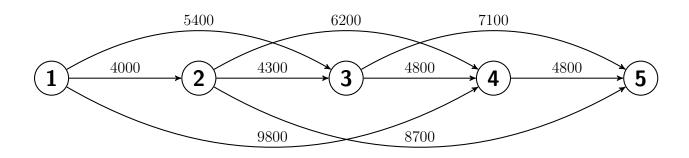


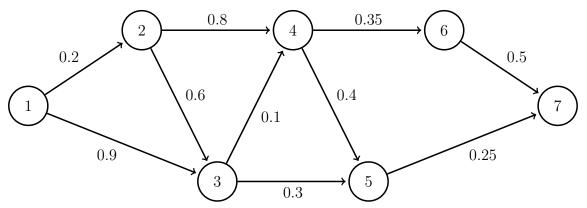
Figura 1: Grafo 01

Cuadro 1: Iteraciones del Metodo

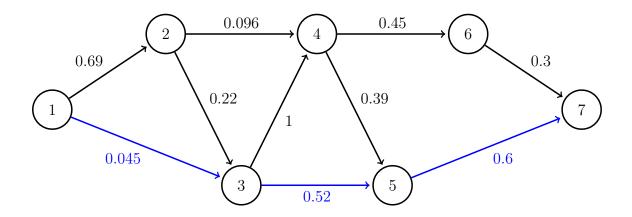
Iteracion	Nodo Resuelto	Nodo No Res. mas Cercano	Distancia Total	K-esimo Nodo mas Cercano	Ultima Conexion
1	1	2	4000	2	1-2
$\phantom{aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa$	1	3	5400	3	1-3
<i>Z</i>	2	3	8300	3	
	1	4	9800	4	1-4
3	2	4	10200	-	
	3	4	10200	-	
	2	5	12700	-	
4	3	5	12500	5	3-5

En la tabla anterior se aprecia que la ruta mas corta es  $1 \to 3 \to 5$ , lo que significa que nos conviene adquirir el equipo en el primer año y renovarlo cada 2 años.

Punto 02 - Ruta mas Segura



Si bien la red anterior representa las posibilidaes de no ser detenido, para poder resolverlo como un problema de ruta mas corta caluclamos el opuesto del logaritmo decimal de los valores, de manera de muscar minimizar las posibilidades de ser detenidos, como se ve en la siguiente red:



Cuadro 2: Iteraciones

Iteracion	Nodo	Nodo No Res.	Nodo No Res. Distancia		${f Ultima}$
	Resuelto	mas Cercano	Total	mas Cercano	Conexion
1	1	3	0.45	3	1-3
$\phantom{aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa$	1	2	0.69	-	
2	3	5	0.52	5	3-5
	1	2	0.69	-	
3	3	4	1	-	
	5	7	0.60	7	5-7

La ruta mas corta (la que tiene menos posibilidades de ser detectado) es la que recorre los nodos  $1 \to 3 \to 5$ 

# Punto 03 - Aceleración de Proyectos

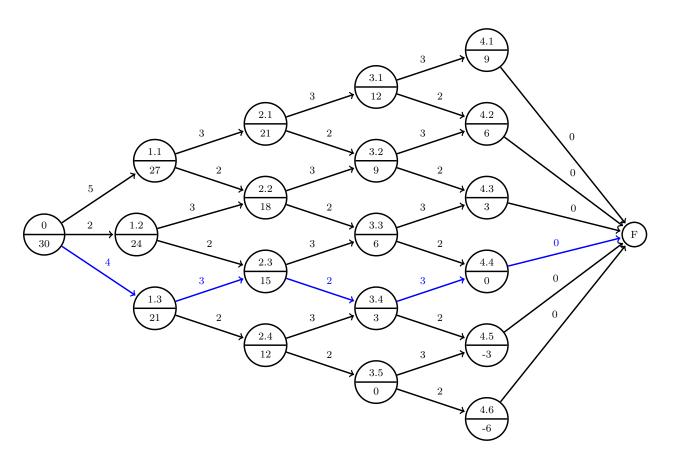


Figura 2: Red de Aceleracion

De esta manera, llegamos a un tiempo minimo de 10 meses. Esto se logra realizando la primer y tercera etapa en el nivel 'Quiebre' y las etapas 2 y 4 en el nivel 'Prioridad'. Se consume todo el presupuesto disponible.

Cuadro 3: Iteraciones

Iteracion	Nodo Resuelto	Nodo No Res. mas Cercano	Distancia Total	K-esimo Nodo mas Cercano	Ultima Conexion
1	0	13	2	13	0-13
0	0	12	4	12	0-12
2	13	24	4	24	13-24
	0	11	5	11	0-11
3	13	23	5	23	13-23
3	12	23	6	-	
	24	34	9	-	
	11	22	7	22	11-22
1	12	22	7	22	12-22
4	23	34	8	-	
	24	34	9	-	
	11	21	8	21	11-21
5	22	33	10	-	
	23	34	8	34	23-34
	24	34	9	-	
	21	32	11	-	
6	22	33	10	33	22-33
U	23	33	10	33	23-33
	34	44	10	44	34-44
	21	32	11	-	
7	22	32	12	-	
•	33	43	12	-	
	44	F	10	F	44-F
	21	32	11	32	21-32
8	22	32	12	-	
	33	43	12	-	
	21	31	13	-	
9	33	43	12	43	33-43
	32	43	12	43	32-43
10	21	31	13	31	21-31
10	33	42	13	42	33-42
11	32	41	15	41	32-41

# Punto 04 - Problema de la Ruta mas corta como problema PL

OBjetivo: minimizar la distancia recorrida. Variables de decision:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se viaja de } i \text{ a } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Funcion Objetivo:

Min 
$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} X_{ij}$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

[Unico Comienzo] 
$$\sum_{j=1}^{m} X_{0j} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{iF} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ik} - \sum_{j=1}^{m} X_{kj} = 0 \quad \forall k \neq 0 \land k \neq F$$

$$\forall i = 1..n \quad \forall j = 1..m \qquad X_{ij} \in \{0, 1\}$$

## Punto 05 - Interconexion de Nodos

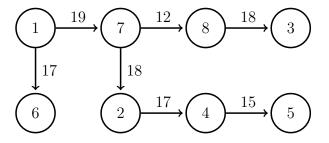


Figura 3: Tendido de Lineas

Con el tendido que se indica en la figura precedente, se logra un costo minimo de 98 u.m.

# Punto 06 - Interconexion de Nodos 02

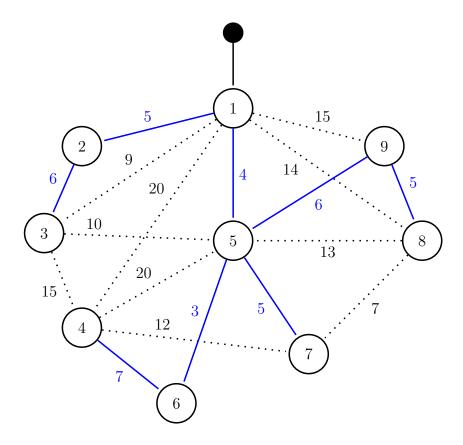


Figura 4: Conexiones de pozos de Gas

Con este diagrama de conexiones logramos que la longitud de la red de tuberias necesarias sea minima, con un valor de 46 millas.

# Punto 07 - Interconexion de Nodos 03

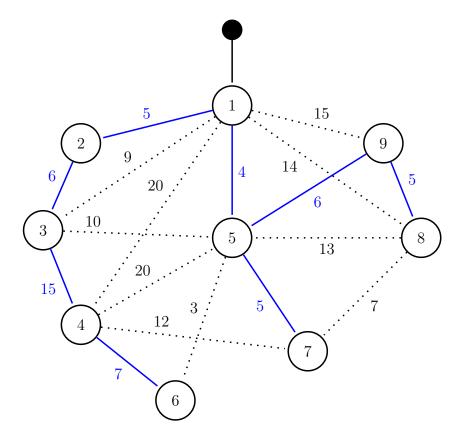


Figura 5: Conexiones de pozos de Gas 2

Con este diagrama de conexiones logramos que la longitud de la red de tuberias necesarias sea minima, con un valor de 51 millas.

#### Punto 08 - Flujo maximo en la Industria del Petroleo

Este ejercicio se resolvio mediante la carga del siguiente codigo en el software LINGO:

Solucion por Software 1: Codigo del Problema

```
MODEL:
      Xij: cantidad a transportar del nodo I al J
      B: demandas y ofertas de cada nodo. Demanda de Origen igual y singo
          contrario a demanda de Fin.
      {\tt ARCOS: arcos\ entre\ nodos.}
      Uij: capacidad maxima del lazo ij.
      Cij: costo por enviar una unidad del nodo I al J.
      INCIDENCIA: Matriz de incidencia. Arcos sobre nodos.
SETS:
      NODOS: B;
      ARCOS: U, C, X;
      M (NODOS, ARCOS): INCIDENCIA;
ENDSETS
DATA:
       = ORIG CA01 CA02 CA03 CA04 RF01 RF02 RF03 RF04 CD01 CD02 CD03 CD04
NODOS
   DEST:
                        0
                            0
       = 150
      -150;
ARCOS
       = ORC1 ORC2 ORC3 ORC4 C1R1 C1R2 C1R3 C1R4 C2R1 C2R2 C2R3 C2R4 C3R1
   C3R2 C3R3 C3R4 C4R1 C4R2 C4R3 C4R4 R1D1 R1D2 R1D3 R1D4 R2D1 R2D2 R2D3
   R2D4 R3D1 R3D2 R3D3 R3D4 R4D1 R4D2 R4D3 R4D4 D1DS D2DS D3DS D4DS ORDS;
U
      = 28 24 28 36 11 07 02 08 05
                                               04 08
                                                       07
       12 06 08 09 04 15 05 09 06 04 08
                                                     07 09
             07
                 80
                     12
                         11
                              09
                                  07
                                      29 33 31 24 150;
       0 0 0 0 0 0 0 500;
INCIDENCIA =
!ORIG; 01 01 01 01
                  00 00 00 00
                              00 00 00 00
                                          00 00 00 00
                                                     00 00 00 00
    00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00
                                       00 00 00 00
                                                    00 00 00 00
   01
                 01 01 01 01
                              00 00 00 00
      -1 00 00 00
                                          00 00 00 00
    00 00 00 00 00 00 00 00 00 00 00
                                       00 00 00 00
                                                    00 00 00 00
!CA02; 00 -1 00 00 00 00 00 00
                            01 01 01 01 00 00 00 00
    00 00 00 00
   0.0
!CA03; 00 00 -1 00 00 00 00 00
                             00 00 00 00
                                        01 01 01 01
                                                     00 00 00 00
    00 00 00 00
!CA04; 00 00 00 -1
                  00 00 00 00
                              00 00 00 00
                                        00 00 00 00
                                                     01 01 01 01
    00 00 00 00 00 00 00 00
                            00 00 00 00 00 00 00 00
```

```
-1 00 00 00
                -1 00 00 00
                       -1 00 00 00
!RF01; 00 00 00 00
  00
0.0
!RF03; 00 00 00 00 00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 -1 00
                             00 00 -1 00
  0.0
!RF04; 00 00 00 00 00 00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 -1
  00 00 00 00
00 00 00 00
  -1 00 00 00   -1 00 00 00   -1 00 00 00   -1 00 00 00 01 00 00 00
00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 01 00 00
00 00 00 00
  00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 01 00
00 00 00 00
  00 00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 -1 00 00 00 01
-1
ENDDATA
   !FUNCION OBJETIVO;
   MIN = @SUM(ARCOS(j):C(j)*X(j));
   !RESTRICCIONES DE LOS NODOS;
   @FOR(NODOS(i):
           @SUM(ARCOS(j): INCIDENCIA(i,j)*X(j)) = B(i)
   !RESTRICCIONES DE CAPACIDAD;
   @FOR(ARCOS(j):
           @BND(0,X(j),U(j))
   );
END
```

A continuación se incluye la sección pertinente de la solución calculada.

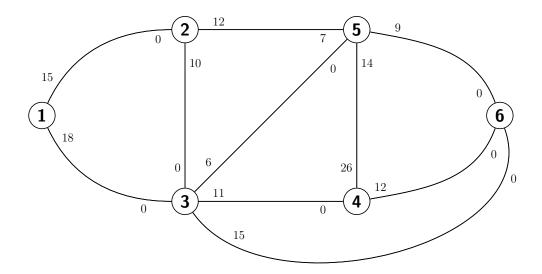
Solucion por Software 2: Solucion Optima

		1	Software 2: Softetion Optima
Х (	ORC1)	28.00000	0.000000
Х (	ORC1)	28.00000	0.00000
Х (	ORC1)	28.00000	0.00000
Х (	ORC1)	28.00000	0.000000
Х (	ORC1)	28.00000	0.000000
Х (	ORC1)	28.00000	0.00000
Х (	ORC1)	28.00000	0.000000
Х (	ORC1)	28.00000	0.000000
Х (	ORC2)	24.00000	0.000000
Х (	ORC3)	28.00000	0.000000
Х (	ORC4)	28.00000	0.00000
Х (	C1R1)	11.00000	0.000000
Х (	C1R2)	7.000000	-500.0000
Х (	C1R3)	2.000000	0.00000
Х (	C1R4)	8.000000	-500.0000
Х (	C2R1)	5.000000	0.000000
Х (	C2R2)	4.000000	-500.0000
Х (	C2R3)	8.000000	0.000000
Х (	C2R4)	7.000000	-500.0000
Х (	C3R1)	7.000000	0.000000
Х (	C3R2)	3.000000	-500.0000
Х (	C3R3)	12.00000	0.00000
Х (	C3R4)	6.000000	-500.0000
Х (	C4R1)	1.000000	0.00000
Х (	C4R2)	9.000000	-500.0000
Х (	C4R3)	3.000000	0.00000
Х (	C4R4)	15.00000	-500.0000
Х (	R1D1)	5.000000	-500.0000
Х (	R1D2)	9.000000	-500.0000
Х (	R1D3)	6.000000	-500.0000
Х (	R1D4)	4.000000	-500.0000
Х (	R2D1)	8.000000	0.000000
Х (	R2D2)	7.000000	0.000000
Х (	R2D3)	8.000000	0.000000
Х (	R2D4)	0.000000	0.000000
Х (	R3D1)	4.000000	-500.0000
X (	R3D2)	6.000000	-500.0000
Х (	R3D3)	7.000000	-500.0000
Х (	R3D4)	8.000000	-500.0000
Х (	R4D1)	12.00000	0.000000
X (	R4D2)	11.00000	0.000000
Х (	R4D3)	9.000000	0.000000
X (	R4D4)	4.000000	0.000000
X (	D1DS)	29.00000	0.000000
X (	D2DS)	33.00000	0.000000
X (	D3DS)	30.00000	0.000000
Х (	D4DS)	16.00000	0.000000
X (	ORDS)	42.00000	0.000000

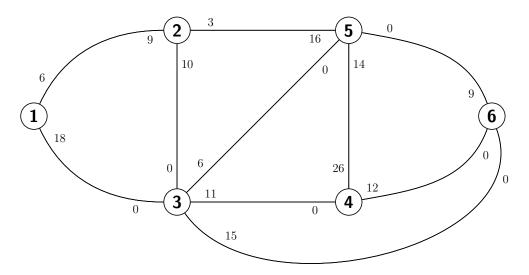
Se puede apreciar que el flujo maximo es de 108.

# Punto 09 - Flujo Maximo de Informacion

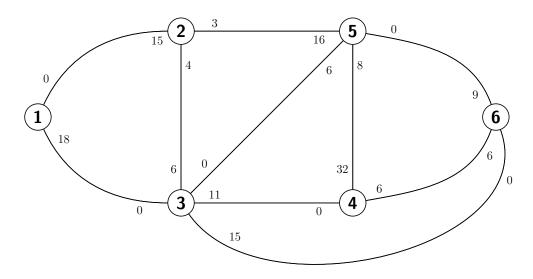
Inicial



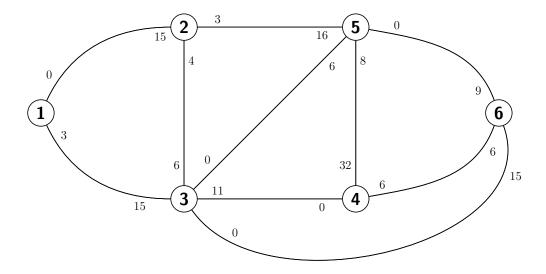
Trayectoria de Aumento 01: 1 - (15) - 2 - (12) - 5 - (9) - 6 = 9



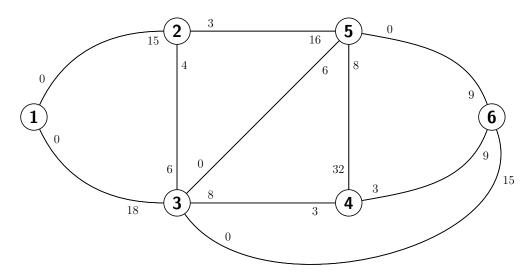
Trayectoria de Aumento 02: 1 - (6) - 2 - (10) - 3 - (6) - 5 - (14) - 4 - (12) - 6  $\,=\,$  6



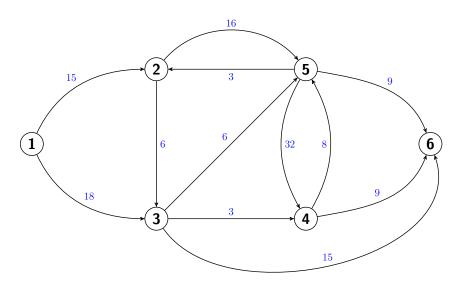
Trayectoria de Aumento 03: 1 - (18) - 3 - (15) - 6 = 15



Trayectoria de Aumento 04: 1 - (18) - 3 - (15) - 4 - () - 6  $\,=\,$  3



A continuacion, la red de flujo maximo (igual a 33)



# Punto 10 - Problema de Flujo Maximo como Problema de Programacion Lineal

Objetivo: Maximizar la cantidad de viajes desde el nodo origen al nodo destino. Variables de Decision:

•  $X_{ij}$  = antidad de viajes desdei hacia j

Funcion Objetivo:

$$Max Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} X_{ij}$$

Sujeta a:

$$X_{ij} \le C_{ij}$$

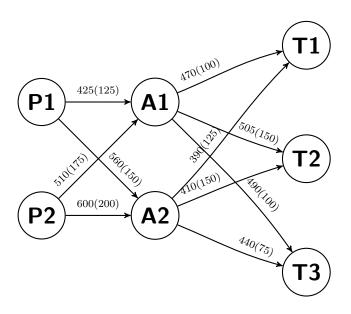
$$\sum_{i=1}^{n} X_{ik} = \sum_{j=1}^{m} X_{kj}$$

$$\forall k \ne 0 \land k \ne F$$

$$X_{ij} \ge 0$$

$$\forall i = 1..n \quad \forall j = 1..m$$

# Punto 11 - Flujo de costo Minimo 01

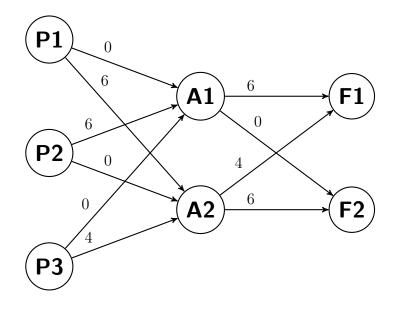


El plan de distribucion optimo (segun LINGO) es:

- Enviar 125 unidades de P1 a A1.
- Enviar 75 unidades de P1 a A2.

- Enviar 125 unidades de P2 a A1.
- Enviar 175 unidades de P2 a A2.
- Enviar 100 unidades de A1 a T1.
- Enviar 50 unidades de A1 a T2.
- Enviar 100 unidades de A1 a T3.
- Enviar 50 unidades de A2 a T1.
- Enviar 150 unidades de A2 a T2.
- Enviar 50 unidades de A2 a T3.

# Punto 12 - Flujo de costo Minimo 02



El plan mensual optimo (segun LINGO) es:

- Ordenar 6 embarques al proveedor 1 y 2.
- Ordenar 4 embarques al proveedor 3.
- Enviar 6 embarques desde el almacen 1 a la fabrica 1.
- Enviar 4 embarques desde el almacen 2 a la fabrica 1 y 6 a la fabrica 2.

Con este plan se logra un costo igual a \$374460.

## Punto 13 - Stanley Morgan

## Trayectorias y Longitudes

- Inicio-A-D-H-M-Terminacion  $\rightarrow$  19
- Inicio-A-I-M-Terminacion  $\rightarrow$  17
- Inicio-B-E-J-M-Terminacion  $\rightarrow$  20
- Inicio-C-F-K-N-Terminacion  $\rightarrow$  16
- Inicio-C-G-L-N-Terminacion  $\rightarrow$  20

#### Tiempos

Cuadro 4: Finalizaciones y Holgura

Tarea	Inicio Temprano	Inicio Tardio	Finalizacion Temprano	Finalizacion Tardio	Holgura
A	0	1	6	7	1
В	0	0	3	3	0
$\mathbf{C}$	0	0	4	4	0
D	6	7	10	11	1
$\mathbf{E}$	3	3	10	10	0
$\mathbf{F}$	4	8	8	12	4
G	4	4	10	10	0
$\mathbf{H}$	10	11	13	14	1
I	6	9	11	14	3
J	10	10	14	14	0
K	8	12	11	15	4
${ m L}$	10	10	15	15	0
M	14	14	20	20	0
N	15	15	20	20	0

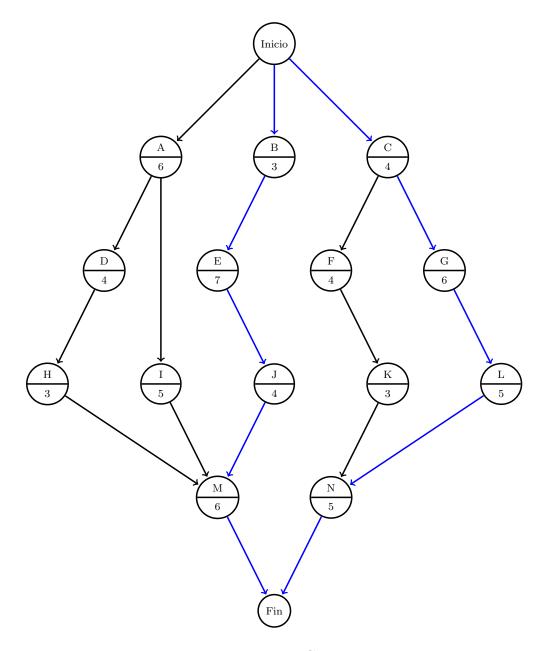


Figura 6: Ruta Critica

#### Retrasos

- La tarea I tiene una holgura de 2, entonces si dicha tarea se demora 2 semanas mas la duración total del proyecto sera de 20 semanas.
- La tarea H tiene una holgura de 1, entonces si dicha tarea se demora 2 semanas mas la duración total del proyecto sera de 21 semanas.
- La tarea J tiene una holgura de 0, entonces si dicha tarea se demora 2 semanas mas la duración total del proyecto sera de 22 semanas.

#### Punto 14 - Lockhead Aircraft

#### Media y Varianza

Siendo

$$\mu = \frac{a + 4m + b}{6}$$
  $\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{36}$ 

con

- a: Estimacion Optimista.
- m: Estimación mas Probable.
- b: Estimacion Pesimista

Cuadro 5: Media y Varianza

Actividad	Estimacion Optimista	Estimacion Mas Probable	Estimacion Pesimista	$\mu$	$\sigma^2$
A	28	32	36	32.00	1.78
В	22	28	32	27.67	2.78
$\mathbf{C}$	26	26	46	29.33	11.11
D	14	16	18	16.00	0.44
${ m E}$	32	32	32	32.00	0.00
$\mathbf{F}$	40	52	74	53.67	32.11
G	12	16	24	16.67	4.00
Н	16	20	26	20.33	2.78
I	26	34	42	34.00	7.11
J	12	16	30	17.67	9.00

#### Ruta Critica Media

La ruta critica media es aquella que recorre las tareas **B,F** y **J**. La misma tiene una  $\mu = 100$  y  $\sigma^2 = 44$ 

#### Probabilidad 100 semanas

$$X = 100 \ Semanas$$
 
$$K_{\alpha} = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{100 - 100}{7} = 0 \rightarrow P\{d \le 100\} = 0.5$$

Por lo tanto, existe una probabilidad de 50 % de que el proyecto se termine en 100 semanas

#### Posibilidad

Debido a los supuestos realizados por el modelo PERT, entre los que se incluye la distribucion de probabilidades Beta y tiempos independientes, el valor hallado anteriormente es menor al valor real, o sea, resulta mas pesimista.

#### Punto 15 - Aceleracion Lockhead

#### Programa Lineal

Variables de Decision

- $X_j$ : Cantidad de semanas a acelerar la tarea j.
- $Y_i$ : Fecha de inicio cercano de la actividad j.

Funcion Objetivo:

$$Min Z = 5X_a + 7X_b + 8X_c + 4X_d + 5X_e + 6X_f + 3X_q + 4X_h + 9X_i + 2X_j$$

Sujeta a:

$$X_a \le 4$$
  $X_b \le 3$   $X_c \le 5$   $X_d \le 3$   $X_e \le 5$   $X_f \le 7$   $X_g \le 2$   $X_h \le 3$   $X_i \le 4$   $X_j \le 2$ 

$$\begin{array}{lll} Y_{a} \geq Y_{ini} & Y_{b} \geq Y_{ini} & Y_{c} \geq Y_{a} + 32 - X_{a} \\ Y_{d} \geq Y_{b} + 28 - X_{b} & Y_{e} \geq Y_{b} + 28 - X_{b} & Y_{f} \geq Y_{b} + 28 - X_{b} \\ Y_{g} \geq Y_{d} + 16 - X_{d} & Y_{h} \geq Y_{e} + 32 - X_{e} & Y_{h} \geq Y_{g} + 17 - X_{g} \\ Y_{i} \geq Y_{e} + 32 - X_{e} & Y_{i} \geq Y_{g} + 17 - X_{g} & Y_{j} \geq Y_{c} + 36 - X_{c} \\ Y_{j} \geq Y_{f} + 54 - X_{f} & Y_{fin} \geq Y_{h} + 20 - X_{h} & Y_{fin} \geq Y_{i} + 34 - X_{i} \\ Y_{fin} \geq Y_{j} + 18 - X_{j} & Y_{j} \geq 0 & \forall j & Y_{j} \geq 0 & \forall j \end{array}$$

#### Solucion

Cuadro 6: Datos

Actividad	-	Tiempo Quiebre	Costo Normal	Costo Quiebre	Maxima Reduccion	Cto. Quiebre Por semana
A	32	28	160	180	4	5
В	28	25	125	146	3	7
$\mathbf{C}$	36	31	170	210	5	8
D	16	13	60	72	3	4
${ m E}$	32	27	135	160	5	5
$\mathbf{F}$	54	47	215	257	6	7
G	17	15	90	96	3	2
Η	20	17	120	132	4	3
I	34	30	190	226	9	4
J	18	16	80	84	2	2

Cuadro 7: Solucion

Ruta	Normal	Acel J	Acel J	Acel F	Acel F	Acel F	Acel B	Acel B	Acel B
Inicio-A-C-J-Fin	86	85	84	84	84	84	84	84	84
Inicio-B-F-J-Fin	100	99	98	97	96	95	94	93	92
Inicio-B-E-H-Fin	80	80	80	80	80	80	79	78	77
Inicio-B-E-I-Fin	94	94	94	94	94	94	93	92	91
Inicio-B-D-G-H-Fin	81	81	81	81	81	81	80	79	78
Inicio-B-D-G-I-Fin	95	95	95	95	95	95	94	93	92

La solucion hallada mediante el uso del software **LINGO** coincide con lo expuesto en la tabla anterior. La misma indica que la solucion optima consiste en acelerar 3 semanas la tareas **B** y **F** y 2 semanas la tarea **J**; para poder afrontar esta aceleracion debemos contar con 43 millones de pesos, logrando que la duracion del proyecto sea de 92 semanas.

#### Informe

Invirtiendo 43 millones de pesos logramos reducir la duracion total del proyecto a 92 semanas. Las tareas que debemos acelerar para lograr este tiempo son:

■ Tarea B: 3 Semanas.

■ Tarea F: 3 Semanas.

■ Tarea J: 2 Semanas.