Programación No Lineal

"He notado que gran parte de la información que poseo ha sido adquirida buscando algo y encontrando otra cosa en el proceso."

-- Franklin P. Adams.

1. Considere la siguiente función:
$f(x) = 48x - 60x^2 + x^3$
a) Utilice la primera y segunda derivadas para encontrar los máximos y mínimos locales de f(x).
b) Utilice la primera y segunda derivadas para demostrar que f(x) no tiene ni máximo ni mínimo globales porque es no acotada en ambas direcciones.
2. Demuestre si cada una de las siguientes funciones, es convexa, cóncava o ninguna de las dos.
a) $f(x) = 10x - x^2$
b) $f(x) = x^4 + 6x^2 + 12x$
c) $f(x) = 2x^3 - 3x2$
d) $f(x) = x^4 + x^2$
e) $f(x) = x^3 + x^4$

3. Determine los intervalos en los cuales $f(x) = x + 4x^{-1}$ es cóncava o convexa.

4. Localize el máximo de $f(x) = x + 4x^{-1}$ en el intervalo $(0;2]$ con un margen de error de $\varepsilon = 0.1$ utilizando el método de la sección de oro.

5. Localize el mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[-1;1]$ con un margen de error de $\varepsilon = 0.1$ utilizando el método de la sección de oro. Siendo:

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad -1 \le x < 0 \\ x & si \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

6. Hughesco está interesada en determinar, por medio de los datos de la siguiente tabla, cómo una reducción de la presión de chorro del líquido (*p*) afecta la vida útil de una máquina herramienta (*t*). La presión está restringida a estar entre 0 y 600 libras por pulgada cuadrada (psi). Utilice la búsqueda de la sección áurea para estimar (dentro de 50 unidades) el valor de *p* que maximiza la vida útil de la máquina herramienta. Suponga que *t* es una función unimodal de *p*.

p (libras por pulgada cuadrada)	t (Minutos)
229	39
371	81
458	82
513	79
425	84
404	85
392	84

7. Encuentre el máximo de $z = -(x_1 - \sqrt{5})^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10$ en la región $(-10;-10);(10;10)$ utilizando el método del ascenso acelerado y el método de Newton-Raphson Multivariable. (con una precisión de $5x10^{-2}$)

8. Considere el siguiente problema de optimización no restringida:

Maximizar $f(x) = 2x_1x_2 + x_2 – x_1^2 – 2x_2^2$

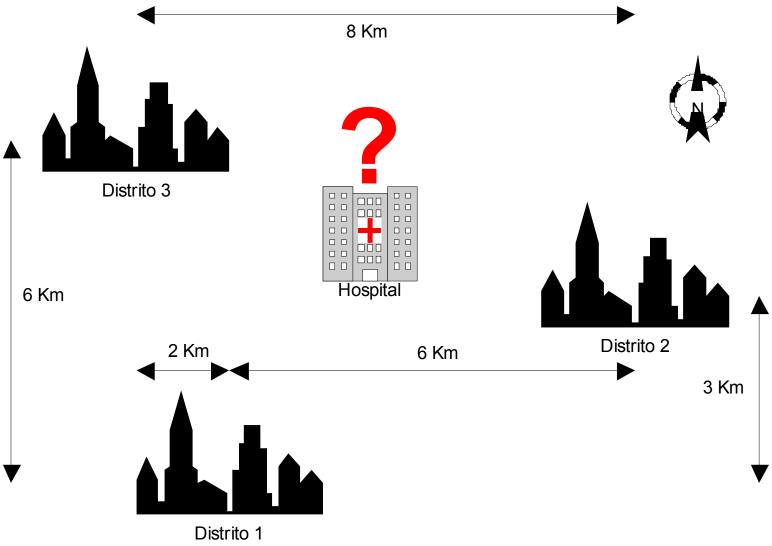
a) Si se inicia con la solución de prueba inicial $(x_1, x_2) = (1, 1)$, aplique el procedimiento de búsqueda del gradiente con $\varepsilon = 0.25$ para obtener una solución aproximada.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales que obtenga con $\nabla f(x) = 0$ para llegar a la solución exacta.

c) Dibuje la trayectoria de las soluciones de prueba del inciso a). Después muestre la continuación aparente de esta trayectoria con la mejor estimación de las tres soluciones de prueba que siguen [según el patrón del inciso a)]. También muestre la solución exacta del inciso b) hacia la que converge esta sucesión de soluciones de prueba.

Ejercicio extraído del Examen Parcial tomado el 07/07/2003.

9. La municipalidad desea determinar la localización del nuevo hospital. Este hospital deberá proveer asistencia a tres distritos de la ciudad (la distribución de los distritos se representa en la figura). La localización óptima es la que hace viajar menos a las personas que se beneficiarán con el servicio del hospital.



a) Plantee y resuelva el modelo del problema.

b)¿Sin resolver el problema podría decirme cuánto debería caminar como máximo una persona para atenderse en el nuevo hospital?

Ejercicio extraído del Examen Parcial tomado el 07/07/2003.

10. Una firma produce un artículo que se vende en dos mercados. La firma es un monopolio en el mercado 1 y vende el artículo a \$60 cada unidad. El mercado 2 es competitivo por lo que la curva de demanda está dada por $p_2 = 100 - q_2$. Los costos de producción de la firma están dados por $C(q_1,q_2) = (q_1 + q_2)^2$ donde q_1 y q_2 son las cantidades de producto vendidas en el mercado 1 y en el mercado 2 respectivamente.

a) Plantee el modelo del problema para determinar la cantidad óptima a vender en cada mercado maximizando el beneficio. (Se permiten las cantidades negativas de producto)

b) Resuelva le modelo mediante algún método iterativo (con una precisión de $1x10^{-1}$). Exprese claramente los resultados.

c) Verifique los resultados mediante las condiciones analíticas de óptimo de la solución.

Ejercicio extraído del Examen Final tomado el 03/10/2003.

11. Una compañía planea gastar 10.000 \$ en publicidad. Cuesta \$3.000 un minuto de publicidad en la TV y \$1.000 un minuto de publicidad en la radio. Si la empresa compra *x* minutos de comerciales de TV e *y* minutos de comerciales en la radio, su ingreso (en miles de \$), está dado por:

$$f(x, y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$$

a) Formular el modelo de PNL que proporcione el plan óptimo de inversión.

b) Determinar el número de minutos que debe comprar la compañía en cada medio para optimizar sus ingresos. Verificar las condiciones analíticas de óptimo de la solución propuesta. Expresar la solución en términos económicos.
c) Suponga que es posible gastar $1000 extra en publicidad. ¿La compañía debería gastarlos? Justifique.

Ejercicio extraído del Examen Parcial tomado el 19/07/2003.
12. La cervecera Quilmes ha dividido el país en dos sectores: “Buenos Aires” e “Interior”. Si se gastan x_1 pesos en promocionar en el sector “Buenos Aires”, entonces se podrán vender $6x_1^{1/2}$ cajas de cerveza en dicho sector. Si se gastan x_2 pesos en promocionar en el sector “Interior”, entonces se podrán vender $4x_2^{1/2}$ cajas de cerveza en éste último.
Cada caja de cerveza vendida en el sector “Buenos Aires” se vende a 9 pesos y se incurre en 4 pesos de costos de producción y envío. Cada caja de cerveza vendida en el sector “Interior” se vende a 10 pesos y se incurre en 5 pesos de costos de producción y envío. Se dispone de un total de 100 pesos para promoción.

a) Formule y resuelva el modelo de PNL que maximiza el beneficio total.
b) Verifique el óptimo del problema aplicando las condiciones analíticas de óptimo.
c) Si se pudiera gastar un peso más en promoción, ¿en cuánto se incrementarían las ganancias? Justifique su respuesta.

13. Un paquete postal es una caja de dimensiones x, y, y z, que debe verificar los siguientes requisitos para ser aceptado en la oficina de correos. La altura más el perímetro de la base no puede exceder 108 cm. Se buscan las tres dimensiones que maximizan el volumen del paquete. Plantee y resuelva el modelo de PNL.