Investigacion Operativa

C.C. Lauritto & Ing. Casanova

Guia 07: Programacion No Lineal

Fecha de Entrega: 04 de Diciembre de 2016

Ravera P. & Rivera R.

Índice

Solucion de Problemas

Punto 01 - Hughesco

Siendo los datos iniciales:

$$r = 0.618 \quad \varepsilon = 50$$
$$a = 0 \quad b = 600$$

Iteracion 01

$$L = b - a = 600 - 0 = 600 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_1 = b - r\,(b - a) = 229.2$$
$$x_2 = a + r\,(b - a) = 370.8$$

$$f(x_1) = 39 \quad f(x_2) = 81$$
$$f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_1, b)$$

Iteracion 02

$$L = b - x_1 = 600 - 229.2 = 370.8 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_3 = b - r\,(b - x_1) = 370.7$$
$$x_4 = x_1 + r\,(b - x_1) = 458.2$$

$$f(x_3) = 81 \quad f(x_4) = 82$$
$$f(x_3) \leq f(x_4) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_3, b)$$

Iteracion 03

$$L = b - x_3 = 600 - 370.7 = 229.3 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_5 = b - r\,(b - x_3) = 458.29$$
$$x_6 = x_3 + r\,(b - x_3) = 512.40$$

$$f(x_5) = 82 \quad f(x_6) = 79$$
$$f(x_5) \geq f(x_6) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_3, x_5)$$

Punto 01 cont. en pag. siguiente...

Iteracion 04

$$L = x_5 - x_3 = 458.29 - 370.7 = 87.59 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_7 = x_5 - r\left(x_5 - x_3\right) = 404.15$$
$$x_8 = x_3 + r\left(x_5 - x_3\right) = 424.83$$

$$f(x_7) = 85 \quad f(x_8) = 84$$
$$f(x_7) \geq f(x_8) \rightarrow \text{ Nuevo Intervalo } = (x_3, x_7)$$

Iteracion 05

$$L = x_7 - X - 3 = 404.15 - 370.7 = 33.45 \rightarrow L \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, con un error de 33.45 podemos decir que existe en $x = 404$ un maximo.

Punto 02 - Ascenso Acelerado

Siendo la funcion multivariable:

$$z(x_1, x_2) = -\left(x_1 - \sqrt{5}\right)^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10$$

Ascenso Acelerado

Siendo el gradiente de la funcion:

$$\nabla z(x_1, x_2) = \left(-2x_1 + 2\sqrt{5}; -2x_2 + 2\Pi\right)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (2; 3)$.

Iteracion 01

$$X_1 = (2 + 0.47\lambda; 3 + 0.28\lambda)$$
$$z(X_1) = -10.076 + 0.3012\lambda + 0.3\lambda^2$$
$$\frac{\partial z'(X_1)}{\partial \lambda} = -0.6\lambda + 0.3012 = 0 \rightarrow \lambda = 0.5$$
$$X_1(0.5) = (2.235; 3.14)$$
$$||\nabla z(X_1)|| = 3.836x10^{-3} \leq 0.05$$

Por lo tanto, con un error de $3.836x10^{-3}$ se puede afirmar que existe un maximo en $X = (2.235; 3.14)$.

Newton Raphrson

Siendo el gradiente de la funcion:

$$\nabla z(x_1, x_2) = \left(-2x_1 + 2\sqrt{5}; -2x_2 + 2\Pi\right)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (2; 3)$.

Iteracion 01

$$\mathcal{H}_z = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{H}_z^{-1}(x_0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 + 2\sqrt{(5)} \\ -6 + 2\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ \pi \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se puede afirmar que existe un maximo en $X = \left(\sqrt{5}; \pi\right)$.

Punto 03 - Optimizacion no Restringida

Siendo la funcion multivariable:

$$z(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

Ascenso Acelerado

Utilizando la siguiente expresion como paso general:

$$X^{k+1} = X^k - \lambda^k.\nabla z\left(X^k\right)$$

Siendo el gradiente de la funcion:

$$\nabla z(x_1, x_2) = (2x_2 - 2x_1; 2x_1 + 1 - 4x_2)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (1; 1)$ con un error $\varepsilon = 0.25$.

Iteracion 01

$$\begin{aligned}
&X^1 = X^0 - \lambda^0.\nabla z\left(X^0\right) = (1; 1 - \lambda) \\
&z(X^1) = -2\left(1 - \lambda\right)^2 - 3\lambda + 2 \\
&\frac{\partial z'(X^1)}{\partial \lambda} = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2} = 0 \rightarrow \lambda = 0.50 \\
&X^1(0.50) = \left(1; \frac{3}{4}\right) \\
&||\nabla z(X^1)|| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon
\end{aligned}$$

Punto 03 cont. en pag. siguiente...

Iteracion 02

$$X^2 = X^1 - \lambda^1.\nabla z\left(X^1\right) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}; \frac{3}{4}\right)$$
$$z(X^2) = -\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{27}{8} - \frac{3\lambda}{4}$$
$$\frac{\partial z'(X^2)}{\partial \lambda} = 1 - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0.25$$
$$X^2(0.25) = \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$$
$$||\nabla z(X^2)|| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

Iteracion 03

$$X^3 = X^2 - \lambda^2.\nabla z\left(X^2\right) = \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$$
$$z(X^3) = -2\left(\frac{3}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{5\lambda}{4} + \frac{21}{16}$$
$$\frac{\partial z'(X^3)}{\partial \lambda} = \frac{1}{4} - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0.25$$
$$X^3(0.25) = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$$
$$||\nabla z(X^3)|| = \frac{1}{4} \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, con un error de 0.25 se puede afirmar que existe un maximo en $X = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$.

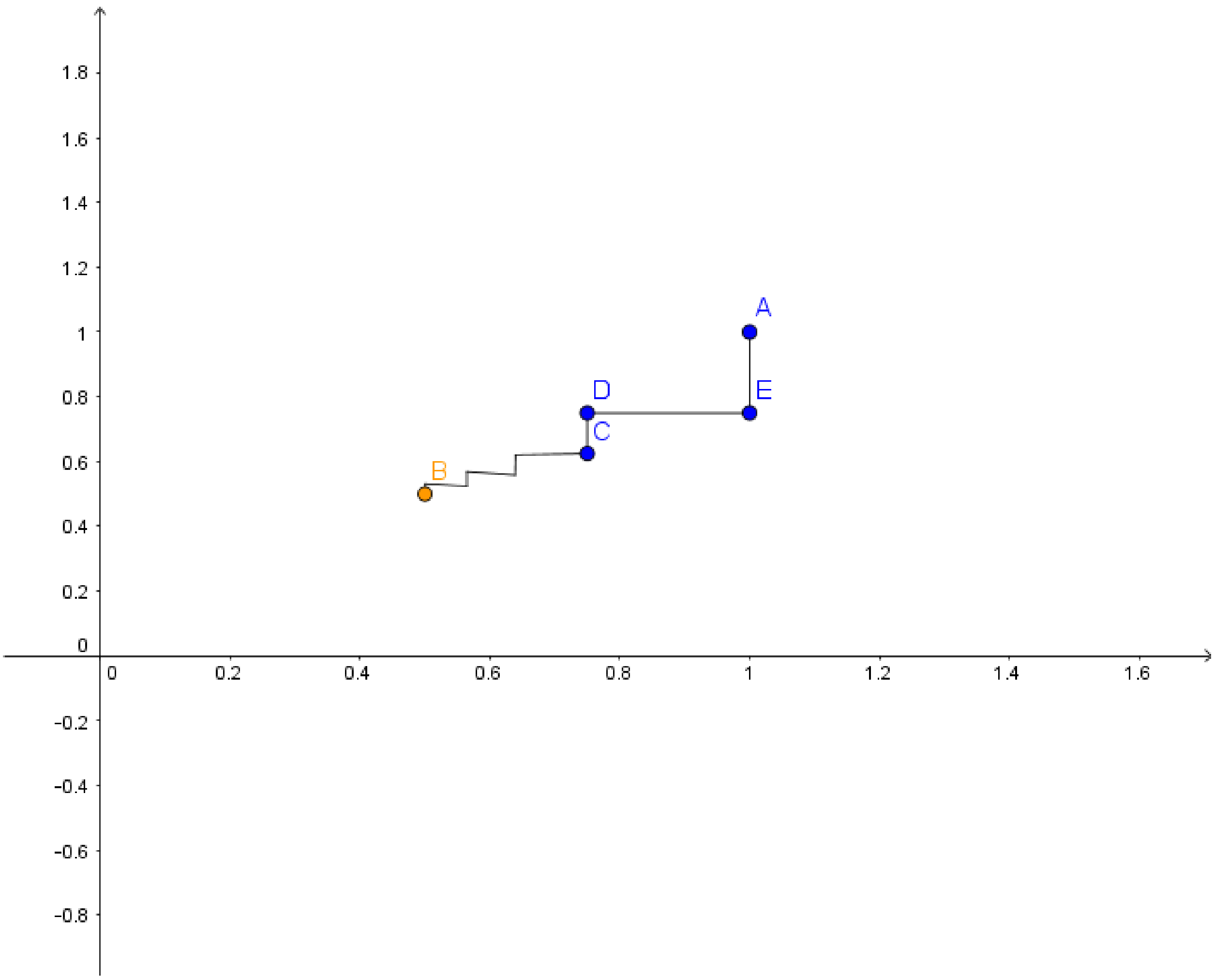
Sistema de Ecuaciones

$$\nabla z(x_1, x_2) = 0$$
$$\nabla z(x_1, x_2) = (2x_2 - 2x_1; 2x_1 + 1 - 4x_2) = (0; 0)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 - 2x_1 &= 0 \\ 2x_1 + 1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

Punto 03 cont. en pag. siguiente...

Trayectoria



Trayectoria estimada

Punto 04 - Municipalidad y Hospital

Variables de Decision:

- X: coordenada en el eje X del nuevo hospital.
- Y: coordenada en el eje Y del nuevo hospital.

Funcion Objetivo:

$$Min\ Z = \sqrt{(X-2)^2 + Y^2} + \sqrt{(X-8)^2 + (Y-3)^2} + \sqrt{X^2 + (Y-6)^2}$$

Luego de cargar el problema en el software **LINGO**, la solucion obtenida fue que la distancia sera 12.31, con coordenadas (2.91;2.27).

Punto 05 - Dos mercados

Problema Lineal

Funcion Objetivo:

$$Max\ Z = (60q_1 + (100 - q_2)\,q_2) - (q_1 + q_2)^2$$

Solucion Iterativa

Utilizando la siguiente expresion como paso general:

$$X^{k+1} = X^k - \lambda^k.\nabla z\left(X^k\right)$$

Siendo el gradiente de la funcion:

$$\nabla z(q_1, q_2) = (60 - 2q_1 - 2q_2; 100 - 4q_2 - 2q_1)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (5; 10)$ con un error $\varepsilon = 0.1$.

Iteracion 01

$$X^1 = X^0 - \lambda^0.\nabla z\left(X^0\right) = (5 + 30\lambda; 10 + 50\lambda)$$
$$z(X^1) = 60(5 + 30\lambda) + (100 - (10 + 50\lambda))(10 + 50\lambda) - ((5 + 3\lambda) + (10 + 50\lambda))^2$$
$$\frac{\partial z'(X^1)}{\partial \lambda} = -17800\lambda + 300 = 0 \to \lambda = \frac{17}{89}$$
$$X^1\left(\frac{17}{89}\right) = \left(\frac{955}{89}; \frac{1740}{89}\right)$$
$$||\nabla z(X^1)|| = 0.655 \geq \varepsilon$$

Iteracion 02

$$X^2 = X^1 - \lambda^1.\nabla z\left(X^1\right) = \left(\frac{955}{89} - \frac{50}{89}\lambda; \frac{1740}{89} + \frac{30}{89}\lambda\right)$$
$$z(X^2) = \frac{-}{1300}7921\lambda^2 + \frac{3400}{7921}\lambda + \frac{115675}{89}$$
$$\frac{\partial z'(X^2)}{\partial \lambda} = \frac{-}{2600}7921\lambda + \frac{3400}{7921} = 0 \to \lambda = \frac{17}{13}$$
$$X^2\left(\frac{17}{13}\right) = \left(\frac{11565}{1157}; \frac{23130}{1157}\right)$$
$$||\nabla z(X^2)|| = 0.05042 \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, con un error de 0.05042 se puede afirmar que existe un maximo en $X = \left(\frac{11565}{1157}; \frac{23130}{1157}\right)$.

Punto 05 cont. en pag. siguiente...

Solucion Analitica

Condicion Necesaria:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial q_1} = 0 \rightarrow 60 - 2q_1 - 2q_2 = 0\\ \frac{\partial z}{\partial q_2} = 0 \rightarrow 100 - 4q_2 - 2q_1 = 0\end{aligned}\right\} q_1 = 10 \wedge q_2 = 20$$

Condicion Suficiente:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 q_2} \\ \\ \frac{\partial^2 z}{\partial q_2 q_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

A partir del analisis de los determinantes de la hessiana, comproobamos que la condicion de optimo local se cumple, por lo que podemos assegurar encontrarnos frente a un maximo.

Punto 06 - Publicidad

Programa Lineal

Variables de Decision:

- x: cantidad de minutos a comprar de comerciales en tv.
- y: cantidad de minutos a comprar de comerciales en radio.

Funcion Objetivo:

$$Max\ Z = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} 3000x + 1000y \leq 10000 \\ x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Solucion

Para obtener el mejor rendimiento del dinero destinado a publicidad, recomendamos que la compañia adquiera 2.46 minutos de comerciales en TV y 2.6 en radio. De seguir este plan, los ingresos obtenidos ascenderian a los 15017.86

Punto 06 cont. en pag. siguiente...

Condicion Necesaria:
Aplicamos el metodo de los multiplicadores de Lagrange.

$$L(x,y,\lambda) = -2x^2 - y@ + xy + 8x + 3y + \lambda\,(10000 - 3000x - 1000y)$$
$$\nabla L = (-x + y + 8 - 3000\lambda; -2y + x + 3 - 1000\lambda; 10000 - 3000x - 1000y) = (0;0;0)$$
$$x = \frac{69}{28}$$
$$y = \frac{73}{28}$$
$$\lambda = \frac{1}{4000}$$

Condicion Suficiente:

$$\mathcal{H}\left(\frac{69}{28}, \frac{73}{28}, \frac{1}{4000}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3000 & 1000 \\ 3000 & -4 & 1 \\ 1000 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Analizando los determinantes del Hessiano Orlado, observamos que la condicion suficiente de optimo local es verificada por el punto hallado anteriormente, con loq ue podemos asegurar entonces que el mismo es un maximo.

Gastar $1000 extras?

Teniendo en cuenta el valor de λ el cual representa que tanto mejoraria nuestro funcional por unidad monetaria extra que se disponga nos inclinamos a des aconsejar la compra de minutos de publicidad extra, ya que de hacer esto, si bien la ganancia aumentaria, la inversion necesaria para obtener esta mejora seria mayor que dicha diferencia.

Punto 07 - Quilmes

Punto 08 - Paquete

Variables de Desicion:

- x: Ancho del paquete.
- y: Profundidad del paquete.
- z: Altura del paquete.

Punto 08 cont. en pag. siguiente...

Funcion Objetivo:

$$Max\ Z = xyz$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} &2(x+y)+z \leq 108 \\ &x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

La solucion es:

- $x = 18cm$.
- $y = 18cm$.
- $z = 36cm$.

Con un volumen total de $11664cm^3$.