Investigación Operativa

C.C. Lauritto & Ing. Casanova

Guia 01: Modelos Matemáticos

Fecha de Entrega: –

Ravera P. & Rivera R.

Índice

Ejercicios

Punto 01

- **Modelo a:** Deterministico, lineal y continuo
- **Modelo b:** Deterministico, lineal y continuo
- **Modelo c:** Deterministico, lineal y entero
- **Modelo d:** Deterministico, no lineal y restringido
- **Modelo e:** Deterministico, no lineal y restringido
- **Modelo f:** Deterministico, no lineal y restringido
- **Modelo g:** Deterministico, lineal y mixto (entero y binario)

Modelado de Problemas

Punto 01 - Destilación de Crudos

$$
\begin{aligned}
Min\ Z = 4G + 6P + 7S \\
s.a. \\
C_1 \leq 1400 \\
C_2 \leq 2000 \\
G \geq 900 \\
P \geq 300 \\
S \geq 800 \\
S \leq 1700
\end{aligned}
$$

Punto 02 - Televisores

Siendo x la cantidad de televisores de 27" e y la cantidad de televisores de 20.ª producir, entonces debemos minimizar la función

$$Max\ Z = 120 \left[\frac{\$}{Ux}\right] x\,[Ux] + 80 \left[\frac{\$}{Uy}\right] y\,[Uy] \tag{1}$$

sujeta a las siguientes restricciones:

$$
\begin{aligned}
x\,[Ux] \leq 40\,[\{]\,*\} \\
y\,[Uy] \leq 10\,[\{]\,(1)\} \\
20 \left[\frac{Hs}{Ux}\right] x\,[Ux] + 10 \left[\frac{Hs}{Uy}\right] y\,[Uy] \leq 500\,[Hs] \\
x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Las variables de decisión son x e y, y el modelo es determinista, lineal y entero (no debería poder producir medio televisor)

Punto 03 - Transportes

Siendo nuestras variables de decisión A y B representando respectivamente la cantidad de camiones de cada tipo a contratar, debemos optimizar la función

$$Min\ Z = 0,30 \left[\frac{\$}{Km.Ua}\right] A\,[Ua] + 0,40 \left[\frac{\$}{Km.Ub}\right] B\,[Ub] \tag{2}$$

sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned}
20 \left[\frac{m^3\ PR}{Ua}\right] A\,[Ua] + 30 \left[\frac{m^3\ PR}{Ub}\right] b\,[Ub] &\geq 900\,\left[m^3\ PR\right] \\
40 \left[\frac{m^3\ PnR}{Ua}\right] A\,[Ua] + 30 \left[\frac{m^3\ PnR}{Ub}\right] b\,[Ub] &\geq 1200\,\left[m^3\ PnR\right] \\
A, B &\geq 0
\end{aligned}$$

Punto 04 - Carnicería

Nuestras variables de decisión son la cantidad de carne de cerdo (X_c) y de ternera (X_t) por kilo de hamburguesa producida. Entonces buscamos la composición del kilo de hamburguesa que minimice el costo por kilo, definida de la siguiente forma:

$$Min\ Z = 0,8 \left[\frac{\$}{Kg_{Tern}}\right] X_t \left[\frac{Kg_{Tern}}{Kg_{Hamb}}\right] + 0,6 \left[\frac{\$}{Kg_{Cerd}}\right] X_c \left[\frac{Kg_{Cerd}}{Kg_{Hamb}}\right] \tag{3}$$

y sujeta a:

$$\begin{aligned}
0,2 \left[\frac{Kg_{Grasa}}{Kg_{Tern}}\right] X_t \left[\frac{Kg_{Tern}}{Kg_{Hamb}}\right] + 0,32 \left[\frac{Kg_{Grasa}}{Kg_{Cerd}}\right] X_c \left[\frac{Kg_{Cerd}}{Kg_{Hamb}}\right] &\leq 0,25 \left[\frac{Kg_{Grasa}}{Kg_{Hamb}}\right] \\
X_t \left[\frac{Kg_{Tern}}{Kg_{Hamb}}\right] + X_c \left[\frac{Kg_{Cerd}}{Kg_{Hamb}}\right] &= 1\,[Kg_j] \\
X_t, X_t &\geq 0
\end{aligned}$$

Punto 05 - Compañía Minera

En este caso, nuestras variables de decisión representan la cantidad de días que cada una de las minas debe estar operativa. Se busca la combinación de días que minimice el costo

$$Min\ Z = 2000 \left[\frac{\$}{Dia_1}\right] M_1 \left[Dia_1\right] + 2200 \left[\frac{\$}{Dia_2}\right] M_2 Y \left[Dia_2\right] + 1800 \left[\frac{\$}{Dia_3}\right] M_3 \left[Dia_3\right] \quad (4)$$

sujeto a las restricciones:

$$4 \left[\frac{Tn_{alta}}{Dia_1}\right] M_1 \left[Dia_1\right] + 6 \left[\frac{Tn_{alta}}{Dia_2}\right] M_2 \left[Dia_2\right] + 1 \left[\frac{Tn_{alta}}{Dia_3}\right] M_3 \left[Dia_3\right] = 54 \left[Tn_{alta}\right]$$
$$4 \left[\frac{Tn_{baja}}{Dia_1}\right] M_1 \left[Dia_1\right] + 4 \left[\frac{Tn_{baja}}{Dia_2}\right] M_2 \left[Dia_2\right] + 6 \left[\frac{Tn_{baja}}{Dia_3}\right] M_3 \left[Dia_3\right] = 65 \left[Tn_{baja}\right]$$
$$M_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad \forall i = 1, 2, 3$$

Punto 06 - Agropecuario

En este problema, debemos buscar como distribuir nuestros cultivos en 3 fincas, de manera de maximizar la utilidad total. Para esto trabajamos con 9 variables de decisión:

- X_{1y} Cantidad de hectáreas de la finca 1 dedicadas a la plantación de yuca
- X_{1p} Cantidad de hectáreas de la finca 1 dedicadas a la plantación de papa
- X_{1m} Cantidad de hectáreas de la finca 1 dedicadas a la plantación de maíz
- X_{2y} Cantidad de hectáreas de la finca 2 dedicadas a la plantación de yuca
- X_{2p} Cantidad de hectáreas de la finca 2 dedicadas a la plantación de papa
- X_{2m} Cantidad de hectáreas de la finca 2 dedicadas a la plantación de maíz
- X_{3y} Cantidad de hectáreas de la finca 3 dedicadas a la plantación de yuca
- X_{3p} Cantidad de hectáreas de la finca 3 dedicadas a la plantación de papa
- X_{3m} Cantidad de hectáreas de la finca 3 dedicadas a la plantación de maíz

La utilidad total esta modelada mediante la siguiente función:

$$\begin{aligned} Max\ Z = \quad & 400 \left[\frac{\$}{Ha}\right] \left(X_{1y} \left[Ha\right] + X_{2y} \left[Ha\right] + X_{3y} \left[Ha\right]\right) \quad + \\ & 300 \left[\frac{\$}{Ha}\right] \left(X_{1p} \left[Ha\right] + X_{2p} \left[Ha\right] + X_{3p} \left[Ha\right]\right) \quad + \\ & 100 \left[\frac{\$}{Ha}\right] \left(X_{1m} \left[Ha\right] + X_{2m} \left[Ha\right] + X_{3m} \left[Ha\right]\right) \end{aligned}$$

Punto 06 cont. en pag. siguiente. . .

la cual se halla sujeta a:

$$X_{1y}\,[Ha] + X_{1p}\,[Ha] + X_{1m}\,[Ha] \leq 350\,[Ha]$$
$$X_{2y}\,[Ha] + X_{2p}\,[Ha] + X_{2m}\,[Ha] \leq 700\,[Ha]$$
$$X_{3y}\,[Ha] + X_{3p}\,[Ha] + X_{3m}\,[Ha] \leq 300\,[Ha]$$

$$5\left[\frac{Agua}{Ha}\right] X_{1y}\,[Ha] + 4\left[\frac{Agua}{Ha}\right] X_{1p}\,[Ha] + 3\left[\frac{Agua}{Ha}\right] X_{1m}\,[Ha] \leq 1500\,[Agua]$$
$$5\left[\frac{Agua}{Ha}\right] X_{2y}\,[Ha] + 4\left[\frac{Agua}{Ha}\right] X_{2p}\,[Ha] + 3\left[\frac{Agua}{Ha}\right] X_{2m}\,[Ha] \leq 2000\,[Agua]$$
$$5\left[\frac{Agua}{Ha}\right] X_{3y}\,[Ha] + 4\left[\frac{Agua}{Ha}\right] X_{3p}\,[Ha] + 3\left[\frac{Agua}{Ha}\right] X_{3m}\,[Ha] \leq 900\,[Agua]$$

$$X_{1y}\,[Ha] + X_{2y}\,[Ha] + X_{3y}\,[Ha] \leq 1500\,[Ha]$$
$$X_{1p}\,[Ha] + X_{2p}\,[Ha] + X_{3p}\,[Ha] \leq 2000\,[Ha]$$
$$X_{1m}\,[Ha] + X_{2m}\,[Ha] + X_{3m}\,[Ha] \leq 900\,[Ha]$$

$$\frac{X_{1y}\,[Ha] + X_{1p}\,[Ha] + X_{1m}\,[Ha]}{350\,[Ha]} = \frac{X_{2y}\,[Ha] + X_{2p}\,[Ha] + X_{2m}\,[Ha]}{700\,[Ha]}$$
$$\frac{X_{1y}\,[Ha] + X_{1p}\,[Ha] + X_{1m}\,[Ha]}{350\,[Ha]} = \frac{X_{3y}\,[Ha] + X_{3p}\,[Ha] + X_{3m}\,[Ha]}{300\,[Ha]}$$
$$\frac{X_{2y}\,[Ha] + X_{2p}\,[Ha] + X_{2m}\,[Ha]}{700\,[Ha]} = \frac{X_{3y}\,[Ha] + X_{3p}\,[Ha] + X_{3m}\,[Ha]}{300\,[Ha]}$$

Punto 07 - Ómnibus

Debemos decidir cuantos chóferes contratar y despedir por año, a fin de minimizar el costo del personal, siempre satisfaciendo el nivel operativo mínimo. Las variables de decisión son:

- C_i: Cantidad de chóferes contratados en el año i
- D_i: Cantidad de chóferes despedidos en el año i

La función de costo es:

$$Min\ Z = 10000\left[\frac{\$}{Ch}\right]\left(50 + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{i} C_j - D_j\right)[Ch]$$
$$+4000\left[\frac{\$}{Ch}\right]\sum_{i=1}^{5} C_i\,[Ch] + 2000\left[\frac{\$}{Ch}\right]\sum_{i=1}^{5} D_i\,[Ch]$$

Punto 07 cont. en pag. siguiente...

sujeta a

$$\text{Siendo: } choferes = [60, 70, 50, 65, 75] \text{ un vector.}$$

$$\forall i = 1...5 \quad \left[50 + \left(\sum_{j=1}^{i-1} C_j - D_j\right) + C_i - D_i\right][Ch] = choferes_i\,[Ch]$$

$$\forall i = 1...5 \quad C_i, D_i \in \mathbb{Z}$$

Punto 08 - Mainframe Seguridad

Se busca minimizar el costo de realizar backups de las bases de datos de un Mainframe, el cual es proporcional a la cantidad de GB utilizados. Contamos con 10 cintas de distintos capacidades, siendo el siguiente el vector de costos:

$$capac = [1.3, 5, 3.1, 4.3, 5.1, 4, 3, 1, 2, 10.2]$$

Entonces nuestras variables de decisión tienen la forma:

- X_{ij} Representa si a la base de datos $i \in \{A, B, C, D, E\}$ se le realiza un backup en la cinta $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Y la función de capacidades utilizadas es:

$$Min\ Z = \sum_{j=1}^{10}\left[capac_j \sum_{i=A}^{E} X_{ij}\right]$$

sujeta a:

$$\begin{aligned}
&X_{A3},\ X_{A6},\ X_{A7},\ X_{A10} = 0 \\
&X_{B2},\ X_{B4},\ X_{B5},\ X_{B7},\ X_{B8},\ X_{B9},\ X_{B10} = 0 \\
&X_{C1},\ X_{C3},\ X_{C4},\ X_{C6},\ X_{C8},\ X_{C9} = 0 \\
&X_{D1},\ X_{D2},\ X_{D4},\ X_{D5},\ X_{D7},\ X_{D9},\ X_{D10} = 0 \\
&X_{E3},\ X_{E5},\ X_{E8} = 0 \\
&\qquad X_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i = A...E, j = 1...10
\end{aligned}$$

Punto 09 - Monopolista

En este caso debemos hallar el costo por producto q que maximice nuestra ganancia, la cual esta dada por:

$$Max\ Z = (100 - 4q - 2)\left[\frac{\$}{U}\right] q\,[U] - 50\,[\$] \tag{5}$$

Obviamente, dado que representa una cantidad, q puede ser como mínimo 0 ($q \geq 0$)

Punto 10 - Firma genérica

Similar al caso anterior, solo que con dos mercados en los cuales vendemos nuestro producto, por lo que tendremos las variables de decisión q_1 y q_2 que representan la cantidad vendidas en cada mercado. La función a optimizar es:

$$Max\ Z = 60\left[\frac{\$}{U}\right] q_1\,[U] + (100 - q_2)\left[\frac{\$}{U}\right] q_2\,[U] - (q_1 + q_2)^2\,[\$] \tag{6}$$

Sujeta a:

$$q_1, q_2 \geq 0$$

Punto 11 - Dos mercados

Debemos encontrar la división del total del presupuesto de promoción, que al aplicarse nos permita maximizar el beneficio total, entonces las variables de decisión toman la forma:

- x_j: Nivel de gasto en promocionar en el mercado j

La función objetivo esta dada por:

$$\begin{aligned} Max\ Z = 7\left[\frac{\$}{U}\right] 6x_1^{1/2}\,[U] - \left(60 + 24x_1^{1/2} + x_1\right)[\$] \\ + 9\left[\frac{\$}{U}\right] 15x_2^{1/2}\,[U] - \left(28 + 5x_2^{1/2} + x_2\right)[\$] \end{aligned} \tag{7}$$

sujeta a:

$$\begin{aligned} x_1\,[\$] + x_2\,[\$] = 65000\,[\$] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Punto 12 - Dos lamparas

$$Cambiarpesosporeuros!!!Max\ Z = 15\left[\frac{€}{L1}\right] X_1\,[L1] + 10\left[\frac{€}{L2}\right] X_2 L2 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} 20\left[\frac{Tman}{L1}\right] X_1 L1 + 30\left[\frac{Tman}{L2}\right] X_2 L2 \leq 6000\,[Tman] \\ 15\left[\frac{Tmaq}{L1}\right] X_1 L1 + 10\left[\frac{Tmaq}{L2}\right] X_2 L2 \leq 4800\,[Tmaq] \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Punto 13 - Refinería de Petroleo

$$Min\ Z = 35 \left[\frac{\$}{CL}\right] X_L\,[CL] + 30 \left[\frac{\$}{CP}\right] X_P\,[CP] \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
0,3 \left[\frac{BT}{CL}\right] X_L\,[CL] + 0,2 \left[\frac{BT}{CP}\right] X_P\,[CP] &\geq 500000\,[BT] \\
0,3 \left[\frac{BG}{CL}\right] X_L\,[CL] + 0,3 \left[\frac{BG}{CP}\right] X_P\,[CP] &\geq 900000\,[BG] \\
0,2 \left[\frac{BC}{CL}\right] X_L\,[CL] + 0,4 \left[\frac{BC}{CP}\right] X_P\,[CP] &\geq 800000\,[BC] \\
X_P, X_L &\geq 0
\end{aligned}$$

Punto 14 - Dulces

$$Min\ z = 0,25 \left[\frac{\$}{Kg_S}\right] (S_a + S_n + S_c)\,[Kg_S] + 0,2 \left[\frac{\$}{Kg_M}\right] (M_a + M_c + M_n)\,[Kg_M] \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
S_a + S_n + S_c &= 1 \\
M_a + M_c + M_n &= 1 \\
S_n\,[Kg_n] &\geq 0,2\,[Kg_n] \\
M_n\,[Kg_n] &\geq 0,1\,[Kg_n] \\
M_c\,[Kg_c] &\geq 0,1\,[Kg_c]
\end{aligned}$$

Punto 15 - Competencia de Veleros

Siendo

- Dorso = $[65, 67, 68, 67, 71, 69]$ los tiempos respectivos de cada nadador en el estilo Dorso
- Pecho = $[73, 70, 72, 75, 69, 71]$ los tiempos respectivos de cada nadador en el estilo Pecho
- Marip = $[63, 65, 69, 70, 75, 66]$ los tiempos respectivos de cada nadador en el estilo Mariposa
- Libre = $[57, 58, 55, 59, 57, 59]$ los tiempos respectivos de cada nadador en el estilo Libre

Punto 15 cont. en pag. siguiente. . .

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{6} X_{iD} * Dorso_i + X_{iP} * Pecho_i + X_{iM} * Marip_i + X_{iL} * Libre_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} 6X_{iD} &= 1 \\ \sum_{i=1} 6X_{iP} &= 1 \\ \sum_{i=1} 6X_{iM} &= 1 \\ \sum_{i=1} 6X_{iL} &= 1 \\ \forall i = 1..6 \qquad X_{iD}, X_{iP}, X_{iM}, X_{iL} &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

Punto 16 - Operario

$$Max\ Z = 100X_1 + 60X_2 + 70X_3 + 15X_4 + 15X_5 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} 53\left[\frac{Up}{U1}\right] X_1 [U1] + 23\left[\frac{Up}{U1}\right] X_2 [U2] + 35\left[\frac{Up}{U3}\right] X_3 [U3] \\ + 15\left[\frac{Up}{U4}\right] X_4 [U4] + 7\left[\frac{Up}{U5}\right] X_5 [U5] \leq 60 [Up] \\ \forall i = 1..5 \qquad X_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Punto 17 - Fabricante de Plástico

$$\begin{aligned} Min\ Z = 14\left[\frac{\$}{Caja}\right] X_{11} [Caja] + 13\left[\frac{\$}{Caja}\right] X_{12} [Caja] + 11\left[\frac{\$}{Caja}\right] X_{13} [Caja] + \\ 13\left[\frac{\$}{Caja}\right] X_{21} [Caja] + 13\left[\frac{\$}{Caja}\right] X_{22} [Caja] + 12\left[\frac{\$}{Caja}\right] X_{23} [Caja] \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} X_{11} [Caja] + X_{12} [Caja] + X_{13} [Caja] &\leq 1200 [Caja] \\ X_{21} [Caja] + X_{22} [Caja] + X_{23} [Caja] &\leq 1000 [Caja] \\ X_{11} [Caja] + X_{21} [Caja] &\leq 1000 [Caja] \\ X_{12} [Caja] + X_{22} [Caja] &\leq 700 [Caja] \\ X_{13} [Caja] + X_{23} [Caja] &\leq 500 [Caja] \\ \forall i = 1..2\ ,\ j = 1..3 \qquad X_{ij} &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

Punto 17 cont. en pag. siguiente...

Punto 18 - MG Auto

$$\begin{aligned} Max\ Z = {} & (80 \times 1000) \left[\frac{\$}{Auto}\right] X_{11} \,[Auto] + (125 \times 2690) \left[\frac{\$}{Auto}\right] X_{12} \,[Auto] + \\ & (125 \times 1000) \left[\frac{\$}{Auto}\right] X_{21} \,[Auto] + (108 \times 1350) \left[\frac{\$}{Auto}\right] X_{22} \,[Auto] + \\ & (102 \times 1275) \left[\frac{\$}{Auto}\right] X_{31} \,[Auto] + (68 \times 850) \left[\frac{\$}{Auto}\right] X_{32} \,[Auto] \end{aligned} \tag{13}$$

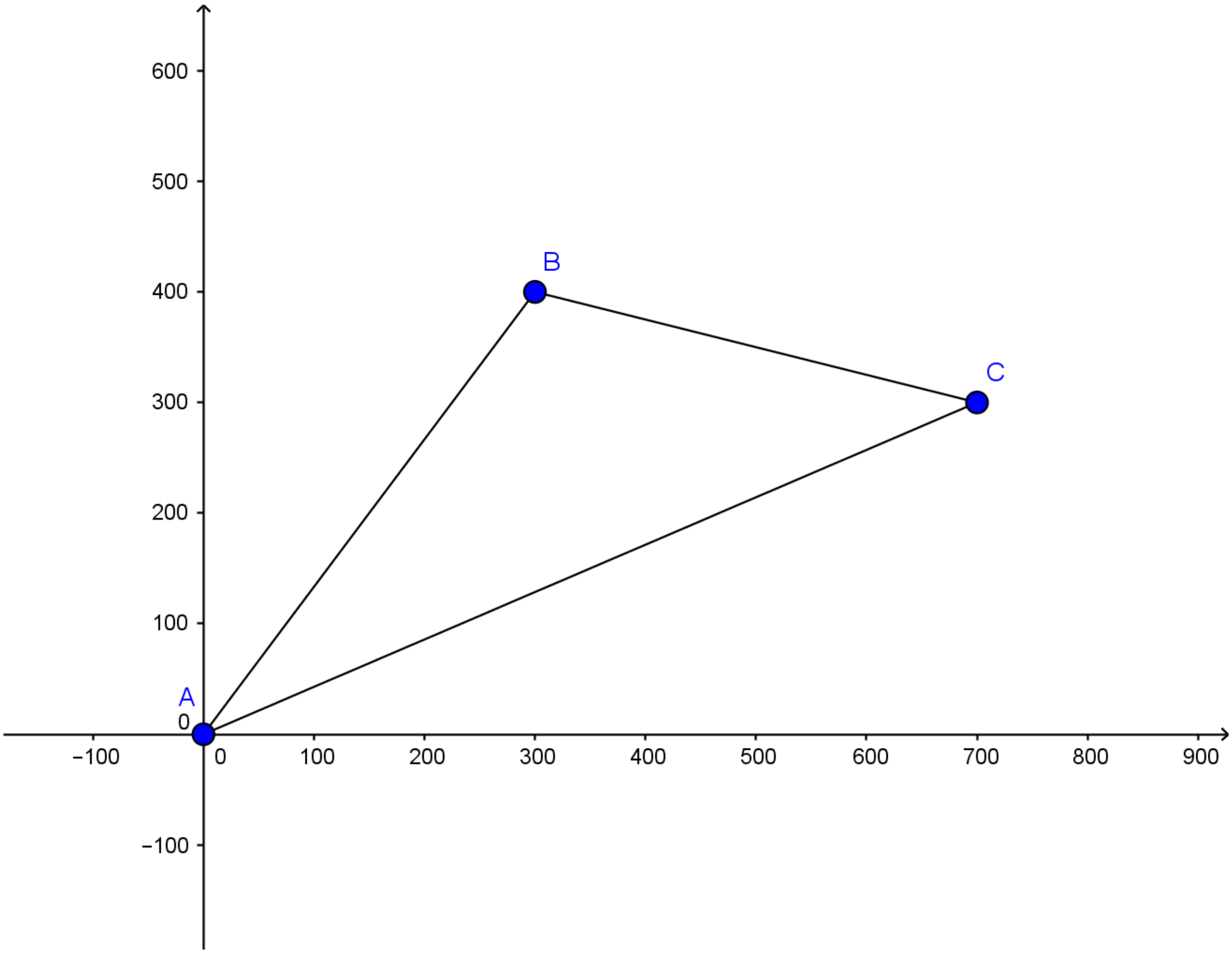
$$\begin{aligned} X_{11} \,[Auto] + X_{12} \,[Auto] &\leq 1000 \,[Auto] \\ X_{21} \,[Auto] + X_{22} \,[Auto] &\leq 1300 \,[Auto] \\ X_{31} \,[Auto] + X_{32} \,[Auto] &\leq 2000 \,[Auto] \\ X_{11} \,[Auto] + X_{21} \,[Auto] + X_{31} \,[Auto] &\leq 2300 \,[Auto] \\ X_{21} \,[Auto] + X_{22} \,[Auto] + X_{32} \,[Auto] &\leq 1400 \,[Auto] \\ \forall i = 1..3 \ , \ j = 1..2 \qquad X_{ij} &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Punto 19 - Otro monopolista

$$Max\ Z = (10 - 5 - X) \left[\frac{U\$D}{Ud}\right] X \,[Ud] \tag{14}$$

$$\begin{aligned} X &\geq 0 \\ X &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Punto 20 - Compañía Petrolera



$$Min\ Z = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(300 - x)^2 + (400 - y)^2} + \sqrt{(700 - x)^2 + (300 - y)^2} \tag{15}$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$