

Investigacion Operativa

C.C. Lauritto & Ing. Casanova

Guia 07: Programacion No Lineal

Fecha de Entrega: 04 de Diciembre de 2016

Ravera P. & Rivera R.

Índice

Solucion de Problemas	3
Punto 01 - Hughesco	3
Iteracion 01	3
Iteracion 02	3
Iteracion 03	3
Iteracion 04	4
Iteracion 05	4
Punto 02 - Ascenso Acelerado	4
Ascenso Acelerado	4
Newton Raphrson	5
Punto 03 - Optimizacion no Restringida	5
Ascenso Acelerado	5
Sistema de Ecuaciones	6
Trayectoria	7
Punto 04 - Municipalidad y Hospital	7
Punto 05 - Dos mercados	8
Problema Lineal	8
Solucion Iterativa	8
Solucion Analitica	9
Punto 06 - Publicidad	9
Programa Lineal	9
Solucion	9
Gastar \$1000 extras?	10
Punto 07 - Quilmes	10
Punto 08 - Paquete	10

Solucion de Problemas

Punto 01 - Hughesco

Siendo los datos iniciales:

$$\begin{aligned}r &= 0.618 \quad \varepsilon = 50 \\a &= 0 \quad b = 600\end{aligned}$$

Iteración 01

$$L = b - a = 600 - 0 = 600 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_1 = b - r(b - a) = 229.2$$

$$x_2 = a + r(b - a) = 370.8$$

$$f(x_1) = 39 \quad f(x_2) = 81$$

$$f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow \text{Nuevo Intervalo} = (x_1, b)$$

Iteración 02

$$L = b - x_1 = 600 - 229.2 = 370.8 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_3 = b - r(b - x_1) = 370.7$$

$$x_4 = x_1 + r(b - x_1) = 458.2$$

$$f(x_3) = 81 \quad f(x_4) = 82$$

$$f(x_3) \leq f(x_4) \rightarrow \text{Nuevo Intervalo} = (x_3, b)$$

Iteración 03

$$L = b - x_3 = 600 - 370.7 = 229.3 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_5 = b - r(b - x_3) = 458.29$$

$$x_6 = x_3 + r(b - x_3) = 512.40$$

$$f(x_5) = 82 \quad f(x_6) = 79$$

$$f(x_5) \geq f(x_6) \rightarrow \text{Nuevo Intervalo} = (x_3, x_5)$$

Iteración 04

$$L = x_5 - x_3 = 458.29 - 370.7 = 87.59 \rightarrow L \geq \varepsilon$$

$$x_7 = x_5 - r(x_5 - x_3) = 404.15$$

$$x_8 = x_3 + r(x_5 - x_3) = 424.83$$

$$f(x_7) = 85 \quad f(x_8) = 84$$

$$f(x_7) \geq f(x_8) \rightarrow \text{Nuevo Intervalo} = (x_3, x_7)$$

Iteración 05

$$L = x_7 - X - 3 = 404.15 - 370.7 = 33.45 \rightarrow L \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, con un error de 33.45 podemos decir que existe en $x = 404$ un máximo.

Punto 02 - Ascenso Acelerado

Siendo la función multivariable:

$$z(x_1, x_2) = -\left(x_1 - \sqrt{5}\right)^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10$$

Ascenso Acelerado

Siendo el gradiente de la función:

$$\nabla z(x_1, x_2) = \left(-2x_1 + 2\sqrt{5}; -2x_2 + 2\pi\right)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (2; 3)$.

Iteración 01

$$X_1 = (2 + 0.47\lambda; 3 + 0.28\lambda)$$

$$z(X_1) = -10.076 + 0.3012\lambda + 0.3\lambda^2$$

$$\frac{\partial z'(X_1)}{\partial \lambda} = -0.6\lambda + 0.3012 = 0 \rightarrow \lambda = 0.5$$

$$X_1(0.5) = (2.235; 3.14)$$

$$\|\nabla z(X_1)\| = 3.836 \times 10^{-3} \leq 0.05$$

Por lo tanto, con un error de 3.836×10^{-3} se puede afirmar que existe un máximo en $X = (2.235; 3.14)$.

Newton Raphrson

Siendo el gradiente de la función:

$$\nabla z(x_1, x_2) = (-2x_1 + 2\sqrt{5}; -2x_2 + 2\pi)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (2; 3)$.

Iteración 01

$$\mathcal{H}_z = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathcal{H}_z^{-1}(x_0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 + 2\sqrt{5} \\ -6 + 2\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ \pi \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se puede afirmar que existe un máximo en $X = (\sqrt{5}; \pi)$.

Punto 03 - Optimización no Restringida

Siendo la función multivariable:

$$z(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

Ascenso Acelerado

Utilizando la siguiente expresión como paso general:

$$X^{k+1} = X^k - \lambda^k \cdot \nabla z(X^k)$$

Siendo el gradiente de la función:

$$\nabla z(x_1, x_2) = (2x_2 - 2x_1; 2x_1 + 1 - 4x_2)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (1; 1)$ con un error $\varepsilon = 0.25$.

Iteración 01

$$X^1 = X^0 - \lambda^0 \cdot \nabla z(X^0) = (1; 1 - \lambda)$$

$$z(X^1) = -2(1 - \lambda)^2 - 3\lambda + 2$$

$$\frac{\partial z'(X^1)}{\partial \lambda} = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2} = 0 \rightarrow \lambda = 0.50$$

$$X^1(0.50) = \left(1; \frac{3}{4}\right)$$

$$\|\nabla z(X^1)\| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

Iteración 02

$$X^2 = X^1 - \lambda^1 \cdot \nabla z(X^1) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

$$z(X^2) = - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)^2 \frac{27}{8} - \frac{3\lambda}{4}$$

$$\frac{\partial z'(X^2)}{\partial \lambda} = 1 - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0.25$$

$$X^2(0.25) = \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$$

$$\|\nabla z(X^2)\| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

Iteración 03

$$X^3 = X^2 - \lambda^2 \cdot \nabla z(X^2) = \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$z(X^3) = -2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{5\lambda}{4} + \frac{21}{16}$$

$$\frac{\partial z'(X^3)}{\partial \lambda} = \frac{1}{4} - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0.25$$

$$X^3(0.25) = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$$

$$\|\nabla z(X^3)\| = \frac{1}{4} \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, con un error de 0.25 se puede afirmar que existe un máximo en $X = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{8}\right)$.

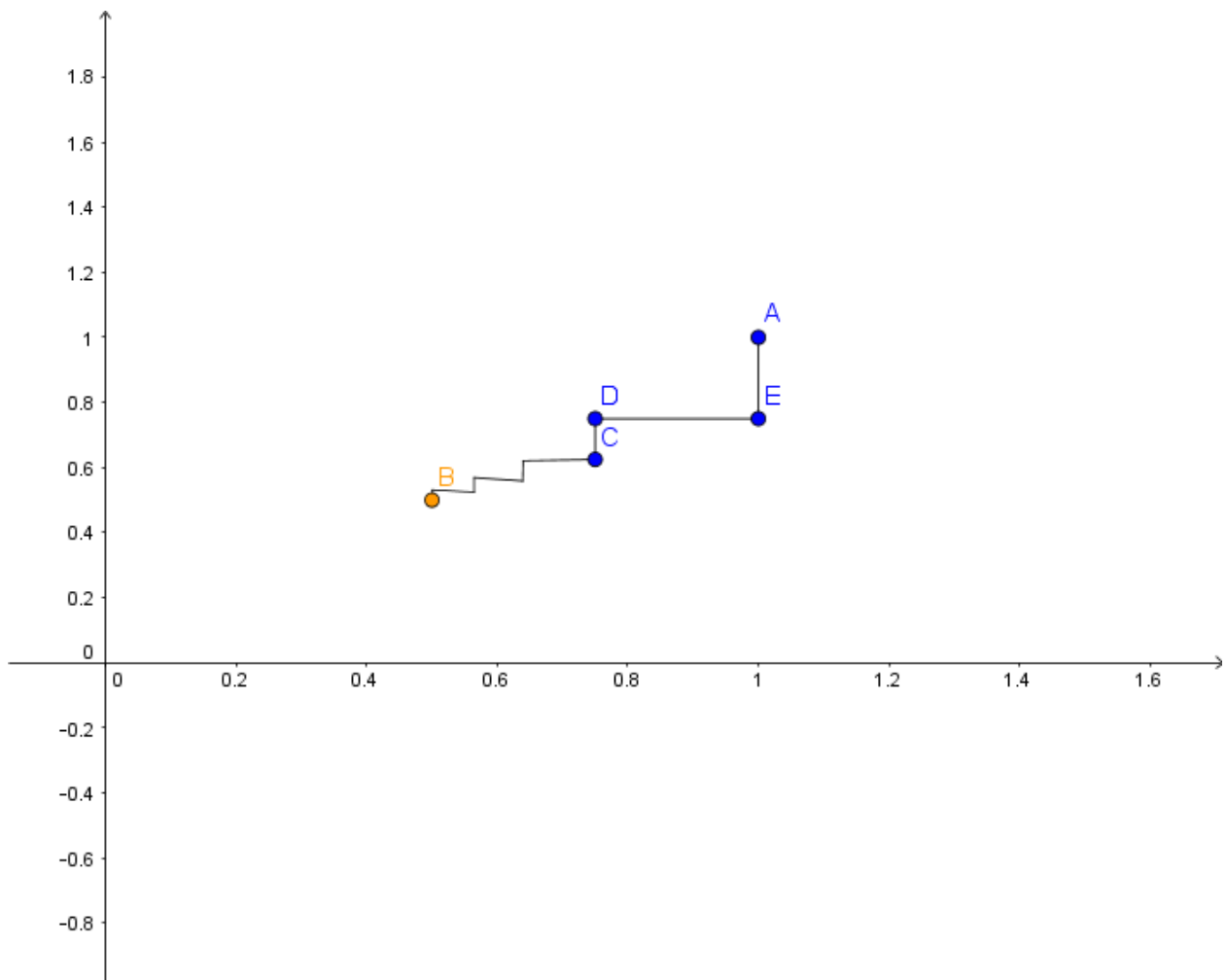
Sistema de Ecuaciones

$$\nabla z(x_1, x_2) = 0$$

$$\nabla z(x_1, x_2) = (2x_2 - 2x_1; 2x_1 + 1 - 4x_2) = (0; 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_2 - 2x_1 = 0 \\ 2x_1 + 1 - 4x_2 = 0 \end{array} \right\} x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

Trayectoria



Trayectoria estimada

Punto 04 - Municipalidad y Hospital

Variables de Decision:

- X : coordenada en el eje X del nuevo hospital.
- Y : coordenada en el eje Y del nuevo hospital.

Funcion Objetivo:

$$\text{Min } Z = \sqrt{(X - 2)^2 + Y^2} + \sqrt{(X - 8)^2 + (Y - 3)^2} + \sqrt{X^2 + (Y - 6)^2}$$

Luego de cargar el problema en el software **LINGO**, la solución obtenida fue que la distancia será 12.31, con coordenadas (2.91;2.27).

Punto 05 - Dos mercados

Problema Lineal

Función Objetivo:

$$\text{Max } Z = (60q_1 + (100 - q_2)q_2) - (q_1 + q_2)^2$$

Solución Iterativa

Utilizando la siguiente expresión como paso general:

$$X^{k+1} = X^k - \lambda^k \cdot \nabla z(X^k)$$

Siendo el gradiente de la función:

$$\nabla z(q_1, q_2) = (60 - 2q_1 - 2q_2; 100 - 4q_2 - 2q_1)$$

Y tomando el punto inicial $X_0 = (5; 10)$ con un error $\varepsilon = 0.1$.

Iteración 01

$$X^1 = X^0 - \lambda^0 \cdot \nabla z(X^0) = (5 + 30\lambda; 10 + 50\lambda)$$

$$z(X^1) = 60(5 + 30\lambda) + (100 - (10 + 50\lambda))(10 + 50\lambda) - ((5 + 3\lambda) + (10 + 50\lambda))^2$$

$$\frac{\partial z'(X^1)}{\partial \lambda} = -17800\lambda + 300 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{17}{89}$$

$$X^1 \left(\frac{17}{89} \right) = \left(\frac{955}{89}; \frac{1740}{89} \right)$$

$$\|\nabla z(X^1)\| = 0.655 \geq \varepsilon$$

Iteración 02

$$X^2 = X^1 - \lambda^1 \cdot \nabla z(X^1) = \left(\frac{955}{89} - \frac{50}{89}\lambda; \frac{1740}{89} + \frac{30}{89}\lambda \right)$$

$$z(X^2) = \frac{-}{1300}7921\lambda^2 + \frac{3400}{7921}\lambda + \frac{115675}{89}$$

$$\frac{\partial z'(X^2)}{\partial \lambda} = \frac{-}{2600}7921\lambda + \frac{3400}{7921} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{17}{13}$$

$$X^2 \left(\frac{17}{13} \right) = \left(\frac{11565}{1157}; \frac{23130}{1157} \right)$$

$$\|\nabla z(X^2)\| = 0.05042 \leq \varepsilon$$

Por lo tanto, con un error de 0.05042 se puede afirmar que existe un máximo en $X = \left(\frac{11565}{1157}, \frac{23130}{1157} \right)$.

Solución Analítica

Condición Necesaria:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial q_1} = 0 &\rightarrow 60 - 2q_1 - 2q_2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial q_2} = 0 &\rightarrow 100 - 4q_2 - 2q_1 = 0 \end{aligned} \right\} q_1 = 10 \wedge q_2 = 20$$

Condición Suficiente:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

A partir del análisis de los determinantes de la hessiana, comprobamos que la condición de óptimo local se cumple, por lo que podemos asegurar encontrarnos frente a un máximo.

Punto 06 - Publicidad

Programa Lineal

Variables de Decisión:

- x : cantidad de minutos a comprar de comerciales en tv.
- y : cantidad de minutos a comprar de comerciales en radio.

Función Objetivo:

$$\text{Max } Z = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} 3000x + 1000y &\leq 10000 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución

Para obtener el mejor rendimiento del dinero destinado a publicidad, recomendamos que la compañía adquiriera 2.46 minutos de comerciales en TV y 2.6 en radio. De seguir este plan, los ingresos obtenidos ascenderían a los 15017.86

Condición Necesaria:

Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange.

$$L(x, y, \lambda) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y + \lambda(10000 - 3000x - 1000y)$$

$$\nabla L = (-x + y + 8 - 3000\lambda; -2y + x + 3 - 1000\lambda; 10000 - 3000x - 1000y) = (0; 0; 0)$$

$$x = \frac{69}{28}$$

$$y = \frac{73}{28}$$

$$\lambda = \frac{1}{4000}$$

Condición Suficiente:

$$\mathcal{H}\left(\frac{69}{28}, \frac{73}{28}, \frac{1}{4000}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3000 & 1000 \\ 3000 & -4 & 1 \\ 1000 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Analizando los determinantes del Hessiano Orlado, observamos que la condición suficiente de óptimo local es verificada por el punto hallado anteriormente, con lo que podemos asegurar entonces que el mismo es un máximo.

Gastar \$1000 extras?

Teniendo en cuenta el valor de λ el cual representa que tanto mejoraría nuestro funcional por unidad monetaria extra que se disponga nos inclinamos a desaconsejar la compra de minutos de publicidad extra, ya que de hacer esto, si bien la ganancia aumentaría, la inversión necesaria para obtener esta mejora sería mayor que dicha diferencia.

Punto 07 - Quilmes

Punto 08 - Paquete

Variables de Decisión:

- x : Ancho del paquete.
- y : Profundidad del paquete.
- z : Altura del paquete.

Funcion Objetivo:

$$\text{Max } Z = xyz$$

Sujeta a:

$$2(x + y) + z \leq 108$$

$$x, y, z \geq 0$$

La solucion es:

- $x = 18cm.$
- $y = 18cm.$
- $z = 36cm.$

Con un volumen total de $11664cm^3$.