Investigación Operativa

C.C. Lauritto & Ing. Casanova

Guía 06: Programación Entera

Fecha de Entrega: 08 de Febrero de 2017

Ravera P. & Rivera R.

Índice

Ejercicios

Punto 01 - Ejercicio 01

$$
\begin{aligned}
&Max\ J = 86y_1 + 4y_2 + 40y_3 \\
&s.a.: \quad 774y_1 + 76y_2 + 42y_3 \leq 875 \\
&\qquad\qquad 67y_1 + 27y_2 + 53y_3 \leq 875 \\
&\qquad\qquad y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

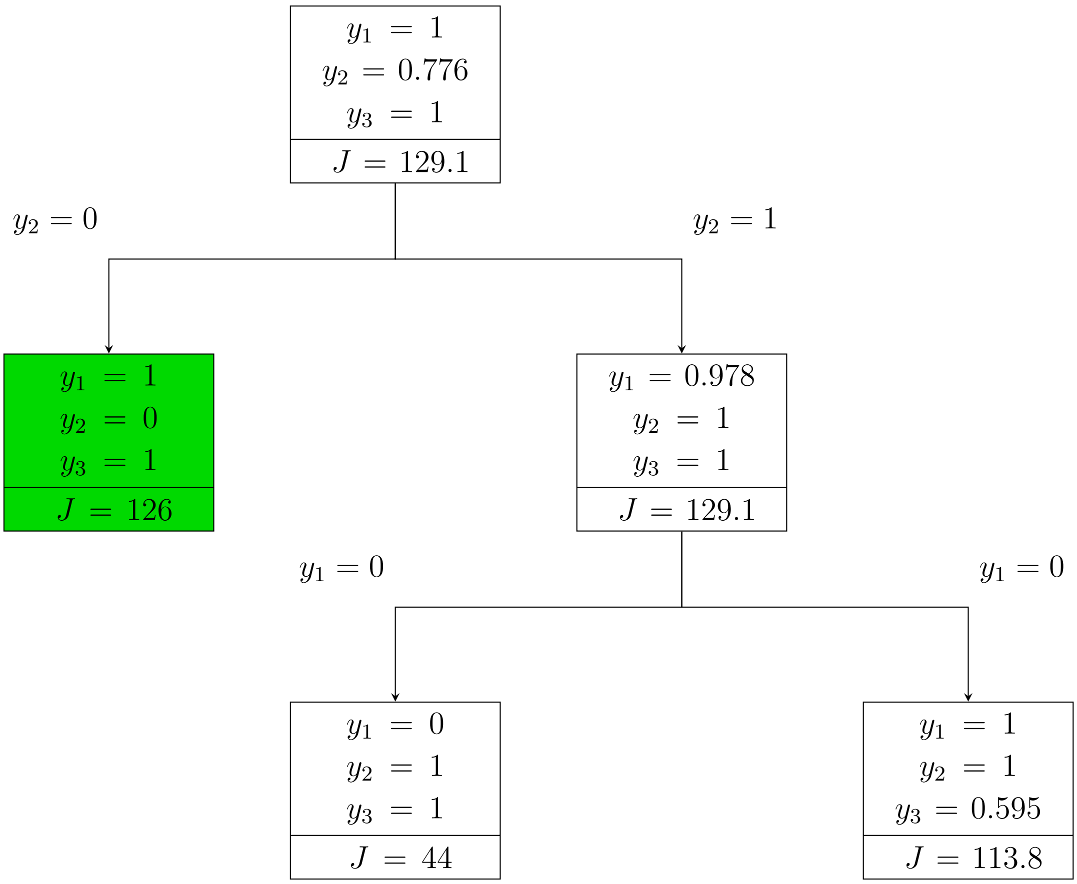

Figura 1: Branch & Bound, Ejercicio 01

Entonces la solución Óptima para el problema entero es:

- $y_1 = 1$.
- $y_2 = 0$.
- $y_3 = 1$.

Punto 02 - Ejercicio 02

$$
\begin{aligned}
Min\ Z &= -5x_1 - 8x_2 \\
s.a.: \quad & 1x_1\ 1x_2 v \leq 6 \\
& 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}
$$

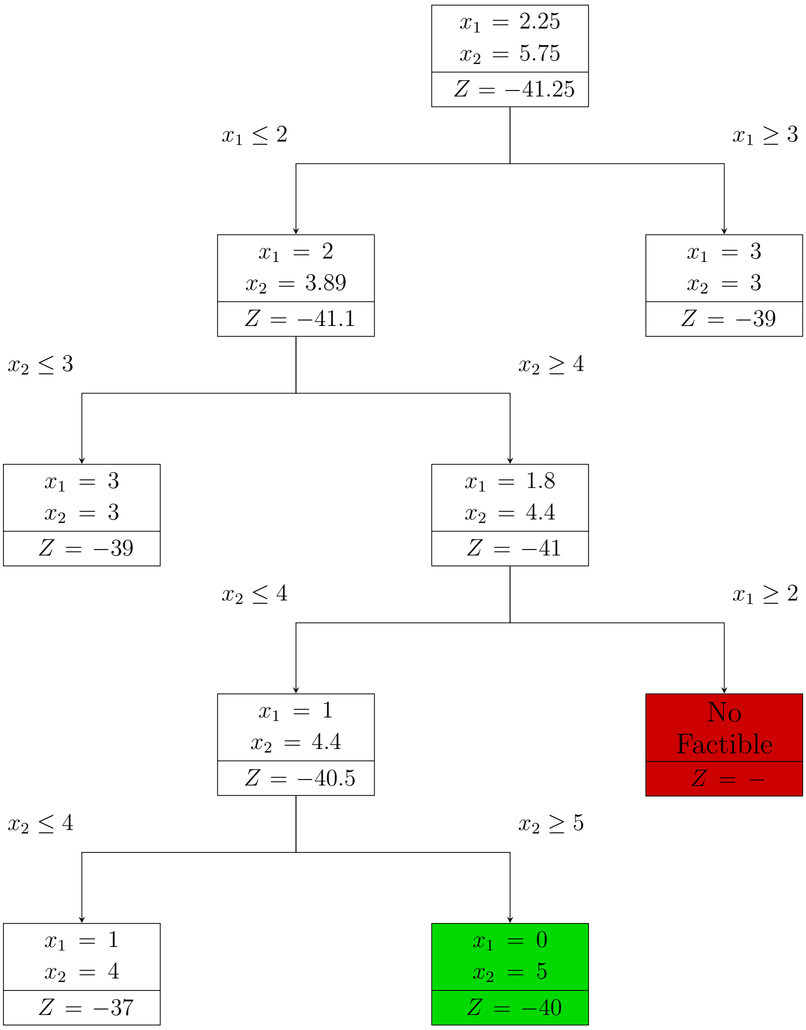

Figura 2: Branch & Bound, Ejercicio 02

Entonces la solución Óptima para el problema entero es:

- $x_1 = 0$.
- $x_2 = 5$.

Solución de Problemas

Punto 03 - Compañía

Problema Lineal

Variables de decisión:

- X_1 cantidad de plantas del tipo A.
- X_2 cantidad de plantas del tipo B.

Función Objetivo

$$Max\ Z = 4\left[\frac{um}{A}\right] X_1\,[A] + 3\left[\frac{um}{B}\right] X_2\,[B]$$

Sujeta a:

$$2\left[\frac{ing}{A}\right] X_1\,[A] + 1\left[\frac{ing}{B}\right] X_1\,[B] \leq 18\,[ing]$$
$$1\left[\frac{eco}{A}\right] X_1\,[A] + 3\left[\frac{eco}{B}\right] X_1\,[B] \leq 15\,[eco]$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Según *LINGO* la solución Óptima consiste en establecer 8 plantas del tipo A y 2 del tipo B, obteniendo un beneficio de 38u.m.

Gravámenes

Variables de decisión:

- X_1 cantidad de plantas del tipo A.
- X_2 cantidad de plantas del tipo B.
- X_3 Unidades producidas.
- X_4 Unidades por las que nos penalizan.

Función Objetivo

$$Max\ Z = 4\left[\frac{um}{A}\right] X_1\,[A] + 3\left[\frac{um}{B}\right] X_2\,[B] + 0X_3 - 2\left[\frac{um}{u}\right] X_4\,[u]$$

Sujeta a:

$$2\left[\frac{ing}{A}\right] X_1\,[A] + 1\left[\frac{ing}{B}\right] X_1\,[B] \leq 18\,[ing]$$
$$1\left[\frac{eco}{A}\right] X_1\,[A] + 3\left[\frac{eco}{B}\right] X_1\,[B] \leq 15\,[eco]$$
$$600\left[\frac{u}{A}\right] X_1\,[A] + 1800\left[\frac{u}{B}\right] X_1\,[B] \geq 5400\,[u]$$
$$600\left[\frac{u}{A}\right] X_1\,[A] + 1800\left[\frac{u}{B}\right] X_1\,[B] = X_3\,[u]$$
$$(X_3 - 2500)\,[u] = X_4\,[u]$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Según *LINGO* la solución Óptima consiste en establecer 9 plantas del tipo A y 0 del tipo B, produciendo exactamente 5400 unidades, siendo penalizados por 2900 y teniendo una pérdida igual a -5764

Punto 04 - Industria: Servicios - Sector: Finanzas - Objeto: Selección de Proyectos

Siendo la formula del VAN: $VAN = \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{(a+k)^i} - I_0$
Entonces debemos maximizar la siguiente función:

$$Max\ Z = \sum_{i=0}^{6} X_i V_i$$

Sujeta a:

$$\sum_{i=1}^{6} X_i P_{i0} \geq -1000$$
$$\sum_{i=1}^{6} X_i P_{i1} \geq -250$$
$$\sum_{i=1}^{6} X_i P_{i2} \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{6} X_i P_{i3} \leq 150$$
$$X_1 + X_3 + X_5 + X_6 \geq 2$$
$$X_1 + X_3 = 1$$
$$X_3 = X_5$$
$$-X_1 + X_2 \leq X_4 + 1$$

Punto 05 - Industria: Servicios Eléctricos - Sector: Producción - Objeto: Programación

La función objetivo en este caso es:

$$
\begin{aligned}
MIN =& 6\left(X_{11}+X_{12}+X_{13}\right) &+& \; 5\left(X_{21}+X_{22}+X_{23}\right) &+\\
& 8\left(X_{31}+X_{32}+X_{33}\right) &+& \; 4000\left(Y_{11}+Y_{12}+Y_{13}-A1-A2\right) &+\\
& 3000\left(Y_{21}+Y_{23}+Y_{23}-B1-B2\right) &+& \; 2000\left(Y_{31}+Y_{32}+Y_{33}-C1-C2\right) &
\end{aligned}
$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

$$
\begin{aligned}
(X_{11}+X_{21}+X_{31}) &\geq 2500\\
(X_{12}+X_{22}+X_{32}) &\geq 1800\\
(X_{13}+X_{23}+X_{33}) &\geq 3500
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
400Y_{11} \leq X_{11} & 300Y_{21} \leq X_{21} & 500Y_{31} \leq X_{31}\\
400Y_{12} \leq X_{12} & 300Y_{22} \leq X_{22} & 500Y_{32} \leq X_{32}\\
400Y_{13} \leq X_{13} & 300Y_{23} \leq X_{23} & 500Y_{33} \leq X_{33}\\
2300Y_{11} \geq X_{11} & 2000Y_{21} \geq X_{21} & 3300Y_{31} \geq X_{31}\\
2300Y_{12} \geq X_{12} & 2000Y_{22} \geq X_{22} & 3300Y_{32} \geq X_{32}\\
2300Y_{13} \geq X_{13} & 2000Y_{23} \geq X_{23} & 3000Y_{33} \geq X_{33}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(1-Y_{11})+(1-Y_{12})+A1 &\geq 1\\
(1-Y_{12})+(1-Y_{13})+A2 &\geq 1\\
(1-Y_{21})+(1-Y_{22})+B1 &\geq 1\\
(1-Y_{22})+(1-Y_{23})+B2 &\geq 1\\
(1-Y_{31})+(1-Y_{32})+C1 &\geq 1\\
(1-Y_{32})+(1-Y_{33})+C2 &\geq 1
\end{aligned}
$$

Las variables de decisión de la forma X_{ij} representan la producción del generador i en el período j. Por otra parte, las variables de activación asociadas Y_{ij} nos indican si el generador i estuvo activo en el período j. Por último, las variables $[A|B|C]_{1|2}$ nos permiten determinar si el generador A,B,C estuvo activo en períodos continuos y por lo tanto no debemos pagar el costo de puesta en marcha del mismo.

Punto 06 - Industria: General - Sector: Logística - Objeto: Distribución

Cuadro 1: Datos sobre fábricas

Fábrica N	Límite	Costo [$/u]	Costo fijo	Venta
1	390	$ 60	$ 15,000	$ 200
2	460	$ 72	$ 10,000	$ 200
3	360	$ 48	$ 8,000	$ 200
4	420	$ 60	$ 5,000	$ 200

Cuadro 2: Datos sobre almacénes

	Almacén 1	Almacén 2	Almacén 3	Almacén 4	Almacén 5	Almacén 6
Fábrica 1	$ 28	$ 40	$ 36	$ 38	$ 30	$ 45
Fábrica 2	$ 18	$ 28	$ 24	$ 30	$ 25	$ 20
Fábrica 3	$ 42	$ 54	$ 52	$ 54	$ 49	$ 45
Fábrica 4	$ 36	$ 48	$ 40	$ 46	$ 45	$ 45
Requerimiento	180	280	150	200	170	180

Programa de Distribución

Las variables de decisión toman la forma X_{ij}, representando la cantidad de unidades producida en la fábrica i y transportada al almacén j. Al mismo tiempo, existen los valores C_i y T_{ij}, que indican los costos por unidades producida en la fábrica i y los costos de transporte por unidad de la fábrica i hacia el almacén j respectivamente. Por ultimo, las variables R_j y L_i representan los requerimientos a satisfacer del almacén j y el limite de producción de la fábrica i

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} C_i X_{ij} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} T_{ij} X_{ij}$$

Sujeta a:

$$\forall i = 1,2,3,4 \qquad \sum_{j=1}^{6} X_{ij} \leq L_i$$

$$\forall j = 1,2,3,4,5,6 \qquad \sum_{1=1}^{4} X_{ij} \geq R_i$$

$$\forall i = 1..4, j = 1..6 \qquad X_{ij} \geq 0$$

Punto 06 cont. en pág. siguiente...

Costos fijos

Ahora se agrega la variable de activación Y_i que nos indica si en la fábrica i se produjo al menos una unidad y el costo fijo por fábrica i, F_i

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} C_i X_{ij} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} T_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^{4} Y_i F_i$$

Sujeta a:

$$\forall i = 1,2,3,4 \qquad \sum_{j=1}^{6} X_{ij} \leq L_i Y_i$$

$$\forall j = 1,2,3,4,5,6 \qquad \sum_{1=1}^{4} X_{ij} \geq R_i$$

$$\forall i = 1..4, j = 1..6 \qquad X_{ij} \geq 0$$

Precio de Venta

Se modifica la función objetivo acorde al precio de venta por unidad de \$200.

$$Max\ Z = 200 \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} X_{ij} - \left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} C_i X_{ij} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} T_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^{4} Y_i F_i \right)$$

Sujeta a:

$$\forall i = 1,2,3,4 \qquad \sum_{j=1}^{6} X_{ij} \leq L_i Y_i$$

$$\forall j = 1,2,3,4,5,6 \qquad \sum_{1=1}^{4} X_{ij} \geq R_i$$

$$\forall i = 1..4, j = 1..6 \qquad X_{ij} \geq 0$$

Cierre

Se impone la restricción de que sólo 3 fábricas puedan operar

$$Max\ Z = 200 \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} X_{ij} - \left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} C_i X_{ij} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} T_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^{4} Y_i F_i \right)$$

Punto 06 cont. en pág. siguiente...

Sujeta a:

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 3$$

$$\forall i = 1,2,3,4 \qquad \sum_{j=1}^{6} X_{ij} \leq L_i Y_i$$

$$\forall j = 1,2,3,4,5,6 \qquad \sum_{1=1}^{4} X_{ij} \geq R_i$$

$$\forall i = 1..4, j = 1..6 \qquad X_{ij} \geq 0$$

Punto 07 - Industria: Servicios - Sector: Logística - Objeto: Localización

20 minutos

La variable de decisión X_i nos indica si debemos establecer un centro de reparación en la ciudad i. Función Objetivo:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{6} X_i$$

Sujeta a:

$$1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 \geq 1$$
$$1X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 1X_6 \geq 1$$
$$1X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 1X_6 \geq 1$$
$$0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 1X_5 + 0X_6 \geq 1$$
$$0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 1X_5 + 1X_6 \geq 1$$
$$0X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 1X_6 \geq 1$$

15 Minutos

Función Objetivo:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{6} X_i$$

Punto 07 cont. en pág. siguiente…

Sujeta a:

$$\begin{aligned}
1X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\geq 1 \\
1X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 1X_6 &\geq 1 \\
0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0X_6 &\geq 1 \\
0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 1X_5 + 0X_6 &\geq 1 \\
0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 1X_5 + 1X_6 &\geq 1 \\
0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 1X_6 &\geq 1
\end{aligned}$$

Punto 08 - Sophilios

Variables:

- X_1 cantidad de vasijas de fondo oscuro a comprar.
- X_2 cantidad de vasijas de fondo claro a comprar.
- $Y_d = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X_1 + X_2 \geq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- $Y_o = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X_1 \geq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- $Y_c = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X_2 \geq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
- $Y_p = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X_1 + X_2 \geq 9 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Función Objetivo:

$$Min\ Z = 20X_1 + 28X_2 - (100Y_d) - (X_1 + X_2) \times (10\,(1 - Y_p) + 8Y_p)$$

Punto 08 cont. en pág. siguiente...

Sujeta a:

$$X_1 + X_2 \geq 10Y_d$$
$$X_1 \geq 1Y_o$$
$$X_2 \geq 1Y_c$$
$$Y_o + Y_c \leq 1$$
$$X_1 + X_2 \geq 9Y_p$$
$$X_1 \geq A.Y_o$$
$$X_2 \geq B.Y_c$$
$$X_1, X_2 \in \mathbb{Z}^+ \qquad Y_c, Y_o, Y_p \in \{0, 1\}$$

Punto 09 - Mainframe Universidad

Se busca minimizar el costo de realizar backups de las bases de datos de un Mainframe, el cual es proporcional a la cantidad de GB utilizados. Contamos con 10 cintas de distintos capacidades, siendo el siguiente el vector de costos:

$$capac = [1.3, 5, 3.1, 4.3, 5.1, 4, 3, 1, 2, 10.2]$$

Entonces nuestras variables de decisión tienen la forma:

- X_{ij} Representa si a la base de datos $i \in \{A, B, C, D, E\}$ se le realiza un backup en la cinta $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Y la función de capacidades utilizadas es:

$$Min\ Z = \sum_{j=1}^{10} \left[capac_j \sum_{i=A}^{E} X_{ij} \right]$$

sujeta a:

$$X_{A3},\ X_{A6}, X_{A7},\ X_{A10} = 0$$
$$X_{B2},\ X_{B4}, X_{B5},\ X_{B7},\ X_{B8},\ X_{B9},\ X_{B10} = 0$$
$$X_{C1},\ X_{C3}, X_{C4},\ X_{C6},\ X_{C8},\ X_{C9} = 0$$
$$X_{D1},\ X_{D2}, X_{D4},\ X_{D5},\ X_{D7},\ X_{D9},\ X_{D10} = 0$$
$$X_{E3},\ X_{E5}, X_{E8} = 0$$
$$X_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i = A...E, j = 1...10$$

Punto 10 - Instalación de Alta Montaña

Se busca maximizar la utilidad de los equipos de reparación que el operario puede llevar a la montaña atendiendo al límite de peso que el mismo puede cargar. Se trata de un caso del **Problema de la Mochila**
Variables de Decisión:

- Y_i si el operario lleva el equipo i.

Función Objetivo:

$$Max\ Z = 100Y_1 + 60Y_2 + 70Y_3 + 15Y_4 + 15Y_5$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} &52Y_1 + 23Y_2 + 35Y_3 + 15Y_4 + 7Y_5 \leq 60 \\ &Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Luego de cargar el problema en *LINGO* el mismo indica que lo más conveniente es llevar los equipos 2 y 3 consiguiendo una utilidad en reparaciones de 130