Investigación Operativa

C.C. Lauritto & Ing. Casanova

Guía 03: Dualidad y Sensibilidad

Fecha de Entrega: 08 de Febrero de 2017

Ravera P. & Rivera R.

Índice

Ejercicios

Punto 01 - Modelo I

Tabla Original

Cuadro 1: Tabla original

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	X_5	30	0	0	0.33	-0.67	1
3	X_1	70	1	0	0.67	-0.33	0
5	X_2	90	0	1	-0.33	0.67	0
	$Z = 660$		0	0	0.33	2.33	0

Unidad R_1

Cuadro 2: Modificación 01

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	X_5	30.33	0	0	0.33	-0.67	1
3	X_1	70.67	1	0	0.67	-0.33	0
5	X_2	89.67	0	1	-0.33	0.67	0
	$Z = 660,33$		0	0	0.33	2.33	0

En este caso, la solución Óptima es igual que en la versión original, sin embargo podemos apreciar una mejora en el funciónal de 0.33.

Unidad R_2

Punto 01 cont. en pág. siguiente...

Cuadro 3: Modificación 02

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	X_5	30.67	0	0	0.33	-0.67	1
3	X_1	70.33	1	0	0.67	-0.33	0
5	X_2	89.33	0	1	-0.33	0.67	0
	$Z = 657,67$		0	0	0.33	2.33	0

Por otra parte, realizando una modificación a las cantidades disponibles de R_2 vemos que la composición de la solución Óptima sigue siendo la misma, sin embargo notamos un desmejoramiento del funciónal de 2.33.

Punto 02 - Modelo II

En caso de modificar el valor del parámetro c_1, esto causará una modificación en la Óptimalidad del modelo, es decir, el valor de Z (visible en el renglón Ø de la tabla simplex y como pendiente del gráfico). Esto es así debido a que c_1 representa la contribución de la actividad 1 al funciónal. Si dicho valor se mantiene dentro del intervalo de Óptimalidad no se modifica la SBF, sin embargo si lo hace el valor del funciónal como dijimos anteriormente.

Punto 03 - Programas Lineales

Problema A

Primal - Planteo

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 2X_1 + 4X_2 \\ s.a.: 1X_1 + 2X_2 &\leq 5 \\ 1X_1 + X_2 &\leq 4 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primal - Estándar

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 2X_1 + 4X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\ s.a.: 1X_1 + 2X_2 + 1X_3 + 0X_4 &= 5 \\ 1X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 1X_4 &= 4 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cuadro 4: Primal - Solución Óptima

			2	4		
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4
M	X_2	2.5	0.5	1	0.5	0
0	X_4	1.5	0.5	0	-0.5	1
	$Z = 10$		0	0	2	0

Dual - Planteo

$$\begin{aligned} Min\ W &= 5Y_1 + 4Y_2 \\ s.a.: qY_1 + 1Y_2 &\geq 2 \\ 2Y_1 + 1Y_2 &\geq 4 \\ Y_1, Y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual - Estándar

$$\begin{aligned} Min\ W &= 5Y_1 + 4Y_2 + 0Y_3 + 0Y_4 + M\mu_1 + M\mu_2 \\ s.a.: 1Y_1 + 1Y_2 - 1Y_3 + 0Y_4 + 1\mu_1 + 0\mu_2 &= 2 \\ 2Y_1 + 1Y_2 + 0Y_3 - 1Y_4 + 0\mu_1 + 1\mu_2 &= 4 \\ Y_1, Y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cuadro 5: Dual - Solución Óptima

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
5	Y_1	2	1	0.5	0	-0.5	0	0.5
0	Y_3	0	0	-0.5	1	-0.5	-1	0.5
	$W = 10$		0	-1.5	0	-2.5	$-M$	$-M + 2,5$

Problema B

Primal - Planteo

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 2X_1 + 8X_2 \\ s.a.: 2X_1 + 4X_2 &\geq 8 \\ sX_1 - 5X_2 &\leq 0 \\ -1X_1 + 5X_2 &\leq 0 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primal - Estándar

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 2X_1 + 8X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + M\mu_1 \\ s.a.: 2X_1 + 4X_2 - 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 1\mu_1 &= 8 \\ 2X_1 - 5X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0\mu_1 &= 0 \\ -1X_1 + 5X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 0\mu_1 &= 5 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cuadro 6: Primal - Solución Óptima

			2	8	0			M
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
2	X_1	5	1	0	0	1	1	0
0	X_3	10	0	0	1	2.8	3.6	-1
8	X_2	2	0	1	0	0.2	0.4	0
	$Z = 26$		0	0	0	3.6	5.2	M

Dual - Planteo

$$\begin{aligned} Min\ W &= 8Y_1 + 0Y_2 + 5Y_3 \\ s.a.: 2Y_1 + 2Y_2 - 1Y_3 &\geq 2 \\ 4Y_1 - 5Y_2 + 5Y_3 &\geq 8 \\ -1Y_1 &\geq 0 \\ Y_2, Y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Punto 03 cont. en pág. siguiente. . .

Dual - Estándar

$$\begin{aligned} Min\ W &= 8Y_1 + 0Y_2 + 5Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 + M\mu_1 + M\mu_2 \\ s.a.: & \ 2Y_1 + 2Y_3 - 1Y_3 - 1Y_4 + 0Y_5 + 1\mu_1 + 0\mu_2 = 2 \\ & \ 4Y_1 - 5Y_2 + 5Y_5 + 0Y_4 - 1Y_5 + 0\mu_1 + 1\mu_2 = 8 \\ & \ Y_1 \leq 0 \\ & \ Y_2, Y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Cuadro 7: Dual - Solución Óptima

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	M A_6	M A_7
0	Y_2	3.6	2.8	1	0	-1	-0.2	1	0.2
5	Y_3	5.2	3.6	0	1	-1	-0.4	1	0.4
	$W = 26$		10	0	0	-5	-2	$-M+5$	$-M+2$

Problema C

Primal - Planteo

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 2X_1 + 1X_2 \\ s.a.: & \ 1X_1 - 1X_2 \leq 10 \\ & \ 2X_1 + 0X_2 \leq 40 \\ & \ X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Primal - Estándar

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 2X_1 + 1X_2 + 0X_2 + 0X_4 \\ s.a.: & \ 1X_1 - 1X_2 + 1X_3 + 0X_4 = 10 \\ & \ 2X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 1X_4 = 40 \\ & \ X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cuadro 8: Primal - Solución Óptima

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4
2	X_1	20	1	0	0	0.5
1	X_2	10	0	1	-1	0.5
	$Z = 50$		0	0	-1	1.5

Dual - Planteo

$$
\begin{aligned}
Min\ W &= 10Y_1 + 40Y_2 \\
s.a.: 1Y_1 + 2Y_2 &\geq 2 \\
-1Y_1 + 0Y_2 &\geq 1 \\
Y_1, Y_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dual - Estándar

$$
\begin{aligned}
Min\ W &= 10Y_1 + 40Y_2 + 0Y_3 + 0Y_4 + M\mu_1 \\
s.a.: 1Y_1 + 2Y_2 - 1Y_3 + 0Y_4 + 1\mu_1 &= 2 \\
-1Y_1 + 0Y_2 + 0Y_3 + 1Y_4 + 0\mu_1 &= 1 \\
Y_1, Y_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Cuadro 9: Dual - Solución Óptima

			10	40			M	M
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
40	Y_2	1	0.5	1	-0.5	0	0.5	0
M	μ_2	1	-1	0	0	-1	0	1
	$W = 1040$		$-M + 10$	0	-20	$-M$	$-M + 20$	0

Problema D

Primal - Planteo

$$
\begin{aligned}
Max\ Z &= 3X_1 + 9X_2 \\
s.a.: 1X_1 + 4X_2 &\geq 9 \\
1X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\
X_1, X_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Primal - Estándar

$$
\begin{aligned}
Max\ Z &= 3X_1 + 9X_2 + 0X_3 + 0X_4 + M\mu_1 \\
s.a.: 1X_1 &+ 4X_2 - 1X_3 + 0X_4 + 1\mu_1 = 9 \\
1X_1 &+ 2X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 0\mu_1 = 4 \\
X_1&, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Cuadro 10: Primal - Solución Óptima

			3	9			
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$-M$	μ_1	1	-1	0	-1	-2	1
9	X_2	2	0.5	1	0	0.5	0
	$Z = -M + 18$		$M + 1,5$	0	M	$2M + 4.5$	0

Dual - Planteo

$$
\begin{aligned}
Min\ W &= 9Y_1 + 4Y_2 \\
s.a.: 1Y_1 &+ 1Y_2 \geq 3 \\
4Y_1 &+ 2Y_2 \geq 9 \\
-1Y_1 &+ 0Y_2 \geq 0 \\
Y_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dual - Estándar

$$
\begin{aligned}
Min\ W &= 9Y_1 + 4Y_2 + 0Y_3 + 0Y_4 + M\mu_1 + M\mu_2 \\
s.a.: 1Y_1 &+ 1Y_2 - 1Y_3 + 0Y_4 + 1\mu_1 + 0\mu_2 = 3 \\
4Y_1 &+ 2Y_2 + 0Y_3 - 1Y_4 + 0\mu_1 + 1\mu_2 = 9 \\
-1Y_1 &\geq 0 \\
Y_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Cuadro 11: Dual - Solución Óptima

			9	4			M	M
C_k	Y_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
4	Y_2	4.5	2	1	0	-0.5	0	0.5
0	Y_3	1.5	1	0	1	-0.5	-1	0.5
	$W = 18$		-1	0	0	-2	$-M$	$-M+2$

Comparación

Cuadro 12: Tabla Problemas Lineales

Problema	Tipo de Solución		Correspondencia		Valores Básicos		No Básicas	
	PRIMAL	DUAL	PRIMAL	DUAL	PRIMAL	DUAL	PRIMAL	DUAL
A	Óptima única	Óptima Única	$x_1 \to y_3$ $x_2 \to y_4$	$x_3 \to y_1$ $x_4 \to y_2$	$x_2 = 2.5$ $x_4 = 1.5$	$y_1 = 2$ $y_3 = 0$	x_1, x_3	y_2, y_4
B	Óptima única	Óptima Única	$x_1 \to y_4$ $x_2 \to y_5$	$x_3 \to y_1$ $x_4 \to y_2$ $x_5 \to y_3$	$x_1 = 5$ $x_3 = 10$ $x_2 = 2$	$y_2 = 5.6$ $y_3 = 5.3$	x_4, x_5	y_1, y_5, y_4
C	No Acotada	Incompatible	$x_1 \to y_3$ $x_2 \to y_4$	$x_3 \to y_1$ $x_4 \to y_2$	$x_1 = 20$ $x_2 = 10$	$y_2 = 1$ $\mu_2 = 1$	x_3, x_4	y_1, y_3, y_4
D	Incompatible	No Acotada	$x_1 \to y_3$ $x_2 \to y_4$	$x_3 \to y_1$ $x_4 \to y_2$	$\mu_1 = 1$ $x_2 = 2$	$y_2 = 4.5$ $y_3 = 1.5$	x_1, x_3, x_4	y_1, y_4

Punto 04 - Propiedades

Cuadro 13: Modificación de Parámetros

Cambios en los parámetros	Propiedad de la solución afectada	Procedimiento para reoptimizar desde el primal	Procedimiento para reoptimizar desde el dual
Cambio en c_j	Óptimalidad	Debemos recalcular el renglón Ø. En caso de que no sea óptimo, seguimos iterando	Verificamos si la solución Óptima actual verifica la restricción modificada. En caso de no hacerlo es necesario modificar la tabla y trabajar sobre el primal asociado
Cambio en b_i	Factibilidad	Verificamos si la solución Óptima cumple con la restricción modificada. En caso de que no sea así modificamos la tabla y trabajamos sobre el problema dual	Verificamos si la solución Óptima lo sigue siendo (analizando el renglón Ø). Caso contrario re iteramos.
Cambio en a_{ij} no basica	Óptimalidad	Recalculamos la columna A_j correspondiente a la a_{ij} que se modifico. Verificamos si la solución Óptima lo sigue siendo (analizando el renglón Ø) y en caso contrario re iteramos.	Recalculamos la columna A_j correspondiente a la a_{ij} que se modifico. Verificamos si la solución Óptima lo sigue siendo (analizando el renglón Ø) y en caso contrario re iteramos.
Cambio en a_{ij} basica	Factibilidad	Debemos trabajar sobre el problema dual asociado	Recalculamos la columna A_j correspondiente a la a_{ij} que se modifico. Verificamos si la solución Óptima lo sigue siendo (analizando el renglón Ø) y en caso contrario re iteramos.
Agregado de una nueva Actividad	Óptimalidad	Agregamos una nueva columna a la tabla Óptima. Verificamos si la solución Óptima lo sigue siendo (analizando el renglón Ø) y en caso contrario re iteramos.	La nueva actividad se convierte en una nueva restricción. La re optimización es análoga al caso de nueva restricción en el primal
Agregado de una nueva restricción	Factibilidad	Verificamos si la solución Óptima cumple con la restricción modificada. En caso de que no sea así modificamos la tabla y trabajamos sobre el problema dual	La nueva restricción se convierte en una nueva actividad. La re optimización es análoga al caso de nueva actividad en el primal

Punto 04 cont. en pág. siguiente...

Solución de Problemas

Punto 01 - Dakota

Simplex

Las variables de decisión son:

- E Cantidad de Escritorios a producir.
- S Cantidad de Sillas a producir.
- M Cantidad de Mesas a producir

Función Objetivo:

$$Max\ Z = 60\left[\frac{\$}{e}\right]E\left[e\right] + 30\left[\frac{\$}{m}\right]M\left[m\right] + 20\left[\frac{\$}{s}\right]S\left[s\right] \tag{1}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
8\left[\frac{Mad}{e}\right]E\left[e\right] + 6\left[\frac{Mad}{m}\right]M\left[m\right] + 1\left[\frac{Mad}{s}\right]S\left[s\right] &\leq 48\left[Mad\right] \\
4\left[\frac{Aca}{e}\right]E\left[e\right] + 2\left[\frac{Aca}{m}\right]M\left[m\right] + 1.5\left[\frac{Aca}{s}\right]S\left[s\right] &\leq 20\left[Aca\right] \\
2\left[\frac{Car}{e}\right]E\left[e\right] + 1.5\left[\frac{Car}{m}\right]M\left[m\right] + 0.5\left[\frac{Car}{s}\right]S\left[s\right] &\leq 8\left[Car\right] \\
E, M, S &\geq 0
\end{aligned}$$

Forma Estándar:

$$\begin{aligned}
&60X_1 + 30X_2 + 20X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 \\
&8X_1 + 6X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 48 \\
&4X_1 + 2X_2 + 1.5X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 0X_6 = 20 \\
&2X_1 + 1.5X_2 + 0.5X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 1X_6 = 8 \\
&X_1, X_2, X_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Cuadro 14: Tableau Simplex Óptimo

			60	30	20	0	0	0
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	X_4	24	0	-2	0	1	2	-8
20	X_3	8	0	-2	1	0	2	-4
60	X_1	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5
	$Z = 280$		0	5	0	0	10	10

Variación de c_3

$$
\begin{aligned}
Z_2 - Z_2 : C_3(-2) + 60(1.25) \geq 0 \rightarrow C_3 \leq 37.5 \\
Z_5 - Z_5 : C_3(2) + 60(-0.5) \geq 0 \rightarrow C_3 \geq 15 \\
Z_6 - Z_6 : C_3(-4) + 60(1.5) \geq 0 \rightarrow C_3 \leq 22.5 \\
\text{Entonces: } 15 \leq C_3 \leq 22.5
\end{aligned}
$$

Precios Sombra

Los valores de los precios sombra son:

- Hora de Carpintería: 10 $\left[\frac{\$}{Car}\right]$
- Hora de Acabado: 10 $\left[\frac{\$}{Aca}\right]$
- Madera: 0 $\left[\frac{\$}{Mad}\right]$

En el caso de las horas de Carpintería y Acabado, las mismas se interpretan como la mejora que se produciría en el funciónal en el caso de contar con una unidad más de cualquiera de los dos recursos. Sin embargo, está variación es válida sólo para el intervalo de variación de cada una de las variables en cuestión. Cabe destacar que las mismas fueron consumidas en su totalidad.

En cambio, la madera presenta un sobrante y es por ésto que contar con una unidad de madera extra no presentaría una mejora, ya que de por sí tenemos todavía madera a nuestra disposición.

18 hs de acabado

$$b_2(-2) + 8(8) \leq 0 \rightarrow b_2 \geq 32$$
$$b_2(1/2) + 8(-3/2) \leq 0 \rightarrow b_2 \leq 24$$
$$b_2(-2) + 8(4) \leq 0 \rightarrow b_2 \geq 16$$

Por lo tanto, b_2 esta en el rango de: $16 \leq b_2 \leq 24$
$W = Z = 0(5) + 18(10) + 8(10) = 260 \quad \rightarrow 280 - 260 = 20 \rightarrow$ Disminución.

Mesas para PC

Un método para determinar si es conveniente o no es analizar el valor de la suma de los precios sombra de los recursos necesarios para realizar la nueva actividad y comparar los mismos con el precio estimado de venta. Por lo tanto:

$$A_7 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$6Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \geq 36$$
$$6(0) + 2(10) + 2(10) \geq 36 \rightarrow 40 \geq 36$$

Por ende, no es conveniente realizar la nueva actividad, en este caso, la producción de mesas de PC.

Problema Dual

$$\begin{aligned} Min\ W &= 48Y_1 + 20Y_2 + 8Y_3 \\ s.a. &: 8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \geq 6 \\ & 6Y_1 + 2Y_2 + 1.5Y_3 \geq 30 \\ & 1Y_1 + 1.5Y_2 + 0.5Y_3 \geq 20 \\ & Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma Estándar

$$\begin{aligned} Min\ W &= 48Y_1 + 20Y_2 + 8Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 + 0Y_6 + M\mu_1 + M\mu_2 + M\mu_3 \\ s.a. &: 8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 - 1Y_4 + 0Y_5 + 0Y_6 + 1\mu_1 + 0\mu_2 + 0\mu_3 = 6 \\ & 6Y_1 + 2Y_2 + 1.5Y_3 + 0Y_4 - 1Y_5 + 0Y_6 + 0\mu_1 + 1\mu_2 + 0\mu_3 = 30 \\ & 1Y_1 + 1.5Y_2 + 0.5Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 - 1Y_6 + 0\mu_1 + 0\mu_2 + 1\mu_3 = 20 \\ & Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Se puede interpretar el problema dual de la siguiente manera. Buscamos minimizar el costo total a pagar por cada recurso que necesitamos para la producción. En el lado izquierdo de las restricciones podemos apreciar los requerimientos de cada recurso para cada una de las actividades que deseamos llevar a cabo como empresa, mientras que en el lado derecho se encuentra el precio de venta del producto resultante de dicha actividad. De esta manera, exigimos que lógicamente la suma de los costos de un producto, sea siempre menor a su precio de venta, de manera de asegurar la existencia de ganancias para la empresa.

Estudio de Mercado

No es necesario modificar la solución obtenida anteriormente ya que la nueva restricción resulta redundante. El plan de producción actual incluye la fábricación de 8 unidades del producto 3 (X_3), o sea sillas.

Una corrección en el Estudio de Mercado

Como los muchachos de Marketing estaban equivocados (qué sorpresa), la restricción anterior sí nos afecta. Esto es debido a que actualmente el nivel de la actividad 'producción de sillas' es de 8, mientras que la nueva restricción nos impone un mínimo de 9. Entonces debemos agregar la siguiente restricción,

$$0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 - 1X_7 + 1\mu_1 \geq 9 \tag{2}$$

lo que resulta en una nueva tabla, la cual debemos analizar:

Cuadro 15: Nueva tabla

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	$-M$ A_8
0	X_4	24	0	-2	0	1	2	-8	0	0
20	X_3	8	0	-2	1	0	2	-4	0	0
60	X_1	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	0
$-M$	M_1	9	0	0	1	0	0	0	-1	1
	$Z = 280$		0	5	0	0	10	10	0	0

Cuadro 16: Iteraciónes

	C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	$-M$ A_8	$\theta_i = b_i/a_ij$
	0	X_4	24	0	-2	0	1	2	-8	0	0	$\theta_1 = (-)$
	20	X_3	8	0	-2	1	0	2	-4	0	0	$\theta_2 = (-)$
	60	X_1	2	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	0	$\theta_3 = 1,6$
←	$-M$	$\boldsymbol{\mu_1}$	1	0	**2**	0	0	-2	4	-1	1	$\boldsymbol{\theta_4 = 0,5}$
		$Z = 280 - M$		0	$\boldsymbol{5 - M}$	0	0	$10 - M$	$10 - M$	$+M$	0	
					↑							
	0	X_4	25	0	0	0	1	0	-4	-1	1	
	20	X_3	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	
	60	X_1	1.375	1	0	0	0	0.75	-1	0.625	-0.625	
	30	X_2	0.5	0	1	0	0	-1	2	-0.5	0.5	
		$Z = 277,5$		0	0	0	0	15	0	2.5	$-M - 2,5$	

Por lo tanto, el mejor plan de producción sería:

- 9 Sillas
- 1.375 Escritorios
- 0.5 Mesas

Mesas, sí o sí

Para lograr que la venta de mesas sea una actividad rentable, entonces el precio sombra de la actividad 2 debería ser igual a 0. Para lograr ésto, una forma es aumentar el valor de c_2 (la contribución de la actividad venta de mesas al funciónal) hasta que la solución actual no sea Óptima. Entonces debemos aumentarlo por afuera de su rango de variación.
Intervalo de variación de c_2 (VNB):

$$L_{inf} = -\infty$$
$$L_{sup} = c_2 + (Z_2 - c_2) = 35$$

En resumen, debemos vender cada mesa al menos a \$35 para que nos resulte rentable.

Punto 02 - Citrus

Máxima Ganancia

El objetivo es maximizar las ganancias de la empresa. Las variables de decisión son:

- X_1 Litros de jugo de naranja a destilar.

Punto 02 cont. en pág. siguiente...

- X_2 Litros de jugo de pomelo a destilar.

Para el jugo de naranja, la tasa de conversión de "puro.ª concentrado es: $\frac{25-17.5}{25} = 0.7$
Para el jugo de pomelo, la tasa de conversión es: $\frac{20-10}{20} = 0.5$
Si se destilan 25 lt de jugo de naranja en una hora, entonces cada litro se destila en 0.04 hs.
Análogamente, para el jugo de pomelo este valor es de 0.05 hs.
Función Objetivo:

$$Max\ Z = (0.55 \times 0.7)\left[\frac{\$}{Lt_N}\right] X_1\,[Lt_N] + (0.4 \times 0.5)\left[\frac{\$}{Lt_P}\right] X_2\,[Lt_P] \tag{3}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned} 0.04\left[\frac{Hs}{Lt_N}\right] X_1\,[Lt_N] + 0.05\left[\frac{Hs}{Lt_P}\right] X_2\,[Lt_P] &\leq 150\,[Hs] \\ 0.7\left[\frac{Lt_T}{Lt_N}\right] X_1\,[Lt_N] &\leq 1000\,[Lt_T] \\ 0.5\left[\frac{Lt_T}{Lt_P}\right] X_2\,[Lt_P] &\leq 1000\,[Lt_T] \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} Max\ Z = 0.385X_1 + 0.2X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 \\ 0.04X_1 + 0.05X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 = 150 \\ 1X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 0X_5 = 1000 \\ 0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 1X_5 = 1000 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cuadro 17: Tableau Simplex ptimo

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0.2	X_2	1857.14	0	1	20	-1.14	0
0.385	X_1	1428.57	1	0	0	1.43	0
0	X_5	71.43	0	0	-10	0.57	1
	$Z = 928,57$		0	0	4	0.33	0

El plan de producción óptimo hallado nos indica que utilizando:

- 1428.57 litros de jugo de naranja.

- 1857.14 litros de jugo de pomelo.

De ésta manera, alcanzamos una ganancia de \$928.57. Si pudiéramos disponer de una hora más de máquina, nuestra ganancia aumentaría en \$0.33. De igual manera, si nuestro tanque de almacénamiento tuviera un litro más de capacidad, la ganancia aumentaría en \$4.

Nuevos Tanques

Dual Estándar

$$\begin{aligned} Min\ W = 150Y_1 + 1000Y_2 + 1000Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 + M\mu_1 + M\mu_2 \\ 0.04Y_1 + 1Y_2 + 0Y_3 - 1Y_4 + 0Y_5 + 1\mu_1 + 0\mu_2 = 0.385 \\ 0.05Y_1 + 0Y_2 + 0Y_3 + 0Y_4 - 1Y_5 + 0\mu_1 + 1\mu_2 = 0.2 \end{aligned}$$

Cuadro 18: Tableau Dual Óptimo

			150	1000	1000	0	0
C_k	Y_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
150	Y_1	4	1	0	\$+10\$	0	-20
1000	Y_2	0.33	0	1	-0.57	-1.43	\$+1,14\$
	$W = 928,57$		0	0	-71.43	-1428.57	-1857.14

$$\left.\begin{aligned} 150 \times 10 - 0.57b_2 \leq 0 \\ 150 \times 0 - 1.43b_2 \leq 0 \\ 150 \times (-20) + 1.14b_2 \leq 0 \end{aligned}\right\} b_2 \geq 2631.58 \wedge b_2 \leq 2631.58$$

Para resolver el problema de si nos conviene o no la compra de uno o ambos tanques, re calculamos (utilizando SW) el funciónal y comparamos si la variación en el mismo (ganancia o perdida debido al cambio de los tanques) es mayor que la inversión (el precio de cada tanque) requerida.

Opción A - Tanque 1500 lt a \$500

- Cambio de tanque para jugo de Naranja:

$$\begin{aligned} 777.5 - 928.57 \geq 500 \\ -151.07 \ngeq 500 \end{aligned}$$

- Cambio de tanque para jugo de Pomelo:

$$\begin{aligned} 685 - 928.57 &\geq 500 \\ -243.57 &\ngeq 500 \end{aligned}$$

- Cambio de tanque para ambos jugos:

$$\begin{aligned} 877.5 - 928.57 &\geq 500 \\ -51.07 &\ngeq 500 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en ningún caso nos resulta redituable adquirir el tanque de 1500 lt.

Opción B - Tanque 2500 lt a $800

- Cambio de tanque para jugo de Naranja:

$$\begin{aligned} 1162.5 - 928.57 &\geq 800 \\ 233.93 &\ngeq 800 \end{aligned}$$

- Cambio de tanque para jugo de Pomelo:

$$\begin{aligned} 825 - 928.57 &\geq 800 \\ -103.57 &\ngeq 800 \end{aligned}$$

- Cambio de tanque para ambos jugos:

$$\begin{aligned} 877.5 - 928.57 &\geq 800 \\ 233.93 &\ngeq 800 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en ningún caso nos resulta redituable adquirir el tanque de 2500 lt.

Opción C - Tanque 3000 lt a $1000

- Cambio de tanque para jugo de Naranja:

$$\begin{aligned} 1275 - 928.57 &\geq 1000 \\ 346.43 &\ngeq 1000 \end{aligned}$$

- Cambio de tanque para jugo de Pomelo:

$$\begin{aligned} 825 - 928.57 &\geq 1000 \\ -103.57 &\ngeq 1000 \end{aligned}$$

- Cambio de tanque para ambos jugos:

$$\begin{aligned} 1275 - 928.57 &\geq 1000 \\ 346.43 &\ngeq 1000 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en ningún caso nos resulta redituable adquirir el tanque de 3000 lt.

Oferta del Competidor

Si revisamos la tabla Óptima del Simplex, vemos que por cada hora extra de maquinaria el funciónal mejoraría en \$4, por lo que adquirir horas extras a \$8.2 no solo no nos conviene, si no que estaríamos incurriendo en un resultado negativo.

Punto 03 - Criador de Aves

Método Simplex

El objetivo es minimizar los costos del criador de aves satisfaciendo la dieta de los animales. Las variables de decisión son:

- X_1 Cantidad de alimento del tipo 1 adquirido.
- X_2 Cantidad de alimento del tipo 2 adquirido.

Función Objetivo:

$$Min\ Z = 50\left[\frac{\$}{Kg_1}\right] X_1\,[Kg_1] + 25\left[\frac{\$}{Kg_2}\right] X_2\,[Kg_2] \tag{4}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned} 0.1\left[\frac{Kg_{Gns}}{Kg_1}\right] X_1\,[Kg_1] + 0.3\left[\frac{Kg_{Gns}}{Kg_2}\right] X_2\,[Kg_2] &\geq 8\,[Kg_{Gns}] \\ 0.3\left[\frac{Kg_{Car}}{Kg_1}\right] X_1\,[Kg_1] + 0.4\left[\frac{Kg_{Car}}{Kg_2}\right] X_2\,[Kg_2] &\geq 19\,[Kg_{Car}] \\ 0.3\left[\frac{Kg_{Crc}}{Kg_1}\right] X_1\,[Kg_1] + 0.1\left[\frac{Kg_{Crc}}{Kg_2}\right] X_2\,[Kg_2] &\geq 7\,[Kg_{Crc}] \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} Min\ Z = 50X_1 + 23X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + M\mu_1 + M\mu_2 + M\mu_3 \\ 0.1X_1 + 0.3X_2 - 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 1\mu_1 + 0\mu_2 + 0\mu_3 = 8 \\ 0.3X_1 + 0.4X_2 + 0X_3 - 1X_4 + 0X_5 + 0\mu_1 + 1\mu_2 + 0\mu_3 = 19 \\ 0.3X_1 + 0.1X_2 + 0X_3 + 0X_4 - 1X_5 + 0\mu_1 + 0\mu_2 + 1\mu_3 = 7 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cuadro 19: Tableau Simplex Óptimo

								M	M	M
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
25	X_2	40	0	1	0	-3.33	3.33	0	3.33	-3.33
0	X_3	5	0	0	1	-0.89	0.56	-1	0.89	-0.56
50	X_1	10	1	0	0	1.11	-4.44	0	-1.11	4.44
	$Z = 1500$		0	0	0	-27.78	-138.89	$-M$	$-M + 27,78$	$-M + 188,89$

El plan de producción óptimo hallado nos indica que utilizando:

- 10 Kg del alimento tipo 1.
- 40 Kg del alimento tipo 2.

lograríamos que los costos desciendan al mínimo de \$1500. Con esta composición de los alimentos, la necesidad de grasas no saturadas se ve incluso sobre satisfecha, mientras que resultaría muy beneficioso si la dieta de los animales requiriera un kilogramo menos de componentes ricos en calcio (nuestro costos disminuiría en \$138.89) y un menos beneficioso si requirieran un kilogramo menos de carbohidratos (una disminución de \$27.78)

Dual Asociado

$$
\begin{aligned}
Max\ W &= 8Y_1 + 19Y_2 + 7Y_3 \\
s.a. : 0.1Y_1 &+ 0.3Y_2 + 0.3Y_3 \leq 50 \\
0.3Y_+ &0.4Y_2 + 0.1Y_3 \leq 25
\end{aligned}
$$

La función objetivo representa la maximización de los precios de venta de los recursos con los que se cuenta. El lado izquierdo de cada restricción representa el consumo de recursos de cada actividad, mientras que el derecho indica el precio de venta o ganancia de dicha actividad, por lo que resulta lógico establecer la restricción de que el precio de venta de los recursos deba ser mayor que la ganancia que obtendríamos si destinásemos esos recursos a la producción de bienes y servicios.
Forma estándar:

$$
\begin{aligned}
Max\ W &= 8Y_1 + 19Y_2 + 7Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 \\
&0.1Y_1 + 0.3Y_2 + 0.3Y_3 + 1Y_4 + 0Y_5 = 50 \\
&0.3Y_1 + 0.4Y_2 + 0.1Y_3 + 0Y_4 + 1Y_5 = 25
\end{aligned}
$$

Cuadro 20: Tableau Dual Óptima

C_k	Y_k	B_k	A_1	A_2	A_3	Y_4	Y_5
7	Y_3	138.89	-0.56	0	1	4.44	-3.33
19	Y_2	27.78	0.89	1	0	-1.11	3.33
	$W = 1500$		5	0	0	10	40

Cambio en la Dieta 01

$$\left.\begin{aligned} 7 \times (-0.56) + 0.89b_2 \geq 0 \\ 7 \times (4.44) + 1.14b_2 \geq 0 \\ 7 \times (-3 - 33) + 3.33b_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} b_2 \geq 4.4 \wedge b_2 \geq 7 \wedge b_2 \leq 28$$

$$7 \leq b_2 \leq 28$$

Cuadro 21: Modificación dual óptimo

C_k	Y_k	B_k
7	Y_3	128.89
10	Y_2	27.78
	$W = 1250$	

$$B^{-1}.b = b^*$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3.33 & -3.33 \\ -1 & 0.89 & -0.56 \\ 0 & -1.11 & 4.44 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.99 \\ \mathbf{-3.02} \\ 19.98 \end{bmatrix}$$

Si bien la solución sigue siendo Óptima, la misma no es factible, por lo que debemos re iterar. De ésta manera, llegamos a la nueva solución:

Cuadro 22: Solución Óptima con modificación

C_k	X_k	B_k
0	X_4	3.375
25	X_2	21.25
50	X_1	16.25
	$Z = 1343,75$	

Cambio en la Dieta 02

Gracias al ejercicio anterior sabemos que el rango de variación de b_2 es $7 \leq b_2 \leq 28$, por lo que un valor de 29 produce que la solución deje de ser Óptima. De igual manera, la misma tampoco es factible:

$$B^{-1}.b = b^*$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3.33 & -3.33 \\ -1 & 0.89 & -0.56 \\ 0 & -1.11 & 4.44 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 8 \\ 29 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73.26 \\ 13.89 \\ \textbf{-1.11} \end{bmatrix}$$

Aumento del costo del Alimento

Intervalo de variación de c_1:

$$\left.\begin{aligned} 25 \times (-3.33) + 1.11c_1 \leq 0 \\ 25 \times (3.33) - 4.44c_1 \leq 0 \end{aligned}\right\} c_1 \leq 75 \land c_1 \geq 18.75$$

Con estos datos no es posible asegurar que la actividad que representa la compra del alimento 1 forme parte de la solución. La nueva solución con esta modificación seria:

Cuadro 23: Simplex Óptimo con modificación de alimento

C_k	X_k	B_k
25	X_2	70
0	X_3	13
0	X_4	9
	$Z = 1750$	

Punto 03 cont. en pág. siguiente...

Rangos de variación & Precio Sombra

Intervalo de variación de b_1:

$$3 \leq b_1 \leq \infty$$

Intervalo de variación de b_2:

$$\left.\begin{aligned} 7 \times (-0.56) + 0.89b_2 \geq 0 \\ 7 \times (4.44) + 1.14b_2 \geq 0 \\ 7 \times (-3.33) + 3.33b_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} b_2 \geq 4.4 \wedge b_2 \geq 7 \wedge b_2 \leq 28$$

$$7 \leq b_2 \leq 28$$

Intervalo de variación de b_3:

$$\left.\begin{aligned} 19 \times (0.89) - 0.56b_3 \geq 0 \\ 19 \times (-1.11) + 4.44b_3 \geq 0 \\ 19 \times (3.33) + -3.33b_3 \geq 0 \end{aligned}\right\} b_3 \geq 4.75 \wedge b_3 \leq 30.2 \wedge b_3 \leq 19$$

$$4.75 \leq b_3 \leq 19$$

Intervalo de variación de c_1:

$$\left.\begin{aligned} 25 \times (-3.33) + 1.11c_1 \leq 0 \\ 25 \times (3.33) - 4.44c_1 \leq 0 \end{aligned}\right\} c_1 \leq 75 \wedge c_1 \geq 18.75$$

$$18.75 \leq c_1 \leq 75$$

Intervalo de variación de c_2:

$$\left.\begin{aligned} 50 \times (1.11) - 3.33c_2 \leq 0 \\ 50 \times (-4.44) + 3.33c_2 \leq 0 \end{aligned}\right\} c_2 \geq 16.67 \wedge c_2 \leq 66.67$$

$$16.67 \leq c_2 \leq 66.67$$

Precios Sombra:

- -27.78 por cada Kg de Carbohidratos que se elimine como requerimiento de la dieta de los animales, conseguiríamos un decremento en el costo total de $\$27,78$
- -138.89 por cada Kg de Compuestos ricos en calcio que se elimine como requerimiento de la dieta de los animales, conseguiríamos un decremento en el costo total de $138.89

Punto 04 - Heladería

Modelo Lineal

El objetivo es determinar la cantidad a producir de cada sabor para maximizar la ganancia, de acuerdo a las limitaciones sobre la materia prima. Las variables de decisión son:

- X_1 Cantidad de helado de chocolate a producir(Lt).
- X_2 Cantidad de helado de vainilla a producir(Lt).
- X_3 Cantidad de helado de dulce de leche a producir(Lt).

Función Objetivo:

$$Max\ Z = 1\left[\frac{\$}{Lt_c}\right] X_1\,[Lt_c] + 0.9\left[\frac{\$}{Lt_v}\right] X_2\,[Lt_v] + 0.95\left[\frac{\$}{Lt_d}\right] X_1\,[Lt_d] \tag{5}$$

Restricciones:

$$\begin{aligned}
0.45\left[\frac{Lt_l}{Lt_c}\right] X_1\,[Lt_c] + 0.50\left[\frac{Lt_l}{Lt_v}\right] X_2\,[Lt_v] + 0.40\left[\frac{Lt_l}{Lt_d}\right] X_3\,[Lt_d] &\leq 200\,[Lt_l] \\
0.50\left[\frac{Kg_{az}}{Lt_c}\right] X_1\,[Lt_c] + 0.40\left[\frac{Kg_{az}}{Lt_v}\right] X_2\,[Lt_v] + 0.40\left[\frac{Kg_{az}}{Lt_d}\right] X_3\,[Lt_d] &\leq 150\,[Kg_{az}] \\
0.10\left[\frac{Kg_{cr}}{Lt_c}\right] X_1\,[Lt_c] + 0.15\left[\frac{Kg_{cr}}{Lt_v}\right] X_2\,[Lt_v] + 0.20\left[\frac{Kg_{cr}}{Lt_d}\right] X_3\,[Lt_d] &\leq 60\,[Kg_{cr}] \\
X_1, X_2, X_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Método Simplex

Forma estándar:

$$\begin{aligned}
Max\ Z &= 1X_1 + 0.90X_2 + 0.95X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 \\
s.a.: &\ 0.45X_1 + 0.50X_2 + 0.40X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 200 \\
&\ 0.50X_1 + 0.40X_2 + 0.40X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 0X_6 = 150 \\
&\ 0.10X_1 + 0.15X_2 + 0.20X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 1X_6 = 60
\end{aligned}$$

Cuadro 24: Tableau Simplex Óptimo

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	X_4	20	-0.35	0	0	1	-2	2
0.9	X_2	300	3	1	0	0	10	-20
0.95	X_3	75	-1.75	0	1	0	-7.5	20
	$Z = 341,25$		0.038	0	0	0	1.875	1

De la tabla anterior podemos observar que el plan de producción para alcanzar la ganancia Óptima consiste en la producción de 300 lt de helado de vainilla y 75 Lt de helado de dulce de leche. En cuanto a los sobrantes, contaríamos con unos 20 lt de leche. Sin embargo, tanto el azúcar como la crema se usaron en su totalidad. Si contáramos con un Kg más de azúcar y crema veríamos un incremento en nuestra ganancia de $1.875 y $1 respectivamente.

Modelo Dual

El problema dual se puede interpretar como la búsqueda del costo mínimo al que se ésta dispuesto a pagar cada unidad de cada recurso. Por otra parte, los lados izquierdos de cada restricción hacen referencia a la imputación de cada recurso a cada una de las actividades de la empresa, mientras que el lado derecho de la misma ecuación indica la ganancia por unidad que es realizada la actividad.

$$
\begin{aligned}
Min\ W &= 200Y_1 + 150Y_2 + 60Y_3 \\
s.a.: &\ 0.45Y_1 + 0.50Y_2 + 0.10Y_3 \geq 1 \\
&\ 0.50Y_1 + 0.40Y_2 + 0.15Y_3 \geq 0.90 \\
&\ 0.40Y_1 + 0.40Y_2 + 0.20Y_3 \geq 0.95 \qquad\qquad Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dual Estándar

$$
\begin{aligned}
Min\ W &= 200Y_1 + 150Y_2 + 60Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 + 0Y_6 + M\mu_1 + M\mu_2 + M\mu_3 \\
s.a.: &\ 0.45Y_1 + 0.50Y_2 + 0.10Y_3 - 1Y_4 + 0Y_5 + 0Y_6 + 1\mu_1 + 0\mu_2 + 0\mu_3 = 1 \\
&\ 0.50Y_1 + 0.40Y_2 + 0.15Y_3 + 0Y_4 - 1Y_5 + 0Y_6 + 0\mu_1 + 1\mu_2 + 0\mu_3 = 0.90 \\
&\ 0.40Y_1 + 0.40Y_2 + 0.20Y_3 + 0Y_4 + 0Y_5 - 1Y_6 + 0\mu_1 + 0\mu_2 + 1\mu_3 = 0.95
\end{aligned}
$$

Punto 04 cont. en pág. siguiente…

Cuadro 25: Tableau Dual Óptimo

C_k	Y_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
60	Y_3	1	-2	0	1	0	20	-20	0	-20	20
150	Y_2	1.875	2	1	0	0	-10	7.5	0	10	-7.5
0	Y_4	0.038	0.35	0	0	1	-3	1.75	-1	3	-1.75
	$W = 341,25$		-20	0	0	0	-300	-75	$-M$	$-M + 300$	$-M + 75$

Aumento Ganancia de DDL

Intervalo de variación de c_3:

$$\left.\begin{aligned} 0.9 \times 3 - 1.75c_3 \geq 0 \\ 0.9 \times 10 - 7.5c_3 \geq 0 \\ 0.9 \times (-20) + 20c_3 \geq 0 \end{aligned}\right\} c_3 \leq 1.543 \wedge c_3 \leq 1.2 \wedge c_3 \geq 0.9$$

Entonces $0.9 \leq c_3 \leq 1.2$.
Podemos ver que la solución Óptima no cambia ya que c_3 sigue en su rango de variación. El nuevo valor del funciónal es de 345.

Cuadro 26: Simplex Óptimo, modificación DDL+

C_k	X_k	B_k
0	X_4	20
0.9	X_2	300
1	X_1	75
	$Z = 345$	

Disminución Ganancia de DDL

En el caso de disminuir el precio del lt de helado de dulce de leche a \$0.92, como el mismo sigue estando dentro del rango de variación permitido, sigue siendo Óptima la solución original. El nuevo valor del funciónal es de \$339 (en este caso se sufrió una desmejora).

Cuadro 27: Simplex Óptimo, modificación DDL-

C_k	X_k	B_k
0	X_4	20
0.9	X_2	300
0.92	X_3	75
	$Z = 339$	

Crema en mal estado

Debido a una mala gestión de la materia prima, la existencia de crema pasa a ser de 57. Intervalo de Variación de b_3

$$\left.\begin{aligned} 150 \times 2 - 2b_3 \geq 0 \\ 150 \times 20 + 20b_3 \geq 0 \\ 150 \times (-20) - 20b_3 \geq 0 \end{aligned}\right\} b_3 \geq 150 \wedge b_3 \leq 75 \wedge b_3 \geq 56.25$$

Entonces podemos observar que el "nuevo"valor de $b_3 \in [56.25, 75]$. Tambíen resulta que la nueva solución es factible:

$$B^{-1}.b_{nuevo} = b^* =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 10 & -20 \\ 0 & -0.75 & 20 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 200 \\ 150 \\ 75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 360 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Mas azúcar!

Intervalo de variación de b_2:

$$\left.\begin{aligned} 60 \times (-2) + 2b_2 \geq 0 \\ 60 \times 20 + -10b_2 \geq 0 \\ 60 \times (-20) + 7.5b_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} b_2 \leq 60 \wedge b_2 \geq 120 \wedge b_2 \leq 160$$

Como el nuevo valor del recurso 'Kg de Azúcar' no ésta dentro del rango de variación ($120 \leq b_2 \leq 160$), debemos re iterar para determinar la nueva solución Óptima.

Cuadro 28: Mas azúcar...

C_k	X_k	B_k
1	X_1	28,57
0,9	X_2	\$364.29\$
0,95	X_3	12,5
	$Z = 368,30$	

Entonces,

$$Z_n - Z_a \geq 15$$
$$368.3 - 341.25 \geq 15 \rightarrow 27.05 \geq 15$$

En base a lo anteriormente expuesto, nos conviene adquirir los 15 Kg de azúcar que nos ofrece el proveedor.

Sensibilidad de la Leche

En este problema, la Leche representa un recurso sobrante, ya que la variable de holgura que lo representa forma parte de la solución Óptima (es una VB).El valor de dicha variable es de 20 y, obviamente, su precio sombra es de 0. Entonces, podríamos disminuir la existencia de leche hasta 20 unidades y aumentar todo lo que quisiéramos la misma sin afecta la factibilidad. Sin embargo, si quisiéramos disminuir más de 20 lt de leche la factibilidad variaría.

Punto 05 - Empresita

Modelo Matemático

El objetivo es que la empresa maximice sus ganancias.
Las variables de decisión son:

- X_1 cantidad del producto 1 a fábricar.
- X_2 cantidad del producto 2 a fábricar.
- X_3 cantidad del producto 3 a fábricar.

Función Objetivo:

$$Max\ Z = 463 \left[\frac{\$}{U_1}\right] X_1 [U_1] + 371.7 \left[\frac{\$}{U_2}\right] X_2 [U_2] + 556.4 \left[\frac{\$}{U_3}\right] X_3 [U_3] \tag{6}$$

Restringida a:

$$5\left[\frac{Hs_{MO}}{U_1}\right]X_1\left[U_1\right]+4\left[\frac{Hs_{MO}}{U_2}\right]X_2\left[U_2\right]+6\left[\frac{Hs_{MO}}{U_3}\right]X_3\left[U_3\right]\leq 1200\left[Hs_{MO}\right]$$
$$0.2\left[\frac{Kg_{MP}}{U_1}\right]X_1\left[U_1\right]+0.3\left[\frac{Kg_{MP}}{U_2}\right]X_2\left[U_2\right]+0.1\left[\frac{Kg_{MP}}{U_3}\right]X_3\left[U_3\right]\leq 300\left[Kg_{MP}\right]$$
$$1.1\left[\frac{Hs_{MA}}{U_1}\right]X_1\left[U_1\right]+0.8\left[\frac{Hs_{MA}}{U_2}\right]X_2\left[U_2\right]+1.3\left[\frac{Hs_{MA}}{U_3}\right]X_3\left[U_3\right]\leq 800\left[Hs_{MA}\right]$$
$$X_3\left[U_3\right]\geq 70\left[U_3\right]$$
$$X_2\left[U_2\right]\leq 200\left[U_2\right]$$
$$X_1,X_2,X_3\geq 0$$

Forma Estándar:

$$Max\ Z=463.3X_1+371.1X_2+556.4X_3+0X_4+0X_5+0X_6+0X_7+0X_8+M\mu_1$$
$$s.a.:5X_1+4X_2+6X_3+1X_4+0X_5+0X_6+0X_7+0X_8+0\mu_1=1200$$
$$0.2X_1+0.3X_2+0.1X_3+0X_4+1X_5+0X_6+0X_7+0X_8+0\mu_1=300$$
$$1.1X_1+0.8X_2+1.3X_3+0X_4+0X_5+1X_6+0X_7+0X_8+0\mu_1=800$$
$$0X_1+0X_2+1X_3+0X_4+0X_5+0X_6-1X_7+0X_8+1\mu_1=70$$
$$0X_1+1X_2+0X_3+0X_4+0X_5+0X_6+0X_7+1X_8+0\mu_1=200$$

Resolución LINDO

Cuadro 29: Tableau Simplex Óptimo

C_k	X_k	B_k
371,7	X_2	195
556,4	X_3	70
0	X_6	234,5
0	X_7	553
0	X_8	5
	$Z=368,30$	

Interpretación de LINDO

Solución por Software 1: Problema 05 - LINDO

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      111429.5

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         0.000000          1.325012
       X2       195.000000          0.000000
       X3        70.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000         92.925003
       3)       234.500000          0.000000
       4)       553.000000          0.000000
       5)         0.000000         -1.150000
       6)         5.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       2


RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF         INCREASE         DECREASE
      X1      463.299988         1.325027         INFINITY
      X2      371.700012         INFINITY         0.766667
      X3      556.400024         1.150000         INFINITY

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE         DECREASE
       2     1200.000000        20.000000       780.000000
       3      300.000000         INFINITY       234.500000
       4      800.000000         INFINITY       553.000000
       5       70.000000       130.000000         3.333333
       6      200.000000         INFINITY         5.000000
```

A partir del reporte de LINDO se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Se necesitaron solo 2 Iteraciónes para alcanzar la solución Óptima del problema.
- El valor óptimo del funciónal es de $111429.50.
- El plan de producción óptimo consiste en la fábricación de 195 unidades del producto 2. 70 del producto 3 y ninguna unidad del primer producto.
- Para lograr lo antes mencionado, se consumirá la totalidad de las horas de mano de obra disponible, 247 horas de maquinaria y 65,5 de materia prima.
- Siendo la mano de obra el recurso que nos limita en este caso (la restricción activa), lo que podemos notar debido a que posee un precio sombra de 92,92 lo que indica que

estaríamos dispuestos a pagar hasta esa cantidad con tal de contar con una unidad más del recurso, o dicho de otra forma eso es lo que mejoraría nuestra ganancia en caso de contar con dicha unidad extra.

Planteo Dual

$$\begin{aligned} Min\ W &= 1200Y_1 + 300Y_2 + 800Y_3 + 70Y_4 + 200Y_5 \\ s.a.:&\ 5Y_1 + 0.2Y_2 + 1.1Y_3 \geq 500 \\ &\ 4Y_1 + 0.3Y_2 + 0.8Y_3 \geq 400 \\ &\ 6Y_1 + 0.1Y_2 + 1.3Y_3 \geq 600 \end{aligned}$$

El problema dual, en cada una de sus restricciones nos impone que si vendiésemos la misma cantidad de recursos que se necesitan para completar cada una de las actividades, entonces sí o sí la ganancia debe ser mayor, ya que caso contrario no resultaría beneficioso.

Punto 06 - La falda cont.

Las variables de decisión son:

- X_1: cantidad de cajas que se solicitan al deposito.
- X_2: cantidad de cajas que se solicitan al proveedor.

La función objetivo es:

$$Min\ Z = 1\left[\frac{\$}{C_d}\right] X_1\,[C_d] + 6\left[\frac{\$}{C_p}\right] X_2\,[C_p] \tag{7}$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} 1\left[\frac{Kg_A}{C_d}\right] X_1\,[C_d] + 2\left[\frac{Kg_A}{C_p}\right] X_2\,[C_p] &\geq 80\,[Kg_A] \\ 5\left[\frac{Kg_Q}{C_p}\right] X_2\,[C_p] &\geq 60\,[Kg_Q] \\ X_1\,[C_d] &\leq 40\,[C_d] \\ X_2\,[C_p] &\leq 30\,[C_p] \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma Estándar:

$$
\begin{aligned}
&1X_1 + 6X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + M\mu_1 + M\mu_2 \\
&1X_1 + 2X_2 - 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0x_6 + 1\mu_1 + 0\mu_2 = 80 \\
&0X_1 + 2X_2 + 0X_3 - 1X_4 + 0X_5 + 0x_6 + 0\mu_1 + 1\mu_2 = 10 \\
&1X_1 + 0X_2 - 0X_3 - 0X_4 + 1X_5 + 0X_6 + 0\mu_1 + 0\mu_2 = 40 \\
&0X_1 + 1X_2 - 0X_3 - 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0\mu_1 + 0\mu_2 = 30 \\
&X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Paro de Transportistas

Intervalo de variación de c_1:

$$
\left.\begin{aligned}
6 \times (-1/2) + 0c_1 \leq 0 \\
6 \times (-1/2) + 1c_1 \leq 0 \\
6 \times (1/2) + 0c_1 \leq 0
\end{aligned}\right\} c_1 \leq 3
$$

Entonces la solución original continúa siendo Óptima, con un nuevo valor de 240, resultando en un aumento de \$80.

Error Administrativo

Ésto no afecta nuestra solución original, ya que la misma incluía la adquisición de solo 20 cajas del proveedor.

Demanda de Quinoa

Si se diera el caso de una disminución en la demanda de quinoa podríamos vender los recursos 'Cajas de Salud Vital' a otros proveedores, y al mismo tiempo disminuir la cantidad disponibles del mismo ya que no requerimos tantas unidades de quinoa.

Nuevo proveedor

Para determinar cuánto es lo máximo que estamos dispuestos a pagar (o mejor dicho, sin incurrir en pérdidas) debemos analizar el problema dual asociado. Problema Dual:

$$
\begin{aligned}
Max\ W = 80Y_1 + 50Y_2 + 40Y_3 + 30Y_4 \\
s.a.: 1Y_1 + 0Y_2 \leq 1 \\
2Y_1 + 5Y_2 \leq 6 \\
Y_1, Y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Podemos ver entonces que los precios máximos que nos encontramos dispuestos a pagar son respectivamente de \$1 y \$6 por un kg de Amarato y Quinoa.

Punto 07 - Lotería cont.

No me convence...

Las variables de decisión son:

- X_1: Cantidad de acciones del tipo A invertidas (en millones).
- X_2: Cantidad de acciones invertidas del tipo B (en millones).

La función objetivo es:

$$Max\ Z = 0.10X_1\,[\$] + 0.07X_2\,[\$] \tag{8}$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} X_1\,[\$] + X_2\,[\$] &= 10\,[\$] \\ X_1\,[\$] &\leq 6\,[\$] \\ X_2\,[\$] &\geq 2\,[\$] \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma Estándar:

$$\begin{aligned} &0.1X_1 + 0.07X_2 + 0X_3 + 0X_4 - M\mu_1 - M\mu_2 \\ &1X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 1\mu_1 - 0\mu_2 = 10 \\ &1X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 0X_4 - 0\mu_1 - 0\mu_2 = 6 \\ &0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 1X_4 - 0\mu_1 + 1\mu_2 = 2 \end{aligned}$$

Cuadro 30: Tableau Simplex

			0.1	0.07	0	0	$-M$	$-M$	
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	$\theta_i = b_i/a_ij$
$-M$	μ_1	10	1	1	0	0	1	0	$\theta_1 = 10$
0	X_3	6	1	0	1	0	0	0	$\theta_2 = X$
$-M$	$\boldsymbol{\mu_2}$	2	0	**1**	0	-1	0	1	$\boldsymbol{\theta_3 = 2}$
	$Z = -12M$		$-M-0,1$	$\boldsymbol{-2M-0,07}$	0	M	0	0	
				↑					
$-M$	$\boldsymbol{\mu_1}$	8	1	0	0	**1**	1	-1	$\boldsymbol{\theta_1 = 8}$
0	X_3	6	1	0	1	0	0	0	$\theta_2 = X$
0.07	X_2	2	0	1	0	-1	0	0	$\theta_3 = X$
	$Z = -8M + 0,14$		$-M-0,1$	0	0	$\boldsymbol{-M-0,07}$	0	$2M + 0,07$	
						↑			
0	X_4	8	1	0	0	1	1	-1	$\theta_1 = 8$
0	$\boldsymbol{X_3}$	6	**1**	0	1	0	0	0	$\boldsymbol{\theta_2 = 6}$
0.07	X_2	10	1	1	0	0	1	0	$\theta_3 = 10$
	$Z = 0,7$		**-0.03**	0	0	0	$M + 0,07$	M	
			↑						
0	X_4	2	0	0	-1	1	1	-1	
0.1	X_1	6	1	0	1	0	0	0	
0.07	X_2	4000000	0	1	-1	0	1	0	
	$Z = 0,88$		0	0	0.03	0	$M + 0,07$	M	

Problema Dual:

$$
\begin{aligned}
Min\ W &= 10Y_1 + 6Y_2 + 2Y_3 \\
s.a.:\ & 1Y_1 + 1Y_2 + 0Y_3 \geq 0.1 \\
& 1Y_1 + 0Y_2 + 0Y_3 \geq 0.07 \\
& 0Y_1 + 1Y_2 + 0Y_3 \geq 0 \\
& 0Y_1 + 0Y_2 - 1Y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Cuadro 31: Tabla Óptima Dual

								$M1$	$M1$
C_k	Y_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
6	Y_2	0.03	0	1	0	-1	1	1	-1
10	Y_1	0.07	1	0	0	0	-1	0	1
	$W = 0,88$		0	0	-2	-6	-4	$-M+6$	$-M+4$

Punto 07 cont. en pág. siguiente. . .

Entonces debemos calcular el intervalo de variación de b_2:

$$\left.\begin{aligned} 0 - 1b_2 \geq 0 \\ (-1) \times 10 + 1b_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} b_2 \leq 10$$

La solución sigue siendo factible, pero como veremos a continuación la misma no es Óptima:

$$B^{-1}.b_n = b^*$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textbf{-4} \\ 10 \\ \textbf{-2} \end{bmatrix}$$

Re iterando, llegamos a la nueva solución factible:

Cuadro 32: Nueva Solución Óptima

B_k	Y_k	C_k
8	Y_1	\$0.03\$
2	Y_2	\$0.07\$
	$W = 0.94$	

Punto 08 - Criador de perros cont.

Las variables de decisión son:

- X_1: Cantidad de alimento del tipo 1 utilizado.
- X_2: Cantidad de alimento del tipo 2 utilizado.

La función objetivo es:

$$Min\ Z = 50 \left[\frac{\$}{Kg_1}\right] X_1 \left[Kg_1\right] + 25 \left[\frac{\$}{Kg_2}\right] X_2 \left[Kg_2\right] \tag{9}$$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} 0.1 \left[\frac{Kg_G}{Kg_1}\right] X_1 \left[Kg_1\right] + 0.3 \left[\frac{Kg_G}{Kg_2}\right] X_2 \left[Kg_2\right] &\geq 8 \left[Kg_G\right] \\ 0.3 \left[\frac{Kg_C}{Kg_1}\right] X_1 \left[Kg_1\right] + 0.4 \left[\frac{Kg_C}{Kg_2}\right] X_2 \left[Kg_2\right] &\geq 19 \left[Kg_C\right] \\ 0.3 \left[\frac{Kg_{Ca}}{Kg_1}\right] X_1 \left[Kg_1\right] + 0.1 \left[\frac{Kg_{Ca}}{Kg_2}\right] X_2 \left[Kg_2\right] &\geq 7 \left[Kg_{Ca}\right] \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma Estándar:

$$
\begin{aligned}
50X_1 + 25X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + M\mu_1 + M\mu_2 + M\mu_3 \\
0.1X_1 + 0.3X_2 - 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 1\mu_1 + 0\mu_2 + 0\mu_3 = 8 \\
0.3X_1 + 0.4X_2 + 0X_3 - 1X_4 + 0X_5 + 0\mu_1 + 1\mu_2 + 0\mu_3 = 19 \\
0.3X_1 + 0.1X_2 + 0X_3 + 0X_4 - 1X_5 + 1\mu_1 + 0\mu_2 + 1\mu_3 = 7
\end{aligned}
$$

Problema Dual Asociado:

$$
\begin{aligned}
Max\ W = 8Y_1 + 19Y_2 + 7Y_3 \\
s.a.: 0.1Y_1 + 0.3Y_3 + 0.3Y_3 \leq 50 \\
0.3Y_1 + 0.4Y_2 + 0.1Y_3 \leq 25
\end{aligned}
$$

Cuadro 33: Tabla Dual Óptima

C_k	Y_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
27.77	Y_2	17	0	1	0	1.11	-3.33
0	Y_3	7	0	0	1	-4.44	3.33
	$Z = 1500$		5	0	0	10	40

En éste problema se busca adquirir la mayor cantidad de alimento balanceando tal qué satisfaga los requerimientos de clorhidratos, calcio y grasas no saturadas al menor costo posible.
Los precios sombra 4 y 5 nos indican que tanto mejoraría nuestro funciónal (la cantidad de nutrientes) en caso de que los precios de los alimentos 1 y 2 del primal aumentaran en una unidad respectivamente. por otra parte, el precio sombra 1, indica la mejora que se experimentaría en caso de requerir un kg más de alimentos ricos en clorhidratos.

Punto 09 - Gem de Vivian

Modelo Programación Lineal

Las variables de decisión son:

- X_1: Cantidad de joyas tipo 1 producidas.
- X_2: Cantidad de joyas tipo 2 producidas.

La función objetivo:

$$Max\ Z = (10-5)\left[\frac{\$}{T_1}\right] X_1\,[T_1] + (6-4)\left[\frac{\$}{T_2}\right] X_2\,[T_2]$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 1X_2 &\leq 30 \\ 4X_1 + 1X_2 &\leq 50 \\ 1X_1 + 0X_2 &\geq 11 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 5X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 - M\mu_1 \\ s.a.:\ & 2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0\mu_1 = 30 \\ & 4X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0\mu_1 = 50 \\ & 1X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 - 1X_5 + 1\mu_1 = 11 \end{aligned}$$

Cuadro 34: Solución Óptima Primal

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$-M$ A_6
0	X_3	2	0	0	1	-1	-2	2
2	X_2	6	0	1	0	0	4	-4
5	X_1	11	1	0	0	0	-1	1
	$Z = 67$		0	0	0	2	3	$M-3$

La tabla anterior nos indica que se deben producir 11 joyas del tipo 1 y 6 del tipo 2. El recurso militante en este caso serán los diamantes, sobrando 2 rubíes. Si consiguiéramos un diamante más nuestra ganancia aumentaría en $2

46 Diamantes

Modelo Dual:

$$\begin{aligned} Min\ W &= 30Y_1 + 50Y_2 + 11Y_3 \\ s.a.:\ & 2Y_1 + 4Y_2 + 1Y_3 - 1Y_4 + 0Y_5 + 1\mu_1 + 0\mu_2 = 5 \\ & 1Y_1 + 1Y_2 + 0Y_3 + 0Y_4 - 1Y_5 + 0\mu_1 + 1\mu_2 = 2 \\ & Y_1, Y_2 \geq 0 \\ & -Y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Punto 09 cont. en pág. siguiente…

Cuadro 35: Tabla Dual Óptima

			30	50	11	0	0	M	M
B_k	Y_k	C_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
50	$Y_2(+)$	2	-1	1	0	0	-1	0	1
11	$Y_3(-)$	-3	-2	0	1	1	-4	-1	4
	$W = 67$		2	0	0	-11	-6	$11 - M$	$6 - M$

Rango de variación de b_2:

$$\left.\begin{aligned} -11 \times (-2) - 1b_2 \leq 0 \\ -11 \times (-4) - 1b_2 \leq 0 \end{aligned}\right\} b_2 \geq 22 \wedge b_2 \geq 44$$

$$B^{-1}.b_n = b^*$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 30 \\ 46 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que aún con la variación en la cantidad de diamantes, la solución sigue siendo tanto Óptima como factible, siendo la nueva solución:

Cuadro 36: Nueva solución Óptima 01

C_k	X_k	B_k
0	X_3	6
2	X_2	2
5	X_1	11
	$Z = 59$	

12 joyas I

Intervalo de variación de c_2

$$\left.\begin{aligned} 5 \times 0 + c_2 \geq 0 \\ 5 \times (-1) + 4c_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} c_2 \geq 0 \wedge c_2 \geq 1.25$$

$$B^{-1}.c_k = c_k^*$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuadro 37: Nueva Solución Óptima 02

C_k	Y_k	B_k
50	Y_2	1.5
30	Y_3	1
	$W = 45$	

Podemos ver que la solución nuevamente es tanto Óptima como factible, arrojando un resultado de 45 en este caso.

Nueva Joya

Rango de variación de b_3.

$$\left.\begin{matrix} -50 - 2b_3 \leq 0 \\ -50 - 4b_3 \leq 0 \end{matrix}\right\} b_3 \geq -2.5 \wedge b_3 \geq -12.5$$

$$B^{-1}.b_n = b^*$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

En este caso la solución también sigue siendo Óptima y factible, siendo ésta:

Cuadro 38: Nueva Solución Óptima 03

C_k	X_k	B_k
0	X_3	4
2	X_2	2
5	X_1	12
	$Z = 64$	

Punto 10 - Tour Operador

Modelo Lineal

Variables de decisión:

- X_1 cantidad de turbo reactores a adquirir.
- X_2 cantidad de aviones a hélice a comprar.
- X_3 cantidad de helicópteros a adquirir.

Función Objetivo:

$$Min\ Z = 1200\left[\frac{e}{dia.TR}\right] X_1\,[TR] + 600\left[\frac{e}{dia.AH}\right] X_2\,[AH] + 300\left[\frac{e}{dia.H}\right] X_3\,[H]$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

$$3\left[\frac{Mille}{TR}\right] X_1\,[TR] + 1\left[\frac{Mille}{AH}\right] X_2\,[AH] + 0.5\left[\frac{Mille}{H}\right] X_3\,[H] \leq 28\,[Mille]$$

$$1X_1 + 1X_2 + 1X_3 \geq 15$$

$$2\left[\frac{pil}{TR}\right] X_1\,[TR] + 1\left[\frac{pil}{AH}\right] X_2\,[AH] + 1\left[\frac{pil}{H}\right] X_3\,[H] \leq 15\,[pil]$$

$$2\left[\frac{Az}{TR}\right] X_1\,[TR] + 1\left[\frac{Az}{AH}\right] X_2\,[AH] \leq 16\,[Az]$$

$$1\left[\frac{Co}{AH}\right] X_2\,[AH] \geq 3\,[Co]$$

$$4000\left[\frac{Pas}{mes.TR}\right] X_1\,[TR] \geq 8000\left[\frac{Pas}{mes}\right]$$

$$300\left[\frac{Pas}{mes.AH}\right] X_2\,[AH] + 100\left[\frac{Pas}{mes.H}\right] X_3\,[H] \geq 500\left[\frac{Pas}{mes}\right]$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Forma Estándar:

$$\begin{aligned} Min\ Z = {} & 1200X_1 + 600X_2 + 300X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + \\ & 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 + 0X_{10} + M\mu_1 + M\mu_2 + M\mu_3 + M\mu_4 \end{aligned}$$

$s.a.:$

$$\begin{aligned}
3X_1 + 1X_2 + 0.5X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 + 0X_{10} + 0\mu_1 + 0\mu_2 + 0\mu_3 + 0\mu_4 &= 28 \\
1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0X_4 - 1X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 + 0X_{10} + 1\mu_1 + 0\mu_2 + 0\mu_3 + 0\mu_4 &= 15 \\
2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0X_4 - 0X_5 + 1X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 + 0X_{10} + 0\mu_1 + 0\mu_2 + 0\mu_3 + 0\mu_4 &= 10 \\
2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 0X_4 - 0X_5 + 0X_6 + 1X_7 + 0X_8 + 0X_9 + 0X_{10} + 0\mu_1 + 0\mu_2 + 0\mu_3 + 0\mu_4 &= 16 \\
0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 - 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 - 1X_8 + 0X_9 + 0X_{10} + 0\mu_1 + 1\mu_2 + 0\mu_3 + 0\mu_4 &= 4 \\
4000X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 - 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 - 1X_9 + 0X_{10} + 0\mu_1 + 0\mu_2 + 1\mu_3 + 0\mu_4 &= 8000 \\
0X_1 + 300X_2 + 100X_3 + 0X_4 - 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 - 1X_{10} + 0\mu_1 + 0\mu_2 + 0\mu_3 + 1\mu_4 &= 500
\end{aligned}$$

Cuadro 39: Solución Óptima

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
0	X_4	17.5	0	0	0	1	-0.05	0.5	0	0.001	0	0	-0.5	-0.001	0	0
0	X_{10}	-7	0	0	0	0	100	-200	0	0.05	1	0	200	-0.05	-1	0
0	X_9	700	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	1	0	0	-1
0	X_7	9	0	0	0	0	0	1	1	0.001	0	0	-1	-0.001	0	0
600	X_2	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1200	X_1	2	1	0	0	0	1	1	0	0.001	0	0	-1	-0.001	0	0
300	X_3	3	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$Z = 5100$		0	0	0	0	300	-300	0	0.15	0	0	$300 - M$	-0.15	0	0

Se puede apreciar que el modelo resulta infactible...

Interpretación

El costo que se alcanzara será de 5100 millones de euros. Para llegar a este número, deberemos comprar 2 turbocompresores, 3 aviones a hélice y 3 helicópteros, consumiendo 10.5 millones del presupuesto asignado. En cuanto al personal, se ha contratado a la cantidad máxima de copilotos y 9 azafatas.

10 pilotos más

Solución por Software 2: Análisis de Sensibilidad LINDO

```
                      OBJ COEFFICIENT RANGES
      VARIABLE        CURRENT          ALLOWABLE        ALLOWABLE
                        COEF           INCREASE         DECREASE
          X1      1200.000000          INFINITY        899.999939
          X2       600.000000          INFINITY        300.000000
          X3       300.000000        300.000000        300.000000

                      RIGHTHAND SIDE RANGES
           ROW        CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
                        RHS            INCREASE           DECREASE
             2      28.000000          INFINITY         17.500000
             3       8.000000          0.000000          3.000000
             4      10.000000          INFINITY          0.000000
             5      16.000000          INFINITY          9.000000
             6       3.000000          3.000000          3.000000
             7    8000.000000          0.000000       7999.999512
             8     500.000000        700.000000          INFINITY
```

En este caso, al ser una variable no básica la solución no se modifica.

Mínimo 14 artefactos

Debido a que el rango de variación de los 'artefactos' es de $[5, 18]$, comprar 14 no nos afecta.

Punto 11 - David, Diana y Lidia

Solución e Interpretación

$$MaxZ = 300\left[\frac{\$}{Pe}\right]X_1\,[Pe] + 200\left[\frac{\$}{Pa}\right]X_2\,[Pa]$$

$$\begin{aligned}
6\left[\frac{e}{Pe}\right]X_1\,[Pe] + 4\left[\frac{e}{Pa}\right]X_2\,[Pa] &\leq 40\,[e]\\
8\left[\frac{l}{Pe}\right]X_1\,[Pe] + 4\left[\frac{l}{Pa}\right]X_2\,[Pa] &\leq 40\,[l]\\
3\left[\frac{en}{Pe}\right]X_1\,[Pe] + 3\left[\frac{en}{Pa}\right]X_2\,[Pa] &\leq 20\,[en]
\end{aligned}$$

Cuadro 40: Solución Óptima

C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	X_3	6.67	0	0	1	-0.5	-0.67
300	X_1	3.33	1	0	0	0.25	-0.33
200	X_2	3.33	0	1	0	-0.25	0.67
	$Z = 1666,67$		0	0	0	25	33.33

La tabla anterior nos indica que debemos producir 3 y un tercio de relojes de cada tipo, para obtener una ganancia total de $1667 aproximadamente. En este caso, el recurso limitante resultan ser las horas de ensamblaje.

Cambio en ganancia Pedestal

La solución sigue siendo Óptima, obteniendo una ganancia de $1914,75.

Cuadro 41: Nueva Solución Óptima

						A_4	A_5
0	X_3	6.67	0	0	1	-0.5	-0.67
375	X_1	3.33	1	0	0	0.25	-0.33
200	X_2	3.33	0	1	0	-0.25	0.67
	$Z = 1914,75$		0	0	0	43.75	10.25

Y además el de pared

En este caso, sin embargo, no podemos decir lo mismo en este caso.

Cuadro 42: Nueva solución NO Óptima

	C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	0	X_3	6.67	0	0	1	-0.5	-0.67
	375	X_1	3.33	1	0	0	0.25	-0.33
$\leftarrow$	175	$\boldsymbol{X_2}$	3.33	0	1	0	-0.25	**0.67**
		$Z = 1831,5$		0	0	0	50	**-6.5**
								$\uparrow$

Más trabajo

Según los precios sombra y costos reducidos, sabemos que:

- 1 hora extra de David produce \$0 extra de ganancia
- 1 hora extra de Daiana produce \$25 extra de ganancia
- 1 hora extra de Lidia produce \$33.33 extra de ganancia

Por lo tanto, resulta más beneficioso que sea Lidia quien trabaje una hora extra.

Lidia, Lidia

En este caso, el aumento de horas de Lidia resulta válido (la solución sigue siendo factible) mejorando nuestra ganancia en $166.66

$$B^{-1}.b_n = b^*$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.62 \\ 0 & 0.25 & -0.33 \\ 0 & -0.25 & 0.67 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 1.68 \\ 6.68 \end{bmatrix}$$

Punto 12 - Laboratorio

Plan de Producción

La función objetivo es:

$$Max\ Z = 10\left[\frac{\$}{u1}\right] X_1\,[u1] + 20\left[\frac{\$}{u2}\right] X_2\,[u2] + 40\left[\frac{\$}{u3}\right] X_3\,[u3] + 32\left[\frac{\$}{u4}\right] X_4\,[u4]$$

Sujeta a:

$$10\left[\frac{m^2}{u1}\right] X_1\,[u1] + 30\left[\frac{m^2}{u2}\right] X_2\,[u2] + 80\left[\frac{m^2}{u3}\right] X_3\,[u3] + 42\left[\frac{m^2}{u4}\right] X_4\,[u4] \leq 900\,[m^2]$$

$$2\left[\frac{T}{u1}\right] X_1\,[u1] + 1\left[\frac{T}{u2}\right] X_2\,[u2] + 1\left[\frac{T}{u3}\right] X_3\,[u3] + 3\left[\frac{T}{u4}\right] X_4\,[u4] \leq 80\,[T]$$

Cuadro 43: Solución Óptima

			2	-1	3	0	0	$-M$	$-M$
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	X_1	1	1	-1	0	0	-1	1	0
0	X_4	2	0	3	0	1	0	1	-1
3	X_3	2	0	2	1	0	1	0	0
	$Z = 8$		0	5	0	0	1	$M+2$	M

Informe

Para poder maximizar nuestras ganancias debemos producir 20 unidades del producto 4 y 10 unidades del producto 1, produciendo 0 unidades tanto del segundo como tercer producto. De ésta manera alcanzamos un beneficio de $740 consumiendo la totalidad de los recursos.

Más almacén

$$B^{-1}.b_n = b^*$$
$$\begin{bmatrix} 0.04 & -0.20 \\ -0.06 & 0.80 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1050 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que se ve anteriormente, la solución continúa siendo factible.

Cuadro 44: Nueva Solución Óptima

B_k	Y_k	C_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	Y_2	-1	0	1	0	1	0	-1
0	Y_3	2	-1	0	1	-1	0	0
3	Y_6	-5	-3	0	0	1	1	-2
	$W = 8$		-2	0	0	-1	0	-2

Obtenemos una ganancia final de $842, siendo la diferencia con el plan anterior de $102, lo que se traduce en un beneficio final de $32, por lo que resulta beneficioso la contratación del espacio extra.

Nuevo Producto

$$A^* = B^{-1}.A_7$$
$$\begin{bmatrix} 0.04 & -0.20 \\ -0.06 & 0.8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

La solución nueva sigue siendo tanto Óptima como factible, sin embargo, el renglón Ø para el nuevo producto es mayor a 0, por lo que al tratarse de un problema de maximización nos indica la no conveniencia de la actividad que representa al mismo.

Punto 13 - Gran M...

Cuadro 45: Tabla Primal Óptima

			2	-1	3	0	0	$-M$	$-M$
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	X_1	1	1	-1	0	0	-1	1	0
0	X_4	2	0	3	0	1	0	1	-1
3	X_3	2	0	2	1	0	1	0	0
	$Z = 8$		0	5	0	0	1	$M+2$	M

Cuadro 46: Tabla Dual Óptima

B_k	Y_k	C_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	Y_2	-1	0	1	0	1	0	-1
0	Y_3	2	-1	0	1	-1	0	0
3	Y_6	-5	-3	0	0	1	1	-2
	$W = 8$		-2	0	0	-1	0	-2

El rango de variación (o intervalo de sensibilidad) para c_3 es $[2, \infty]$; por lo que modificar su valor a 4 no afecta la composición de la solución Óptima pero si su valor. En cuanto a b_3, su intervalo de sensibilidad es $[\infty, 3]$; por lo que también se halla dentro del mismo el nuevo valor. Sin embargo la nueva restricción resulta redundante, por lo que no nos es posible evaluar la misma.