Investigación Operativa

C.C. Lauritto & Ing. Casanova

Guía 05: Modelos de Red

Fecha de Entrega: 08 de Febrero de 2017

Ravera P. & Rivera R.

Índice

Solución de Problemas

Punto 01 - Reemplazo de Equipos

Problema Lineal:

$$
\begin{aligned}
Min\ Z = 4000X_{12} &+ 4300X_{23} + 4800X_{34} + 4900X_{45} \\
&+ 5400X_{13} + 9800X_{14} + 6200X_{24} + 8700X_{25} + 7100X_{35}
\end{aligned}
$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} X_{1j} = 1 \\
&\sum_{i=1}^{n-1} X_{i5} = 1 \\
&\sum_{i=1}^{5} X_{ik} = \sum_{j=1}^{5} X_{kj} \qquad \forall k \neq 1, 5 \\
&\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\ X_{ij} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

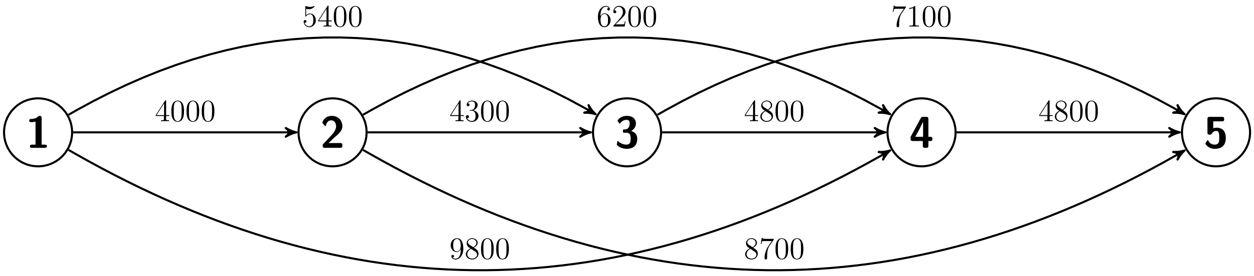


Figura 1: Grafo 01

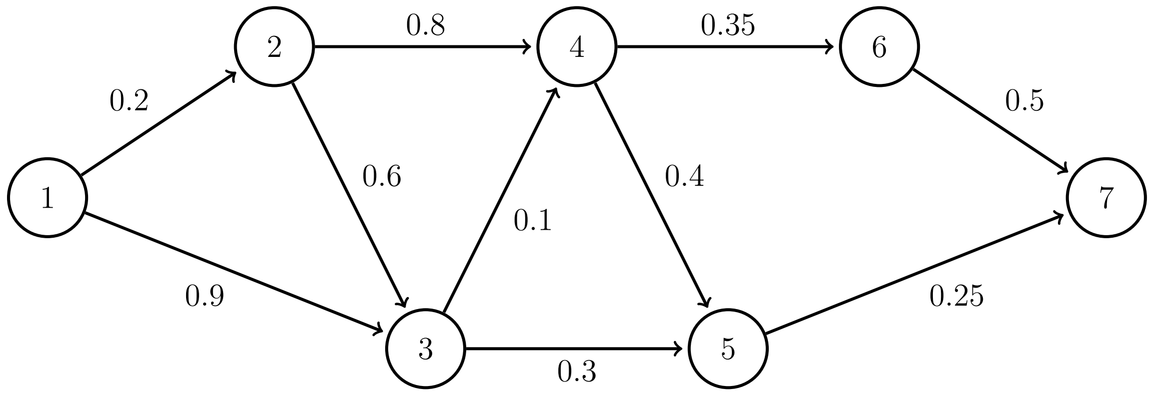
Punto 01 cont. en pág. siguiente...

Cuadro 1: Iteraciónes del Metodo

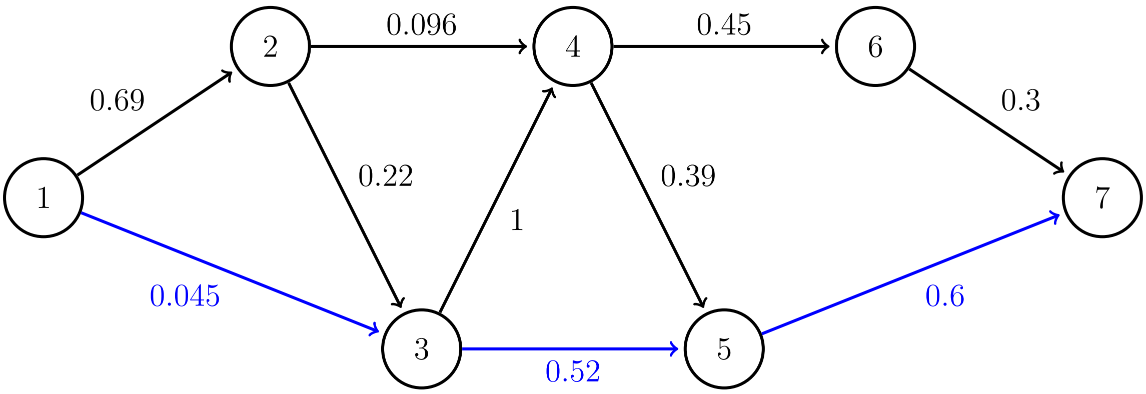
Iteración	**Nodo Resuelto**	**Nodo No Res. mas Cercano**	**Distancia Total**	**K-esimo Nodo mas Cercano**	**Ultima Conexion**
1	1	2	4000	2	1-2
2	1	3	5400	3	1-3
	2	3	8300	3	
3	1	4	9800	4	1-4
	2	4	10200	-	
	3	4	10200	-	
4	2	5	12700	-	
	3	5	12500	5	3-5

En la tabla anterior se aprecia que la ruta más corta es $1 \to 3 \to 5$, lo que significa que nos conviene adquirir el equipo en el primer año y renovarlo cada 2 años.

Punto 02 - Ruta más Segura



Si bien la red anterior representa las posibilidaes de no ser detenido, para poder resolverlo como un problema de ruta más corta calculamos el opuesto del logaritmo decimal de los valores, de manera de buscar minimizar las posibilidades de ser detenidos, como se ve en la siguiente red:



Cuadro 2: Iteraciónes

Iteración	**Nodo Resuelto**	**Nodo No Res. mas Cercano**	**Distancia Total**	**K-esimo Nodo mas Cercano**	**Ultima Conexion**
1	1	3	0.45	3	1-3
2	1	2	0.69	-	
	3	5	0.52	5	3-5
3	1	2	0.69	-	
	3	4	1	-	
	5	7	0.60	7	5-7

La ruta más corta (la que tiene menos posibilidades de ser detectado) es la que recorre los nodos $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

Punto 03 - Aceleración de Proyectos

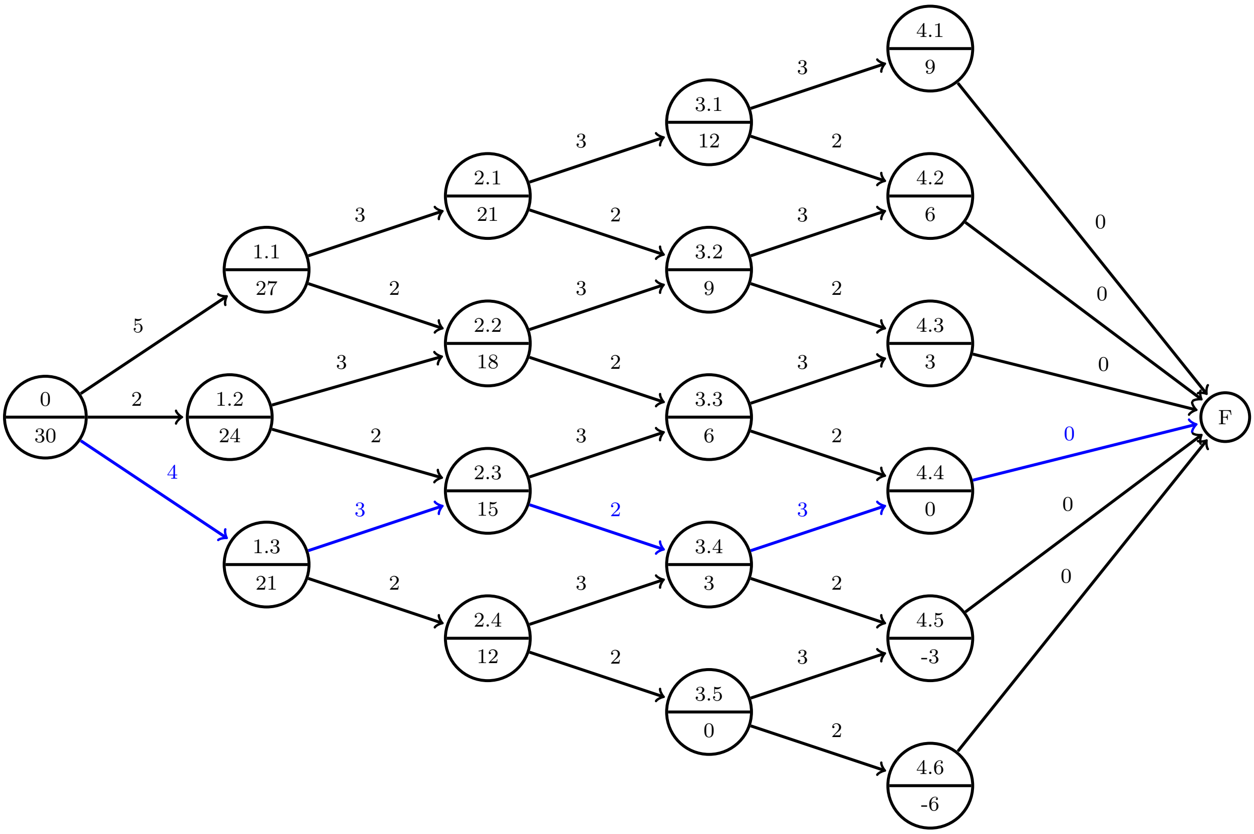


Figura 2: Red de Aceleración

De esta manera, llegamos a un tiempo Mínimo de 10 meses. Esto se logra realizando la primer y tercera etapa en el nivel 'Quiebre' y las etapas 2 y 4 en el nivel 'Prioridad'. Se consume todo el presupuesto disponible.

Punto 03 cont. en pág. siguiente...

Cuadro 3: Iteraciónes

Iteración	**Nodo Resuelto**	**Nodo No Res. mas Cercano**	**Distancia Total**	**K-esimo Nodo mas Cercano**	**Ultima Conexion**
1	0	13	2	13	0-13
2	0	12	4	12	0-12
	13	24	4	24	13-24
3	0	11	5	11	0-11
	13	23	5	23	13-23
	12	23	6	-	
	24	34	9	-	
4	11	22	7	22	11-22
	12	22	7	22	12-22
	23	34	8	-	
	24	34	9	-	
5	11	21	8	21	11-21
	22	33	10	-	
	23	34	8	34	23-34
	24	34	9	-	
6	21	32	11	-	
	22	33	10	33	22-33
	23	33	10	33	23-33
	34	44	10	44	34-44
7	21	32	11	-	
	22	32	12	-	
	33	43	12	-	
	44	F	10	F	44-F
8	21	32	11	32	21-32
	22	32	12	-	
	33	43	12	-	
9	21	31	13	-	
	33	43	12	43	33-43
	32	43	12	43	32-43
10	21	31	13	31	21-31
	33	42	13	42	33-42
11	32	41	15	41	32-41

Punto 04 - Problema de la Ruta más corta como problema PL

Objetivo: minimizar la distancia recorrida. Variables de decisión:

- $X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se viaja de } i \text{ a } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Función Objetivo:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ij}X_{ij}$$

Sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{ll} \left[\text{Único Comienzo}\right] & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} X_{0j} = 1 \\ \left[\text{Único Fin}\right] & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_{iF} = 1 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_{ik} - \sum_{j=1}^{m} X_{kj} = 0 \quad \forall k \neq 0 \wedge k \neq F \\ & \forall i = 1..n \quad \forall j = 1..m \qquad X_{ij} \in \{0,1\} \end{array}$$

Punto 05 - Interconexión de Nodos

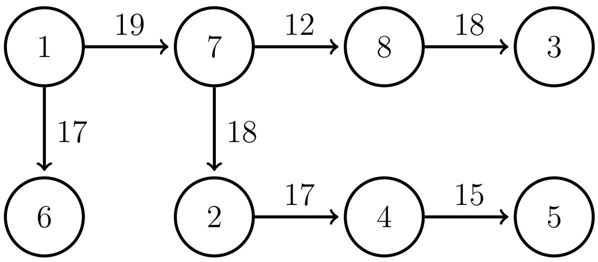


Figura 3: Tendido de Líneas

Con el tendido que se indica en la figura precedente, se logra un costo Mínimo de 98 u.m.

Punto 06 - Interconexión de Nodos 02

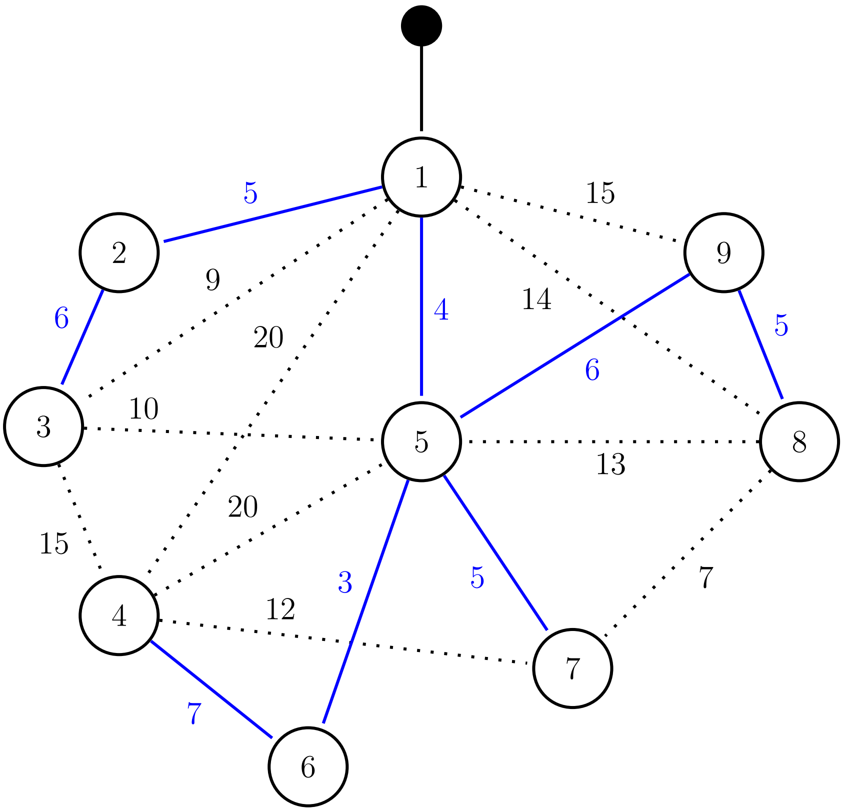


Figura 4: Conexiones de pozos de Gas

Con este diagrama de conexiones logramos que la longitud de la red de tuberías necesarias sea minima, con un valor de 46 millas.

Punto 07 - Interconexión de Nodos 03

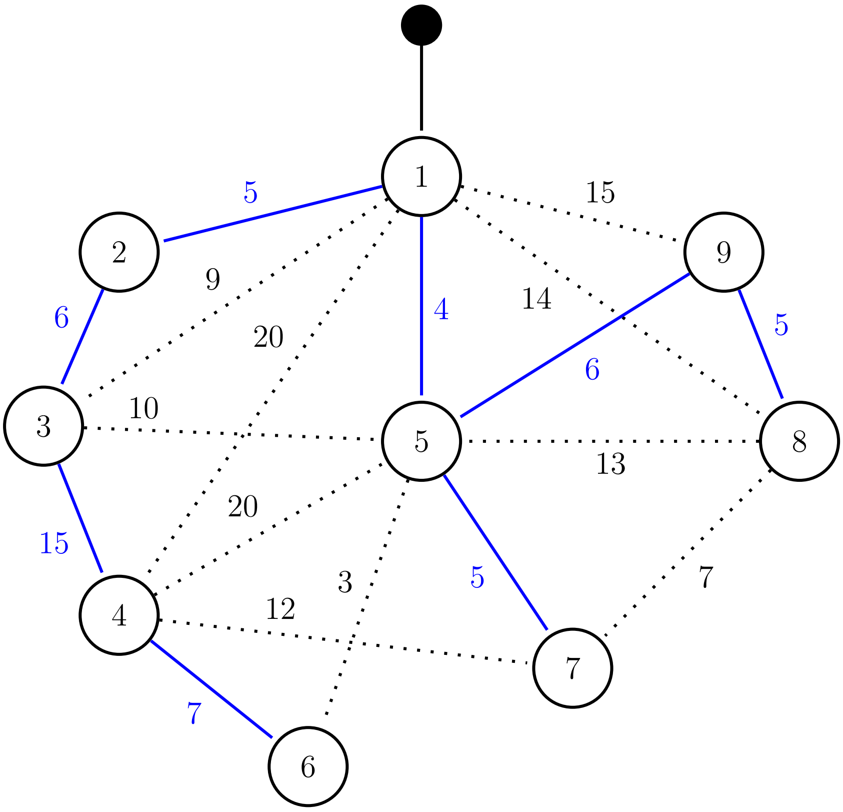


Figura 5: Conexiones de pozos de Gas 2

Con este diagrama de conexiones logramos que la longitud de la red de tuberías necesarias sea minima, con un valor de 51 millas.

Punto 08 - Flujo Máximo en la Industria del Petroleo

Este ejercicio se resolvío mediante la carga del siguiente código en el software **LINGO**:

Solución por Software 1: Código del Problema

```
MODEL:

!
        Xij: cantidad a transportar del nodo I al J
        B: demandas y ofertas de cada nodo. Demanda de Origen igual y singo
            contrario a demanda de Fin.
        ARCOS: arcos entre nodos.
        Uij: capacidad maxima del lazo ij.
        Cij: costo por enviar una unidad del nodo I al J.
        INCIDENCIA: Matriz de incidencia. Arcos sobre nodos.
;

SETS:
        NODOS: B;
        ARCOS: U, C, X;
        M (NODOS, ARCOS): INCIDENCIA;
ENDSETS

DATA:
NODOS    = ORIG CA01 CA02 CA03 CA04 RF01 RF02 RF03 RF04 CD01 CD02 CD03 CD04
    DEST;
B        =  150    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
        -150;
ARCOS    = ORC1 ORC2 ORC3 ORC4 C1R1 C1R2 C1R3 C1R4 C2R1 C2R2 C2R3 C2R4 C3R1
    C3R2 C3R3 C3R4 C4R1 C4R2 C4R3 C4R4 R1D1 R1D2 R1D3 R1D4 R2D1 R2D2 R2D3
    R2D4 R3D1 R3D2 R3D3 R3D4 R4D1 R4D2 R4D3 R4D4 D1DS D2DS D3DS D4DS ORDS;
U        =   28   24   28   36   11   07   02   08   05   04   08   07   07
      03   12   06   08   09   04   15  05   09   06   04   08   07   09   05
       04   06   07   08   12   11   09   07   29   33   31   24  150;
C        = 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 500;
INCIDENCIA =
!ORIG;  01 01 01 01    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00
      00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00
    01
!CA01;  -1 00 00 00    01 01 01 01    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00
      00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00
    00
!CA02;  00 -1 00 00    00 00 00 00    01 01 01 01    00 00 00 00    00 00 00 00
      00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00
    00
!CA03;  00 00 -1 00    00 00 00 00    00 00 00 00    01 01 01 01    00 00 00 00
      00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00
    00
!CA04;  00 00 00 -1    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    01 01 01 01
      00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00    00 00 00 00
    00
```

```
!RF01;  00 00 00 00   -1 00 00 00   -1 00 00 00   -1 00 00 00   -1 00 00 00
        01 01 01 01   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00
     00
!RF02;  00 00 00 00   00 -1 00 00   00 -1 00 00   00 -1 00 00   00 -1 00 00
        00 00 00 00   01 01 01 01   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00
     00
!RF03;  00 00 00 00   00 00 -1 00   00 00 -1 00   00 00 -1 00   00 00 -1 00
        00 00 00 00   00 00 00 00   01 01 01 01   00 00 00 00   00 00 00 00
     00
!RF04;  00 00 00 00   00 00 00 -1   00 00 00 -1   00 00 00 -1   00 00 00 -1
        00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   01 01 01 01   00 00 00 00
     00
!CD01;  00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00
        -1 00 00 00   -1 00 00 00   -1 00 00 00   -1 00 00 00   01 00 00 00
     00
!CD02;  00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00
        00 -1 00 00   00 -1 00 00   00 -1 00 00   00 -1 00 00   00 01 00 00
     00
!CD03;  00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00
        00 00 -1 00   00 00 -1 00   00 00 -1 00   00 00 -1 00   00 00 01 00
     00
!CD04;  00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00
        00 00 00 -1   00 00 00 -1   00 00 00 -1   00 00 00 -1   00 00 00 01
     00
!DEST;  00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00
        00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   00 00 00 00   -1 -1 -1 -1
     -1
;
ENDDATA

        !FUNCION OBJETIVO;
        MIN = @SUM(ARCOS(j):C(j)*X(j));

        !RESTRICCIONES DE LOS NODOS;
        @FOR(NODOS(i):
                        @SUM(ARCOS(j): INCIDENCIA(i,j)*X(j)) = B(i)
        );

        !RESTRICCIONES DE CAPACIDAD;
        @FOR(ARCOS(j):
                        @BND(0,X(j),U(j))
        );

END
```

A continuación se incluye la sección pertinente de la solución calculada.

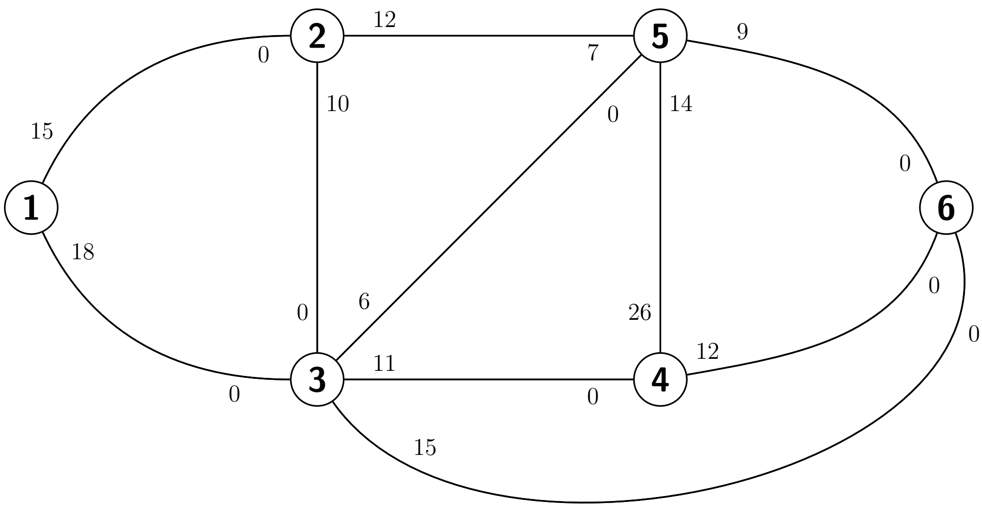
Solución por Software 2: Solución Óptima

```
X( ORC1)        28.00000        0.000000
X( ORC1)        28.00000        0.000000
X( ORC1)        28.00000        0.000000
X( ORC1)        28.00000        0.000000
X( ORC1)        28.00000        0.000000
X( ORC1)        28.00000        0.000000
X( ORC1)        28.00000        0.000000
X( ORC1)        28.00000        0.000000
X( ORC2)        24.00000        0.000000
X( ORC3)        28.00000        0.000000
X( ORC4)        28.00000        0.000000
X( C1R1)        11.00000        0.000000
X( C1R2)        7.000000        -500.0000
X( C1R3)        2.000000        0.000000
X( C1R4)        8.000000        -500.0000
X( C2R1)        5.000000        0.000000
X( C2R2)        4.000000        -500.0000
X( C2R3)        8.000000        0.000000
X( C2R4)        7.000000        -500.0000
X( C3R1)        7.000000        0.000000
X( C3R2)        3.000000        -500.0000
X( C3R3)        12.00000        0.000000
X( C3R4)        6.000000        -500.0000
X( C4R1)        1.000000        0.000000
X( C4R2)        9.000000        -500.0000
X( C4R3)        3.000000        0.000000
X( C4R4)        15.00000        -500.0000
X( R1D1)        5.000000        -500.0000
X( R1D2)        9.000000        -500.0000
X( R1D3)        6.000000        -500.0000
X( R1D4)        4.000000        -500.0000
X( R2D1)        8.000000        0.000000
X( R2D2)        7.000000        0.000000
X( R2D3)        8.000000        0.000000
X( R2D4)        0.000000        0.000000
X( R3D1)        4.000000        -500.0000
X( R3D2)        6.000000        -500.0000
X( R3D3)        7.000000        -500.0000
X( R3D4)        8.000000        -500.0000
X( R4D1)        12.00000        0.000000
X( R4D2)        11.00000        0.000000
X( R4D3)        9.000000        0.000000
X( R4D4)        4.000000        0.000000
X( D1DS)        29.00000        0.000000
X( D2DS)        33.00000        0.000000
X( D3DS)        30.00000        0.000000
X( D4DS)        16.00000        0.000000
X( ORDS)        42.00000        0.000000
```

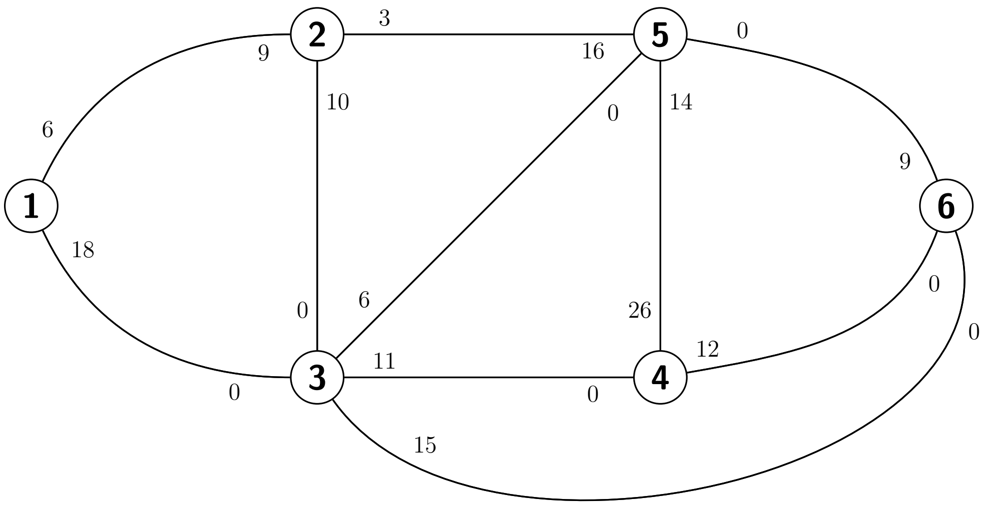
Se puede apreciar que el flujo Máximo es de 108.

Punto 09 - Flujo Máximo de Información

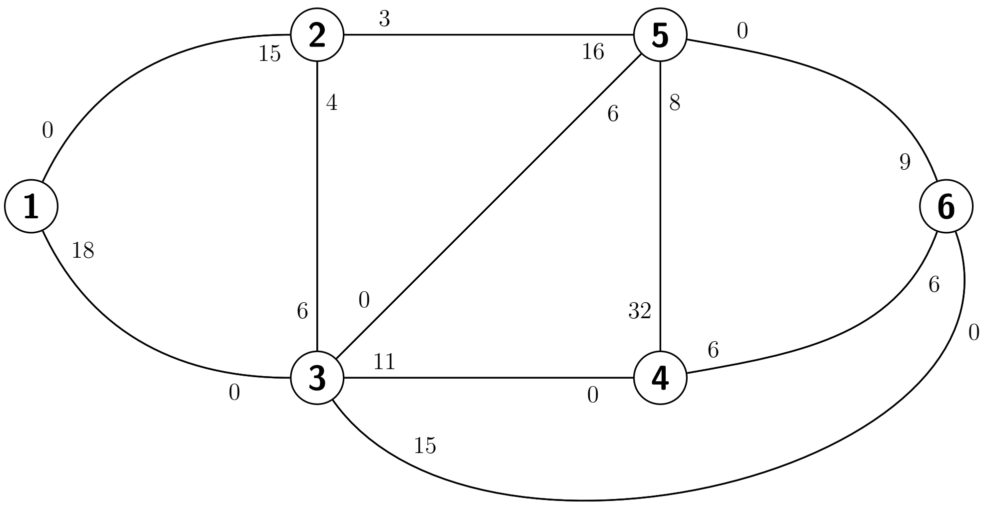
Inicial



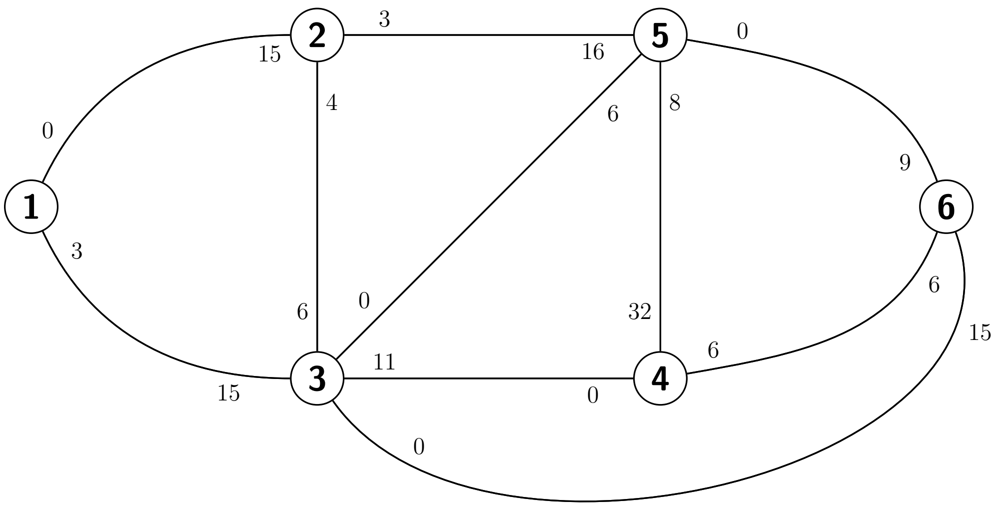
Trayectoria de Aumento 01: $1 - (15) - 2 - (12) - 5 - (9) - 6 \; = \; 9$



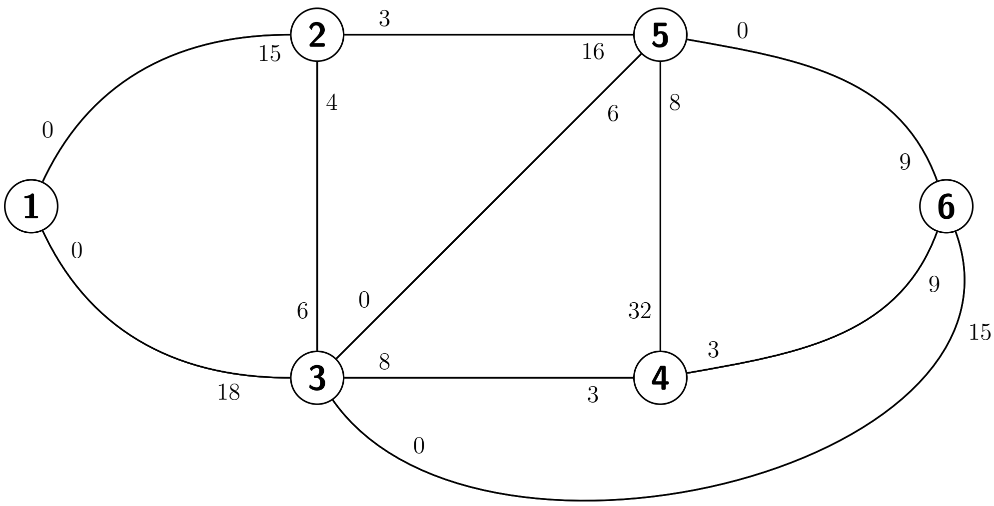
Trayectoria de Aumento 02: $1 - (6) - 2 - (10) - 3 - (6) - 5 - (14) - 4 - (12) - 6 \ = \ 6$



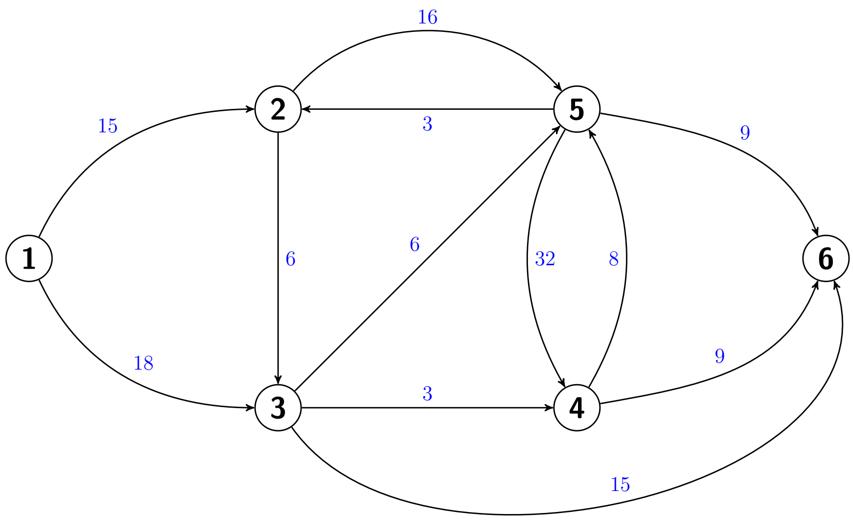
Trayectoria de Aumento 03: $1 - (18) - 3 - (15) - 6 \ = \ 15$



Trayectoria de Aumento 04: $1 - (18) - 3 - (15) - 4 - () - 6 \; = \; 3$



A continuación, la red de flujo Máximo (igual a 33)



Punto 10 - Problema de Flujo Máximo como Problema de Programación Lineal

Objetivo: Maximizar la cantidad de viajes desde el nodo origen al nodo destino. Variables de Decisión:

- X_{ij} = Cantidad de viajes desde i hacia j

Función Objetivo:

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_{ij}$$

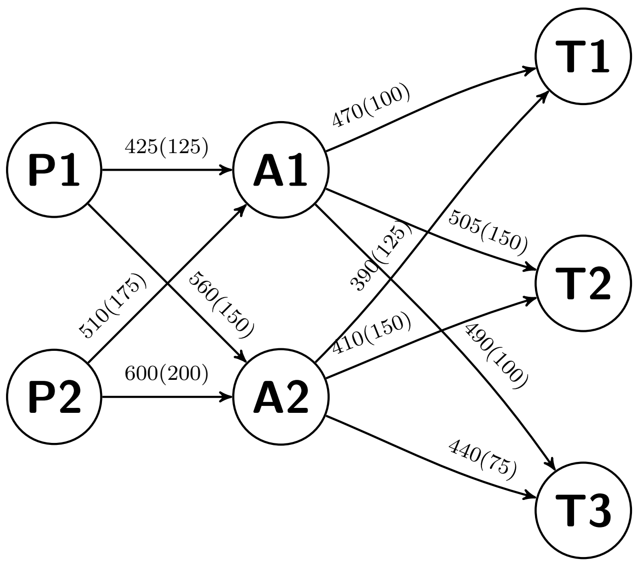
Sujeta a:

$$X_{ij} \leq C_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ik} = \sum_{j=1}^{m} X_{kj} \qquad \forall k \neq 0 \wedge k \neq F$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad \forall i = 1..n \quad \forall j = 1..m$$

Punto 11 - Flujo de costo Mínimo 01

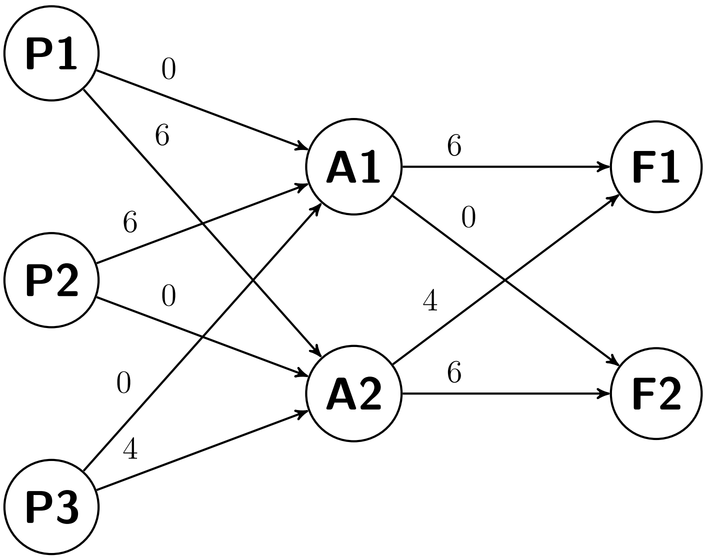


El plan de distribución óptimo (segun **LINGO**) es:

- Enviar 125 unidades de P1 a A1.
- Enviar 75 unidades de P1 a A2.

- Enviar 125 unidades de P2 a A1.
- Enviar 175 unidades de P2 a A2.
- Enviar 100 unidades de A1 a T1.
- Enviar 50 unidades de A1 a T2.
- Enviar 100 unidades de A1 a T3.
- Enviar 50 unidades de A2 a T1.
- Enviar 150 unidades de A2 a T2.
- Enviar 50 unidades de A2 a T3.

Punto 12 - Flujo de costo Mínimo 02



El plan mensual óptimo (segun **LINGO**) es:

- Ordenar 6 embarques al proveedor 1 y 2.
- Ordenar 4 embarques al proveedor 3.
- Enviar 6 embarques desde el almacén 1 a la fábrica 1.
- Enviar 4 embarques desde el almacén 2 a la fábrica 1 y 6 a la fábrica 2.

Con este plan se logra un costo igual a \$374460.

Punto 13 - Stanley Morgan

Trayectorias y Longitudes

- Inicio-A-D-H-M-Terminación → 19
- Inicio-A-I-M-Terminación → 17
- Inicio-B-E-J-M-Terminación → 20
- Inicio-C-F-K-N-Terminación → 16
- Inicio-C-G-L-N-Terminación → 20

Tiempos

Cuadro 4: Finalizaciónes y Holgura

Tarea	Inicio Temprano	Inicio Tardío	Finalización Temprano	Finalización Tardío	Holgura
A	0	1	6	7	1
B	0	0	3	3	0
C	0	0	4	4	0
D	6	7	10	11	1
E	3	3	10	10	0
F	4	8	8	12	4
G	4	4	10	10	0
H	10	11	13	14	1
I	6	9	11	14	3
J	10	10	14	14	0
K	8	12	11	15	4
L	10	10	15	15	0
M	14	14	20	20	0
N	15	15	20	20	0

Punto 13 cont. en pág. siguiente…

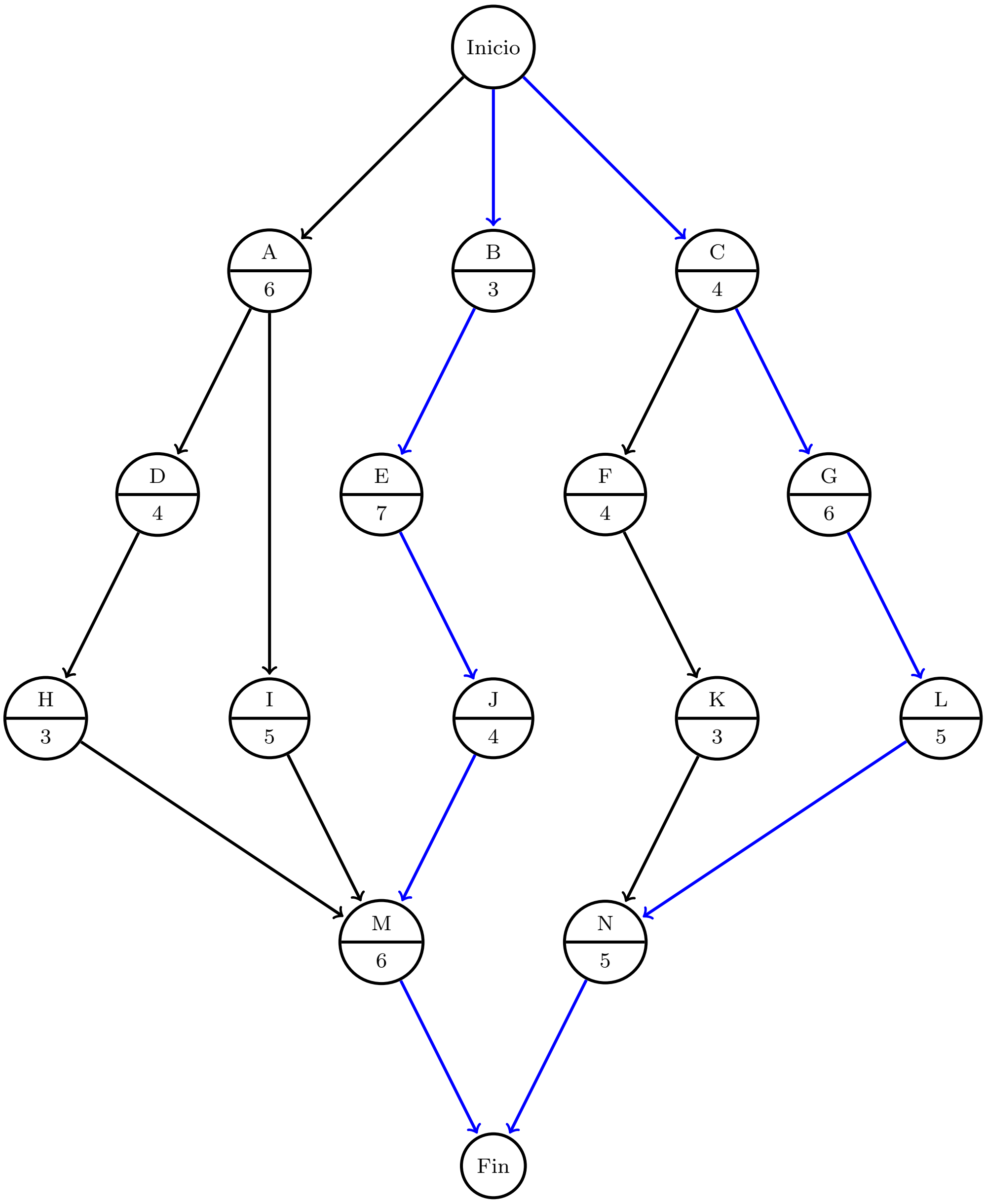


Figura 6: Ruta Crítica

Punto 13 cont. en pág. siguiente. . .

Retrasos

- La tarea I tiene una holgura de 2, entonces si dicha tarea se demora 2 semanas más la duración total del proyecto sera de 20 semanas.
- La tarea H tiene una holgura de 1, entonces si dicha tarea se demora 2 semanas más la duración total del proyecto sera de 21 semanas.
- La tarea J tiene una holgura de 0, entonces si dicha tarea se demora 2 semanas más la duración total del proyecto sera de 22 semanas.

Punto 14 - Lockhead Aircraft

Media y Varianza

Siendo

$$\mu = \frac{a + 4m + b}{6} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{36}$$

con

- a: Estimación Optimista.
- m: Estimación más Probable.
- b: Estimación Pesimista

Cuadro 5: Media y Varianza

Actividad	Estimación Optimista	Estimación Más Probable	Estimación Pesimista	μ	σ^2
A	28	32	36	32.00	1.78
B	22	28	32	27.67	2.78
C	26	26	46	29.33	11.11
D	14	16	18	16.00	0.44
E	32	32	32	32.00	0.00
F	40	52	74	53.67	32.11
G	12	16	24	16.67	4.00
H	16	20	26	20.33	2.78
I	26	34	42	34.00	7.11
J	12	16	30	17.67	9.00

Punto 14 cont. en pág. siguiente…

Ruta Crítica Media

La ruta critica media es aquella que recorre las tareas **B**,**F** y **J**. La misma tiene una $\mu = 100$ y $\sigma^2 = 44$

Probabilidad 100 semanas

$$X = 100\ Semanas$$
$$K_\alpha = \frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{100-100}{7} = 0 \rightarrow P\{d \leq 100\} = 0.5$$

Por lo tanto, existe una probabilidad de 50 % de que el proyecto se termine en 100 semanas

Posibilidad

Debido a los supuestos realizados por el modelo PERT, entre los que se incluye la distribucion de probabilidades Beta y tiempos independientes, el valor hallado anteriormente es menor al valor real, o sea, resulta más pesimista.

Punto 15 - Aceleración Lockhead

Programa Lineal

Variables de Decisión

- X_j: Cantidad de semanas a acelerar la tarea j.
- Y_j: Fecha de inicio cercano de la actividad j.

Función Objetivo:

$$\begin{aligned} Min\ Z = 5X_a + & 7X_b + 8X_c + 4X_d + 5X_e + \\ & 6X_f + 3X_g + 4X_h + 9X_i + 2X_j \end{aligned}$$

Sujeta a:

$$\begin{array}{lllll} X_a \leq 4 & X_b \leq 3 & X_c \leq 5 & X_d \leq 3 & X_e \leq 5 \\ X_f \leq 7 & X_g \leq 2 & X_h \leq 3 & X_i \leq 4 & X_j \leq 2 \end{array}$$

Punto 15 cont. en pág. siguiente. . .

$$Y_a \geq Y_{ini} \qquad Y_b \geq Y_{ini} \qquad Y_c \geq Y_a + 32 - X_a$$
$$Y_d \geq Y_b + 28 - X_b \qquad Y_e \geq Y_b + 28 - X_b \qquad Y_f \geq Y_b + 28 - X_b$$
$$Y_g \geq Y_d + 16 - X_d \qquad Y_h \geq Y_e + 32 - X_e \qquad Y_h \geq Y_g + 17 - X_g$$
$$Y_i \geq Y_e + 32 - X_e \qquad Y_i \geq Y_g + 17 - X_g \qquad Y_j \geq Y_c + 36 - X_c$$
$$Y_j \geq Y_f + 54 - X_f \qquad Y_{fin} \geq Y_h + 20 - X_h \qquad Y_{fin} \geq Y_i + 34 - X_i$$
$$Y_{fin} \geq Y_j + 18 - X_j$$

$$Y_{ini} = 0 \qquad Y_{fin} \leq 92 \qquad X_j \geq 0 \quad \forall j \qquad Y_j \geq 0 \quad \forall j$$

Solucion

Cuadro 6: Datos

Actividad	**Tiempo Normal**	**Tiempo Quiebre**	**Costo Normal**	**Costo Quiebre**	**Maxima Reduccion**	**Cto. Quiebre Por semana**
A	32	28	160	180	4	5
B	28	25	125	146	3	7
C	36	31	170	210	5	8
D	16	13	60	72	3	4
E	32	27	135	160	5	5
F	54	47	215	257	6	7
G	17	15	90	96	3	2
H	20	17	120	132	4	3
I	34	30	190	226	9	4
J	18	16	80	84	2	2

Cuadro 7: Solucion

Ruta	**Normal**	**Acel J**	**Acel J**	**Acel F**	**Acel F**	**Acel F**	**Acel B**	**Acel B**	**Acel B**
Inicio-A-C-J-Fin	86	85	84	84	84	84	84	84	84
Inicio-B-F-J-Fin	**100**	**99**	**98**	**97**	**96**	**95**	**94**	**93**	**92**
Inicio-B-E-H-Fin	80	80	80	80	80	80	79	78	77
Inicio-B-E-I-Fin	94	94	94	94	94	94	93	92	91
Inicio-B-D-G-H-Fin	81	81	81	81	81	81	80	79	78
Inicio-B-D-G-I-Fin	95	95	95	95	95	95	94	93	92

La solución hallada mediante el uso del software **LINGO** coincide con lo expuesto en la tabla anterior. La misma indica que la solución Óptima consiste en acelerar 3 semanas las tareas **B** y **F** y 2 semanas la tarea **J**; para poder afrontar esta aceleracion debemos contar con 43 millones de pesos, logrando que la duración del proyecto sea de 92 semanas.

Punto 15 cont. en pág. siguiente…

Informe

Invirtiendo 43 millones de pesos logramos reducir la duración total del proyecto a 92 semanas. Las tareas que debemos acelerar para lograr este tiempo son:

- Tarea B: 3 Semanas.
- Tarea F: 3 Semanas.
- Tarea J: 2 Semanas.