

Modelos Matemáticos

“Un Matemático es un Quijote moderno que lucha en un mundo real con armas imaginarias” P. Corcho

Ejercicios

1. Clasificar los siguientes modelos según el tipo de variables y las operaciones que afectan a las mismas.

$$\text{Máx } Z = 3x_1 + 5x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 230 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 250 \\ & x_2 \leq 120 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{mín } Z = 0,07x_{11} + 0,05x_{12} + 0,1x_{13} - 0,05x_{14} + 0,03x_{21} + 0,11x_{22} + 0,04x_{23} - 0,08x_{24}$$

s.a.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 5000 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 5000 \\ & x_{11} + x_{21} = 4000 \\ & x_{12} + x_{22} = 2000 \\ & x_{13} + x_{23} = 2500 \\ & x_{14} + x_{24} = 1500 \\ & x_{ij} \geq 0 \forall i, j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mín } Z = & 65x_{11} + 73x_{12} + 63x_{13} + 57x_{14} \\ & + 67x_{21} + 70x_{22} + 65x_{23} + 58x_{24} \\ & + 68x_{31} + 72x_{32} + 69x_{33} + 55x_{34} \\ & + 67x_{41} + 75x_{42} + 70x_{43} + 59x_{44} \end{aligned}$$

s.a.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \forall i, j \end{aligned}$$

$$\text{Máx } Z = 5x_1 + 5x_2$$

s.a.

$$(d) \quad \frac{1}{36}x_1^2 + \frac{1}{16}x_2^2 \leq 100$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

$$\text{Máx } Z = xyz$$

(e) s.a.

$$2x + 2y + z \leq 108$$

$$x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$$

$$(f) \quad \text{mín } CTE = 120 \cdot 2000 + \frac{2000}{q} 1000 + \frac{1}{2} q \cdot \frac{5}{100} \cdot 120$$

s.a.

$$5 \cdot q \leq 140$$

$$\text{Máx } Z = 20X_1 + 28X_2 - 100Y_U - 10X_3 - 8X_4$$

s.a.

$$(g) \quad \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 \\ X &= X_L + X_U \\ 0.01Y_L &\leq X_L \\ X_L &\leq 9.99Y_L \\ 10Y_U &\leq X_U \\ X_U &\leq 100Y_U \\ Y_L + Y_U &\leq 1 \\ X &= X_3 + X_4 \\ 0.01Y_3 &\leq X_3 \\ X_3 &\leq 8Y_3 \\ 9Y_4 &\leq X_4 \\ X_4 &\leq 100Y_4 \\ Y_3 + Y_4 &\leq 1 \\ X_j &\in \mathbb{Z}; Y_j \in [0, 1] \forall j \end{aligned}$$

Modelado de Problemas

Plantear el modelo matemático de los siguientes problemas, en cada caso identificando variables de decisión, función objetivo y restricciones. Recuerde explicitar las unidades en las que se mide cada elemento del modelo. Clasificarlo según el tipo de variables y las operaciones involucradas.

1. **Destilación de crudos.** Una compañía de petróleo produce en sus refinerías gas oil (G), nafta sin plomo (P) y nafta súper 97 (S) a partir de dos tipos de crudos, C_1 y C_2 . Las máquinas están dotadas de dos tipos de tecnologías. La tecnología nueva, T_n , utiliza en cada sesión de destilación 7 unidades de C_1 y 12 de C_2 , para producir 8 unidades de G, 6 de P y 5 de S. Con la tecnología antigua T_a , se obtienen en cada destilación 10 de G, 7 de P y 4 de S, con un gasto de 10 unidades de C_1 y 8 de C_2 . Estudios de demanda permiten estimar que para el próximo mes se deben producir al menos 900 unidades de G, 300 de P y entre 800 y 1700 de S. La disponibilidad de crudo C_1 es de 1400 unidades y de C_2 de 2000 unidades. Los beneficios económicos por unidad producida son

Producto	G	P	S
Beneficio/u	4	6	7

La compañía desea conocer cómo utilizar ambos procesos de destilación, que se pueden realizar total o parcialmente, y los crudos disponibles para que el beneficio sea máximo.

2. Un fabricante de televisores tiene que decidir el número de unidades de 27" y 20" que debe producir en una de sus plantas. La investigación de mercado indica que puede vender como máximo 40 unidades de 27" y 10 unidades de 20" al mes. El número máximo de horas de trabajo disponible es 500 por mes. Un televisor de 27" requiere 20 horas de trabajo y uno de 20" requiere 10. Cada unidad de 27" vendida produce una ganancia de 120 u.m. y cada una de 20" produce una ganancia de 80 u.m. Un distribuidor está de acuerdo en comprar todas las unidades que se produzcan si su número no excede los máximos del estudio de mercado.
3. Una compañía de transportes posee 2 tipos de camiones. El camión tipo A tiene 20 m³ de espacio refrigerado y 40 m³ no refrigerado. El camión tipo B tiene 30 m³ refrigerados y 30 m³ no refrigerados. Una fábrica de productos alimenticios debe embarcar 900 m³ de productos refrigerados y 1200 m³ no refrigerados. ¿Cuántos camiones de cada tipo debe alquilar la fábrica para minimizar costos si el tipo A se alquila a 0,30 \$/Km y el B a 0,40 \$/Km?
4. Una carnicería realiza sus hamburguesas a partir de carne magra de cerdo y ternera. La carne de ternera contiene un 80% de carne y un 20% de grasa, y cuesta a la tienda 0,80 \$/Kg; la carne de cerdo contiene un 68% de carne y un 32% de grasa, y cuesta 0,60 \$/Kg. ¿Qué cantidad de cada tipo de carne debe emplearse por kilo si quiere minimizarse el coste y mantener un contenido de grasa no superior al 25%?
5. Una compañía minera opera tres minas. El mineral obtenido en cada una se separa en dos calidades antes de su distribución. Las capacidades de producción diarias de cada mina, así como sus costes de operación diarios son los siguientes:

	Mineral de alta Calidad ton/día	Mineral de baja Calidad ton/día	Costo de Operación \$/día
Mina 1	4	4	2000
Mina 2	6	4	2200
Mina 3	1	6	1800

La compañía se ha comprometido a entregar 54 toneladas de mineral de alta calidad y 65 de baja en el plazo de una semana. Los contratos de los mineros les garantizan la paga del día completo por cada día o fracción que la mina está abierta. Determinar el número de días que debe funcionar cada mina durante

la próxima semana para cumplir el compromiso con un coste mínimo.

6. Un productor agropecuario cuenta con tres fincas de cierta extensión cada una y ciertas características específicas de riego, de acuerdo con la región en que cada una de ellas se encuentra. Un resumen de estas características aparece a continuación:

<i>Finca</i>	<i>Hectáreas</i>	<i>Agua Disponible (lts)</i>
1	350	1500
2	700	2000
3	300	900

Se tienen, además, tres diferentes clases de plantas que se pueden cultivar: yuca, papa y maíz; cada una de ellas tiene restricciones sobre el número de hectáreas que se pueden cultivar y requerimientos sobre el consumo de agua por hectárea, además cada cultivo tiene asociado una utilidad por hectárea cultivada:

<i>Cultivo</i>	<i>Máximo Núm. de Has.</i>	<i>Consumo de Agua/Has.</i>	<i>Utilidad \$/Ha.</i>
Yuca	600	5	400
Papa	900	4	300
Maíz	300	3	100

Por disposiciones gubernamentales no es posible tener porcentajes diferentes de áreas cultivadas en las tres fincas. Nuestro productor agropecuario se pregunta cuál ha de ser la distribución de cultivos en cada una de las fincas, de manera que maximice la utilidad generada por la venta del producto de las cosechas.

7. Una empresa de ómnibus de larga distancia necesitará el siguiente número de choferes durante cada uno de los siguientes cinco años: año 1, 60 choferes; año 2, 70 choferes; año 3, 50 choferes; año 4, 65 choferes; año 5, 75 choferes. Al inicio de cada año la compañía debe decidir cuántos choferes hay que contratar o despedir. Cuesta \$4000 contratar a un chofer y \$2000 despedir a uno. El salario anual de un chofer es \$10000. Al inicio del año 1 la compañía tiene 50 choferes. Se puede utilizar a un chofer, contratado a principio de año, para cumplir con los requerimientos de ese año, y se le paga el salario completo por el año actual. Formule un PL para minimizar los costos por salarios, contrataciones y despidos, de la compañía durante los próximos 5 años.
8. El administrador del mainframe de una universidad debe poder acceder a cinco bases de datos (Para crear y recuperar copias de seguridad). Estas bases de datos se encuentran en diez cintas almacenadas en un sitio remoto (administrado por un tercero). La base de datos A se puede copiar en las cintas: 1, 2, 4, 5, 8 o 9; la B en las cintas: 1 o 3; la C en las cintas: 2, 5, 7 o 10; la D en las cintas: 3, 6 u 8; la E en las cintas: 1, 2, 4, 6, 7, 9 o 10. Las capacidades de las cintas (en GigaBytes) son: cinta 1: 1,3; cinta 2: 5; cinta 3: 3,1; cinta 4: 1,3; cinta 5: 5,1; cinta 6: 4; cinta 7: 3; cinta 8: 1; cinta 9: 2; cinta 10: 10,2. Determine las cintas a utilizar, teniendo en cuenta que: nuestro proveedor nos cobra por espacio de almacenamiento empleado, que cada base de datos debe respaldarse en al menos una cinta, y que para una cinta dada sólo se puede almacenar una base de datos (no puede emplearse la capacidad restante).
9. Si un monopolista produce q unidades, puede cobrar a sus clientes $100-4q$ pesos/unidad. El costo fijo de la producción es 50 pesos y el costo variable es de 2 pesos la unidad. Cuánto debe producir el monopolista para maximizar su beneficios? $(100 - 4Q - 2Q)Q - 50$
10. Una firma produce un artículo que se vende en dos mercados. La firma es un monopolio en el mercado 1 y vende el artículo a \$60 cada unidad. El mercado 2 es competitivo por lo que el precio de venta está determinado por la demanda de la siguiente manera: $p_2 = 100 - q_2$. Los costos de producción de la firma están dados por $C(q_1, q_2) = (q_1 + q_2)^2$ donde q_1 y q_2 son las cantidades de producto vendidas en el mercado 1 y en el mercado 2 respectivamente. ¿Cuánto tendría que vender la firma en cada mercado para maximizar su ganancia?

$$7Q_1 = C_1 + Q_2 - C_2$$

11. Una compañía tiene dos mercados donde ubica sus productos, las demandas en cada mercado dependen del nivel de gastos en publicidad y están dadas por:

$$Q_1 = 6x_1^{1/2} \text{ y } Q_2 = 3x_2^{1/2},$$

Donde x_j = nivel de gasto en promocionar en el mercado j . Los costos totales de vender en los dos mercados se expresan como funciones lineales del nivel de ventas:

$$C_1 = 60 + 4Q_1 + x_1 \text{ y } C_2 = 28 + 5Q_2 + x_2.$$

El Mercado 1 es el territorio local de la empresa y el Mercado 2 es un territorio lejano. El costo fijo en el Mercado 1 es mayor ya que ahí se encuentra la planta y oficinas centrales, pero el costo variable es bajo ya que los costos de transporte son sensiblemente menores.

El precio promedio en los mercados es $P_1 = \$7$ y $P_2 = \$9$ (El Mercado 1 tiene un precio menor porque es un mercado más grande y atrae a más competidores). Las ventas del último año fueron \$407000. La gerencia estableció el presupuesto de publicidad en el 16% de las ventas. Por esto el presupuesto de publicidad para este año es de \$65000 (redondeando). La compañía divide este presupuesto entre los dos mercados y el problema es encontrar la distribución de este presupuesto que maximice el beneficio total.

12. Una compañía fabrica y venden dos modelos de lámpara L1 y L2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L1 y de 30 minutos para el L2; y un trabajo de máquina de 15 minutos para L1 y de 10 minutos para L2. Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 y 10 euros para L1 y L2, respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

$$15x_1 + 10x_2$$

13. Una refinería de petróleo tiene dos fuentes de petróleo crudo: crudo ligero, que cuesta 35 dólares por barril y crudo pesado a 30 dólares el barril. Con cada barril de crudo ligero, la refinería produce 0,3 barriles de gasolina (G), 0,2 barriles de combustible para calefacción (C) y 0,3 barriles de combustible para turbinas (T), mientras que con cada barril de crudo pesado produce 0,3 barriles de G, 0,4 barriles de C y 0,2 barriles de T. La refinería ha contratado el suministro de 900000 barriles de G, 800000 barriles de C y 500000 barriles de T. Hallar las cantidades de crudo ligero y pesado que debe comprar para poder cubrir sus necesidades al costo mínimo

14. Una empresa planea producir dos tipos de dulces: dulce macizo y dulce suave. Ambos están elaborados sólo con azúcar, nueces, y chocolate. En la actualidad tiene en existencia 100kgs de azúcar, 20kgs de nueces y 30 kgs de chocolate. La mezcla usada para elaborar el dulce suave debe contener por lo menos 20% de nueces. La mezcla que se utiliza para el dulce macizo debe contener por lo menos 10% de nueces y 10% de chocolate. Vada kilo de dulce suave se vende a 25 centavos y cada kilo de dulce macizo a 20 centavos. Plantee un PL que le permita maximizar sus ingresos con la venta de dulces.

15. Una competencia de relevos de 400 metros incluye a cuatro diferentes nadadores, quienes nadan sucesivamente 100 metros de dorso, de pecho, de mariposa y libre. Un entrenador tiene seis nadadores, cuyos tiempos esperados (en segundos) en los eventos individuales son los siguientes:

	Dorso	Pecho	Mariposa	Libre
Nadador 1	65	73	63	57
Nadador 2	67	70	65	58
Nadador 3	68	72	69	55
Nadador 4	67	75	70	59
Nadador 5	71	69	75	57
Nadador 6	69	71	66	59

¿Cómo deberá el entrenador asignar a los nadadores a los relevos, a fin de minimizar la suma de sus tiempos?

16. Un operario especializado ha de reparar una instalación de alta montaña. Es conveniente que lleve consigo 5 equipos diferentes de reparación. Sin embargo, el peso máximo a transportar está limitado a 60 unidades. El peso de cada equipo y un parámetro que cuantifica su utilidad esperada aparecen en la tabla siguiente.

Equipo	1	2	3	4	5
Peso	52	23	35	15	7
Utilidad(%)	100	60	70	15	15

¿Qué equipos ha de llevarse consigo el operario?

17. Un fabricante de plásticos tiene en existencia en una de sus fábricas, 1200 cajas de envoltura transparente y otras 1000 cajas en su segunda fábrica. El fabricante tiene órdenes para este producto por parte de tres diferentes detallistas, en cantidades 1000, 700 y 500 cajas respectivamente. Los costos unitarios de envío (en centavos por caja) de las fábricas a los detallistas son los siguientes:

	Detallista 1	Detallista 2	Detallista 3
Fábrica 1	14	13	11
Fábrica 2	13	13	12

18. MG Auto tiene tres plantas: en Los Ángeles, Detroit y Nueva Orleans; y dos centros principales de distribución en Denver y en Miami. Las capacidades de las tres plantas durante el próximo trimestre serán 1000, 1500 y 2000 autos. Las demandas trimestrales en los dos centros de distribución son 2300 y 1400 autos. El kilometraje entre las fábricas y los centros de distribución es:

	Denver (1)	Miami (2)
Los Ángeles (1)	1000	2690
Detroit (2)	1250	1350
Nueva Orleans (3)	1275	850

La empresa transportista cobra 8 centavos por milla y por auto. El costo de transporte por auto en las distintas rutas, y redondeado hasta el \$ más próximo se calcula en la tabla:

	Denver (1)	Miami (2)
Los Ángeles (1)	\$80	\$125
Detroit (2)	\$100	\$108
Nueva Orleans (3)	\$102	\$68

Plantee un modelo que minimice el costo total del transporte.

19. A un monopolista le cuesta \$5/unidad producir un producto. Si produce x unidades del producto, entonces cada uno se puede vender en $10-x$ dólares. Plantee un modelo que permita determinar la cantidad de unidades que deben producirse para maximizar la ganancia
20. Una importante compañía petrolera desea construir una refinería que recibirá suministros desde tres ciudades portuarias. El puerto B está 300 Km al este y 400 Km al norte del puerto A, mientras que el puerto C está a 400 Km al este y 100 Km al sur del puerto B. Determínese la localización de la refinería de tal manera que la cantidad total de tubería necesaria para conectar la refinería con los puertos se minimice.