Parcial 1 Análisis Numérico

José Calderón Santiago Fernández Mariana Galavís
Germán Velasco

Febrero 24 2021

1. Introducción al método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson fue descrito por primera vez por Isaac Newton en su libro "Sobre el análisis mediante ecuaciones con un número infinito de términos", escrito en 1669 y publicado en 1711 y en "Methodus fluxionum et serierum infinitorum", escrito en 1671 y publicado hasta 1736. Sin embargo, en estos libros Newton aplicaba el método solo para polinomios.
El método Newton-Raphson como lo conocemos hoy en día surge gracias el matemático inglés Joseph Raphson, quien en 1690 en su libro .[A]equationum Universalis", presenta una expansión al método para aproximar raíces.
Sea $f(x)$ una función continuamente diferenciable dos veces en un intervalo $[a,b]\epsilon C^2$. Sea x_i una aproximación a la raíz x_r tal que $f'(x_i) \neq 0$ y $|x_i - x_r|$ tienda a cero. Este método consiste en una serie de aproximaciones sucesivas para encontrar las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ a partir de una primera aproximación inicial x_i y mediante la aplicación de la fórmula $x_r = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ de una manera recursiva. La convergencia del método es cuadrada y para ello se necesita que la aproximación inicial sea bastante cercana a la raíz. A pesar de ser un método eficiente, presenta ciertas dificultades cuando no hay una raíz real, la raíz es un punto de inflexión y cuando el valor inicial está muy alejado de la raíz deseada.

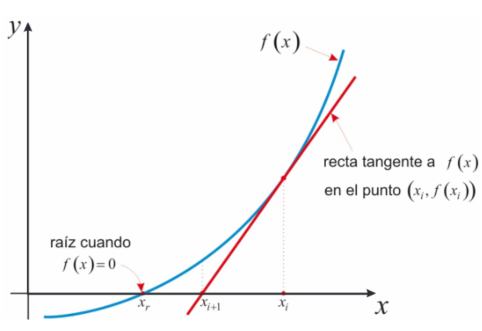

Figura 1: Explicación gráfica del método

2. Solución a preguntas

2.1. ¿Cuales son las condiciones para aplicar el método?

Sea $f(x)$ una función continuamente diferenciable dos veces en el intervalo $[a,b]\epsilon C^2$.

- $x_r\epsilon[a,b]$ tal que $f(x_r) = 0$.
- $x_i\epsilon[a,b]$ tal que $f'(x_i) \neq 0$ y $|x_i - x_r|$ tiende a 0.
- Para obtener una buena aproximación x_i es necesario $f(x_i)f''(x_i) > 0$.
- Para evitar la divergencia por un punto de inflexión $f''(x_i) \neq 0$.

Para aplicar el método necesitamos de una aproximación inicial x_0 (cuya cercanía con la raíz será factor clave para la convergencia del método) y un valor máximo de tolerancia soportada por el algoritmo.

2.2. Proporcione una explicación geométrica del algoritmo.

Geométricamente, el método de newton consiste en una linealización de la función. La función se reemplaza por la recta que pasa por el punto $(x_i, f(x_i))$ cuya pendiente coincide con la derivada en x_i. Partiendo de una aproximación inicial x_i, la siguiente aproximación x_r se obtiene por la intersección entre el eje de las abscisas (eje 'x') y la recta tangente. La ecuación de la recta descrita anteriormente es $y - f(x_i) = f'(x_i)(x_r - x_i)$ donde despejando x_r se obtiene:

$$0 - f(x_i) = f'(x_i)(x_r - x_i)$$

Como se está calculando el corte $(x, 0)$, se necesita $y = 0$ entonces

$$x_r = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

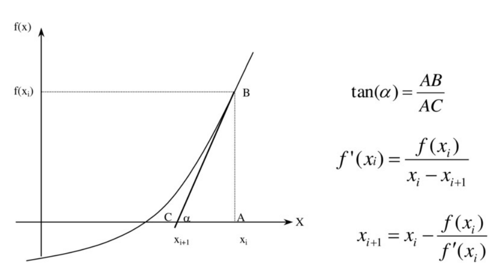

Figura 2: Explicación geométrica del método

Si repetimos este proceso obtenemos una sucesión de aproximaciones que converge a la solución o hasta que se llegue a un punto de tolerancia deseado.

En la gráfica cada (x_i) que resulta de las iteraciones, se va aproximando más a la raíz donde la función es igual a 0.

2.3. Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo

El algoritmo implementado, es un algoritmo híbrido. De la introducción al algoritmo, se puede inferir que es realmente importante tener una aproximación inicial buena x_i para evitar problemas como la divergencia por aproximaciones iniciales distantes a la raíz. Para ello y ante la libertad que el método otorga para su selección, decidimos implementar el método de bisección dado un intervalo y un número límite de iteraciones.Esto nos permite obtener una aproximación suficientemente cercana a la raíz para x_i. Una vez obtenemos ese x_i, verificamos que no sea nulo (esta situación se presenta cuando en bisección, no exista una raíz en el intervalo asignado) en caso de que sea nulo, se muestra el mensaje en pantalla que indica que Newton-Raphson no puede ser implementado. En el caso contrario, donde si exista una aproximación, pasa a aplicarse por primera vez la fórmula del método $x_r = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ para luego hallar el error absoluto y asegurarnos de que el error es mayor a la tolerancia deseada en el ejercicio. Cuando confirmamos lo anterior, verificamos que la función evaluada en x_i no es cero (ya que esto significa que encontramos la raíz). De ser cero imprimimos la ecuación, el número de iteraciones, el punto inicial y la aproximación a la raíz. Si no es cero pasamos a evaluar una segunda condición para poder aplicar el método: que la derivada en x_i sea distinta de cero (esta condición se evalúa porque se presenta una división entre cero de no ser así) si la derivada es cero, se muestra el mensaje que indica que no se puede aplicar el método pero si la derivada es distinta, se aplica la fórmula $x_r = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, se calcula el error absoluto, a x_i se le asigna x_r (nueva aproximación a la raíz) y se evalúa que no se supere un número máximo de iteraciones que se estableció para detener al método cuando se presenten raíces múltiples (uno de los problemas que tiene el método y que hacen que pase a tener convergencia lineal). Si no supera este número, volverá a repetir los pasos desde que se calcula que el error sea mayor que la tolerancia; si sí supera este número se muestra un mensaje en pantalla que dice que el método no puede ser aplicado.

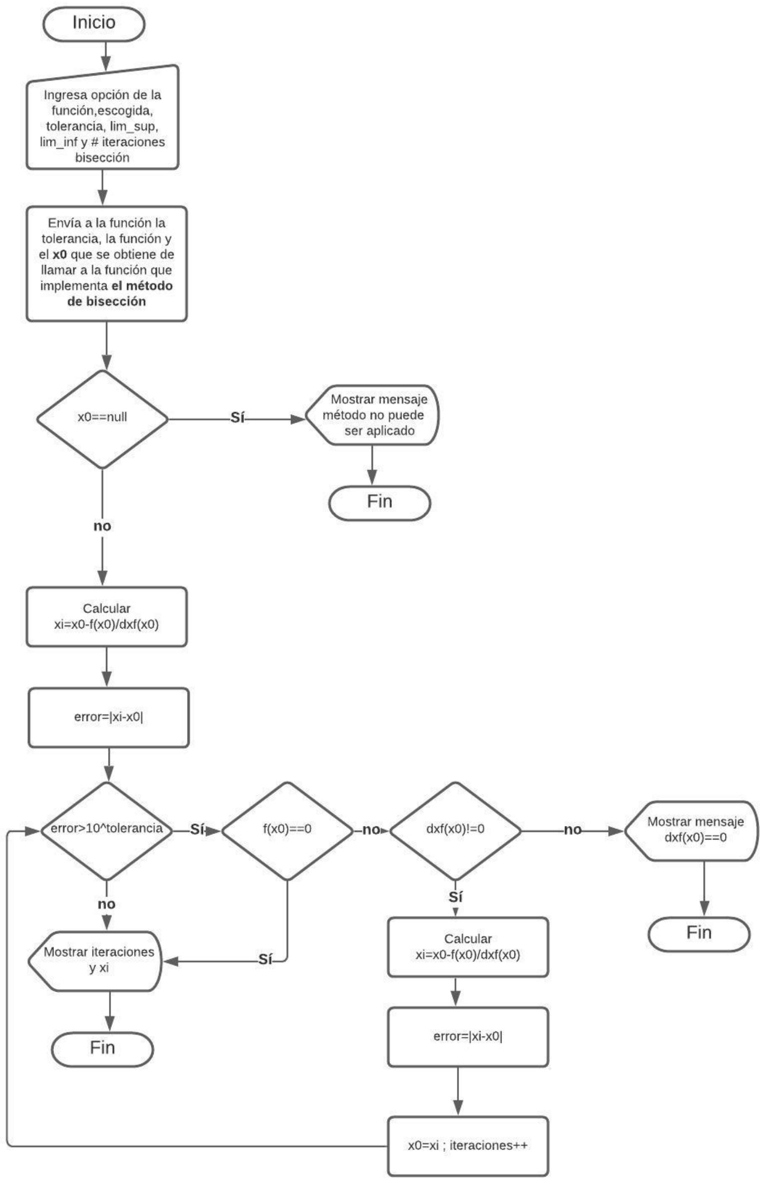

Figura 3: Diagrama de flujo de algoritmo propuesto

2.4. ¿Cuál son las raíces?. Valide su resultado.

2.4.1. Resultados generales

En este apartado se presentan los resultados generales obtenido por el algoritmo propuesto validado con la herramienta Wolfram Alpha.

Cuadro 1: Resultados generales comparados con Wolfram Alpha (método de Newton-Raphson)

Resultados Propuestos	Resultados Wolfram
0,739085133	0,739085133
1,114157141	1,114157141
0,666669871	0,666666667
16,64839283	16,64839283
2,094551482	2,094551482

Cuadro 2: Resultados generales comparados con Wolfram Alpha (método de Newton-Raphson Aitken)

Resultados Propuestos	Resultados Wolfram
0,739085133	0,739085133
1,114157141	1,114157141
ND	0,666666667
16,64839283	16,64839283
2,094551482	2,094551482

Cuadro 3: Resultados generales comparados con Wolfram Alpha (método de Newton-Raphson Modificado)

Resultados Propuestos	Resultados Wolfram
0,739085133	0,739085133
1,114157141	1,114157141
0,666669871	0,666666667
16,64839283	16,64839283
2,094551482	2,094551482

2.4.2. $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

Cuadro 4: Resultados generales con la función $f(x) = \cos^2(x) - x^2$

Tolerancia	x_0	Iteraciones NR	Resultado Final
10^8	0,71875	4	0,739085133215161
10^16	0,71875	5	0,739085133215161
10^32	0,71875	5	0,739085133215161
10^56	0,71875	5	0,739085133215161

El intervalo elegido para el método de bisección fue de $(0, 2)$ con cinco iteraciones para el mismo.

2.4.3. $f(x) = x\sin(x) - 1$

Cuadro 5: Resultados generales con la función $f(x) = x\sin(x) - 1$

Tolerancia	x_0	Iteraciones NR	Resultado Final
10^8	1,109375	3	1,11415714087193
10^16	1,109375	4	1,11415714087193
10^32	1,109375	4	1,11415714087193
10^56	1,109375	4	1,11415714087193

El intervalo elegido para el método de bisección fue de $(1, 2)$ con cinco iteraciones para el mismo.

2.4.4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

Cuadro 6: Resultados generales con la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

Tolerancia	x_0	Iteraciones NR	Resultado Final
10^8	0,671875	21	0,666669870837843
10^16	0,671875	24	0,666669870837843
10^32	0,671875	24	0,666669870837843
10^56	0,671875	24	0,666669870837843

El intervalo elegido para el método de bisección fue de $(0, 1)$ con cinco iteraciones para el mismo.

2.4.5. Determinar el coeficiente de arrastre w necesario para que un paracaidista de masa m = 68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t = 10 s.

Para el desarrollo de este ejercicio se tomó en cuenta qué, al caer en caída libre y siendo retenido por el paracaídas se involucran dos fuerzas en su sistema.

La primera, la fuerza ejercida por la gravedad

$$F_g = mg$$

Y la segunda, la fuerza ejercida en sentido contrario dada la resistencia del aire

$$F_a = -wv$$

De tal forma que el sistema de fuerzas quedará de la siguiente forma

$$F = F_g + F_a$$

$ma = mg - wv$ entonces $a = \frac{mg-wv}{m}$

Como $a = \frac{dv}{dt}$, entonces se deduce la siguiente ecuación

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$ entonces $v = \frac{gm}{w}(1 - e^{-(w/m)t})$

Como no es posible despejar la variable w, se resta la velocidad a ambos lados de la ecuación, siendo esta la base para aplicar el método numérico

$$0 = \frac{gm}{w}(1 - e^{-(w/m)t}) - v$$

Cuadro 7: Resultados generales con $0 = \frac{gm}{w}(1 - e^{-(w/m)t}) - v$

Tolerancia	x_0	Iteraciones NR	Resultado Final
10ˆ8	16,640625	3	16,6483928252878
10ˆ16	16,640625	4	16,6483928252878
10ˆ32	16,640625	4	16,6483928252878
10ˆ56	16,640625	4	16,6483928252878

El intervalo elegido para el método de bisección fue de $(16, 17)$ con cinco iteraciones para el mismo.

2.4.6. $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Cuadro 8: Resultados generales con la función $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Tolerancia	x_0	Iteraciones NR	Resultado Final
10ˆ8	2,109375	3	2,09455148154233
10ˆ16	2,109375	4	2,09455148154233
10ˆ32	2,109375	4	2,09455148154233
10ˆ56	2,109375	4	2,09455148154233

El intervalo elegido para el método de bisección fue de $(2, 3)$ con cinco iteraciones para el mismo.

2.5. Como se comporta el método en cuanto: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso.

Primero dividiremos el desempeño del método en estos tres casos, ya que en nuestro caso implementamos el algoritmo en su estado base (fase 1), luego utilizamos el método de aceleración de Aitken (fase 2) y por último el algoritmo enfocado en raíces múltiples (fase 3).
Fase 1:

- En la primera fase y con la aclaración que los resultados se acotaron a 10 cifras significativas, el método es supremamente exacto en 4 de los 5 ejercicios ya que el error absoluto con respecto a Wolfram Alpha era 0, en el único apartado que el método presento falencias fue en el ejercicio 3 ya que este presenta raíces múltiples y la discrepancia se manifiesta en la sexta cifra.
- Con respecto al número de iteraciones se manifestó un promedio de 4 iteraciones con 4 de los 5 puntos, pero en el caso de las raíces múltiples tuvimos un exceso de más del triple ya que se necesitó 34 iteraciones lo cual implica un rendimiento muy pobre en comparación a los resultados ya mencionados.
- Con este método todos los puntos lograron una convergencia, en específico el tercer caso fue el menos óptimo, pero logro la convergencia.

Fase 2:

- Con la aceleración de Aitken notamos el mismo resultado que con el algoritmo de Newton-Raphson ya que con una discriminación de 10 cifras significativas en los 4 casos logro una similitud del 100 por ciento, pero en el caso de las raíces múltiples el método diverge.
- Las iteraciones tuvieron una aceleración del 50 por ciento, esto nos indica que este método es el más óptimo, pero con la perdida de una de las soluciones lo cual implica que el método presenta falencias con respecto al primera y ultima fase.
- La mayor falencia del método es que en el caso de presentarse una función con múltiples raíces el método no es capaz de encontrar una convergencia para estos casos.

Fase 3:

- El ultimo método presenta la misma significancia que el primer método.
- En este apartado presenta su mayor punto diferenciador ya que mantiene la constante de 4 iteraciones del primer método, pero además reduce de manera significativa, más del 50 por ciento, ya que solo se necesitaron 13 iteraciones, este número sigue siendo elevado en comparación al estándar, pero es mucho más óptimo que en el método original.

- Todos los métodos lograron la convergencia al igual que el primer método.

2.6. ¿Cómo se puede solucionar el problema de significancia?, ¿es remediable o está destinado al fracaso?, en los casos que se presente el problema.

En el caso de Newton-Raphson, el método no es completamente rígido, es adaptable según sea el problema ya que para raíces individuales es un método con una significancia y optimización muy excelente, es capaz de ser acelerado y adaptado como ejemplo Aitken, además presenta diferentes versiones como Newton-Raphson enfocado en raíces múltiples.

2.7. ¿Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces?, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad (sugerencia utilice Wólfram para factorizar).

Cuando el método trata un problema en el cual encuentre una raíz de multiplicidad $m > 1$ el método de Newton-Raphson tiende a tener problemas, ya que si bien converge lo hace en un número de iteraciones bastante alto.
Es por este motivo qué, en 1978, Anthony Ralston y Philip Rabinowitz propusieron un método alternativo que permite que dichos problemas fueran resueltos, modificando el método base de Newton-Raphson en el cual se acelere su convergencia usando menos iteraciones.
La modificación consiste en formular el método de la siguiente manera:

Se propone una función $u(x)$ tal que

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Se reemplaza de tal forma que resulte

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}$$

Se opera y simplifica en el planteamiento original del método

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

2.8. ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar?, ¿estas características influyen?

El método converge y funciona con normalidad en la mayoría de dichos casos, siempre que se cumplan las condiciones anteriormente expuestas. Sin embargo, hay que tener en consideración las funciones periódicas, ya que puede que el método llegue a fallar, el algoritmo queda oscilando en término de iteraciones entre dos o más raíces cercanas de un intervalo específico. Para evitar que el método diverja, en el algoritmo propuesto se incluye una funcionalidad de aproximación de x_0 por bisección en un intervalo determinado.

2.9. Realice una gráfica que muestre la relación entre ϵ_i y ϵ_{i+1}, qué representa esa gráfica, encuentre una relación de la forma: $\epsilon_{i+1} = f(\epsilon_i)$

En el trabajo realizado se encontraron dos principales tendencias en relación al orden de convergencia, una lineal y la otra cuadrática, generalmente definida por el número de iteraciones. De acuerdo con esto se obtuvieron los siguientes resultados junto con una función que relacione las dos cantidades:

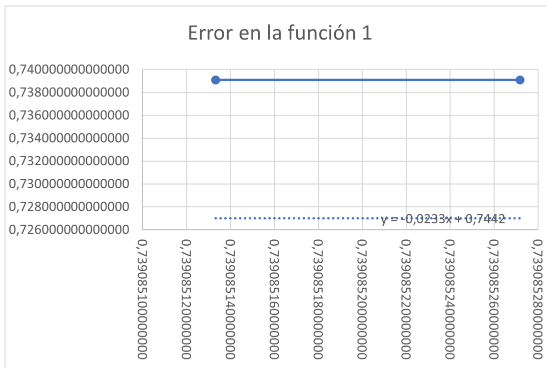

Figura 4: Comportamiento de ϵ_i y ϵ_{i+1} en $f(x) = \cos^2(x) - x^2$ con tolerancia 10^{-56}

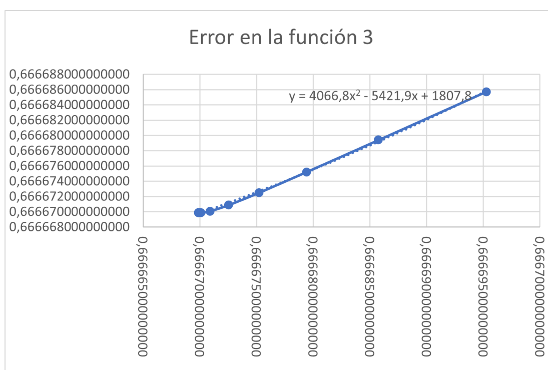

Figura 5: Comportamiento de ϵ_i y ϵ_{i+1} en $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$ con tolerancia 10^{-56}

2.10. Realice una gráfica que muestre cómo se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones.

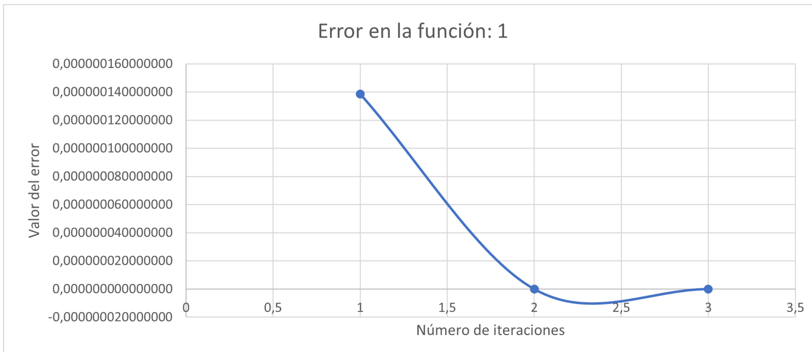

Figura 6: Gráfica de error en $f(x) = \cos^2(x) - x^2$ con tolerancia 10^{-56}

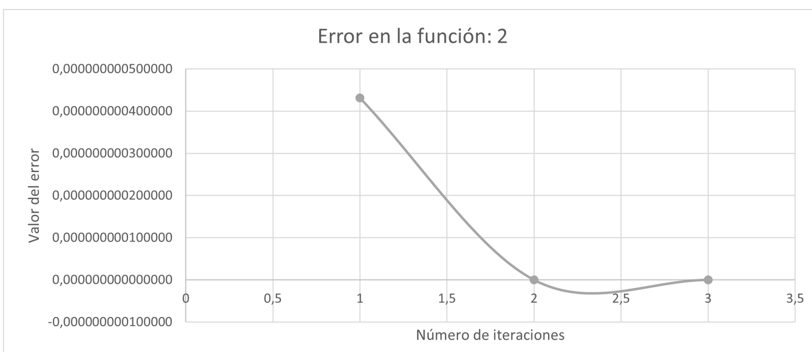

Figura 7: Gráfica de error en $f(x) = x\sin(x) - 1$ con tolerancia 10^{-56}

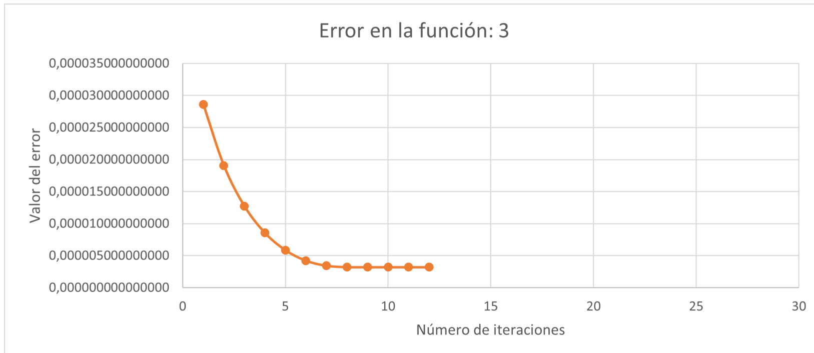

Figura 8: Gráfica de error en $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$ con tolerancia 10^{-56}

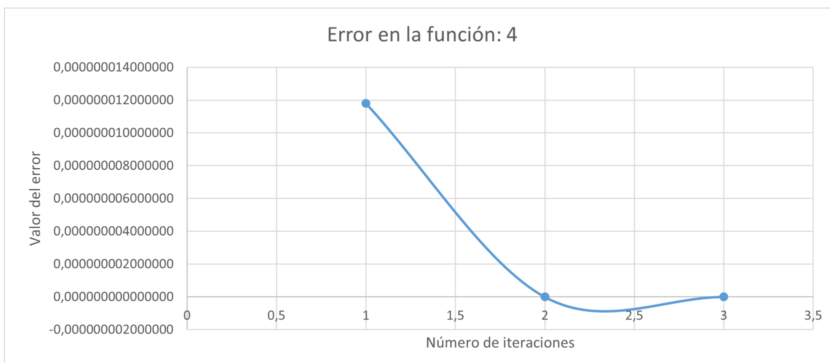

Figura 9: Gráfica de error en $0 = \frac{gm}{w}(1 - e^{-(w/m)t}) - v$ con tolerancia 10^{-56}

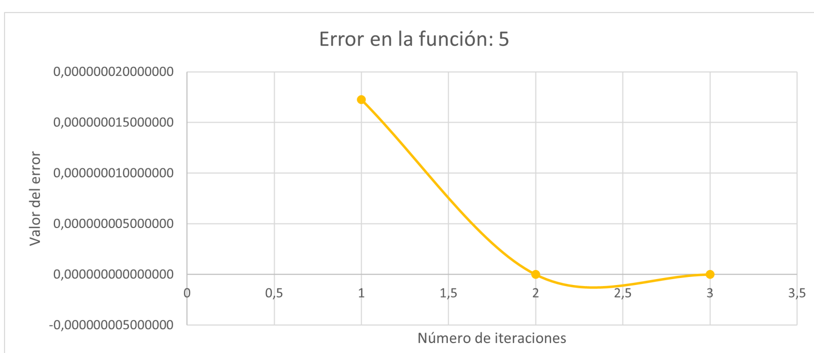

Figura 10: Gráfica de error en $f(x) = x^3 - 2x - 5$ con tolerancia 10^{-56}

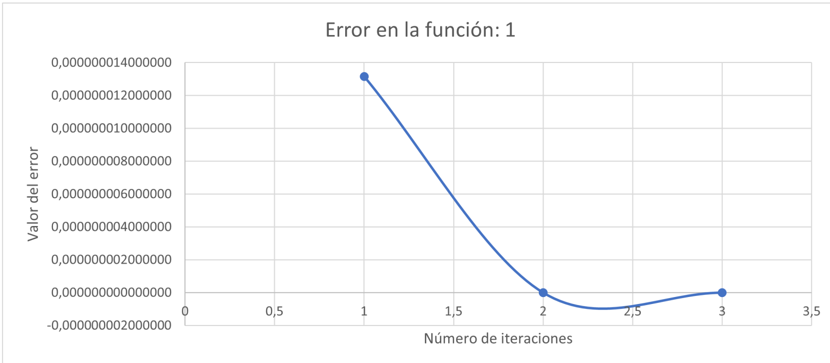

Figura 11: Gráfica de error en $f(x) = \cos^2(x) - x^2$ con tolerancia 10^{-32}

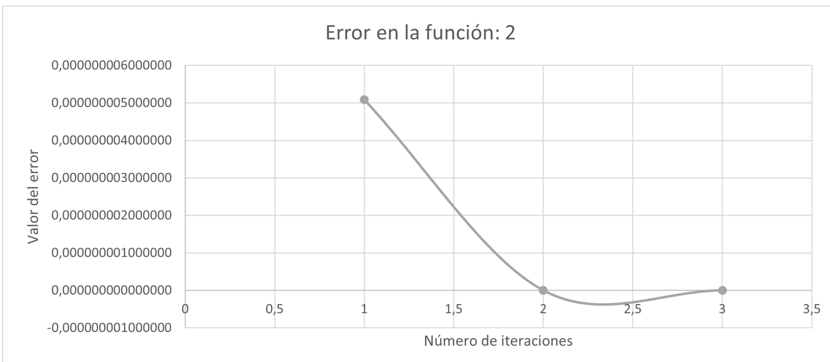

Figura 12: Gráfica de error en $f(x) = x\sin(x) - 1$ con tolerancia 10^{-32}

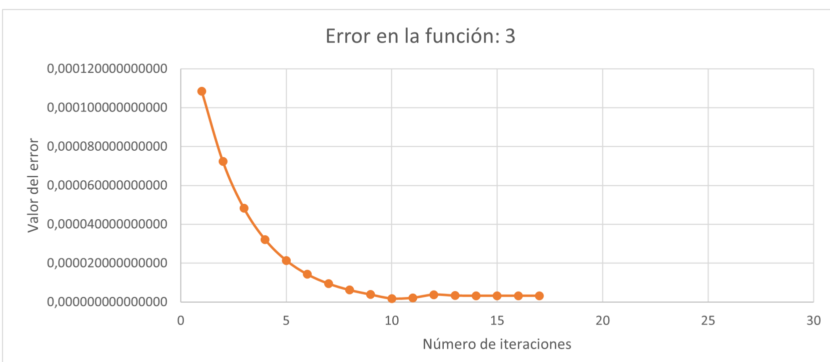

Figura 13: Gráfica de error en $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$ con tolerancia 10^{-32}

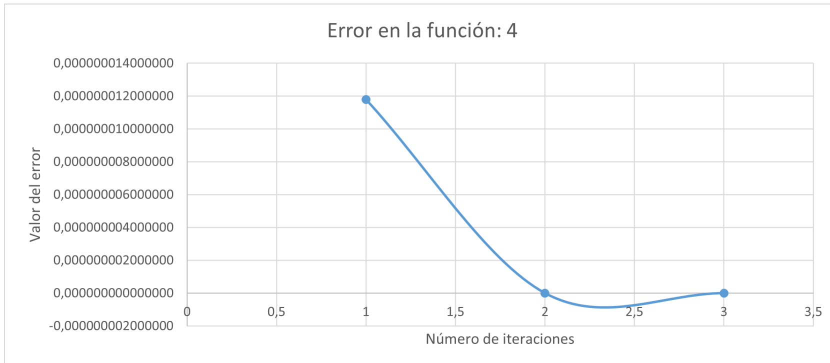

Figura 14: Gráfica de error en $0 = \frac{gm}{w}(1 - e^{-(w/m)t}) - v$ con tolerancia 10^{-32}

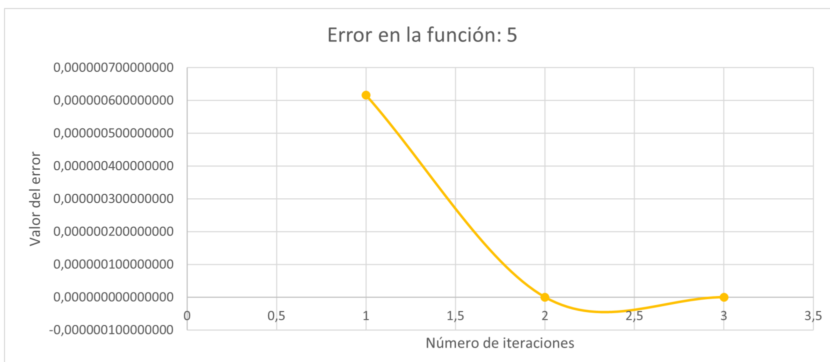

Figura 15: Gráfica de error en $f(x) = x^3 - 2x - 5$ con tolerancia 10^{-32}

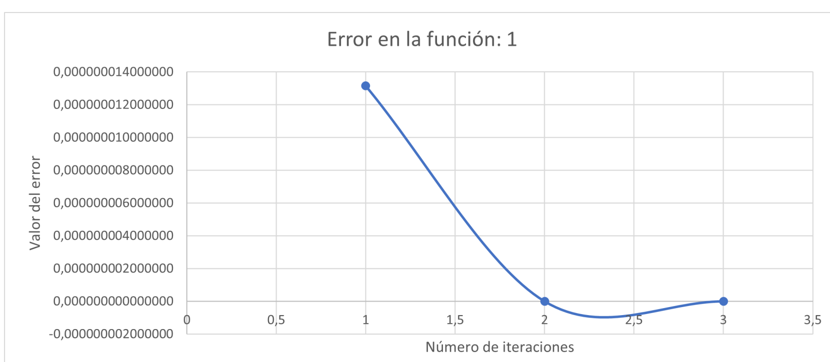

Figura 16: Gráfica de error en $f(x) = \cos^2(x) - x^2$ con tolerancia 10^{-16}

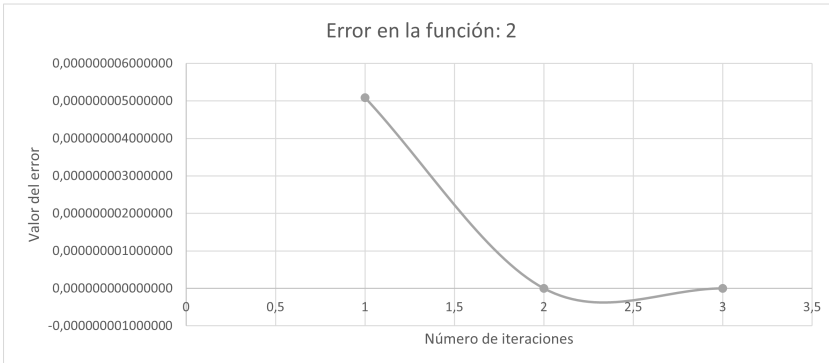

Figura 17: Gráfica de error en $f(x) = x\sin(x) - 1$ con tolerancia 10^{-16}

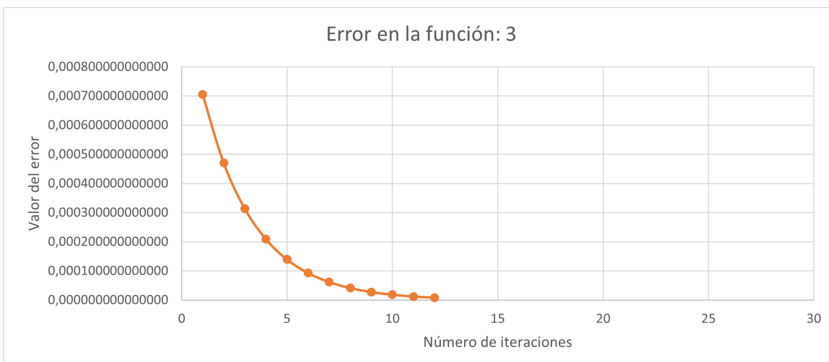

Figura 18: Gráfica de error en $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$ con tolerancia 10^{-16}

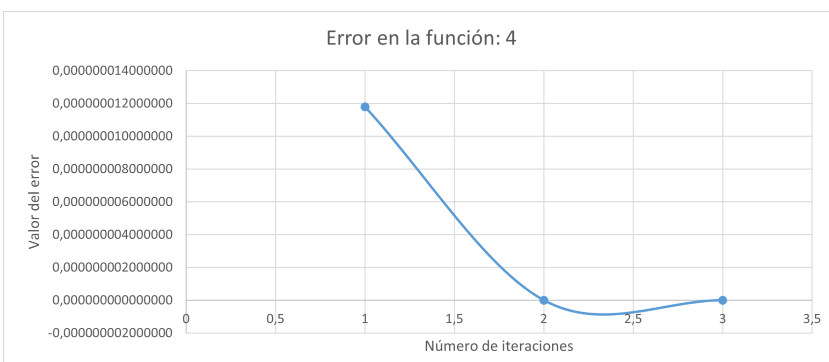

Figura 19: Gráfica de error en $0 = \frac{gm}{w}(1 - e^{-(w/m)t}) - v$ con tolerancia 10^{-16}

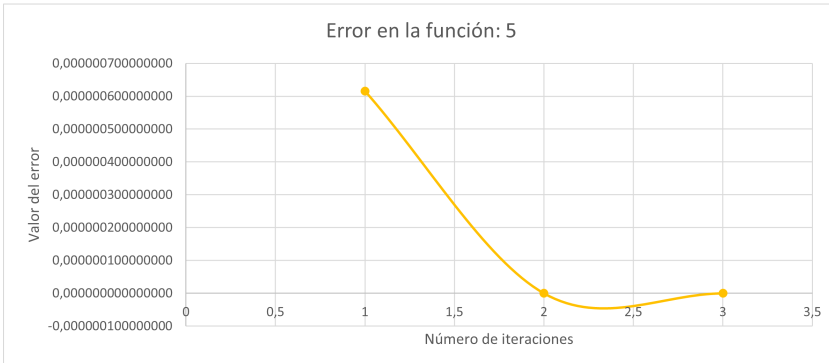

Figura 20: Gráfica de error en $f(x) = x^3 - 2x - 5$ con tolerancia 10^{-16}

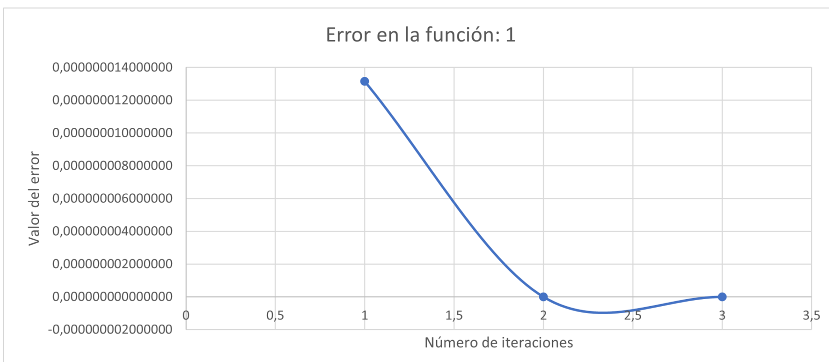

Figura 21: Gráfica de error en $f(x) = \cos^2(x) - x^2$ con tolerancia 10^{-8}

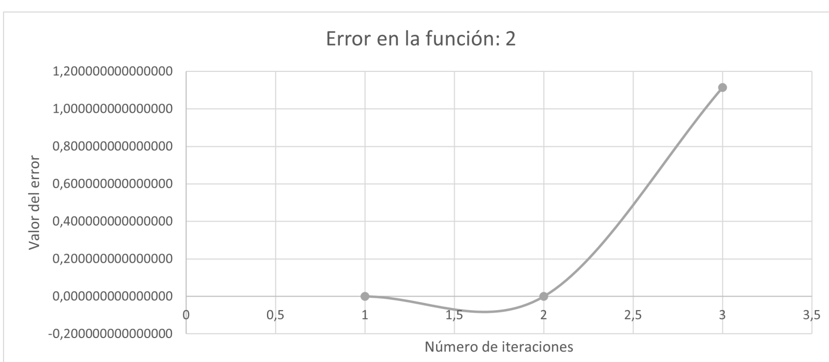

Figura 22: Gráfica de error en $f(x) = x\sin(x) - 1$ con tolerancia 10^{-8}

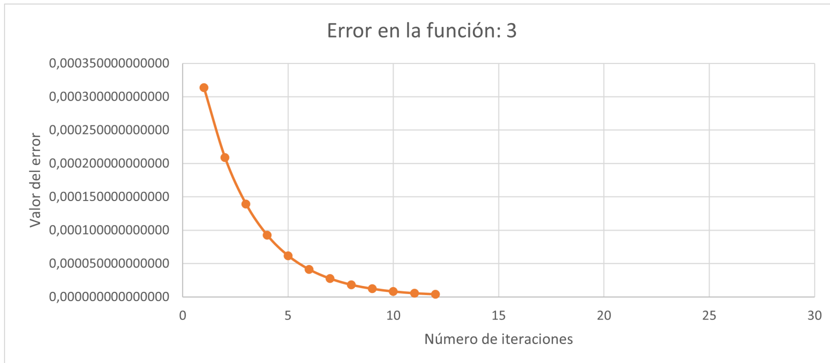

Figura 23: Gráfica de error en $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$ con tolerancia 10^{-8}

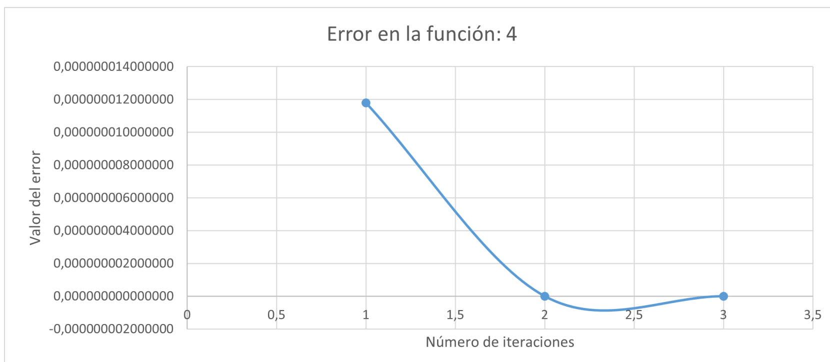

Figura 24: Gráfica de error en $0 = \frac{gm}{w}(1 - e^{-(w/m)t}) - v$ con tolerancia 10^{-8}

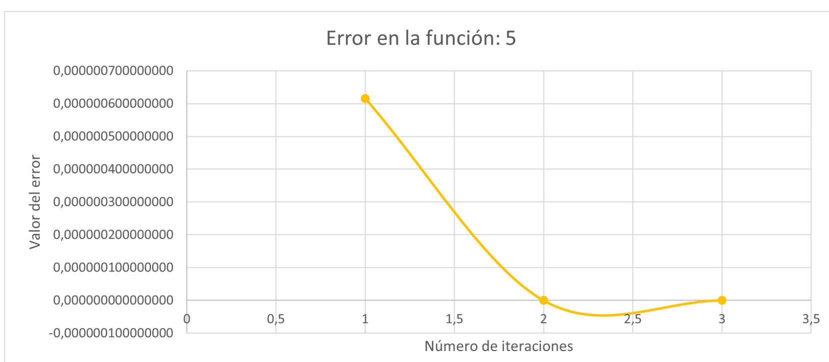

Figura 25: Gráfica de error en $f(x) = x^3 - 2x - 5$ con tolerancia 10^{-8}

2.11. ¿Como se comporta el método con respecto al de bisección?

Es un método mucho más eficiente en términos de iteraciones y significancia ya que presenta en general un número mucho mayor de iteraciones y una pérdida de significancia por el mismo motivo ya que a mayor cantidad de iteraciones mayor dispersión del error.
Para ejemplificar dicha situación se propuso comparar los métodos de bisección y Newton-Raphson entorno a los ejercicios anteriormente expuestos, estos fueron los resultados:

Cuadro 9: Identificadores de función

Id	Función
1	(cos(x))2̂ - x2̂
2	xsin(x) - 1
3	x3̂ - 2x2̂ + 4/3x - 8/27
4	((9.8*68.1)/x)*1-e(̂-(x/68.1)*10)-40
5	x3̂ - 2x - 5

Cuadro 10: Comparación entre el método de bisección y Newton-Raphson

Función	Resultados NR	Iteraciones NR	Resultados Bisección	Iteraciones Bisección
1	0,739085133215161	5	0,739085137844085	25
2	1,11415714087193	4	1,11415714025497	24
3	0,666669871	24	0,666669905	24
4	16,6483928252878	4	16,648392856121	24
5	2,09455148154233	4	2,09455150365829	24

2.12. ¿Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor?

Presenta una mayor aproximación en lo resultado, ya que este método tiene un acercamiento mucho más fácil a funciones complejas por el aumento de la potencia de los polinomios, pero al mismo tiempo combate con el error que acarrea la serie de Taylor de forma individual, así que consigue un resultado más óptimo en comparación.