UFC – UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CAMPUS SOBRAL

Curso de Engenharia da Computação

Disciplina: Algoritmos em Grafos

Teorema de Fluxo Máximo Corte Mínimo

Equipe:

Gerônimo Pereira Aguiar - 385145

Pedro Renoir Silveira Sampaio - 389113

Samuel Hericles - 389118

Sobral - CE 2019.2

Cortes mínimos:
Antes de introduzir a definição de corte introduz-se o conceito de corte de partição, para depois relacionar estes conceitos com o de conjunto de vértices que separam s de t.
Para dois quaisquer conjuntos de vértices X e Y da rede N, <X,Y> representa todos os arcos de N dirigidos de um vértice de X para um vértice de Y.

Definição 1.1: Sejam G um grafo e X1 e X2 conjuntos que formam uma partição dos vértices de G, V(G). O conjunto de todas as arestas que têm início em X1 e fim em X2, <X1,X2>, é designado por corte de partição de G.

Definição 1.2: Sejam N uma rede básica com fonte s e destino t, Vs e Vt conjuntos que formam uma partição de V(N) , tais que s pertence a Vs e t pertence Vt. O conjunto de todos os arcos dirigidos de um vértice de Vs para um vértice de Vt, <Vs,Vt>, é designado de corte da rede N.
Por outras palavras, um corte é um conjunto de arcos que, removidos, separam a rede em duas partes disjuntas: Vs, contendo S, e Vt, contendo t.
Para qualquer rede N, um arco do conjunto O(s) é um elemento do corte <{s}, V(N) - {s}> e um em I(t) é um elemento do corte <V(N) - {t}, {t}>. Analogamente, um arco de I(s) é um elemento do corte <V(N) - {s}, {s}> e um em O(t) é um elemento do corte <{t},V(N) - {t}>. Repare-se que estes dois últimos cortes são conjuntos vazios.

Proposição 1.3: Seja <Vs,Vt> um corte de uma rede N. Todos os arcos dirigidos de caminhos - st contêm pelo menos um arco em <Vs,Vt>.

Proposição 1.4: Sejam f um fluxo de uma rede N e < Vs,Vt > um corte de N, então:

$$val(f) = \sum_{e \in < Vs, Vt >} f(e) - \sum_{e \in < Vt, Vs >} f(e)$$

Definição 1.5: A capacidade de um corte <Vs,Vt>, que se denota por cap <Vs,Vt>, é a soma das capacidades dos arcos do corte <Vs,Vt>, ou seja:

$$cap < Vs, Vt > = \sum_{e \in < Vs, Vt >} cap(e)$$

Definição 1.6: O corte mínimo de uma rede N é o corte com menor capacidade.

Problema do máximo fluxo e corte mínimo:
Depois de se ter introduzido o conceito de corte, retoma-se o problema de encontrar o fluxo máximo de uma rede. A relação entre fluxos e cortes surge da observação seguinte: o valor de qualquer fluxo menor ou igual a capacidade de qualquer corte.

Com a proposição seguinte obtém-se um limite superior para o problema do fluxo máximo.

Proposição 2.1: Sejam f um fluxo qualquer numa rede N e < Vs,Vt> um corte, então:

$$val(f) \leq cap < Vs, Vt >$$

Corolário 2.2: Sejam f* um fluxo máximo de uma rede N e K* um corte mínimo de N, então:

$$val(f*) \leq cap(K*)$$

Corolário 2.3: Sejam f um fluxo, K um corte de uma rede N e suponha-se que val(f) = cap(K), então o fluxo f é um fluxo máximo e K é um corte mínimo da rede N.

Corolário 2.4: Sejam <Vs,Vt> um corte de uma rede N e f um fluxo tal que:

$f(e) = cap(e)\ se\ e \in < Vs, Vt >$ e $f(e) = 0\ se\ e \in < Vt, Vs >$

Então f é o fluxo máximo da rede N e <Vs,Vt> é o corte mínimo.