

Cortes mínimos:

Antes de introduzir a definição de corte introduz-se o conceito de corte de partição, para depois relacionar estes conceitos com o de conjunto de vértices que separam s de t .

Para dois quaisquer conjuntos de vértices X e Y da rede N , $\langle X, Y \rangle$ representa todos os arcos de N dirigidos de um vértice de X para um vértice de Y .

Definição 1.1: Sejam G um grafo e X_1 e X_2 conjuntos que formam uma partição dos vértices de G , $V(G)$. O conjunto de todas as arestas que têm início em X_1 e fim em X_2 , $\langle X_1, X_2 \rangle$, é designado por corte de partição de G .

Definição 1.2: Sejam N uma rede básica com fonte s e destino t , V_s e V_t conjuntos que formam uma partição de $V(N)$, tais que s pertence a V_s e t pertence V_t . O conjunto de todos os arcos dirigidos de um vértice de V_s para um vértice de V_t , $\langle V_s, V_t \rangle$, é designado de corte da rede N .

Por outras palavras, um corte é um conjunto de arcos que, removidos, separam a rede em duas partes disjuntas: V_s , contendo s , e V_t , contendo t .

Para qualquer rede N , um arco do conjunto $O(s)$ é um elemento do corte $\langle \{s\}, V(N) - \{s\} \rangle$ e um em $I(t)$ é um elemento do corte $\langle V(N) - \{t\}, \{t\} \rangle$. Analogamente, um arco de $I(s)$ é um elemento do corte $\langle V(N) - \{s\}, \{s\} \rangle$ e um em $O(t)$ é um elemento do corte $\langle \{t\}, V(N) - \{t\} \rangle$. Repare-se que estes dois últimos cortes são conjuntos vazios.

Proposição 1.3: Seja $\langle V_s, V_t \rangle$ um corte de uma rede N . Todos os arcos dirigidos de caminhos s - t contêm pelo menos um arco em $\langle V_s, V_t \rangle$.

Proposição 1.4: Sejam f um fluxo de uma rede N e $\langle V_s, V_t \rangle$ um corte de N , então:

$$val(f) = \sum_{e \in \langle V_s, V_t \rangle} f(e) - \sum_{e \in \langle V_t, V_s \rangle} f(e)$$

Definição 1.5: A capacidade de um corte $\langle V_s, V_t \rangle$, que se denota por $cap \langle V_s, V_t \rangle$, é a soma das capacidades dos arcos do corte $\langle V_s, V_t \rangle$, ou seja:

$$cap \langle V_s, V_t \rangle = \sum_{e \in \langle V_s, V_t \rangle} cap(e)$$

Definição 1.6: O corte mínimo de uma rede N é o corte com menor capacidade.

Problema do máximo fluxo e corte mínimo:

Depois de se ter introduzido o conceito de corte, retoma-se o problema de encontrar o fluxo máximo de uma rede. A relação entre fluxos e cortes surge da observação seguinte: o valor de qualquer fluxo menor ou igual a capacidade de qualquer corte.

Com a proposição seguinte obtém-se um limite superior para o problema do fluxo máximo.

Proposição 2.1: Sejam f um fluxo qualquer numa rede N e $\langle V_s, V_t \rangle$ um corte, então:

$$val(f) \leq cap \langle V_s, V_t \rangle$$

Corolário 2.2: Sejam f^* um fluxo máximo de uma rede N e K^* um corte mínimo de N , então:

$$val(f^*) \leq cap(K^*)$$

Corolário 2.3: Sejam f um fluxo, K um corte de uma rede N e suponha-se que $val(f) = cap(K)$, então o fluxo f é um fluxo máximo e K é um corte mínimo da rede N .

Corolário 2.4: Sejam $\langle V_s, V_t \rangle$ um corte de uma rede N e f um fluxo tal que:

$$f(e) = cap(e) \text{ se } e \in \langle V_s, V_t \rangle \text{ e } f(e) = 0 \text{ se } e \in \langle V_t, V_s \rangle$$

Então f é o fluxo máximo da rede N e $\langle V_s, V_t \rangle$ é o corte mínimo.