

CE017 - ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

NOTAS DE AULA

Estas Notas de Aula têm apenas o objetivo de facilitar o trabalho do aluno em sala de aula na parte de anotação do conteúdo exposto pelo professor e com isto se ganha tempo na exposição dos temas. De maneira nenhuma substitui a bibliografia abaixo referenciada. As Notas de Aula seguem de muito perto a bibliografia citada, que são os verdadeiros livros textos deste curso, sugere-se a sua aquisição.

Prof. Anselmo Chaves Neto

BIBLIOGRAFIA

- [1] Box, G. E. P. & Jenkins, G. M – Time Series Analysis, forecasting and control, ed. Holden Day, 1976.
- [2] Morettin, P. A. & Toloi, C. M. de C. – Previsão de Séries Temporais, Atual Editora, 1978.
- [3] Makridakis, S. et alli – Forecasting: Methods and Aplications, J. Willey & Sons, 1978.
- [4] Anderson, T. W. - Time Series Analysis, John Willey & Sons, 1971.
- [5] Enders, W. – Applied Econometric Time Series, John Wiley & Sons, Inc. Toronto.

CONTEÚDO

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUÇÃO | 3 |
| 1.1 - Definição e Exemplos de Séries Temporais | 3 |
| 1.2 – Metodologias | 4 |
| A) Era pré-Box & Jenkins (décadas de 30 e 40) | 4 |
| B) Métodos Automáticos ou “caixa-preta” (década de 60) | 5 |
| C) Modelos Box & Jenkins (1970) | 5 |
| D) Era pós Box & Jenkins (1970) | 5 |
| 2. METODOLOGIA BOX & JENKINS | 6 |
| 2.1 – Conceitos Iniciais | 6 |
| 2.2 – Fases da Metodologia Box & Jenkins | 9 |
| 2.3 – Parâmetros de um processo estocástico | 9 |
| 2.4- Operadores | 11 |
| 2.5- Modelo de filtro linear para séries temporais | 11 |
| 2.6- Modelos auto-regressivos | 12 |
| 2.7.1 – Equações de Yule-Walker | 14 |
| 2.7.2 – Método Recursivo Para Cálculo de Parâmetros Auto-regressivos | 17 |
| 2.7.3 – Variância e Erro Padrão das Estimativas da FAC e FACP | 17 |
| 2.8 Modelos Médias Móveis (MA(q)) | 21 |
| 2.9- Processos Mistos (ARMA(p,q)) | 22 |
| 2.10- Condições de Estacionariedade e Invertibilidade | 22 |
| 2.10.1- Estacionariedade e Invertibilidade de um Processo Linear | 22 |
| 2.10.2- Estacionariedade dos Modelos AR(p) e Invertibilidade dos Modelos MA(q) | 26 |
| 2.11- Modelos ARIMA(p,d,q) | 28 |
| 2.11.1- Série Não Estacionária Homogênea | 28 |
| 2.11.2- Estrutura dos Modelos ARIMA(p,d,q) | 29 |
| 2.11.3- Identificação da Estrutura de Proc. Modelados por ARIMA(p,d,q) | 31 |
| 2.11.4- Estimação dos Parâmetros dos Modelos ARIMA(p,d,q) | 38 |
| 2.12- Verificação da Validade do Modelo: Testes | 43 |
| 2.12.1 – Teste da Sobrefixação | 43 |
| 2.12.2 – Teste de Comparação das Autocorrelações | 44 |
| 2.12.3 – Testes Aplicados aos Resíduos | 44 |
| 2.13- Previsão: Formas de Previsão | 49 |
| 2.14- Séries Temporais Sazonais | 52 |
| 2.14.1- Modelos MA(Q) Puramente Sazonais | 52 |
| 2.14.2- Modelos AR(P) Puramente Sazonais | 52 |
| 2.14.3- Modelos ARIMA Multiplicativos | 53 |
| 3. MODELOS DE DECOMPOSIÇÃO: Tendência e sazonalidade | 55 |
| 3.1 – Introdução | 55 |
| 3.2 – Tendência | 55 |
| 3.3 – Sazonalidade | 58 |
| 4. MODELOS DE AMORTECIMENTO EXPONENCIAL | 60 |
| 4.1 – Introdução | 60 |
| 4.2- Modelos para um Processo Constante | 60 |
| 4.2.1- Médias Móveis Simples (MMS) | 60 |
| 4.2.2- Amortecimento Exponencial para um Processo Constante | 61 |
| 4.3- MODELOS PARA SÉRIES QUE APRESENTAM TENDÊNCIA | 64 |
| 4.3.1- Alisamento Exponencial de Brown | 64 |
| 4.4 ALIZAMENTO EXPONENCIAL SAZONAL DE HOLT-WINTERS | 69 |

INTRODUÇÃO

1.1 - Definição e Exemplos de Séries Temporais

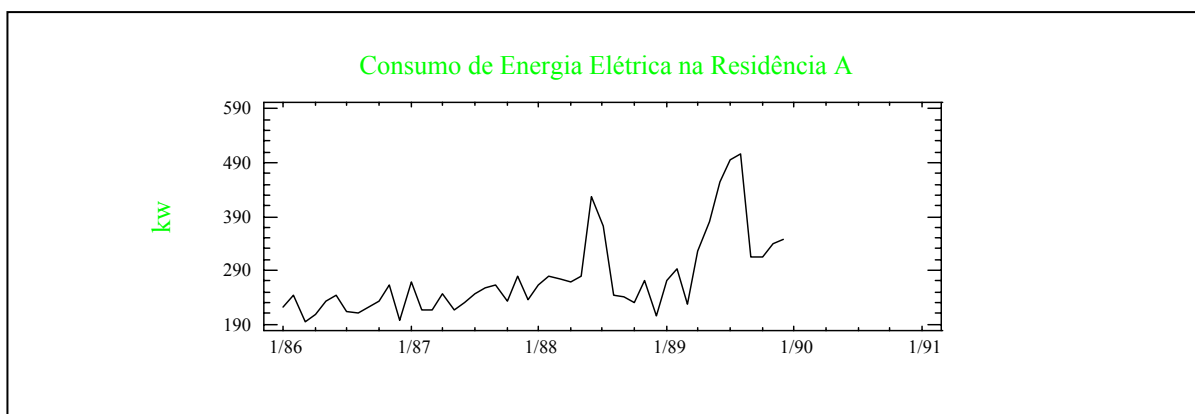
SÉRIE TEMPORAL é um conjunto de observações geradas sequencialmente no tempo e que apresentam uma dependência serial entre elas. Se o conjunto é contínuo, a série temporal é dita **contínua** e se o conjunto é discreto, a série é dita **discreta**.

Pode ser representada por: $\{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_t, \dots, Z_{n-1}, Z_n\}$ ou como a série $\{Z_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ e consideraremos aqui séries onde as observações são feitas no mesmo intervalo de tempo fixado h.

EXEMPLO 1:

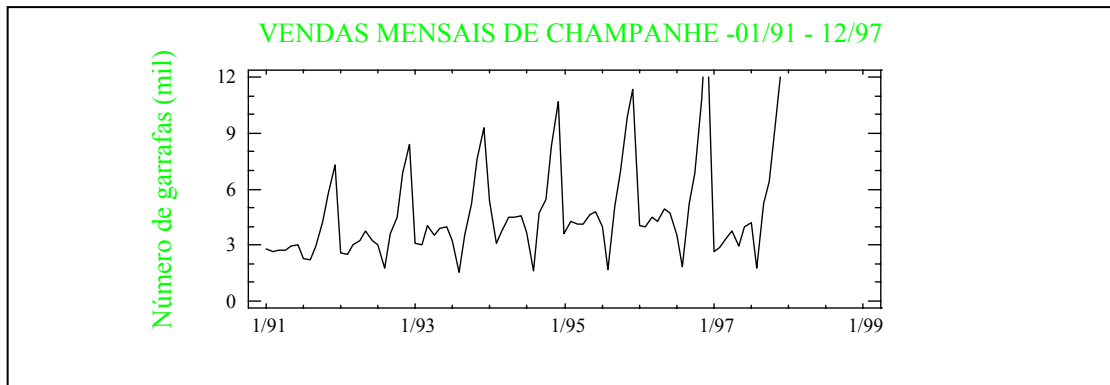
CONSUMO DE ENERGIA ELÉTRICA EM UMA RESIDÊNCIA NO PERÍODO de 01/1986 a 12/1989

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| Mês | 86.1 | 86.2 | 86.3 | 86.4 | 86.5 | 86.6 | 86.7 | 86.8 | 86.9 | 86.10 | 86.11 | 86.12 | 87.1 | |
| Consumo kWh | 222 | 243 | 194 | 207 | 233 | 243 | 214 | 210 | 222 | 232 | 263 | 196 | 267 | |
| Mês | 87.2 | 87.3 | 87.4 | 87.5 | 87.6 | 87.7 | 87.8 | 87.9 | 87.10 | 87.11 | 87.12 | 88.1 | 88.2 | 88.3 |
| Consumo | 216 | 217 | 246 | 216 | 231 | 245 | 256 | 262 | 233 | 279 | 234 | 263 | 280 | 273 |
| Mês | 88.4 | 88.5 | 88.6 | 88.7 | 88.8 | 88.9 | 88.10 | 88.11 | 88.12 | 89.1 | 89.2 | 89.3 | 89.4 | 89.5 |
| Consumo kWh | 268 | 279 | 427 | 371 | 243 | 240 | 230 | 270 | 206 | 270 | 293 | 226 | 326 | 381 |
| Mês | 89.6 | 89.7 | 89.8 | 89.9 | 89.10 | 89.11 | 89.12 | | | | | | | |
| Consumo kWh | 454 | 496 | 506 | 316 | 339 | 348 | | | | | | | | |



EXEMPLO 2: Venda mensal de garrafas de champanhe da Vinícola V.

2.815 2.672 2.755 2.721 2.946 3.036 2.282 2.212 2.922 4.301 5.764 7.312 2.541
2.475 3.031 3.266 3.776 3.230 3.028 1.759 3.595 4.474 6.838 8.357 3.113 3.006
4.047 3.523 3.937 3.986 3.260 1.573 3.528 5.211 7.614 9.254 5.375 3.088 3.718
4.514 4.52 4.539 3.663 1.643 4.739 5.428 8.314 10.651 3.633 4.292 4.154 4.121
4.647 4.753 3.965 1.723 5.048 6.922 9.858 11.331 4.016 3.957 4.510 4.276 4.968
4.677 3.523 1.821 5.222 6.872 10.803 13.916 2.639 2.899 3.370 3.740 2.927 3.986
4.217 1.738 5.221 6.424 9.842 13.076



EXEMPLO 3: São também séries temporais:

- Índices diários da Bolsa de Valores de S. Paulo (Índice Bovespa) (série discreta);
- Vazão em determinada seção de um rio (série contínua);
- Índice Nacional de Preços ao Consumidor (mensal) (série discreta);
- Saldo mensal da balança de pagamentos do Brasil (série discreta);
- Registros da altura da maré no cais do porto de Paranaguá (série contínua); etc.

É importante observar-se que muitas vezes séries temporais discretas são obtidas por amostragem de uma série temporal contínua. Assim, observando-se a altura das marés em intervalos de tempo iguais (de hora em hora, p.ex.) tem-se uma série temporal discreta. Séries temporais discretas, também são obtidas acumulando-se a variável em um período de tempo. Um exemplo é uma série de chuva, cuja variável é observada em milímetros por dia, mês ou ano.

Os objetivos da Análise de Séries Temporais são:

- Fazer previsão de valores futuros da série;
- Descrever apenas o comportamento da série (verificação de tendência e sazonalidade);
- Identificar o mecanismo gerador da série.

1.2 – Metodologias

A) Era pré-Box & Jenkins (décadas de 30 e 40)

Nesta época considerava-se a S.T. $\{Z_t, t = 1, 2, 3, \dots, n\}$ como composta por 4 componentes, não observáveis e distintas: T_t (tendência), S_t (sazonalidade), C_t (ciclo) e ruído aleatório (a_t), ou seja, $Z_t = f(T_t, S_t, C_t, a_t)$. As formas de decomposição dessas componentes são:

Modelo aditivo: $Z_t = T_t + S_t + C_t + a_t$

Modelo multiplicativo: $Z_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot a_t$

Modelo misto: $Z_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t + a_t$

H. O. Wold em 1938 mostrou que qualquer série temporal Z_t discreta poderia ser representada por modelos AR (auto-regressivos) e MA (médias móveis). Porém, só foi

possível a implementação destes métodos na década de 60 com o advento dos computadores de 2ª geração (transistor). O resultado de Wold faz parte de uma abordagem mais geral de processos estocásticos desenvolvida entre outros por Kolmogorov, Wiener e Whittle.

B) Métodos Automáticos ou “caixa-preta” (década de 60)

São as metodologias que podem ser programadas no computador e que requerem pouquíssima intervenção do analista. Correspondem a métodos de ajustamento de curvas com parâmetros sequencialmente atualizados no tempo. São exemplos dessas metodologias:

Regressão (linear simples, múltipla);
Modelos de médias móveis;
Métodos de amortecimento (alisamento) exponencial.

Os métodos de amortecimento exponencial constituem a formulação mais popular desta categoria, e podemos citar os seguintes:

Método de Brown (para série temporal não sazonal)
Método de Winters (para série temporal sazonal)
Método de Souza & Epprecht (para série temporal sazonal ou não).

Makridakis fez em 1979 uma competição com 101 séries temporais e depois em 1982 repetiu a competição com 1001 séries temporais. Os métodos automáticos tiveram, na média, o melhor desempenho dentre todos os métodos.

C) Modelos Box & Jenkins (1970)

A metodologia Box & Jenkins é, sem dúvida, o mais importante trabalho na área de Previsão de Séries Temporais. Foi esse estudo o responsável pelo grande desenvolvimento e a correspondente formalização da área de estudo de Séries Temporais. O trabalho dos pesquisadores Box & Jenkins foi baseado no importante resultado de Wold (1938) *“qualquer série temporal pode ser representada por uma estrutura de médias móveis infinita”* ou melhor *“qualquer processo estocástico estacionário Y_t pode ser representado como a soma de dois processos mutuamente inter-relacionados, $Y_t = D_t + A_t$, onde D_t é linearmente determinístico (sistemático) e A_t é um processo Médias Móveis infinito ($MA(\infty)$)”*. A parte determinística pode ser uma função exata do tempo, como por exemplo, $D_t = A \cos(\omega_t)$ que descreve uma oscilação senoidal ao longo do tempo. O caso mais simples para D_t é quando se tem $D_t = \mu$. Box & Jenkins em 1970 propuseram uma classe geral de modelos lineares conhecida como ARIMA (autoregressive integrated moving average) para a série temporal $\{Z_t, t = 1, 2, 3, \dots, n\}$.

D) Era pós Box & Jenkins (1970)

Surgiram várias outras técnicas, tais como:

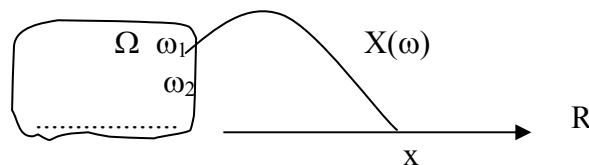
- Filtro adaptativo;
- Método Forsys;

- Método Ararma;
- Combinações de previsões;
- etc.

2. METODOLOGIA BOX & JENKINS

2.1 – Conceitos Iniciais

- **VARIÁVEL ALEATÓRIA (def.):** - uma v.a. X em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) é uma função real definida no espaço amostral Ω tal que o evento $\omega = [X \leq x]$ é um evento aleatório $\forall x \in \mathbb{R}$, isto é $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma v.a. se $\omega = [X \leq x] \in \mathcal{A} \forall x \in \mathbb{R}$.



Exercício 1: Suponha uma família com duas crianças e o possível sexo de cada criança.

- a) Escreva o espaço amostral, conjunto de todos os resultados possíveis das duas crianças quanto ao sexo;

$$\Omega = \{(\text{M}, \text{M}), (\text{M}, \text{F}), (\text{F}, \text{M}), (\text{F}, \text{F})\}$$

- b) Escreva os números possíveis de meninas na família;

$$X(\omega) = x \in \{0, 1, 2\}$$

- c) Calcule a probabilidade de cada um desses números ocorrer;

$$P(X = 0) = \quad ; P(X = 1) = \quad ; P(X = 2) = \quad$$

- d) Monte uma tabela contendo o contradomínio da v.a. que conta o número de meninas na família e a probabilidade associada a cada valor do contradomínio;

| $X(\omega) = x$ | $P(X = x)$ | $F(x) = P(X \leq x)$ |
|-----------------|------------|----------------------|
| | | |
| | | |
| | | |
| Total | | |

- e) Como se chamam, em conjunto, os números do contradomínio e as probabilidades associadas a ele? R. Distribuição de Probabilidades.

- **PROCESSO ESTOCÁSTICO (def.):** - um processo estocástico $Z(\omega, t)$ (função de duas variáveis ω e t) é uma família $Z = \{Z_t, t = 1, 2, 3, \dots, n\}$ tal que, para cada t , Z_t é uma v.a.

Exercício 2: Faça um esboço onde apareçam algumas das possíveis realizações de um processo estocástico.

Desta forma processo estocástico é interpretado como uma **família de trajetórias ou realizações** para **cada evento ω fixado**, ou melhor, para cada $\omega \in \Omega$ fixado, obteremos

uma função de t , ou seja, uma trajetória ou realização do processo. O conjunto $\{Z_t, t \in T\}$ é chamado ESPAÇO DOS ESTADOS e os valores Z_t são chamados ESTADOS. Dado o espaço de estados $\{Z_t, t \in T\}$ com T sendo um conjunto finito ou enumerável, o processo é chamado de **processo com parâmetro discreto**. Se T for infinito não enumerável (um intervalo de R) tem-se um processo com parâmetro contínuo. Então, o espaço de estados pode ser discreto ou contínuo. No primeiro caso Z_t pode ser uma contagem, por exemplo, venda mensal de automóveis por uma empresa e no segundo caso pode representar uma medida que varia continuamente como, por exemplo, a temperatura da cidade de Curitiba. O estudo de Processos Estocásticos é uma das partes mais importantes da Ciência Estatística. Esta parte da Ciência Estatística foi desenvolvida, ao longo da história, por Poisson (Processo de Poisson), Kolmogorov (resultados das Cadeias de Markov), Markov (Cadeias de Markov), Doob (Martingales) e outras pessoas que dedicaram muito do seu tempo ao estudo desses problemas.

- **SÉRIE TEMPORAL (def.):**- uma série temporal Z_t é uma realização do processo estocástico $Z(\omega, t)$, onde $t \in T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$ com $t_i - t_j = h \quad \forall i \neq j$, é o tempo.

Exercício 3: Faça um esboço onde apareça uma série temporal.

OBS. Fica claro na figura do exercício anterior que se tem apenas uma observação de cada v.a. Z_t .

- **PROCESSO ESTOCÁSTICO ERGÓDICO**

A caracterização completa de um P.E. exige o conhecimento de todas as suas funções amostras (realizações, trajetórias). Isto permite determinar a função média, $\mu(t)$, e a função de autocorrelação, $\rho(t)$ do processo. Mas para alguns P. E's. estes parâmetros podem ser determinados a partir de apenas uma realização (função amostra) típica do processo. Este é um **processo ergódico**.

- **PROCESSO ESTOCÁSTICO ESTACIONÁRIO NO SENTIDO AMPLO (fraco)**

Seja um P.E. $Z(\omega, t)$ e considere os n instantes t_1, t_2, \dots, t_n , pertencentes ao conjunto de instantes T , se para qualquer número n de v.a's Z_1, Z_2, \dots, Z_n a função média $\mu(t) = E[Z_t] = \mu \quad \forall t \in T$, $E[Z_t^2] < \infty$ (implicando em variância finita) e a função de autocovariância $\gamma(t_1, t_k) = E[(Z_{t_1+k} - \mu)(Z_{t_1} - \mu)] = \gamma_k$ é uma função somente do intervalo $t+k - t$, então o P.E. é chamado de estacionário no sentido amplo.

- **SÉRIE TEMPORAL ESTACIONÁRIA (no sentido amplo)**

Uma série temporal é dita estacionária quando tem média e variância constantes e a função de autocovariância entre dois períodos distintos depende apenas da defasagem de tempo entre os períodos, ou melhor:

- $E(Z_t) = \mu$; $E(Z_t - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty$ e $E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu) = \gamma_k \quad \forall t \in T$
(autocovariância de ordem k)

- **PROCESSO ESTOCÁSTICO ESTACIONÁRIO NO SENTIDO ESTRITO (forte)**

Seja um P.E. $Z(\omega, t)$ e considere os n instantes t_1, t_2, \dots, t_n , pertencentes ao conjunto de instantes T , se para uma defasagem no índice t de valor m obtém-se a f.d. conjunta $F(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n}) = F(Z_{t_1+m}, Z_{t_2+m}, \dots, Z_{t_n+m})$ então o P.E. é estacionário no sentido estrito.

OBS. É importante considerar que um processo estacionário apenas na média é chamado de estacionário de 1ª ordem, $E(Z_t) = \mu \quad \forall t \in T$, e um processo estacionário no sentido amplo é também chamado de estacionário de 2ª ordem.

- **PROCESSO ESTOCÁSTICO GAUSSIANO**

Seja um P.E. $Z(\omega, t)$ e considere os n instantes t_1, t_2, \dots, t_n , pertencentes ao conjunto de instantes T , o processo $Z(\omega, t)$ é chamado Gaussiano se, para qualquer conjunto t_1, t_2, \dots, t_n de T , as v.a's $Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n}$ têm distribuição normal n -variada. Se um processo estocástico for Gaussiano ele será determinado pelas médias e covariâncias e se ele for estacionário de 2ª ordem será estritamente estacionário.

Quando se pretende aplicar modelos para descrever séries temporais é necessário introduzir suposições simplificadoras e que levam à análise de determinadas classes de processos estocásticos. Desta forma os processos estocásticos podem ser classificados em:

1. Processos estocásticos estacionários ou não estacionários, se ocorrer ou não independência em relação à origem dos tempos;
2. Processos Gaussianos ou não Gaussianos conforme as f.d.p's que caracterizam os processos;
3. Processos Markovianos ou não Markovianos, se em dado instante, ocorra (ou não) independência dos valores do processo de seus valores em instantes precedentes;
4. Processos Lineares são os processos estocásticos estacionários e ergódicos, e que se caracterizam por poderem ser representados por uma combinação linear das v.a's. Nesta classe se encontram os seguintes processos: puramente aleatórios (ruído branco), autoregressivos (AR), médias móveis (MA) e mistos (ARMA). Entende-se por ruído branco (ou passeio aleatório) se $Z_t = \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad \forall t$.

OBS. Um processo Z_t é estacionário se ele se desenvolve no tempo de modo que a escolha de uma origem dos tempos não é importante, ou seja, as características de Z_t são as mesmas que de $Z_{t+k} \quad \forall k$.

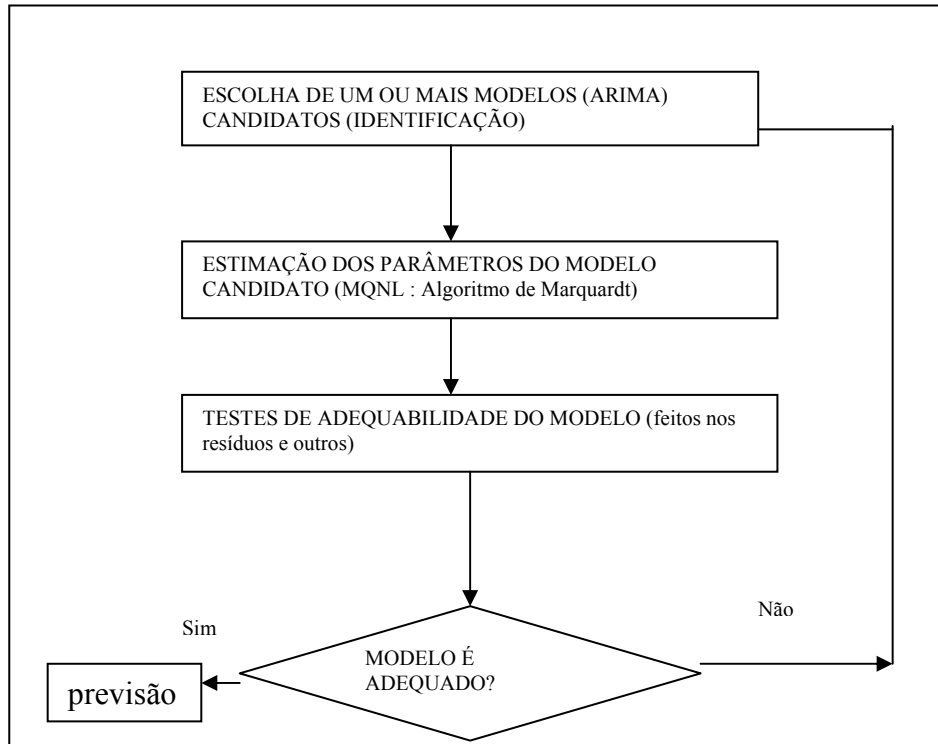
Os **modelos para séries temporais** podem ser de dois tipos: **paramétricos, ou seja, com o número de parâmetros finito e não paramétricos que envolvem um número de parâmetros infinito**. Do tipo paramétrico podem ser citados: modelos de erro (regressão), os modelos auto-regressivos-médias móveis (ARMA) e os modelos ARIMA. Já do tipo não paramétrico são a função de autocovariância (ou autocorrelação) e sua transformada de Fourier (o espectro). Quando se descreve a série no domínio da frequência se elimina o problema da correlação serial, pois na análise espectral os componentes são ortogonais.

2.2 – Fases da Metodologia Box & Jenkins

A metodologia Box & Jenkins é composta das seguintes fases:

- Identificação do modelo (estágio 1)
- Estimação do modelo (estágio 2)
- Verificação da adequação do modelo ou testes (estágio 3)

Exercício 4: Faça um fluxograma onde apareçam os vários estágios da metodologia Box & Jenkins.



2.3 – Parâmetros de um processo estocástico

- A MÉDIA do P.E. $Z(\omega, t)$ é representada por $\mu_z(t) = E[Z(t)] \quad \forall t \in T$ e se o P.E. é estacionário no sentido amplo (fraco) tem-se $\mu_z(t) = E[Z(t)] = \mu$. O estimador dessa média μ com base na série $\{Z_t, t = 1, 2, 3, \dots, n\}$ observada é a média da série

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{t=1}^n Z_t}{n}.$$

- A FUNÇÃO DE AUTOCOVARIANÇA (FACV) do P.E. $Z(\omega, t)$ representada por γ_k (para a ordem k) é o momento central conjunto das v.a's Z_t e Z_{t+k} , isto é:

$$\gamma_k = E[(Z_t - \mu(t))(Z_{t+k} - \mu(t+k))] \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

e se o P.E. é estacionário no sentido amplo, então $\gamma_k = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$

e o estimador desse parâmetro com base na série $\{Z_t, t=1,2,3, \dots, n\}$ observada é a estatística:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})$$

- **VARIÂNCIA DO P.E. ESTACIONÁRIO:** A variância do P.E. $Z(\omega, t)$, estacionário, representada por $E(Z_t - \mu)^2 = \sigma_z^2 = \gamma_0$ é obtida da função de autocovariância quando $k = 0$ e o seu estimador é $\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2 = \hat{\sigma}_z^2$
- **FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO (FAC) DO P.E. ESTACIONÁRIO:** A FAC do P.E. $Z(\omega, t)$ representada por ρ_k (para a ordem k) é a relação entre $\frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \rho_k$ e o seu estimador com base na série $\{Z_t, t = 1, 2, 3, \dots, n\}$ observada é

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})}{\sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2}$$

Exercícios 5

5.1) Dada à série temporal abaixo se pede:

- Um esboço do gráfico da série;
- A estimativa do parâmetro μ (média);
- A estimativa do parâmetro autocovariância de defasagem (lag) $k = 1$;
- A estimativa do parâmetro autocovariância de defasagem (lag) $k = 2$;
- A estimativa da variância do processo (série) σ_z^2 ;
- A estimativa da autocorrelação de defasagem (lag) $k = 1$;
- A estimativa da autocorrelação de defasagem (lag) $k = 2$;

| | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|
| T | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Z_t | 10 | 11 | 15 | 14 | 18 |

5.2) Você diria que ρ_k é a covariância das variáveis Z_t e Z_{t+k} padronizadas? Mostre isto.

5.3) Defina variável aleatória, processo estocástico e série temporal.

5.4) Defina processo estocástico ergódico e processo estocástico estacionário (no sentido amplo (fraco) e no sentido estrito (forte)).

5.5) Qual a diferença entre correlação serial e correlação simples? Exemplifique.

5.6) Dada a série temporal Z_t , a seguir, pede-se:

- a estimativa da autocovariância $\gamma_k = \text{cov}(Z_t, Z_{t-k})$ quando $k = 1$;
- a estimativa da autocorrelação ρ_k quando $k = 1$;

c) a estimativa da variância σ_z^2 ;

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Z_t | 20 | 30 | 35 | 36 | 40 | 42 | 45 | 46 | 50 | 52 | 54 | 60 | 62 | 66 | 70 | 72 | 76 | 78 | 80 | 84 | 85 | 88 | 90 | 92 | 95 | 97 |
| T | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |

5.7) Responda de forma clara e sucinta:

- quais as restrições, quanto aos dados, que você conhece na aplicação da Metodologia Box & Jenkins?
- descreva cada um dos estágios da Metodologia Box & Jenkins abaixo indicados:
 - o estágio da identificação;
 - o estágio da estimação;
 - o estágio da verificação da adequabilidade do modelo.

5.8) Escreva a matriz de autocovariâncias e a matriz de autocorrelação de um processo estacionário $\{Z_t, t=1,2,3, \dots, n\}$.

2.4- Operadores

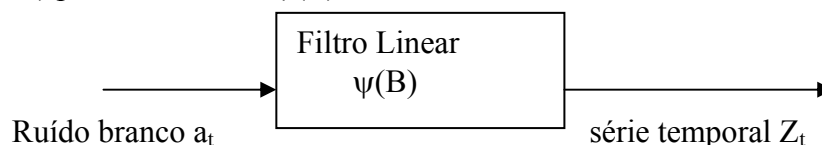
- OPERADOR DE RETARDO (translação ao passado) B é definido por $B^m Z_t = Z_{t-m}$ e quando $m = 1$ tem-se $BZ_t = Z_{t-1}$.
- OPERADOR DE AVANÇO (translação ao futuro) F é definido por $F^m Z_t = Z_{t+m}$ e quando $m = 1$ tem-se $FZ_t = Z_{t+1}$
- OPERADOR DIFERENÇA ∇ (nabla) é definido por $\nabla^d Z_t = (1 - B)^d Z_t$.

Exercício 6:

Demonstre que a expressão do operador diferença pode ser escrita na forma definida acima.

2.5- Modelo de filtro linear para séries temporais

Uma série temporal $\{Z_t, t = 1,2,3, \dots, n\}$ pode ser considerada como gerada por uma série de “choques” aleatórios independentes tomados de uma distribuição fixa, usualmente assume-se a distribuição $N(0, \sigma_a^2)$ e a sequência de v.a's $\{a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots\}$ é chamada processo ruído branco. O ruído branco a_t é suposto transformado no processo Z_t (série temporal) pelo filtro linear $\psi(B)$



A operação de filtragem linear consiste simplesmente de uma soma ponderada de ruídos

aleatórios tal que $Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i}$ com $\psi_0 = 1$

$$Z_t = \mu + (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) a_t \text{ e } Z_t = \mu + \psi(B) a_t$$

O parâmetro μ é o **nível do processo** e o polinômio $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$

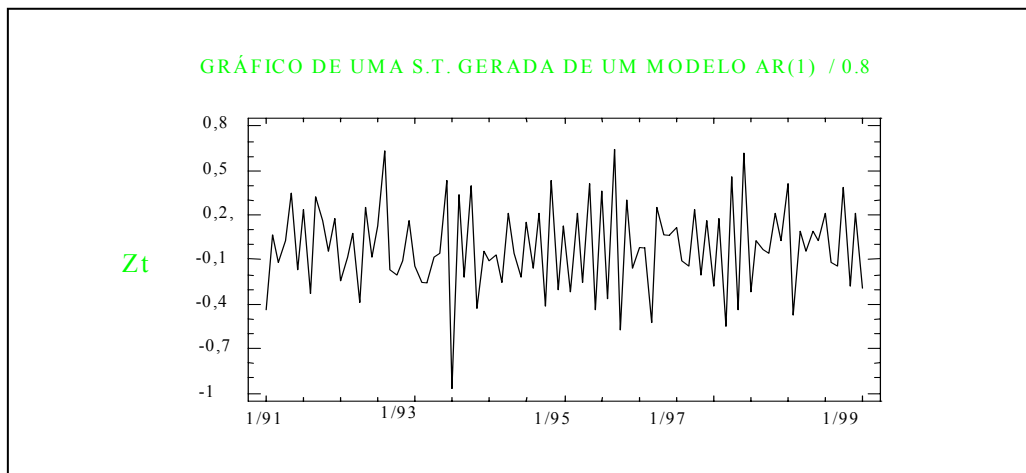
é o operador linear que transforma a_t em Z_t e é chamado de **função de transferência do filtro**. A sequência de pesos ψ_1, ψ_2, \dots teoricamente pode ser finita ou infinita. Se a sequência é finita ou infinita e convergente o filtro é chamado de estável e o processo é estacionário (ou em equilíbrio estatístico em torno da média). Neste caso o parâmetro μ é a média em torno da qual o parâmetro varia. Quando o processo não é estacionário μ não tem significado específico, é apenas um ponto de referência para o nível do processo.

2.6- Modelos auto-regressivos

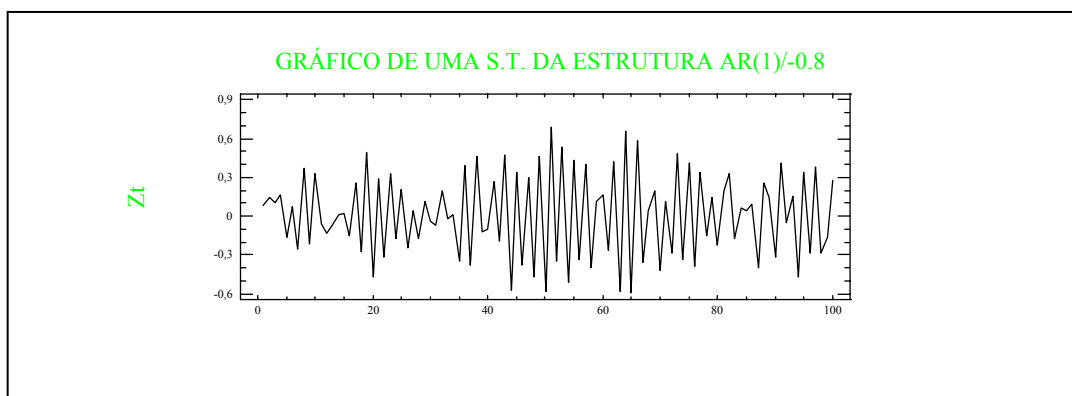
Um modelo auto-regressivo de ordem p tem a forma $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$ ou seja $\phi(B)Z_t = a_t$ com o polinômio $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$

Exemplos de modelos auto-regressivos:

1) Gráfico de uma série temporal da estrutura AR(1) com modelo $Z_t = 0.8Z_{t-1} + a_t$



2) Gráfico de uma série temporal da estrutura AR(1) com modelo $Z_t = -0.8Z_{t-1} + a_t$



Exercícios 7:

7.1) Demonstre que $\phi(B)\omega_t = a_t$.

7.2) Escreva a expressão do modelo AR(1) para ω_t .

7.2A) Escreva a expressão dos modelos da estrutura AR(1) para Z_t com termo constante.

7.3) Escreva a expressão do modelo AR(2) para ω_t .

7.3A) Escreva a expressão dos modelos da estrutura AR(2) para Z_t com termo constante.

7.4) Escreva a expressão do modelo AR(3) para ω_t .

7.5) Considere o modelo com o termo constante δ , ou seja,

$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$. Determine o valor da média μ do processo em função dos coeficientes do modelo.

7.6) Determine a expressão da função de autocovariância do processo (do exercício anterior), γ_k , considerando o modelo em função dos desvios da média μ , $\omega_t = Z_t - \mu$.

7.7) Determine a expressão da variância do processo σ_ω^2 , nas mesmas condições do exercício anterior.

7.8) Determine a expressão da função de autocovariância (FACV) de um processo auto-regressivo de ordem 3, AR(3).

7.9) Determine a expressão da variância σ_ω^2 de um processo auto-regressivo de ordem 3, AR(3).

7.10) Determine a expressão da função de autocorrelação (FAC) de um processo auto-regressivo de ordem p e também de um de ordem 3, AR(3).

7.11) Determine as expressões da FAC e da variância das estruturas a seguir indicadas, em função dos parâmetros do modelo de cada estrutura.

- AR(1)
- AR(2)
- AR(3)

7.12) Dada a série temporal Z_t , a seguir, determine:

- $\omega_t = \nabla Z_t$;
- $\omega_t = \nabla^2 Z_t = \nabla(Z_t - Z_{t-1}) = Z_{t-1} - Z_{t-2}$;
- a estimativa da autocovariância γ_k quando $k = 1$;
- a estimativa da autocorrelação ρ_k quando $k = 1$;
- A estimativa da variância σ_z^2 ;

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Z_t | 47 | 44 | 50 | 62 | 68 | 64 | 80 | 71 | 44 | 38 | 23 | 55 | 56 | 64 | 50 |
| T | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

7.13) Para os dados da série A do livro do B & J (final do livro) pede-se:

- a) a série diferenciada uma vez;
- b) faça o gráfico da série original e, um outro, da série diferenciada uma vez;
- c) calcule a FAC da série original e a FAC da série diferenciada (basta 10 lags).

7.14) Dada a série temporal a seguir pede-se:

- a) A série diferenciada uma vez ($d = 1$);
- b) A média e a variância da série original;
- c) O valor da autocovariância de defasagem 1 (lag) $k = 1$ da série original;
- d) O valor da autocorrelação de defasagem (lag) $k = 1$ da série original;

| | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|
| Z_t | 12 | 14 | 16 | 14 | 18 |
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

2.7- Função de autocorrelação parcial (FACP)

2.7.1 – Equações de Yule-Walker

A idéia da análise de autocorrelação parcial é aquela em que se deseja medir quanto Z_t e Z_{t+k} estão relacionados, mas com os efeitos dos z 's intermediários explicados, ou melhor, controlados. Por exemplo, deseja-se mostrar o relacionamento entre as componentes do par (Z_t, Z_{t+2}) mantendo-se controlado o efeito de Z_{t+1} (mantido fixo) sobre Z_{t+2} , em seguida deseja-se mostrar o relacionamento entre as componentes do par (Z_t, Z_{t+3}) controlando-se os efeitos de Z_{t+1} e Z_{t+2} (mantidos fixos) sobre Z_{t+3} , e assim sucessivamente. Os coeficientes de autocorrelação parcial medem este relacionamento entre Z_t e Z_{t+k} . Este coeficiente é denotado por Φ_{kk} e é estimado por $\hat{\Phi}_{kk}$ da amostra. Seja Φ_{kj} o j -ésimo coeficiente em um processo auto-regressivo de ordem k , tal que Φ_{kk} é o último coeficiente,

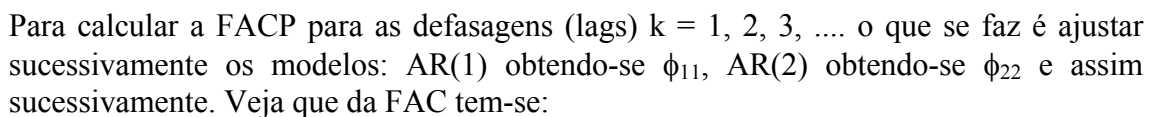
$$Z_t = \phi_{k1}Z_{t-1} + \phi_{k2}Z_{t-2} + \dots + \phi_{kk}Z_{t-k} + a_t$$

Especificando um AR(1), ordem $k = 1$, tem-se $Z_t = \phi_{11}Z_{t-1} + a_t$ e observa-se que ϕ_{11} mede o relacionamento entre Z_t e Z_{t-1} . Já que não existem outras variáveis no modelo ϕ_{11} mede tanto a autocorrelação parcial como a autocorrelação. Mas, quando se tem uma ordem maior, como por exemplo, um AR(2)

$$Z_t = \phi_{21}Z_{t-1} + \phi_{22}Z_{t-2} + a_t$$

ϕ_{22} mede a autocorrelação parcial entre Z_t e Z_{t-2} . Isto é, mede a associação entre Z_t e Z_{t-2} mantendo fixo o efeito de Z_{t-1} .

A figura a seguir mostra o correlograma das autocorrelações parciais para a S.T. das manchas solares.



que pode ser escrita na forma das equações de Yule-Walker:

Resolvido o sistema de equações tem-se os valores de Φ_{kk} para os lags $k = 1, 2, 3, \dots$

8.1) Escreva as equações de Yule-Walker na forma matricial.

8.3) Escreva as equações de Yule-Walker na forma matricial com as estimativas dos coeficientes de autocorrelação.

8.5) Seja a série temporal, com as observações abaixo, que correspondem ao número médio anual de manchas solares observado de 1770 a 1869 (Box & Jenkins pg. 530). Estime a função de autocorrelação parcial (FACP) para as defasagens $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$, sabendo que as auto-correlações estimadas para essas defasagens são $\hat{\rho}_1 = 0.8062$, $\hat{\rho}_2 = 0.4281$ e $\hat{\rho}_3 = 0.0696$. Aplique as equações de Yule-Walker para

achar as estimativas e também ajuste os modelos auto-regressivos de ordem $p = 1$ para $\hat{\phi}_{11}$, de ordem $p = 2$ para $\hat{\phi}_{22}$ e de ordem $p = 3$ para $\hat{\phi}_{33}$ para confirmar. É claro que a última questão deve ser feita computacionalmente.

```
101 82 66 35 31 7 20 92 154 125 85 68 38 23 10 24 83 132 131 118 90 67 60 47 41
21 16 6 4 7 14 34 45 43 48 42 28 10 8 2 0 1 5 12 14 35 46 41 30 24 16 7 4 2 8 17
36 50 62 67 71 48 28 8 13 57 122 138 103 86 63 37 24 11 15 40 62 98 124 96 66 64
54 39 21 74 23 55 94 96 77 59 44 47 30 16 7 37 74
```


2.7.2 – Método Recursivo Para Cálculo dos Parâmetros Auto-regressivos

Em 1960, J. Durbin publicou o artigo “The fitting of time series models” na revista Review of International Statistical Institute, onde apresenta um método recursivo para estimar os parâmetros de um processo auto-regressivo de ordem $p+1$ (AR($p+1$)) quando os parâmetros de um processo AR(p), ajustado à mesma série temporal, são conhecidos. Esse procedimento recursivo pode ser usado para estimar de modo aproximado os coeficientes de autocorrelação parcial. O inconveniente desse método é que devido à forma recursiva os erros de arredondamento vão se acumulando. As equações que definem o método são:

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} r_j} \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_{kj} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{kk} \hat{\phi}_{k-1,k-j} \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

Exercício 9:

Seja a série temporal, do item 5 dos exercícios 8, determine as estimativas dos parâmetros ϕ_{11} , ϕ_{22} e ϕ_{33} (valores da FACP para $k = 1, 2, 3$ aplicando o procedimento recursivo de Durbin).

2.7.3 – Variância e Erro Padrão das Estimativas da FAC e FACP.

Já se viu que a função de autocovariância, representada por γ_k (para a ordem k), da série temporal $Z(t)$ é o momento central conjunto das v.a's Z_t e Z_{t+k} , isto é:

$$\gamma_k = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

Onde $\mu = E[Z(t)]$ e quando o P.E. gerador da série é estacionário no sentido amplo o parâmetro γ_k é estimado com base na série $\{Z_t, t=1, 2, 3, \dots, n\}$ observada pela estatística:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})$$

onde \bar{z} é estimador de μ . De modo que se tem $\hat{\mu} = \bar{z}$ como o estimador de μ e

$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})$ como o estimador de γ_k . A variância da série temporal $Z(t)$,

representada por $E(Z_t - \mu)^2 = \sigma_z^2 = \gamma_0$, é obtida da função de autocovariância quando $k = 0$ e o seu estimador é:

$$\hat{\gamma}_0 = \hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2$$

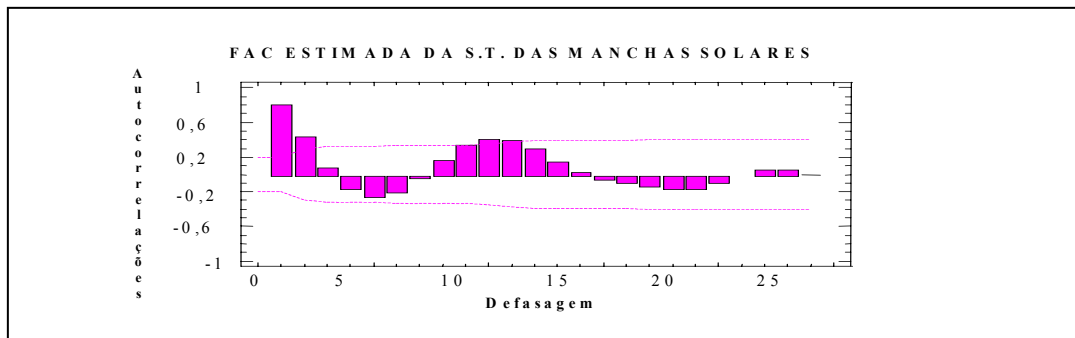
Então, o parâmetro (FAC) $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ pode ser estimado pela estatística cuja expressão é

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})}{\sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2}$$

Os valores de $\hat{\rho}_k$ para $k = 1, 2, 3, \dots$ constituem o **correlograma** estimado da FAC.

EXEMPLO 5

O gráfico adiante corresponde ao correlograma da série temporal do item 5 dos exercícios 8, que é a série temporal do número médio anual de manchas solares.



Geralmente quando se tem um estimador existe um interesse especial na distribuição de probabilidade dessa estatística para que se possa fazer inferências sobre o parâmetro que a estatística estima. No caso de $\hat{\rho}_k$, Anderson no seu artigo de 1942 “Distribution of the serial correlation coefficient” publicado na revista “The Annals of Mathematical Statistics”, provou que supondo que ρ_k seja igual a zero ($\rho_k = 0$) a esperança de $\hat{\rho}_k$ é assintoticamente igual a zero ou seja $E(\hat{\rho}_k) \doteq 0$.

Em seguida, M. S. Bartlett no seu artigo de 1946 “On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series” publicado na revista “Journal of the Royal Statistical Society”, demonstrou que a variância e as covariâncias das estatísticas $\hat{\rho}_k$ são, aproximadamente, dadas pelas expressões:

$$V(\hat{\rho}_k) \cong \frac{1}{n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\rho_j^2 + \rho_{j+k} \rho_{j-k} - 4\rho_k \rho_j \rho_{j-k} + 2\rho_j^2 \rho_k^2]$$

$$\text{cov}(\hat{\rho}_k, \hat{\rho}_{k+s}) \cong \frac{1}{n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\rho_j \rho_{j+s} + \rho_{j+k+s} \rho_{j-k} - 2\rho_{k+s} \rho_j \rho_{j-k-s} - 2\rho_{k+s} \rho_j \rho_{j-k} + 2\rho_k \rho_{k+s} \rho_j^2]$$

onde n é o tamanho da série, ou seja, o número de observações registradas. E, então, para um processo em que as auto-correlações ρ_k são nulas para $j > q$ a expressão de $V(\hat{\rho}_k)$ torna-se

$$V(\hat{\rho}_k) \cong \frac{1}{n} [1 + 2 \sum_{j=1}^q \rho_j^2] \quad \text{para } k > q$$

Mas, como se desconhece os valores de ρ_k eles são substituídos por suas estimativas $\hat{\rho}_k$. Então tem-se a variância estimada $\hat{v}(\hat{\rho}_k) = \hat{\sigma}_{\hat{\rho}_k}^2 = \frac{1}{n} [1 + 2 \sum_{j=1}^q \hat{\rho}_j^2]$ $k > q$ ($q = k - 1$) e para n suficientemente grande, a estatística $\hat{\rho}_k$ tem distribuição aproximadamente

Gaussiana sob a hipótese de que $\rho_k = 0$. Este resultado se deve ao trabalho de Jenkins & Watts publicado no livro editado em 1968 com título “Spectral Analysis and Its Applications” da editora Holden Day. De forma que tem-se o pivô aproximado, dado a seguir, para se fazer inferências sobre o parâmetro ρ_k ,

$$\frac{\hat{\rho}_k - \rho_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_k}} = \frac{\hat{\rho}_k}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_k}} \sim N(0, 1)$$

Conseqüentemente, o intervalo de confiança de nível 95% é dado por:

$$[-1,96 \sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_k}^2}, 1,96 \sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_k}^2}]$$

e finalmente rejeita-se a hipótese de que $\rho_k = 0$ se $\hat{\rho}_k$ situar-se fora do intervalo acima.

Já para a FACP Φ_{kk} , quando o processo é AR(p), M. H. Quenoüille no seu trabalho publicado em 1949 na revista Journal of the Royal Statistical Society e intitulado “Approximate test of correlation time series” provou que a estatística $\hat{\phi}_{kk}$ tem distribuição aproximadamente Gaussiana com média 0 e variância dada pela expressão:

$$V(\hat{\phi}_{kk}) \cong \frac{1}{n} \text{ para } k > p$$

Logo, $\hat{\phi}_{kk} \sim N(0, \frac{1}{n})$ e portanto o desvio padrão estimado de $\hat{\phi}_{kk}$ é dado pela expressão aproximada $\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_{kk}} \cong \frac{1}{\sqrt{n}}$ $k > p$. Finalmente, o intervalo de 95% para $\Phi_{kk} = 0$ é:

$$[-1,96 \frac{1}{\sqrt{n}}, 1,96 \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

e rejeita-se a hipótese de que $\Phi_{kk} = 0$ se $\hat{\phi}_{kk}$ situar-se fora do intervalo anterior, $k > p$.

Exercícios 10:

10.1) Escreva a expressão da variância do estimador $\hat{\rho}_k$ de ρ_k .

10.2) Escreva a expressão da variância do estimador $\hat{\phi}_{kk}$ de Φ_{kk} .

10.3) Dada a série temporal a seguir, calcule:

- $\hat{\rho}_1$ A estimativa da autocorrelação de defasagem $k = 1$;
- $\hat{\rho}_2$ A estimativa da autocorrelação de defasagem $k = 2$;
- $\hat{\rho}_3$ A estimativa da autocorrelação de defasagem $k = 3$;
- Teste as hipóteses de que $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$ e $\rho_3 = 0$.

| | | | | | | | | | | |
|----------------|----|----|---|----|---|----|----|---|---|----|
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Z _t | 12 | -6 | 9 | -8 | 8 | -6 | 10 | 2 | 7 | -4 |

10.4) Dado o processo estocástico $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$, a autocorrelação parcial de defasagem $k = 1$, $\phi_{11} = 0,9$ e a autocorrelação de defasagem 2, $\rho_2 = 0,8$. Estime ϕ_{22} .

10.5) Suponha que os dados a seguir correspondem a uma S.T. com $n = 60$ e $\rho_1 \neq 0$. Estime a variância e o desvio padrão das estimativas de ρ_k para $k = 1, 2$ e 3 .

| | | | | | |
|----------------|-------|------|-------|-------|------|
| K | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| $\hat{\rho}_k$ | -0,62 | 0,35 | -0,01 | -0,11 | |

10.6) Verifique se as autocorrelações cujas estimativas estão na tabela anterior são todas nulas.

10.7) Dada a S.T. abaixo, calcule:

- $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$ e $\hat{\rho}_3$;
- O intervalo de confiança de 95% para ρ_1 , ρ_2 e ρ_3 ;
- $\hat{\phi}_{11}$, $\hat{\phi}_{22}$ e $\hat{\phi}_{33}$ a partir das equações de Yule-Walker;
- O intervalo de confiança de nível 95% para $\hat{\phi}_{11}$, $\hat{\phi}_{22}$ e $\hat{\phi}_{33}$;
- Verifique se os valores da FAC cujas estimativas você obteve no item a são significativamente diferentes de 0;
- Verifique se os valores da FACP cujas estimativas você obteve no item c são significativamente diferentes de 0.

| | | | | | | | | | | |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Z _t | 17 | 19 | 20 | 16 | 15 | 13 | 11 | 12 | 13 | 14 |

10.8) Uma série temporal com $n = 100$ forneceu os resultados dados na tabela a seguir. Calcule:

- $\hat{\phi}_{11}$, $\hat{\phi}_{22}$ e $\hat{\phi}_{33}$ usando o método recursivo de Durbin;
- Verifique se os valores da FACP que você estimou no item a são significativamente diferentes de 0.

| | | | | | |
|----------------|--------|-------|--------|-------|--------|
| Defasagem k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $\hat{\rho}_k$ | -0,902 | 0,816 | -0,714 | 0,671 | -0,584 |

10.9) Seja o modelo auto-regressivo de ordem 1, AR(1), da forma $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$. Coloque-o na forma do operador de retardo B.

10.10) Sabe-se que um processo auto-regressivo é estacionário quando as raízes do polinômio característico $\phi(B)$ jazem fora do círculo unitário. Determine a condição para que o processo do exercício anterior seja estacionário.

10.11) Seja o processo AR(1) da forma $Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ (com termo constante). Considerando o processo estacionário determine a média μ do processo.

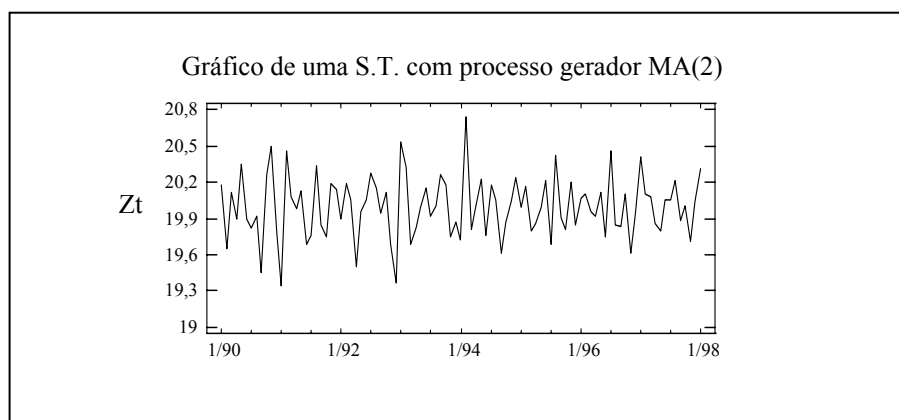
- 10.12) Seja o processo AR(1) da forma $Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ (com termo constante). Considerando o processo estacionário determine a variância $\gamma_0 = \sigma_y^2$ do processo em função da variância do ruído branco $\sigma_\varepsilon^2 = V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2)$.

2.8 Modelos Médias Móveis (MA(q))

Um modelo médias móveis de ordem q tem a forma $Z_t = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$, $t=1,2, \dots, n$, resultando em $Z_t = \delta + \theta(B)a_t$, onde $\theta(B)$ é o polinômio característico no operador de retardo B, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$.

EXEMPLO 6

A figura a seguir mostra o gráfico de uma S.T. gerada por P.E. de estrutura MA(2).



Exercícios 11:

- 11.1) Expresse o processo MA(q) como função dos desvios ω_t da média $\mu = E(Z_t)$ e mostre que $\mu = \delta$.
- 11.2) Determine a função de autocovariância (FACV) dos modelos MA(q).
- 11.3) Determine a variância dos modelos MA(q).
- 11.4) Determine a função de autocorrelação dos modelos MA(q).
- 11.5) Escreva as expressões dos estimadores da função de autocovariância, da função de autocorrelação e da variância de um processo MA(q).
- 11.6) Determine a FACV (função de autocovariância), função de autocorrelação (FAC), função de autocorrelação parcial (FACP) e variância σ_ω^2 dos processos MA(1) e MA(2).
- 11.7) Escreva um modelo MA(1) com isolamento do ruído branco em função dos demais termos. Faça substituições sucessivas do termo defasado do ruído branco e verifique o que acontece. O modelo MA(1) torna-se um AR(∞) com os pesos

decrecentes no tempo sob qual condição? Isto se chama INVERTIBILIDADE?
Qual a condição para que os processos MA(1) sejam invertíveis?

2.9- Processos Mistos (ARMA(p,q))

Muitas vezes a inclusão de ambos os termos auto-regressivo e médias móveis conduz a um modelo mais parcimonioso do que se poderia alcançar com as formas AR puro e MA puro. Então, um modelo que incorpora esses dois termos é o ARMA(p,q), que é da forma

$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t$$

$$\phi(B)Z_t = \delta + \theta(B)a_t$$

onde os polinômios são: $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ e $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$.

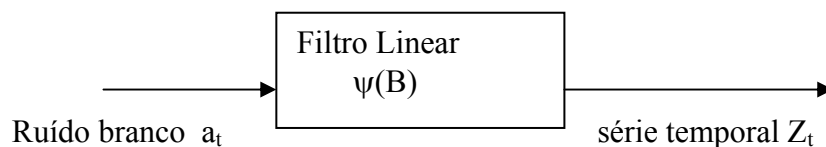
Exercícios 12:

- 12.1) Escreva o modelo especificado para Z_t pela estrutura ARMA(1,0).
- 12.2) Escreva o modelo especificado para Z_t pela estrutura ARMA(0,1).
- 12.3) Determine a média do processo ARMA(p,q).
- 12.4) Expresse o modelo ARMA(p,q) em função dos desvios da média $\omega_t = Z_t - \mu$.
- 12.5) Determine a variância σ_ω^2 , função de autocovariância γ_k e função de autocorrelação ρ_k dos processos de estrutura ARMA(p,q).
- 12.6) Determine a variância σ_ω^2 , a FAC e a FACP dos processos com estrutura ARMA(1,1).
- 12.7) Escreva o modelo especificado para Z_t pela estrutura ARMA(2,2).

2.10- Condições de Estacionariedade e Invertibilidade

2.10.1- Estacionariedade e Invertibilidade de um Processo Linear

Uma classe muito importante de P.E'S, Z_t , é aquela obtida pela passagem de um P.E. tipo ruído branco a_t (P.E. cujas v.a's têm média nula e são mutuamente independentes) através de um **filtro linear**, isto é, $Z_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k a_{t-k}$. A figura abaixo, que já foi apresentada, é o modelo de um filtro linear



O filtro linear (ou sistema linear) tem a_t como entrada, Z_t como saída e $\psi(B)$ é a função de transferência. De modo que se tem

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} \dots$$

ou ainda

$$Z_t = \mu + \psi(B)a_t$$

com a função de transferência do filtro $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots$

É claro que o parâmetro μ é o nível da série e considerando-se que o ruído a_t tem média 0 e

variância σ_a^2 e ainda que são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, logo $E(a_t a_{t-k}) = E(a_t) \cdot E(a_{t-k}) = 0 \cdot 0 = 0$. Então, considerando-se agora por simplicidade, os desvios da média $\omega_t = Z_t - \mu$ tem-se que

$$\omega_t = \psi(B)a_t$$

E a convergência do processo e também a **estacionariedade** do mesmo, podem ser analisadas a partir dos pesos ψ_1, ψ_2, \dots . Então, se a seqüência dos pesos $\{\psi_j, j \geq 1\}$ é finita ou infinita e convergente, o filtro é estável, o que significa que se tem um valor definido para a soma dos termos da seqüência e a série Z_t é **estacionária** e μ é a **média do processo**. Quando a seqüência dos pesos é infinita e não convergente, não se tem um valor definido para a soma dos pesos (resultado infinito) e neste caso o parâmetro μ é apenas uma referência para o nível da série e não é a média. Então, tomando-se a esperança da expressão $Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} \dots$ tem-se

$$E(Z_t) = \mu + E(a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} \dots)$$

$$E(Z_t) = \mu + E(a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j}) = \mu + E(a_t) + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j E(a_{t-j})$$

$$E(Z_t) = \mu$$

quando a série $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$ converge. Da mesma forma a variância é determinada por:

$$V(Z_t) = V(\mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} \dots)$$

$$V(Z_t) = V(\mu) + V(a_t) + \psi_1^2 V(a_{t-1}) + \psi_2^2 V(a_{t-2}) + \dots$$

$$V(Z_t) = 0 + \sigma_a^2 + \psi_1^2 \sigma_a^2 + \psi_2^2 \sigma_a^2 + \dots$$

$$V(Z_t) = \sigma_a^2 (1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \text{ com } \psi_0 = 1 \text{ e com } \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$$

e ainda a função de autocovariância

$$\text{cov}(Z_t, Z_{t-k}) = \gamma_k = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \text{ se a série } \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \text{ existe } \forall j = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

E, escrevendo $\omega_t = Z_t - \mu$ como uma função ponderada das observações passadas tem-se

$$Z_t - \mu = \omega_t = \pi_1 \omega_{t-1} + \pi_2 \omega_{t-2} + \dots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \omega_{t-j} + a_t$$

e escrevendo na forma do polinômio característico $(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j) \omega_t = a_t$ resulta

$$\pi(B)\omega_t = a_t \text{ com } \pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots$$

Finalmente, como $\omega_t = \psi(B)a_t$, tem-se $\pi(B)\psi(B)a_t = a_t$, $\pi(B)\psi(B) = 1$ e $\pi(B) = \psi^{-1}(B)$, logo esta invertibilidade garante que os pesos dos valores passados possam ser obtidos dos pesos dos ruídos passados. Existe uma razão para que se tenha esta condição de invertibilidade, além da de estacionariedade nos modelos de séries temporais. Um modelo não invertível implica em que pesos, π_j , colocados no passado de ω_t não decaem à medida que se desloca a série no passado. Mas, é claro, que os maiores pesos devem ser colocados nas observações mais recentes. A invertibilidade garante isto. Para ilustrar este argumento suponha a série histórica da inflação brasileira. É evidente que a inflação de Agosto/1999 tem muito a ver com a inflação de Julho/1999, depende um pouco menos da inflação de Junho/1999 e praticamente não tem nada a ver com a inflação de Agosto/1994.

EXEMPLO 7

Seja o P.E. correspondente a saída do filtro linear, descontada a média, $\omega_t = \psi(B)a_t$ com os pesos $\psi_j = \phi^j$ $j = 1, 2, 3, \dots$ e $\psi_0 = 1$. Se o espaço paramétrico for $|\phi| < 1$ a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \text{ converge, pois tem-se } \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j = 1 + \phi + \phi^2 + \dots$$

que é uma P.G. com razão $q = \phi$, logo $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = \frac{1}{1-\phi}$ e portanto o P.E. $\omega_t = \psi(B)a_t$ é estacionário na média. Considerando, agora, a variância tem-se

$$V(\omega_t) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} = \sigma_a^2 (1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots)$$

que é uma P.G. com razão $q = \phi^2$, logo

$$\gamma_0 = V(Z_t) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2}$$

Finalmente, tem-se para a covariância $\text{cov}(\omega_t, \omega_{t+k})$

$$\gamma_k = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+k} = \sigma_a^2 (\phi^k + \phi^{2+k} + \phi^{4+k} + \dots)$$

que é uma P.G. com razão $q = \phi^2$, logo

$$\text{cov}(\omega_t, \omega_{t+k}) = \gamma_k = \sigma_a^2 \frac{\phi^k}{1-\phi^2}$$

E, portanto o P.E. $\omega_t = \psi(B)a_t$ tem covariância dependendo somente da diferença de defasagens k . Resumindo, o **P.E. é estacionário no sentido amplo** já que é estacionário na média, na variância e a covariância depende somente da diferença de defasagens k .

EXEMPLO 8

Seja o P.E. correspondente a saída do filtro linear, com média zero, $Z_t = \psi(B)a_t$ com os pesos $\psi_j = \phi^j$ $j = 1, 2, 3, \dots$ e $\psi_0 = 1$. Se o parâmetro for $\phi = 1$ e com $\psi_0 = 1$ a série $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j$ não converge, pois tem-se $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots$, e o processo será não estacionário. Observe que $Z_t - Z_{t-1}$ será um P.E. conhecido como **passeio aleatório**, pois

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \psi_3 a_{t-3} \dots \\ Z_t &= \mu + a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + a_{t-3} \dots \end{aligned}$$

e ainda, tomando

$$Z_{t-1} = \mu + a_{t-1} + a_{t-2} + a_{t-3} \dots$$

tem-se que

$$Z_t - Z_{t-1} = a_t \text{ que é um P.E. conhecido como } \mathbf{ruído branco}.$$

EXEMPLO 9

Considere ainda dos exemplos anteriores o P.E. correspondente a saída do filtro linear, descontada a média, $\omega_t = \psi(B)a_t$ com os pesos $\psi_j = \phi^j$ $j = 1, 2, 3, \dots$ e $\psi_0 = 1$ e com o espaço paramétrico para ϕ sendo $|\phi| < 1$. Analisando as condições para que haja convergência. A função de transferência do filtro é

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots$$

$$\psi(B) = 1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \phi^3 B^3 + \dots \text{(PG com } q = \phi B \text{)}$$

$$\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} (\phi B)^j$$

$$\psi(B) = \frac{1}{1 - \phi B}$$

e a série resultante convergirá se $|B| \leq 1$ e assim o processo será estacionário. Observe que isto significa que B estará dentro do círculo unitário e sobre a circunferência do círculo.

EXEMPLO 10

Seja agora a situação para um modelo do tipo médias móveis com $q = 1$, ou seja, um caso particular de $\omega_t = \psi(B)a_t$. Assim, tem-se $\omega_t = a_t - \theta a_{t-1}$, e os pesos são $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = -\theta$ e $\psi_j = 0$ para $j > 1$. Deve-se tentar provar que a série $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j$ (soma dos pesos)

converge então $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 1 - \theta$, que é finita (convergente) para qualquer valor de θ .

EXEMPLO 11

Seja agora a mesma situação do exemplo anterior com o modelo do tipo médias móveis com $q = 1$, ou seja, um caso particular de $\omega_t = \psi(B)a_t$. Assim, tem-se $\omega_t = a_t - \theta a_{t-1}$, e os

pesos são $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = -\theta$ e $\psi_j = 0$ para $j > 1$. Deve-se tentar provar que a série $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j$ (soma dos pesos) converge e tem $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = 1 - \theta$, que é finita (convergente) para qualquer valor de θ , logo o modelo é estacionário na média. E, como $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = 1^2 + \theta^2 = 1 + \theta^2$ a série também é estacionária na variância e finalmente $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} = 1(-\theta) + (-\theta)0 = -\theta$, convergente para qualquer valor de θ . Assim, o processo é estacionário no sentido amplo.

EXEMPLO 12

Seja agora a mesma situação do exemplo anterior com o modelo do tipo médias móveis com $q = 1$, ou seja, um caso particular de $\omega_t = \psi(B)a_t$. Assim, tem-se $\omega_t = a_t - \theta a_{t-1}$, e os pesos são $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = -\theta$ e $\psi_j = 0$ para $j > 1$. Examinando-se, agora, os pesos para os valores passados do processo ou seja em $\pi(B)\omega_t = a_t$, e isolando-se do modelo $\omega_t = a_t - \theta a_{t-1} = (1 - \theta B)a_t$ o ruído a_t , resulta $a_t = \frac{\omega_t}{1 - \theta B} = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots)\omega_t$, que igualado com $\pi(B)\omega_t = a_t$ em $(1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots)\omega_t = a_t = \pi(B)\omega_t = a_t$ produz

$$\pi(B) = 1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j B^j = \frac{1}{1 - \theta B}$$

E os pesos π_j são $\pi_j = -\theta^j$ $j \geq 1$ (da comparação com o modelo $\pi(B)$ definido na pg. 25) e a sequência formada com os pesos convergirá se $|\theta| < 1$. Então, dada a convergência dos pesos dos valores passados o processo é chamado de invertível. E, ainda, o processo é invertível se o operador $\pi(B)$ converge para $|B| \leq 1$.

Na modelagem proposta por Box & Jenkins os modelos são dados por $\phi_p(B)\omega_t = \theta_q(B)a_t$ onde os polinômios de ordem p e q foram definidos anteriormente. Sendo a entrada um P.E. do tipo ruído branco, a saída Z_t só poderia ser **não-estacionária** se existisse alguma instabilidade no comportamento do filtro. Desta forma, pelo que se abordou, tem-se as condições para que um P.E. gerado seja estacionário, invertível ou equivalentemente o filtro seja estável, invertível. **Especificamente, tem-se que um processo estocástico linear será estacionário se a série $\psi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$. Da mesma forma ele será invertível se $\pi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$.**

2.10.2- Estacionariedade dos Modelos AR(p) e Invertibilidade dos Modelos MA(q)

- Modelo AR(1)

Os modelos da estrutura AR(1) têm a forma $\omega_t = \phi_1 \omega_{t-1} + a_t$ ou com a_t como função do operador B , $(1 - \phi_1 B)\omega_t = a_t$. Observa-se, nas expressões, que pela independência dos ruídos a_t , ω_t depende apenas de ω_{t-1} e de a_t , ou seja, da realização no instante anterior e do ruído no instante t . De forma que pela *falta de memória* para os outros

instantes o AR(1) se caracteriza como um processo de Markov. Ainda, como $\pi(B) = \phi(B) = 1 - \phi_1 B$.

A condição de estacionariedade é que a **série $\psi(B)$ seja convergente para $|B| \leq 1$** e tem-se

$$\omega_t = \phi_1 \omega_{t-1} + a_t = \psi(B)a_t$$

Então, para se deixar na forma $\omega_t = \psi(B)a_t$ há necessidade de entrar com ω_{t-j} $j = 1, 2, \dots$ sucessivamente

$$\begin{aligned}\omega_t &= \phi_1(\phi_1 \omega_{t-2} + a_{t-1}) + a_t = \phi_1^2 \omega_{t-2} + \phi_1 a_{t-1} + a_t \\ \omega_t &= \phi_1[\phi_1(\phi_1 \omega_{t-3} + a_{t-2}) + a_{t-1}] + a_t = \phi_1^3 \omega_{t-3} + \phi_1^2 a_{t-2} + \phi_1 a_{t-1} + a_t\end{aligned}$$

.....

.....

$$\omega_t = (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \phi_1^3 B^3 + \dots) a_t$$

$$\omega_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j \right) a_t$$

e $\psi(B) = 1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \phi_1^3 B^3 + \dots = \frac{1}{1 - \phi_1 B}$ **converge** para $|B| \leq 1$, então

como a raiz da equação $1 - \phi_1 B = 0$ é $B = 1/\phi_1$ e é condição se ter $|\phi_1| < 1$ implica em se ter a **raiz de $\phi(B) = 0$** maior do que 1 ou seja fora do círculo unitário, pois $|B| = \left| \frac{1}{\phi} \right| = \frac{1}{|\phi|}$ e dado que $|\phi| < 1$ tem-se que $|B| > 1$.

Exercícios 13:

- 13.1) Determine a condição de estacionariedade para os modelos da estrutura AR(1).
- 13.2) Verifique se o processo modelado por $\omega_t = 0,75\omega_{t-1} + a_t$ é estacionário, achando as raízes do polinômio característico e também analisando o espaço paramétrico.
- 13.3) Escreva as condições de estacionariedade para os modelos AR(p).
- 13.4) Determine a condição de invertibilidade para os modelos da estrutura MA(1).
- 13.5) Verifique se o processo modelado por $\omega_t = 0,8a_{t-1} + a_t$ é invertível, achando as raízes do polinômio característico e também analisando o espaço paramétrico.
- 13.6) Escreva a condição de invertibilidade para os modelos da estrutura MA(q).
- 13.7) Escreva as condições de estacionariedade e invertibilidade para os modelos da estrutura ARMA(1, 1).
- 13.8) Escreva as condições de estacionariedade e invertibilidade para os modelos da estrutura ARMA(p, q).
- 13.9) Verifique se o processo modelado por $\omega_t = -0,75\omega_{t-1} + 0,8a_{t-1} + a_t$ é estacionário, achando as raízes dos polinômios característicos e também analisando o espaço paramétrico.

- 13.10) Verifique se o processo modelado por $\omega_t = 2\omega_{t-1} - 0,8a_{t-1} + a_t$ é estacionário e invertível, achando as raízes dos polinômios característicos e também analisando o espaço paramétrico.
- 13.11) Determine a condição de estacionariedade para os modelos da estrutura AR(2).
- 13.12) Verifique se o processo modelado por $\omega_t = 1,05\omega_{t-1} - 0,4\omega_{t-2} + a_t$ é estacionário, achando as raízes do polinômio característico e também analisando o espaço paramétrico.
- 13.13) Determine a condição de invertibilidade para os modelos da estrutura MA(2).
- 13.14) Verifique se o processo modelado por $\omega_t = 0,7a_{t-1} - 0,5a_{t-2} + a_t$ é estacionário, achando as raízes do polinômio característico e também analisando o espaço paramétrico.
- 13.15) Escreva um resumo com as condições de estacionariedade e invertibilidade dos modelos das estruturas AR(p), MA(q) e ARMA(p,q).
- 13.16) Escreva um resumo com as condições de estacionariedade e invertibilidade dos modelos importantes das estruturas AR(p) e MA(q), ou seja, para $p = 1, 2$ e $q = 1, 2$.
- 13.17) Escreva as características da FAC e FACP dos modelos da estrutura ARMA(p,q) para $p = 1, 2$ (puro), $q = 1, 2$ (puro) e $p = q = 1$ (misto).
- 13.18) Prove o resultado $\text{cov}(Z_t, Z_{t-k}) = \gamma_k = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{k-j}$ se a série $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{k-j}$ existe $\forall j = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- 13.19) Determine o resultado $V(Z_t) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \gamma_0$ com $\psi_0 = 1$ e com $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, a partir da expressão da $\text{cov}(Z_t, Z_{t-k})$.
- 13.20) Verifique se o modelo $(1 + 0,6B)\omega_t = (1 - 0,4B)a_t$ é invertível

2.11- Modelos ARIMA(p,d,q)

2.11.1- Série Não Estacionária Homogênea

Uma série temporal não-estacionária homogênea é aquela que se torna estacionária após trocarmos o nível médio (por diferenciação) ou inclinação. Assim, se Z_t é uma série temporal não-estacionária homogênea significa que $\omega_t = \nabla^d Z_t$ é estacionária.

Exercícios 14

- 14.1) Faça um esboço de uma série não estacionária na média.
- 14.2) Faça um esboço de uma série não estacionária na média e na variância.

2.11.2- Estrutura dos Modelos ARIMA(p,d,q)

Uma forma geral de representar uma classe de séries temporais não estacionárias é o MODELO AUTO-REGRESSIVO INTEGRADO MÉDIAS-MÓVEIS de ordem (p,d,q) ou seja ARIMA(p,d,q), onde p é o grau do polinômio $\phi(B)$, q o grau do polinômio $\theta(B)$ e d o grau de diferenciação ∇^d ou seja $\phi(B)\nabla^d Z_t = \theta(B)a_t$, onde $\nabla^d Z_t = \omega_t$ e desse modo tem-se $\phi(B)\omega_t = \theta(B)a_t$ que é um modelo ARMA.

Considere $\phi(B)\nabla^d = \phi(B)(1-B)^d$ um polinômio que tem d raízes iguais a 1 ou seja em cima da circunferência do círculo unitário. Assim, retirando-se estas raízes ficamos com p raízes ou seja ficamos com as raízes do polinômio $\phi(B)$ e tratamos então como se fosse ARMA.

Exercícios 15

- 15.1) O mais comum tipo de não-estacionariedade é aquele em que a média da série temporal não é constante e que se chama não-estacionariedade na média. Neste caso o procedimento indicado antes de aplicar a metodologia Box & Jenkins é diferenciar a série na tentativa de torná-la estacionária. Caso se consiga isto, qual o nome que se dá à série não diferenciada?
- 15.2) Imagine uma série que é não estacionária na variância. Isto significa que a variância não é a mesma através do tempo. Frequentemente ocorre que não-estacionariedade na variância implica em não-estacionariedade na média. Como você faz para tentar tornar estacionária uma série desse tipo?
- 15.3) Quais os tipos de transformações que você conhece? Conhece alguma família de transformações? Descreva o algoritmo dessa transformação. Uma boa fonte de informações sobre esta transformação é o livro do Johnson de Análise Multivariada.
- 15.4) A transformação logarítmica (natural) é apropriada para séries cuja variância é proporcional à média, tal que a porcentagem da flutuação é constante no tempo. Contudo, embora essa transformação possa tornar a série estacionária na variância, pode ocorrer da série transformada não ser estacionária na média. O que você faz, então?
- 15.5) Como você faz para verificar se uma série é estacionária? Sabendo que a FAC de séries estacionárias vão rapidamente para zero, ou melhor “rapidamente” significa que os valores da variável padronizada z das autocorrelações estimadas caiam grosseiramente abaixo de 1,645 após a defasagem 5 ou 6 e ainda é sabido que os coeficientes de alguns modelos têm que obedecer à certas condições para estacionariedade.
- 15.6) O que você tem a dizer sobre a FAC e a FACP dos processos da estrutura AR?
- 15.7) O que você tem a dizer sobre a FAC e a FACP dos processos da estrutura MA?
- 15.8) O que você tem a dizer sobre a FAC e a FACP dos processos da estrutura ARMA?

- 15.9) Quais as condições que um processo AR(2) ou ARMA(2,0) deve satisfazer para ser estacionário?
- 15.10) A condição de estacionariedade garante que se pode obter estimativas realmente aproveitáveis para a média, variância, FAC e FACP da amostra, pois se um processo pode ser diferente a cada instante de tempo (não-estacionário) não se pode obter estimativas úteis, por quê?
- 15.11) Qual a condição para que um processo da estrutura MA(1) ou ARMA(0,1) seja invertível?
- 15.12) Qual a condição para que um processo da estrutura MA(2) ou ARMA(0,2) seja invertível?
- 15.13) Escreva a expressão do estimador da variância de $\hat{\rho}_k$ autocorrelação amostral de defasagem k, amostral.
- 15.14) Escreva a expressão do estimador da variância de $\hat{\Phi}_{kk}$ autocorrelação parcial amostral de defasagem k, amostral.
- 15.15) Gere 100 observações (usando o programa GERADOR) do processo AR(1) $Z_t = 5 + 0,8Z_{t-1} + a_t$, use uma variância de 0,1. Obtenha o gráfico da série, os correlogramas da FAC e da FACP, o correlograma da FAC dos resíduos e histograma dos resíduos e estime os parâmetros e o nível médio da série.

Exercícios 16:

- 16.1) Verifique se os processos abaixo são ESTACIONÁRIOS e INVERSÍVEIS e indique se os mesmos podem ser colocados na forma ARIMA e para quais valores dos parâmetros ϕ 's, θ 's e d 's.
- $Z_t - 0,5Z_{t-1} = a_t - 0,5Z_{t-2}$
 - $(Z_t - a_t) - 0,5Z_{t-2} = 0,5(Z_{t-1} - a_{t-1})$
 - $(Z_t - a_t + Z_{t-2}) = 2(Z_{t-1} - a_{t-1})$
 - $Z_t - a_t + 0,5a_{t-2} + Z_{t-2} = a_{t-1} + 2Z_{t-1}$
 - $Z_t + 0,5\nabla Z_{t-2} = Z_{t-1} + a_t$
- 16.2) Gere 80 observações do processo AR(1) com média $\mu = 50$, parâmetro 0,8 e uma variância de 0,08. Faça um gráfico da série, correlograma da FAC, correlograma da FACP e estime a variância do processo e os parâmetros que você estabeleceu na simulação.
- 16.3) Gere 120 observações do processo AR(1) com média $\mu = 50$, parâmetro -0,8 e uma variância de 0,05. Faça um gráfico da série, correlograma da FAC, correlograma da FACP e estime a variância do processo e os parâmetros que você estabeleceu na simulação.
- 16.4) Gere 80 observações do processo AR(2) com média $\mu = 5$, parâmetros 0,75 e -0,50 e uma variância de 0,07. Faça um esboço do espaço paramétrico teórico do processo e também um gráfico da série, correlograma da FAC, correlograma da

FACP e estime a variância do processo e os parâmetros que você estabeleceu na simulação.

16.5) Verifique se os processos abaixo são ESTACIONÁRIOS e INVERSÍVEIS e indique se os mesmos podem ser colocados na forma ARIMA e para quais valores dos parâmetros ϕ 's, θ 's e d 's.

a) $\omega_t = a_t + 0,5a_{t-1}$

b) $\omega_t = a_t - 0,6a_{t-1} + 0,6a_{t-2}$

2.11.3- Identificação da Estrutura de Processos Modelados por ARIMA(p,d,q)

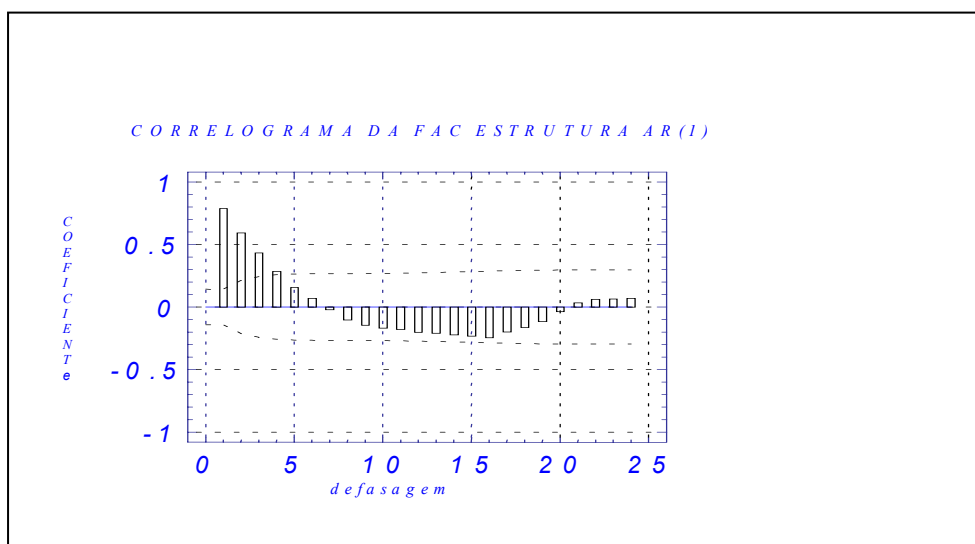
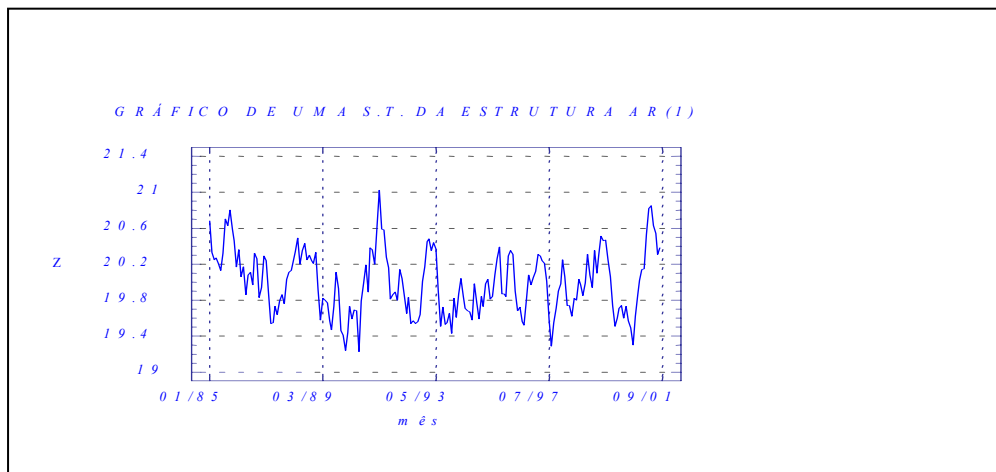
Na identificação da estrutura do modelo ARIMA(p,d,q) o que se faz é o seguinte.

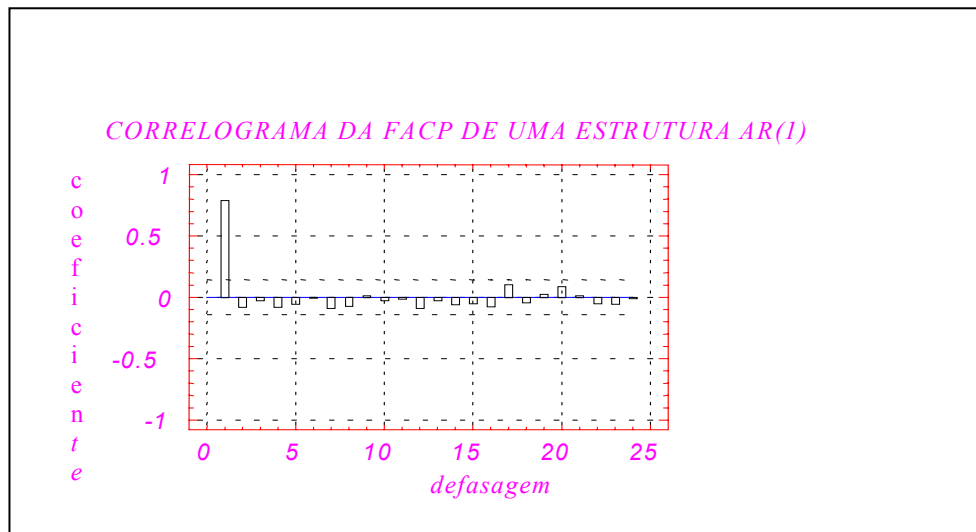
- Faz-se o gráfico da série temporal e verifica-se a existência de tendência ou não-estacionariedade no nível. Em caso positivo procura-se eliminar essa não-estacionariedade por diferenciação;
- Se não existe estacionariedade na variância, procura-se eliminar essa não-estacionariedade por transformação dos dados (aplica-se uma transformação membro da família Box & Cox – veja o livro do Johnson de Análise Multivariada e o software Statgraphics). No caso de séries de consumo ou vazão a transformação indicada é a logarítmica ($\ln(Z_t)$).
- Faz-se os correlogramas da FAC e da FACP;
- Comparam-se os correlogramas obtidos com os correlogramas teóricos.

Seguindo os pontos anteriores deve-se tentar identificar o número de diferenciações d de forma que se consiga estacionariedade na média. Na prática com $d = 1$ ou $d = 2$ consegue-se uma série estacionária na média. A diferenciação de uma determinada ordem é suficiente para obter-se uma série estacionária na média e na variância. Contudo, em séries econômicas, que se estendem por um grande período e que também possuem forte tendência é necessário também se fazer uma transformação. Então, aplica-se a família de transformações de Box & Cox, tentando-se obter o valor de λ (no algoritmo da família Box & Cox) que conduza a transformação adequada. Quando $\lambda = 1$ equivale a não se fazer transformação, quando $\lambda = 0$ tem-se a transformação logarítmica (logaritmos neperianos) e muitas vezes λ é fracionário. De qualquer forma, se vai transformando e verificando a estacionariedade computacionalmente. A existência de programa computacional é fundamental.

EXEMPLO 13:

Observa-se no gráfico da série temporal, a seguir, que ela é estacionária e que os correlogramas correspondem aos de um modelo da estrutura AR(1).





Exercícios 17:

17.1) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP dos modelos da estrutura AR(1) com $\phi_1 > 0$ e comente a forma de cada correlograma.

17.2) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP dos modelos da estrutura AR(1) com $\phi_1 < 0$ e comente a forma de cada correlograma.

17.3) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP de três modelos da estrutura AR(2) e comente a forma de cada correlograma.

17.4) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP dos modelos da estrutura MA(1) com $\theta_1 < 0$ e comente a forma de cada correlograma.

17.5) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP dos modelos da estrutura MA(1) com $\theta_1 > 0$ e comente a forma de cada correlograma.

17.6) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP de quatro modelos da estrutura MA(2) e comente a forma de cada correlograma.

17.7) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP de três modelos da estrutura ARMA(1,1) e comente a forma de cada correlograma.

17.8) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP do modelo da estrutura ARIMA(1,0,1), $(1 - 0,3B)\omega_t = (1 + 0,7B)a_t$ e comente a forma de cada correlograma.

17.9) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP do modelo da estrutura ARIMA(0,0,1), $Z_t = 100 + (1 + 0,7B)a_t$ e comente a forma de cada correlograma.

17.10) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP do modelo da estrutura ARIMA(0,0,1), $Z_t = 100 + (1 - 0,6B)a_t$ e comente a forma de cada correlograma.

17.11) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP do modelo da estrutura ARIMA(2,0,0), $(1 - 0,7B - 0,25B^2)Z_t = 5 + a_t$ e comente a forma de cada correlograma.

17.12) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP do modelo da estrutura $ARIMA(2,0,0)$, $(1 - 1,2B + 0,8B^2)Z_t = 60 + a_t$ e comente a forma de cada correlograma.

17.13) Faça um esboço dos correlogramas da FAC e da FACP do modelo da estrutura $ARIMA(1,0,0)$, $(1 - 0,6B)Z_t = 40 + a_t$ e comente a forma de cada correlograma.

17.14) Como você faz para reconhecer que uma série é estacionária? É conhecido que a FAC de séries estacionárias vão rapidamente para zero, ou melhor “rapidamente” significa que os valores das autocorrelações estimadas caiam grosseiramente abaixo de 1,645 ou acima de -1,645 após o lag 5 ou 6. Ainda, é sabido que os coeficientes de alguns modelos têm que obedecer a certas condições para ocorrer estacionariedade.

17.15) O que você tem a dizer da FAC e FACP dos processos de estrutura AR?

17.16) O que você tem a dizer da FAC e FACP dos processos de estrutura MA?

17.17) O que você tem a dizer da FAC e FACP dos processos de estrutura ARMA?

17.18) Quais as condições que um processo $AR(1)$ ou $ARMA(1, 0)$ deve satisfazer para ser estacionário?

- 17.19) Quais as condições que um processo $AR(2)$ ou $ARMA(2, 0)$ deve satisfazer para ser estacionário?
- 17.20) Quais as condições que um processo $AR(p)$ ou $ARMA(p, 0)$ deve satisfazer para ser estacionário?
- 17.21) Quais as condições que um processo $MA(1)$ ou $ARMA(0, 1)$ deve satisfazer para ser invertível?
- 17.22) Quais as condições que um processo $MA(2)$ ou $ARMA(0, 2)$ deve satisfazer para ser invertível?
- 17.23) Quais as condições que um processo $MA(q)$ ou $ARMA(0, q)$ deve satisfazer para ser invertível?
- 17.24) Quais as condições que um processo $ARMA(1, 1)$ deve satisfazer para ser estacionário e invertível?
- 17.25) Quais as condições que um processo $ARMA(p, q)$ deve satisfazer para ser estacionário e invertível?
- 17.26) O que você pode dizer da estacionariedade dos processos de estrutura MA e da invertibilidade dos processos AR ?
- 17.27) A condição requerida de estacionariedade garante que se pode obter estimativas realmente aproveitáveis para a média, variância, FAC e $FACP$ da amostra, pois se um processo pode ser diferente a cada instante de tempo (não-estacionário), não se pode obter estimativas úteis, porquê?

- 17.28) O mais comum tipo de não-estacionariedade é aquele em que a média da série não é constante e que se chama não-estacionariedade na média. Neste caso o procedimento indicado antes de se aplicar a Metodologia Box & Jenkins é diferenciar a série na tentativa de torná-la estacionária. Caso se consiga isto, qual o nome que se dá à série não diferenciada?
- 17.29) Imagine uma série que é não-estacionária na variância. Isto significa que a variância não é a mesma através do tempo. Frequentemente ocorre que não-estacionariedade na variância implica em não-estacionariedade na média. Como você faz para tornar estacionária uma série deste tipo?
- 17.30) Quais os tipos de transformações que você conhece? Conhece alguma família de transformações?
- 17.31) A transformação logarítmica (natural) é apropriada para séries cuja variância é proporcional à média, tal que a porcentagem da flutuação é constante no tempo. Contudo, embora a transformação possa tornar a série estacionária na variância, pode ocorrer da série transformada não ser estacionária na média. O que você faz, então?

2.11.4- Estimação dos Parâmetros dos Modelos ARIMA(p,d,q)

2.11.4.1- Descrição

Na metodologia de Box & Jenkins, uma vez que se tenha identificado o modelo da estrutura ARIMA(p,d,q) da forma

$$\phi(B)\omega_t = \theta(B)a_t \quad \omega_t = \nabla^d Z_t \quad d = 0, 1, 2, \dots$$

com Z_t sendo as observações da série, ω_t a série diferenciada, $t = 1, 2, \dots, n$; a_t o termo de perturbação estocástica, $\nabla = 1 - B$ e B operador de retardo, estima-se o vetor de parâmetros

$$\underline{\xi}' = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_a^2]$$

usando um processo iterativo que determina o estimador de mínimos quadrados, partindo de um sistema de equações não lineares. Especificamente, aplica-se o Algoritmo de Marquardt. E, neste caso, com $d > 0$ tem-se uma amostra efetiva de $n = N - d$ observações, do tipo $\omega_t = \nabla^d Z_t$. Os $p+q+1$ parâmetros são avaliados partindo-se da suposição de Gaussianidade para o ruído $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$ $t = 1, 2, \dots, n$. Está-se considerando que ω_t tem média $\mu_\omega = 0$ e em caso contrário o parâmetro médio será também estimado e a dimensão de $\underline{\xi}$ passará para $p+q+2$.

O Princípio da Máxima Verossimilhança (Gauss 1821 – Fisher 1922) afirma que **“uma vez que o modelo esteja correto, tudo que os dados tinham para informar sobre os parâmetros está contido na função de verossimilhança”**; assim o Método da Máxima Verossimilhança é usado na estimação partindo da função de verossimilhança $L(\underline{\xi}|Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$, uma função de $\underline{\xi}$. O estimador de verossimilhança (EMV) de $\underline{\xi}$ será o valor que maximizará $L(\underline{\xi}|Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ ou $\ell = \ln[L(\underline{\xi}|Z_1, Z_2, \dots, Z_n)]$. Como se tem, por hipótese, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$ o EMV de $\underline{\xi}$ será aproximadamente o estimador de mínimos quadrados de $\underline{\xi}$, conforme foi citado. E, como se está considerando da identificação, que o modelo é estacionário e invertível do tipo ARMA(p,q) tem-se para $\omega_t = W_t - \mu_w$ a expressão:

$$\omega_t = \phi_1 \omega_{t-1} + \dots + \phi_p \omega_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t$$

E explicitando o ruído a_t em $a_t = \omega_t - \phi_1 \omega_{t-1} - \dots - \phi_p \omega_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}$

tem-se que para calcular os a_t partindo-se da expressão anterior há necessidade de valores iniciais para o ruído a e as observações ω . Isto pode ser feito de duas maneiras: a primeira chamada de Procedimento Condicional, onde os valores iniciais, desconhecidos, são valores que se supõe adequados e a segunda, conhecida como Procedimento Incondicional, na qual os valores iniciais são estimados da amostra de observações. Nestas notas será abordado apenas o Procedimento Incondicional, mas uma abordagem completa pode ser encontrada na bibliografia deste curso.

No chamado Procedimento Não-condicional ou Incondicional de estimação, o logaritmo da função de verossimilhança é dado por.

$$\ell(\underline{\xi}) = f(\underline{\eta}) - n \ln(\sigma_a^2) - \frac{S(\underline{\eta})}{2\sigma_a^2} \quad \text{onde } \underline{\eta} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q]$$

$$e \quad S(\underline{\eta}) = S(\underline{\phi}, \underline{\theta}) = \sum_{t=-\infty}^n [a_t(\underline{\omega}, \underline{\eta})]^2 \quad \text{com } a_t(\underline{\omega}, \underline{\eta}) = E(a_t | \underline{\eta}, \underline{\omega})^2$$

é denominada **Função Soma de Quadrados Não-condicional**. Box afirmou que $f(\underline{\eta})$ é importante somente para pequenos valores de n e ainda que para valores de moderados a grandes do tamanho da série n , a função $\ell(\underline{\xi})$ é **dominada** por $\frac{S(\underline{\eta})}{2\sigma_a^2}$.

Conseqüentemente, as curvas de nível (contours) da função Soma de Quadrados Não-condicionada no espaço paramétrico de $\underline{\eta}$ são aproximadamente as curvas de nível da função logaritmo da verossimilhança. Portanto, maximizar $\ell(\underline{\xi})$ corresponde a

minimizar $S(\underline{\eta})$. Assim, para calcular $S(\underline{\eta}) = S(\underline{\phi}, \underline{\theta}) = \sum_{t=-\infty}^n [a_t(\underline{\omega}, \underline{\eta})]^2$ para um dado $\underline{\eta}$,

deve-se calcular as esperanças condicionais $a_t(\underline{\omega}, \underline{\eta}) = E(a_t | \underline{\eta}, \underline{\omega})^2$ e para iniciar o processo aplica-se o procedimento conhecido como “**backforecasting**” ou **previsão para trás (passado)** calculando-se ω_{-j} , $j = 0, 1, 2, \dots$; deste modo cria-se valores para antes do início da série. Box & Jenkins, no seu trabalho, mostram que o modelo $\phi(B)\omega_t = \theta(B)a_t$ (ARIMA) é equivalente ao modelo $\phi(F)\omega_t = \theta(F)e_t$, onde F é o operador de translação ao futuro e $e_t \sim N(0, \sigma_a^2)$ é também um ruído branco. A expressão $\phi(F)\omega_t = \theta(F)e_t$ é conhecida como forma “**backward**” do processo e ω_t é função dos valores futuros de ω_t e de e_t . Note que a forma “**backward**” é, do mesmo modo que a primeira, estacionária e invertível.

Exercícios 18

18.1) Faça um esboço de desenho que mostre as curvas de nível e o mínimo da função $S(\underline{\eta})$.

18.2) (de Mínimos Quadrados Não-lineares)

Seja o modelo AR(p) $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$ ou $a_t = Z_t - \delta - \phi_1 Z_{t-1} - \dots - \phi_p Z_{t-p}$. Determine:

- A derivada de a_t em relação a ϕ_i ;
- A derivada de a_t em relação a δ ;
- Faça uma conclusão sobre os valores das derivadas;

18.3) Seja o modelo MA(1). Escreva a expressão do modelo e a expressão com a_t explicitado; o que você conclui?

Assim, do exercício anterior, para se estimar os parâmetros não podemos usar MQO (lineares) e o usual é usar-se método iterativo próprio para este problema. O método indicado é o Algoritmo de Marquardt, Box & Jenkins pg. 504.

Na estimação dos parâmetros pelo Procedimento Não-condicional, como se viu, utiliza-se a técnica de *backforecasting* (previsão para trás) para obter-se os valores iniciais dos resíduos. Na forma “backward” do modelo, tem-se:

$$e \quad \begin{aligned} \omega_t &= (1 - \theta_1 F)e_t \\ \text{e com } a_t(\underline{\omega}, \underline{\eta}) &= E(a_t | \underline{\eta}, \underline{\omega})^2 \text{ calcula-se} \\ [a_t] &= [\omega_t] + \theta_1 [a_{t-1}] \\ [e_t] &= [\omega_t] + \theta_1 [a_{t+1}] \end{aligned}$$

De modo que $[e_t] = [\omega_t] + \theta_1[a_{t+1}]$ gerará as previsões “para trás” e $[a_t] = [\omega_t] + \theta_1[a_{t-1}]$ irá gerar os $[a_t]$ considerando-se o seguinte:

- $[\omega_t] = \omega_t$, $t = 1, 2, 3, \dots, n$ sendo para trás quando $t \leq 0$;
- Os valores de $[e_0]$, $[e_{-1}]$, $[e_{-2}]$, serão nulos, dada a independência com ω_t ;
- Os valores de $[a_{-1}]$, $[a_{-2}]$, ... também serão nulos neste caso, dado que a_{-q} , a_{-q+1} , a_{-q+2} ... são independentes de ω_t ; contudo geralmente $[a_0]$, $[a_{-1}]$, $[a_{-2}]$, ... , $[a_{-q+1}]$ serão não nulos e obtidos na previsão para trás.

Exercícios 19

Considere o modelo MA(1), $\omega_t = 0,5a_{t-1} + a_t$, para os dados da série B do livro do Box & Jenkins e assuma que:

- $a_{-j} = 0$ para $j > q - 1$
- $e_{-j} = 0$ para $j = 0, 1, 2, 3, \dots$

então:

19.1) Complete a tabela seguinte:

| t | Z_t | $[a_t]$ $a_t = \omega_t + \theta_1 a_{t-1} = \omega_t + 0,5 a_{t-1}$ | $0,5[a_{t-1}]$ | $[\omega_t]$ | $0,5[e_{t+1}]$ | $[e_t]$ $e_t = \omega_t + 0,5e_{t+1}$ |
|----|-------|-------------------------------------------------------------------------|----------------|--------------|----------------|------------------------------------------|
| -1 | | | | | | $e_{-1} = 0$ |
| 0 | | | | | | $e_0 = 0$ |
| 1 | 457 | | | -3.0 | | |
| 2 | 452 | | | -5.0 | | |
| 3 | 459 | | | 7.0 | | |
| 4 | 462 | | | 3.0 | | |
| 5 | 459 | | | -3.0 | | |
| 6 | 463 | | | 4.0 | | |
| 7 | 479 | | | 16.0 | | |
| 8 | 493 | | | 14.0 | | |
| 9 | 490 | | | -3.0 | | |

19.2) Escreva a expressão da Função Soma de Quadrados Não-condicional que no procedimento de estimação deve ser minimizada e o valor encontrado para $\theta_1 = 0,5$.

2.11.4.2- Algoritmo de Estimação

No processo de encontrar o valor de $\underline{\eta}$ que minimiza $S(\underline{\eta}) = S(\underline{\phi}, \underline{\theta}) =$

$\sum_{t=-\infty}^n [a_t(\underline{\omega}, \underline{\eta})]^2$ deve-se derivar $S(\underline{\eta}) = \sum_{t=-\infty}^n [a_t(\underline{\omega}, \underline{\eta})]^2$ em relação aos parâmetros $\underline{\eta}$, mas

como se mostrou no 18.3 obtém-se um sistema de equações não lineares nos parâmetros. Então, configura-se um **problema de estimação não linear** e o que se faz é **linearizar o modelo**. Esta operação é feita desenvolvendo-se $a_t(\underline{\omega}, \underline{\eta})$ em série de Taylor em torno de um valor inicial $\underline{\eta}_0$, de modo que se obtém uma regressão dos

$a_t(\underline{\eta})$ sobre as derivadas $x_{j,t} = -\frac{\partial a_t}{\partial \eta_j} \bigg|_{\underline{\eta}=\underline{\eta}_0}$. As derivadas são calculadas numericamente

e o método de Marquardt de estimação não linear é aplicado. Maiores detalhes desse algoritmo podem ser obtidos no livro do B & J pg. 504. O algoritmo de Marquardt (D. W.) foi originalmente publicado em 1963 no Journal Soc. Ind. Appl. Math., 11 p.431.

2.11.4.3- Distribuição dos Estimadores

O estimador do vetor de parâmetros $\underline{\eta}$, de dimensão $k = p + q$, tem distribuição assintótica Gaussiana ou seja: $\hat{\underline{\eta}} \sim N_k(\underline{\eta}, \Sigma)$, onde Σ é dada por,

$$\Sigma = 2\sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S(\underline{\eta})}{\partial \eta_1^2} & \frac{\partial^2 S(\underline{\eta})}{\partial \eta_1 \eta_2} & \dots & \frac{\partial^2 S(\underline{\eta})}{\partial \eta_1 \eta_k} \\ \frac{\partial^2 S(\underline{\eta})}{\partial \eta_2 \eta_1} & \frac{\partial^2 S(\underline{\eta})}{\partial \eta_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 S(\underline{\eta})}{\partial \eta_2 \eta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 S(\underline{\eta})}{\partial \eta_k \eta_1} & \frac{\partial^2 S(\underline{\eta})}{\partial \eta_k \eta_2} & \dots & \frac{\partial^2 S(\underline{\eta})}{\partial \eta_k^2} \end{bmatrix}$$

e o estimador de máxima verossimilhança de σ_a^2 é dado por $\hat{\sigma}_a^2 = \frac{S(\hat{\underline{\eta}})}{n}$. Os estimadores $\hat{\underline{\eta}}$ e $\hat{\sigma}_a^2$ são não correlacionados quando n é grande. Então, calculando-se as derivadas numericamente e substituindo-se σ_a^2 por sua estimativa $\hat{\sigma}_a^2 = \frac{S(\hat{\underline{\eta}})}{n}$ em $\hat{\Sigma}$ tem-se estimativas das variâncias dos estimadores (diagonal principal de Σ) e estimativas das covariâncias entre os estimadores. De modo que se consegue intervalos de confiança para os parâmetros utilizando-se essas estimativas. Resumidamente, a seguir, tem-se as variâncias aproximadas dos estimadores dos parâmetros dos principais modelos:

- AR(1) $V(\hat{\phi}_1) \cong \frac{1-\phi_1^2}{n}$
- AR(2) $V(\hat{\phi}_1) \cong V(\hat{\phi}_2) = \frac{1-\phi_2^2}{n}$
- MA(1) $V(\hat{\theta}_1) \cong \frac{1-\theta_1^2}{n}$
- MA(2) $V(\hat{\theta}_1) \cong V(\hat{\theta}_2) = \frac{1-\theta_2^2}{n}$
- ARIMA(1,1) $V(\hat{\phi}_1) \cong \frac{(1-\phi_1)^2}{n} \frac{(1-\phi_1\theta_1)^2}{(\phi_1-\theta_1)^2}$ e $V(\hat{\theta}_1) \cong \frac{(1-\theta_1)^2}{n} \frac{(1-\phi_1\theta_1)^2}{(\phi_1-\theta_1)^2}$

Estimativas dessas variâncias podem ser obtidas substituindo os parâmetros pelas suas estimativas obtidas pelo algoritmo de Marquardt. Evidentemente estas contas todas devem ser feitas com computador.

EXEMPLO 14

O ajustamento de um modelo ARIMA(0,0,1) a uma série temporal com $n = 50$ pelo STATGRAPHICS forneceu os seguintes resultados:

```
-----  
Forecast model selected: ARIMA(0,0,1) with constant  
Number of forecasts generated: 12
```

Statistic

```
-----  
MSE      0,0316462  
MAE      0,127583  
MAPE     0,638704  
ME       -0,00695338  
MPE      -0,0427835  
-----
```

| ARIMA Model Summary | | | | |
|---------------------|----------|------------|---------|----------|
| Parameter | Estimate | Std. Error | t | P-value |
| ----- | | | | |
| MA(1) | 0,95495 | 0,0246577 | 38,7283 | 0,000000 |
| Mean | 20,0012 | 0,00207114 | 9657,09 | 0,000000 |
| Constant | 20,0012 | | | |
| ----- | | | | |

```
-----  
Backforecasting: yes  
Estimated white noise variance = 0,031817 with 48 degrees of freedom  
Estimated white noise standard deviation = 0,178373  
Number of iterations: 6
```

The StatAdvisor

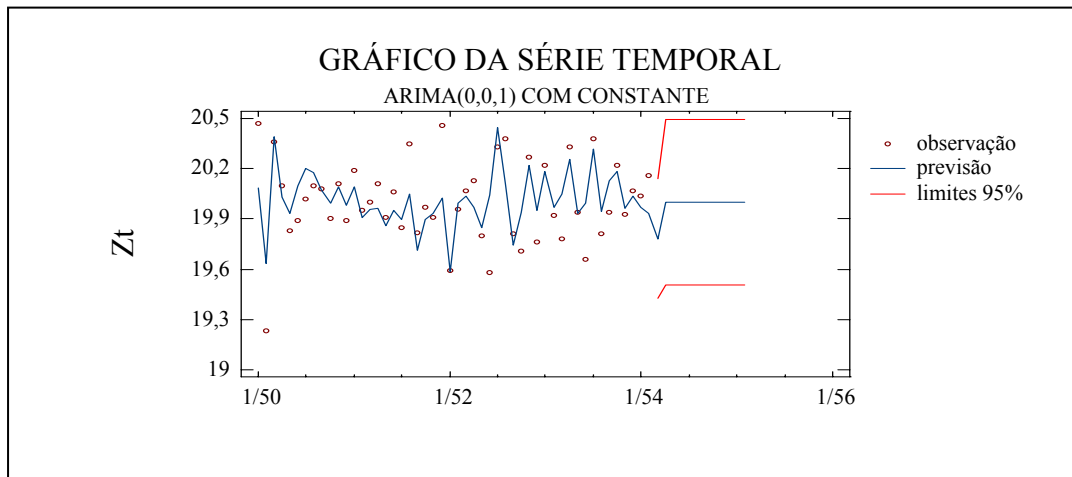
```
-----  
This procedure will forecast future values of  $Z_t$ . The data cover  
50 time periods. Currently, an autoregressive integrated moving  
average (ARIMA) model has been selected. This model assumes that the  
best forecast for future data is given by a parametric model relating  
the most recent data value to previous data values and previous noise.  
You can select a different forecasting model by pressing the alternate  
mouse button and selecting Analysis Options.
```

The output summarizes the statistical significance of the terms in the forecasting model. Terms with P-values less than 0.05 are statistically significantly different from zero at the 95% confidence level. The P-value for the MA(1) term is less than 0.05, so it is significantly different from 0.0. The P-value for the constant term is less than 0.05, so it is significantly different from 0.0. The estimated standard deviation of the input white noise equals 0,178373.

The table also summarizes the performance of the currently selected model in fitting the previous data. It displays:

- (1) the mean squared error (MSE)
- (2) the mean absolute error (MAE)
- (3) the mean absolute percentage error (MAPE)
- (4) the mean error (ME)
- (5) the mean percentage error (MPE)

Each of the statistics is based on the one-ahead forecast errors, which are the differences between the data value at time t and the forecast of that value made at time $t-1$. The first three statistics measure the magnitude of the errors. A better model will give a smaller value. The last two statistics measure bias. A better model will give a value close to 0.0.



2.12- Verificação da Validade do Modelo: Testes

2.12.1 – Teste da Sobrefixação

Quando se tem um modelo ajustado é necessário verificar se ele realmente corresponde aos dados da série ou se deve ser procurado um modelo alternativo. Um teste muito importante é o Teste da Sobrefixação ou do Superajustamento. Consiste, basicamente, da elaboração de um modelo com um número de parâmetros superior ao do modelo fixado e que cubra as supostas direções de discrepâncias.

EXEMPLO 15

Seja o modelo $Z_t = 0,8a_{t-1} + a_t$. Através de simulação gerou-se 200 valores da série Z_t e esta série foi submetida a análise Box & Jenkins. O correlograma e o correlograma parcial estimados identificaram corretamente um processo com estrutura geradora MA(1) e o seu parâmetro estimado foi $\hat{\theta}_1 = 0.845$ com $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}_1} = 0.038$. Aplicando-se o Teste da Sobrefixação à série ajustam-se dois modelos alternativos distintos (o que poderia ser indicado pelos gráficos da FAC e FACP estimadas):

- MA(2) com parâmetros estimados em $\hat{\theta}_1 = 0.841$ e $\hat{\theta}_2 = -0.02$
- ARMA(1,1) com parâmetros estimados em $\hat{\phi}_1 = -0.004$ e $\hat{\theta}_1 = 0.951$

Observa-se que os valores estimados $\hat{\theta}_2 = -0.002$ e $\hat{\phi}_1 = -0.004$ são muito baixos e não são estatisticamente diferentes de zero (os valores-p do teste "t" para os parâmetros extras foram todos maiores que 0.05, mostrando que os parâmetros não são estatisticamente diferentes de zero). Então o modelo MA(1) é o correto.

2.12.2 – Teste de Comparação das Autocorrelações

Este teste verifica a validade do modelo identificado pelos correlogramas através da comparação entre as autocorrelações estimadas a partir da série e as correspondentes autocorrelações obtidas pela Função Geradora das Autocorrelações usando os parâmetros estimados.

Exercícios 20:

20.1) Gere uma série com 100 termos de um processo da estrutura AR(1).

- Estime o modelo para esta série;
- Escreva os valores das 5 primeiras autocorrelações e autocorrelações parciais estimadas;
- Escreva a expressão da FAC dos modelos da estrutura AR(1);
- Escreva a expressão da FACP dos modelos da estrutura AR(1).
- Compare os valores de **b** e de **c** e **d** em uma tabela.

2.12.3 – Testes Aplicados aos Resíduos

Seja o vetor $\hat{\eta}' = [\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q]$ com os parâmetros estimados para um modelo ARIMA(p,d,q). Os resíduos estimados \hat{a}_t são dados por:

$$\hat{a}_t = \hat{\theta}^{-1}(B) \cdot \hat{\phi}(B) \omega_t$$

Então, se o modelo identificado é adequado para representar o processo gerador da série os resíduos estimados \hat{a}_t tendem para um **ruído branco** a_t de média nula e variância σ_a^2 ou seja $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$ com o crescimento do número de termos da série diferenciada $n = N - d$. Neste caso, dois testes são aplicados:

A) Teste Portmanteau (Portmanteau Test)

Neste teste calcula-se as “K” primeiras auto-correlações dos resíduos, isto é $\rho_i(\hat{a})$ $i = 1, 2, \dots, K$. O valor de K não precisa ser maior que 25 ($K \leq 25$). Se o modelo identificado é adequado, então a estatística

$$Q = n \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2(\hat{a}) \sim \chi_M^2 \text{ (Box \& Pierce)}$$

onde $M = K - m$ com $m = p + q$, e

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^K (n-k)^{-1} \hat{\rho}_k^2(\hat{a}) \sim \chi_M^2 \text{ (Ljung \& Box)}$$

Exercícios 21:

21.1) Escreva a hipótese nula testada pelo Portmanteau Test descrito acima.

21.2) Considere o modelo $\nabla^2 Z_t = \omega_t = a_t - 0.13a_{t-1} - 0.12a_{t-2}$ ajustado a série C do livro do Box & Jenkins que tem um tamanho $N = 226$. O cálculo das autocorrelações dos resíduos resultou nos números da tabela adiante:

| k | $\hat{\rho}_k(\hat{a})$ | k | $\hat{\rho}_k(\hat{a})$ | K | $\hat{\rho}_k(\hat{a})$ | k | $\hat{\rho}_k(\hat{a})$ | k | $\hat{\rho}_k(\hat{a})$ |
|---|-------------------------|----|-------------------------|----|-------------------------|----|-------------------------|----|-------------------------|
| 1 | 0.020 | 6 | -0.033 | 11 | -0.129 | 16 | -0.050 | 21 | 0.007 |
| 2 | 0.032 | 7 | 0.022 | 12 | 0.063 | 17 | 0.153 | 22 | 0.132 |
| 3 | -0.125 | 8 | -0.056 | 13 | -0.084 | 18 | -0.092 | 23 | 0.012 |
| 4 | -0.078 | 9 | -0.130 | 14 | 0.022 | 19 | -0.005 | 24 | -0.012 |
| 5 | -0.011 | 10 | 0.093 | 15 | -0.006 | 20 | -0.015 | 25 | -0.127 |

- a) Aplique o Teste Portmanteau na versão de Box & Pierce ao nível de 5% de significância;
- b) Aplique o Teste Portmanteau na versão de Ljung & Box ao nível de 5% de significância.

B) Teste do Periodograma Acumulado

Este teste consiste na comparação dos periodogramas acumulados da série dos resíduos estimados \hat{a}_t e de um ruído branco a_t para verificar-se a existência de componentes periódicas na série dos resíduos estimados \hat{a}_t .

Neste caso a análise da série temporal é baseada na suposição de que ela é constituída de ondas senoidais e cosenoidais com diferentes frequências. O periodograma foi originalmente usado para detectar e estimar a amplitude da componente senoidal, de frequência conhecida. Depois foi usada por Box & Jenkins para verificar a aleatoriedade da série (geralmente a série de resíduos após ajustar-se um modelo), onde se considera a possibilidade de que componentes periódicas de desconhecidas frequências podem ainda permanecer na série. O periodograma (estimador do espectro do processo) da série temporal a_t $t=1,2, \dots, n$ é definido por

$$I_a(f_i) = \frac{2}{n} \left[\left(\sum_{t=1}^n a_t \cos(2\pi f_i t) \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^n a_t \sin(2\pi f_i t) \right)^2 \right]$$

onde a frequência $f_i = i/n$ $i = 1, 2, 3, \dots, q$ com $q = \frac{n-1}{2}$ e $I(f_i)$ é chamada

intensidade da frequência f_i . Então, o periodograma possui $q = \frac{n-1}{2}$ valores se n é

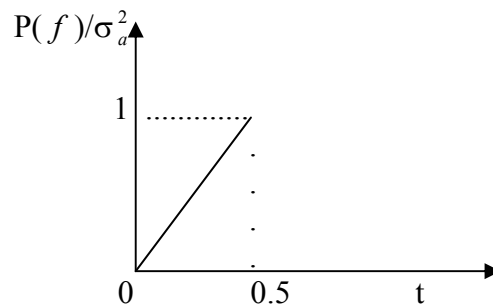
ímpar e quando n é par tem-se $i = 1, 2, \dots, q-1$ e $I(f_q) = Na_q^2$. Foi mostrado por Bartlett que o periodograma acumulado providencia um meio eficaz de detectar não-randomicidade periódica. Um pico (spike) na frequência $f_i = i/n$ indica uma periodicidade de período i/f_i . A função espectral $p(f)$ para o ruído branco tem um valor constante igual a $2\sigma_a^2$ no domínio da frequência $0 - 0.5$ ciclos. Consequentemente, a função espectral acumulada para o ruído branco é

$$P_a(f) = \int_0^f p(g) dg$$

e no caso do ruído branco $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$ tem-se

$$P_a(f) = \int_0^f 2\sigma_a^2 dg = \begin{cases} 0, & \text{se } f < 0 \\ 2\sigma_a^2 f & 0 \leq f < 1/2 \\ \sigma_a^2 & f \geq 1/2 \end{cases}$$

ou seja, para o ruído branco a_t o espectro acumulado de potência varia linearmente com a frequência.



]Assim, para a série dos resíduos \hat{a}_t , calcula-se

- O periodograma da série $I(f_i)$ com $i = 1, 2, \dots, n/2$
- O periodograma normalizado acumulado

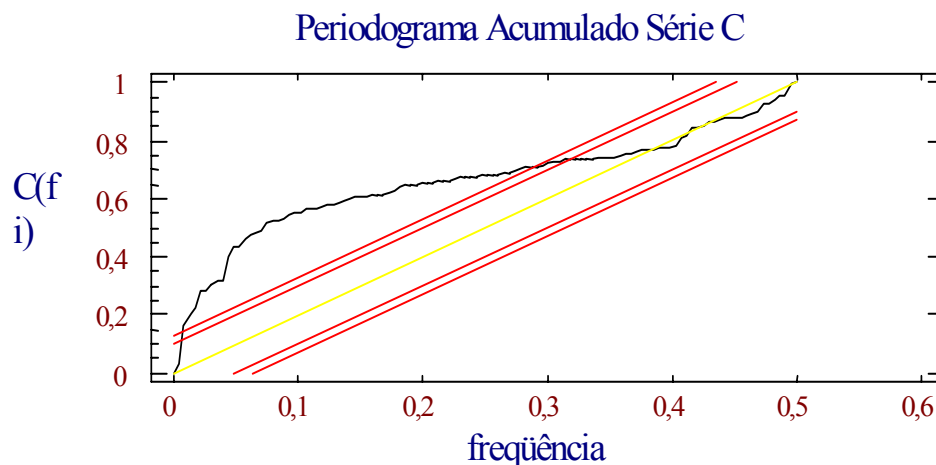
$$c(f_i) = \frac{1}{n\hat{\sigma}_a^2} \sum_{j=1}^i I(f_j) \quad (\text{estimador de } P(f)/\sigma_a^2)$$

Então, quando a série \hat{a}_t se aproxima do ruído branco a função $c(f_i) \times f_i$ tem comportamento linear entre os pontos $(0 ; 0)$ e $(0,5 ; 1)$ e aceita-se o modelo fixado como válido. Ainda, como o periodograma acumulado está para o espectro teórico assim como a distribuição de frequências acumuladas observadas está para a experimental tem-se que pode ser usado o teste de Kolmogorov-Smirnov para traçar linhas limites próximas da linha teórica e isto serve para indicar com uma probabilidade determinada a aproximação de \hat{a}_t para o ruído branco.

Exercícios 22:

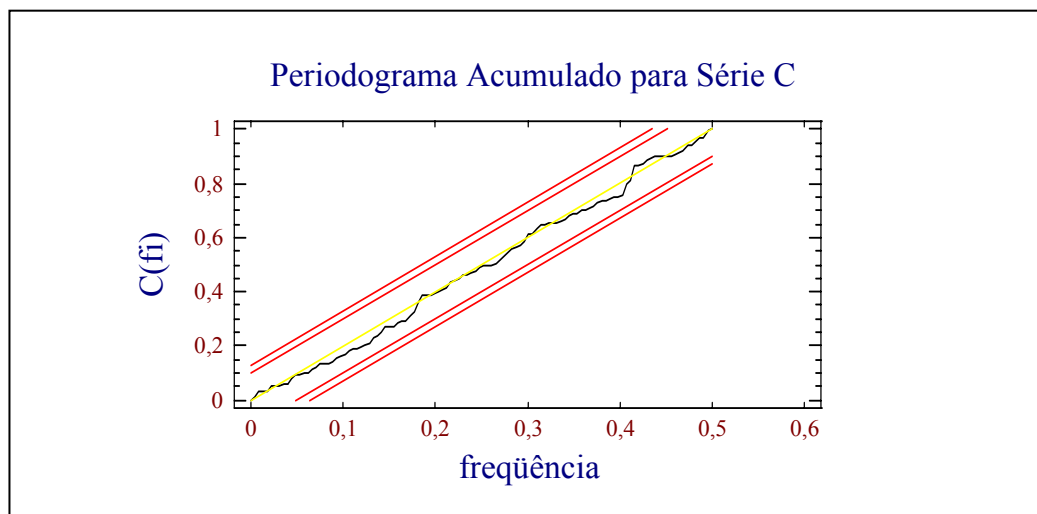
22.1) Faça um esboço da figura que mostra a linha teórica e as linhas limites.

22.2) Considere o modelo ARIMA(0,1,1) ajustado a série C do livro de Box & Jenkins. Mostre o gráfico da figura do exercício 22.1 para este caso e comente o resultado.



Observa-se que o periodograma situa-se fora das linhas limites, indicando que o modelo da estrutura ARIMA(0, 1, 1) não se ajusta adequadamente. Os resíduos não estão próximos do ruído branco. Existe ainda parte sistemática dos dados para ser absorvida pelo modelo (adequado).

- 22.3) Considere o modelo ARIMA(2,0,0) ajustado a série C do livro de Box & Jenkins. Mostre um esboço da figura do exercício 22.1 para este caso e comente o resultado.



O modelo ARIMA(2,0,0) mostra-se adequado aos dados, pois os resíduos estão próximos do ruído branco. Praticamente, não existe parte sistemática nos resíduos para se absorver.

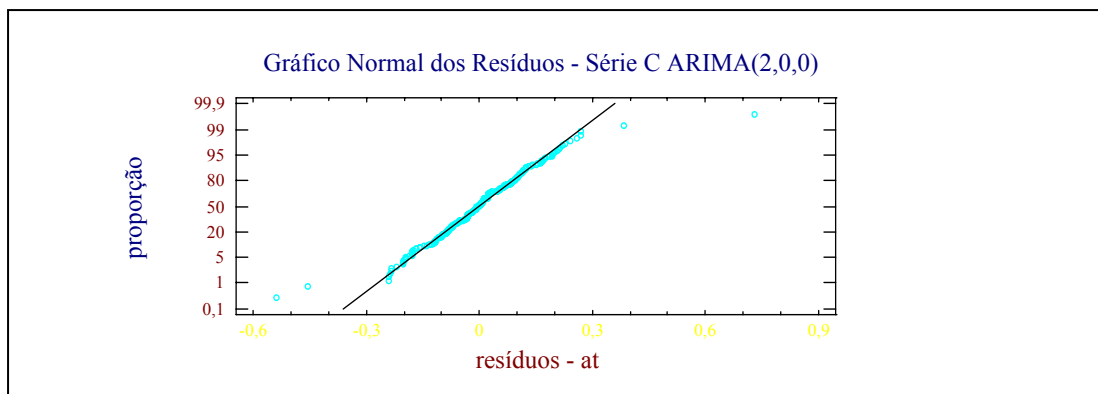
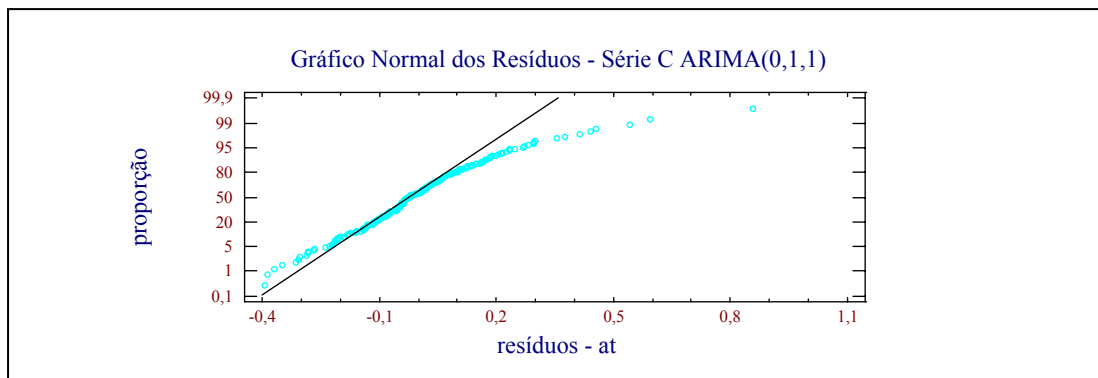
C) Gráfico Normal dos Resíduos (Normal Probability Plot)

Plotando os resíduos ordenados a_i contra o escore padronizado $z_i = \Phi^{-1}[(i - 1/2)/n]$, onde $\Phi(k) = \int_{-\infty}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$, tem-se o ajuste de uma reta pela origem $\hat{z}_i = \hat{\beta}_0 a_i$. Sendo que tradicionalmente o Gráfico Normal referencia o gráfico a_i x $(i - 1/2)/n$ na escala probabilística normal.

Exercícios 23:

- 23.1) Descreva o Gráfico Normal dos Resíduos.

23.2) Mostre o Gráfico Normal dos Resíduos para os modelos ajustados nos exercícios 22.2 e 22.3.



O modelo ARIMA(2,0,0) mostra-se adequado aos dados, pois os resíduos estão próximos do ruído branco, não existindo, praticamente, parte sistemática nos resíduos para se absorvida.

D) Teste da Autocorrelação Residual

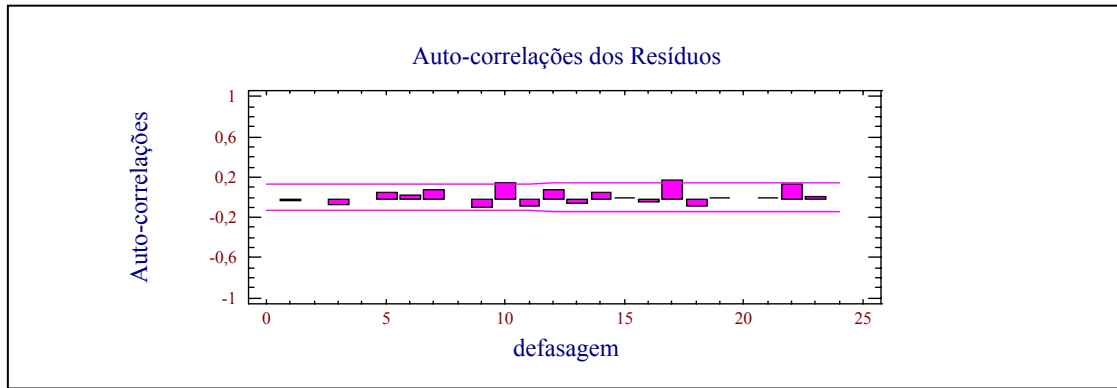
Quando o modelo ajustado é adequado, os resíduos estimados, \hat{a}_t , deverão ser muito próximos de a_t (ruído branco) conseqüentemente deverão ser aproximadamente não correlacionados. Então, o gráfico da FAC para a série dos resíduos deve mostrar valores situados num intervalo dentro do qual a autocorrelação é considerada nula. Espera-se que aproximadamente $\hat{\rho}_k \sim N(0, 1/n)$. Especificamente, tem-se para a estatística

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})}{\sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2} \text{ e um intervalo de confiança nos limites } \pm \frac{2}{\sqrt{n}} \text{ é adequado}$$

para se verificar se os resíduos têm correlações nulas.

Exercício 24

Construa o gráfico das autocorrelações da série dos resíduos do ajuste do modelo de estrutura ARIMA(2,0,0) à série C do livro de B & J.



Observa-se que todas as autocorrelações estão dentro do intervalo de confiança para hipótese de nulidade do parâmetro ρ_k .

2.13- Previsão: Formas de Previsão

A aplicação da modelagem Box & Jenkins ARIMA é feita na previsão de valores futuros da série temporal. Qualquer modelo ARIMA pode ser escrito nas seguintes formas para previsão: forma de equações de diferenças, forma de choques aleatórios e forma invertida. O mais conveniente modo de se fazer previsões com modelos ARIMA é escrever o modelo na **forma de equações de diferenças**. Seja t o período corrente (origem), quando se faz previsões o interesse está no valor futuro da variável observada, $Z_{t+\ell}$, onde $\ell \geq 1$. O período t é chamado **origem da previsão** e ℓ é o **horizonte de previsão**. A previsão de $Z_{t+\ell}$ é denotada por $\hat{Z}_{t+\ell}$ e é a *esperança matemática condicional* de $Z_{t+\ell}$,

$$\hat{Z}_t(\ell) = E(Z_{t+\ell} | I_t)$$

onde I_t é o conjunto $\{..... Z_{t-3}, Z_{t-2}, Z_{t-1}, Z_t\}$ (a série observada). Então, tomando a esperança condicional em.

$$Z_{t+\ell} = \xi_1 Z_{t+\ell-1} + \xi_2 Z_{t+\ell-2} + + \xi_{p+d} Z_{t+\ell-p-d} - \theta_1 a_{t+\ell-1} - \theta_2 a_{t+\ell-2} - - \theta_q a_{t+\ell-q} + a_{t+\ell}$$

onde $\xi(B) = \phi(B)\nabla^d = \phi(B)(1-B)^d$, obtém-se:

$$\hat{Z}_t(\ell) = E(Z_{t+\ell} | I_t) = \xi_1 [Z_{t+\ell-1}] + \xi_2 [Z_{t+\ell-2}] + ... + \xi_{p+d} [Z_{t+\ell-p-d}] - \theta_1 [a_{t+\ell-1}] - \theta_2 [a_{t+\ell-2}] - ... - \theta_q [a_{t+\ell-q}] + [a_{t+\ell}] \quad \ell \geq 1$$

e ainda, deve-se considerar que:

- $[Z_{t+\ell}] = \hat{Z}_t(\ell) \quad \ell > 0$
- $[Z_{t+\ell}] = Z_{t+\ell} \quad \ell \leq 0$
- $[a_{t+\ell}] = 0 \quad \ell > 0$
- $[a_{t+\ell}] = a_{t+\ell} \quad \ell \leq 0$

A variância do erro de previsão é estabelecida partindo-se da forma de choques aleatórios, isto é, substitui-se os termos AR por uma série infinita de termos MA,

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i} \quad \text{com } \psi_0 = 1$$

$$Z_t = \mu + (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) a_t$$

$$Z_t = \mu + \psi(B) a_t$$

Suponha a origem da previsão em t e pretende-se fazer a previsão ℓ períodos a frente ou seja $\hat{Z}_t(\ell)$ preverá o valor de $Z_{t+\ell}$. É claro que $\hat{Z}_t(\ell)$ é uma função linear da origem Z_t e das observações anteriores $Z_{t-1}, Z_{t-2}, Z_{t-3}, \dots$. Logo será uma função linear dos choques aleatórios $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$ e a melhor previsão será então,

$$\hat{Z}_t(\ell) = \psi_\ell^* a_t + \psi_{\ell+1}^* a_{t-1} + \psi_{\ell+2}^* a_{t-2} + \dots \text{ com os pesos } \psi_\ell^*, \psi_{\ell+1}^*, \psi_{\ell+2}^*, \dots$$

E, com a soma infinita do valor corrente e choques aleatórios, $Z_{t+\ell} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t+\ell-i}$ o erro médio quadrático será

$$E[Z_{t+\ell} - \hat{Z}_t(\ell)]^2 = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{\ell-1}^2) \sigma_a^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \{\psi_{\ell+j} - \psi_{\ell+j}^*\}^2 \sigma_a^2$$

e quando $\psi_{\ell+j} = \psi_{\ell+j}^*$ tem-se o valor mínimo de $E[Z_{t+\ell} - \hat{Z}_t(\ell)]^2$ e então $Z_{t+\ell} = \hat{Z}_t(\ell) + e_t(\ell)$ onde $e_t(\ell)$ é o erro de previsão e ainda

$$E[e_t(\ell)] = 0 \quad \text{e} \quad V[e_t(\ell)] = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{\ell-1}^2) \sigma_a^2$$

Finalmente, tem-se que os resíduos um passo a frente é $e_t(1) = Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1) = a_{t+1}$ e o intervalo de $(1 - \alpha)\%$ de confiança para Z_{t+1} é

$$P(\hat{Z}_t(\ell) - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{V[e_t(\ell)] \hat{\sigma}_a^2} \leq Z_{t+\ell} \leq \hat{Z}_t(\ell) + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{V[e_t(\ell)] \hat{\sigma}_a^2}) = 1 - \alpha$$

Exercícios 25

25.1) Seja um modelo ARIMA(1,0,1).

- Escreva a equação do modelo em ω_t ;
- Determine os coeficientes ψ_j e a expressão geral para ψ_j ;
- determine a variância dos erros de previsão $\hat{e}_t(\ell)$;
- Escreva a expressão do intervalo de previsão de nível $(1 - \alpha)$ de confiança.
- determine as expressões das previsões para os horizontes $\ell = 1$ e $\ell = 2$.

25.2) Seja o modelo ARIMA(1,0,1) e considere o modelo estimado com base em $n = 60$ observações que forneceu as estatísticas: $\hat{\mu} = 101.26$, $\hat{\phi}_1 = 0.62$ e $\hat{\theta}_1 = -0.58$. E ainda tem-se $Z_{60} = 96.91$ e $\hat{Z}_{59}(1) = 98.28$.

- Escreva o modelo estimado;
- Faça a previsão para a próxima observação Z_{61} ;
- Faça a previsão para a observação Z_{62} ;
- Faça a previsão para a observação Z_{63} .

25.3) Seja Z_t uma série temporal cujo modelo ARIMA correspondente, identificado e estimado, é $Z_t = 100 + a_t - 0.8a_{t-1} + 0.25a_{t-2}$. Tem-se as observações da série $Z_1 =$

20, $Z_2 = 26$, $Z_3 = 23$, $Z_4 = 26$ e $Z_5 = 28$. Considere $Z_0 = 100$ (média estimada) e $Z_j = \hat{Z}_j(1) = 100$ para $j = 0, -1, -2, \dots$

- Determine as previsões para Z_6, Z_7, \dots feitas a partir da origem $t = 5$.
- O que você pode dizer sobre estas previsões?
- Qual a equação de previsão?

25.4) Seja o modelo ARIMA(0,2,2). Calcule efetivamente as previsões $\hat{Z}_4(1)$, $\hat{Z}_5(1)$ e $\hat{Z}_6(1)$ sabendo-se que $Z_1 = 5$, $Z_2 = 8$, $Z_3 = 11$, $Z_4 = 14$, $Z_j = Z_j(1) = 0$ para $j = 0, -1, -2, \dots$

2.14- Séries Temporais Sazonais

As séries temporais freqüentemente mostram comportamento *periódico*. Uma série temporal tem um padrão periódico quando se repete em todo período s , $s > 1$. O mais comum tipo de periodicidade é o sazonal.

Os modelos Box & Jenkins para séries sazonais são:

2.14.1- Modelos MA(Q) Puramente Sazonais

A expressão dos modelos B & J para a estrutura MA(Q) é:

$$\omega_t = a_t - \Theta_1 a_{t-s} - \dots - \Theta_Q a_{t-Qs}$$

onde $\Theta_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots$ e $\Theta_i \neq 0$ para $i = s, 2s, \dots, Qs$ e s é o comprimento do período sazonal ($s = 12, 4$, etc.). Então, o MA(Q) puramente sazonal tem parâmetros não nulos nos termos $s, 2s, \dots, Qs$ e ainda é *idêntico a um MA(Qs) simples (não sazonal)*.

O correlograma da FAC, ρ_k , é semelhante ao MA(q) exceto que com valores somente em $s, 2s, \dots, Qs$.

Exercícios 26:

26.1) Escreva a expressão do modelo MA(1) puramente sazonal para a série temporal Z_t .

26.2) Escreva a expressão do modelo MA(Q), $\omega_t = a_t - \Theta_1 a_{t-s} - \dots - \Theta_Q a_{t-Qs}$, em função de um polinômio $\Theta(B)$.

26.3) Faça um esboço do correlograma da FAC dos modelos da estrutura MA(Q) puramente sazonal. Sabe-se que não existe qualquer tipo de dependência dentro de um período sazonal e sim entre períodos sazonais.

2.14.2- Modelos AR(P) Puramente Sazonais

A expressão dos modelos B & J para a estrutura AR(P) é:

$$\omega_t = \Phi_1 \omega_{t-s} + \Phi_2 \omega_{t-2s} + \dots + \Phi_P \omega_{t-Ps} + a_t$$

onde $\Phi_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots$ e $\Phi_i \neq 0$ para $i = s, 2s, \dots, Ps$ e s é o comprimento do período sazonal ($s = 12, 4$, etc.). Então o AR(P) puramente sazonal tem parâmetros não nulos nos termos $s, 2s, \dots, Ps$ e ainda é *idêntico a um AR(Ps) simples (não sazonal)*.

Exercícios 27:

27.1) Escreva a expressão do modelo AR(1) puramente sazonal para a série temporal ω_t .

27.2) Escreva a expressão do modelo AR(P), $\omega_t = \Phi_1 \omega_{t-s} + \Phi_2 \omega_{t-2s} + \dots + \Phi_P \omega_{t-Ps} + a_t$ em função de um polinômio $\Phi(B)$.

27.3) Faça um esboço do correlograma da FAC dos modelos da estrutura AR(P) puramente sazonal. Sabe-se que não existe qualquer tipo de dependência dentro de um período sazonal e sim entre períodos sazonais.

2.14.3- Modelos ARIMA Multiplicativos

Quando as séries temporais são do tipo com correlação serial entre e dentro dos períodos sazonais tem-se a seguinte formulação geral:

$$\Phi(B^s)\phi(B)\nabla_s^D\nabla^d Z_t = \Theta(B^s)\Theta(B)a_t$$

onde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$,

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q,$$

$$\Phi(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \dots - \Phi_P B^{Ps},$$

$$\Theta(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \dots - \Theta_Q B^{Qs},$$

$$\nabla^d = (1 - B)^d \text{ e } \nabla_s^D = (1 - B^s)^D$$

A razão do modelo multiplicativo é que:

- $\Phi(B^s)\nabla_s^D Z_t = \Theta(B^s)b_t$

- $\phi(B)\nabla^d b_t = \theta(B)a_t$

O ruído b_t de entrada do modelo puramente sazonal não é branco, sendo modelável por um ARIMA(p,d,q) simples. A notação do modelo multiplicativo sazonal é:

$$\text{ARIMA}(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$$

2.14.4- Identificação dos Modelos ARIMA Multiplicativos

A identificação destes modelos é feita também através dos correlogramas da FAC e FACP, $\hat{\rho}_k$ e $\hat{\phi}_{kk}$. Lembrando que se tem uma estrutura ARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)_s que é idêntica a estrutura ARMA(p+sP,q+sQ) aplicada a série $\omega_t = \nabla_s^D \nabla^d Z_t$ com muitos coeficientes ϕ 's e θ 's nulos.

- O comportamento da FAC, ρ_k , para os modelos da estrutura ARIMA(0,d,q)x(0,D,Q)_s (puramente MA) é o seguinte: $\rho_k \neq 0$ para $k = "is \pm j"$; $i = 0, 1, 2, \dots, Q$ e $j = 0, 1, 2, \dots, q$.

Exercícios 28:

- 28.1) Faça um esboço das posições onde a FAC não é nula de acordo com o descrito anteriormente.
- 28.2) Escreva a expressão do Modelo Arima Sazonal (SARIMA), de forma detalhada.
- 28.3) Faça o detalhamento do Modelo MA(Q) puramente sazonal.
- 28.4) Faça o detalhamento do Modelo AR(P) puramente sazonal.
- 28.5) Faça o detalhamento do Modelo ARMA(P,Q) puramente sazonal.
- 28.6) Faça um esboço da FAC e da FACP do Modelo ARIMA puramente MA.
- 28.7) Faça um esboço da FAC e da FACP do Modelo ARIMA puramente AR.

3. MODELOS DE DECOMPOSIÇÃO: Tendência e sazonalidade

3.1 – Introdução

Na **decomposição em componentes** tem-se que uma série temporal $\{Z_t, t = 1, 2, \dots, n\}$, é escrita como a soma de três componentes: tendência, sazonalidade e a componente aleatória, ou seja, $Z_t = T_t + S_t + a_t$ $t = 1, 2, \dots, n$. Muitas vezes a série tem um comportamento de crescimento ou de decrescimento dos valores registrados, com o tempo, isto configura o que se entende por tendência. Pode-se também dizer que: “existe uma evolução de longo prazo relacionada a fatores econômicos e que determinam a variável”. E, quando a série apresenta valores muito acima da média ou muito abaixo da média em períodos aproximadamente fixos de tempo tem-se, então, o que se entende por sazonalidade. Da mesma forma, pode-se dizer que: ***“ocorrem oscilações periódicas caracterizadas por ocorrências de uma ou duas vezes por período completo e que estão relacionadas com os costumes sociais e que terminam influenciando a atividade econômica”***. A chamada componente cíclica era historicamente incluída no modelo, contudo, “não existem evidências de que séries macroeconômicas modernas contenham outras componentes periódicas além da sazonal” (Granger e Newbold em *Forecasting Economic Times Series*, 1977, Academic Press). Se o modelo adotado é o multiplicativo $Z_t = T_t \cdot S_t \cdot a_t$ $t = 1, 2, \dots, n$, pode-se transformá-lo em aditivo tomando-se logaritmos,

$$Y_t = \ln(Z_t) = \ln(T_t) + \ln(S_t) + \ln(a_t).$$

3.2 – Tendência

Suponha o modelo sem a componente sazonal, ou seja: $Z_t = T_t + a_t$, onde $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$ e o objetivo é estimar a tendência T_t . Os métodos mais usados para estimar a tendência são:

- Ajustar uma função do tempo $f(t)$, que pode ser uma reta ($Z_t = \beta_0 + \beta_1 t$), uma função quadrática ($Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$), uma função exponencial ($Z_t = \exp(\beta_0 + \beta_1 t)$) ou uma curva S ($Z_t = \exp(\beta_0 + \beta_1/t)$);
- Suavizar os valores da série em torno de um ponto, para estimar a tendência nesse ponto;

A estimativa da tendência, \hat{T} , fará com se tenha a série ajustada pela tendência ou ainda a série ajustada livre da tendência, que é $Y_t = Z_t - \hat{T}$.

EXEMPLO 3.1

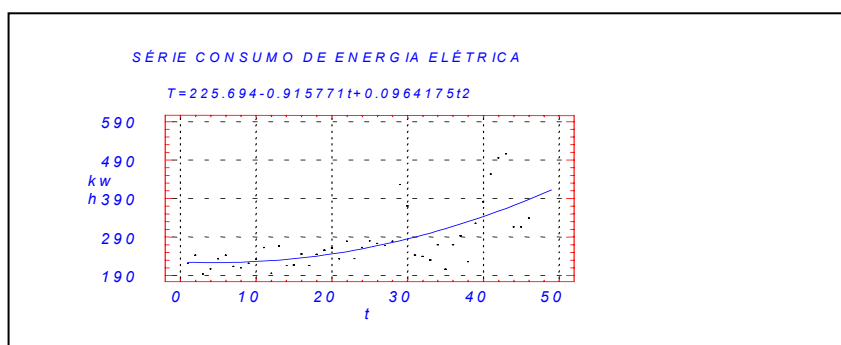
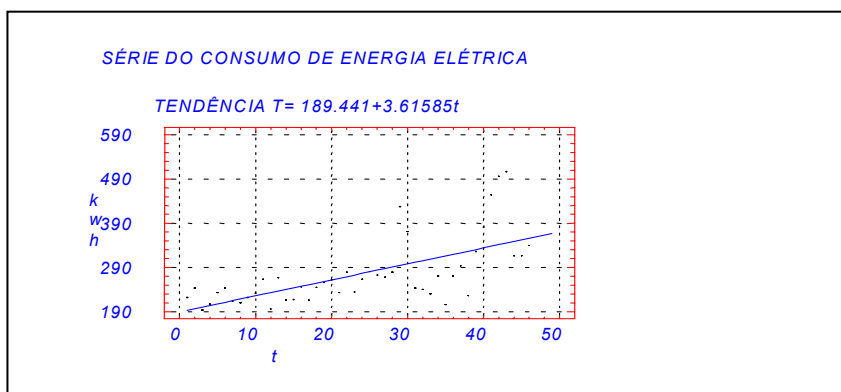
Suponha os dados do consumo de energia elétrica na residência A, do exemplo 1 do item 1.1. Ajustou-se, como ilustração, os quatro modelos citados acima e os resultados são os seguintes:

| | | | | | |
|-------------------------------------------|-----------------|---------|---------|----------|----------|
| Dados: kw | Percentual: 100 | | | | |
| Sumário da previsão | M.E. | M.S.E. | M.A.E. | M.A.P.E. | M.P.E. |
| 189.441+3.61585t | 0.00000 | 3191.45 | 39.2032 | 13.4320 | -2.98966 |
| 225.694-0.915771t+0.0964175t ² | 0.00000 | 2960.75 | 38.2993 | 12.9938 | -2.84081 |
| EXP(5.30312+0.0119815t) | 4.71320 | 3158.16 | 36.9882 | 12.3631 | -1.43862 |
| EXP(5.62797-0.450781/t) | 7.45533 | 5071.20 | 48.4519 | 16.2664 | -2.29206 |

Observa-se, pelo erros, que o modelo que se ajustou melhor aos dados foi o quadrático, e os últimos quatro valores da série observados e ajustados pelos quatro modelos e, ainda, as três previsões imediatas são:

| 43-46 kwh | 43-49 reta | 43-49 quadr | 43-49 expo | 43-49 C-S |
|-----------|------------|-------------|------------|-----------|
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| 506 | 344.9 | 364.5 | 336.4 | 275.2 |
| 316 | 348.5 | 372.0 | 340.4 | 275.3 |
| 316 | 352.1 | 379.7 | 344.5 | 275.3 |
| 339 | 355.7 | 387.5 | 348.7 | 275.4 |
| | 359.3 | 395.6 | 352.9 | 275.4 |
| | 363.0 | 403.8 | 357.1 | 275.4 |
| | 366.6 | 412.3 | 361.4 | 275.5 |

Os gráficos das tendências ajustadas para os dois primeiros modelos são:



É possível, também, estimar a tendência suavizando (amortecendo) os valores ou seja, usa-se Z_t^* para estimar Z_t com $Z_t^* = \sum_{i=-m}^m c_i Z_{t+i}$ e $t = m+1, m+2, \dots, n-m$ e $\sum_{i=-m}^m c_i = 1$

1. Assim, o que se faz é aplicar médias móveis de ordem $2m + 1$, tem-se $c_i = \frac{1}{2m+1}$ e

$$Z_t^* = \frac{\sum_{i=-m}^m Z_{t+i}}{2m+1}.$$

EXEMPLO 3.2

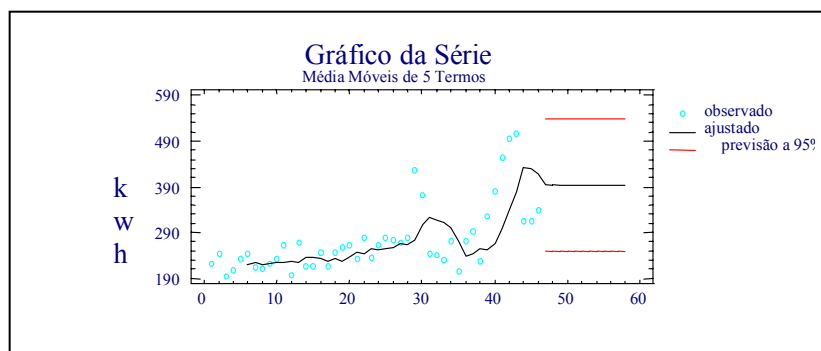
Suponha os dados do consumo de energia elétrica na residência A, do exemplo 3.1, anterior. Aplicou-se um amortecimento por médias móveis com os resultados a seguir.

Valores ajustados para a variável kWh

Modelo: Média Móveis de 5 termos

| Período | Dados | valores ajustados | Resíduo |
|---------|-------|-------------------|---------|
| 1,0 | 222,0 | | |
| 2,0 | 243,0 | | |
| 3,0 | 194,0 | 219,8 | 23,2 |
| 4,0 | 207,0 | 242,0 | -10,0 |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| 44,0 | 316,0 | 417,6 | -78,6 |
| 45,0 | 316,0 | . | . |
| 46,0 | 339,0 | . | . |

| Período | Previsão | Lim. inf. de 95% | Lim. Sup. de 95% |
|---------|----------|------------------|------------------|
| 47,0 | 394,6 | 249,966 | 539,234 |
| 48,0 | 394,6 | 249,966 | 539,234 |
| 49,0 | 394,6 | 249,966 | 539,234 |



3.3 – Sazonalidade

A sazonalidade determinística pode ser estimada usando-se métodos de regressão. Assim, tomando-se o modelo $Z_t = T_t + S_t + a_t$ $t = 1, 2, \dots, n$, tem-se a tendência $T_t = \sum_{i=0}^m \beta_i t^i$ e a sazonalidade $S_t = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i d_{it}$, onde d_{it} são variáveis periódicas (senos, cossenos ou variáveis sazonais “dummies”). Neste caso, está-se tomando a sazonalidade como constante e independente de t . Assim, tem-se $d_{it} = 1$ se o período t corresponde ao mês i , $i = 1, 2, \dots, 12$ e zero em caso contrário. E, ainda a soma dos pesos $\sum_{i=1}^{12} \alpha_i = 0$, $t = 1, 2, \dots, n$. Mas, neste com estas suposições não se tem uma matriz de posto completo e sim de posto $m + 12$ e tem-se $m + 13$ parâmetros, ou seja, α_i , $i = 1, 2, \dots, 12$ e β_i , $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Logo o indicado é criar-se mais uma equação e impõe-se a restrição $\sum_{i=1}^{12} \alpha_i = 0$. De modo que assim tem-se o modelo de posto completo

$$Z_t = \sum_{i=0}^m \beta_i t^i + \sum_{i=1}^{11} \alpha_i D_{it} + a_t \quad t = 1, 2, \dots, n$$

e ainda deve-se observar que $D_{it} = 1$ se o período t corresponde ao mês i , -1 se o período t corresponde ao mês 12 e zero em caso contrário. Convém destacar que o modelo na forma matricial tem o vetor das observações \underline{Z} de dimensão n , a matriz ${}_n C_{m+1}$ da parte da tendência, o vetor $\underline{\beta}$ de dimensão $m+1$ dos parâmetros do modelo da tendência, a matriz ${}_n D_{11}$ da parte sazonal, o vetor $\underline{\alpha}$ de dimensão 11 dos índices de sazonalidade e a parte aleatória com o vetor \underline{a} de dimensão n . Portanto tem-se:

$$\underline{Z} = C\underline{\beta} + D\underline{\alpha} + \underline{a}$$

$$\text{onde } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & n & \dots & n^m \end{bmatrix}, \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{m+1} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{11,1} \\ D_{11} & D_{22} & \dots & D_{11,2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{11,n} \end{bmatrix}, \underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{11} \end{bmatrix} \text{ e } \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

e finalmente pode-se escrever

$$\underline{Z} = [C:D] \begin{bmatrix} \underline{\beta} \\ \underline{\alpha} \end{bmatrix} + \underline{a} \quad \text{e o MMQ fornece} \quad \begin{bmatrix} \hat{\underline{\beta}} \\ \hat{\underline{\alpha}} \end{bmatrix} = [(C:D)'(C:D)]^{-1} [C:D]' \underline{Z}$$

Exercícios 29:

29.1) Considere a série do consumo de *champagne* da vinícola V do exemplo 2.

- Estime o modelo para a tendência (linear, quadrático ou outro);
- Construa a matriz C ;
- Construa a matriz D ;
- Construa a matriz $C:D$;
- Estime os parâmetros do modelo $\underline{Z} = C\underline{\beta} + D\underline{\alpha} + \underline{a}$;

- c) Use o modelo que você ajustou para prever as três primeiras demandas e a próxima demanda em época sazonal.
- 29.2) Pesquise e obtenha a série econômica do PIB nacional e faça uma análise semelhante à do exercício anterior.
- 29.3) Pesquise e obtenha a série econômica da entrada de valores no Brasil (em US\$ ou R\$), por turismo, e faça uma análise semelhante à do exercício anterior.

4. MODELOS DE AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

4.1 – Introdução

Os Métodos de Amortecimento (Alisamento) Exponencial são provavelmente os mais usados para suavizar séries temporais discretas e prever valores futuros. A razão deste fato é a simplicidade dos métodos e a eficiência computacional. Estas técnicas tornaram-se muito popular como métodos de previsão para uma vasta variedade de séries temporais. Historicamente, esta metodologia foi desenvolvida independentemente por Brown e Holt. Brown trabalhou para a Marinha Americana durante a 2^a Guerra Mundial, onde tinha a missão de desenvolver um sistema de informação para calcular a localização de submarinos. Mais tarde, ele aplicou a técnica desenvolvida para prever demandas de produtos. Ele descreveu estas idéias em 1959 em um livro. A pesquisa de Holt foi suportada pelo Office of Naval Research; independentemente de Brown, ele desenvolveu modelos de amortecimento exponencial para processos constantes, com tendência linear, e para séries sazonais. Gardner (1985) propôs uma classificação unificada dos métodos de amortecimento exponenciais.

4.2- Modelos para um Processo Constante

4.2.1- Médias Móveis Simples (MMS)

Suponha que o nível médio de um processo de demanda de certo produto (p.ex.) não muda com o tempo, ou seja, é constante (ou mais realisticamente varia suavemente de período para período). Assim, admitindo-se esta hipótese ou mesmo se ocorrem pequenas oscilações, modela-se este processo como.

$$Z_t = \mu + a_t$$

onde μ é a demanda esperada em qualquer período t e a_t é a componente estocástica. De forma que no final do período T deve-se ter a série da demanda histórica Z_1, Z_2, \dots, Z_T para a qual deseja-se estimar μ e σ_a^2 . Usando-se o procedimento da média móvel o que se faz é calcular a média aritmética das k observações mais recentes, ou seja:

$$M_t = \frac{Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + \dots + Z_{t-k+1}}{k} \quad \text{ou ainda} \quad M_t = M_{t-1} + \frac{Z_t - Z_{t-k}}{k}$$

Deste modo, M_t é uma estimativa do nível constante μ e não pondera as observações mais antigas com a mesma importância das mais recentes. A denominação média móvel advém do fato da técnica substituir a observação mais antiga pela mais recente para calcular a média mais atual. A previsão de todos os valores futuros é dada pela última média móvel, isto é,

$$\hat{Z}_t(h) = \hat{Z}_{t-1}(h+1) + \frac{Z_t - Z_{t-k}}{k}$$

para todo horizonte $h > 0$. Na verdade a expressão anterior consiste num algoritmo de atualização da previsão, devido que a cada instante, ou melhor, a cada nova observação é feita uma correção da estimativa anterior de Z_{t+h} . A média e a variância da previsão são dados por:

$$E[\hat{Z}_t(h)] = \mu \quad \text{e} \quad V[\hat{Z}_t(h)] = \frac{\sigma_a^2}{k^2}$$

E, assumindo Gaussianidade para os resíduos, $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, tem-se que $\hat{Z}_t(h) \sim N(\mu, \frac{\sigma_a^2}{k^2})$. O valor de k é muito importante na previsão. Quando $k = 1$, a previsão será o último valor da série (método considerado ingênuo) e quando $k = T$ (todos os valores da série) a previsão será a média aritmética da série (adequado somente quando a série for altamente aleatória). Do exposto conclui-se que o tamanho de k é diretamente proporcional à aleatoriedade da série (em a_t). O melhor tamanho de k é aquele que minimiza o erro quadrático médio de previsão EQM.

EXEMPLO 4.1

Dada a série temporal abaixo ajuste uma MMS de 2 termos ($k = 2$), 3 termos ($k = 3$), ..., 8 termos ($k = 8$) e identifique pelo EQM aquela que melhor faz previsões da série.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| t | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Z_t | 40 | 42 | 44 | 39 | 40 | 38 | 44 | 45 | 43 | 41 | 39 | 42 | 48 | 46 | 42 |

Ajustando-se MMS com $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$ SE obteve:

| MMS | $k = 2$ | $k = 3$ | $K = 4$ | $K = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ | $k = 8$ |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| EQM | 13,6154 | 13,7407 | 11,9545 | 10,020 | 8,842 | 9,29 | 9,73 |
| Previsão $\hat{Z}_{15}(1)$ | 44 | 45,3333 | 44,45 | 43,4 | 43,0 | 43,0 | 43,25 |

Observa-se que a MMS que melhor se ajustou (das três) foi a com $k = 6$ termos.

O método MMS é aplicável quando se tem uma série com poucas observações e é bastante flexível, pois se pode escolher k de acordo com o padrão da série. Porém, é aplicável somente em séries estacionárias e há necessidade de $k+1$ observações.

4.2.2- Amortecimento Exponencial para um Processo Constante

4.2.2.1 – O Método

Considerando a situação do item anterior, onde era suposto que o nível médio de um processo, demanda de certo produto (p.ex.), não muda com o tempo, ou seja, é constante. Assim, admitindo-se esta hipótese ou mesmo se ocorrem pequenas oscilações, modela-se este processo como.

$$Z_t = \mu + a_t$$

onde μ é a demanda esperada em qualquer período e a_t é a componente estocástica. De forma que no final do período T deve-se ter a série da demanda histórica Z_1, Z_2, \dots, Z_T para a qual deseja-se estimar μ e σ_a^2 . É possível usar-se o Método das Médias Móveis para N períodos ou o método alternativo do Amortecimento Exponencial Simples. O método constitui-se na estimação sistemática dos parâmetros em cada período com a finalidade de incorporar a demanda do período mais recente. Assume-se, então, que no

fim do período T tem-se disponível a estimativa de μ feita no período anterior ($\hat{\mu}_{T-1}$) e a demanda corrente no período T (Z_T). De modo que se precisa atualizar a estimativa de μ incorporando a informação Z_T . A maneira indicada é obter a nova estimativa modificando a última $\hat{\mu}_{T-1}$. Isto é feito considerando-se a **fração α do erro de previsão resultante**. Este erro é

$$a_T = Z_T - \hat{\mu}_{T-1}$$

tal que se α é a fração desejada, $0 < \alpha < 1$, a nova estimativa da demanda será

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_T &= \hat{\mu}_{T-1} + \alpha(Z_T - \hat{\mu}_{T-1}) \\ \hat{\mu}_T &= \alpha Z_T + (1 - \alpha)\hat{\mu}_{T-1}, \text{ com } \hat{\mu}_0 = Z_1 \text{ e } T = 1, 2, 3, \dots, N\end{aligned}$$

A estatística $\hat{\mu}_T$ é uma média ponderada de todas as observações passadas, pois veja que

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_T &= \alpha Z_T + (1 - \alpha)[\alpha Z_{T-1} + (1 - \alpha)\hat{\mu}_{T-2}] \\ \hat{\mu}_T &= \alpha Z_T + \alpha(1 - \alpha)Z_{T-1} + (1 - \alpha)^2\hat{\mu}_{T-2}\end{aligned}$$

.....
.....

$\hat{\mu}_T = \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k Z_{T-k} + (1 - \alpha)^T \hat{\mu}_0$ obtido com substituições sucessivas de $\hat{\mu}_{T-k}$, $k = 1, 2, 3, 4, \dots, T$ e onde $\hat{\mu}_0$ é estimativa **inicial** de μ . É fácil ver que o coeficiente da primeira parcela da expressão anterior, ou seja, a soma dos pesos converge para 1, quando $T \rightarrow \infty$. E, o peso colocado na observação corrente é a constante de amortecimento α e os pesos colocados nas observações passadas são: $\alpha(1-\alpha)$, $\alpha(1-\alpha)^2$, $\alpha(1-\alpha)^3$,

A operação definida pela expressão acima é chamada **Amortecimento Exponencial Simples** e $\hat{\mu}_T$ é chamado de **valor amortecido** ou **estatística amortecida**. A constante α é conhecida como **constante de alisamento** ou **amortecimento**. A forma $\hat{\mu}_T$ obtida acima é heurística, porém pode ser obtida também por Mínimos Quadrados Ponderados, quando se procura estimar μ minimizando a

$$SQE = \sum_{t=1}^T \beta^{T-t} (Z_t - \mu)^2 \quad 0 < \beta < 1$$

com o peso β^{T-t} dado para o t-ésimo erro a_t , tal que os pesos dos erros decaem geometricamente com a idade dos dados.

4.2.2.2- Previsão com Amortecimento Exponencial Simples

Para se prever valor futuro da série usando o amortecimento exponencial simples usa-se o último valor amortecido exponencialmente, ou seja,

$$\hat{\mu}_t(h) = \hat{\mu}_t \quad \forall h \quad \text{ou}$$

$$\hat{\mu}_T(h) = \alpha Z_T + (1 - \alpha) \hat{\mu}_{T-1}(h+1),$$

A esperança do estimador é $E[\hat{\mu}_T(h)] = \mu$

e a variância é $V[\hat{\mu}_T(h)] = \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma_a^2$

e assumindo Gaussianidade tem-se o intervalo de confiança

$$P\left[\hat{\mu}_T(h) - z_c \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma_a^2} \leq \mu \leq \hat{\mu}_T(h) + z_c \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma_a^2}\right] = 1 - \alpha$$

O amortecimento exponencial simples tem as seguintes qualidades: simples, flexível devido à variação da constante de amortecimento α , com $\alpha = 2/(k - 1)$ fornece previsões semelhantes ao método das médias móveis de ordem k .

EXERCÍCIOS 30

- 30.1) Ajuste MMS de $k = 2, 3, 4$ e 5 termos à Série G – Energia de Janeiro de 1968 a Dezembro de 1969 do livro do P.A. Morettin e identifique a média móvel que melhor se ajustou.
- 30.2) Determine o estimador de MQP de μ .
- 30.3) Mostre que quando T é grande tem-se $\beta^T \approx 0$ e o estimador obtido no exercício anterior iguala-se ao valor amortecido $\hat{\mu}_T = \alpha Z_T + (1 - \alpha) \hat{\mu}_{T-1}$ obtido anteriormente.
- 30.4) Mostre que $\hat{\mu}_T$ é uma média ponderada de todas as observações passadas considerando $\hat{\mu}_0$ como a estimativa inicial de μ .
- 30.5) Mostre que para T suficientemente grande tal que $(1 - \alpha)^T \mu_0$, o processo de amortecimento exponencial produz um estimador não-viciado da verdadeira média do processo, μ .

A escolha da constante de amortecimento α é importante pois a previsão de μ é função do valor de α . Valores baixos de α causam amortecimento devagar e valores altos de α levam a amortecimentos rápidos. O valor de α pode situar-se entre 0,01 e 0,30.

- 30.6) Um fabricante de móveis de escritório deseja prever a venda mensal de certo modelo de escrivaninha. Este modelo de escrivaninha é fabricado há bastante tempo e historicamente a sua demanda é relativamente estável, como se pode observar na série histórica dada a seguir. O modelo $Z_t = \mu + a_t$ foi escolhido, pela estabilidade da série, para modelar a demanda com uma constante de amortecimento $\alpha = 0,1$ escolhida arbitrariamente. Aplique o Amortecimento Exponencial Simples para prever a demanda futura do produto, considerando $\hat{\mu}_0$ como o valor médio da demanda na série histórica de dois anos e respondendo aos itens que seguem.

Período demanda

a) Qual o valor de $\hat{\mu}_0$?

| | |
|--------|-------|
| 1/75 | 423,0 |
| 2/75 | 403,0 |
| 3/75 | 474,0 |
| 4/75 | 451,0 |
| 5/75 | 465,0 |
| 01/77 | |
| 6/75 | 445,0 |
| 7/75 | 459,0 |
| 386,82 | |
| 8/75 | 325,0 |
| amort. | |
| 9/75 | 365,0 |
| 10/75 | 331,0 |
| 11/75 | 376,0 |
| 12/75 | 331,0 |
| 1/76 | 350,0 |
| 2/76 | 400,0 |
| 3/76 | 470,0 |

| | |
|-------------|-------|
| computador. | |
| 4/76 | 311,0 |
| 5/76 | 395,0 |
| 6/76 | 333,0 |
| 7/76 | 452,0 |
| 8/76 | 414,0 |
| 9/76 | 310,0 |
| 10/76 | 341,0 |
| 11/76 | 433,0 |
| 12/76 | 378,0 |

$$R.: \bar{Z} = \frac{\sum_{t=1}^{24} Z_t}{24} = 393,125$$

b) Escreva a expressão do Amortecimento Exp.

$$R.: \hat{\mu}_T = \alpha Z_T + (1 - \alpha) \hat{\mu}_{T-1}$$

c) Qual a previsão para 01/77?

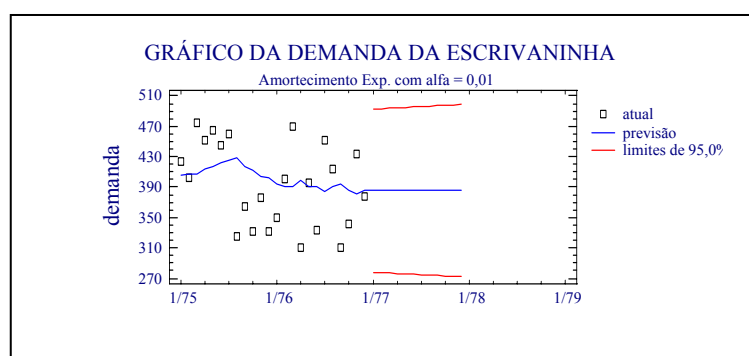
$$R.: \hat{Z}_1(0) = \hat{\mu}_0 = 393,125$$

d) Supondo que a verdadeira demanda em

seja 330, qual a previsão para 02/77?

$$R.: \hat{Z}_1(1) = 0,1 \times 330 + (1-0,1) \cdot 393,125 =$$

e) Faça o gráfico com a série e com a série



f) Ajuste um Amort. Exp. Simples no

4.3- MODELOS PARA SÉRIES QUE APRESENTAM TENDÊNCIA

4.3.1- Alisamento Exponencial de Brown

Quando o processo varia linearmente no tempo (apresenta uma tendência linear), ou seja, de acordo com o modelo $Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$ com $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, tem-se que o valor esperado no instante t é $E[Z_t|t] = \beta_0 + \beta_1 t$. Então, aplicando-se inicialmente o AES aos dados tem-se no fim do período T , $\hat{Z}_T = \alpha Z_T + (1 - \alpha) \hat{Z}_{T-1}$ e o valor esperado de $\hat{\mu}_T$ na equação do amortecimento exponencial simples é

$$\begin{aligned}
E[\hat{\mu}_T] &= \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k E[Z_{T-k}] + (1-\alpha)^T \hat{\mu}_0 \\
&= \alpha \sum_{k=0}^{T-1} (1-\alpha)^k [\beta_0 + \beta_1(T-k)] + (1-\alpha)^T \hat{\mu}_0
\end{aligned}$$

e quando $T \rightarrow \infty$, $(1-\alpha)^T = 0$ e então se tem

$$\begin{aligned}
E[\hat{\mu}_T] &= [\beta_0 + \beta_1 T] \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)^k - \beta_1 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\alpha)^k \\
E[\hat{\mu}_T] &= \beta_0 + \beta_1 T - \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta_1
\end{aligned}$$

e como $E[Z_t|t] = \beta_0 + \beta_1 t$, tem-se $E[\hat{\mu}_T] = E[Z_t] - \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta_1$

Agora, aplicando-se o amortecimento exponencial à saída do primeiro amortecimento já aplicado tem-se.

$$\hat{\mu}_T^{[2]} = \alpha \hat{\mu}_T + (1-\alpha) \hat{\mu}_{T-1}^{[2]}$$

onde a notação $\hat{\mu}_T^{[2]}$ significa amortecimento exponencial duplo, ou amortecimento exponencial de 2ª. ordem. E, trabalhando da forma anterior encontra-se

$$E[\hat{\mu}_T^{[2]}] = E[\hat{\mu}_T] - \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta_1$$

e portanto $\beta_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} (E[\hat{\mu}_T] - E[\hat{\mu}_T^{[2]}])$, cuja estimativa é $\hat{\beta}_1(T) = \frac{\alpha}{1-\alpha} (\hat{\mu}_T - \hat{\mu}_T^{[2]})$.

Assim, o valor futuro $E[Z_t]$, isolado da equação $E[\hat{\mu}_T] = E[Z_t] - \frac{1-\alpha}{\alpha} \beta_1$, será

$$\begin{aligned}
E[Z_t] &= E[\hat{\mu}_T] + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} (E[\hat{\mu}_T] - E[\hat{\mu}_T^{[2]}]) \right] \\
E[Z_t] &= 2E[\hat{\mu}_T] - E[\hat{\mu}_T^{[2]}] \text{ e a estimativa é}
\end{aligned}$$

$$\hat{Z}_T = 2\hat{\mu}_T - \hat{\mu}_T^{[2]}$$

A previsão h períodos a frente, usando o amortecimento exponencial duplo, é feita usando-se a equação:

$$\begin{aligned}
\hat{Z}_T(h) &= \hat{Z}_T + h \hat{\beta}_1(T) \\
&= 2\hat{\mu}_T - \hat{\mu}_T^{[2]} + h \frac{\alpha}{1-\alpha} (\hat{\mu}_T - \hat{\mu}_T^{[2]}) \\
\hat{Z}_T(h) &= (2 + h \frac{\alpha}{1-\alpha}) \hat{\mu}_T - (1 + h \frac{\alpha}{1-\alpha}) \hat{\mu}_T^{[2]}
\end{aligned}$$

A estimativa direta do intercepto é $\hat{\beta}_0(T) = \hat{Z}_T - T \hat{\beta}_1(T)$

$$\hat{\beta}_0(T) = 2\hat{\mu}_T - \hat{\mu}_T^{[2]} - T \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} (\hat{\mu}_T - \hat{\mu}_T^{[2]}) \right]$$

É possível também se considerar o intercepto como sendo $E[Z_t] = b_0(T)$, tomando-se então essa “origem corrente” para os dados, a estimativa do intercepto é:

$$\hat{b}_0(T) = \hat{Z}_T = 2\hat{\mu}_T - \hat{\mu}_T^{[2]} = \hat{\beta}_0(T) + T \hat{\beta}_1(T)$$

e a equação de previsão com base na **origem dos dados** como intercepto é:

$$\hat{Z}_T(h) = \hat{\beta}_0(T) + [T+h] \hat{\beta}_1(T)$$

com base na **origem corrente dos dados** como intercepto é:

$$\hat{Z}_T(h) = \hat{b}_0(T) + h \hat{\beta}_1(T)$$

e estas duas equações de previsão produzem o mesmo resultado que

$$\hat{Z}_T(h) = (2 + h \frac{\alpha}{1-\alpha}) \hat{\mu}_T - (1 + h \frac{\alpha}{1-\alpha}) \hat{\mu}_T^{[2]}$$

apresentada anteriormente.

No amortecimento duplamente exponencial de Brown, há necessidade de valores iniciais para $\hat{\mu}_0$ e $\hat{\mu}_0^{[2]}$. O usual é fazer-se estimativas para β_0 e β_1 através de um ajuste

linear simples e entrando com esses valores em $\hat{\beta}_1(T) = \frac{\alpha}{1-\alpha} (\hat{\mu}_T - \hat{\mu}_T^{[2]})$ e $\hat{\beta}_0(T) =$

$2 \hat{\mu}_T - \hat{\mu}_T^{[2]} - T [\frac{\alpha}{1-\alpha} (\hat{\mu}_T - \hat{\mu}_T^{[2]})]$ e considerando $T = 0$ tem-se:

$$\hat{\mu}_0 = \hat{\beta}_0(0) - \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\beta}_1(0)$$

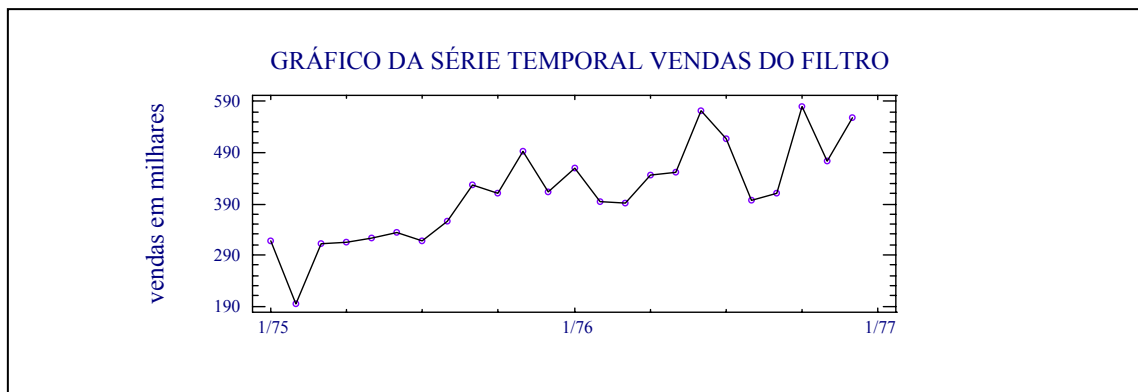
$$\hat{\mu}_0^{[2]} = \hat{\beta}_0(0) - 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\beta}_1(0)$$

EXEMPLO 4.2

Um fabricante de filtros de óleo para automóveis observou por uma série histórica que as vendas do seu produto têm crescido nos últimos dois anos. Ele pretende usar o procedimento do amortecimento exponencial duplo de Brown para fazer previsões futuras. Os dados estão abaixo, sendo que os números estão em milhares de unidades.

| Ano | Jan | fev | mar | abr | mai | jun | jul | ago | set | out | nov | dez |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1975 | 317 | 194 | 312 | 316 | 322 | 334 | 317 | 356 | 428 | 411 | 494 | 412 |
| 1976 | 460 | 395 | 392 | 447 | 452 | 571 | 517 | 397 | 410 | 579 | 473 | 558 |

a) Faça um gráfico da série temporal;



b) Ajuste uma reta aos dados e estime os parâmetros iniciais β_0 e β_1 ;

Análise de Regressão - Modelo Linear: $Z_t = \beta_0 + \beta_1 t = 275,0 + 10,88t$

| Parâmetro | Estimativa | Erro Padrão | Estatística | valor-p |
|------------|------------|-------------|-------------|---------|
| Intercepto | 275,00 | 23,4625 | 11,7209 | 0,0000 |
| Slope | 10,88 | 1,64203 | 6,62594 | 0,0000 |

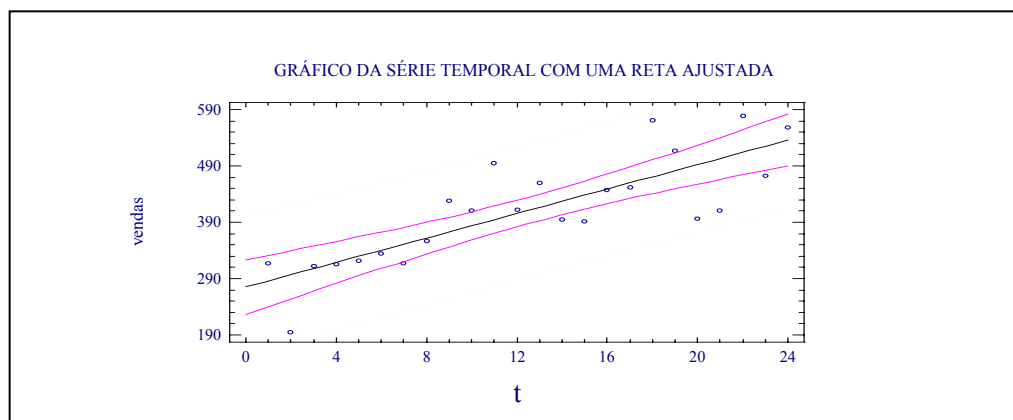
Análise da Variância

| F.V. | Soma de Quadrados | GL | Quadr. Médio | F-Ratio | valor-p |
|---------------|-------------------|----|--------------|---------|---------|
| Modelo | 136131,0 | 1 | 136131,0 | 43,90 | 0,0000 |
| Residual | 68215,4 | 22 | 3100,7 | | |
| Total (Corr.) | 204346,0 | 23 | | | |

Coefficiente de Correlação $R = 0,816197$

$R^2 = 0,666177 = 66,6177\%$

Erro Padrão de Estimativa = 55,6839



c) Calcule as estimativas iniciais:

Redefinindo a origem como a $E[Z_t]$ no fim do período $T = 24$, obtida no ajuste linear $Z_t = \beta_0 + \beta_1 t = 275,0 + 10,88t = 275,0 + 10,88 \times 24 = 536,12$

$$\hat{\mu}_0 = \hat{\beta}_0(0) - \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\beta}_1(0) = 536,12 - 0,90/0,10 \times 10,88 = 438,20$$

$$\hat{\mu}_0^{[2]} = \hat{\beta}_0(0) - 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\beta}_1(0) = 536,12 - 2 \times 0,90/0,10 \times 10,88 = 340,28$$

ou então obtendo-se estes valores da série original

$$\hat{\mu}_0 = \hat{\beta}_0(0) - \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\beta}_1(0) = 275,00 - 0,90/0,10 \times 10,88 = 177,08$$

$$\hat{\mu}_0^{[2]} = \hat{\beta}_0(0) - 2 \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{\beta}_1(0) = 275,00 - 2 \times 0,90/0,10 \times 10,88 = 79,16$$

c) Obtenha a série amortecida e a série de previsões para os próximos 24 meses usando o STATGRAPHICS com a constante de amortecimento α otimizada partindo de 0,10.

Tabela de Previsão para as Vendas do Filtro

Modelo: Amortecimento Exponencial de Brown com $\alpha = 0,2472$ (otimizada)

| Período | Observação | Previsão | Resíduo |
|---------|------------|----------|----------|
| ----- | | | |
| --- | | | |
| 1/75 | 317,0 | 255,52 | 61,4802 |
| 2/75 | 194,0 | 272,786 | -78,7856 |
| 3/75 | 312,0 | 224,461 | 87,539 |
| 4/75 | 316,0 | 253,553 | 62,4472 |
| 5/75 | 322,0 | 275,589 | 46,4114 |
| 6/75 | 334,0 | 293,512 | 40,4878 |
| 7/75 | 317,0 | 311,343 | 5,65664 |
| 8/75 | 356,0 | 314,428 | 41,5719 |
| 9/75 | 428,0 | 335,615 | 92,385 |
| 10/75 | 411,0 | 384,464 | 26,5357 |
| 11/75 | 494,0 | 406,403 | 87,5969 |
| 12/75 | 412,0 | 460,152 | -48,1521 |
| 1/76 | 460,0 | 452,14 | 7,86031 |
| 2/76 | 395,0 | 468,877 | -73,8773 |
| 3/76 | 392,0 | 445,684 | -53,6842 |
| 4/76 | 447,0 | 427,96 | 19,0399 |
| 5/76 | 452,0 | 442,91 | 9,08977 |
| 6/76 | 571,0 | 454,105 | 116,895 |
| 7/76 | 517,0 | 519,153 | -2,15341 |
| 8/76 | 397,0 | 532,488 | -135,488 |
| 9/76 | 410,0 | 479,77 | -69,77 |
| 10/76 | 579,0 | 451,264 | 127,736 |
| 11/76 | 473,0 | 516,141 | -43,1411 |
| 12/76 | 558,0 | 504,342 | 53,6576 |
| ----- | | | |

| Período | Previsão | Limite inf. 95% | Limite sup. 95% |
|---------|----------|-----------------|-----------------|
| --- | | | |
| 1/77 | 511,236 | 376,67 | 645,802 |
| 2/77 | 518,13 | 368,016 | 668,244 |
| 3/77 | 525,024 | 357,328 | 692,721 |
| 4/77 | 531,918 | 344,816 | 719,02 |
| 5/77 | 538,812 | 330,667 | 746,957 |
| 6/77 | 545,706 | 315,036 | 776,377 |
| 7/77 | 552,6 | 298,049 | 807,151 |
| 8/77 | 559,494 | 279,813 | 839,175 |
| 9/77 | 566,388 | 260,414 | 872,362 |
| 10/77 | 573,282 | 239,925 | 906,639 |
| 11/77 | 580,176 | 218,406 | 941,946 |
| 12/77 | 587,07 | 195,909 | 978,231 |
| 1/78 | 593,964 | 172,477 | 1015,45 |
| 2/78 | 600,858 | 148,151 | 1053,57 |
| 3/78 | 607,752 | 122,962 | 1092,54 |
| 4/78 | 614,646 | 96,9403 | 1132,35 |
| 5/78 | 621,54 | 70,113 | 1172,97 |
| 6/78 | 628,434 | 42,5034 | 1214,36 |
| 7/78 | 635,328 | 14,133 | 1256,52 |
| 8/78 | 642,222 | -14,9785 | 1299,42 |
| 9/78 | 649,116 | -44,8133 | 1343,04 |
| 10/78 | 656,01 | -75,3548 | 1387,37 |
| 11/78 | 662,904 | -106,588 | 1432,4 |
| 12/78 | 669,798 | -138,498 | 1478,09 |

4.4 ALIZAMENTO EXPONENCIAL SAZONAL DE HOLT-WINTERS

A abordagem mais popular para previsão de séries temporais sazonais é a metodologia conhecida como Método de Winters. Nessa técnica, assume-se que a série temporal é adequadamente representada pelo modelo: $Z_t = (\alpha + \beta t)\gamma_t + a_t$, onde α é a componente do nível da série, β é a componente da tendência, γ_t é o fator multiplicativo sazonal e a_t é a parte estocástica do modelo. O comprimento da sazonalidade é de L períodos e os fatores sazonais são definidos tais que $\sum_{t=1}^L \gamma_t = L$. O modelo assim

definido incorpora a tendência linear e o efeito da sazonalidade. Se for assumido que a tendência é desnecessária, então retiramos β do modelo. As estimativas de α , β e γ_t no fim do período T são dadas por: $\hat{\alpha}(T)$, $\hat{\beta}(T)$ e $\hat{\gamma}(T)$, respectivamente. O método atualiza as estimativas dos parâmetros periodicamente. Então, ao fim do período T , após a observação da realização Z_T , obtém-se:

- Estimativa atualizada da componente do nível \cdot :

$$\hat{\alpha}_T = a \frac{Z_T}{\hat{\gamma}_T(T-L)} + (1-a)[\hat{\alpha}_{(T-1)} + \hat{\beta}_{(T-1)}]$$

onde “a” é a constante de amortecimento, $0 < a < 1$. A divisão de Z_T por $\hat{\gamma}_T(T-L)$, que é a estimativa do fator sazonal para o período T calculado em L períodos atrás (uma sazonalidade), retira a sazonalidade da série e resta apenas as componentes da tendência e do nível.

- Estimativa atualizada da componente da tendência β :

$$\hat{\beta}_{(T)} = b[\hat{\alpha}_{(T)} - \hat{\alpha}_{(T-1)}] + (1 - b)\hat{\beta}_{(T-1)}$$

onde b é a constante de amortecimento da tendência, $0 < b < 1$.

- Estimativa atualizada do fator sazonal para o período T :

$$\hat{\gamma}_T = d \frac{Z_T}{\hat{\alpha}(T)} + (1 - d)\hat{\gamma}_T(T - L)$$

onde “ d ” é a constante de amortecimento sazonal, $0 < d < 1$.

- Para prever um valor futuro da série em $T + h$, calcula-se:

$$\hat{Z}_T(T + h) = [\hat{\alpha}_T + \hat{\beta}_T h] \hat{\gamma}_{(T+h)}(T + h - L)$$

O desenvolvimento de um sistema de previsão usando o Método de Winters necessita de valores iniciais para os parâmetros: $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\gamma}_0$ para $t = 1, 2, \dots, L$. O estimador da taxa de crescimento (tendência) com base em m períodos completos (anos p.ex.) é:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\bar{Z}_m - \bar{Z}_1}{(m-1)L} \text{ onde tem-se a diferença entre a média do } m\text{-ésimo período e a média do}$$

primeiro período dividida pelo número de períodos menos um vezes o comprimento da sazonalidade (período) L . Já a componente do nível é $\hat{\alpha}_0 = \bar{Z}_1 - \frac{L}{2} \hat{\beta}_0$ e a componente

de sazonalidade é: $\hat{\gamma}_0 = \frac{Z_t}{\bar{Z}_i - [(L+1)/2 - j]\hat{\beta}_0}$ $t = 1, 2, 3, \dots, m$, onde i corresponde

ao período do índice t e j é a posição do período t dentro da estação.