

Найти численное решение задачи Дирихле для двумерного уравнения Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$
$$u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0.$$

Далее будет приводиться решение для каждого из пунктов задания:

### 1

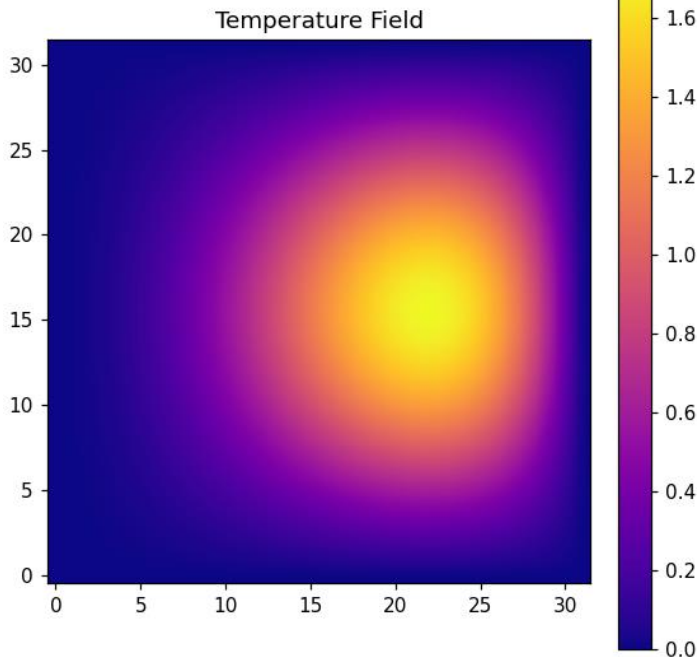
- Для простейшей 5-точечной аппроксимации на сетке с одинаковым числом узлов в обоих направлениях

$$\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij}}{h^2} = f_{ij}, \quad h = \Delta x = \Delta y, \quad N_x = N_y = 32$$

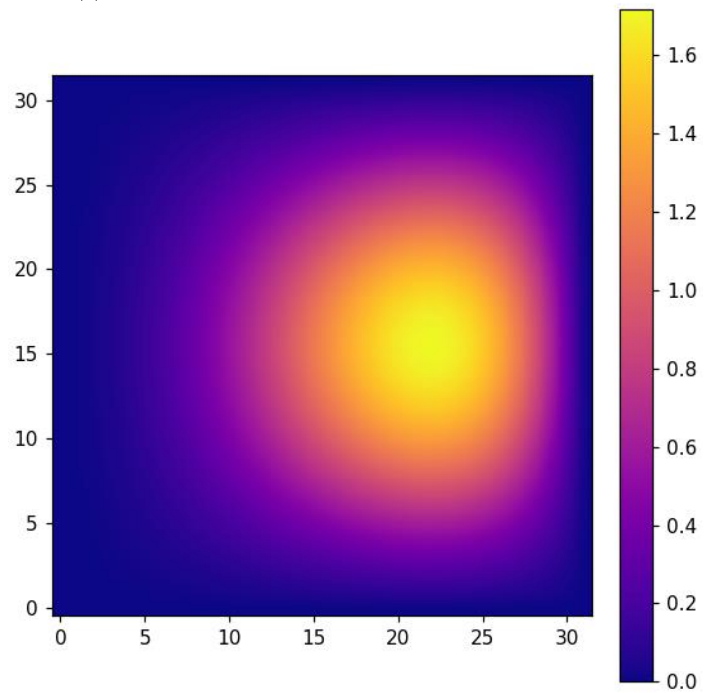
провести расчеты с помощью следующих методов, описанных в Лекции 18: 1) метод Якоби; 2) метод Гаусса–Зейделя; 3) метод последовательной верхней релаксации.

**Число итераций постоянно  $I = 1000$  для всех рисунков ниже**

Точное решение

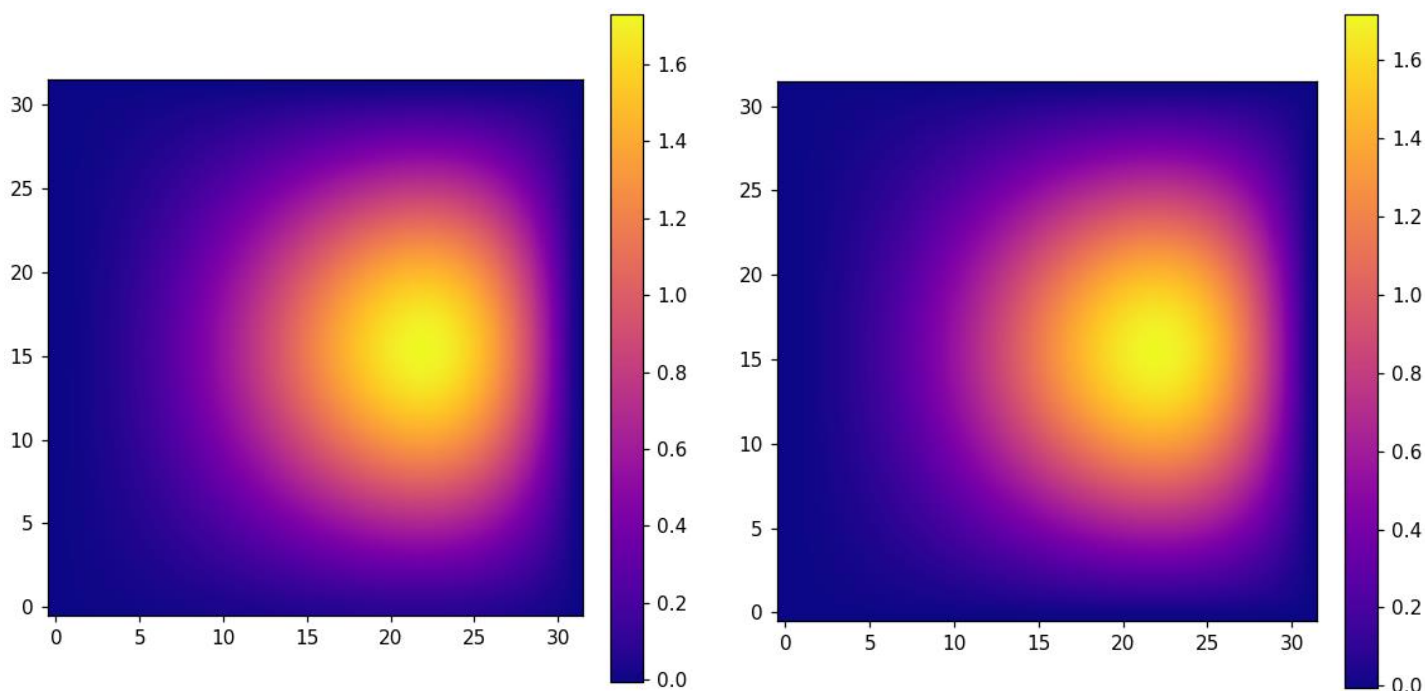


Метод Якоби



Метод Гаусса

Метод верхней релаксации



По данным картинам видно только то что схемы работают, исследование сходимости и других параметров схем рассматриваются далее

## 2

- Для одной и той же пространственной сетки определить количество итераций, требуемое в каждом методе для достижения сходимости:

$$\max_{i,j} |u_{ij}^{(n+1)} - u_{ij}^{(n)}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-6}.$$

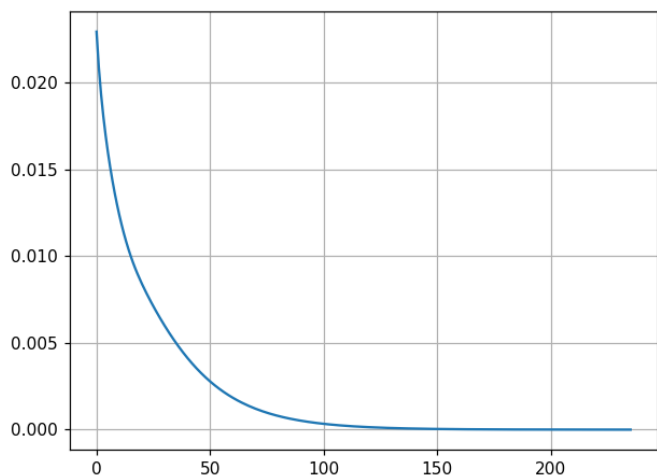
Для метода последовательной верхней релаксации путем численных экспериментов определить оптимальное значение параметра релаксации  $1 \leq \omega < 2$ , при котором сходимость достигается за наименьшее число итераций. Построить график зависимости необходимого числа итераций от значения параметра релаксации.

**В качестве результата приводится зависимость разницы между двумя итерациями от номера итерации для сетки  $N = 32$**

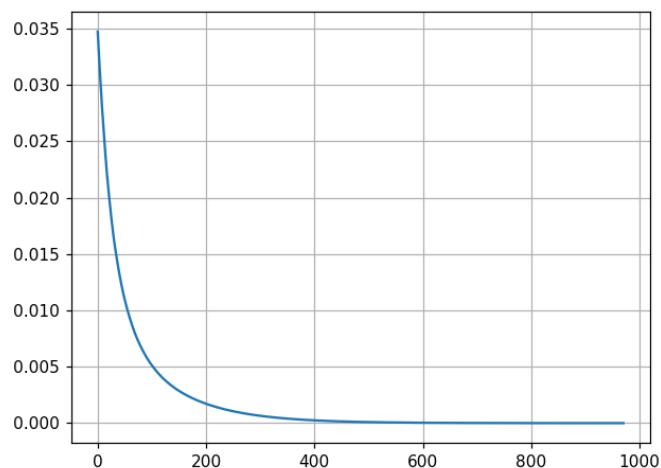
Метод верхней релаксации.

Число итерации  $k = 234$ .

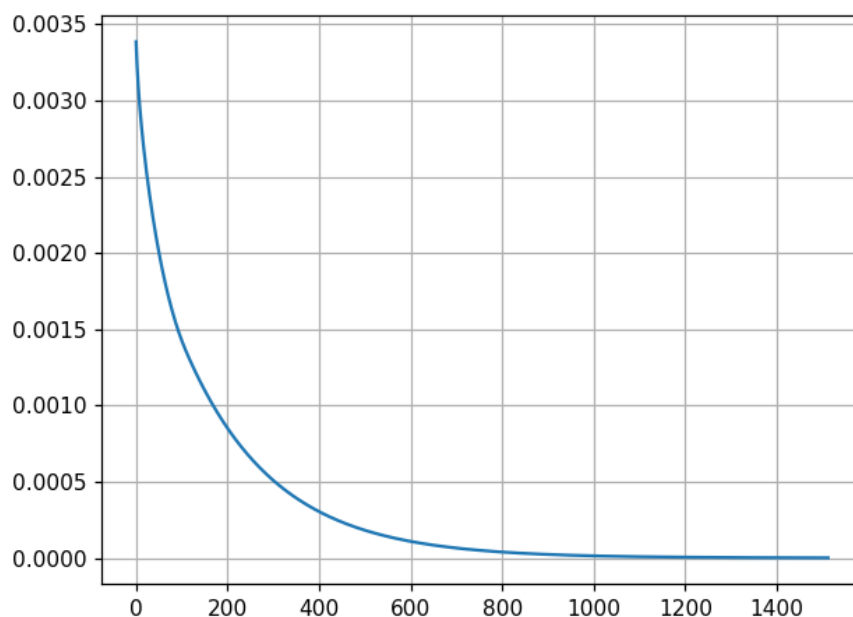
Параметр  $w = 1.8$



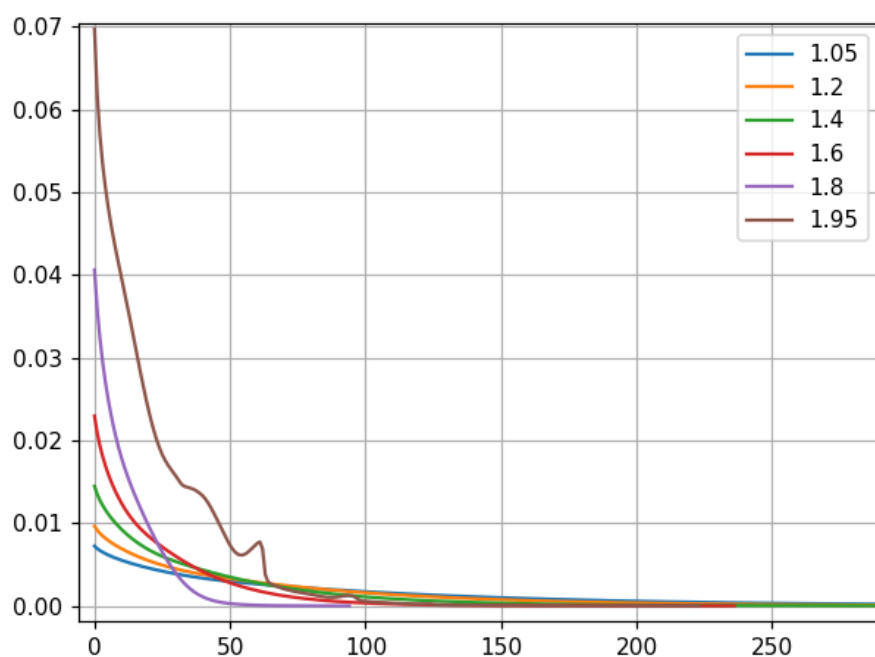
Метод Гаусса. Число итераций  $k = 973$



Метод Якоби. Число итераций  $k = 1512$



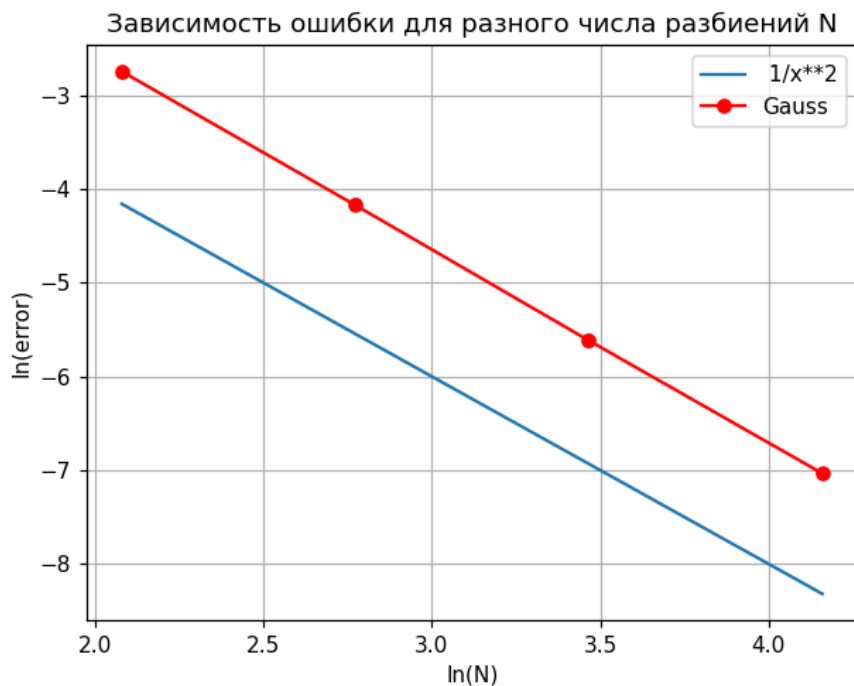
### Исследование сходимости для метода верхней релаксации при разных значениях $W$



Значение параметра $w$	Число итераций
<b>1,05</b>	<b>757</b>
<b>1,2</b>	<b>578</b>
<b>1,4</b>	<b>389</b>
<b>1,6</b>	<b>236</b>
<b>1,8</b>	<b>94</b>
<b>1,95</b>	<b>223</b>

3

- Для метода Гаусса–Зейделя, сравнивая решение с точным и измельчая сетку, продемонстрировать, что точность полученного решения  $\mathcal{O}(h^2)$ , для чего построить в логарифмическом масштабе график зависимости ошибки от числа узлов сетки в одном направлении  $N_x = N_y$ . Рекомендуемое значение критерия сходимости в данном расчете  $\varepsilon = 10^{-9}$ , число узлов сетки  $N_x = N_y$  рекомендуется изменять в пределах от 8 до 128. В некоторых вариантах, возможно, эти значения придется изменить.



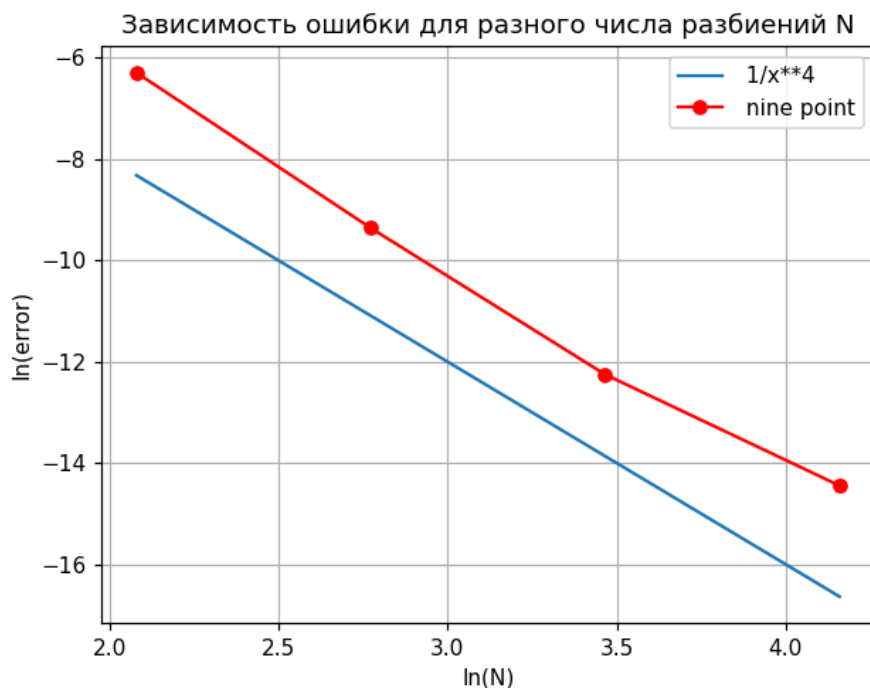
Число узлов	Число итераций
8	94
16	405
32	1593
64	6008
Условием завершения итераций бралась невязка 1e-9	

4

- Выполнить задание предыдущего пункта для 9-точечной схемы

$$\frac{u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1} + 4(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) - 20u_{ij}}{6h^2} = \frac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + 8f_{ij}}{12},$$

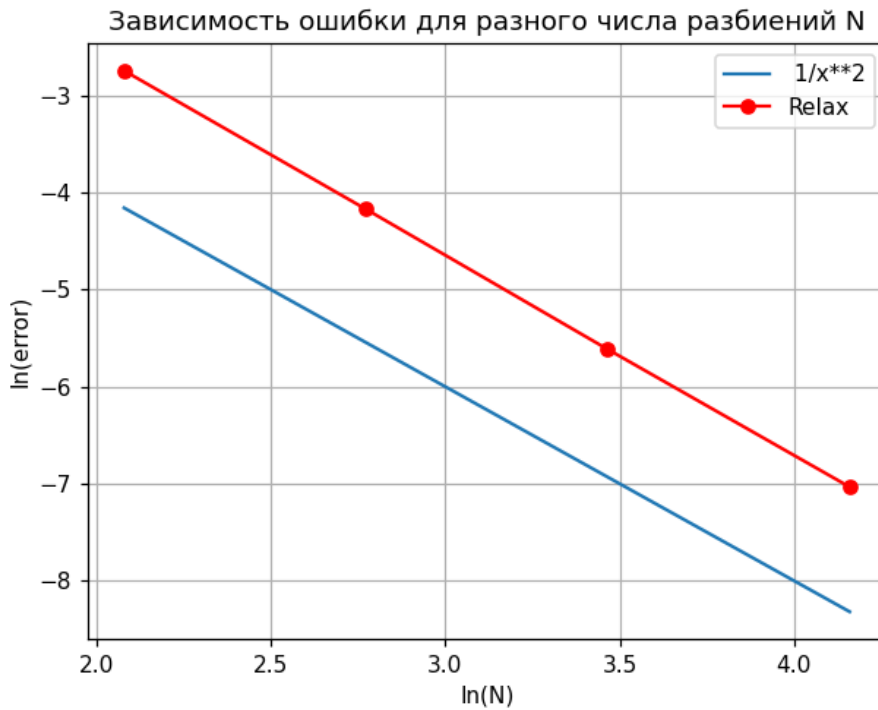
показать, что в данном случае погрешность решения  $\mathcal{O}(h^4)$ .



Число узлов	Число итераций
8	80
16	342
32	1343
64	5067
Условием завершения итераций бралась невязка 1e-9	

## Авторское

**Было исследовано поведение ошибки для последовательности  
измельчающихся сеток для метода верхней релаксации**



Число узлов	Число итераций
8	95
16	96
32	156
64	739
Условием завершения итераций бралась невязка 1e-9 W = 1.8	