

粒子物理（一）作业 1 标准答案

1. 强相互作用、电磁相互作用和弱相互作用的相互作用力程和典型相互作用时间各为多少？三个不稳定粒子：A 粒子的宽度是 100 MeV，B 粒子的宽度是 5 keV，C 粒子的寿命为 3×10^{-10} 秒，请判断它们主要通过什么相互作用衰变。

- A 粒子： $\tau_A = \hbar/\Gamma_A \approx 6.582 \times 10^{-24}$ s，接近强相互作用时间，因此主要通过强相互作用衰变。
- B 粒子： $\tau_B = \hbar/\Gamma_B \approx 1.316 \times 10^{-19}$ s，属于电磁相互作用时间范围，因此主要通过电磁相互作用衰变。
- C 粒子： $\tau_C = 3 \times 10^{-10}$ s，典型弱相互作用时间，因此主要通过弱相互作用衰变。

2. 根据 Dirac 方程推导出电子的内禀磁矩。

💡 Tip

下面的推导使用的是以 MeV 为基础单位的自然单位制。

Dirac 方程为

$$E |\psi\rangle = (\vec{\alpha}\vec{p} + m\beta) |\psi\rangle. \quad (1)$$

整理，将其写成类似薛定谔方程的形式，即 Hamiltonian 为

$$\hat{H} = \vec{\alpha}\hat{p} + m\beta. \quad (2)$$

此时如果有一个外电磁场，即 (\vec{A}, φ) ，Hamiltonian 为

$$\hat{H} = \vec{\alpha}(\hat{p} + \vec{A}) + m\beta - \varphi. \quad (3)$$

在 Dirac 表象下，有

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

取 $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} e^{-iEt}$ ，有

$$\begin{aligned} i\partial_t \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} e^{-iEt} &= \left[(\hat{p} + \vec{A}) \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \varphi \right] \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} e^{-iEt} \\ &\Rightarrow \begin{cases} i\partial_t \chi_1 + E\chi_1 = -\vec{\sigma}(\hat{p} + \vec{A})\chi_2 - (m + \varphi)\chi_1, \\ i\partial_t \chi_2 + E\chi_2 = \vec{\sigma}(\hat{p} + \vec{A})\chi_1 - (-m + \varphi)\chi_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

认为电子是非相对论性粒子，即 $i\partial_t \chi_1 = 0$ 和 $E = m \gg \varphi$ ，此时可以解第一个方程得

$$\chi_1 = \frac{\vec{\sigma}(\hat{p} + \vec{A})}{2m} \chi_2. \quad (6)$$

代入第二个方程，就是

$$E\chi_2 = \vec{\sigma}(\hat{p} + \vec{A}) \frac{\vec{\sigma}(\hat{p} + \vec{A})}{2m} \chi_2 - (-m + \varphi)\chi_2. \quad (7)$$

这里需要注意 $[\vec{\sigma}(\hat{p} + \vec{A})]^2 = (\hat{p} + \vec{A})^2 + i\vec{\sigma} \cdot [(\hat{p} + \vec{A}) \times (\hat{p} + \vec{A})]$ ，这里要运用算符的乘法。继续计算叉积项：

$$(\hat{p} + \vec{A}) \times (\hat{p} + \vec{A}) = \hat{p} \times \vec{A} + \vec{A} \times \hat{p}, \quad (8)$$

因为 $\hat{p} \times \hat{p} = 0$, $\vec{A} \times \vec{A} = 0$ 。作用在任意波函数上可得：

$$(\hat{p} \times \vec{A} + \vec{A} \times \hat{p})\psi = -i(\nabla \times \vec{A})\psi = -i\vec{B}\psi, \quad (9)$$

其中 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 为磁场强度。因此：

$$i\vec{\sigma} \cdot [(\hat{p} + \vec{A}) \times (\hat{p} + \vec{A})] = i\vec{\sigma} \cdot (-i\vec{B}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \quad (10)$$

最后结果就是

$$E\chi_2 = \left[\frac{1}{2m}(\hat{p} + \vec{A})^2 + \frac{1}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} + m - \varphi \right] \chi_2. \quad (11)$$

其中 $\frac{1}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ 对应内禀磁矩与磁场的相互作用，也就是 $-\vec{\mu}\vec{B}$ ，由此可得

$$\vec{\mu} = -\frac{1}{2m}\vec{\sigma}. \quad (12)$$

3. 一个不稳定粒子的质量和寿命分别为 M 和 τ ，请推导其质量分布函数。

波函数可以写成

$$|t\rangle = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-iMt - \frac{\Gamma}{2}t} |0\rangle, & t \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

通过傅里叶变换到能量空间：

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |t\rangle e^{int} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(m - M) + i\frac{\Gamma}{2}} |0\rangle. \quad (14)$$

由于 $\tau = \Gamma^{-1}$ ，质量分布函数为：

$$\rho(M) = \Gamma \langle M|M \rangle = \frac{1}{2\tau\pi} \frac{1}{(M - m_0)^2 + \frac{1}{4\tau^2}}. \quad (15)$$

4. 如果一个不稳定粒子能够在探测器中留下径迹，如何估计它的寿命？

粒子在探测器中留下径迹，表明它飞行了一段距离 L 后衰变。测量径迹长度 L 和粒子速度 v ，则飞行时间 $t = L/v$ 。寿命 τ 可通过指数衰变律估计。考虑相对论效应，衰变长度 $L = v\gamma\tau$ ，其中 γ 是洛伦兹因子。已知粒子动量 p 和质量 m ，有 $\gamma = E/m$ ， $p = \gamma mv$ ，因此：

$$\tau = \frac{mL}{p}. \quad (16)$$

通过测量多个事件拟合径迹长度分布，可以估计寿命 τ 。

5. J/ψ 粒子的质量为 3.1 GeV，如果要通过正负电子对撞产生 J/ψ ，正负电子需要加速到多大速度？这时正负电子的相对速度是多少，快度和相对快度是多少？

产生 J/ψ 需要质心系能量 $\sqrt{s} = M_{J/\psi} = 3.1$ GeV。正负电子对撞，每个电子能量 $E_e = \sqrt{s}/2 = 1.55$ GeV。电子静质量 $m_e \approx 0.511$ MeV，根据相对论质能关系

$$E_e = m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (17)$$

可以计算出每个粒子的速率为

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{E_e}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_e}{E_e}\right)^2 = 0.9999999. \quad (18)$$

在正电子静止系中考虑这个问题，此时相对速率为

$$u = \boxed{\frac{2v}{1 + v^2}} = 0.999999999999999. \quad (19)$$

正电子快度就是

$$y_1 := \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} = 8.714. \quad (20)$$

电子的结果数值一样，负号取反是因为方向的反向

$$y_2 = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} = -8.714. \quad (21)$$

相对快度就是

$$Y = 17.43. \quad (22)$$

Tip

相对快度是洛伦兹不变量，所以它也可以这样计算

$$Y = \frac{1}{2} \frac{1+u}{1-u} = 17.43. \quad (23)$$

6. 两体到两体散射的初末态粒子的四动量可以构成三个不变量 s, t, u ，证明 $s + t + u$ 等于四个粒子的质量平方和。

定义 $s = (p_1 + p_2)^2, t = (p_1 - p_3)^2, u = (p_1 - p_4)^2$ 。初态粒子四动量为 p_1, p_2 ，末态为 p_3, p_4 。由四动量守恒 $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ 。

展开：

$$\begin{aligned} s &= p_{1,\mu}^2 + p_{2,\mu}^2 + 2p_{1,\mu} \cdot p_{2,\mu} \\ t &= p_{1,\mu}^2 + p_{3,\mu}^2 - 2p_{1,\mu} \cdot p_{3,\mu} \\ u &= p_{1,\mu}^2 + p_{4,\mu}^2 - 2p_{1,\mu} \cdot p_{4,\mu} \end{aligned} \quad (24)$$

求和：

$$\begin{aligned} s + t + u &= 3p_{1,\mu}^2 + p_{2,\mu}^2 + p_{3,\mu}^2 + p_{4,\mu}^2 + 2p_{1,\mu} \cdot p_{2,\mu} - 2p_{1,\mu} \cdot p_{3,\mu} - 2p_{1,\mu} \cdot p_{4,\mu} \\ &= 3p_{1,\mu}^2 + p_{2,\mu}^2 + p_{3,\mu}^2 + p_{4,\mu}^2 + 2p_{1,\mu} \cdot (p_{2,\mu} - p_{3,\mu} - p_{4,\mu}) \\ &= 3p_{1,\mu}^2 + p_{2,\mu}^2 + p_{3,\mu}^2 + p_{4,\mu}^2 - 2p_{1,\mu}^2 \\ &= p_{1,\mu}^2 + p_{2,\mu}^2 + p_{3,\mu}^2 + p_{4,\mu}^2 \end{aligned} \quad (25)$$

由于 $p_{i,\mu}^2 = E_i^2 - p_i^2 = m_i^2$ ，所以 $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$ 。

7. 推导三体衰变宽度公式，并阐述 Dalitz 图的物理意义。

在三体衰变过程中，Lorentz 守恒量有 2 个，分别为

$$\begin{aligned} m_{12} &= s_1 = (p_{1,\mu} + p_{2,\mu})^2 \\ m_{23} &= s_2 = (p_{2,\mu} + p_{3,\mu})^2 \\ m_{31} &= s_3 = (p_{3,\mu} + p_{1,\mu})^2 \end{aligned} \quad (26)$$

在衰变粒子（初态）的质心系中，应该有 $p_\mu = (E, \vec{0})$ 也就是 $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ 。所以三体衰变的微分宽度可以表示为

$$d\Gamma = \frac{|T|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(p_\mu - p_{1,\mu} - p_{2,\mu} - p_{3,\mu}) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3}. \quad (27)$$

如果衰变粒子是标量粒子，则

$$\Phi = \int (2\pi)^4 \delta^4(p_\mu - p_{1,\mu} - p_{2,\mu} - p_{3,\mu}) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} = \frac{1}{32\pi^3} \int dE_1 dE_2 dE_3. \quad (28)$$

于是有

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3 8M} \int |T|^2 dE_1 dE_2 dE_3 = \frac{1}{(2\pi)^3 32M^3} \int |T|^2 ds_1 ds_2. \quad (29)$$

Dalitz 图的物理意义：以 s_1 和 s_2 为坐标的散点图，**每个衰变事件对应一个点。其中数据点的密度正比于衰变矩阵元的平方，形状取决于末态粒子的质量。**

8. 简要说明亮度、反应截面和反应事例数之间的关系及在高能物理实验中的意义。

- **亮度 L** ：单位时间单位截面内的碰撞率，单位通常为 $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ ，表征对撞机性能。
- **反应截面 σ** ：发生特定反应的概率，单位是面积，表征物理过程的特征。
- **反应事例数 N** ：在时间 T 内观测到的事例数。

三者关系为：

$$W = \sigma \cdot LT \quad (30)$$

在高能物理实验中的意义：通过测量事例数 N 和已知亮度 L ，可以计算反应截面 σ ，从而研究物理过程（如新粒子产生、相互作用强度等）。亮度越高，越容易观测到稀有过程，事例数统计误差越小。

粒子物理（一）作业 2 标准答案

一、同位旋、重子数和奇异数

1. 什么是同位旋？什么是同位旋变换？请简述同位旋对称性的含义。

- **同位旋**: 描述质量相近的不同带电性粒子的量子数。
- **同位旋变换**: 是同位旋空间中的旋转操作，满足 $SU(2)$ 群代数。物理上来说是不同电性粒子的相互转换。
- **同位旋对称性**: 就是在变换前后，体系的同位旋以及同位旋第三分量不发生改变。

2. 奇异粒子都有哪些特点，为什么？

- **特点**:
 - 产生快（强相互作用），衰变慢（弱相互作用）。
 - 成对产生，单独衰变
- **原因**: 奇异粒子通过强相互作用产生，必定存在一个强相互作用下的守恒量，所以成对产生，产生速度也快；通过弱相互作用衰变，所以衰变慢。

3. 讨论 $\pi\pi$ 系统、 $K\bar{K}$ 系统、 NN 系统和 $N\bar{N}$ 系统的所有同位旋状态，并用粒子组成表达；给出这些系统的重子数和奇异数。

使用角动量耦合公式

$$|jm\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \langle j_1, m_1, j_2, m - m_1 | jm \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m - m_1\rangle. \quad (31)$$

- **$\pi\pi$ 系统**:

同位旋可能值: $I = 0, 1, 2$, 重子数 $b = 0$, 奇异数 $S = 0$ 。

- 单态:

$$|00\rangle = \langle 1100|00\rangle |10\rangle |10\rangle + \langle 111-1|00\rangle |11\rangle |1-1\rangle + \langle 11-11|00\rangle |1-1\rangle |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\pi^0\pi^0\rangle + |\pi^+\pi^-\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle)$$

◦

- 三重态:

$$|10\rangle = \langle 1100|10\rangle |\pi^0\pi^0\rangle + \langle 111-1|10\rangle |\pi^+\pi^-\rangle + \langle 11-11|10\rangle |\pi^-\pi^+\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^-\pi^+\rangle) \right], \quad (32)$$

$$|11\rangle = \langle 1101|11\rangle |\pi^0\pi^+\rangle + \langle 1110|11\rangle |\pi^+\pi^0\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^+\pi^0\rangle - |\pi^0\pi^+\rangle) \right], \quad (32)$$

$$|1-1\rangle = \langle 110-1|1-1\rangle |\pi^0\pi^-\rangle + \langle 11-10|1-1\rangle |\pi^-\pi^0\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^-\pi^0\rangle - |\pi^0\pi^-\rangle) \right]. \quad (32)$$

- 五重态:

$$|22\rangle = \langle 1111|22\rangle |\pi^+\pi^+\rangle = \boxed{|\pi^+\pi^+\rangle},$$

$$|21\rangle = \langle 1101|21\rangle |\pi^+\pi^0\rangle + \langle 1110|21\rangle |\pi^0\pi^+\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^+\pi^0\rangle + |\pi^0\pi^+\rangle) \right],$$

$$|20\rangle = \langle 1100|20\rangle |\pi^0\pi^0\rangle + \langle 111-1|20\rangle |\pi^+\pi^-\rangle + \langle 11-11|20\rangle |\pi^-\pi^+\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}(2|\pi^0\pi^0\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle + |\pi^+\pi^-\rangle) \right]$$

$$|2-1\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^-\pi^0\rangle + |\pi^0\pi^-\rangle) \right],$$

$$|2-2\rangle = \boxed{|\pi^-\pi^-\rangle}.$$

- **$K\bar{K}$ 系统**:

重子数 $b = 0$, 奇异数 $S = 0$, $I = 0, 1$.

- 单态: $|00\rangle = \langle \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}|00\rangle |K^0\bar{K}^0\rangle + \langle \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|00\rangle |K^+K^-\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\bar{K}^0\rangle + |K^+K^-\rangle) \right]$

◦ 三重态:

$$\begin{aligned} |11\rangle &= \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 11 \right\rangle |K^+ \bar{K}^0\rangle = \boxed{|K^+ \bar{K}^0\rangle}, \\ |10\rangle &= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| 10 \right\rangle |K^0 \bar{K}^0\rangle + \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| 10 \right\rangle |K^+ K^-\rangle = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0 \bar{K}^0\rangle - |K^+ K^-\rangle)}, \\ |1-1\rangle &= \boxed{-|K^0 K^-\rangle}. \end{aligned} \quad (34)$$

• NN 系统:

重子数 $b = 2$, 奇异数 $S = 0$, 同位旋可能值: $I = 0, 1$ 。具体讨论同上, 结果为

$$\begin{aligned} |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle - |np\rangle), \\ |11\rangle &= |pp\rangle, \\ |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|pn\rangle + |np\rangle), \\ |1-1\rangle &= |nn\rangle. \end{aligned} \quad (35)$$

• $N\bar{N}$ 系统:

重子数 $b = 1$, 奇异数 $S = 0$, 同位旋可能值: $I = 0, 1$ 。只需将结果中每项中的第二个做如下变换即可

$$p \rightarrow \bar{n}, \quad n \rightarrow \bar{p} \quad (36)$$

这是因为, 如果一个同位旋量为 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, 则其反粒子的同位旋量为 $\begin{bmatrix} B^* \\ -A^* \end{bmatrix}$ 。

4. 在实验室中, 用动量是多少 GeV 的质子去撞击质子靶(质量是 1 GeV), 才能产生一个反质子?

此时的反应应该是

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}. \quad (37)$$

为了求出最小入射动量, 设质心系中产物最终的总动量为 0, 则质心系总能量平方为

$$s = 16m_p^2. \quad (38)$$

设入射粒子的四动量矢量为 (E_p, \vec{p}) , 靶四动量矢量为 $(m_p, 0)$, 则总的四动量矢量为 $p_{\text{tot}}^\mu = (E_p + m_p, \vec{p})$

$$s = p_{\text{tot}}^\mu p_{\text{tot},\mu} = (E_p + m_p)^2 - p^2. \quad (39)$$

又考虑 $E_p^2 = m_p^2 + p^2$, 代入有

$$s = 2E_p m_p + 2m_p^2 \quad (40)$$

由于 s 是洛伦兹不变量, 所以有

$$2E_p m_p + 2m_p^2 = 16m_p^2 \Rightarrow |\vec{p}| = \frac{4}{\sqrt{3}}. \quad (41)$$

5. 根据同位旋守恒定律, 讨论如下协同产生过程在质心能量为 1.232 GeV 附近 (以总同位旋 $I = \frac{3}{2}$ 为主) 的截面关系

过程:

- $\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0$

- 初态: $\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$;
- 末态: $-\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$;

于是跃迁矩阵元可以写为

$$M_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \middle| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| \right) H \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right) \approx \frac{\sqrt{2}}{3} \left\langle \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \middle| H \left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \right) \quad (42)$$

- $\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$

同理, 跃迁矩阵元为

$$M_2 = \frac{1}{3} \left\langle \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left| H \right| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \quad (43)$$

- $\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$

$$M_3 = \left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \left| H \right| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle \quad (44)$$

截面正比于跃迁矩阵元平方，所以有

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 2 : 1 : 9. \quad (45)$$

♀ Tip

这里就是将角动量耦合反着用。而且要注意截面只与 I 有关，与 I_3 无关。

二、C 变换和 G 变换

1. 简述 C 变换、G 变换的物理含义，并说明以上各种变换的本征态是什么。哪些相互作用在以上变换中是不变的？

- C 变换：**电荷共轭变换，将粒子变为反粒子，改变所有相加性量子数的符号（如电荷、重子数、奇异数）。本征态为**中性粒子或中性粒子体系**。C 变换下在强相互作用、电磁相互作用下守恒；弱相互作用不守恒。
- G 变换：**G 宇称变换，定义为 $G = C \cdot e^{i\pi I_3}$ ，其中 I_3 为同位旋第三分量。将粒子变为其反粒子并旋转同位旋第三分量。本征态为除同位旋第三分量之外所有内部相加守恒量之和为 0 的粒子（普通介子，如 π^0 ）。强相互作用在 G 变换下不变。

2. 讨论两个 π 介子组成的中性系统 ($\pi^0 \pi^0$ 和 $\pi^+ \pi^-$) 的所有可能的 C, G 量子数。

- $\pi^0 \pi^0$ 系统：

这是 C 变换本征态，所以自然有

$$C_{\pi^0 \pi^0} = C_{\pi^0} C_{\pi^0} = +, \quad G_{\pi^0 \pi^0} = G_{\pi^0} G_{\pi^0} = +. \quad (46)$$

- $\pi^+ \pi^-$ 系统：

中性系统，假设其相对轨道角动量为 L ，同位旋 $I_{\pi^+ \pi^-} = 0, 1, 2$ ，于是有

$$C_{\pi^+ \pi^-} = (-)^L, \quad G_{\pi^+ \pi^-} = (-)^{L+I}. \quad (47)$$

注意这里是广义全同粒子体系，所以有

$$L + S + I + 2i = \text{even}. \quad (48)$$

所以有

$$C_{\pi^+ \pi^-} = (-)^L, \quad G_{\pi^+ \pi^-} = +. \quad (49)$$

3. 判断如下过程能否通过强相互作用发生

- $\rho^\pm \rightarrow \pi^0 \pi^\pm$: 能通过强相互作用发生。
- $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$: 能通过强相互作用发生。
- $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$:
 - 同位旋： $\pi^0 \pi^0$ 系统总 $I = 0, 1, 2$ ，同位旋守恒。
 - C 宇称：显然不守恒，不能通过强相互作用发生。
- $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$:

可以看[后面题目的计算结果](#)，可以发现同位旋守恒与 C 宇称守恒不能同时成立，所以不能通过强相互作用发生。

4. 第四题

我们知道赝标量介子 ($J^P = 0^-$) 有两个同位旋二重态 $K = (K^+, K^0)$ 和 $\bar{K} = (\bar{K}^0, -K^-)$ ，它们的奇异数分别为 $S = +1$ 和 $S = -1$ ，其中 K^+ 和 K^- 互为反粒子， K^0 和 \bar{K}^0 互为反粒子。其实，矢量介子 ($J^P = 1^-$) 也有两个同位旋二重态 $K^* = (K^{*+}, K^{*0})$ 和 $\bar{K}^* = (\bar{K}^{*0}, -K^{*-})$ ，它们的奇异数分别为 $S = +1$ 和 $S = -1$ ，其中 K^{*+} 和 K^{*-} 互为反粒子， K^{*0} 和 \bar{K}^{*0} 互为反粒子。

- KK^* 系统是 G 变换的本征态吗？
- $K\bar{K}^*$ 和 $\bar{K}K^*$ 系统可以构成 G 变换的本征态吗？如果可以，当两粒子处于 S 波（即相对轨道角动量 $L = 0$ ）时 $G = \pm$ 的态

的粒子组成分别是什么？我们约定 K 介子和 \bar{K} 介子的 C 变换因子为正，即 $C'(K) = C'(\bar{K}) = +$ ； K^* 介子和 \bar{K}^* 介子的 C 变换因子为负，即 $C'(K^*) = C'(\bar{K}^*) = -$ 。

提示：如果 $|A\rangle$ 具有确定的整数同位旋，并且除同位旋第三分量不为零外，其它内部相加性量子数都为零，则具有确定 G 字称的态可以通过如下方式构成：

$$|A(G=\pm)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle \pm \hat{G}|A\rangle) \quad (50)$$

回答

1. $S_K + S_{K^*} \neq 0$ ，所以不是 G 变换本征态。

2. 同上， $K\bar{K}^*$ 和 $\bar{K}K^*$ 系统可以构成 G 变换的本征态。

要求的 **G 变换的本征态**，所以我们首先考虑 G 变换作用在 $K\bar{K}^*$ 系统具体的态上的结果

$$\hat{G}|K^0\bar{K}^{*0}\rangle = \hat{C}|K^+K^{*-}\rangle = (-)^2 C'(K^+) C'(K^{*-}) |K^-K^{*+}\rangle = -|K^-K^{*+}\rangle. \quad (51)$$

注意在上述过程中， $(-)^2$ 来源于前文所说的 K^+ 粒子取反粒子获得的负号，继续做类似操作，有

$$\begin{aligned} \hat{G}|K^+\bar{K}^{*0}\rangle &= |\bar{K}^0K^{*+}\rangle \\ \hat{G}|K^0K^{*-}\rangle &= |K^-K^{*0}\rangle \\ \hat{G}|K^+K^{*-}\rangle &= -|\bar{K}^0K^{*0}\rangle \end{aligned} \quad (52)$$

不难发现实际上就是

$$\hat{G}|K\bar{K}^*\rangle = |\bar{K}K^*\rangle \quad (53)$$

于是 $|K\bar{K}^*\rangle$, $|\bar{K}K^*\rangle$ 的任意线性组合就是 G 字称本征态。

如果 $I = 0$ ，同位旋的耦合本征态为

$$|00\rangle = \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \middle| 00 \right\rangle |K^0K^{*0}\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \middle| 00 \right\rangle |K^+K^{*-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0K^{*0}\rangle + |K^+K^{*-}\rangle) \quad (54)$$

如果 $I = 1$ ，同位旋的耦合本征态为

$$\begin{aligned} |10\rangle &= \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \middle| 10 \right\rangle |K^0K^{*0}\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \middle| 10 \right\rangle |K^+K^{*-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0K^{*0}\rangle - |K^+K^{*-}\rangle) \\ |1-1\rangle &= |K^0K^{*-}\rangle \\ |11\rangle &= |K^+\bar{K}^{*0}\rangle \end{aligned} \quad (55)$$

于是最终结果如下

- 正 G 字称态

$$\begin{aligned} |G=+, I=1, I_3=-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|K^0K^{*-}\rangle + |K^-K^{*0}\rangle] \\ |G=+, I=1, I_3=1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|K^+\bar{K}^{*0}\rangle + |\bar{K}^0K^{*+}\rangle] \\ |G=+, I=1, I_3=0\rangle &= \frac{1}{2}[|K^+K^{*-}\rangle + |K^0\bar{K}^{*0}\rangle + |\bar{K}^0K^{*0}\rangle + |K^-K^{*+}\rangle] \\ |G=+, I=0, I_3=0\rangle &= \frac{1}{2}[|K^+K^{*-}\rangle - |K^0\bar{K}^{*0}\rangle + |\bar{K}^0K^{*0}\rangle - |K^-K^{*+}\rangle] \end{aligned} \quad (56)$$

- 负 G 字称态

$$\begin{aligned} |G=-, I=1, I_3=-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|K^0K^{*-}\rangle - |K^-K^{*0}\rangle] \\ |G=-, I=1, I_3=1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|K^+\bar{K}^{*0}\rangle - |\bar{K}^0K^{*+}\rangle] \\ |G=-, I=1, I_3=0\rangle &= \frac{1}{2}[|K^+K^{*-}\rangle - |K^0\bar{K}^{*0}\rangle + |\bar{K}^0K^{*0}\rangle - |K^-K^{*+}\rangle] \\ |G=-, I=0, I_3=0\rangle &= \frac{1}{2}[|K^+K^{*-}\rangle + |K^0\bar{K}^{*0}\rangle + |\bar{K}^0K^{*0}\rangle + |K^-K^{*+}\rangle] \end{aligned} \quad (57)$$

Important

这里有一个特别疑惑的问题，就是提示中强调了“除同位旋第三分量不为零外，其它内部相加性量子数都为零”

但是问题是看这里

$$|1-1\rangle = |K^0 K^{*-}\rangle, \quad |11\rangle = |K^+ \bar{K}^{*0}\rangle. \quad (58)$$

这两个态显然内部相加性守恒量（电荷）不为零，但是还是能够按照提示中构建 G 变换本征态。

三、P 变换和 CP 变换

1. P 变换和 CP 变换的物理含义，并说明以上各种变换的本征态是什么，哪些相互作用在以上变换中是不变的？标准模型中的中微子和反中微子互为反粒子吗？

P 变换就是空间坐标反演而时间不变，其本征态是角动量本征态，在强和电磁相互作用中保持不变；

CP 变换就是 P 和 C 变换的联合变换，本征态是纯中性系统，在强、弱和电磁相互作用中保持不变。

中微子和反中微子不是反粒子，因为其不能通过 C 变换互相转换，也就是说不存在

$$C'\bar{\nu} = C\nu. \quad (59)$$

而是存在

$$CP\nu = \bar{\nu}. \quad (60)$$

2. 正反赝标量介子对的 CP 字称有什么特点？

其 CP 字称总为 +1。

3. 正反中性 K 介子很难通过它们的衰变方式来分辨，为什么？如果通过它们弱衰变到多个 π 介子来辨认它们，看到的是 CP 变换的本征态，它们有什么特点？

因为 K 介子通过弱相互作用衰变，在弱相互作用中同位旋第三分量以及奇异数均不守恒。

不同 CP 字称本征态生成的 π 介子数目不一样，同时衰变的速率也不一样。K_S 衰变速率远大于 K_L。

4. 如果一个粒子的衰变末态为 K_LK_S，那么这个粒子的自旋、字称和 C 字称 J^{PC} 是多少？如果衰变末态是 K_SK_S 和 K_LK_L 呢？

衰变前后奇异数守恒，所以这个过程是强相互作用过程。字称、CP 字称以及自旋都守恒。

首先考虑

$$CP(K_L) = -1, \quad CP(K_S) = +1, \quad P(K_L) = -1, \quad P(K_S) = -1. \quad (61)$$

所以

$$\begin{aligned} CP(K_L K_S) &= CP(K_L)CP(K_S)(-)^L = (-)^{L+1}, & CP(K_S K_S) &= (-)^L, & CP(K_L K_L) &= (-)^L, \\ P(K_L K_S) &= P(K_L)P(K_S)(-)^L = (-)^L, & P(K_S K_S) &= (-)^L, & P(K_L K_L) &= (-)^L. \end{aligned} \quad (62)$$

其中 L 是 K⁰̄K⁰ 体系的相对轨道量子数，于是有

$$C(K_L K_S) = -1, \quad C(K_L K_L) = +1, \quad C(K_S K_S) = +1. \quad (63)$$

同时观察，K_LK_S 系不是广义全同玻色子系而 K_SK_S 系和 K_LK_L 系是广义全同玻色子系，所以对 K_SK_S 和 K_LK_L 有额外的限制，就是：

$$L + S + I + 2i = \text{even}. \quad (64)$$

而 S = 0, i = 1，所以有

$$L + I = \text{even}. \quad (65)$$

在这里，有 I = 0, 1, 2，讨论

- I = 0, 2 时，有 L 为偶数，P(K_{L,S}K_{L,S}) = +。
- I = 1 时，有 L 为奇数，P(K_{L,S}K_{L,S}) = -。

所以，初态粒子满足

- K_LK_S : J^{PC} = L⁽⁻⁾₋^L
- K_LK_L 和 K_SK_S : J^{PC} = (0, 2, ...)++ 或 J^{PC} = (1, 3, ...)−+。

⚠ Warning

这里忘记考虑了正反赝标量粒子中 $CP \equiv +$ ，所以最后的结果是

- $K_L K_S$: $J^{PC} = (1, 3, \dots)^{--}$ 。
- $K_L K_L$ 和 $K_S K_S$: $J^{PC} = (0, 2, \dots)^{++}$ 。

5. $\phi(1020)$ 介子的性质为: $I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$, 试分析这些衰变哪些是强衰变, 哪些是电磁衰变?

$$K_L^0 K_S^0, K^+ K^-, \pi^+ \pi^- \pi^0, \eta\gamma, \pi^0 \gamma, \mu^+ \mu^-, \omega \pi^0, \pi^+ \pi^- \quad (66)$$

可以考虑 G 宇称与同位旋是否守恒来区分强、电磁相互作用衰变, 因为这是两种作用中有差异的量子数。

- $K_L K_S$: 这个反应中显然 $I = 0, 1$, 同位旋是能守恒的, 所以是强衰变;
- $K^+ K^-$: 这个反应中显然也有 $I = 0, 1, 2$, 也是强衰变;
- $\pi^+ \pi^- \pi^0$: 这个反应中, $I = 0, 1, 2, 3$, 也是强衰变;
- $\eta\gamma$: 这个反应中, 有光子, 显然就是电磁衰变;
- $\pi^0 \gamma$: 同理, 电磁衰变;
- $\mu^+ \mu^-$: 同位旋不守恒, 电磁衰变;
- $\omega \pi^0$: 同位旋不守恒, 电磁衰变;
- $\pi^+ \pi^-$: 有以下两种方法
 - $G(\pi) = -1 \Rightarrow G(\pi^+ \pi^-) = +1 \neq -1$ 所以应该是电磁衰变。
 - $I = 0, 1, 2$ 。这个体系是广义全同玻色子系, 也就是满足 $L + S + I + 2i = \text{even}$ 。代入 $i = 1$, $S = 0$ 有 $L + I = \text{even}$, 因此 $L = 0, 2, \dots$ or $L = 1, 3, \dots$ 。由于题目给出了初始粒子的总角动量 $J_i = 1$, 所以 $L = 1, 3, \dots$ 且 $I = 1$ 。显然同位旋不守恒, 是电磁衰变。

四、综合

第一题

J/ψ 粒子是由正反粲夸克构成的 ($c\bar{c}$) 介子 ($c\bar{c}$ 介子一般称作粲夸克偶素, 英文为 Charmonium), 其量子数为 $I^G J^{PC} = 0^- 1^{--}$ 。讨论其如下衰变性质:

1. J/ψ 可以衰变到 $K\bar{K}$ 末态, 请说明其中 $K^0 \bar{K}^0$ 末态的表现形式。
2. J/ψ 能够衰变到 $\pi^+ \pi^- \pi^0$ 末态和 $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ 末态吗? 为什么?
3. J/ψ 通过放出一个光子衰变到轻强子的过程是电磁衰变。考虑电磁衰变过程

$$J/\psi \rightarrow \gamma X \rightarrow \gamma \pi \pi \quad (67)$$

即 J/ψ 先电磁衰变 (放出一个光子) 到中间强子态 X , X 再衰变到 $\pi\pi$ 。请判断 X 的量子数 $I^G J^{PC}$ 。

4. 考虑 J/ψ 电磁衰变过程 $J/\psi \rightarrow \gamma X \rightarrow \gamma K\bar{K}$, 判断 X 的量子数 $I^G J^{PC}$, 并讨论 $K\bar{K}$ 的表现形式。

5. 考虑 $J/\psi \rightarrow \gamma X \rightarrow \gamma \eta \pi \pi$, 讨论 X 的可能量子数。

回答

1. 过程 $J/\psi \rightarrow K^0 \bar{K}^0$ 奇异数守恒, 所以一定是强衰变或者电磁衰变。不难看出

$$CP_{J/\psi} = +. \quad (68)$$

$K\bar{K}$ 作为赝标量粒子对, 其 CP 宇称恒为 +。由于只用考虑正反中性粒子体系, 其具有 $K_S K_S$, $K_S K_L$ 和 $K_L K_L$ 三个表现形式, 具体来说就是

- $K_L K_L$ 和 $K_S K_S$:
 $CP_{K_L K_L / K_S K_S} = C_{K_L / S} C_{K_L / S} P_{K_L / S} P_{K_L / S} (-)^L = (-)^L = + \Rightarrow L = 0, 2, \dots \Rightarrow P_{K_L K_L / K_S K_S} = +$, 宇称不守恒, 不成立。
- $K_S K_L$: $CP_{K_S K_L} = C_{K_S} C_{K_L} P_{K_S} P_{K_L} (-)^L = -(-)^L = + \Rightarrow L = 1, 3, \dots \Rightarrow P_{K_L K_S} = -$, 宇称守恒, 成立。

综上: 根据宇称守恒, 表现形式为 $K_S K_L$ 。

2. 首先写出两个末态的同位旋, 分别是

$$I_{\pi^+\pi^-\pi^0} = I_{\pi^0\pi^0\pi^0} = 0, 1, 2, 3. \quad (69)$$

是有可能通过强衰变和电磁衰变到 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 和 $\pi^0\pi^0\pi^0$ 。

实际上 $I_{\pi^+\pi^-\pi^0} = I_{\pi^0\pi^0\pi^0} = 0, 1, 2, 3$ 并不是完全可取的，必须考虑到这里是一个广义全同粒子系，满足波函数的交换对称性。

- $\pi^+\pi^-\pi^0$ 系统：先拆分为两个子系统 $\pi^+\pi^-$ 和 π^0 。

- $\pi^+\pi^-$ ：这也是个广义全同粒子系，应该满足

$$L + S + I - 2i = \text{even}. \quad (70)$$

其中 $I_{\pi^+\pi^-} = 0, 1, 2, i = 1, S = 0$ ，因此有

- $I_{\pi^+\pi^-} = 0, 2$ 时，会有 $L_{\pi^+\pi^-} = 0, 2, \dots, C_{\pi^+\pi^-} = +, G_{\pi^+\pi^-} = +, P_{\pi^+\pi^-} = +$ 。

- $I_{\pi^+\pi^-} = 1$ 时，会有 $L_{\pi^+\pi^-} = 1, 3, \dots, C_{\pi^+\pi^-} = -, G_{\pi^+\pi^-} = +, P_{\pi^+\pi^-} = -$ 。

此时

$$\begin{aligned} C_{\pi^+\pi^-\pi^0} &= C_{\pi^+\pi^-}C_{\pi^0} = C_{\pi^+\pi^-}, \\ G_{\pi^+\pi^-\pi^0} &= G_{\pi^+\pi^-}G_{\pi^0} = -. \end{aligned} \quad (71)$$

考虑存在如下关系

$$G_{\pi^+\pi^-\pi^0} = C_{\pi^+\pi^-\pi^0}(-)^{I_{\pi^+\pi^-\pi^0}} \quad (72)$$

于是会有

$$- = C_{\pi^+\pi^-\pi^0}(-)^{I_{\pi^+\pi^-\pi^0}} = C_{\pi^+\pi^-}(-)^{I_{\pi^+\pi^-\pi^0}} \Rightarrow \begin{cases} I_{\pi^+\pi^-\pi^0} = 0, 2 & I_{\pi^+\pi^-} = 1 \\ I_{\pi^+\pi^-\pi^0} = 1, 3 & I_{\pi^+\pi^-} = 0, 2 \end{cases} \quad (73)$$

根据同位旋守恒，只可以选择 $I_{\pi^+\pi^-\pi^0} = 0, 2, I_{\pi^+\pi^-} = 1$ 的情况。因此 $\pi^+\pi^-$ 的波函数交换对称性不会破坏同位旋守恒，可能衰变到 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 末态。

- $\pi^0\pi^0\pi^0$ 系统：先拆分为两个子系统 $\pi^0\pi^0$ 和 π^0 。

- $\pi^0\pi^0$ ：这也是个广义全同粒子系，应该满足

$$L + S + I - 2i = \text{even}. \quad (74)$$

其中 $I_{\pi^0\pi^0} = 0, 1, 2, i = 1, S = 0$ ，因此有

- $I_{\pi^0\pi^0} = 0, 2$ 时，会有 $L_{\pi^0\pi^0} = 0, 2, \dots, C_{\pi^0\pi^0} = +, G_{\pi^0\pi^0} = +$ 。

- $I_{\pi^0\pi^0} = 1$ 时，这种情况是不可能的，因为 $\pi^0\pi^0$ 系统的同位旋波函数是不可对称的。

根据上述的讨论，如果 $I_{\pi^0\pi^0} \neq 1$ ，就无法导出最后 $I_{\pi^0\pi^0\pi^0} = 0, 2$ 的结论，就是说同位旋必定是不守恒的，自然这个末态是不被允许的。

综上：**J/ψ能够衰变到 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 末态 (OZI 压低) 而不能衰变到 $\pi^0\pi^0\pi^0$ 末态。**

Important

在这里我看到一个同学的答案很有意思，但是被 DeepSeek 判错了，特此放出这个步骤

由于角动量守恒，因此有

$$L_{\pi\pi\pi} = J_{J/\psi} = 1 \quad (75)$$

所以可以计算出宇称

$$P_{\pi\pi\pi} = (-)^3(-)^{L_{\pi\pi\pi}} = + \neq - \quad (76)$$

所以两个末态都是不可能的。

上述过程错误在于不能直接计算出所谓的 $L_{\pi\pi\pi}$ 。必须将系统划分为子系统，也就是要分别得到 $L_{\pi\pi}$ 和 $L_{\pi\pi\pi}$ ，前者是二 π 系统的轨道角动量；后者是 π 绕二 π 系统的轨道角动量，此时总角动量为

$$L_{\text{tot}} = |L_{\pi\pi} - L_{\pi\pi\pi}|, \dots, L_{\pi\pi} + L_{\pi\pi\pi}. \quad (77)$$

也就是说只要

$$1 \in [|L_{\pi\pi} - L_{\pi\pi\pi}|, L_{\pi\pi} + L_{\pi\pi\pi}] \quad (78)$$

就可以满足角动量守恒，此时宇称为

$$P_{\pi\pi\pi} = -(-)^{L_{\pi\pi} + L_{\pi\pi\pi}} \quad (79)$$

要让宇称守恒，可供选择的组合有

$$(2, 2), (1, 1), \dots \quad (80)$$

3. 首先，电磁衰变过程中，同位旋以及 G 宇称不守恒。所以可以大致得到 γX 的量子数为

$$I^G J^{PC} = \sim \sim 1^{--}, \quad (81)$$

其中 \sim 表示未知量子数。

而 $X \rightarrow \pi\pi$ 这个过程是强衰变（强子发生的难道还有别的选择吗？）。 $\pi\pi$ 系统的同位旋为 $I_{\pi\pi} = 0, 1, 2$ 。此时为了确定 $I_{\pi\pi}$ 的值，需要考虑广义全同粒子体系的交换对称性的性质，也就是

$$L_{\pi\pi} + S_{\pi\pi} + I_{\pi\pi} - 2i = \text{even}. \quad (82)$$

其中 $i = 1$, $S_{\pi\pi} = 0$, 于是有

$$L_{\pi\pi} + I_{\pi\pi} = \text{even}. \quad (83)$$

- $I_{\pi\pi} = 0, 2$, 所以显然有 $L_{\pi\pi} = 0, 2, \dots$, 可以推出 $P_{\pi\pi} = P_\pi P_\pi (-)^{L_{\pi\pi}} = +$ 。
- $I_{\pi\pi} = 1$, 所以显然有 $L_{\pi\pi} = 1, 3, \dots$, 可以推出 $P_{\pi\pi} = P_\pi P_\pi (-)^{L_{\pi\pi}} = -$ 。

考虑 $\gamma X \rightarrow \gamma\pi\pi$ 的宇称守恒，应该有（这里我假设了 X 和 γ 之间没有相对轨道角动量）

$$P_{\gamma\pi\pi} = P_\gamma P_{\pi\pi} = - \Rightarrow [P_{\pi\pi} = +], L_{\pi\pi} = 0, 2, \dots, [I_{\pi\pi} = 0, 2]. \quad (84)$$

又考虑 $C_\gamma = -, J_\gamma = 1$, 于是可以得到

$$\begin{aligned} C_\gamma C_{\pi\pi} = - &\Rightarrow [C_{\pi\pi} = +] \Rightarrow [G_{\pi\pi} = +], \\ J_{\gamma\pi\pi} = |L_{\pi\pi} - J_\gamma|, \dots, L_{\pi\pi} + J_\gamma = 1 &\Rightarrow [J_{\pi\pi} = L_{\pi\pi} = 0, 2]. \end{aligned} \quad (85)$$

⚠ Warning

考虑电磁衰变的选择定则： $\Delta I = 0, \pm 1$, 答案应该修正为 $I^G J^{PC} = 0^+(0, 2)^{++}$ 。

综上， X 的量子数为 $I^G J^{PC} = (0, 2)^+(0, 2)^{++}$ 。

4. 同 [小问 1](#) 和 [小问 3](#)，可以得知只有同位旋有差别，做如下修正

$$I_{\pi\pi} = 0, 1, 2 \Rightarrow I_{K\bar{K}} = 0, 1. \quad (86)$$

额外考虑 $K^+ K^-$ ，这是正反玻色子体系，所以自然有 $P_{K^+ K^-} = (-)^l$ 。正如[小问 3](#) 中所讨论的，整个过程的角动量守恒条件限制了最终能取得只有 $l = 0, 2$ ，恰恰此时宇称守恒是成立的。

自然可以得到： X 的量子数为 $I^G J^{PC} = 0^+(0, 2)^{++}$ ，可能的表现形式为 $K^+ K^-$ 、 $K_S K_S$ 和 $K_L K_L$ 。

5. 此时我们需要讨论的强衰变是 $X \rightarrow \eta\pi\pi$ ，拆分为两个子系统 η 和 $\pi\pi$ 。关于 $\pi\pi$ 系统的讨论如[小问 3](#) 所示，这里不再重复。现在只考虑 η 和 $\pi\pi$ 的耦合（假设两者之间不存在相对轨道角动量）：

- $I_{\pi\pi} = 0, 2$, 所以显然有 $L_{\pi\pi} = 0, 2, \dots$, 即 $P_{\pi\pi} = P_\pi P_\pi (-)^{L_{\pi\pi}} = +$ 。进一步可以得到 $I_{\eta\pi\pi} = 0, 2$, $P_{\eta\pi\pi} = -$ 。
- $I_{\pi\pi} = 1$, 所以显然有 $L_{\pi\pi} = 1, 3, \dots$, 即 $P_{\pi\pi} = P_\pi P_\pi (-)^{L_{\pi\pi}} = -$ 。进一步可以得到 $I_{\eta\pi\pi} = 1$, $P_{\eta\pi\pi} = +$ 。

考虑 $\gamma X \rightarrow \gamma\eta\pi\pi$ 的宇称守恒，应该有（这里我假设了 X 和 γ 之间没有相对轨道角动量）

$$P_{\gamma\eta\pi\pi} = P_\gamma P_{\eta\pi\pi} = - \Rightarrow [P_{\eta\pi\pi} = +], L_{\eta\pi\pi} = 1, \dots, [I_{\pi\pi} = 1]. \quad (87)$$

又考虑 $C_\gamma = -, J_\gamma = 1$, 于是可以得到

$$\begin{aligned} C_\gamma C_{\eta\pi\pi} = - &\Rightarrow [C_{\eta\pi\pi} = +] \Rightarrow [G_{\eta\pi\pi} = -], \\ J_{\gamma\eta\pi\pi} = |L_{\eta\pi\pi} - J_\gamma|, \dots, L_{\eta\pi\pi} + J_\gamma = 1 &\Rightarrow [J_{\eta\pi\pi} = L_{\eta\pi\pi} = 1]. \end{aligned} \quad (88)$$

最终可以得到： X 的量子数为 $I^G J^{PC} = 1^- 1^{++}$ 。

第二题

$X(3872)$ 粒子可以通过正负电子湮灭过程观察到，即

$$e^+ e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \gamma X(3872) \quad (89)$$

其中 γ^* 表示正负电子湮灭的虚光子（其量子数和光子相同）。

1. 判断 $X(3872)$ 的可能量子数；
2. 如果 $X(3872)$ 的同位旋为零 ($I = 0$)（这实际上是通过实验上来确定的，因为没有发现其不同的带电体），它能通过强相互作用衰变到 $J/\psi\omega$ 和 $J/\psi\rho$ 吗？为什么？
3. 如果 $X(3872)$ 的同位旋为零 ($I = 0$)，但确实观测到了 $X(3872) \rightarrow J/\psi\rho$ 的强衰变，这说明什么？

回答：

1. 这个过程显然是电磁相互作用过程，也就是 $\gamma X(3872)$ 系统已知的量子数为

$$I^G J^{PC} = \sim \sim 1^{--}, \quad (90)$$

其中 \sim 表示未知量子数。考虑 $J_\gamma = 1, C_\gamma = P_\gamma = -1$ ，可以知道 $X(3872)$ 的量子数为 $I^G J^{PC} = \sim \sim (0, 1, 2)^{++}$ 。

上述结论从 e^+e^- 系统很难看出来，但是如果只看 γ^* 就很容易得到。考虑

$$I_{e^-e^+} = 0 \Rightarrow I_{3,e^-e^+} = 0 \quad (91)$$

虽然同位旋在电磁相互作用过程不守恒，但是同位旋第三分量是守恒的，所以自然有

$$I_{3,\gamma X(3872)} = 0 \quad (92)$$

但是显然这部分没有任何作用。

2. 如果 $I_{X(3872)} = 0$ ，有完整的 $X(3872)$ 量子数

$$I^G J^{PC} = 0^+(0, 1, 2)^{++}. \quad (93)$$

◦ $J/\psi\omega$ 系统：

- $I_{J/\psi\omega} = 0$ ，同位旋守恒；
- $C_{J/\psi\omega} = C_{J/\psi}C_\omega = + \Rightarrow G_{J/\psi\omega} = +$ ，C 宇称守恒，G 宇称守恒；
- $J_{J/\psi\omega} = 0, 1, 2$ ，角动量守恒；
- $P_{J/\psi\omega} = (-)^L = +$ ，宇称守恒。

◦ $J/\psi\rho$ 系统：

- $I_{J/\psi\rho} = 1$ ，同位旋不守恒。

综上： **$J/\psi\omega$ 存在， $J/\psi\rho$ 衰变道不存在。**

3. 有两种可能：

1. 强相互作用下，同位旋守恒不是严格守恒量；
2. 实际实验中存在同位旋为 1 的态。

第三题

判断下面过程能否发生，为什么？如果能够发生，判断是通过什么相互作用发生的。

1. $\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$ ：**强相互作用**。
2. $pp \rightarrow n\pi^+\Sigma^-$ ：如果发生必定是强相互作用，但是奇异数不守恒，所以**不能发生**（电荷也不守恒）。
3. $\pi^0 \rightarrow e^+e^-e^+e^-$ ：联想到一个重要过程 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ，显然 $\gamma \rightarrow e^+e^-$ 的过程也是可能的，所以这个过程可以发生，是**电磁相互作用**。
4. $\rho^0 \rightarrow \eta\pi^0$ ：C 宇称不守恒，**不发生**。
5. $J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-$ ：参考**第一大题第二小问**的回答。如果要 J, C, P 守恒，必须有 $I_{\pi^+\pi^-} = 1 \neq I_{j/\psi}$ ，所以不可以通过强相互作用衰变，可以通过**电磁相互作用衰变**。
6. $J/\psi \rightarrow \pi\rho$ ：只考虑末态是 $\pi^0\rho^0$ ，总同位旋为： $I = 0, 1, 2$
 - 宇称： $- = (-)^L \Rightarrow L = 1, 3, \dots$ 。
 - 自旋角动量： $S = 1$ ；总角动量： $J = 0, 1, 2, \dots$ ，角动量守恒。
 - C 宇称，应该有 $C_{\pi\rho} = C_\pi C_\rho = -$ 。
 - G 宇称，应该有 $G_{\pi\rho} = C_{\pi\rho}(-)^I = -$ 。

综上，该过程可以发生，是**强相互作用过程**。

7. $p\bar{n} \rightarrow K^+K^0\pi^0$ ：奇异数不守恒，**不能发生**。

实际上这个过程各种宇称都不能计算。最基本的，反应初末态均不是 C 变换本征态。

8. $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ ：**弱相互作用**。

这个过程的 CP 宇称也没办法计算，不能通过弱相互作用下 CP 宇称守恒来判断，记住这个反应可以发生就好了。

9. $\rho \rightarrow \pi^0\pi^0$ ：总同位旋 $I = 0, 1, 2$
 - 宇称： $P_{\pi^0\pi^0} = P_{\pi^0}P_{\pi^0}(-)^L = - \Rightarrow L = 1, 3, \dots$ 。
 - C 宇称： $C_{\pi^0\pi^0} = C_{\pi^0}C_{\pi^0} = +$ ，不守恒，该过程**不能发生**。

10. $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$: 弱相互作用。 K^0 的表现形式为 K_L/K_S ，而显然 $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ 是存在的反应。11. $\eta \rightarrow \pi\pi$: 还是以 $\pi^0 \pi^0$ 为例计算，总同位旋为： $I = 0, 1, 2$ ◦ 宇称：应有 $P_{\pi^0 \pi^0} = P_{\pi^0} P_{\pi^0} (-)^L = - \Rightarrow L = 1, 3, \dots$ 。◦ 自旋角动量： $S = 0$ ；如果能发生，就一定要总角动量守恒，所以 $L = 0$ ，显然角动量不守恒，因此不能发生。12. $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$: 参考第一大题第二小问的回答。如果要 C 宇称必定有 $I_{\pi^+ \pi^-} = 0, 2$ ，此时总同位旋为 $I_{\pi^+ \pi^- \pi^0} = 1, 2, 3$ ，同位旋不守恒，不可能是强相互作用。◦ 宇称： $P_{\pi^+ \pi^- \pi^0} = P_{\pi^+ \pi^-} P_{\pi^0} (-)^{L_{\pi^+ \pi^- \pi^0}} = -$ 可以得到 $L_{\pi^+ \pi^- \pi^0} = 0, 2, \dots$ ，守恒。

◦ 总角动量：守恒。

◦ C 宇称： $C_{\pi^+ \pi^- \pi^0} = C_{\pi^+ \pi^-} C_{\pi^0} = +$ ，守恒

所以这里发生的是电磁相互作用。

13. $\phi \rightarrow K_S K_S$: ϕ 是 $s\bar{s}$ 组成的粒子， $CP_\phi = +$ 。参考第一大题第一小问的回答， $CP_{K_S K_S} = +$ 限制了 $L_{K_S K_S} = 0, 2, \dots$ ，所以此时角动量不守恒。因此该过程不能发生。14. $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$: 参考第一大题第二小问的回答。此时 I, G 不守恒的话， J, P, C 可以守恒，所以是电磁相互作用。15. $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^-$: 参考第一大题第二小问的回答。此时 I, G 不守恒的话， J, P, C 可以守恒，所以是电磁相互作用。

(附：有关粒子的量子数)

粒子	π	K	p	n	J/ψ	Σ	γ	ω	ρ	η
I^G	1^-	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0^-	1		0^-	1^+	0^+
J^{PC}	0^{-+}	0^{-+}	$1/2^+$	$1/2^+$	1^{--}	$1/2^+$	1^{--}	1^{--}	1^{--}	0^{-+}

粒子物理（一）作业 3 标准答案

夸克模型

第一题

请在下表中填出 u, d, s 夸克的相关量子数：

夸克味道	同位旋 (I)	同位旋三分量	奇异数 (S)	电荷 (Q)	重子数 (b)	质量 (大致范围)
u	1/2	+1/2	0	+2/3	1/3	2 ~ 4 MeV
d	1/2	-1/2	0	-1/3	1/3	4 ~ 7 MeV
s	0	0	-1	-1/3	1/3	80 ~ 120 MeV

第二题

请写出赝标量介子和矢量介子（包括味道八重态和味道单态）的夸克组成；请写出重子八重态和重子十重态的夸克组成。

回答

- 赝标量介子以及矢量介子

夸克组分	赝标量粒子 $J^P = 0^-$	矢量粒子 $J^P = 1^-$
$u\bar{d}$	π^+	ρ^+
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	π^0	ρ^0
$d\bar{u}$	π^-	ρ^-
$u\bar{s}$	K^+	K^{*+}
$d\bar{s}$	K^0	K^{*0}
$s\bar{d}$	\bar{K}^0	\bar{K}^{*0}
$s\bar{u}$	K^-	K^{*-}
$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$	η_8	ω_8
$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$	η_1	ω_1

- 重子八重态

粒子	夸克组成
p	uud
n	udd
Λ	uds
Σ^+	uus
Σ^0	uds
Σ^-	dds
Ξ^0	uss
Ξ^-	dss

- 重子十重态

粒子	夸克组成
Δ^{++}	uuu
Δ^+	uud
Δ^0	udd
Δ^-	ddd
Σ^{*+}	uus
Σ^{*0}	uds
Σ^{*-}	dds
Ξ^{*0}	uss
Ξ^{*-}	dss
Ω^-	sss

第三题

请写出同一 J^P 介子九重态（味道八重态和单态）中两个同位旋单态的味道波函数。

回答

从第二题中可以看出来：

- $\eta_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$;
- $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$.

第四题

推导出由一对正反夸克构成的系统的所有可能的量子数（如自旋、宇称、C 宇称等，暂时不考虑味道）；如果这一对正反夸克是正反 u 或 d 夸克，则有相应的同位旋和 G 宇称，他们分别是多少？

回答

正反夸克是正反费米子系统，夸克的自旋为 $1/2$ ，则有

- 自旋： $S = 0, 1$ ；
- 宇称： $P = (-)^{L+1}$ ；
- C 宇称： $C = (-)^{L+S}$

如果这一对正反夸克是正反 u 或 d 夸克，则其同位旋和 G 宇称为

$$I = 0, 1 \quad G = (-)^{L+S+I} \quad (94)$$

第五题

什么是理想混合，其物理意义是什么？

回答

在 $SU(3)$ 味道对称未破缺时，味道单态与八重态质量相同；当由于 $m_u \simeq m_d \neq m_s$ 导致 $SU(3)$ 味道对称破坏时，八重态中的同位旋单态与味道单态发生混合；

理想混合之后两个质量本征态分别是纯 (u, d) 和纯 $s\bar{s}$ 构成的态，也就是说上下夸克和奇异夸克完全区分开来了。

第六题

物理上观测到的九个矢量粒子 ($J^P = 1^-$) 为 $\rho(770)$ 、 $K^*(892)$ 、 $\omega(782)$ 和 $\phi(1020)$ 。在讲义中我们通过 Gell - Mann - Okubo 质量关系推出了由质量平方关系给出的同位旋单态的混合角。

1. 求由质量关系（线性关系）给出的混合角，并讨论其意义。
2. 实验上发现质点为 1.5 GeV 附近存在十个标量 (0^+) 粒子，它们是 $a_0(1450)$ (同位旋三重态, $I = 1$)、 $K_0^*(1430)$ (两个同位旋二重态) 和三个同位旋 $I = 0$ 的粒子 $f_0(1370)$ 、 $f_0(1500)$ 和 $f_0(1710)$ 。如果将 $f_0(1370)$ 和 $f_0(1500)$ 看作是分子

九重态中的成员，求质量线性关系给出的混合角，并讨论它们内部 $(u\bar{u} + d\bar{d})$ 和 $s\bar{s}$ 的成分。如果把 $f_0(1500)$ 换成 $f_0(1710)$ ，结果又如何？

(附注：根据夸克模型，相同 J^P 、质量相近的 $q\bar{q}$ 介子只有九个，构成九重态。但这里有十个粒子，多出一个粒子，这促使人们猜想上述三个同位旋单态中混入了一个非 $q\bar{q}$ 的自由度。)

回答

- 在讲义中明确提到了“OMG 公式中的 M 对于介子来说是质量的平方”，这里题目的意思是认为 M 就是质量，然后计算出结果。和讲义中的过程一样，此时质量关系为

$$4m_{K^*} = 3m_{\omega_8} + m_\rho \Rightarrow m_{\omega_8} = \frac{4m_{K^*} - m_\rho}{3} = 933. \quad (95)$$

考虑

$$\begin{bmatrix} |\phi\rangle \\ |\omega\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\omega_8\rangle \\ |\omega_1\rangle \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\phi\rangle = |\omega_8\rangle \cos\theta - |\omega_1\rangle \sin\theta \\ |\omega\rangle = |\omega_8\rangle \sin\theta + |\omega_1\rangle \cos\theta \end{cases} \quad (96)$$

考虑质量矩阵

$$M = \begin{bmatrix} m_{\omega_8} & 0 \\ 0 & m_{\omega_1} \end{bmatrix} \quad (97)$$

此时应该有

$$\begin{cases} m_\omega = m_{\omega_8} \cos^2\theta + m_{\omega_1} \sin^2\theta \\ m_\phi = m_{\omega_8} \sin^2\theta + m_{\omega_1} \cos^2\theta \end{cases} \quad (98)$$

可以得到

$$\tan^2\theta = \frac{m_\phi - m_{\omega_8}}{m_{\omega_8} - m_\omega} \Rightarrow \theta = 37.3^\circ. \quad (99)$$

相比于使用正确质量平方关系计算出的混合角 39° ，这里的结果更接近理想混合的情况，意味着此时 ϕ 和 ω 是纯 (u, d) 和纯 $s\bar{s}$ 态。

- 首先计算

$$m_8 = \frac{4m_{K_0^*} - m_{a_0}}{3} = 1423.33 \quad (100)$$

所以

$$\tan^2\theta_1 = \frac{m_{f_0(1500)} - m_8}{m_8 - m_{f_0(1370)}} = 0.69 \Rightarrow \theta_1 = 50^\circ. \quad (101)$$

其夸克组分为

$$\begin{aligned} |f_0(1500)\rangle &= |\omega_8\rangle \sin 50^\circ - |\omega_1\rangle \cos 50^\circ = -0.254 \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} - 0.967 s\bar{s} \\ |f_0(1370)\rangle &= |\omega_8\rangle \cos 50^\circ + |\omega_1\rangle \sin 50^\circ = -0.967 \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} - 0.254 s\bar{s} \end{aligned} \quad (102)$$

同理有

$$\theta_2 = 66.6^\circ \quad |f_0(1710)\rangle = -0.521 \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} - 0.853 s\bar{s} \quad |f_0(1370)\rangle = 0.853 \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} - 0.521 s\bar{s} \quad (103)$$

第七题

什么是 OZI 规则，以矢量介子 ϕ 的衰变为例说明 OZI 规则的作用。

回答

强过程中，只能通过夸克湮灭得到的末态过程将被严重压低。

以 ω, ϕ 介子的衰变为例：

- 两者具有相同的量子数 $0^- 1^{--}$ ，强相互作用应该相似；
- 根据守恒量，应该主要衰变到 $\pi^+ \pi^- \pi^0$ 的末态；
- ϕ 的质量大于 ω 的质量，因此其宽度应该较大；

- ϕ 在可以衰变为 $K\bar{K}$ ，这个衰变道对其宽度有贡献。

但是实际可以看到

- ω 的宽度大于 ϕ ；
- ϕ 的衰变末态以 $K\bar{K}$ 为主。

根据 OZI 规则，这个情况可以解释为： $\phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ 是 $s\bar{s}$ 湮灭的结果，这个衰变道被严重压低。

强子结构和强相互作用

1. 从重子的自旋-统计关系出发，阐述引入颜色自由度的必要性。

按照夸克模型，重子是由三个夸克组成的费米子。观察 $\frac{3}{2}^+$ 的重子十重态，其中有如下奇异的重子

$$\Delta^{++} = uuu, \Delta^- = ddd. \quad (104)$$

那么现在就有一个问题，由于它们的自旋都为 $3/2$ ，三个夸克取同样的自旋方向且三个夸克之间的轨道角动量为 0。这说明三个夸克似乎并不满足泡利不相容原理。

更一般地说：基态重子的自旋-味道波函数是全对称的；空间波函数也是全对称的。为了使得总波函数反对称，必须额外引入一个新的自由度，也就是颜色。

2. 轻子-核子散射中有两个重要的运动学变量 ν (轻子的能量改变) 和 Q^2 (能动量转移平方，见讲义中的定义)，试用它们和核子质量来表示轻子-核子弹性散射所满足的条件。

轻子-核子弹性散射满足条件为

$$\nu - \frac{Q^2}{2M} = 0. \quad (105)$$

3. 什么是部分子模型？什么是部分子分布函数？量子色动力学的哪个特性和部分子模型相容？

部分子模型

- 核子是由部分子构成的。部分子包括中性以及带电部分子，其在 DIS 过程中是近似自由的；
- 高能轻子实际上是和一个近似自由部分子发生的弹性散射；
- 每个部分子携带整个核子的部分动量。

部分子的分布函数 $f_u(x, Q^2)$ 描述在动量尺度 Q^2 下，核子中一个上夸克 u 动量分数为 x 的概率密度。

量子色动力学在描述部分子的高能性质时指出非阿贝尔对称群带来的渐近自由的特性，这与部分子模型相容。

4. 基态重子为什么不存在味道单态（比如，介子有味道八重态和单态）。这里所谓的基态是指在 SU(6) 夸克模型图像中，重子的组分夸克处于某种其束缚作用的中心势场中的径向基态和轨道基态（每个夸克的轨道角动量都是零）。这种意义上的径向激发态或轨道激发态会存在味道单态重子吗？

根据色禁闭理论，只存在颜色单态的重子，也就是说颜色波函数一定是反对称的，而总波函数也要是反对称的，所以其它部分波函数的要求如下

- 空间波函数需要是全对称的（题目中的基态就是已经满足了这条）；
- 自旋-味道波函数要是全对称的。

如果现在存在味道单态，那么味道波函数就是反对称的，自旋波函数也要是反对称的。考虑夸克自旋 $1/2$ ，也就是最终自旋可能为

$$S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \quad (106)$$

（不经证明给出）此时不可能有反对称的自旋波函数，所以不可能存在味道单态。

但是如果空间波函数处于激发态，就有可能是混合对称或者反对称，可能和自旋-味道波函数共同构成对称波函数，此时允许有味道单态波函数。

5. J/ψ 粒子（正反粲夸克构成的矢量介子）和 Υ 粒子（正反底夸克构成的矢量介子）的质量很大，足以通过强相互作用衰变到轻强子，但它们的宽度却非常窄，请分析其原因。

J/ψ 粒子的衰变宽度尤其低是因为其主要衰变道 3π 被 OZI 规则严重压低，同时衰变到 $D\bar{D}$ 的过程因为 $m_{J/\psi} < 2m_B$ 禁戒（如果 $c\bar{c}$ 体系能量高于两个 D 介子质量，其衰变道宽度将急剧增大）。

Υ 粒子的衰变宽度窄也是同样的理由，只不过因为质量原因被禁戒的衰变末态是 $B\bar{B}$ 。

6. 熟悉重子命名规则。请写出如下含重味夸克的重子的夸克构成及其带电量（如果没有标出带电量）：

$$\begin{aligned}
& \Omega_c, \quad \Omega_{cc}, \quad \Omega_{ccc}, \quad \Omega_{bc} \\
& \Sigma_c^{++}, \quad \Sigma_c^+, \quad \Sigma_c^0 \\
& \Sigma_b^+, \quad \Sigma_b^0, \quad \Sigma_b^- \\
& \Lambda_c, \quad \Lambda_b \\
& \Xi_c^+, \quad \Xi_c^0, \quad \Xi_b^0, \quad \Xi_b^- \\
& \Xi_{cc}^{++}, \quad \Xi_{cc}^+, \quad \Xi_{bc}^+, \quad \Xi_{bc}^0
\end{aligned} \tag{107}$$

结果如下

$$\begin{aligned}
& \Omega_c^0(ssc), \quad \Omega_{cc}^+(scc), \quad \Omega_{ccc}^{++}(ccc), \quad \Omega_{bc}^0(sbc) \\
& \Sigma_c^{++}(uuc), \quad \Sigma_c^+(udc), \quad \Sigma_c^0(ddc) \\
& \Sigma_b^+(uub), \quad \Sigma_b^0(udb), \quad \Sigma_b^-(ddb) \\
& \Lambda_c^+(udc), \quad \Lambda_b^0(udb) \\
& \Xi_c^+(usc), \quad \Xi_c^0(dsc), \quad \Xi_b^0(usb), \quad \Xi_b^-(dsb) \\
& \Xi_{cc}^{++}(ucc), \quad \Xi_{cc}^+(dcc), \quad \Xi_{bc}^+(ubc), \quad \Xi_{bc}^0(dbc)
\end{aligned} \tag{108}$$

7. 强子的部分子分布函数 (PDF) 是强子固有性质, 与具体的过程无关; 强子的 PDF 和反应过程的能量标度 μ 有关, 一般写作 $f_{i/h}(x, \mu^2)$, 其中下标 i 表示部分子的种类, h 表示某种强子。因此, 在强子对撞机上, 我们可以根据质心能量 (质心系不变量平方记作 S) 和 PDF 在 $\mu^2 \sim Q^2$ 能标的具体情况来判断一个特定态 X 产生时在部分子层面的主要发生过程。强子对撞机上的产生 X 的总截面可以表示为

$$\sigma = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_{i/h_1}(x_1, \mu^2) f_{j/h_2}(x_2, \mu^2) \sigma_{ij \rightarrow X}(x_1, x_2) \tag{109}$$

其中部分子 i, j 散射产生 X 的散射截面 $\sigma_{ij \rightarrow X}$ 可以通过微扰论在标准模型理论框架下进行计算。显然 PDF 和 $\sigma_{ij \rightarrow X}$ (由动力学决定) 决定了截面 σ 的大小。要选取 PDF 的大概取值, 我们需要估计部分子动量分数 x_1, x_2 的大小, 具体方法如下:

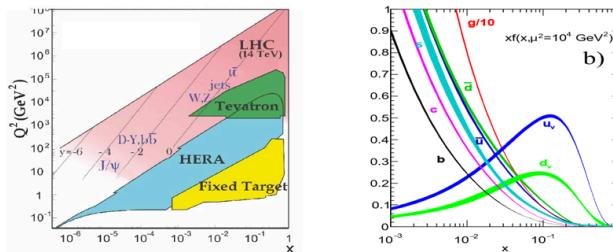
过程 $ij \rightarrow X$ 的质心系总能量平方为

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2 = 2x_1 x_2 P_1 \cdot P_2 = x_1 x_2 (P_1 + P_2)^2 = x_1 x_2 S \tag{110}$$

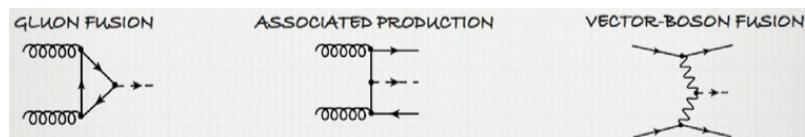
其中 p_1, p_2 是两个部分子 i, j 的四动量, P_1, P_2 为两个初态强子的四动量(对于高能对撞机, 我们可以忽略部分子和强子的质量, 即取 $p_1^2 = m_i^2 \approx 0, p_2^2 = M_i^2 \approx 0$)。如果进一步取近似 $x_1 \approx x_2 = x$, 则有 $\sqrt{s} \approx x\sqrt{S}$ 。对 \sqrt{s} 的估计我们取

$$\sqrt{s} \approx \sum m_{X_i}, M_{X_i} \text{ 是末态 } X \text{ 中重粒子的质量。最终, } x \approx \frac{\sum m_{X_i}}{\sqrt{S}}.$$

LHC 是质子-质子对撞机, 质心能量大致在 14 TeV; Tevatron 为正负质子对撞机, 质心能量约为 2 TeV。高能反应中它们的 $\mu^2 \sim Q^2$ 范围如下图左图, 也就是说, Q^2 大致在 10^4 GeV^2 范围。右图是 $Q^2 = 10^4 \text{ GeV}^2$ 的质子的 PDF。



1. LHC 上 Higgs 粒子 ($M_H = 125 \text{ GeV}$) 的产生机制如下

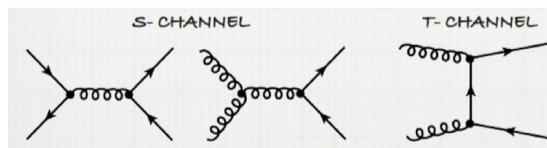


即胶子融合 (gluon fusion $gg \rightarrow H$), 胶子融合协同产生 (associate production, $gg \rightarrow f\bar{f}X$) 和矢量玻色子融合 (vector-boson fusion $f\bar{f} \rightarrow f\bar{f} + WW(ZZ)$, $WW(ZZ) \rightarrow H$)。请判断以上过程也哪个为主?

分别计算动量分数

$$\begin{aligned}
x_{\text{gf}} &= \frac{0.125}{14} = 0.0089, \\
x_{\text{ap}} &= \frac{0.125 + 2m_f}{14} = x_{\text{vbf}} > x_{\text{gf}}
\end{aligned} \tag{111}$$

由于 x 都很小, 这个过程必然是胶子主导的, 而胶子融合过程的 x 最小, 所以是这个过程主导。

2. 高能对撞机上正反顶夸克对 $t\bar{t}$ 的产生机制为 (顶夸克质量为 $m_t = 175$ GeV)

即正反夸克湮灭到 $t\bar{t}$ ($f\bar{f} \rightarrow g^* \rightarrow t\bar{t}$)，胶子 s 道散射到 $t\bar{t}$ ($gg \rightarrow g^* \rightarrow t\bar{t}$) 和胶子-胶子 t 道散射 ($gg \rightarrow t\bar{t}$)。请判断，在 LHC 上的 $t\bar{t}$ 产生哪个过程为主？Tevatron 上呢？

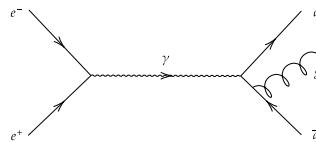
- **LHC:** $\sqrt{S} = 14$ TeV, $x \approx 0.025$ 。在此 x 值下, PDF 图显示胶子分布函数远大于夸克分布函数。因此, 胶子-胶子散射过程 (包括 s 道和 t 道) 占主导。
- **Tevatron:** $\sqrt{S} = 2$ TeV, $x \approx 0.175$ 。在此 x 值下, 胶子分布函数下降, 而价夸克分布函数相对较大。同时, Tevatron 是质子-反质子对撞, 反质子中存在反价夸克, 使得夸克-反夸克湮灭过程 ($q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$) 的 PDF 乘积较大, 因此该过程占主导。

8. 高能物理实验中, 夸克和胶子产生后, 会表现为喷注。比如高能正负电子湮灭成一对正反夸克对, 在质心系中, 它们会表现为两个背对背的喷注; 如果其中一个夸克还会辐射出一个硬的胶子, 这个胶子几乎分走这个夸克的一半的能量, 这样正反夸克和胶子会分别碎裂成三个喷注 (在探测器中表现为由一个中心点发出的三个喷注), 这就是著名的三喷注事例。三喷注事例的意义在于, 从实验上证实了胶子的客观存在。

如果胶子存在, 理论上应该存在如下的过程

$$e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q} + g. \quad (112)$$

用费曼图可以表示为



可以看出来, 最终的正反夸克和胶子会在漂移过程中全部强子化, 形成三个方向的强子束流, 所以称为三喷注实验。如果实际观察到三个喷注, 就证明了胶子的存在; 反之则不存在。

粒子物理（一）作业 4 标准答案

弱相互作用和电弱统一模型

1. 根据你的理解简述费米 V-A 低能有效理论要点

- **要点：**描述低能下（远低于 W / Z 玻色子质量）弱相互作用的**有效场论**。
- **普适性：**弱相互作用有普适的有效耦合常数，**费米常数** G_F 。
- **V-A 含义：**弱相互作用带电流是**矢量流 (V)** 减**轴矢量流 (A)**。只有左手场参与构成费米子带电弱流。
- **低能有效性与局限性：**费米 V-A 理论是弱相互作用的有效理论，在高能过程则会违背**么正极限**。当能量标度和中间玻色子的质量相比已经不小时，已经不能使用四费米子点相互作用的近似，**必须考虑中间玻色子的传播子**。
- **流结构：**
 - **轻子带电流：** $J_{\text{lept}}^\mu = \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} + \bar{\mu}_L \gamma^\mu \nu_{\mu L} + \bar{\tau}_L \gamma^\mu \nu_{\tau L}$
 - **夸克带电流：**考虑夸克混合后， $J_{\text{quark}}^\mu = \bar{u}_L \gamma^\mu d'_L + \bar{c}_L \gamma^\mu s'_L + \bar{t}_L \gamma^\mu b'_L$ ，其中带撇的味本征态 (d' , s' , b') 通过 CKM 矩阵与质量本征态 (d , s , b) 相联系。

2. 什么是轻子数，什么是轻子数守恒？注意判断弱过程中的轻子数是否守恒

存在三代轻子，每一代轻子有轻子数，比如 L_e , L_μ , L_τ 。当**中微子质量为零时**，**轻子数是守恒的**。通常约定每一代轻子中，带负电的**轻子**和**中微子**（正粒子）携带的相应的轻子数为 $+1$ ，带正电的**轻子**和**反中微子**（它们是相应的费米场的反粒子）的相应的轻子数为 -1 。

3. 怎么理解弱相互作用的短程性？ M_W 、 M_z 质量是多少，它们和费米常数的关系怎样？

- **理解：**弱作用由交换大质量的 W^\pm 和 Z^0 玻色子传递。根据 Yukawa 势的物理图像，**力的力程与传播子质量成反比**：
 $R \sim \hbar/(M_{W,Z}c)$ 。由于 $M_{W,Z} \approx 80 - 90 \text{ GeV}/c^2$ ，力程极短。
- **质量：** $M_W \approx 80.4 \text{ GeV}/c^2$, $M_Z \approx 91.2 \text{ GeV}/c^2$ 。
- **与费米常数的关系：**在低能有效理论中，四费米点相互作用耦合常数 G_F 来源于完整的传播子效应： $G_F/\sqrt{2} = g^2/(8M_W^2)$ ，其中 g 是 $SU(2)_L$ 规范耦合常数。这直接体现了 $G_F \propto 1/M_W^2$ ，质量越大，等效耦合越弱（在低能下看）。

4. 为什么说中微子没有严格意义上的反粒子，中微子和反中微子是通过 CP 联系在一起的？

在标准模型中，**中微子没有质量**，而且实验上只目前只观测到**左手中微子和右手反中微子**，它们是通过 CP 变换联系起来的，而不是通过 C 变换联系起来的。根据 C 变换的定义，左手中微子经 C 变换会变成左手的反中微子，然后再通过 P 变换变成右手反中微子。

5. 电弱统一理论的基本对称性是什么？基本自由度是什么（以第一代轻子为例）？夸克作为电弱统一理论的基本自由度是怎么表现的？

- **基本对称性：** $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范对称性。这种对称性规范化后（定域化）给出电弱统一的规范理论。
- **基本自由度（以第一代轻子为例）：**
 - **左手二重态：** $L_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$, $SU(2)_L$ 弱同位旋 $T = 1/2$, 弱超荷 $Y_L = -1$ 。
 - **右手单态：** e_R , $SU(2)_L$ 单态 ($T = 0$), 弱超荷 $Y_R = -2$ 。
 - （中微子 ν_R 在原始标准模型中不存在，因其为零质量且不参与弱电作用）。
- **夸克的表现：**
 - **左手二重态：** $Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}$, $Y_Q = +1/3$ 。
 - **右手单态：** $u_R (Y = +4/3)$, $d_R (Y = -2/3)$ 。
 - 夸克还参与强相互作用，具有色自由度。

6. 什么是 Weinberg 角？什么是弱中性流？Weinberg 角和中性流的关系怎样？Weinberg 角用 M_W 、 M_Z 怎么定义？

- 温伯格角 (θ_W)：统一理论中，物理的光子场 A^μ 和 Z 玻色子场 Z^μ 是 $SU(2)_L$ 规范场 W_3^μ 和 $U(1)_Y$ 规范场 B^μ 的混合：

$$\begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W_3^\mu \end{pmatrix} \quad (113)$$

θ_W 定义了这种混合。

- 弱中性流：由 Z^0 玻色子传递的、不改变费米子味的弱相互作用流。它与电磁流不同，耦合于左、右手费米子，且耦合强度不同。
- 关系：温伯格角决定了中性流与带电流耦合强度的比例，也决定了 Z 与 W 的质量比。实际上通过测量中性流过程（如 ν -核子散射）的强度可以确定 $\sin^2 \theta_W$ 。
- 用 M_W 、 M_Z 定义：在树级近似下， $M_W = M_Z \cos \theta_W$ ，因此 $\cos \theta_W = M_W/M_Z$ 。

7. Cabibbo 理论解决弱相互作用的什么问题？GIM 机制解决了什么问题？什么是夸克代的混合？CKM 矩阵的含义是什么？

- Cabibbo 理论：解决了奇异数守恒 ($\Delta S = 0$) 和奇异数改变 ($\Delta S = 1$) 的 β 衰变耦合强度不同的问题。引入一个混合角 θ_C ，使得参与弱作用的“弱本征态”

$$d' = d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \quad (114)$$

- GIM 机制：引入粲夸克，使其与奇异夸克组成另一对弱二重态 (c, s')，其中 $s' = -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C$ 。使得最低阶弱作用不存在味道改变的中性流过程。
- 夸克代的混合：将三代夸克的弱本征态（参与弱相互作用的态）与质量本征态（具有确定质量的态）通过一个 3×3 的幺正矩阵联系起来。
- CKM 矩阵的含义：卡比博-小林-益川 (CKM) 矩阵 V_{CKM} 就是描述夸克弱本征态与质量本征态之间关系的幺正矩阵。对于下型夸克：

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (115)$$

其矩阵元 V_{ij} 的模的平方，决定了从夸克 i 到夸克 j 的带电流跃迁强度。

8. 什么是自发性对称性破缺？在电弱统一理论中引入 Higgs 机制解决了什么问题？中间玻色子怎么获得质量？什么是 Yukawa 耦合？费米子怎么获得质量？

- 自发性对称性破缺：当理论的拉氏量本身具有某种对称性，但是真空态是兼并的，即存在多个真空态，这些真空态可以通过对称变换联系起来。然而，从场论的角度，我们需要在这些简并的真空态中选取一个真空态作为物理真空来讨论物理的激发时，对称性就发生破缺了。这种对称性破缺机制就是对称性的自发破缺。
- Higgs 机制解决的问题：在电弱统一理论中，规范玻色子 (W^\pm, Z) 如果获得质量，会破坏局域规范对称性，导致理论不可重整化。Higgs 机制通过引入一个复标量二重态 Higgs 场，并使其发生自发性对称性破缺（获得非零真空间期值 v ），在保持规范对称性的同时，赋予 W^\pm 和 Z 质量，而光子保持无质量。
- 中间玻色子获得质量：Higgs 场的真空间期值 v 通过与规范玻色子的规范协变导数耦合，产生质量项： $M_W = \frac{1}{2} g v$ ， $M_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v = M_W / \cos \theta_W$ 。
- 汤川 (Yukawa) 耦合：是费米子场与 Higgs 场之间的一种洛伦兹不变的相互作用项，形如 $-y_f \bar{\psi}_L \phi \psi_R + \text{h.c.}$ 。
- 费米子获得质量：当 Higgs 场获得真空间期值 v 后，汤川耦合项即转化为费米子的质量项： $m_f = y_f v / \sqrt{2}$ 。因此，费米子质量源于其与 Higgs 场的汤川耦合强度。

9. 整理并熟悉讲义中出现的各种带电流弱过程，如 β 衰变、奇异数改变的带电流弱过程等；了解中性流弱过程的初末态粒子特点并能够熟练判断

带电流过程：

- β 衰变：核内 $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ($\Delta S = 0$ ，夸克层次： $d \rightarrow u$)。
- 奇异数改变过程：如 $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ ($\Delta S = 1$ ，夸克层次： $s \rightarrow u$)，或 $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ ($u\bar{s}$ 淹灭)。
- 纯轻子过程： $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ ， τ 衰变等。
- 半轻子过程： $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ ， $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ 等。

中性流过程：

- **特点：**初末态粒子味不变（无夸克味变，轻子数也守恒）。
- **例子：**
 - 弹性散射： $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ （纯轻子中性流）。
 - 深度非弹性散射： $\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + X$ （通过 Z^0 交换）。
 - 原子宇称不守恒实验。
- **判断：**检查过程是否涉及带电轻子或夸克味的改变。若不改变，且由 Z^0 传递，则为中性流过程。

10. 中微子振荡说明了什么？从中微子振荡实验中怎么确定振荡模式？怎么测量混合角？

- 中微子振荡现象直接证明了：**中微子具有微小质量**
- **确定振荡模式：**通过测量特定味道的中微子束流在传播一定距离 L 后，其存活概率或转化为其他味道的概率 $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ 。该概率是传播距离 L 、中微子能量 E 、质量平方差 Δm_{ij}^2 和混合角 θ_{ij} 的函数。通过拟合不同 L/E 下的概率曲线，可以确定存在哪些 Δm^2 和相应的混合模式（如“正常质量序”或“倒质量序”）。
- **测量混合角：**
 - **大气与加速器中微子实验**（如 Super-K, T2K）：主要对 $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ 振荡敏感，测量 θ_{23} 和 $|\Delta m_{31}^2|$ 。
 - **反应堆与太阳中微子实验**（如 KamLAND, SNO）：主要对 ν_e 消失（或太阳 ν_e 转化）敏感，测量 θ_{12} 和 Δm_{21}^2 。
 - **反应堆与加速器短基线实验**（如 Daya Bay, RENO）：精确测量 θ_{13} 。

11. 现在 LHC 上的实验属于粒子物理的高能量前沿

LHC 是强子对撞机（质子-质子对撞），其上高能物理过程可以认为是发生在部分子之间。

- **考虑 LHC 上，一个重粒子由分别来自两个对撞质子的两个部分子融合而成。在最低阶近似下，不考虑两个部分子的横向动量，请讨论沿质子-质子对撞方向的部分子运动学。**

部分子运动学：

注意高能强子对撞机上，实际的反应是发生在部分子层面上。考虑两个对撞质子的动量为 P_1 和 P_2 ，如果两个初态部分子的动量分数分别为 x_1 和 x_2 ，则两个初态部分子的质心系不变质量平方为

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (x_1 P_1 + x_2 P_2)^2 = x_1^2 P_1^2 + x_2^2 P_2^2 + 2x_1 x_2 P_1 \cdot P_2 \approx 2x_1 x_2 P_1 \cdot P_2 \quad (116)$$

这里考虑到高能过程中部分子的质量可以忽略（或者说初态质子的质量可以忽略： $P_i^2 = m_p^2 \approx 0$ ）。而初态质子-质子的不变质量平方为

$$S = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \cdot P_2 \approx 2P_1 \cdot P_2 \quad (117)$$

所以有 $s = x_1 x_2 S$ 。对于两个部分子融合成一个重粒子 X ，则有 $s = m_X^2$ 。同时，根据能动量守恒，而且两个部分子的能量和动量满足关系 $E_i = |\vec{p}_i|$ ，所以有

$$\begin{aligned} \vec{p}_X &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = x_1 \vec{P}_1 + x_2 \vec{P}_2 \\ E_X &= E_1 + E_2 = x_1 |\vec{P}_1| + x_2 |\vec{P}_2| \end{aligned} \quad (118)$$

- 请说明 LHC 上 **Higgs 粒子** 产生的三种机制，其中那种是最主要的？

1. **胶子融合**：主要的产生机制。
2. **矢量玻色子融合**（正负电子对撞机上产生 Higgs 粒子的主要机制）。

- 请说明 LHC 上 **顶夸克对** 的产生机制，哪种是主要的？

1. **胶子-胶子融合**（主要）；
2. **夸克-反夸克湮灭**。

- 请说出强子对撞机 **单顶夸克** 产生的产生机制（有多种，说出越多越好）。

1. **t 道**：主要机制。
2. **s 道**。
3. **tZ/tH 伴随着产生**。

12. 我国正在酝酿建造环形正负电子对撞机。你知道 CEPC 上 Higgs 的产生机制吗？最好用费曼图表示出来。

CEPC 是环形正负电子对撞机，其 Higgs 产生机制与强子对撞机 LHC 有根本区别，主要依赖**电弱相互作用**，背景干净，精度高。

主要产生机制

1. **Higgs 玻色子辐射**: **最主导的产生通道**: $e^+ + e^- \rightarrow Z^* \rightarrow Z + H$;
2. **矢量玻色子融合**: $e^+ + e^- \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e + H$ 。