

# 引言

## 四种相互作用

属性	强相互作用	电磁相互作用	弱相互作用 ( $\beta$ 衰变)	引力相互作用
源 (荷)	色荷	电荷	弱超荷	质量
作用常数	$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi\hbar c}$	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$	$\frac{G_F(M_pc^2)^2}{(\hbar c)^3}$	$\frac{G_N M_p^2}{4\pi\hbar c}$
作用强度	$O(1)$	$1/137$	$1 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-40}$
媒介粒子	胶子	光子	$W^\pm, Z$ 玻色子	引力子
力程	$1 \text{ fm}$	$\infty$	$1/400 \text{ fm}$	$\infty$
典型作用时间	$1 \times 10^{-23} \text{ sec}$	$1 \times 10^{-16} \text{ sec}$	$1 \times 10^{-10} \text{ sec}$	—

质子可以同时参与四种相互作用。

## 粒子的分类

粒子物理标准模型可以将粒子作如下分类

- 规范玻色子：光子、引力子、胶子以及  $W^\pm, Z$  玻色子；
- 轻子：不参与强相互作用的粒子，包括电子、 $\mu$  以及  $\tau$  及其对应的中微子（三代轻子）；
- 强子：参与强相互作用的粒子，包括
  - 介子：两个正反夸克组成的粒子，自旋为整数重子数为 0 的粒子；
  - 中子：三个夸克组成的粒子，自旋半整数且重子数为 1 的粒子；
- Higgs 粒子。

# 粒子的运动学性质

## ① Note

在后面的讨论中都使用自然单位制，唯一的单位只有能量 (MeV)。

## 狭义相对论

在这个部分，只需要记住

$$P^\mu = (E, \vec{p}), E^2 = \vec{p}^2 + m^2, P^\mu P_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2. \quad (1)$$

如果两个参照系的相对运动速度为  $v$ ，则有

$$\begin{aligned} \text{动量的纵向分量: } p'_L &= \gamma(p_L - vE) \\ E' &= \gamma(E - vp_L) \\ \text{速度的纵向分量: } v'_L &= \frac{v_L - v}{1 - v_L v} \\ \text{速度的横向分量: } v'_T &= \frac{v_T}{(1 - v_L v)\gamma} \end{aligned} \quad (2)$$

## 粒子寿命

一个能量为  $E$ ，静止质量为  $m_0$  的自由静止粒子的波函数可以写成

$$|t\rangle = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ e^{-iEt} |0\rangle = e^{-im_0 t} |0\rangle, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (3)$$

如果粒子具有寿命，这个时候不妨设

$$E = m_0 - i\frac{\Gamma}{2}. \quad (4)$$

于是波函数可以改写为

$$|t\rangle = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ e^{-iEt} |0\rangle = e^{-i(m_0 - i\frac{\Gamma}{2})t} |0\rangle = e^{-im_0 t - \frac{\Gamma}{2}t} |0\rangle, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (5)$$

于是有

$$\langle t | \hat{n} | t \rangle = e^{-\Gamma t} \langle 0 | \hat{n} | 0 \rangle \Rightarrow N(t) = e^{-\Gamma t} N(0). \quad (6)$$

也函数。

## ① Note

在这里的讨论中  $\Gamma$  具有能量的量纲，但是又应该保证  $\Gamma t$  无量纲，所以可以推出在自然单位制下时间的量纲为  $\text{MeV}^{-1}$ 。

粒子的寿命一般是**大量粒子静止时的平均寿命**（固有寿命），对波函数做 Fourier 变换，则会有

$$|M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |t\rangle e^{iMt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(M - m_0) + i\frac{\Gamma}{2}} |0\rangle. \quad (7)$$

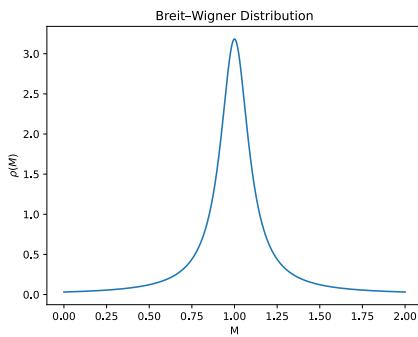
## ① Note

在这里我曾经疑惑过为什么 Fourier 变换可以将时间量纲变为质量量纲，不应该是能量量纲吗？现在我给出解答，因为在自然单位制下能量和质量的量纲是一样的。

于是可以获得**归一化的能量分布函数**（或者说是质量分布函数）

$$\rho(M) = \Gamma \langle M | M \rangle = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(M - m_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (8)$$

现在可以看出来， $\Gamma$  是能量分布函数的半高宽，通常称为不稳定粒子的宽度。在  $M = m_0$  的时候粒子分布最多，意味着此处的反应截面非常大，其能量一旦偏移静能，就会发生衰变。



要求寿命，需要做统计平均

$$\tau = \frac{\int_0^\infty t dN}{\int_0^\infty dN} = \frac{1}{\Gamma}. \quad (9)$$

#### ⓘ Note

在这里还是用自然单位制表述了结果，但实际应用的时候还是应该记住国际单位制的结果

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}. \quad (10)$$

不稳定粒子衰变的方式称为衰变道（不同衰变道的分宽度不同，记为  $\Gamma_i$ ），它通常有不止一个衰变道但是只有唯一寿命（对应于总宽度  $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ ）。可以定义分支比

$$R_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}. \quad (11)$$

不稳定粒子寿命的测量手段有如下几种

- 如果粒子寿命足够长，就可以测量其在探测器中留下径迹的长度，通过

$$\tau = m \frac{L}{p}. \quad (12)$$

计算寿命。

- 如果粒子寿命很短，就只能测量总宽度来推寿命。

## 粒子的运动学描述

如果两个参照系相对运动速度为  $v$ ，则可以将动量写成

$$\vec{p} = (\vec{p}_L, \vec{p}_T). \quad (13)$$

其中  $\vec{p}_L$  是平行于参照系相对运动方向的动量分量； $\vec{p}_T$  是垂直于参照系相对运动方向的动量分量。

## 快度和赝快度

在上面的讨论中我们可以发现，两个相对运动的参考系中速度的变换关系非常复杂。通过引入快度这个物理量来简化这里的变换关系

快度也是一个三维矢量，但是在上述的情况下，我们只考虑纵向的快度。

快度（纵向快度）定义为

$$y := \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v_L}{1 - v_L} = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_L}{E - p_L}. \quad (14)$$

如果记参考系 1 中的快度为  $y$ ，相对参考系 1 以速度  $v$  运动的参考系 2 下的快度为  $y'$ 。则两者存在如下变换关系

$$y' = y - Y. \quad (15)$$

其中  $Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+v}{1-v}$  称为相对快度。可以看出来此时两个参考系中的变换关系简化了很多。

#### ⓘ Important

两个粒子之间的快度差（即相对快度）是沿粒子运动方向（纵向）洛伦兹变换下的不变量。

在高能物理实验中，粒子的速度是很难确定的，但是束流的方向是很容易确定的。记  $\theta$  是粒子飞行方向与纵轴的夹角，就可以引入赝快度，它定义为：

$$\boxed{\eta := -\ln \tan \frac{\theta}{2}}. \quad (16)$$

如果粒子静止质量为 0 或者当粒子质量  $m_0$  相对于其动量  $p$  可以忽略不记的时候，都会有质快度等于快度

$$\eta = y. \quad (17)$$

## 实验室系与质心系

许多粒子的物理性质都是在其质心系中描述的，但是探测都是在实验室系中进行的。为了简便地描述粒子的性质，必须寻找适当的 Lorentz 不变量。

- 两粒子系统的 Lorentz 不变量

常用的是质心能量  $E_{cm}$ ，它是两个质心系下粒子的总能量

$$E_{cm} = \sqrt{(p_{1,\mu} + p_{2,\mu})^2}. \quad (18)$$

使用质心能量的好处就是在质心系下，能量都在粒子的相对运动上而不在系统的整体平动上。

- $N$  粒子系统的 Lorentz 不变量

所谓  $N$  粒子系统是指 **反应后总共有  $N$  个粒子** 的系统。这个系统的限制条件如下

- 能量守恒与动量守恒；
- 质壳条件： $E^2 - p^2 - m^2 = 0$ 。

如果我们考虑的还是能量，那么  $N$  个粒子的系统共能构建的独立 Lorentz 不变量数目为

$$\boxed{\left[ \frac{1}{2}N(N-3) \right]}. \quad (19)$$

### ① Note

例如两体衰变系统  $A \rightarrow B + C$ 。总共有 3 个粒子，独立的 Lorentz 不变量没有。所以动量都是完全确定的，产物的能谱应该是两个独立的峰。

### Important

以两体到两体散射 ( $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ ) 为例

能动量守恒条件为  $P_{1,\mu} + P_{2,\mu} = P_{3,\mu} + P_{4,\mu}$

于是可以构建出三个 Lorentz 不变量，就是

$$\begin{aligned} s &:= (p_{1,\mu} + p_{2,\mu})^2 = (p_{3,\mu} + p_{4,\mu})^2, \\ t &:= (p_{1,\mu} - p_{3,\mu})^2 = (p_{2,\mu} - p_{4,\mu})^2, \\ u &:= (p_{1,\mu} - p_{4,\mu})^2 = (p_{2,\mu} - p_{3,\mu})^2. \end{aligned} \quad (20)$$

按照上面的结论，这里应该只有两个独立的 Lorentz 不变量，我们在这里验证这个结论。观察不难发现

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (21)$$

显然，这约束条件确实导致了最终只有两个独立的 Lorentz 不变量。按照惯例，我们一般将  $s$  称为**质心系总能量的平方**， $t$  称为**四维动量转移平方**。一般取  $s, t$  作为系统的 Lorentz 不变量。

## $N$ 体末态相空间

首先考虑一个**自由粒子**四维相空间 Lorentz 不变体积元，可以表示为

$$\delta(p_\mu^2 - m_0^2)\theta(p_0)d^4p = \delta(p_\mu^2 - m_0^2)\theta(E)dEd^3p. \quad (22)$$

在这里  $\theta(E)$  表示阶跃函数，只考虑  $E > 0$  的情况； $\delta(p_\mu^2 - m_0^2)$  表示只考虑满足质壳条件（能动量守恒）的情况。

需要的实际上是相空间的体积元，所以需要将上式中的能量部分积分掉，就是

$$\int_E \delta(p_\mu^2 - m_0^2)\theta(E)dEd^3p = \int_E \frac{d^3p}{2E}. \quad (23)$$

所以相空间中的体积元就是  $\boxed{\frac{d^3p}{2E}}$ 。

将其推广到  $n$  体相空间中（产物有  $n$  个粒子），会有

$$\boxed{d\Phi_n = \frac{1}{(2\pi)^{3n-4}} \underbrace{\delta^4 \left( \sum_i p_{i,\mu} - \sum_{f=1}^n p_{f,\mu} \right)}_{\text{能动量守恒}} \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p}{2E}.} \quad (24)$$

### Important

尤其需要注意这里的求和指标，指标  $i$  代表对所有的入射粒子动量四矢量求和；指标  $f$  表示对  $n$  个产物粒子的动量四矢量求和。

其中  $\delta \left( \sum_i p_{i,\mu} - \sum_{f=1}^n p_{f,\mu} \right)$  表示只有能动量守恒的构型是允许的。相空间的大小反映了在满足所有物理约束条件下，反应末态所有可能动量分配的状态数。一般来说，**初态固定，末态多体时的相空间的体积比少体时的相空间体积大**。

### Note

**举例：**计算二体衰变  $A \rightarrow B + C$  的总宽度

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{|T|^2}{2m_A} (2\pi)^4 \delta(p_{A,\mu} - p_{B,\mu} - p_{C,\mu}) \frac{d^3 p_B}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E} \\ &= \frac{|T|^2}{32\pi^2 m_A} \delta(E_A - E_B - E_C) \delta^3(p_A - p_B - p_C) \frac{d^3 p_B}{E_B} \frac{d^3 p_C}{E_C}. \end{aligned} \quad (25)$$

其中  $T$  是散射振幅。通过这个式子也可以看出来：相空间越大，宽度越大，粒子寿命越短。考虑

$$dE_A = dE_B + dE_C = \frac{p_B dp_B}{E_B} + \frac{p_C dp_C}{E_C}. \quad (26)$$

在质心系下，有  $p_A = 0$ ，所以  $p_B = -p_C$ ，代入有

$$dE_A = dE_B + dE_C = \frac{p_B dp_B}{E_B} + \frac{p_B dp_B}{E_C} = \frac{E_A p_B dp_B}{E_B E_C} \quad (27)$$

现在首先考虑对  $d\Gamma$  的  $p_C$  积分，所以有

$$\begin{aligned} \int_{P_C} d\Gamma &= \int_{P_C} \frac{|T|^2}{32\pi^2 m_A} \delta(m_A - E_B - E_C) \delta^3(-p_B - p_C) \frac{d^3 p_B}{E_B} \frac{d^3 p_C}{E_C} \\ &= \frac{|T|^2}{32\pi^2 m_A} \delta(m_A - E_B - E_C) \frac{d^3 p_B}{E} \\ \text{球坐标下: } &= \frac{|T|^2}{32\pi^2 m_A} \delta(m_A - E_B - E_C) \frac{p_B^2 dp_B d\Omega}{E_B E_C} \\ &= \frac{p_B |T|^2 d\Omega}{E_B E_C}. \end{aligned} \quad (28)$$

于是可以有

$$\Gamma = \int \frac{p_B |T|^2 d\Omega}{E_B E_C} = \frac{1}{8\pi} \frac{p_B}{m_A^2} \overline{|T|^2}. \quad (29)$$

其中  $\overline{|T|^2} = \frac{1}{4\pi} \int |T|^2 d\Omega$ 。

## 截面以及亮度

定义流强/通量为单位时间内垂直进入单位面积的粒子数，记束流数面密度为  $n_s$ ，速度为  $v_i$ ，则通量表达式为

$$J = n_s v_i. \quad (30)$$

靶厚度为  $dx$ ，靶核数密度为  $n_t$ ，束流扫过的靶核数目面密度为

$$N = n_t dx. \quad (31)$$

反应速率定义为单位时间内的事例数面密度，就是

$$W \propto J N \Rightarrow W = \sigma J N. \quad (32)$$

这其中  $\sigma$  就是截面，它具有面积的量纲。截面是一个相加性的物理量，比如说反应道  $i$  的截面为  $\sigma_i$ ，那么总反应截面就是

$$\sigma = \sum_i \sigma_i. \quad (33)$$

在上面定义反应速率的过程中，可以额外定义亮度

$$L := JN \Rightarrow W = \sigma L. \quad (34)$$

**① Note**

如果已知实验的运行时间  $T$  以及反应的事例数密度  $C = WT$ , 就可以测出该反应的反应截面

$$\sigma = \frac{C}{LT}. \quad (35)$$

其中  $LT$  称为积分亮度。

如果已知反应截面, 实验中需要获得足够多的事例数  $C_r$  以保证统计的显著性, 也可以反推出需要的积分亮度。

## 三体衰变以及 Dalitz 图

在三体衰变  $A \rightarrow 1 + 2 + 3$  过程中, Lorentz 守恒量有 2 个, 分别为

$$\begin{aligned} m_{12} &= s_1 = (p_{1,\mu} + p_{2,\mu})^2 \\ m_{23} &= s_2 = (p_{2,\mu} + p_{3,\mu})^2 \\ m_{31} &= s_3 = (p_{3,\mu} + p_{1,\mu})^2 \end{aligned} \quad (36)$$

在衰变粒子(初态)的质心系中, 应该有  $p_\mu = (E, \vec{0})$  也就是  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ 。所以三体衰变的微分宽度可以表示为

$$d\Gamma = \frac{|T|^2}{2m} (2\pi)^4 \delta^4(p_\mu - p_{1,\mu} - p_{2,\mu} - p_{3,\mu}) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3}. \quad (37)$$

如果衰变粒子是标量粒子, 则

$$\Phi = \int (2\pi)^4 \delta^4(p_\mu - p_{1,\mu} - p_{2,\mu} - p_{3,\mu}) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} = \frac{1}{32\pi^3} \int dE_1 dE_2 dE_3. \quad (38)$$

于是有

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3 8M} \int |T|^2 dE_1 dE_2 dE_3 = \frac{1}{(2\pi)^3 32M^3} \int |T|^2 ds_1 ds_2. \quad (39)$$

Dalitz 图就是在  $s_1, s_2$  平面上绘制三体衰变允许的区域, 其中**数据点的密度正比于衰变矩阵元  $T$  的平方, 形状取决于末态粒子的质量。**

**① Note**

上面提到标量粒子是为了忽略自旋简并的影响。如果初态和末态是自旋简并的话, 就要对末态简并求和而对初态简并求平均。

# 对称性和守恒定律

## 守恒量的一般性质

对称性的分类有

- 时间对称性；
- 空间对称性；
- 内部对称性。

如果一个系统拥有某种对称性，一般来说有一个守恒量，守恒量又可以分为

- 相加性守恒量：一般来说可以认为有经典对应；
- 相乘性守恒量：无经典对应。

守恒量也可以分为

- 严格守恒量：对各种相互作用都成立；
- 近似守恒量：只在某些相互作用下守恒，其它相互作用则不成立。

## 同位旋

同位旋是区分一组质量接近，电荷不同的粒子的量子数。它的作用就是将不同电荷粒子统一起来。

所有强子都有同位旋，常用  $I$  来表示。显然  $I_3$  的本征态就是电荷取确定值的态。

同位旋是一个近似守恒量，在引入同位旋的概念的时候我们首先忽略了不同粒子的质量差异以及电荷差异，所以这个量子数在引力相互作用以及电磁相互作用中不守恒。实际上，**同位旋守恒（系统的  $I, I_3$  在相互作用前后数值不变）只在强相互作用中守恒**。

### Important

粒子类型	粒子名称	$J^P$	同位旋 $I$	同位旋第三分量 $I_3$
重子	$p$	$\frac{1}{2}^+$	$1/2$	$1/2$
重子	$n$	$\frac{1}{2}^+$	$1/2$	$-1/2$
重子	$\Sigma^+$	$\frac{1}{2}^+$	$1$	$1$
重子	$\Sigma^0$	$\frac{1}{2}^+$	$1$	$0$
重子	$\Sigma^-$	$\frac{1}{2}^+$	$1$	$-1$
重子	$\Xi^0$	$\frac{1}{2}^+$	$1/2$	$1/2$
重子	$\Xi^-$	$\frac{1}{2}^+$	$1/2$	$-1/2$
重子	$\Lambda^0$	$\frac{1}{2}^+$	$0$	$0$
介子	$K^+$	$0^-$	$1/2$	$1/2$
介子	$K^0$	$0^-$	$1/2$	$-1/2$
介子	$\pi^+$	$0^-$	$1$	$1$
介子	$\pi^0$	$0^-$	$1$	$0$
介子	$\pi^-$	$0^-$	$1$	$-1$
介子	$\bar{K}^0$	$0^-$	$1/2$	$1/2$
介子	$K^-$	$0^-$	$1/2$	$-1/2$
介子	$\eta_8$	$0^-$	$0$	$0$

在这里需要注意一个点： $K$  介子包括  $K^+, K^0$ ，反  $K$  介子 ( $\bar{K}$  介子) 包括  $\bar{K}^0, K^-$ 。

$K$  介子二重态可以记为  $\begin{bmatrix} K^+ \\ K^0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{K}$  介子二重态可以记为  $\begin{bmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{bmatrix}$ 。需要注意  $K, \bar{K}$  介子二重态的顺序。

同位旋守恒可以约束强相互作用过程的截面关系。以  $\pi$  介子与核子  $N$  的散射为例，考虑如下几个过程

$$\begin{aligned}
 \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p & \sigma_1 \\
 \pi^+ + n &\rightarrow \pi^+ + n & \sigma_2 \\
 \pi^0 + p &\rightarrow \pi^0 + p & \sigma_3 \\
 \pi^0 + n &\rightarrow \pi^0 + n & \sigma_4 \\
 \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p & \sigma_5 \\
 \pi^- + n &\rightarrow \pi^- + n & \sigma_6 \\
 \\
 \pi^+ + n &\rightarrow \pi^0 + p & \sigma_7 \\
 \pi^0 + p &\rightarrow \pi^+ + n & \sigma_8 \\
 \pi^0 + n &\rightarrow \pi^- + p & \sigma_9 \\
 \pi^- + p &\rightarrow \pi^0 + n & \sigma_{10}
 \end{aligned} \tag{40}$$

不难发现，截面  $\sigma_1$  与截面  $\sigma_6$  之间反应的过程可以看成是同位旋绕同位旋第二分量旋转了  $\pi$  的结果，就是相当于在这里做了一个同位旋变换，由于系统具有同位旋变换不变性，这两个过程的截面应该是相等的。按照这个说法，应该有

$$\sigma_1 = \sigma_6, \sigma_2 = \sigma_5, \sigma_3 = \sigma_4. \tag{41}$$

观察后面四个过程，不难发现截面  $\sigma_7$  与截面  $\sigma_8$  之间反应的过程可以看成是时间反演的过程，截面  $\sigma_7$  与截面  $\sigma_{10}$  之间反应的过程可以看成是同位旋绕同位旋第二分量旋转了  $\pi$  的结果，所以有

$$\sigma_7 = \sigma_8 = \sigma_9 = \sigma_{10}. \tag{42}$$

### Important

实际上我们可以直接尝试求出截面，推出同位旋守恒下理论预言的截面关系，具体过程如下。

强相互作用作用过程的散射矩阵元可以认为是

$$\langle I' I'_3 | \hat{H} | II_3 \rangle = \delta_{I'I} \delta_{I'_3 I_3} M_I. \tag{43}$$

其中  $\delta_{I'I} \delta_{I'_3 I_3}$  是为了满足同位旋守恒；散射幅  $M_I$  只与同位旋  $I$  有关而与  $I_3$  无关。这其中的原由在上面已经阐述过了。

下面我们以  $\pi N$  系统为例。 $\pi N$  系统中  $\pi$  介子的同位旋  $I_\pi = 1$ ，核子  $N$  的同位旋为  $I_N = 1/2$ 。系统总同位旋就是

$$I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \tag{44}$$

体系同位旋本征态（耦合基）可以写成

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \left\langle 1 \frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right. \right\rangle |\pi^0 n\rangle + \left\langle 1 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right. \right\rangle |\pi^- p\rangle, \\
 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \left\langle 1 \frac{1}{2} 1 - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right. \right\rangle |\pi^+ n\rangle + \left\langle 1 \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right. \right\rangle |\pi^0 p\rangle, \\
 \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= |\pi^- n\rangle, \\
 \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \left\langle 1 \frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right. \right\rangle |\pi^0 n\rangle + \left\langle 1 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right. \right\rangle |\pi^- p\rangle, \\
 \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \left\langle 1 \frac{1}{2} 1 - \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right. \right\rangle |\pi^+ n\rangle + \left\langle 1 \frac{1}{2} 0 \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right. \right\rangle |\pi^0 p\rangle, \\
 \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= |\pi^+ p\rangle.
 \end{aligned} \tag{45}$$

### Note

CG 系数写成  $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \rangle$  是为了和老师讲义中保持一致，标准的写法应该是  $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle$ 。

具体 CG 系数的值可以查表获得，这里不做多的赘述。所以可以写出每个非耦合基

$$|\pi^- n\rangle = \dots, \dots, |\pi^+ p\rangle = \dots \tag{46}$$

在这里不做具体计算。散射矩阵元只和同位旋  $I$  有关，也就是只有两个基本的散射幅

$$M_{3/2} = \left\langle \frac{3}{2} \left| H \right| \frac{3}{2} \right\rangle, M_{1/2} = \left\langle \frac{1}{2} \left| H \right| \frac{1}{2} \right\rangle. \tag{47}$$

所以这种情况下，就可以直接写出不同过程的具体的散射幅，也就是

$$\langle \pi^+ p | H | \pi^+ p \rangle = M_{3/2}, \dots \quad (48)$$

**散射截面正比于散射幅的模方**，也就是

$$\sigma_{\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p} \propto M_{3/2}^2. \quad (49)$$

这样子就可以计算出散射截面，虽然说具体数值可能有点难以计算，但是可以很轻易的计算出不同反应道的散射截面之比，从而验证强相互作用下的同位旋守恒。

同位旋**在电磁相互作用下不守恒**，有如下选择定则

$$[\Delta I_3 = 0, \Delta I = 0, \pm 1]. \quad (50)$$

## 奇异数

奇异粒子有如下特性

- 协同产生，独立衰变；
- 快产生，慢衰变：通过强相互作用产生，弱相互作用衰变。

奇异数是描述奇异粒子的量子数，它是一个**强相互/电磁相互作用下守恒的相加性守恒量**。奇异粒子协同产生就是强相互作用过程中该量子数守恒的结果。

💡 Tip

记住： $S_{K^0} = +1$ ,  $S_{\Lambda^0} = -1$ 。

## 重子数

重子数就是重子的数量，这是一个**绝对、相加守恒量**。

💡 Tip

记住： $b_{n,p} = 1$ 。

## 正反粒子共轭变换（C 变换）

定义反粒子为与粒子质量、寿命和自旋相同，但所有内部相加性守恒量都取反的守恒量。如果一个粒子的所有内部相加守恒量都为0，那么它的反粒子就是其本身，这种粒子称为纯中性粒子。

记粒子  $A$  的态为  $|A\rangle$ ，相应反粒子态为  $|\bar{A}\rangle$ ，所以 C 变换的结果为

$$C|A\rangle = C'(A)|\bar{A}\rangle. \quad (51)$$

其中  $C'(A)$  被称为 C 变换因子，它是一个**相乘性量子数**，也就是

$$C|A, B, C, \dots\rangle = C'(A)C'(B)C'(C) \dots |\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots\rangle. \quad (52)$$

C 变换有如下特性

- 相同同位旋的粒子，其 C 变换因子取同一值**（只能说 C 变换因子取同一值，不能说 C 宇称取同一值）。
- 所有相加性守恒量与 C 变换操作反对易（对应上面的取反操作）。

如果此时的系统是纯中性系统（也就是系统内部的相加性守恒量为0 且在 C 变换下系统组成不变），C 变换存在本征值。C 变换作用在其本征态上的时候，得到的是 C 宇称（不再是 C 变换因子）。

如果**纯中性系统**的总自旋量子数为  $S$ ，总轨道量子数为  $L$ ，则 C 宇称应为

$$C = (-)^{L+S}. \quad (53)$$

这个公式对于玻色子和费米子都成立。

C 宇称**在强相互作用以及电磁相互作用下守恒**。

## G 变换

G 变换是先绕同位旋第二轴旋转  $\pi$  再做 C 变换的操作，即

$$G = CI_2(\pi) = Ce^{i\pi I_2}. \quad (54)$$

从物理上来说，这里的意思就是先将  $I_3$  反转  $\pi$ ，然后 C 变换又将  $I_3$  反转  $\pi$ 。也就是 G 变换前后  $I_3$  不变，其它相加性量子数全部取反。**G 变换的本征态就是除  $I_3$  外其它相加性守恒量全部为 0 的粒子**，这种粒子称为普通介子。G 变换的本征值可以记为

$$G = (-)^{L+S+I}. \quad (55)$$

G 宇称守恒只在强相互作用下守恒。

G 变换因子的性质如下

- 和 C 变换因子相同。**相同同位旋的粒子，其 G 变换因子取同一值。**
- 如果一个系统由多个强子组成，只要满足以下条件其就有确定的 G 宇称
  - 除  $I_3$  外所有内部相加性守恒量为 0；
  - 有确定的总同位旋；
  - $I_3 = 0$  的态有确定的 C 宇称。

## 空间反射变换 (P 变换)

空间反射变换定义为**空间坐标取反，时间不变**的变换，

$$\hat{P}\vec{x}\hat{P} = -\vec{x}, \hat{P}t\hat{P} = t, P^2 = 1. \quad (56)$$

♀ Tip

尤其需要注意动量、能量以及角动量的 P 变换性质

$$\hat{P}\vec{p}\hat{P} = -\vec{p}, \hat{P}E\hat{P} = E, \hat{P}\vec{L}\hat{P} = \vec{L}. \quad (57)$$

轨道角动量算符与空间反射算符对易，就是两者有共同的本征态，本征方程为

$$P|lm_l\rangle = (-)^l |lm_l\rangle. \quad (58)$$

在 P 变换下**粒子内部波函数**还有一定的 P 宇称，称作内禀宇称。

与 C 变换、G 变换类似，**同一个同位旋多重态具有相同的 P 宇称**。内禀宇称只能根据 P 宇称守恒定律（只在强相互作用以及电磁相互作用下成立）的要求来确定。只有纯中性粒子才有绝对的内禀宇称。

ⓘ Note

在原子核物理中知道了一个矢量场是有内禀的 P 宇称的，上面描述的内禀宇称其实就是矢量场/赝标量场的内禀宇称。

## 相对宇称与绝对宇称

如果粒子可以单独产生或者湮灭，就会有绝对宇称，比如说

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma. \quad (59)$$

如果粒子不能单独产生或者湮灭，就只有相对宇称，比如说

- 重子的产生核湮灭要求重子数守恒，所以不可能存在单独一个重子产生或湮灭，即重子的宇称只能是相对宇称；
- 奇异粒子的产生具有协同产生的特性，这是因为奇异量子数的守恒要求，即奇异粒子也只有相对宇称。

所以我们可以总结出

- 绝对宇称： $P(\gamma) = -, P(\pi^0) = -$ ；

ⓘ Important

注意，在这里

$$P(\pi^0) = P(\gamma)P(\gamma) = 1. \quad (60)$$

似乎与上面给出的结论相悖，这是因为这里忽略了**轨道宇称**，正确的计算是

$$P(\pi^0) = \underbrace{P(\gamma)P(\gamma)}_{\text{内禀宇称}}(-)^L. \quad (61)$$

其中  $L$  是总轨道角动量。由于  $\pi^0$  的总角动量为 0 以及体系波函数对称的要求（体系要求完全对称），可以推出  $L = 1, 3, 5, \dots$ 。所以有

$$P(\pi^0) = -. \quad (62)$$

- 重子具有相对宇称，一般约定为  $P(p) = P(n) = +$ ；
- 正反玻色子的内禀宇称相同；正反费米子的内禀宇称相反**，就是说内禀宇称（可以理解为是自旋角动量带来的宇称）存在如下关系

$$P(A\bar{A}) = (-)^{2s}. \quad (63)$$

#### Important

**问题：**正反粒子组成的纯中性系统的宇称

正反粒子构成的质心系中，系统的轨道角动量为  $L$ ，分别有自旋  $s_1 = s_2 = s$ 。系统的态为  $|A(\vec{r}, s_1), \bar{A}(-\vec{r}, s_2)\rangle$ ，做 P 变换，有

$$\hat{P} |A(\vec{r}, s_1), \bar{A}(-\vec{r}, s_2)\rangle = (-)^{L+2s} |A(-\vec{r}, s_1), \bar{A}(\vec{r}, s_2)\rangle. \quad (64)$$

所以，正反粒子系统的绝对宇称为

$$P = \begin{cases} (-)^{L+1} & \text{正反费米子} \\ (-)^L & \text{正反玻色子} \end{cases}. \quad (65)$$

目前一个很重要的例子就是赝标量介子的内禀宇称。介子是由一对正反夸克构成的粒子。其自旋为 0，不存在轨道角动量，总角动量为 0。所以构成介子的正反夸克体系总角动量为 0，自旋为  $S = 0, 1$ ，可以推出只有  $S = [L = 0]$  一种情况是允许的，所以其宇称就是

$$P(\text{赝标量介子}) = -. \quad (66)$$

**证明：**正反赝标量介子对的 CP 恒为 +。

以纯中性系统  $K\bar{K}$  为例，根据上述讨论，其 P 宇称为

$$P(K\bar{K}) = (-)^L \quad (67)$$

其 C 宇称为

$$C(K\bar{K}) = (-)^{L+S} \quad (68)$$

所以其 CP 宇称为

$$CP(K\bar{K}) = (-)^S = +. \quad (69)$$

## CP 变换

CP 变换就是对粒子做 C 和 P 的联合变换。可以证明 CP 变换的**本征态是纯中性系统**。它具有如下性质

- 纯中性系统的** CP 本征值为 C 宇称与 P 宇称的乘积
- 正反粒子中性系统的** 本征值为  $(-)^{S+2s}$ ，与轨道角动量无关。

这里的思路如下

正反粒子对系统的内禀宇称为  $(-)^{2s}$ ；正反粒子对的轨道宇称为  $(-)^L$ ；正反粒子的 C 宇称为  $(-)^{L+S}$ ，所以总的 CP 宇称就是

$$(-)^{2L+S+2s} = (-)^{S+2s}. \quad (70)$$

- CP 和 PC 变换互为逆变换
- CPCP 变换结果为

$$CPCP |A\rangle = (-)^{2s} |A\rangle. \quad (71)$$

可以通过这个关系**区分费米子以及玻色子**。

- 中微子和反中微子是通过 CP 变换互相转换的，不是通过 C 变换。

这是因为自然界只存在**左手中微子和右手反中微子**，只有 C 变换是没有办法转变手性的。

与前面的三个变换不同，CP 变换**在弱相互作用下是不变的变换（近似不变不是严格不变）**，这意味着

- 弱相互作用前后，系统的 CP 守恒不变。
- 通过 CP 变换联系起来的弱相互作用过程，演化性质完全相同

① Note

例如  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  以及  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ ，这两个过程显然是通过 CP 变换联系起来的，即

$$\begin{aligned}\pi^+(\vec{p}) &\rightarrow \pi^-(-\vec{p}) \\ \mu^+(\vec{k}) &\rightarrow \mu^-(-\vec{k}) \\ \nu(\vec{k}') &\rightarrow \bar{\nu}(-\vec{k}')\end{aligned}\tag{72}$$

所以这两个衰变过程的宽度是完全一致的。

既然 CP 变换是近似不变，那么就必定存在一定程度上的 CP 破坏，目前在中性 K 和 B 介子弱相互作用衰变中观察到了这个现象。

首先可以观察一下中性 K 介子的不同之处

$$\begin{cases} K^0 : S = 1, I_3 = -1/2 \\ \bar{K}^0 : S = -1, I_3 = 1/2 \end{cases} \tag{73}$$

但是问题是，奇异数与同位旋第三分量在弱相互作用中均不守恒，所以没有办法通过这里来分辨出  $K^0$  和  $\bar{K}^0$ 。

为了区分这两个粒子，构造出如下两个态

$$\begin{aligned}|K_s\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + CP|K^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \\ |K_l\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - CP|K^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle).\end{aligned}\tag{74}$$

不难发现，这两者都是 CP 的本征态，本征值分别为  $\pm$ 。由于 CP 守恒，上述两个态能发生的衰变分别是

$$\begin{aligned}K_s &\rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0, \\ K_l &\rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0.\end{aligned}\tag{75}$$

♀ Tip

两体末态相空间大于三体末态相空间，所以  $K_s$  介子寿命远远小于  $K_l$  介子。

实际上，实验中观测到了如下衰变

$$K_l \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0.\tag{76}$$

因此，CP 守恒并不是完全成立的。定义表征 CP 破坏程度的物理量

$$|\eta_{+-}| = \left| \frac{\Gamma(K_l \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(K_s \rightarrow \pi^+\pi^-)} \right| \approx 2 \times 10^{-3}, \quad |\eta_{00}| = \left| \frac{\Gamma(K_l \rightarrow \pi^0\pi^0)}{\Gamma(K_s \rightarrow \pi^0\pi^0)} \right| \approx 2 \times 10^{-3}.\tag{77}$$

## 全同粒子交换

根据  $\hat{P}_{ij}\psi(i, j) = \pm\psi(j, i)$  可以把一切粒子划分为两大类

- 玻色子：  $\hat{P}_{ij}\psi(i, j) = \psi(j, i)$ ，称为波函数完全对称；
- 费米子：  $\hat{P}_{ij}\psi(i, j) = -\psi(j, i)$ ，称为波函数完全反对称。

直接写出其本征值  $(-)^{2s}$ 。 $P_{ij}$  是一个严格守恒量，就是指

- 每一个费米子和玻色子是圈定的，对称与反对称的情况不能相互转换；
- 只在数目不变的过程中才有明确含义。

## 全同粒子系统的选择定则

两个全同粒子构成的系统波函数总是可以定性地写成

$$\psi(1, 2) = \underbrace{\phi(1, 2)}_{\text{空间部分}} \cdot \underbrace{\xi(1, 2)}_{\text{自旋部分}} \cdot \underbrace{\chi(1, 2)}_{\text{粒子统计部分}}.\tag{78}$$

我们需要注意的是，

$$\begin{aligned}\hat{P}_{12}\phi(1, 2) &= (-)^L\phi(2, 1) \\ \hat{P}_{12}\xi(1, 2) &= (-)^{S+2s}\xi(2, 1) \\ \hat{P}_{12}\chi(1, 2) &= \chi(2, 1)\end{aligned}\tag{79}$$

**① Note**

注意！这里  $S$  是耦合之后的总自旋量子数； $s$  是耦合之前的全同粒子的自旋量子数。

于是最终有

$$\hat{P}_{12}\psi(1, 2) = (-)^{L+S-2s}\psi(2, 1) = (-)^{2s}\psi(2, 1).\tag{80}$$

所以可以得到两个全同粒子组成的系统（费米子和玻色子都适用）的重要性质

$$[L + S = \text{even}].\tag{81}$$

## 广义全同粒子系统的选择定则

所谓广义全同粒子体系，就是在全同粒子体系上，增加了下面两个体系

- 带电粒子以及带电反粒子，比如： $e^+e^-$ ,  $K\bar{K}$ ,  $\pi^+\pi^-$ 。
- 等味同位旋多重态的粒子

两个广义全同粒子组成系统的性质

$$[L + S + I + 2i = \text{even}].\tag{82}$$

费米子和玻色子都适用， $I$  是耦合之后的总同位旋； $i$  是全同粒子的同位旋（不是同位旋第三分量）。

## 总结

守恒量的适用范围可以总结如下

### 相加性守恒量

守恒量	能量动量 $E, P$	角动量 $J$	$J_3$	电荷 $Q$	重子数 $b$	$L$	同位旋 $I$	$I_3$	奇异数 $S$	C	B
强相互作用	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
电磁相互作用	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓
弱相互作用	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗

### 相乘性守恒量

守恒量	C	P	CP	G	粒子交换算符 $P_{ij}$
强相互作用	✓	✓	✓	✓	✓
电磁相互作用	✓	✓	✓	✗	✓
弱相互作用	✗	✗	★	✗	✓

## 两粒子体系的各种宇称的计算方法

讨论对象：两体体系（初态或末态）

$$a + b \rightarrow c + d\tag{83}$$

在两粒子体系中，我们特别需要注意引入了一个相对轨道角动量，记其量子数为  $l_{\text{rel}}$ 。这样的话可以计算出上述相乘性守恒量。

**💡 Tip**

1. 在单粒子的静止参考系下，一个孤立的粒子是没有轨道角动量的；只有多粒子体系才有轨道角动量（或者说是相对轨道角动量）。

2. 注意! 上述式子只在两个粒子的情况下成立, 如果题目中给出的粒子数超过了两个, 就要拆成多个子体系然后解题。

- 一对正反粒子组成的具有确定轨道角动量  $l_{\text{rel}}$  和总自旋  $S$  的纯中性系统, 其中单独的一个粒子变换的本征态, 不具有对应的宇称, 例如  $\pi^+\pi^-$ ,  $e^+e^-$ ,  $p\bar{p}$ ,  $\dots$ , 此时

$$\boxed{P = \begin{cases} (-)^{l_{\text{rel}}+1} & \text{正反费米子} \\ (-)^{l_{\text{rel}}} & \text{正反玻色子} \end{cases}}$$

$$\boxed{C = (-)^{l_{\text{rel}}+S}}$$

$$\boxed{G = (-)^{l_{\text{rel}}+S+I}}$$

$$\boxed{CP = (-)^{S+2s} = \begin{cases} (-)^{S+1} & \text{正反费米子} \\ (-)^S & \text{正反玻色子} \end{cases}}$$
(84)

说明:

- $S$  是耦合之后的总自旋量子数,  $s$  是正反粒子的自旋量子数。
- 此时就相当于粒子交换。
- $(-1)^{l_{\text{rel}}}$  源自于粒子-反粒子对换对空间波函数的作用;
- $(-1)^S$  源自于自旋波函数的交换对称性。

#### Important

对于正反赝标量粒子对, 其自旋角动量总为 0, 所以 CP 宇称恒正。

- 如果粒子是某些变换的本征态, 具有对应的宇称

$$\boxed{P = P(1)P(2)(-)^{l_{\text{rel}}}}$$

$$\boxed{C = C(1)C(2)}$$

$$\boxed{G = C(-)^I = G(1)G(2)}$$

$$\boxed{CP = C(1)C(2)P(1)P(2)(-)^{l_{\text{rel}}} = CP(1)CP(2)(-)^{l_{\text{rel}}}}$$
(85)

说明:

- $P(1), P(2)$  为两个粒子的内禀宇称。
- $CP(1), CP(2)$  为可以理解为两个粒子的内禀 CP 宇称。

#### Warning

这里必须注意一个经常出现的特例:  $K\bar{K}$  系统。

$K\bar{K}$  系统首先是正反赝标量粒子对, 其 CP 宇称恒为正。但是  $K^0$  介子的两种表现形式  $K_L, K_S$  也是 C 的本征态, 这就导致了一个非常奇怪的现象, 即:  $K_SK_S, K_SK_L$  和  $K_LK_L$  三个表现形式可以同时使用上面的两种方法计算 CP 宇称。

这个特殊的现象导致了  $K_SK_S, K_SK_L$  和  $K_LK_L$  三个表现形式的轨道角动量受到限制, 具体如下:

通过第一种计算方式可知,  $K^0\bar{K}^0$  作为赝标量粒子对, 其 CP 宇称恒为 +。按照第二种计算方式考虑 CP 宇称的显示, 可以得到

- $K_LK_L$  和  $K_SK_S$ :  
 $CP_{K_LK_L/K_SK_S} = C_{K_L/S}C_{K_L/S}P_{K_L/S}P_{K_L/S}(-)^{L_{K_LK_L/K_SK_S}} = (-)^{L_{K_LK_L/K_SK_S}} \boxed{\equiv +} \Rightarrow L_{K_LK_L/K_SK_S} = 0, 2, \dots \Rightarrow P_{K_LK_L/K_SK_S} = +$
- $K_SK_L$ :  
 $CP_{K_SK_L} = C_{K_S}C_{K_L}P_{K_S}P_{K_L}(-)^{L_{K_SK_L}} = -(-)^{L_{K_SK_L}} \boxed{\equiv +} \Rightarrow L_{K_SK_L} = 1, 3, \dots \Rightarrow P_{K_SK_L} = -$

## 常用的几个物理量

- 奇异数:  $S(K^0) = +1, S(\Lambda^0) = -1$ 。
- C 宇称:  $C(\gamma) = -1, C(\pi^0) = +1, C(K_s) = -1, C(K_l) = +1$ 。
- G 宇称:  $G(\pi) = -1$ 。
- 宇称:  $P(\gamma) = P(\pi^0) = P(K_s) = P(K_l) = -1, P(p) = P(n) = +$ 。
- CP 宇称:  $CP(K_s) = +1, CP(K_l) = -1$ 。

## 选择定则

电磁作用下同位旋的选择定则为

$$\Delta I = 0, \pm 1, \Delta I_3 = 0. \quad (86)$$

大多数弱衰变下

$$|\Delta I| \leq 1. \quad (87)$$

这叫做最小破坏假设。

## 第三章例题

### 例题一

通过氘核  $d$  俘获一个  $\pi^-$  介子变成两个中子的过程来确定带电的  $\pi$  介子的宇称。反应过程为  $\pi^- + d \rightarrow n + n$ 。其中，氘核为  $p\bar{n}$  的  $^3S_1$  的束缚态，具体来说， $p$  和  $n$  的相对轨道角动量  $L = 0$ ，总自旋为  $S = 1$ 。实验测出  $\pi^-$  和  $d$  的相对轨道角动量为 0。

#### 回答

有强子参与的过程自然就是强相互作用过程，所以宇称守恒。还需要使用角动量守恒以及全同粒子体系的选择定则。

##### Tip

宇称守恒、角动量守恒以及全同粒子体系的选择定则。

先来分析初态的宇称：

1. 氚核  $d$  中，质子和中子的内禀宇称的乘积为 +1；
2. 氚核中，质子和中子的相对轨道角动量为  $L = 0$ ，所以轨道宇称为 +；
3. 所以氘核  $d$  的宇称为 +1；
4.  $\pi^-$  目前是孤立的-，只有内禀宇称，我们要求的就是内禀宇称，设为  $P(\pi^-)$ ；
5.  $\pi^-$  和  $d$  的相对轨道角动量为 0，所以轨道宇称为 +；
6. 综上，初态的总宇称  $P_i = P(\pi^-)P(d)(-1)^{L_{\text{rel}}} = P(\pi^-) \times (+1) \times (+1) = P(\pi^-)$ 。

##### Note

这里也是相当于将一个体系  $n, p, \pi^-$  分成了两个子体系，分别是  $n, p$  和  $\pi^-$ 。

现在分析末态：两个中子 ( $nn$ ) 是全同费米子，**波函数必须反对称**。

- 初态总角动量  $J_i = 1$ （因为氘核自旋  $S_d = 1$ ， $\pi^-$  自旋 0，相对轨道角动量  $L_{\text{rel}} = 0$ ），所以角动量守恒要求末态总角动量  $J_f = 1$ 。
- 末态两个中子的总自旋  $S$  可以是 0 或 1。轨道角动量  $L$  满足  $L + S$  为偶数（全同粒子体系的选择定则）。
  - **✗** 如果  $S = 0$ （自旋单态），则  $L$  必须为偶数，但  $J_f = L$ ，所以  $L$  偶数时  $J_f$  为偶数，无法等于 1，不可能。
  - **✓** 如果  $S = 1$ （自旋三重态），则  $L$  必须为奇数，且  $J_f$  由  $L$  和  $S$  耦合得到，可能为 1。例如  $L = 1$  时， $J_f = 1$  是可能的。
- 末态宇称  $P_f = P(n)P(n)(-1)^L = (+1)(+1)(-1)^L = (-1)^L$ 。
- 宇称守恒要求  $P_i = P_f$ ，即  $P(\pi^-) = (-1)^L$ 。
- 上面的讨论给出了  $L$  为负数， $P(\pi^-) = -1$ 。

因此， $\pi^-$  的宇称为负。

### 例题二

论证在  $\pi^-$  俘获过程  $\pi^- + d \rightarrow n + n + \pi^0$  中（初态和上题中的初态相同），末态放出的  $\pi^0$  介子和 ( $nn$ ) 的相对轨道角动量  $L_{nn-\pi^0}$  不能为零。

#### 回答

这也是一个强相互作用过程，宇称守恒。根据上题分析，初态的宇称为  $P_i = P(\pi^-) = -1$ ，初态的总角动量  $J_i = 1$ 。

##### Note

首先写出初态的宇称和角动量。

现在考虑末态：将末态分成  $(nn)$  和  $\pi^0$  两个子系统来分别讨论。两个中子为全同粒子，全同性原理要求其轨道角动量  $L_{nn}$  和总自旋  $S_{nn}$  满足  $L_{nn} + S_{nn} = \text{even}$ 。

- 当两个中子的总自旋  $S_{nn} = 0$  时，轨道角动量  $L_{nn}$  只能取偶数  $(0, 2, \dots)$ ，则  $(nn)$  的总角动量  $J_{nn} = L_{nn}$  也只能取偶数。

这时  $P(nn) = (-1)^{L_{nn}} = +1$ 。考虑到  $P(\pi^0) = -1$ ，则末态总宇称

$$P_f = P(nn)P(\pi^0)(-1)^{L_{nn}-\pi^0} = (+1)(-1)(-1)^{L_{nn}-\pi^0} = -(-1)^{L_{nn}-\pi^0}。宇称守恒要求 P_i = P_f，即 -1 = -(-1)^{L_{nn}-\pi^0}，即 L_{nn-\pi^0} 为偶数。$$

但角动量守恒要求末态总角动量  $J_f = 1$ 。如果  $L_{nn-\pi^0} = 0$ ，则  $J_f = J_{nn}$ ，但  $J_{nn}$  为偶数，无法等于 1，矛盾。所以  $L_{nn-\pi^0}$  不能为零。

- 当  $S_{nn} = 1$  时， $L_{nn}$  只能取奇数  $(1, 3, \dots)$ 。这时  $P(nn) = (-1)^{L_{nn}} = -1$ 。末态总宇称  $P_f = P(nn)P(\pi^0)(-1)^{L_{nn}-\pi^0} = (-1)(-1)(-1)^{L_{nn}-\pi^0} = (-1)^{L_{nn}-\pi^0}$ 。宇称守恒要求  $-1 = (-1)^{L_{nn}-\pi^0}$ ，所以  $L_{nn-\pi^0}$  为奇数，所以  $L_{nn-\pi^0}$  不能为零。

综上，无论  $S_{nn}$  取何值， $L_{nn-\pi^0}$  都不能为零。

### 💡 Tip

例题一、二的大致思路都是

- 首先求出初态的宇称以及总角动量
- 通过总角动量守恒、已知的自旋角动量以及全同粒子系的选择定则，确定相对的轨道角动量。
- 通过相对轨道角动量计算出末态的宇称。
- 通过宇称守恒来得出最终的结果

## 例题三

$K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$  能够对  $K^0$  的什么量子数有限制？

### 回答

这是一个弱相互作用过程， $CP$  宇称近似守恒。

### 💡 Important

上来就碰到第一个问题，怎么看出来是弱相互作用的？

通过奇异数来判断，就是  $S(K^0) = 1$  而  $S(\pi^0) = 1$ 。奇异数不守恒，就是弱相互作用过程。

或者说，奇异粒子的衰变就是弱相互作用过程。

- $\pi^0 \pi^0$  为全同玻色子，自旋为零。全同性原理要求轨道角动量  $L$  为偶数。因此  $CP(\pi^0 \pi^0) = CP(\pi^0)CP(\pi^0)(-1)^L = (-1)(-1)(+1) = +1$ 。
- $CP$  守恒要求初态  $K^0$  的  $CP = +1$ ，即  $K^0$  必须处于  $K_S$  态（因为  $K_S$  的  $CP = +1$ ， $K_L$  的  $CP = -1$ ，注意这种表述）。
- 另外， $\pi^0 \pi^0$  系统总角动量  $J = 0$ （因为  $L$  偶数，自旋 0），所以  $K^0$  的自旋必须为偶数（实际上  $K^0$  自旋为 0）。

因此，这个过程限制  $K^0$  必须具有  $CP = +1$  且自旋为偶数。

## 例题四

证明：相对轨道角动量都为零的多  $\pi$  系统  $(\pi^+ \pi^-)$  的  $CP$  为正， $(\pi^+ \pi^- \pi^0)$  的  $CP$  为负。

### 回答

- 对于  $(\pi^+ \pi^-)$  系统，总自旋为 0。

$$CP(\pi^+ \pi^-) = C(\pi^+)C(\pi^-)P(\pi^+)P(\pi^-)(-)^S = +. \quad (88)$$

- 对于  $(\pi^+ \pi^- \pi^0)$  系统，划分为  $(\pi^+ \pi^-)$  和  $\pi^0$ ，且所有相对轨道角动量均为 0。

- $CP(\pi^+ \pi^-) = +1$ （同上）。
- $CP(\pi^0) = C(\pi^0)P(\pi^0) = (+1) \times (-1) = -1$ 。
- 耦合总自旋量子数  $S = 0$ ，所以  $CP$  总值为：

$$CP = CP(\pi^+ \pi^-)CP(\pi^0)(-1)^{L_{(\pi^+ \pi^-)\pi^0}} = (+1) \times (-1) \times (+1) = -1. \quad (89)$$

### ⓘ Note

其实最后一步有点没用上相对轨道角动量为 0 这个条件。为了说明其作用，需要分别考虑  $C$  宇称和宇称。

- $(\pi^+\pi^-)$  和  $\pi^0$  的宇称为

$$P(\pi^+\pi^-\pi^0) = P(\pi^+\pi^-)P(\pi^0)(-)^{L_{(\pi^+\pi^-)\pi^0}} = -. \quad (90)$$

- $(\pi^+\pi^-)$  和  $\pi^0$  的  $CP$  宇称为

$$C(\pi^+\pi^-\pi^0) = C(\pi^+\pi^-)C(\pi^0)(-)^{L_{(\pi^+\pi^-)\pi^0}+S} = +. \quad (91)$$

在这上述讨论中,  $L_{(\pi^+\pi^-)\pi^0}$  就是  $(\pi^+\pi^-)$  和  $\pi^0$  的相对角动量, 按题目意思来说, 为 0。所以最后的  $CP$  宇称就是

$$CP = P(\pi^+\pi^-\pi^0)C(\pi^+\pi^-\pi^0) = -. \quad (92)$$

但是还是直接套之前的公式比较快也比较清晰。

因此,  $(\pi^+\pi^-)$  的  $CP$  为正,  $(\pi^+\pi^-\pi^0)$  的  $CP$  为负。

## 例题五

考虑正反带电费米子对  $f\bar{f}$  (正反质子  $p\bar{p}$  或者正负电子  $e^+e^-$ ) 湮灭实验中产生  $K\bar{K}$  对的过程  $f\bar{f} \rightarrow K\bar{K}$ 。如果正反费米子的轨道角动量为 0, 请讨论末态  $K\bar{K}$  的表现形式。

### 回答

可以观察出在上述过程中奇异数守恒, 所以主要通过强相互作用 ( $p\bar{p}$ ) 或电磁相互作用 ( $e^+e^-$ ) 发生。C、P 和 CP 也守恒。

正反带电费米子对  $f\bar{f}$  在轨道角动量  $L = 0$  时的 C、P、CP 宇称:

- $S = 1$  (自旋三重态) :  $C' = (-1)^{L+S} = -1$ ,  $P' = (-1)^{L+1} = -1$ ,  $CP' = +1$ 。
- $S = 0$  (自旋单态) :  $C' = (-1)^{L+S} = +1$ ,  $P' = (-1)^{L+1} = -1$ ,  $CP' = -1$ 。

末态  $K\bar{K}$  为赝标量粒子对, 其 CP 宇称恒为正, 所以初态只能处于  $S = 1$ ,  $J_i = 1$  的情况。 $K\bar{K}$  自旋为零, 所以总角动量  $J_f$  由轨道角动量  $L$  决定。

- 如果  $K\bar{K} = K^+K^-$ , 则  $CP(K^+K^-) = +1$  (类似  $\pi^+\pi^-$ )。
- 如果  $K\bar{K} = K^0\bar{K}^0$ , 则末态粒子是中性, 通过弱衰变被观测为  $K_SK_S$ 、 $K_SK_L$ 、 $K_LK_L$  的组合 (注意这种表述)。这些组合的 CP 宇称为:
  - $CP(K_SK_S) = CP(K_S)CP(K_S)(-1)^L = (+1)(+1)(-1)^L = (-1)^L = +1 \Rightarrow L = 0, 2, \dots$
  - $CP(K_SK_L) = CP(K_S)CP(K_L)(-1)^L = (+1)(-1)(-1)^L = (-1)^{L+1} = +1 \Rightarrow L = 1, 3, \dots$
  - $CP(K_LK_L) = CP(K_L)CP(K_L)(-1)^L = (-1)(-1)(-1)^L = (-1)^L = +1 \Rightarrow L = 0, 2, \dots$

#### Important

$K^0\bar{K}^0$  体系不能直接讨论, 要讨论其混合之后的体系。但是注意  $K^0\bar{K}^0$  与  $K_SK_S$ 、 $K_SK_L$ 、 $K_LK_L$  三个体系只有 CP 宇称是守恒的。

由于宇称守恒, 末态主要出现  $K^+K^-$  或  $K_SK_L$  组合。

## 例题六

论证: 标量介子 ( $J^P = 0^+$ ) 不能通过强相互作用或电磁相互作用衰变到三个赝标介子 ( $J^P = 0^-$ )。

### 回答

强相互作用和电磁相互作用 P 宇称守恒。

考虑末态三个赝标介子 (例如  $\pi$  介子)。将系统划分为两个子系统: 一对赝标介子 (相对轨道角动量  $L_{12}$ ) 和另一个赝标介子 (相对轨道角动量  $L_3$ )。

- 末态总宇称:

$$P_f = P(\pi)P(\pi)P(\pi)(-1)^{L_{12}}(-1)^{L_3} = (-1)^3(-1)^{L_{12}+L_3} = -(-1)^{L_{12}+L_3}. \quad (93)$$

- 角动量守恒: 标量介子初态  $J_i = 0$ , 所以末态总角动量  $J_f = 0$ 。这要求  $L_{12}$  和  $L_3$  能耦合到  $J = 0$ , 即  $L_{12} = L_3$ 。
- 因此,  $P_f = -(-1)^{2L_{12}} = -1$ 。
- 但初态标量介子宇称  $P_i = +1$ , 所以  $P_i \neq P_f$ , 宇称不守恒。

因此, 标量介子不能通过强相互作用或电磁相互作用衰变到三个赝标介子。

## 例题七

讨论  $\pi^+\pi^-\pi^0$ ,  $\pi^0\pi^0\pi^0$  这两个三  $\pi$  子系统的可能的同位旋状态:

### 回答

#### 1. $\pi^+\pi^-\pi^0$ 系统

将系统划分为  $(\pi^+\pi^-)$  和  $\pi^0$  两个子系统。

- $(\pi^+\pi^-)$  系统: 同位旋  $I_{12}$  可以是 0, 1, 2。 $\pi^+$  和  $\pi^-$  是广义全同玻色子, 波函数在交换同位旋和空间坐标时整体对称。因此:
  - $I_{12} = 0$  或 2 时, 同位旋波函数对称, 要求空间波函数对称, 即轨道角动量  $L_{12}$  为偶数。
  - $I_{12} = 1$  时, 同位旋波函数反对称, 要求空间波函数反对称, 即轨道角动量  $L_{12}$  为奇数。

##### 💡 Tip

或者说, 这里是运用了广义全同粒子的选择定则

$$L + S + I + 2i = \text{even}. \quad (94)$$

其耦合自旋  $S = 0$ , 同位旋  $i = 1$ 。所以有

$$L + I = \text{even}. \quad (95)$$

于是也有

- $I_{12} = 0$  或 2 时, 轨道角动量  $L_{12}$  为偶数。
- $I_{12} = 1$  时, 轨道角动量  $L_{12}$  为奇数。
- $C$  宇称和  $G$  宇称:
  - 对于  $(\pi^+\pi^-)$  :
    - $I_{12} = 0$  或 2,  $L_{12}$  偶数:  $C' = (-1)^{L_{12}+S} = +1$ ,  $G' = (-1)^{I_{12}} = +1$ 。
    - $I_{12} = 1$ ,  $L_{12}$  奇数:  $C' = (-1)^{L_{12}+S} = -1$ ,  $G' = -(-1)^{I_{12}} = +1$ 。

##### 💡 Tip

上面是直接用了  $C' = (-)^{L+S}$  和  $G' = (-)^{L+S+I}$  的方法, 但也可以用两粒子体系的计算方法。已知  $C'(\pi^{0,\pm}) = 1$ ,  $G'(\pi^{0,\pm}) = -1$ , 于是

$$C' = C'(\pi^+)C'(\pi^-)(-)^{L_{12}+S} = \begin{cases} +, & I_{12} = 0, 2 \\ -, & I_{12} = 1 \end{cases} \quad (96)$$

$G$  宇称同理。

- 对于三  $\pi$  系统: 其中  $L_3$  是  $(\pi^+\pi^-)$  与  $\pi^0$  的相对轨道角动量,  $I$  是三  $\pi$  耦合之后的总同位旋, 取值为 0, 1, 2, 3。
  - $G$  宇称:  $G = G(\pi)G(\pi)G(\pi) = (-1)^3 = -1$ 。
  - 总  $C$  宇称:  $C = C(\pi^+\pi^-)C(\pi^0) = C(\pi^+\pi^-)$ 。
  - 总同位旋  $I$  满足  $G = C(-1)^I$ , 即  $-1 = C(-1)^I$ 。

现在分情况:

- 当  $(\pi^+\pi^-)$  的  $I_{12} = 0$  或 2 时,  $C' = +1$ , 所以  $-1 = (+1)(-1)^I$ , 即  $(-1)^I = -1$ , 所以  $I = 1, 3$ 。
- 当  $(\pi^+\pi^-)$  的  $I_{12} = 1$  时,  $C' = -1$ , 所以  $-1 = (-1)(-1)^I$ , 即  $(-1)^I = +1$ , 所以  $I = 0, 2$ 。

因此,  $\pi^+\pi^-\pi^0$  系的可能同位旋为  $I = 0, 1, 2, 3$ 。

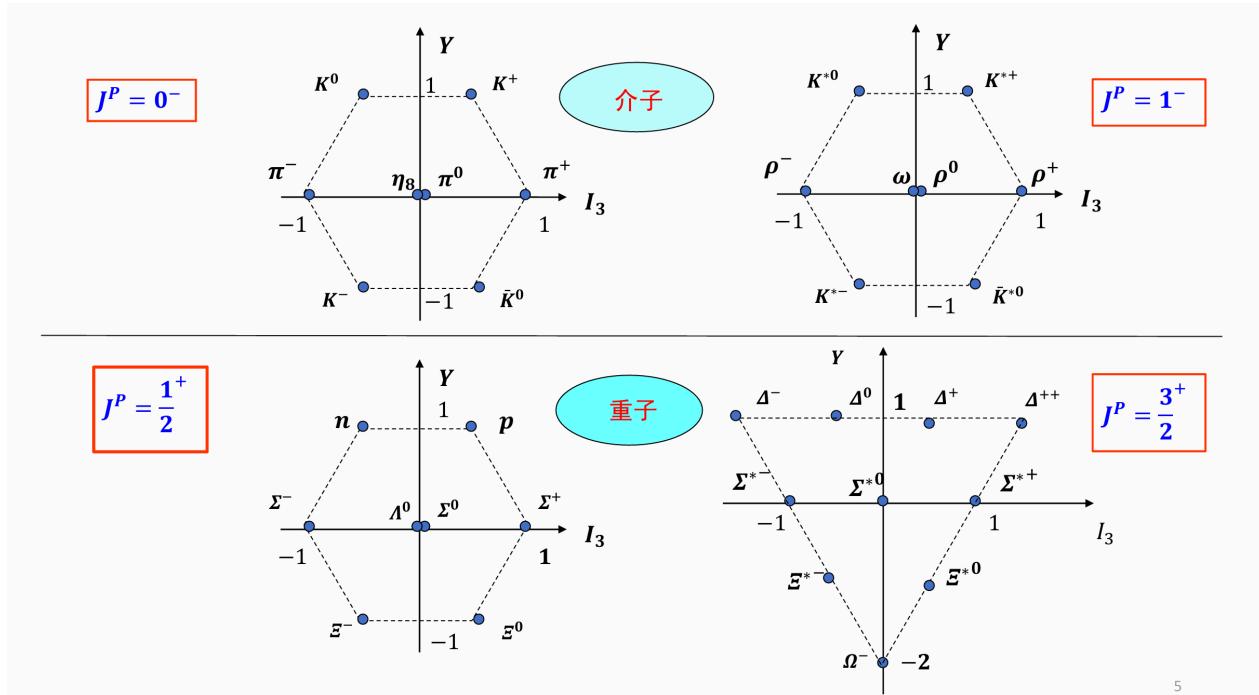
#### 2. $\pi^0\pi^0\pi^0$ 系统

- 所有粒子相同, 是全同玻色子, 波函数必须全对称。
- $C$  宇称:  $C = C(\pi^0)C(\pi^0)C(\pi^0) = (+1)^3 = +1$ 。
- $G$  宇称:  $G = G(\pi)G(\pi)G(\pi) = (-1)^3 = -1$ 。
- 由  $G = C(-1)^I$ , 即  $-1 = (+1)(-1)^I$ , 所以  $(-1)^I = -1$ , 即  $I$  为奇数且  $I \leq 3$ , 所以  $I = 1, 3$ 。

因此,  $\pi^0\pi^0\pi^0$  系统的可能同位旋为  $I = 1, 3$ 。

# 强子结构和强相互作用

强子可以被  $SU(3)$  群描述,  $SU(3)$  群带来的对称性称为味对称性。由于强子是同位旋第三分量以及超荷的本征态, 所以可以在  $I_3 - Y$  平面上按照量子数  $(I_3, Y)$  来标记每个  $J^P$  相同的强子的位置。



上述图又可以被称为“权图”。

对于  $SU(3)$  群, 我们只需要知道如下概念

- $SU(3)$  群共有 8 个生成元, 称为 GellMann 矩阵。需要注意其中第三个和第八个矩阵是对易的, 也就是

$$[\lambda_3, \lambda_8] = 0 \quad (97)$$

根据上面的讨论, 可以认为这两个矩阵分别反映了同位旋第三分量以及超荷。

- $SU(3)$  群的基础表示, 记为  $\underline{3}$ 。可以理解为是一个粒子的三重态, 具体形式是三个矢量:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (98)$$

在基础表示下同位旋第三分量以及超荷的群表示可以写为

$$I_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad (99)$$

此时可以计算出基础表示代表的粒子的量子数

	$I_3$	$Y$
$u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$d$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$s$	0	$-\frac{2}{3}$

- $SU(3)$  群基础表示的共轭表示, 记为  $\underline{3}^*$ 。可以理解为是一个反粒子的三重态, 具体形式是三个矢量:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (100)$$

在这种表示下同位旋第三分量以及超荷的群表示可以写为

$$I_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad (101)$$

此时可以计算出基础表示代表的粒子的量子数

	$I_3$	$Y$
$\bar{u}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\bar{s}$	0	$\frac{2}{3}$

- SU(3) 群的任意不可约表示可以通过若干个基础表示和基础表示的共轭表示生成，也就是

$$\underline{3} \otimes \underline{3}^* \rightarrow \underline{1} \oplus \underline{8}.$$

$$\underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3} \rightarrow \underline{1} \oplus \underline{8} \oplus \underline{8} \oplus \underline{10}. \quad (102)$$

此时可以通过计算出  $u, d, s$  及其共轭的同位旋第三分量以及超荷，从而做出权图。



## 坂田模型

认为中子、质子和  $\Lambda$  超子就是基础表示；它们的反粒子构成基础表示的共轭表示。其缺陷在于

- 具有同样的  $J^P$  的重子在两个表示中，不自然；
- 预言的重子没有被找到。

## 八正法

假设介子和重子都属于 SU(3) 的八维表示或者由八维表示的直乘分解所得的表示，也就是

$$\underline{8} \otimes \underline{8} \rightarrow \underline{1} \otimes \underline{8} \otimes \underline{8} \otimes \underline{10} \otimes \underline{10}^* \otimes \underline{27}. \quad (103)$$

缺点：

- 但是这个模型没有解释清楚为什么介子只有一重态和八重态；重子只有一、八和十重态；
- 但是八重态并不是 SU(3) 基础表示，27 重态实际上也并不存在。

成功：预言了  $\Omega^-$  粒子。

## 夸克模型

### Important

夸克模型老师明明说要求很少，但是看往年卷并不少，所以还是做详细介绍。

在八正法基础上重新假设：SU(3) 群的基础表示及其共轭表示也有粒子填充，这些粒子被称为夸克，他们是费米子。

通过 Gellman - 西岛 关系可以推出  $Q_u = \frac{2}{3}$ ,  $Q_d = -\frac{1}{3}$ ,  $Q_s = -\frac{1}{3}$ 。其余各量子数如下所示

$u$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
$d$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

	$J$	$Q$	$I$	$I_3$	$Y$	$S$	$b$
$s$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-1$	$\frac{1}{3}$

$SU(3)$  群的基础表示以及其共轭表示为

$$\varphi = \begin{bmatrix} u \\ d \\ s \end{bmatrix} =: \varphi^i, \quad \varphi^\dagger = [\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}] =: \varphi_j. \quad (104)$$

于是一个  $(m, n)$  张量可以记为

$$T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} = \varphi^{i_1} \cdots \varphi^{i_m} \varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_n}. \quad (105)$$

此时可以定义不可约张量，即所有上下指标全对称，任意一对上下指标的矩阵零迹。任意一个张量都可以表示为不可约张量的线性组合。

## 介子的夸克组分

根据夸克模型，介子是一对正反夸克的组合，所以此时的张量就是

$$T_j^i = \varphi^i \varphi_j = \begin{bmatrix} u\bar{u} & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & d\bar{d} & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & s\bar{s} \end{bmatrix}. \quad (106)$$

但是，这个张量是可约化的，也就是

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}S + M. \quad (107)$$

其中

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}), \quad M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2u\bar{u} - d\bar{d} - s\bar{s}) & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & \frac{1}{3}(-u\bar{u} + 2d\bar{d} - s\bar{s}) & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & \frac{1}{3}(-u\bar{u} - d\bar{d} + 2s\bar{s}) \end{bmatrix} \quad (108)$$

需要注意， $S$  就是介子单重态； $M$  是无迹的，自由度为 8，就是介子八重态（是赝标量粒子八重态还是矢量介子八重态还取决于自旋宇称）。

$M$  的无迹条件可以表示为

$$M_1^1 + M_2^2 + M_3^3 = 0 \quad (109)$$

选定两个独立分量

$$T_{00} = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}), \quad T_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}). \quad (110)$$

此时有

$$\begin{aligned} M_1^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}T_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}}T_{00}, \\ M_2^2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}}T_{00}, \\ M_3^3 &= -\frac{2}{\sqrt{6}}T_{00}. \end{aligned} \quad (111)$$

介子八重态以及相关性质如下表所示：

		夸克组分	赝标量粒子	矢量粒子
$(1, 0)$	$(1, 0, 1)$	$u\bar{d}$	$\pi^+$	$\rho^+$
	$(0, 0, 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	$\pi^0$	$\rho^0$
	$(-1, 0, -1)$	$d\bar{u}$	$\pi^-$	$\rho^-$
$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, 1, 1)$	$u\bar{s}$	$K^+$	$K^{*+}$

$(I, Y)$	$(I_3, Y, Q)$	夸克组分	赝标量粒子 $J^P = 0^-$	矢量粒子 $J^P = 1^-$
	$(-\frac{1}{2}, 1, 0)$	$d\bar{s}$	$K^0$	$K^{*0}$
$(\frac{1}{2}, -1)$	$(\frac{1}{2}, -1, 0)$	$s\bar{d}$	$\bar{K}^0$	$\bar{K}^{*0}$
	$(-\frac{1}{2}, -1, -1)$	$s\bar{u}$	$K^-$	$K^{*-}$
$(0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$	$\eta_8$	$\omega$

不同自旋宇称  $J^P$  的介子八重态 **夸克组分相同**, 区别来源于**夸克间轨道和自旋状态不同**。还有一点尤其需要注意, 即

$$(I_3, Y, Q)T_{10} = (I_3, Y, Q)T_{00} = (0, 0, 0). \quad (112)$$

可以看出来  $T_{10}$  指的是  $\pi^0, \rho^0$ ;  $T_{00}$  是  $(0, 0, 0)$  的介子八重态, 记为  $\eta_8, \omega$ 。此时重写无迹张量  $M$ , 为

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{bmatrix} \quad (113)$$

## 重子的夸克成分

描述重子的张量为

$$T^{ijk} = \varphi^i \varphi^j \varphi^k. \quad (114)$$

当然  $T^{ijk}$  也可以表示为不可约张量之和, 但是在这里不给出具体形式 (可以看讲义)。重子八重态以及相关性质如下表所示:

$(I, Y)$	$(I_3, Y, Q)$	夸克组分	$J^P = \frac{1}{2}^+$ 重子
$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, 1, 1)$	$uud$	$p$
	$(-\frac{1}{2}, 1, 0)$	$udd$	$n$
$(1, 0)$	$(1, 0, 1)$	$uus$	$\Sigma^+$
	$(0, 0, 0)$	$uds$	$\Sigma^0$
	$(-1, 0, -1)$	$dds$	$\Sigma^-$
$(\frac{1}{2}, -1)$	$(\frac{1}{2}, -1, 0)$	$uss$	$\Xi^0$
	$(-\frac{1}{2}, -1, -1)$	$dss$	$\Xi^-$
$(0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$uds$	$\Lambda^0$

需要注意: **夸克的顺序是有物理意义**。

关于重子十重态只有一个需要注意的, 就是**十重态的味道波函数是全对称的**。

## GellMann - 大久保质量分裂公式

实际上强子并不是完全满足  $SU(3)$  对称性的, 表现为多重态中不同同位旋的粒子质量相差较大, 称为“**味道对称性破缺**”, 讨论味道对称性破缺就是要讨论质量。从实验上来看,  $SU(3)$  群的子群  $SU(2) \otimes U(1)$  (同位旋守恒以及奇异数守恒) 总是被较好的满足的。

GellMann - 大久保质量分裂公式描述的是**味道对称性破缺的一级质量分裂公式**, 也可以理解为在保持同位旋  $I$  和超荷  $Y$  守恒的前提下, 描述**强子质量如何随夸克质量差异而变化**。具体形式为

$$M(I, Y) = A + B \left[ I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right] + CY. \quad (115)$$

注意:

- 对于同一个表示 (多重态),  $A, B, C$  取相同的值;
- 对于重子八重态, 由于重子与反重子不在同一表示中,  $C \neq 0$ ;
- 对于介子多重态, 由于介子与反介子在同一表示中,  $C = 0$ ;
- 对于介子,  $M$  代表质量平方; 对于重子,  $M$  代表质量。**

### Note

- 重子八重态

$$\begin{cases} M(N) = A + \frac{1}{2}B + C, \\ M(\Sigma) = A + 2B, \\ M(\Lambda) = A, \\ M(\Xi) = A + \frac{1}{2}B - C. \end{cases} \Rightarrow 2M(N) + 2M(\Xi) = 3M(\Lambda) + M(\Sigma) \quad (116)$$

实验中测得

$$\text{左式} = 4514 \text{ Mev}, \quad \text{右式} = 4540.2 \text{ MeV}. \quad (117)$$

也就是说并不完全对称，但已经非常接近了，这是因为重子八重态中混合较小，可以认为  $\Lambda$  是重子八重态中的粒子。

- 矢量介子八重态

推导过程同上，此时的结论是

$$4m_{K^*}^2 = 3m_8^2 + m_\rho^2. \quad (118)$$

实验中测得：

$$\text{左式} = 3.18 \text{ GeV}, \quad \text{右式} = 3.71 \text{ GeV}. \quad (119)$$

可以看出此时等式严重偏移，所以可以知道矢量介子八重态中 1 和 8 混合的很严重。实际测量出来的粒子已经并不是 8 了，而是 1 和 8 混合产生的粒子。

在上面的讨论中可以发现矢量介子八重态中 GellMann - 大久保质量分裂公式出现了严重的偏移，这是因为  $SU(3)$  群中  $(I, Y) = (0, 0)$  的味道单态和味道八重态粒子发生了混合。

💡 Tip

这种解释可以在保证同位旋和超荷守恒的情况下（即  $SU(2) \otimes U(1)$  对称性）解释味道对称性（即  $SU(3)$  对称性）的破缺。

在之前的利用  $SU(3)$  推导八重态中得到的粒子只能得到  $\eta_1, \eta_8$  两个理论上的粒子（后面简写成 1, 8），但是实际中这两个粒子会混合，导致实验中只能观测到它们混合之后的粒子。

例如，在所有赝标量介子中，存在两个  $(I, Y) = (0, 0)$  的粒子，分别是  $\eta, \eta'$ ；在所有矢量介子中，存在两个  $(I, Y) = (0, 0)$  的粒子，分别是  $\phi, \omega$ 。这四种粒子都是 1, 8 混合的结果，即它们是

$$\begin{bmatrix} m_8^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_1^2 \end{bmatrix} \quad (120)$$

本征值，而 1, 8 是

$$\begin{bmatrix} m_8^2 & 0 \\ 0 & m_1^2 \end{bmatrix} \quad (121)$$

的本征值。现在我们写出描述赝标量介子的张量  $T_j^i$ ：

$$T_j^i = \begin{bmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 + \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (122)$$

如果味道对称性不破缺，也就是认为九个粒子的质量完全相同，质量矩阵中的质量项为

$$\frac{1}{2}m^2 \text{Tr}(T_j^i T_j^i). \quad (123)$$

如果味道对称性破缺，质量破缺项为

$$-\sqrt{3}\delta \text{Tr}(T_j^i \lambda_8 T_j^i). \quad (124)$$

于是可以计算出质量矩阵为

$$\begin{bmatrix} m_8^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 + 2\delta & -2\sqrt{2}\delta \\ -2\sqrt{2}\delta & m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 + 4\delta & 0 \\ 0 & m^2 - 2\delta \end{bmatrix}. \quad (125)$$

最后一步将质量矩阵对角化了，此时可以得到混合之后的粒子的质量。混合前后的粒子有如下关系

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \eta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (126)$$

其中  $\theta$  就称为混合角，描述的是 1, 8 混合的程度，也可以表示为味道对称性破缺的程度； $\eta$  是较重的粒子； $\eta'$  是较轻的粒子。

### 💡 Tip

如果混合角  $\boxed{\theta = 35.3^\circ}$ （或者说是  $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$ ,  $\sin \theta = \sqrt{2/3}$ ），称为理想混合。此时两个质量本征态分别是纯  $(u, d)$  和纯  $s\bar{s}$  构成的态，也就是说上下夸克和奇异夸克完全区分开来了。这也能看出来 **味道对称性破缺的原因就是因为奇异夸克的质量与上下夸克有较大的差异。**

一般来说计算混合角的公式如下

$$\boxed{\tan^2 \theta = \frac{3m_\eta^2 - 4m_K^2 + m_\pi^2}{4m_K^2 - m_\pi^2 - 3m_{\eta'}^2}} \quad (127)$$

注意了，在这个公式中，混合后较重的粒子位于分子，较轻的粒子位于分子母。

## OZI 规则

一言以蔽之：**强过程中，只能通过夸克湮灭得到的末态过程将被严重压低。**

以  $\omega$ ,  $\phi$  介子的衰变为例：

- 两者具有相同的量子数  $0^- 1^{--}$ ，强相互作用应该相似；
- 根据守恒量，应该主要衰变到  $\pi^+ \pi^- \pi^0$  的末态；
- $\phi$  的质量大于  $\omega$  的质量，因此其宽度应该较大；
- $\phi$  在可以衰变为  $K\bar{K}$ ，这个衰变道对其宽度有贡献。

但是实际可以看到

- $\omega$  的宽度大于  $\phi$ ；
- $\phi$  的衰变末态以  $K\bar{K}$  为主。

根据 OZI 规则，这个情况可以解释为： $\phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  是  $s\bar{s}$  湮灭的结果，这个衰变道被严重压低。从费曼图可以看出来（看讲义）。

## 颜色自由度

颜色自由度来源于如下矛盾：

- 观察  $\frac{3}{2}^+$  的重子十重态，其中有如下奇异的重子

$$\Delta^{++} = uuu, \Delta^- = ddd. \quad (128)$$

那么现在就有一个问题，由于它们的自旋都为  $3/2$ ，说明三个夸克取同样的自旋方向且轨道角动量为 0。这说明三个夸克似乎并不满足泡利不相容原理。

更一般地说：**基态重子的自旋味道波函数是全对称的；空间波函数也是全对称的。为了使得总波函数反对称，必须额外引入一个新的自由度，也就是颜色；**

- 为什么没有办法直接观测到夸克；
- 为什么没有两夸克或者是多夸克体系存在。

夸克的三种颜色构成颜色  $SU(3)$  基础表示，颜色是严格守恒量，味道相同、颜色不同的夸克具有相同质量。重子的颜色波函数可以表示为

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{ijk} q_1^i q_2^j q_3^k. \quad (129)$$

其中下指标代表夸克的味道，上指标代表夸克的颜色。由于  $\chi$  是反对称的，重子是颜色单态的。

### 💡 Tip

考虑正反夸克体系（介子），发现此时也会出现颜色八重态，但在实验上没有观测到。为了解决这个疑难，色禁闭被提出来：**只有颜色单态的强子才是现实存在的粒子。**

色禁闭的概念可以说明为什么不存在两夸克或者是多夸克体系以及为什么单个自由夸克不可能存在。

### ⓘ Note

夸克颜色有三种并不是一个单纯的假设而是一个唯像的结论

- $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  的衰变道宽度的实验值与理论理论值的拟合计算出颜色数为 3；

- 规范场理论的可重整性要求；
- 正负电子湮灭实验，具体如下：  
正负电子对撞的时候，会湮灭成一个虚光子，进而产生一个粒子。如果产生一对  $\mu^+ \mu^-$ ，截面为  $\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ ；如果是强子，则总截面可以近似为

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons}) = \sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \sum_i Q_i^2. \quad (130)$$

其中求和是对不同味道夸克的带电量求和，定义

$$R := \frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)} = \sum_i Q_i^2. \quad (131)$$

当质心能量低于 3.6 GeV 时，只有  $u, d, s$  三种味道的夸克出现，所以

$$R = \frac{2}{3}. \quad (132)$$

但实验测得  $R = 2$ ，正好对应颜色自由度为 3。

## 部分子模型

在轻子-核子的深度非弹性散射实验（简称为 DIS）中人们发现出现了大能量和大动量转移的过程。这说明核子内部有定域的散射中心。

因此部分子模型被提出：

- 核子是由点状部分子组成的，部分子在 DIS 过程中是近似自由的。部分子分为带电部分子以及中性部分子；
- 高能轻子与核子散射实际上是和其中一个近似自由部分子发生弹性散射；

轻子-核子弹性散射满足条件为

$$\boxed{\nu - \frac{Q^2}{2M} = 0}. \quad (133)$$

- 部分子携带核子动量的一部分，设其动量分数为  $x$ ，即

$$p_{\text{parton}} = x p_{\text{proton}}. \quad (134)$$

根据动量分数  $x$ ，定义一个无量纲常数

$$\omega := x^{-1} = \frac{2M\nu}{Q^2}. \quad (135)$$

其中  $Q^2$  是动量转移平方； $\nu$  是能量转移； $M$  是靶静止质量。

DIS 的现象可以总结为

- 结构函数  $\nu W_2(\nu, Q^2)$  在  $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$  时几乎不依赖于  $Q^2$  只依赖于  $\omega$ ，或者说

$$\nu W_2(\nu, Q^2) \rightarrow F_2(\omega), \quad M W_1(\nu, Q^2) \rightarrow F_1(\omega), \quad Q^2 \rightarrow \infty. \quad (136)$$

- 在  $\omega > 4$  时，结构函数  $\nu W_2(\nu, Q^2)$  对  $\nu$  和  $Q^2$  的依赖很小，说明是非弹性散射。

经过一些推导，可以获得描述自旋 1/2 的部分子的 Callan - Gross 关系，也就是

$$\boxed{2F_1(\omega) = \omega F_2(\omega) \Rightarrow F_2(x) = 2x F_1(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x)}. \quad (137)$$

其中  $f_i(x)$  称为部分子分布函数。实验支持这个关系，说明部分子确实是自旋 1/2 点粒子。

### Important

关于部分子分布函数的讨论：

核子内的夸克可以分为价夸克 (valence quark) 和海夸克 (sea quark)。价夸克贡献强子量子数，与夸克模型中的夸克自由度对应；海夸克是 QCD 真空极化，主要来源于  $g \rightarrow q\bar{q}$ 。对于质子（夸克结构为  $uud$ ）而言，有如下关系

$$\begin{aligned} u_v &= 2d_v, & s_v &= \bar{u}_v = \bar{d}_v = \bar{s}_v = 0 \\ u_s &= d_s = s_s = \bar{u}_s = \bar{d}_s = \bar{s}_s = K \end{aligned} \quad (138)$$

第二个公式是把在同一个动量分数  $x$  处所有海夸克和反海夸克的分布函数近似看成同一个函数，用  $K(x)$  表示。实验结果显示海夸克在小  $x$  附近为主，价夸克在大  $x$  时为主。

初态二部分子过程中，两个部分子的动量分数  $x$  有一个近似的计算方法

$$x \approx \frac{\sum_i m_i}{\sqrt{S}}. \quad (139)$$

其中  $S$  是系统的总质心能量平方， $m_i$  是末态粒子的质量。

#### ① Note

比如说在 LHC 上 Higgs 粒子的产生，有

$$x = \frac{125 \text{ GeV}}{14 \text{ TeV}} = 0.01. \quad (140)$$

此时看 LHC 实验能标下的部分子分布函数，可以发现此时是胶子主导，所以可以得出如下结论：**LHC 上产生 Higgs 粒子的主要机制是胶子-胶子散射。**

在**电子-核子深度非弹性散射**中，如果部分子的量子数与夸克的量子数相同，则应该有如下关系：

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{ep}(x)}{F_2^{en}(x)} \leq 4. \quad (141)$$

事实上这在实验中是受到支持的。

在**中微子-核子深度非弹性散射**中，如果部分子的同位旋以及电荷与夸克相同，则

$$\frac{F_2^{vp} + F_2^{vn}}{F_2^{ep} + F_2^{en}} \approx \frac{18}{5}. \quad (142)$$

实验结果与其符合的非常好。

到此为止，上面的讨论只考虑了带电部分子，即夸克和反夸克。如果夸克和反夸克贡献核子内部的所有自由度，那么能动量守恒要求

$$\int_0^1 \sum_i x_i f_i(x) dx = 1. \quad (143)$$

其中  $i$  遍历  $u, d, s$  以及其反夸克。但实际上测量到  $I = 0.5$ ，说明核子中必定有不参与电磁相互作用以及弱作用的中性部分子。

## 量子色动力学

### 量子电动力学

Dirac 方程对应的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (144)$$

其中  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ 。不难发现如果对波函数做如下变换时，拉氏密度不变

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \psi(x). \quad (145)$$

但是需要注意，以上讨论的  $\theta$  是一个不依赖于时空坐标的常数，上面这种变换称为整体 U(1) 变换。这种群对称对应一个守恒流

$$j^\mu := \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (146)$$

满足  $\partial_\mu j^\mu = 0$ ，通常意义下这就是电荷守恒。

如果此时参数  $\theta$  依赖时空坐标，那么就会有  $\theta(x)$ ，此时这种变换就称为定域 U(1) 变换。此时将定域变换之后的波函数代入拉氏密度，就会有

$$\partial_\mu \psi \rightarrow \partial_\mu e^{i\theta(x)} \psi(x) = \boxed{i e^{i\theta(x)} \psi(x) \partial_\mu \theta(x) + e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi(x)}. \quad (147)$$

多出来的一项破坏了  $\mathcal{L}$  的对称性，为了恢复对称性需要引入规范场  $A_\mu$ ，即

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad (148)$$

其中  $q$  是耦合常数，这种耦合形式称作**最小耦合假设**。如果规范场的变换服从如下形式

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x). \quad (149)$$

那么拉氏密度就可以做到定域 U(1) 变换不变。上面提到的规范场  $A_\mu$  就是电磁场，其激发出的粒子就是光子。

## 量子色动力学

量子色动力学被认为是正确描述强相互作用的理论。量子电动力学中讨论的是定域  $U(1)$  变换对称性，量子色动力学中要讨论的是定域  $SU(3)$  变换。味道  $f$  的夸克的拉氏密度（包括自由夸克场以及夸克-胶子相互作用）为

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}_f(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)q_f(x). \quad (150)$$

$q_f$  为颜色  $SU(3)$  的基础表示  $\begin{pmatrix} q_f^1 \\ q_f^2 \\ q_f^3 \end{pmatrix}$ ;  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$  是最小耦合假设的协变导数;  $m_f$  称为流夸克质量，是一个基本参数;

### Tip

需要注意，电磁相互作用的耦合常数  $q$  是随动量增加而增加的；但是强相互作用的耦合常数  $g$  是随动量增加而逐渐减少的，[具体讨论](#)可以看后文。这种耦合常数与能量尺度（或者距离尺度）有关的性质称为“耦合常数的跑动”。

$A_\mu = A_\mu^a t^a$  是胶子场，变换服从如下形式

$$A_\mu \rightarrow U(x)A_\mu U^\dagger(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x); \quad (151)$$

$t^a$  是  $SU(3)$  的生成元。类似协变电磁场张量，此处可以引入胶子场张量

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] := F_{\mu\nu}^a t^a. \\ F_{\mu\nu}^a &:= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \end{aligned} \quad (152)$$

于是量子色动力学的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}}_{\text{胶子场的拉氏密度}} + \underbrace{\sum_f \bar{q}_f(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)q_f(x)}_{\text{夸克的拉氏密度}}. \quad (153)$$

将  $F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$  展开（不给出展开结果），会发现其中包含四个项：

- 自由胶子项；
- 三胶子相互作用项；
- 四胶子相互作用项。

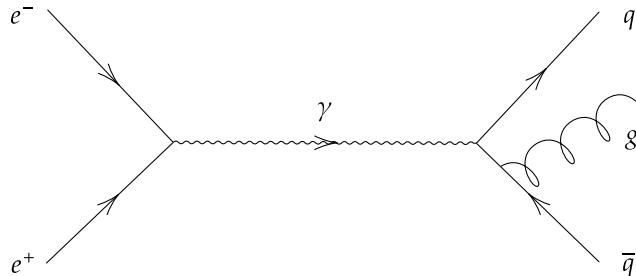
### Tip

胶子存在的直接实验证明：

如果胶子存在，理论上应该存在如下的过程

$$e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q} + g. \quad (154)$$

用费曼图可以表示为



可以看出来，最终的正反夸克和胶子会在漂移过程中全部强子化，形成三个方向的强子束流，所以称为三喷注实验。

如果实际观察到三个喷注，就证明了胶子的存在；反之则不存在。

## 渐近自由（高能性质）

只有非阿贝尔规范场才有渐进自由的性质。对于  $SU(3)$  非阿贝尔规范场，可以得到如下关系

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{\left(11 - \frac{2}{3}n_f\right) \ln \frac{\mu}{\Lambda}}. \quad (155)$$

其中  $\alpha_s = g^2/4\pi$ ，称为跑动耦合常数； $\mu$  是能标。可以看出这个式子其实就是描述耦合强度与能标的关系，其中  $\Lambda = 200$  MeV 称为 QCD 的基本标度参量。

上述结果只有在  $\mu \gg \Lambda$  时成立，在  $\gg 2$  GeV 能区适用，普遍规律是耦合常数随着能标增大而减小。

## 夸克禁闭（低能性质）

上面的讨论在低能时并不适用，目前还不能从第一性原理解释夸克禁闭。描述低能性质只能通过建立定性的唯象模型讨论

- 色流管模型

假设正反夸克间的色场主要集中分布在正反夸克之间的一个管子中，系统的总能量正比于色流管的长度，即

$$E(r) \propto \sigma r. \quad (156)$$

在夸克间距拉开一定程度的时候，色流管会断裂形成两个新的强子，这就是强衰变。估计的色流管能量密度为

$$\sigma \approx \frac{1 \text{ GeV}}{1 \text{ fm}} \approx 0.2 \text{ GeV}^2. \quad (157)$$

### ⚠ Warning

这里运用了  $1 \text{ fm} = 200 \text{ MeV}^{-1}$  的关系，来自于自然单位制，可以做适当补充。

色流管模型能够解释 Regge trajectories 现象，

#### ⓘ Note

Regge trajectories 现象：具有相同内部量子数，不同自旋的轻强子遵守角动量-质量平方关系，具体如下

$$J = \alpha_0 + \alpha' M^2. \quad (158)$$

其中  $\alpha' = 0.88 \text{ GeV}^{-2}$ 。

由于我们讨论的是轻夸克，忽略其质量，假设是一根长度为  $d$ 、端点以光速转动的弦。弦两头是无质量的正反夸克。这个系统的能量与角动量就是

$$M = \frac{1}{2}\pi\sigma d, \quad J = \frac{1}{8}\pi\sigma d^2. \quad (159)$$

所以此时的关系可以写成

$$J = \frac{1}{2\pi\sigma} M^2. \quad (160)$$

对比  $\alpha' = 0.88 \text{ GeV}^{-2}$ ，可以得到  $\sigma = 0.18 \text{ GeV}^2$ ，与之前的估算值很靠近。

- 非相对论势模型

假设价夸克在强子内部的运动是非相对论性质的，正反夸克之间的束缚势为

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \sigma r. \quad (161)$$

等号右侧第一项是夸克间胶子交换的类库伦势；后一项是人为引入的禁闭势。

- 格点 QCD

四维固体物理。

## 重味夸克

重味夸克包括粲夸克 ( $c$ )、底夸克 ( $b$ ) 以及顶夸克 ( $t$ )。

## 粲夸克

粲夸克的发现来源于**质子-核子散射过程中**  $J/\psi$  粒子的发现（或者是**正负电子散射过程**）。 $J/\psi$  粒子的主要物理参量如下

$$I^G J^{PC} = 0^- 1^{--}, \quad M = 3.097 \text{ GeV}, \quad \Gamma = 93.4 \text{ keV}, \quad \Gamma(e^+ e^-) = 5.26 \text{ keV}. \quad (162)$$

可以发现  $J/\psi$  粒子的衰变宽度尤其低，这是因为其主要衰变道  $3\pi$  被 OZI 规则严重压低，同时衰变到  $D\bar{D}$  的过程因为  $m_{J/\psi} < 2m_B$  禁戒（如果  $c\bar{c}$  体系能量高于两个  $D$  介子质量，其衰变道宽度将急剧增大）。

事实上  $J/\psi$  粒子是  $J = 1$  的  $c\bar{c}$  体系，用原子物理的记号表示就是  $J/\psi$  粒子是  $c\bar{c}$  体系的  $1s$  态。其中粲夸克  $c$  的质量在 1.5 GeV 附近。

## 底夸克

类似正负电子散射过程发现  $J/\psi$  粒子，将正负电子质心能量调高，可以发现一个新粒子  $\Upsilon$ 。 $\Upsilon$  与  $J/\psi$  类似，都表现出“重质量、窄宽度”的性质。因为主要衰变道  $B\bar{B}$  因为质量原因被禁戒以及**所有的强衰变道都是 OZI 禁戒过程而受到压低**。

$\Upsilon$  是正反底夸克  $b\bar{b}$  体系，底夸克质量在 4.6 GeV 左右。

## 顶夸克

顶夸克是在**质子-反质子对撞机**上被发现的。顶夸克质量为 175 GeV，其衰变宽度很大，所以寿命极短以至于**不能像粲夸克和底夸克那样形成重夸克偶素**。

💡 Tip

所以目前来说，夸克质量由小到大分别是

$$u \rightarrow d \rightarrow s \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow t. \quad (163)$$

$u, d, s$  的质量远小于  $c, b, t$ ，所以称为轻夸克。

## 重轻介子

- 标量  $D$  介子 (赝标量,  $J^P = 0^-$ )

粒子	组分	质量 (MeV)
$D^+$	$c\bar{d}$	1869
$D^0$	$c\bar{u}$	1864
$\bar{D}^0$	$u\bar{c}$	1864
$D^-$	$d\bar{c}$	1869
$D_s^+$	$c\bar{s}$	1968
$D_s^-$	$s\bar{c}$	1968

因为是最轻的**粲强子**，它们没有强衰变，只有  $\Delta C = 1$  的弱衰变，例如  $D_s^+ \rightarrow K^0 K^+$ ,  $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$  等。它们是质量最轻的带粲数的粒子因而寿命较长。

- 矢量  $D$  介子 ( $J^P = 1^-$ )

粒子	组分	质量 (MeV)
$D^{*+}$	$c\bar{d}$	2010
$D^{*0}$	$c\bar{u}$	2007
$\bar{D}^{*0}$	$u\bar{c}$	2007
$D^{*-}$	$d\bar{c}$	2010
$D_s^{*+}$	$c\bar{s}$	2112
$D_s^{*-}$	$s\bar{c}$	2112

- 标量  $B$  介子 (赝标量,  $J^P = 0^-$ )

粒子	组分	质量 (MeV)
$B^+$	$u\bar{b}$	5279
$B^0$	$d\bar{b}$	5279
$\bar{B}^0$	$b\bar{d}$	5279
$B^-$	$b\bar{u}$	5279
$B_s^0$	$s\bar{b}$	5368
$\bar{B}_s^0$	$b\bar{s}$	5368

**最轻的底强子。**它们没有强衰变，只有  $\Delta B = 1$  的弱衰变，例如  $B^0 \rightarrow D^-\pi^+$ ,  $B_s^0 \rightarrow D_s^-\pi^+$  等。它们是质量最轻的带底数的粒子因而寿命较长。

- 矢量  $B$  介子 ( $J^P = 1^-$ )

粒子	组分	质量 (MeV)
$B^{*+}$	$u\bar{b}$	5325
$B^{*0}$	$d\bar{b}$	5325
$\bar{B}^{*0}$	$b\bar{d}$	5325
$B^{*-}$	$b\bar{u}$	5325
$B_s^{*0}$	$s\bar{b}$	5413
$\bar{B}_s^{*0}$	$b\bar{s}$	5413

重味介子的性质在某些方面很像氢原子。主要的质量被重夸克（原子核）携带；轻夸克（电子）的质量很小，围绕重夸克高速旋转。同样地，类似于原子的性质主要依赖于电子的数量和能级轨道，重味介子的性质也主要依赖于轻夸克的性质而不是重夸克。

### 💡 Tip

这里不需要记忆，老师说过考试会给出。

## 重重介子

重重介子的例子是  $B_c^+(b\bar{c})$  和  $B_c^{*+}(b\bar{c})$ 。

双重夸克介子的特点是**两个组分重夸克都参加弱衰变**，因此衰变快，寿命相对较短。

## 强子的命名规则

现在首先给出六味夸克的重要量子数

夸克味道	同位旋 (I)	同位旋三分量	奇异数 (S)	粲数 (C)	底数 (B)	顶数 (T)	电荷 (Q)	重子数 (b)	组分质量
$u$	$1/2$	$1/2$	0	0	0	0	$2/3$	$1/3$	310
$d$	$1/2$	$-1/2$	0	0	0	0	$-1/3$	$1/3$	310
$s$	0	0	$-1$	0	0	0	$-1/3$	$1/3$	500
$c$	0	0	0	1	0	0	$2/3$	$1/3$	1600
$b$	0	0	0	0	$-1$	0	$-1/3$	$1/3$	4600
$t$	0	0	0	0	0	1	$2/3$	$1/3$	175000

它们全部满足 Gellmann - 西岛关系：

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(b + S + C + B + T). \quad (164)$$

之前讨论的夸克模型建立在  $SU(3)$  对称性上，现在将其扩展到  $SU(5)$ ，即额外考虑  $c, b$  夸克。此时做出如下约定：**同一个味道越多重态的自旋、宇称、C 变换因子相同。**

### ♀ Tip

不考虑  $t$  夸克是因为其衰变道太宽了。

正反夸克体系（介子）中，有如下特点

- 赝标量介子以及矢量介子分别是正反夸克体系单态 ( $J = 0$ ) 和三重态 ( $J = 1$ ) 的基态；
- 不同轨道角动量可能给出相同的  $J^{PC}$ ，这意味着**之前提到的味道混合**可能不只于 1 和 8 之间。

## 介子的命名规则

在这里尤为特殊的是  $D$  夸克，因为粲夸克的粲数是 1，所以  $C = +1$  时是包含粲夸克而不是反粲夸克。

量子数	粒子	夸克组成
$S = +1$	$K^+, K^0, K^{*+}, K^{*0}$	一个反奇异夸克
$S = -1$	$K^-, \bar{K}^0, K^{*-}, \bar{K}^{*0}$	一个奇异夸克
$C = +1$	$D^+, D^0, D^{*+}, D^{*0}$	一个粲夸克
$C = -1$	$D^-, \bar{D}^0, D^{*-}, \bar{D}^{*0}$	一个反粲夸克
$B = +1$	$B^+, B^0, B^{*+}, B^{*0}$	一个反底夸克
$B = -1$	$B^-, \bar{B}^0, B^{*-}, \bar{B}^{*0}$	一个底夸克
$C = +1, S = +1$	$D_s^+, D_s^{*+}$	$c\bar{s}$
$C = -1, S = -1$	$D_s^-, D_s^{*-}$	$\bar{c}s$
$B = +1, C = +1$	$B_c^+, B_c^{*+}$	$c\bar{b}$

## 重子的命名规则

注意，在这里上标表示带了多少个元电荷，例如  $++$  表示带电量为  $+2$ （自然单位制）， $-$  表示带电量为  $-1$ 。

$u/d$ 夸克数量	量子数或特征	命名规则	示例（夸克组成）
3 个 $u/d$	自旋二重态: $S = \frac{1}{2}$	记为 $N$	如 $p(uud), n(udd)$
	自旋四重态: $S = \frac{3}{2}$	记为 $\Delta$	如 $\Delta^{++}(uuu), \Delta^0(udd)$
2 个 $u/d$	同位旋单态: $I = 0$ 或者 <b>夸克组分以 <math>ud</math> 开头</b>	记为 $\Lambda$	$\Lambda_c^+(udc), \Lambda_b^0(udb)$
	同位旋三重态: $I = 1$ 或者 <b>夸克组分以 <math>uu</math> 开头</b>	记为 $\Sigma$	$\Sigma_c^{++}(uuc), \Sigma_b^+(uub)$
1 个 $u/d$	含一个奇异夸克 $s$ 或者 <b>夸克组分以 <math>us</math> 开头</b>	记为 $\Xi$	$\Xi_c^+(usc), \Xi_b^0(usb)$
	含两个相同重夸克 ( $cc$ 或 $bb$ )	记为 $\Xi$ 并加双下标	$\Xi_{cc}^{++}(ucc), \Xi_{bb}^-(dbb)$
0 个 $u/d$	必定含 $s$ ，下标确定其余是 $c$ 或 $b$ 夸克	记为 $\Omega$	$\Omega_c^0(ssc), \Omega_{cc}^+(scc), \Omega_{ccc}^{++}(ccc)$

## 奇特强子

如果一个**强子态不能通过夸克模型描述**，那么这个强子就成为奇特态。正反玻色子组成的奇特态的量子数一般为

$$J^{PC} = \text{even}^{+-} \text{ and odd}^{-+}. \quad (165)$$

如果这种量子数的介子真的存在，那么它有可能是

- 四夸克态：两个正反夸克对；

- 混杂质：一个正反夸克对和一个胶子；
- 胶球：胶子构成的束缚态。

① Note

在这里略微介绍一下胶球

两个胶子构成的系统总角动量不能为 1，或者说

$$L + S = \text{even.} \quad (166)$$

# 弱相互作用以及电弱统一理论

弱衰变具有三种形式：

- 纯轻子衰变：末态只有轻子；
- 半轻子衰变：末态既有轻子又有强子；
- 非轻子衰变：初末态都是强子。

这些过程都伴随着味道改变，其中奇异粒子的弱衰变主要表现在奇异数改变 1。这些衰变的共同特点是

1. 粒子寿命长；
2. 作用力程短；
3. 衰变中伴随着粒子类型的改变。

## Cabibbo 理论

Cabibbo 做出了两个假设

- 强子流遵循  $SU(3)$  变换，具体形式为

$$J_\mu^- = \cos \theta_c J_\mu^{-, \Delta S=0} + \sin \theta_c J_\mu^{-, \Delta S=1} \quad (167)$$

等号右侧第一个因子描述的是半轻子的、奇异数不改变的过程，第二个因子描述的是半轻子的、奇异数改变的过程。两者不能用相同的有效理论来描述，两者的耦合常数与  $\mu$  衰变过程耦合常数之间的关系为

$$\frac{G_\beta}{G_\mu} \approx 0.98, \quad \frac{G'}{G_\mu} \approx 0.2. \quad (168)$$

- 各类弱相互作用具有同一的弱耦合常数，据此有一个结论

$$\cos \theta_c = G_\beta / G_\mu = 0.977, \quad \sin \theta_c = 0.21. \quad (169)$$

其中  $\theta_c$  就称为 Cabibbo 角。

因此在夸克层次上可以将弱作用本征态定义为

$$d' = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c. \quad (170)$$

## GIM 机制

在 Cabibbo 理论中，只有  $d'$  参与带电流，而正交态

$$s' = -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c. \quad (171)$$

未参与弱相互作用，这就导致了味道改变中性流的出现，预言了不存在的衰变过程（例如  $K^+ \rightarrow \pi^+ + l^+ + l^-$ ）。此时带电流和中性流变为

- 带电流： $J_\mu^- = [\bar{u} \quad \bar{c}] \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \begin{bmatrix} d' \\ s' \end{bmatrix}$ ；
- 中性流： $J_\mu^0 = \bar{u}u + \bar{c}c + \bar{d}d + \bar{s}s$ ，不再存在味道改变中性流。

### Important

味道改变中性流在弱相互作用低能有效理论框架下不出现。但是在标准模型框架下，味道改变中性流可以在弱相互作用的圈图贡献中出现，只是被严重压低。

## 中间玻色子理论

费米弱作用理论基于点相互作用（四费米子耦合），在低能下是良好近似，但在高能下存在严重问题：

1. 幺正性破坏：对于散射过程  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_3 + \mu^-$  这个过程中，四费米子有效理论给出的截面与质心系能量平方  $s$  之间的关系为

$$\sigma_t = \frac{G_F^2}{\pi} s. \quad (172)$$

显然  $s \rightarrow \infty$  的时候截面发散。

2. 费米常数的量纲为  $[M]^{-2}$ ，不可重整化，不是一个普适的理论。

可以这样认为：低能时空间分辨率较差，所以可以认为相互作用在一个点处发生；高能时空间分辨率变好，不能认为相互作用位置为一个点。这个时候就需要引入矢量玻色子作为弱相互作用的媒介粒子（类似电磁相互作用中的光子）。

在低能极限下，中间玻色子理论可以带来如下结果

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \quad (173)$$

#### ① Note

##### Yukawa 理论

类似电磁相互作用的 Coulomb 势，可以提出媒介粒子有质量  $m$  时的 Yukawa 势

$$V = -\frac{\alpha}{r} e^{-mr} \quad (174)$$

如果媒介粒子很重，上式可以近似为  $-\frac{4\pi\alpha_w}{m_W^2} \delta^2(\vec{r})$ ，即近似为点相互作用。实验上测量出  $W$  玻色子质量之后，可以得到  $\alpha_w \sim 1/137$ ，即和电磁相互作用耦合常数很接近。

$W$  玻色子质量极大，这也解释了为什么弱相互作用力程极短。

从电磁理论和中间玻色子理论的对比来看，电磁相互作用和弱相互作用的机理很相似——都是流场相互作用。电磁相互作用是规范相互作用，电荷的普适性和可重整性都与此分不开；弱相互作用也有普适性，也可能是一种规范相互作用。如果更进一步假设电磁相互作用和弱相互作用有共同的起源，可以统一地描述为同一种相互作用。

## 电弱统一规范理论的建立

实验发现弱作用具有手征性：只有左手费米子参与带电弱流。因此将左手场组织成弱同位旋二重态；右手场是弱同位旋单态。为了同时包含电磁  $U(1)_{EM}$ ，Glashow 提出  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  对称性，其中

- $SU(2)_L$ : 仅对左手二重态进行变换；
- $U(1)_Y$ : 对左手和右手场都进行变换，但赋予不同的弱超荷。

此时理论是手征的、规范不变的，但所有粒子（包括费米子和规范玻色子）都无质量。为了解决质量问题，又引入了对称性自发破缺与希格斯机制。