2025 年 9 月 25 号

请使用国际单位制中的基本单位表示能量密度和压强在国际单位制中的单位，并推导在以 MeV 为基础单位的自然单位制中，他们的单位是什么

考虑如下公式

$$\begin{aligned} F = ma &\to \mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}, \\ E = Fx &\to J = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}. \end{aligned} \tag{1}$$

综上，可以推出

$$\begin{aligned} \rho_E = \frac{E}{V} &\to \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}, \\ P = \frac{F}{S} &\to \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}. \end{aligned} \tag{2}$$

所谓的以 MeV 为基础单位的自然单位制中，就是令 $c = \hbar = k_B = 1$ ，则有

$$\begin{aligned} v = \frac{L}{T} &\to \mathrm{m} = \mathrm{s}, \\ E = \hbar\omega &\to \mathrm{MeV} = \mathrm{s}^{-1}, \\ E = m_0c^2 &\to \mathrm{MeV} = \mathrm{kg}. \end{aligned} \tag{3}$$

综上可以得出

$$\begin{aligned} \mathrm{MeV} = \mathrm{s}^{-1} &= \mathrm{m}^{-1} = \mathrm{kg}, \\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2} &= \mathrm{MeV}^4. \end{aligned} \tag{4}$$

最后可以得到这两个物理量的量纲都是

$$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}(\text{国际单位}), \quad \mathrm{MeV}^4(\text{自然单位}). \tag{5}$$

判断集合 $G = \{1, -1\}$ 在普通数的乘法下是否能构成一个群

存在恒等操作：

$$1\times 1 = 1, \ -1\times 1 = -1. \tag{6}$$

存在逆元素

$$1\times 1 = 1, \ -1\times -1 = 1. \tag{7}$$

操作是封闭的

$$1\times 1 \in G, \ 1\times -1 \in G, \ -1\times 1 \in G, \ -1\times -1 \in G. \tag{8}$$

结合律显然成立，因为元素都是实数。所以能构成一个群。

> ⚠ **Warning**
>
> 批改意见：
>
> 1. 几乎是所有同学在使用列举证明封闭性时，漏掉 -1×1 ；证明恒元时，也只有 $gI = g$ 。可能是大家默认乘法的交换律是满足的就没有写，但是并不是所有群都是阿贝尔群（即满足交换律的群），为了防止大家忽略这一点这里统一说明
> 2. 列举不充分，如在逆元的证明中，只考虑了 -1 的逆元，在单位元证明时只考虑其中一个，在封闭性的证明中只考虑了 1×-1 ，没有考虑自身相乘
> 3. 有同学在结合律的证明时，说是因为只有两个元素，这个是不对的，比如我定义一个 a, b 构造他们的运算是

> $aa=b,ab=a,ba=a,bb=a,$, 此时$a(ab)=b,(aa)b=a$, 另外，实数乘法本身就满足结合律是可以用来进行此题证明，不需要举例

2025 年 9 月 30 号

计算三维实空间平移群的生成元

在函数空间上的微分算子表示

考虑位置矢量 $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 被空间平移操作 $\hat{X}(\vec{r}_1)$ ，于是有

$$\vec{r}'=\hat{x}(\vec{r}_1)\vec{r}_0=\vec{r}_0-\vec{r}_1=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1). \tag{9}$$

或者可以写成

$$\begin{aligned} x'&=f_x(x_0,x_1)=x_0-x_1,\\ y'&=f_x(y_0,y_1)=y_0-y_1,\\ z'&=f_z(z_0,z_1)=z_0-z_1. \end{aligned} \tag{10}$$

于是有

$$\begin{aligned} U^{x_0}_{x_1}&=-1,U^{x_0}_{y_1}=0,U^{x_0}_{z_1}=0,\\ U^{y_0}_{x_1}&=0,U^{y_0}_{y_1}=-1,U^{y_0}_{z_1}=0,\\ U^{z_0}_{x_1}&=0,U^{z_0}_{y_1}=0,U^{z_0}_{z_1}=-1. \end{aligned} \tag{11}$$

最后可以计算出三维实空间平移群在函数空间上的微分算子表示

$$\begin{aligned} G_{x_1}&=U^{x_0}_{x_1}\frac{\partial}{\partial x_0}+U^{y_0}_{x_1}\frac{\partial}{\partial y_0}+U^{z_0}_{x_1}\frac{\partial}{\partial z_0}=-\frac{\partial}{\partial x_0},\\ G_{y_1}&=U^{x_0}_{y_1}\frac{\partial}{\partial x_0}+U^{y_0}_{y_1}\frac{\partial}{\partial y_0}+U^{z_0}_{y_1}\frac{\partial}{\partial z_0}=-\frac{\partial}{\partial y_0},\\ G_{z_1}&=U^{x_0}_{z_1}\frac{\partial}{\partial x_0}+U^{y_0}_{z_1}\frac{\partial}{\partial y_0}+U^{z_0}_{z_1}\frac{\partial}{\partial z_0}=-\frac{\partial}{\partial z_0}. \end{aligned} \tag{12}$$

李代数生成元

根据之前的结果，我们能推出平移矩阵

$$\hat{x}(\vec{r}_1)=\begin{pmatrix}1&0&0&-x_1\\0&1&0&-y_1\\0&0&1&-z_1\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{13}$$

做无穷小平移的时候，矩阵变为

$$\begin{gathered} \hat{x}(\delta\vec{r}_1)=\begin{pmatrix}1&0&0&-\delta x_1\\0&1&0&-\delta y_1\\0&0&1&-\delta z_1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\\ I_{4\times4}+\delta x_1\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\delta y_1\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\delta z_1\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{14}$$

所以李代数生成元有三个，分别是

$$\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{15}$$

在 Hilbert 空间上的幺正表示

考虑位移算符 $\hat{R}$ 作用在波函数 $|\psi\rangle$ 上，应该是

$$|\psi'\rangle = \hat{R}\,|\psi\rangle, \tag{16}$$

将其在位置表象下展开，会有

$$\int_{\vec{r}} |\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\psi'\rangle \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}} |\vec{r}\rangle \langle\vec{r}|\hat{R}\,|\psi\rangle \mathrm{d}\vec{r}, \tag{17}$$

可以得到

$$\langle\vec{r}|\psi'\rangle = \langle\vec{r}|\hat{R}\,|\psi\rangle = \left\langle\vec{r}-\vec{R}\middle|\psi\right\rangle, \tag{18}$$

此时位移算符 $\hat{R}$ 作用在左矢上，改成波函数的写法就是

$$\hat{R}\,|\psi\rangle = \psi'(\vec{r}) = \psi(\vec{r}-\vec{R}). \tag{19}$$

在无穷小变换的时候可以将 $\psi(\vec{r}-\vec{R})$ 对 $\vec{R}$ 在 $\vec{R}=\vec{0}$ 处泰勒展开，也就是

$$\hat{R}\,|\psi\rangle = \psi(\vec{r}) + \nabla_{\vec{R}}\psi(\vec{r}-\vec{R})|_{\vec{R}=\vec{0}} \cdot \delta\vec{R} = \psi(\vec{r}) - \nabla\psi(\vec{r})\cdot\delta\vec{R} = \left[1-\delta\vec{R}\cdot\nabla\right]\psi(\vec{r}). \tag{20}$$

于是可以得到 Hilbert 空间上的幺正表示 $1-\delta\vec{R}\cdot\nabla$ 。

解毕。

2025 年 10 月 27 号

先证明三维角动量算符构成一个李代数，再求出这个李代数的卡西米尔算符

考虑三维空间中的转动，绕 x, y, z 分别转动的转动矩阵为

$$\begin{gathered}\hat{U}(\theta_x)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x\end{bmatrix}, \hat{U}(\theta_y)=\begin{bmatrix}\cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y\end{bmatrix},\\ \hat{U}(\theta_z)=\begin{bmatrix}\cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0\\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{21}$$

注意在这里，$U(\theta_y)$ 副对角线上符号相反是为了保证右手螺旋定则。对上面的旋转矩阵取无限小变化，就可以得到转动群 $\mathrm{SO}(3)$ 的生成元（角动量），就是

$$\hat{J}_x=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \hat{J}_y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}, \hat{J}_z=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{22}$$

现在开始逐一验证对易关系，也就是

$$\begin{gathered}\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right]=\hat{J}_x\hat{J}_y-\hat{J}_y\hat{J}_x\\ =\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ =\hat{J}_z.\\ \cdots\end{gathered} \tag{23}$$

最终可以归纳出满足如下对易关系

$$\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right]=\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k. \tag{24}$$

如果三维角动量算符构成的李代数，结构常数 $C_{ij}^k=\varepsilon_{ijk}$ ，不难验证

$$\varepsilon_{ijl}\varepsilon_{lkp}+\varepsilon_{kil}\varepsilon_{ljp}+\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lip}=\delta_{ik}\delta_{jp}-\delta_{ip}\delta_{jk}+\delta_{kj}\delta_{ip}-\delta_{kp}\delta_{ij}+\delta_{ji}\delta_{kp}-\delta_{jp}\delta_{ki}=0. \tag{25}$$

显然此时 Jacobi 恒等式满足，所以三维角动量算符构成一个李代数得证。

卡西米尔算符可以构造为

$$\begin{gathered}\hat{C}_\lambda=g_{\mu\nu}\hat{J}^\mu\hat{J}^\nu=g_{xy}\hat{J}_x\hat{J}_y+g_{yx}\hat{J}_y\hat{J}_x+g_{yz}\hat{J}_y\hat{J}_z+g_{zy}\hat{J}_z\hat{J}_y+g_{xz}\hat{J}_x\hat{J}_z+g_{zx}\hat{J}_z\hat{J}_x\\ +g_{xx}\hat{J}_x\hat{J}_x+g_{yy}\hat{J}_y\hat{J}_y+g_{zz}\hat{J}_z\hat{J}_z.\end{gathered} \tag{26}$$

其中 $g_{\mu\nu}=\sum_{\tau\rho}\varepsilon_{\mu\tau\rho}\varepsilon_{\nu\rho\tau}=\sum_{\tau\rho}-\varepsilon_{\mu\tau\rho}\varepsilon_{\nu\tau\rho}=-2\delta_{\mu\nu}$ ，所以带入有

$$\hat{C}_\lambda=-2\hat{J}_x\hat{J}_x-2\hat{J}_y\hat{J}_y-2\hat{J}_z\hat{J}_z=-2\hat{J}^2. \tag{27}$$

所以这个李代数的卡西米尔算符就是 $\hat{J}^2$ 。

推导旋转群的克莱因表示

考虑 $\mathrm{SU}(2)$ 群，其元素 U 应该满足

$$U^\dagger U=1, \det U=1. \tag{28}$$

于是可以假设其具体形式为

$$U=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}. \tag{29}$$

显然其应该满足

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^\dagger\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=1\\ \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}a^*a+c^*c=1\\ b^*b+d^*d=1\\ a^*b+c^*d=1\end{cases}\\ ad-cb=1\end{cases}\\ &\Rightarrow -\frac{aa^*b}{c^*}-cb=-\frac{b}{c^*}(aa^*+cc^*)=1\\ &\Rightarrow -\frac{b}{c^*}=1\Rightarrow b=-c^*\quad\text{and}\quad d=a^*.\end{aligned} \tag{30}$$

于是其具体形式可以化简为

$$U=\begin{bmatrix}a & b\\ -b^* & a^*\end{bmatrix}. \tag{31}$$

满足 $|a|^2+|b|^2=1$ 。所以 a,b 是 Cayley-Klein 参数，这就是旋转矩阵的 Cayley-Klein 表示。

2025 年 11 月 8 日

n 为粒子数算符，$|\phi\rangle$ 为粒子态，计算 $n_i|\phi_j\rangle$

$$|\phi_j\rangle = a_j^\dagger |0\rangle \Rightarrow n_i |\phi_j\rangle = n_i a_j^\dagger |0\rangle. \tag{32}$$

考虑对易关系（费米子玻色子均成立）

$$\left[n_i, a_j^\dagger\right] = n_i a_j^\dagger - a_j^\dagger n_i = a_j^\dagger \delta_{ij}. \tag{33}$$

代入，最终可以化简为

$$\begin{gathered} n_i |\phi_j\rangle = a_j^\dagger n_i |0\rangle + a_j^\dagger \delta_{ij} |0\rangle = \delta_{ij} a_j^\dagger |0\rangle = \delta_{ij} |\phi_j\rangle, \\ n_i |\phi_j\rangle = \delta_{ij} |\phi_j\rangle. \end{gathered} \tag{34}$$

将上面的 i, j 替换为描述粒子位置的 x, x'，即 $|\phi(x)\rangle = a^\dagger(x) |0\rangle$，定义总粒子数算符为 $N = \int n(x)\, dx$，计算 $[a^\dagger(x), N]$。

考虑

$$n(x') = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x'}. \tag{35}$$

已知

$$\begin{gathered} n(x') |\phi(x)\rangle = \delta_{x'x} |\phi(x)\rangle = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x'} |\phi(x)\rangle, \\ \Rightarrow \int_{x'} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x'} |\phi(x)\rangle \mathrm{d}x' = \int_{x'} \delta(x' - x) |\phi(x)\rangle \mathrm{d}x', \\ \Rightarrow N |\phi(x)\rangle = |\phi(x)\rangle. \end{gathered} \tag{36}$$

考虑

$$\begin{gathered} [a^\dagger(x), N] |\phi(x')\rangle = a^\dagger(x) N |\phi(x')\rangle - N a^\dagger(x) |\phi(x')\rangle \\ = a^\dagger(x) |\phi(x')\rangle - 2a^\dagger(x) |\phi(x')\rangle = -a^\dagger(x) |\phi(x')\rangle, \\ \Rightarrow [a^\dagger(x), N] = -a^\dagger(x). \end{gathered} \tag{37}$$

这里有一步需要注意，波函数不能选择 $|\phi(x)\rangle$，这是因为在下面这里可能很容易混淆

$$\begin{gathered} [a^\dagger(x), N] |\phi(x)\rangle = a^\dagger(x) N |\phi(x)\rangle - N a^\dagger(x) |\phi(x)\rangle \\ = a^\dagger(x) |\phi(x)\rangle - 2a^\dagger(x) |\phi(x)\rangle = \begin{cases} 0, & \text{费米子} \\ -aa^\dagger(x) |\phi(x)\rangle, & \text{玻色子} \end{cases} \end{gathered} \tag{38}$$

这里的讨论可能有点令人困惑，但是如果我们作用的波函数选择为 $|\phi(x')\rangle$ 就不会有这种问题。

2025 年 11 月 21 日

证明矢量球谐函数 $\vec{Y}_{0,0,1}(\Omega)=-\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\vec{e}_r$ 。

根据定义有

$$\vec{Y}_{lm_l,\lambda}(\Omega)=\sum_{m_\lambda,\mu}\langle\lambda,1,m_\lambda,\mu|lm_l\rangle Y_{\lambda m_\lambda}(\Omega)\vec{e}_\mu. \tag{39}$$

于是有

$$\begin{aligned}\vec{Y}_{001}(\Omega)&=\langle 1,1,0,0|00\rangle Y_{10}(\Omega)\vec{e}_0+\langle 1,1,-1,1|00\rangle Y_{1-1}(\Omega)\vec{e}_1+\langle 1,1,1,-1|00\rangle Y_{11}(\Omega)\vec{e}_{-1}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}(\Omega)\vec{e}_0-\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{1-1}(\Omega)\vec{e}_1-\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{11}(\Omega)\vec{e}_{-1}.\end{aligned} \tag{40}$$

~~上式第二步是因为横场条件要求了不能存在在含有 $\vec{e}_0$ 的项~~（好吧我发现其实不能去掉这一项）。将球谐函数以及球分量的具体形式代入上式，可以得到

$$\begin{aligned}\vec{Y}_{001}(\Omega)&=-\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\cos\theta\vec{z}-\sqrt{\frac{1}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{x}+\mathrm{i}\vec{y})-\sqrt{\frac{1}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{x}-\mathrm{i}\vec{y})\\&=-\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\cos\theta\vec{z}-\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sin\theta\cos\phi\vec{x}-\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sin\theta\sin\phi\vec{y}.\end{aligned} \tag{41}$$

考虑 $\vec{x}=\vec{e}_r\sin\theta\cos\phi,\ \vec{y}=\vec{e}_r\sin\theta\sin\phi,\ \vec{z}=\vec{e}_r\cos\theta$ ，所以有

$$\begin{aligned}\vec{Y}_{001}(\Omega)&=-\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\cos^2\theta\vec{e}_r-\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sin^2\theta\cos^2\phi\vec{e}_r-\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sin^2\theta\sin^2\phi\vec{e}_r\\&=-\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\vec{e}_r.\end{aligned} \tag{42}$$

证毕。

证明在原点附近，磁多极场 $\vec{A}_{l,m}(r,t,M)=\vec{A}_{l,m}(r,M)e^{-\mathrm{i}\omega t}$ 产生的电场远小于它产生的磁场。

有

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},\mathrm{M})&=\frac{\vec{A}_{l,m}(r,\mathrm{M})}{c}\partial_t e^{-\mathrm{i}\omega t}=-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\vec{A}_{l,m}(r,t,\mathrm{M}),\\\vec{H}(\vec{r},\mathrm{M})&=\nabla\times\vec{A}_{l,m}(r,t,\mathrm{M})=\mathrm{i}k\vec{A}_{l,m}(r,t,\mathrm{E}).\end{aligned} \tag{43}$$

在源的附近，有 $kr\ll 1$ ，球贝塞尔函数可以近似为：

$$j_l(kr)\to\frac{(kr)^l}{(2l+1)!!}. \tag{44}$$

我们现在观察电多级矢势场与磁多级矢势场的具体形式

$$\begin{aligned}\vec{A}_{lm}(\vec{r};\mathrm{M})&=j_l(kr)\vec{Y}_{lm,l}(\Omega)=\frac{1}{\hbar\sqrt{l(l+1)}}\hat{\vec{L}}j_l(kr)Y_{lm}(\Omega),\\\vec{A}_{lm}(\vec{r};\mathrm{E})&=\boxed{\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}j_{l-1}(kr)\vec{Y}_{lm,l-1}(\Omega)}-\sqrt{\frac{l}{2l+1}}j_{l+1}(kr)\vec{Y}_{lm,l+1}(\Omega).\end{aligned} \tag{45}$$

不难发现，电多极矢势场中有 j_{l-1} 的项，说明存在

$$\left|\vec{A}_{lm}(\vec{r};\mathrm{E})\right| \gg \left|\vec{A}_{lm}(\vec{r};\mathrm{M})\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{H}(\vec{r};\mathrm{M})\right| \gg \left|\vec{E}(\vec{r};\mathrm{M})\right|. \tag{46}$$

证毕。

如果核的初末态 J^P 分别为 1^- 和 3^+ ，则可能会发生哪些类型的光核跃迁反应?

首先根据角动量的三角形法则确定允许的角动量量子数为

$$J = |J_\mathrm{i} - J_\mathrm{f}|, \cdots, J_\mathrm{i} + J_\mathrm{f} = 2, 3, 4. \tag{47}$$

总宇称总是要求为 $+$ ，但是初末态的宇称为 $-$ ，所以应该要求

- $\mathrm{E}l$ 跃迁：宇称为 $(-)^l = -$ ，允许的状态为 $\mathrm{E3}$ 。
- $\mathrm{M}l$ 跃迁：宇称为 $(-)^{l+1} = -$ ，允许的状态为 $\mathrm{M2}$, $\mathrm{M4}$ 。

2025 年 12 月 6 日

Problem 1.

证明如果核的初末态分别是 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$，电荷密度算符是 $\hat{\rho}(\mathbf{r})$，则在光核反应中，光子的跃迁矩阵元是

$$M_{\beta\alpha}(k\mu;\mathrm{E}l) = -\mathrm{i}^l c\sqrt{\frac{2\pi(2l+1)(l+1)}{l}}\int\langle\beta|\hat{\rho}(\mathbf{r})|\alpha\rangle j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)\mathrm{d}^3r. \tag{48}$$

首先列出如下必须的前提条件：

- 矢量平面波的多级展开

$$\vec{e}_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{r}} = -\mathrm{i}^l\mu\sqrt{2\pi}\sum_l\sqrt{2l+1}\left[\vec{A}_{l\mu}(\vec{r};\mathrm{M})+\mathrm{i}\mu\vec{A}_{l\mu}(\vec{r},\mathrm{E})\right]. \tag{49}$$

- 电多级场的近似表示

  电多级场的具体形式

$$\vec{A}_{lm}(\vec{r};\mathrm{E}) = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}j_{l-1}(kr)\vec{Y}_{lm,l-1}(\Omega) - \sqrt{\frac{l}{2l+1}}j_{l+1}(kr)\vec{Y}_{lm,l+1}(\Omega). \tag{50}$$

  假设 $kR \ll 1$，利用球贝塞尔函数的近似 $j_l(kr)\approx\frac{(kr)^l}{(2l+1)!!}$， $\frac{j_{l+1}(kr)}{j_{l-1}(kr)}\approx\frac{(kr)^2}{(2l+1)(2l+3)}\ll 1$，不难发现电多级场的形式可以化简为

$$\vec{A}_{l\mu}(\vec{r};\mathrm{E}) = \sqrt{\frac{l+1}{l}}\frac{1}{k}\nabla\left[j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)\right]. \tag{51}$$

- 连续性方程

$$-\frac{i}{\hbar}(E_\alpha - E_\beta)\langle\beta^S|\hat{\rho}^S(\vec{r})|\alpha^S\rangle + \nabla\cdot\langle\beta^S|\hat{\vec{j}}^S(\vec{r})|\alpha^S\rangle = 0. \tag{52}$$

跃迁矩阵元的定义为：

$$M_{\beta\alpha}(\vec{k}\mu) := \int\langle\beta|\hat{j(\vec{r})}\,|\alpha\rangle\vec{e}_\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{r}}. \tag{53}$$

代入矢量平面波的多级展开的结果

$$M_{\beta\alpha}(\vec{k}\mu) := -\mu\sqrt{2\pi}\sum_l\mathrm{i}^l\sqrt{2l+1}\int\langle\beta|\hat{j(\vec{r})}\,|\alpha\rangle\left[\vec{A}_{l\mu}(\vec{r};\mathrm{M})+\mathrm{i}\mu\vec{A}_{l\mu}(\vec{r},\mathrm{E})\right]\cdot\mathrm{d}^3r. \tag{54}$$

对于具有角动量 l 的电多级跃迁，上面的结果只保留 $\mathrm{i}\mu\vec{A}_{l\mu}(\vec{r},\mathrm{E})$ 项，即

$$\begin{aligned}M_{\beta\alpha}(\vec{k}\mu;\mathrm{E}l) &:= -\mu^2\sqrt{2\pi}\mathrm{i}^{l+1}\sqrt{2l+1}\int\langle\beta|\hat{j(\vec{r})}\,|\alpha\rangle\vec{A}_{l\mu}(\vec{r},\mathrm{E})\cdot\mathrm{d}^3r\\ &= -\sqrt{2\pi}\mathrm{i}^{l+1}\sqrt{2l+1}\int\langle\beta|\hat{j(\vec{r})}\,|\alpha\rangle\vec{A}_{l\mu}(\vec{r},\mathrm{E})\cdot\mathrm{d}^3r.\end{aligned} \tag{55}$$

代入电多级场的近似表示，有

$$\begin{aligned}M_{\beta\alpha}(\vec{k}\mu;\mathrm{E}l) &\approx -\frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{i}^{l+1}}{k}\sqrt{\frac{(2l+1)(l+1)}{l}}\cdot\int\langle\beta|\hat{\vec{j}}(\vec{r})\,|\alpha\rangle\cdot\nabla\left(j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)\right)\cdot\mathrm{d}^3r\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{i}^{l+1}}{k}\sqrt{\frac{(2l+1)(l+1)}{l}}\int\nabla\cdot\langle\beta|\hat{\vec{j}}(\vec{r})\,|\alpha\rangle j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)\cdot\mathrm{d}^3r\end{aligned} \tag{56}$$

由于核电流分布范围有限，表面项消失。现在，根据连续性方程：

$$\begin{aligned} M_{\beta\alpha}(\vec{k}\mu;\mathrm{E}l) &\approx \frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{i}^{l+1}}{k}\sqrt{\frac{(2l+1)(l+1)}{l}}\cdot\int\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(E_\alpha-E_\beta)\left\langle\beta\right|\hat{\rho}(\vec{r})\left|\alpha\right\rangle j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)\cdot\mathrm{d}^3r \\ &= \pm\sqrt{2\pi}\mathrm{i}^l c\sqrt{\frac{(2l+1)(l+1)}{l}}\cdot\int\left\langle\beta\right|\hat{\rho}(\vec{r})\left|\alpha\right\rangle j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)\cdot\mathrm{d}^3r. \end{aligned} \tag{57}$$

光核反应是指**光子与原子核相互作用并引发核结构改变或核反应的过程**，因此对应吸收光子，所以就是

$$M_{\beta\alpha}(\vec{k}\mu;\mathrm{E}l) = -\sqrt{2\pi}\mathrm{i}^l c\sqrt{\frac{(2l+1)(l+1)}{l}}\cdot\int\left\langle\beta\right|\hat{\rho}(\vec{r})\left|\alpha\right\rangle j_l(kr)Y_{l\mu}(\Omega)\cdot\mathrm{d}^3r. \tag{58}$$

Problem 2.

由方程

$$R(\theta,\phi,t) = R_0\left[1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a^*_{\lambda\mu}(t)Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\right] \tag{59}$$

出发，根据半径的实数性 $R^*(\theta,\phi,t)=R(\theta,\phi,t)$ 和球谐函数的复共轭性质 $Y^*_{\lambda\mu}(\theta\varphi)=(-1)^\mu Y_{\lambda,-\mu}(\theta,\varphi)$ ，证明集体坐标 $a_{\lambda\mu}$ 的复共轭性质

$$a^*_{\lambda\mu} = (-1)^\mu a_{\lambda-\mu} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} &R^*(\theta,\phi,t) = R(\theta,\phi,t) \\ \Rightarrow R_0&\left[1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a^*_{\lambda\mu}(t)Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\right] = R_0\left[1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}(a^*_{\lambda\mu})^*Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)\right] \\ &\Rightarrow \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a^*_{\lambda\mu}(t)Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}(a^*_{\lambda\mu})^*Y^*_{\lambda\mu}(\theta,\varphi) \\ &\Rightarrow \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a^*_{\lambda\mu}(t)Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}(a^*_{\lambda\mu})^*(-)^\mu Y_{\lambda-\mu}(\theta,\varphi) \\ &\Rightarrow \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}a^*_{\lambda\mu}(t)Y_{\lambda\mu}(\theta,\varphi) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda}a_{\lambda-\mu'}(-)^{-\mu'}Y_{\lambda\mu'}(\theta,\varphi) \end{aligned} \tag{61}$$

显然有

$$(-)^\mu a_{\lambda-\mu} = a^*_{\lambda\mu} \tag{62}$$

2025 年 12 月 20 日

Problem 1.

判断下面说法是否正确：

1. 对称能是由于质子数与中子数相等引起的
2. 集体坐标的共轭动量是球张量

回答

1. 不是，半经验公式中

$$\begin{gathered}(A) = a_{\text{vol}}A + a_{\text{surf}}A^{2/3} + a_{\text{coul}}Z^2A^{-1/3} + a_{\text{sym}}\frac{(N-Z)^2}{A} \\ a_{\text{vol}} \approx -16\ \text{MeV}, \quad a_{\text{surf}} \approx 20\ \text{MeV} \\ a_{\text{coul}} \approx 0.751\ \text{MeV}, \quad a_{\text{sym}} \approx 21.4\ \text{MeV}\end{gathered} \tag{63}$$

   对称能一项显然是因为中子数与质子数不同引起的。

2. 对

Problem 2.

根据定义直接证明，集体坐标 $a_{\lambda,\mu}(t)$ 是球张量

证明

- 原始核形状由函数 $R(\theta,\varphi)$ 描述。采用**主动旋转**的观点（也就是将 $R(\Omega)$ 展开之后的球谐函数形式不会发生变换），也就是

$$R'(\Omega) = R(\hat{g}^{-1}\Omega) \tag{64}$$

  核表面是转动不变的，这可以由下式决定：

$$\sum_{\lambda\mu}\alpha'^{*}_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\Omega) = \sum_{\lambda\mu}\alpha^{*}_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\hat{g}^{-1}\Omega) \tag{65}$$

  其中 $Y_{\lambda\mu}(\hat{g}^{-1}\Omega)$ 满足的关系在前文有过仔细论述，所以可以进一步写成

$$\sum_{\lambda\mu}\alpha'^{*}_{\lambda\mu}Y_{\lambda\mu}(\Omega) = \sum_{\lambda\mu}\alpha^{*}_{\lambda\mu}\sum_{\mu'}\mathcal{D}^{(\lambda)}_{\mu'\mu}Y_{\lambda\mu'}(\Omega) \tag{66}$$

  从这里很容易看出 $\alpha_{\lambda\mu}$ 是如何变换的：

$$\boxed{\alpha'^{*}_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'}\mathcal{D}^{(\lambda)}_{\mu\mu'}\alpha^{*}_{\lambda\mu'}} \tag{67}$$

  取复共轭：

$$\alpha'_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'}\mathcal{D}^{(\lambda)*}_{\mu\mu'}\alpha_{\lambda\mu'} \tag{68}$$

  根据之前的讨论，可以写出等价的变换为

$$\alpha'_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'}\mathcal{D}^{(\lambda)}_{\mu'\mu}\alpha_{\lambda\mu'} \tag{69}$$

  这个就是球张量的变换，所以就是球张量。

Problem 3.

试证：

$$\sum_i |a_{2,i}|^2 = \sqrt{5}[a_2 \times a_2]^0 \tag{70}$$

证明

$$[A_\lambda \times B_\lambda]^{LM} = \sum_{\mu_1,\mu_2} (\lambda\mu_1\lambda\mu_2 \mid LM) A_{\lambda\mu_1} B_{\lambda\mu_2} \tag{71}$$

利用 $(\lambda\mu\lambda-\mu \mid 00) = \frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{\sqrt{2\lambda+1}}$ ，将 $LM = 00$ 代入，有

$$[A_\lambda \times B_\lambda]^0 = \sum_{\mu_1} (\lambda\mu_1\lambda-\mu_1 \mid 00) A_{\lambda\mu_1} B_{\lambda-\mu_1} = \sum_{\mu_1} \frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{\sqrt{2\lambda+1}} A_{\lambda\mu_1} B_{\lambda-\mu_1} \tag{72}$$

现在再将 $\lambda = 2$ 代入，有

$$[a_2 \times a_2]^0 = \sum_\mu \frac{(-1)^{2-\mu}}{\sqrt{5}} a_{2\mu} a_{2-\mu} = \sum_\mu \frac{(-1)^2}{\sqrt{5}} a_{2\mu} \alpha^*_{2\mu} = \sum_\mu \frac{1}{\sqrt{5}} |a_{2\mu}|^2 \tag{73}$$

倒数第二个等号使用了 $\boxed{\alpha^*_{\lambda\mu} = (-1)^\mu \alpha_{\lambda-\mu}}$ 这个关系，证毕。

Problem 4.

导出四极矩公式

$$Q_{IK} = Q_0 \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} (1+\alpha) \tag{74}$$

证明：

集体四极算符为

$$\hat{Q}_{2\mu} = \frac{3Ze}{4\pi} R_0^2 \left(\hat{\alpha}_{2\mu} - \frac{10}{\sqrt{70\pi}} [\hat{\alpha} \times \hat{\alpha}]^2_\mu \right) \tag{75}$$

转换到坐标 $\vec{\theta}, \xi$ 和 η，即做如下变换

$$\alpha_{2\mu} = \sum_\nu \mathcal{D}^{(2)*}_{\mu\nu}(\vec{\theta}) \alpha'_{2\nu}, \quad [\vec{\alpha} \times \vec{\alpha}]^2_\mu = \sum_\nu \mathcal{D}^{(2)*}_{\mu\nu}(\vec{\theta}) [\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}']^2_\nu \tag{76}$$

其中，$\alpha'_{20} = \beta_0 + \xi$ 和 $\alpha'_{2\pm2} = \eta$，又考虑

$$\begin{gathered}
[\alpha' \times \alpha']^2_0 = (\langle 2-222|20\rangle + \langle 222-2|20\rangle)\eta^2 + \langle 2020|20\rangle(\beta_0+\xi)^2 = 2\sqrt{\frac{2}{7}}\eta^2 - \sqrt{\frac{2}{7}}(\beta_0+\xi)^2 \\
[\alpha' \times \alpha']^2_{\pm1} = 0 \\
[\alpha' \times \alpha']^2_{\pm2} = (\langle 202\pm2|2\pm2\rangle + \langle 2\pm220|2\pm2\rangle)(\beta_0+\xi)\eta = 2\sqrt{\frac{2}{7}}(\beta_0+\xi)\eta
\end{gathered} \tag{77}$$

于是可以得到

$$\hat{Q}_{2\mu} = \frac{3Ze}{4\pi} R_0^2 \left(\mathcal{D}^{(2)*}_{\mu0}(\vec{\theta}) \left\{ \beta_0 + \hat{\xi} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}[(\beta_0+\hat{\xi})^2 - 2\eta^2] \right\} + \left(\mathcal{D}^{(2)*}_{\mu2}(\vec{\theta}) + \mathcal{D}^{(2)*}_{\mu-2}(\vec{\theta}) \right) \eta \left[1 - \frac{4}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(\beta_0+\hat{\xi}) \right] \right) \tag{78}$$

在初始和终态的振动量子数相同的情况下，ξ 依赖和 η 依赖部分没有贡献，因此四极算子被简化为

$$\hat{Q}_{20} \to \frac{3Ze}{4\pi} R_0^2 \mathcal{D}^{(2)}_{00} \times \beta_0(1+\alpha) \tag{79}$$

对于一个态，有

$$\begin{aligned} Q_{IKn_\beta n_\gamma} &= \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle IM=IKn_\beta n_\gamma | \hat{Q}_{20} | IM=IKn_\beta n_\gamma \rangle \\ &= Q_0(1+\alpha) \langle IM=IKn_\beta n_\gamma | \mathcal{D}^{(2)*}_{00} | IM=IKn_\beta n_\gamma \rangle \end{aligned} \tag{80}$$

在将转动波函数代入之后，矩阵元变为

$$\begin{aligned} Q &= Q_0(1+\alpha)\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})} \\ &\times \int \mathrm{d}^3\theta (\mathcal{D}^{(I)}_{MK} + (-1)^I \mathcal{D}^{(I)}_{M-K}) \mathcal{D}^{(2)*}_{00} (\mathcal{D}^{(I)*}_{MK} + (-1)^I \mathcal{D}^{(I)*}_{M-K}) \end{aligned} \tag{81}$$

对于 $K=0$，积分变为

$$4\int \mathrm{d}^3\theta \mathcal{D}^{(I)}_{M0} \mathcal{D}^{(2)*}_{00} \mathcal{D}^{(I)*}_{M0} \tag{82}$$

而对于 $K \neq 0$，有四个项包含 K 和 $-K$ 的不同组合。在积分中，混合项由于对称性而消去，另外两项是相等的。如果考虑到因子 δ_{K0} ，两种情况的净结果等于

$$Q = Q_0(1+\alpha) \langle II20|II \rangle \langle IK20|IK \rangle \tag{83}$$

最后，可以代入克莱布希-戈尔登系数：

$$\langle II20|II \rangle \langle IK20|IK \rangle = \frac{[3I^2 - I(I+1)][3K^2 - I(I+1)]}{I(I+1)(2I+3)(2I-1)} \tag{84}$$

结果为

$$Q_{IK} = Q_0 \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)}(1+\alpha) \tag{85}$$

2026 年 1 月 4 日

Problem 1.

证明张量力 $S_{12}=\left[v_0(r)+v_1(r)\hat{\vec{\tau}}\cdot\hat{\vec{\tau}}'\right]\left[\frac{(\vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}})(\vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}}')}{r^2}-\frac{1}{3}\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{\sigma}}'\right]$ 的角度平均值为 0，其中自旋 $\hat{S}=\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}$，同位旋 $\hat{T}=\frac{\hbar}{2}\hat{\tau}$ 。

证明：

矢量 $\vec{r}$ 在球坐标下可以展开为：

$$\vec{r}=r(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta) \tag{86}$$

$(\vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}})(\vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}}')$ 的角平均为

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}\Omega(\vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}})(\vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}}')\\&=\frac{r^2}{4\pi}\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi(\hat{\sigma}_x\sin\theta\cos\varphi+\hat{\sigma}_y\sin\theta\sin\varphi+\hat{\sigma}_z\cos\theta)\\&\cdot(\hat{\sigma}'_x\sin\theta\cos\varphi+\hat{\sigma}'_y\sin\theta\sin\varphi+\hat{\sigma}'_z\cos\theta)\end{aligned} \tag{87}$$

其中 $4\pi^2$ 是全空间的立体角。展开乘积后， $\sin^2\varphi$ 或 $\cos^2\varphi$ 的积分为 π 。混合积的积分则为零，这样还剩下

$$I=\frac{r^2}{4}\int\sin\theta\mathrm{d}\theta(\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}'_x\sin^2\theta+\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}'_y\sin^2\theta+2\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}'_z\cos^2\theta) \tag{88}$$

其余的积分容易进行。结果是

$$I=\frac{r^2}{3}\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{\sigma}}' \tag{89}$$

这显然与张量势第二个括号中第二项的抵消。

Problem 2.

推导不含自旋轨道耦合谐振能级的简并度表达式

$$g=2*\sum_{n=1}^{n_{\max}}[2N-4n+5]=(N+1)(N+2) \tag{90}$$

回答

$$N:=2(n-1)+l\quad\Rightarrow\quad l=N-2(n-1)=N,N-2,N-4\cdots. \tag{91}$$

每个 l 的简并程度显然为 $2l+1$，于是能级 N 的简并度为

$$\sum_l 2l+1=\sum_{n=1}^{n_{\max}}2N-4n+5 \tag{92}$$

考虑自旋带来的影响，最终的结果为

$$g=2*\sum_{n=1}^{n_{\max}}[2N-4n+5]=(N+1)(N+2) \tag{93}$$

Problem 3.

证明 BCS 态粒子数涨落，均方涨落 $\overline{\Delta N^2}$ 可以表示为 $\overline{\Delta N^2}=4\Sigma_{k>0}u_k^2v_k^2$ ，其中 $|u_k|^2,|v_k|^2$ 分别是能级 $(k,-k)$ 空着和被占据的概率

回答：

粒子数的均方偏差由下式给出：

$$\Delta N^2=\langle \mathrm{BCS}|\hat{N}^2|\mathrm{BCS}\rangle-\langle \mathrm{BCS}|\hat{N}|\mathrm{BCS}\rangle^2 \tag{94}$$

$\hat{N}^2$ 的矩阵元简单地由它的展开得到：

$$\hat{N}^2=\sum_{kk'>0}(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k+\hat{a}_{-k}^\dagger\hat{a}_{-k})(\hat{a}_{k'}^\dagger\hat{a}_{k'}+\hat{a}_{-k'}^\dagger\hat{a}_{-k'}) \tag{95}$$

这样我们有

$$\langle \mathrm{BCS}|\hat{N}^2|\mathrm{BCS}\rangle=4\sum_{\substack{kk'>0\\k\neq k'}}v_k^2v_{k'}^2+4\sum_{k>0}v_k^2 \tag{96}$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta N^2&=4\sum_{\substack{kk'>0\\k\neq k'}}v_k^2v_{k'}^2+4\sum_{k>0}v_k^2-\left(\sum_{k>0}2v_k^2\right)^2\\&=4\sum_{\substack{kk'>0\\k\neq k'}}v_k^2v_{k'}^2+4\sum_{k>0}v_k^2-4\sum_{\substack{kk'>0\\k\neq k'}}v_k^2v_{k'}^2-4\sum_{k>0}v_k^4\\&=4\sum_{k>0}v_k^2-v_k^4\end{aligned} \tag{97}$$

使用 $u_k^2=1-v_k^2$ ，结果整理为

$$\Delta N^2=4\Sigma_{k>0}u_k^2v_k^2 \tag{98}$$