Practicum NMB: Benaderende functies

Matthijs van Keirsblick en Harald Schäfer

donderdag 14 mei 2015

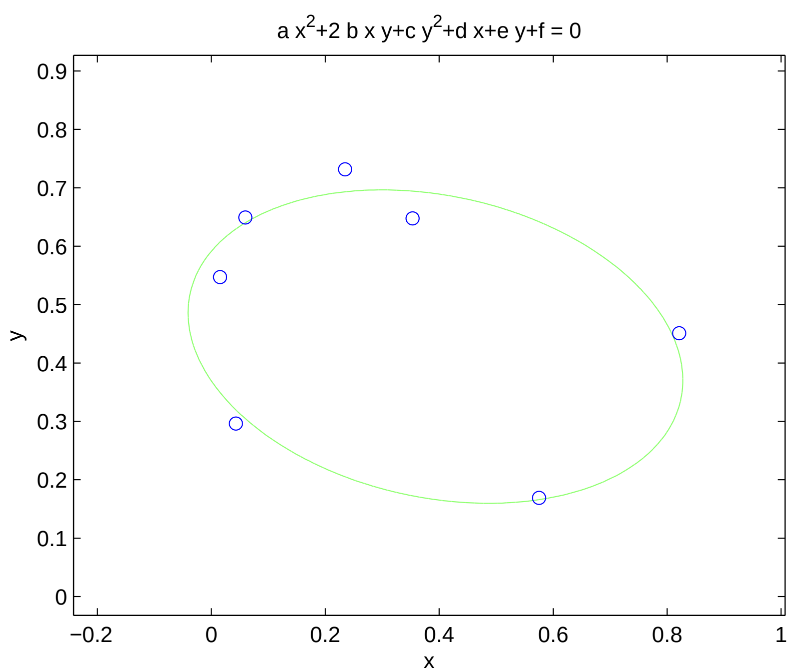
Opgave 1

Ellips

Voor het berekenen van de coefficienten ellips lossen we het gegeven stelsel op naar b,c,d,e en f.

$$\begin{bmatrix} 2x_1y_1 & y_1^2 - x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ 2x_1y_1 & y_1^2 - x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_1y_1 & y_1^2 - x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^2 \\ -x_2^2 \\ \vdots \\ -x_N^2 \end{bmatrix}$$

Hieruit kunnen we dan ook gemakkelijk a berekenen met de normalisatievoorwaarde $a = 1 - c$. In figuur 1 zien we de resulterende ellips die een aantal willekeurige punten benadert.



Figuur 1: Benaderende ellips voor een aantal willekeureige punten

Cirkel

Voor het berekenen van de coefficienten van een benaderende cirkel beginnen we weer van de vergelijking:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Daarin vullen we de normalisatievoorwaarde in en de voorwaarde van een cirkel, deze zijn:

$$a = 1 \qquad b = 0 \qquad a = c$$

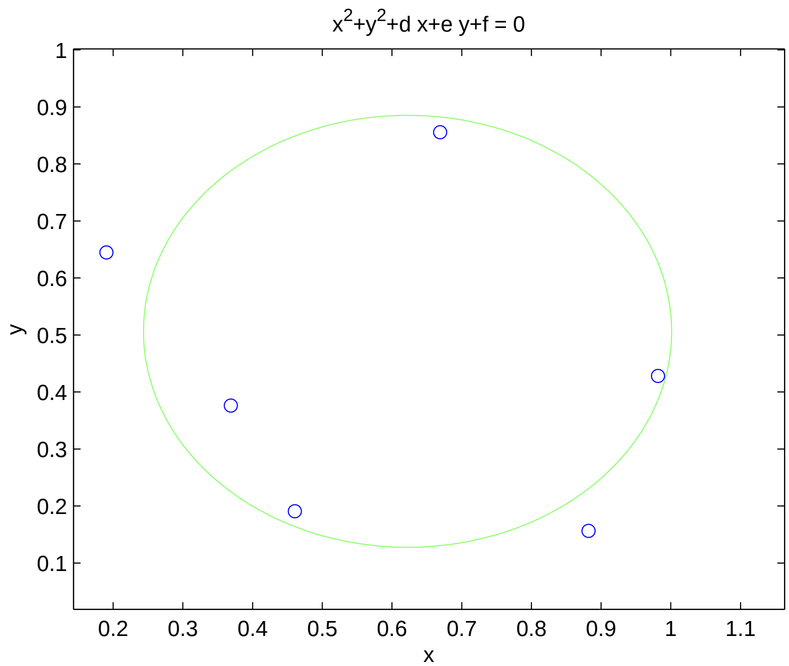
Dit geeft ons de vergelijking:

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

Het stelsel om op te lossen wordt dan:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1^2 - x_1^2 \\ -y_2^2 - x_2^2 \\ \vdots \\ -y_N^2 - x_N^2 \end{bmatrix}$$

In figuur 2 zien we de benaderende cirkel berekend met deze methode voor een aantal willekeurige punten.



Figuur 2: Benaderende cirkel voor een aantal willekeureige punten

Tekenkegelsnede

De vergelijking van de kegelsnede in het aangepast assenstelsel is

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{c} = 0$$

Om een ellips(of cirkel) te zijn moet $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ en $\bar{c} \geq 0$. λ_1 en λ_2 zijn de eigenwaarden van de matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$\bar{c}$ vinden we uit de volgende vergelijkingen.

$$B = \begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix} \qquad 2T^t A = -B^t \qquad \bar{c} = T^t A T + B^t T + f$$

We hebben nu alle nodige vergelijkingen om na te kijken of de coefficienten a,b,c,d,e en f voldoen aan de voorwaarden van een ellips(of cirkel). We hebben onze functie getest door de volgende testen uit te voeren.

- tekenkegelsnede() uitgevoerd op de coefficienten berekend door ellips() toegepast op punten liggend op een willekeurige ellips, het resultaat was zoals verwacht 1
- tekenkegelsnede() uitgevoerd op de coefficienten berekend door cirkel() toegepast op punten liggend op een willekeurige cirkel, het resultaat was zoals verwacht 1
- tekenkegelsnede() uitgevoerd op de coefficienten berekend door ellips() toegepast op punten liggend op een rechte, het resultaat was zoals verwacht 0