Численные методы вычисления интегралов

Геруня с нейро

8 April 2024

1 Интродукшн

Это небольшой вольный пересказ того что было на доп лекции 08.04.2024 с Александром романовичем. Мы рассмотрим три метода прибилзителного вычисления интегралов (те, что в ИДЗ) и выясним кто тупой, а кто совсем дебил

2 Метод прямоугольников

По старой русской традиции дана $f \in R[a;b]$ и по определению

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

Еще советские трамваи додумались, что значение интеграла можно пиздато приблизить суммой площадей прямоугольников беря на каждмои отрезке разбиения серединку. Пусть

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx f(x_{k-\frac{1}{2}}) \cdot h$$

Мы поверим, что эти значения близки, а потом вычислим насколько.
Мы спросили у вовочки из 3Б как узнать насколько хороша придуманная нами аппроксимация он сказал вычесть и убелиться, что разность маленькая.
Вовка не дурак, пожэтому обозначим за мю такую разность и впредь во всех пунктах мы будем пытаться её оцениться.
Формульнем этот поток естественного языка:

$$\mu_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Big(f(x)\Big) \cdot dx - f(x_{k-\frac{1}{2}})$$

Введём новую буковку, которой обозначим длину отрезка разбиения:

$$h = x_k - x_{k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx$$

Пусть $f \in C^2[a;b]$ (это значит, что у нее есть 2 производных) тогда разложим ее по Тейлору до второго порядка с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{f'(x_{k-\frac{1}{2}})}{1!} \cdot (x - x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x - x_{k-\frac{1}{2}})^2$$

Где $\xi \in (x_{k-1}, x_k)$ Теперь эту хуятину подставим в формулу на мю, чтоб получить хуятину побольше:

$$\mu_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f'(x_{k-\frac{1}{2}}) \cdot (x - x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot (x - x_{k-\frac{1}{2}})^2\right)dx$$

Воткнем замену $t = x - x_{k-\frac{1}{2}}, dx = dt$ и получим

$$\int_{-0.5\cdot h}^{0.5\cdot h} \left(f'(x_{k-\frac{1}{2}}) \cdot t + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot t^2\right)dt = \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{4}$$

Чтоб не расслабляться введем еще пару буковок:

$$M_k = \sup |f''(x)| \quad (x \in [x_{k-1}; x_k]) \qquad M = \sup |f''(x)| \quad (x \in [a; b])$$

С новыми буковками наша оценка перепишется вот так: $|\mu_k| \le \frac{M_k}{24} \cdot h^3$ Теперь оценим мю без индекса, то есть мю всего отрезка:

$$|\mu| = \left| \sum_{k=1}^{n} |\mu_k| \right| \le \sum_{k=1}^{n} |\mu_k| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{24} \cdot h^3 = \frac{M_k \cdot h^3 \cdot n}{24} = \frac{M_k \cdot (b-a)}{24} \cdot h^2$$

В последнем дейтсвии мы использовали факт известный из книиги Мормонов: $n \cdot h = b - a$ Итого у нас получилась более менее адекватная оценка точности метода прямоугольников, получим такую же оценку для других методов и ответим на ГЛАВНЫЙ ВОПРОС см. интро

3 Метод трапеций

Когда советские трамваи начали использовать биокомпьютеры на основе мороженного(ЛУЧШЕГО В МИРЕ!!!) работающие на фотосинтезе. Они решили, что более пиздато площадь подграфика на отрезке приблизит трапеция.
Как обычно поверим:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot h$$

Внезапно оказалось, что изученная в курсе алгебры интерполяция жестко нужна, т.к.поэтому вспомним формулу интерполяции по Лагранжу:

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot \frac{\prod_{i!=k}(x - x_i)}{\prod_{j!=k}(x_k - x_j)}$$

Но что же с погрешностью? $\mu = f(x) - L_n(x) =???$
Замечание: В узлах интерполяции погрешности нет: $\forall x_k : \mu(x_k) = 0$
Введем некоторый многочлен гэ $g(s) = f(s) - L_n(s) - K\omega(s)$
где $\omega(s) = \prod_{k=0}^{n}(s - x_k)$, а $K = const$
Тогда рассмотрим ахуитеьно удобный икс такой что

$$x \ne x_k \forall k \in [0;n], x \in [a;b] \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x_0)}$$

У $g(s)$ не менее $n+1$ корня на $[a;b]$ с учетом точки x корней хотя б $n+2$
Тогда:
$g(s) \ge n+2$ корня
$g'(s) \ge n+1$ корень
$g''(s) \ge n$ корней
...
$g^{(n+1)}(s) \ge 1$ корень По свойствам лесных шишок получим:

$$g^{n+1}(s) = f^{(n+1)}(s) - L_n^{(n+1)}(s) - (n+1)!$$

Потому что $\omega^{(n+1)}(s) = (n+1)!$ в чем легко убедиться, сунув палец в жопу и облизав
Заметим что $deg(L_n) = n \Rightarrow L_n^{(n+1)}(s) = 0$

А тогда $\exists \xi \in (a;b) : g^{(n+1)}(\xi) = 0$
перепишем ту еболу с гэ

$$g^{n+1}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)} \cdot (n+1)!$$

Применяем к равенству метод туда-сюда и получаем:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!} \cdot \omega(x)$$

Поглядим опять на Лагранжа 1го порядка для k-ой точки разбиения

$$L_{1,k}(x) = f(x_{k-1}) \cdot \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} + f(x_k) \cdot \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{1}{h} \cdot \left(f(x_k) \cdot (x - x_{k-1}) - f(x_{k-1}) \cdot (x - x_k) \right)$$

где кстати разность $x_k - x_{k-1} = h$
Методом авторитета Александра получаем интеграл

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} L_{1,k}(x)dx = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot h$$

И получим очевидный ответ

$$|\mu_k| = \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - L_{1,k}(x))dx \right| =$$

$$= \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f''(\xi) \cdot (x - x_{k-1} \cdot (x - x_k)}{2} dx \right| \le \frac{M_k}{12} \cdot h^3 \quad (M_k = \sup \left| f^{(n)}(x) \right| \quad [x_{k-1}; x_k])$$

$$\Rightarrow |\mu| \le \frac{M \cdot (b-a)}{12} \cdot h^2$$

Внезапно метод трапеций смачно пососал методу прямоугольников

4 Метод Гомера Симпсона

Наконец, когда советские трамваи строили первую колонию на Марсе они придумали самый космически пиздатый метод приближения интегралов и назвали его в честь президента Марса.
Но перед этим узнаем об интерполяции Эрмита Пускай $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$
$X_k : f(x_k), f'(x_k), \ldots, f^{(N_k - 11)}(x_k)$
Непосредственно многочлен вот:

$$H_m^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k) \quad k \in [0;n],\ i \in [1; N_k - 1]$$

Никогда не было и вот опять
Зададимся вопросом $\mu_n = f(x) - H_n(x) = ???$
Введем $g(s) = f(s) - H_n(s) - K \cdot \omega(s)$, где вновь $\omega(s) = (s - x_0)^{N_0} \cdot (s - x_1)^{N_1} \cdot \ldots \cdot (s - x_n)^{N_n}$

Возник вопрос (сколько у цыганки на пизде волос) корней у $g(s)$?
Ну ежу ясно, что не меньше чем $N_0 + N_1 + \cdots + N_n$, а значит не меньше чем $deg(H_m) + 1$
Тут был какой-то не ебаться важный факт доказаный методом скипа
Время кончилось и Александр объяснил остальное доказательство на мандаринах я нихуя не понял))
Для начала заметим, что:

$$f(x) - H_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \cdot \omega(x)$$

вы спросите а причем тут собственно метод Симпсона? я не ебу
На мандаринах:
Метод Симпсона делает параболлу через три точки (концы отрезка разбиения и середина) а площадь под параболлой мы считать мастера
внезапный лагранж:

$$L_{2,k} = \frac{2}{n^2} \cdot \left(f(x_{k-1})(x - x_{k-\frac{1}{2}})(x - x_1) - 2 \cdot f(x_{k-\frac{1}{2}}) \cdot (x - x_{k-1})(x - x_n) + f(x_k)(x - x_{k-1})(x - x_{k-1})(x - x_{k-\frac{1}{2}}) \right)$$

И тогда очевидно

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} L_{2,k}(x) dx = \frac{f(x_{k-1}) + 4 \cdot f(x_{k-\frac{1}{2}}) + f(x_k)}{6}$$

Утверждение: для многочленов степени $n = 3$ формула Симпсона ахуеть как точна
Доказательство: как обычно в пизде цыганки
вобще Александр сказал что будет конспект и тогда вобще непонятно нахуя я это пишу, но и хуй с ним)))
Тем временем ответ для Гомера Симпсона:

$$\mu_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Big(f(x) - H_3(x) \Big) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k-\frac{1}{2}})^2 \cdot (x - x_k) \right) dx$$

Эту ебаторию можно методом напряжения анального кольца посчитать и получить очевидный ответ:

$$\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot h^5 \Rightarrow |\mu_n| \leq \frac{M \cdot (b - a)}{2880} \cdot h^4$$

А ЭТО ЕБАТЬ КАК КРУТО!!!!
Получается метод симпсона дал всем на клыка и оказался сильно точным, но придется на каждом отрезке считать целых 3 значения функции, что может быть затратно если функция-хуюнкция, но пох норм
опять же непонятно нахуя я пальцами клацал, но вы лайки ставьте, я ваще то не позавтракал и это мой первый раз в попку