

Задача 1.3

Точка движется в плоскости xu по закону $x=at$, $y=a(1-\beta t)$, где a и β положительные постоянные.

Найти:

- уравнение траектории точки $y(x)$; изобразить её график;
- скорость V и ускорение a точки в зависимости от t ;
- момент t_0 , когда угол между скоростью и ускорением равен $\pi/4$.

Ответ:

a) $y(x) = x(1 - \beta x/a)$

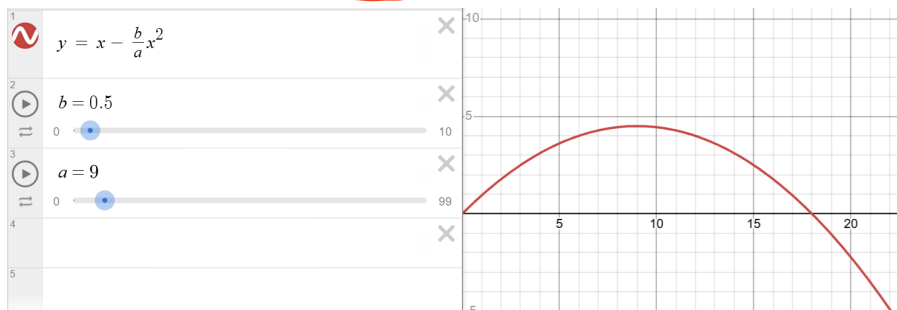
б) $v(t) = \sqrt{a^2(1 - 2\beta t)^2}$

в) $t_0 = 1/\beta$



$$x = at \Rightarrow t = \frac{1}{a} \cdot x$$

$$y(t) = a \cdot t(1 - \beta \cdot t) \Rightarrow y(x) = a \cdot \frac{1}{a} \cdot x(1 - \beta \cdot \frac{1}{a} \cdot x) = x - \frac{\beta}{a} \cdot x^2$$



$$v_x(t) = x'(t) = a \Rightarrow a_x = v_x'(t) = 0 \quad a_y(t) = v_y'(t) = -2a\beta$$

$$v_y(t) = y'(t) = (at - a\beta t^2)' = a - 2a\beta t = a(1 - 2\beta t)$$

$$v(t) = \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2} = \sqrt{a^2 + a^2(1 - 2\beta t)^2} = a \cdot \sqrt{1 + (1 - 2\beta t)^2}$$

$$a(t) = \sqrt{(a_x(t))^2 + (a_y(t))^2} = |-2a\beta| = 2a\beta$$



φ - угол между скоростью и ускорением $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v(t) \cdot a(t)} = \frac{a(1 - 2\beta t) \cdot (-2a\beta)}{a \sqrt{1 + (1 - 2\beta t)^2} \cdot 2a\beta} =$$

$$= \frac{2\beta t - 1}{\sqrt{1 + (1 - 2\beta t)^2}} = \cos \varphi = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\frac{2\beta t - 1}{\sqrt{1 + (1 - 2\beta t)^2}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2\beta t - 1)^2}{1 + (1 - 2\beta t)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(2\beta t - 1)^2 = 1 + (1 - 2\beta t)^2 \Rightarrow 2\beta t - 1 = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1 + 1}{2\beta} \\ t = \frac{1 - 1}{2\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1}{\beta} \end{cases} \Rightarrow \text{Ответ: } t_0 = \frac{1}{\beta}$$