Bayesian causality

Simone Gervasoni Maria

8 marzo 2024

Indice

1 La storia della causalità

Il problema della causalità è di fondamentale interesse per capire meglio il mondo che ci circonda, perciò la domanda è stata affrontata da filosofi e scienziati. La sua definizione rigorosa nel campo statistico è stata solo affrontata molto recentemente, [proprio perché estremamente vago], da Neyman (1932) e poi sviluppata da Rubin negli anni '70, i quali hanno fatto riferimento al modello dei potential outcome spiegato nel capitolo 2. Questo modello diverge concettualmente da alcune definizioni portate avanti da filosofi come John Stuart Mill che definisce la causalità come "the antecedent, or the concurrence of antecedents, on which [a given phenomenon] is invariably and unconditionally consequent", per Mill dunque possiamo dire che A causa B se e solo se ogni volta che succede A succede anche B . Questo modello di causalità è molto riduttivo e ignora la aleatorietà degli eventi, per questo dobbiamo introdurre il potential outcome model.

2 Potential Outcome model

Il potential outcome model definisce l'effetto causale di un evento A come la differenza tra i due "stati" del mondo, cioè il mondo dove accade A e il mondo dove non accade A.

Poniamo ad esempio di voler capire se veramente un medicinale possa migliorare il mal di testa. Formalizziamo il problema ponendo X come l'insieme di covariate dei pazienti, D il regime di trattamento (che assume il valore 1 se viene dato il medicinale mentre assume valore 0 quando al paziente viene somministrato il placebo) e Y_i^{obs} come il numero di minuti per cui persiste il mal di testa. Dunque se potessimo conoscere contemporaneamente $Y_i^{obs}|D = 1$, che chiameremo Y_i^1, e $Y_i^{obs}|D = 0$, che chiameremo Y_i^0, allora calcolare se il medicinale causa un miglioramento rispetto ogni paziente risulta banale. Introduciamo un esempio numerico :

Age	Sex	Y_i^0	Y_i^1	δ_i
20	M	20	2	18
20	F	15	3	12
20	M	8	10	-2
20	F	16	15	1
30	M	12	4	8
30	F	8	5	3
30	M	2	11	-9
30	F	15	26	11

Tabella 1: Tabella esperimento

Definizione di quantità Definiamo quindi alcune quantità che ci risulteranno utili: il CATE o conditional average treatment effect è definito come

$E[Y_i^1 - Y_i^0|X] = E[\delta_i|X]$, quindi $CATE_{(M,20)} = E[\delta_i|X = (M, 20)] \approx \frac{18-2}{2} = 8$, possiamo quindi dire che tra i maschi ventenni la medicina causa in media una riduzione di 8 minuti nella durata del mal di testa .
Invece possiamo definire l'ATE o average treatment effect come $E[Y_i^1 - Y_i^0] = E[\delta_i]$, quindi $ATE = E[\delta_i] \approx \frac{18+12-2+18+3-9+11}{8}$.

Ovviamente questa tabella non potrà mai essere riempita come abbiamo mostrato sopra perchè possiamo veramente conoscere una sola quantità tra Y_i^0 e Y_i^1, quindi sarà impossibile avere certezza sulle quantità definite prima, bisognerà quindi stimarle. per questo è utile fare la distinzione tra i valori "fattuali" cioè cosa è veramente successo e "controfattuale" . Possiamo capire meglio la relazione tra potential outcome e observed outcome attraverso la "switching equation":

$$Y_i^{obs} = D_i \cdot Y_i^1 + (1 - D_i) \cdot Y_i^0 \tag{1}$$

Vediamo quidi che $Y_i^{obs} =$

2.1 Esempio

Poniamo ad esempio di voler capire se veramente un medicinale possa migliorare il mal di testa, prendiamo quindi n pazienti e somministriamo casualmente il trattamento. Formalizziamo il problema ponendo X come l'insieme di covariate dei pazienti, T il regime di trattamento (che assume il valore 1 se viene dato il trattamento mentre assume valore 0 altrimenti) e Y^{obs} come il numero di minuti per cui persiste il mal di testa. Possiamo quindi rappresentare così la situazione:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] & & T \arrow[dl] \\ & Y^{obs} & \end{tikzcd}$$

Figura 1: Dag per esperimento randomizzato

Il risultato dell'esperimento fornirà dati in forma simile :

Age	Sex	T	Y^{obs}
20	M	1	2
20	F	1	3
20	M	0	10
20	F	0	15
30	M	1	4
30	F	1	5
30	M	0	11
30	F	0	26

Tabella 2: Tabella esperimento

2.2 Ruolo della randomizzazione