

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO–BICOCCA  
SCUOLA DI ECONOMIA E STATISTICA

CORSO DI LAUREA IN  
SCIENZE STATISTICHE ED ECONOMICHE



## BAYESIAN CAUSALITY

RELATORE: Dott. Stefano Peluso

TESI DI LAUREA DI:  
Simone Maria Gervasoni  
MATRICOLA N. 880068

ANNO ACCADEMICO 2024/2025



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>DAGs</b>	<b>3</b>
2.1	Vertici e Archi . . . . .	3
2.1.1	Vertici . . . . .	3
2.1.2	Archi . . . . .	4
2.2	Back door criterion . . . . .	5
2.3	Collider Bias . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Potential outcome model</b>	<b>7</b>
3.1	Studi randomizzati: Ruolo della randomizzazione . . . . .	9
3.2	Studi osservazionali (?) . . . . .	10



### **Ringraziamenti**

Inserire qui gli eventuali ringraziamenti, altrimenti eliminare



# Capitolo 1

## Introduzione

Il problema della causalità è di fondamentale interesse per capire meglio il mondo che ci circonda, perciò la domanda è stata affrontata da filosofi e scienziati. La sua definizione rigorosa nel campo statistico è stata solo affrontata molto recentemente, [proprio perché estremamente vago], da Neyman (1932) e poi sviluppata da Rubin negli anni '70, i quali hanno fatto riferimento al modello dei potential outcome spiegato nel capitolo ?? . Questo modello diverge concettualmente da alcune definizioni portate avanti da filosofi come John Stuart Mill che definisce la causalità come “the antecedent, or the concurrence of antecedents, on which [a given phenomenon] is invariably and unconditionally consequent”, per Mill dunque possiamo dire che A causa B se e solo se ogni volta che succede A succede anche B . Questo modello di causalità è molto riduttivo e ignora la aleatorietà degli eventi, per questo dobbiamo introdurre il potential outcome model.





## Capitolo 2

### DAGs

Introduciamo come primo argomento i DAGs o Directed Acyclic Graph, questi servono per schematizzare relazioni di causalità, che non verrà definita rigorosamente ora ma affrontata nel capitolo 3. Un DAG è un grafo formato da vertici che rappresentano le variabili in analisi e da archi che rappresentano la relazione di causalità le variabili. Viene detto aciclico perché partendo da un vertice e seguendo gli archi non si può tornare su quel vertice. Questi grafi non sono in grado di descrivere causalità reciproca simultanea  $A \leftrightarrow B$  o feedback loop  $A \rightarrow B \rightarrow A$  a meno che si inserisca un ulteriore vertice con lo stesso nome, anche se in questi casi non si consiglia di utilizzare questo tipo di grafici (?).

$$A \leftarrow B$$

$$A \leftarrow B$$

$$A \leftarrow B \rightarrow C$$

(a) Non valid DAG (b) Non valid DAG (c) Valid DAG

(I grafi sono da rifare)

Bisogna inoltre dire che i DAGs, essendo dei grafi sono di natura più sintetici, contengono molte informazioni non solo grazie agli archi disegnati ma anche grazie a quelli **non** disegnati, ad esempio il DAG ?? implica che  $A \perp\!\!\!\perp C$  visto che non esiste un arco che li colleghi.

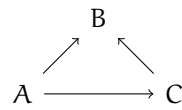
#### 2.1 Vertici e Archi

Fare breve cappello

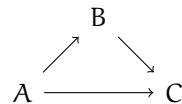
##### 2.1.1 Vertici

Poniamo la C come la variabile *outcome* cioè la variabile di interesse per l'indagine (la salute dopo un determinato intervento). Poniamo A come la variabile *exposure* cioè quella di cui vogliamo quantificare l'effetto causale sulla variabile *outcome* (per esempio che tipo di intervento viene proposto). Analizziamo quindi un

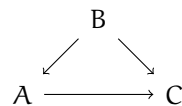
singolo vertice in questo caso B, gli unici modi in cui si può collegare ad A e C sono i seguenti:



**Figura 2.2:** DAG: Common effect



**Figura 2.3:** DAG: Mediator



**Figura 2.4:** DAG: Common cause

Dunque B nel grafico 2.2 viene chiamato *collider*, mentre nei grafici 2.3 e 2.4 viene definito *non collider*, mentre solo 2.4 come *confounder*. Infatti se volessimo quantificare la relazione causale tra A e C quando B è un *non collider* o un *confounder* risulta più difficoltoso perchè sappiamo che B introduce sistematicamente correlazioni spurie tra A e C (bisogna capire meglio come affrontare i mediators [bisogna controllarli?], osservazione più giusta per i ). Invece nel caso mostrato in figura 2.2 potremmo interpretare il  $\hat{\delta}$  della regressione lineare:

$$C_i = A_i\delta + \epsilon_i \quad (2.1)$$

come quantificazione dell'effetto causale che A ha su C, questo lo possiamo affermare solo dopo aver confermato che effettivamente:

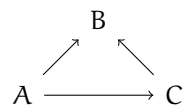
- il grafo soddisfa *Backdoor criterion* ( paragrafo 2.2)
- La direzione della causalità è corretta

### 2.1.2 Archi

definizione di path definizione di open backdoor elenco di tutte le path possibili con esempio

## 2.2 Back door criterion

## 2.3 Collider Bias



**Figura 2.5:** DAG:collider bias



## Capitolo 3

### Potential outcome model

Il potential outcome model definisce l'effetto causale di un evento A come la differenza tra i due "stati" del mondo, cioè il mondo dove accade A e il mondo dove non accade A.

Poniamo ad esempio di voler capire se veramente un medicinale possa migliorare il mal di testa. Formalizziamo il problema ponendo X come l'insieme di covariate dei pazienti, D il regime di trattamento (che assume il valore 1 se viene dato il medicinale mentre assume valore 0 quando al paziente viene somministrato il placebo) e  $Y_i^{obs}$  come il numero di minuti per cui persiste il mal di testa. Dunque se potessimo conoscere contemporaneamente  $Y_i^{obs}|D = 1$ , che chiameremo  $Y_i^1$ , e  $Y_i^{obs}|D = 0$ , che chiameremo  $Y_i^0$ , allora calcolare se il medicinale causa un miglioramento risulterà molto semplice. Introduciamo un esempio numerico :

Age	Sex	$Y_i^0$	$Y_i^1$	$\delta_i$
20	M	20	21	-1
20	F	15	3	12
20	M	8	10	-2
20	F	16	15	1
30	M	12	13	-1
30	F	8	5	3
30	M	2	11	-9
30	F	15	26	11

**Tabella 3.1:** Tabella esperimento

Vediamo che il  $\delta$  non è sempre positivo dunque la medicina non ha migliorato la situazione per tutti, notiamo però che in generale ha ridotto il tempo del malessere, questo però non basta, dobbiamo essere più precisi quantificando esattamente la tipologia e la dimensione dell'effetto.

**Definizione parametri**

Definiamo quindi alcune quantità che ci risulteranno utili :

- CATE o Conditional Average Treatment Effect è definito come  $E[Y_i^1 - Y_i^0 | X] = E[\delta_i | X]$ , quindi  $CATE_{(M,20)} = E[\delta_i | X = (M, 20)] \approx \frac{18-2}{2} = 8$ , possiamo quindi dire che tra i maschi ventenni la medicina causa in media una riduzione di 8 minuti nella durata del mal di testa .
- ATE o Average Treatment Effect è definito come  $E[Y_i^1 - Y_i^0] = E[\delta_i]$ , quindi  $ATE = E[\delta_i] \approx \frac{18+12-2+18+3-9+11}{8}$ .
- ATT o Average Treatment on the Treated è definito come  $E[Y_i^1 - Y_i^0 | D = 1] = E[\delta_i | D = 1]$
- ATU o Average Treatment on the Untreated è definito come  $E[Y_i^1 - Y_i^0 | D = 0] = E[\delta_i | D = 0]$

Non possiamo calcolare gli ultimi due perché siamo ancora nel caso ipotetico dove conosciamo i due potential outcomes. Ovviamente questa tabella non potrà mai essere riempita come abbiamo mostrato sopra perché possiamo veramente conoscere una sola quantità tra  $Y_i^0$  e  $Y_i^1$ , sarà quindi impossibile avere certezza sulle quantità definite prima ma bisognerà stimarle. Dunque è utile fare la distinzione tra i valori *fattuali* cioè cosa è veramente successo e *controfattuale* cioè cosa sarebbe accaduto se il regime di trattamento fosse stato diverso. Possiamo capire meglio la relazione tra potential outcome e observed outcome attraverso la "switching equation":

$$Y_i^{obs} = D_i \cdot Y_i^1 + (1 - D_i) \cdot Y_i^0 \quad (3.1)$$

Vediamo quindi che  $Y_i^{obs} = Y_i^1$  quando  $D_i = 1$ , mentre  $Y_i^{obs} = Y_i^0$  quando  $D_i = 0$ . Bisogna precisare che la differenza tra  $Y_i^{obs}$  e  $Y_i^0, Y_i^1$  è che i primi sono valori effettivi, empirici che si possono osservare mentre gli ultimi sono valori ex-ante e dunque esistono prima che la  $D_i$  venga somministrata.

Quello che invece ci ritroveremo nella realtà sarà una tabella più simile a questa

Age	Sex	$Y_i^0$	$Y_i^1$
20	M	20	?
20	F	15	?
20	M	?	10
20	F	?	15
30	M	12	?
30	F	8	?
30	M	?	11
30	F	?	26

Tabella 3.2: Tabella esperimento

Abbiamo dunque ridotto il problema della causalità ad un problema di *Missing Data*, questa è la forza del modello usato.

### 3.1 Studi randomizzati: Ruolo della randomizzazione

Spesso si sente parlare di studi clinici randomizzati controllati, cioè studi in cui a metà dei partecipanti viene dato un placebo e all'altra metà il medicinale che è oggetto di studio, ovviamente né i medici né i pazienti sono a conoscenza di quali persone hanno assunto una o l'altra cosa. La situazione può essere espressa con un DAG in questa maniera:

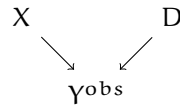


Figura 3.1: Dag per studio randomizzato

Ma perché questo procedimento è ormai la norma per verificare l'efficacia di un farmaco? E cosa ci può dire veramente un esperimento del genere? Sotto il potential outcome model questo procedimento può essere formalizzato tramite questa indipendenza

$$D \perp\!\!\!\perp (Y^0, Y^1) \quad (3.2)$$

ciò significa che il trattamento non è amministrato in base ai potential outcome, ma in modo casuale. Non bisogna però confondersi e pensare che ciò implichi che  $D \perp\!\!\!\perp Y^{\text{obs}}$ , infatti ciò è espressamente falso ogni volta che il medicinale ha effetto su  $Y^{\text{obs}}$ . Grazie all'equazione 3.1 abbiamo che  $E[Y_i^1] = E[Y_i^1 | D_i = 1]$  e la

stessa cosa per  $E[Y_i^0] = E[Y_i^0|D_i = 0]$ . Possiamo quindi dire che :

$$ATE = E[Y_i^1 - Y_i^0] \quad (3.3)$$

$$= E[Y_i^1|D_i = 1] - E[Y_i^0|D_i = 0] \quad (3.4)$$

$$= E[Y_i^1|D_i = 1] - E[Y_i^0|D_i = 1] \quad (3.5)$$

$$= E[Y_i^1|D_i = 0] - E[Y_i^0|D_i = 0] \quad (3.6)$$

Nell'equazione 3.4 entrambi gli addendi sono quantità *fattuali*, grazie alla legge dei grandi numeri stimiamo queste quantità con delle semplici medie, chiameremo quindi SDO la semplice differenza delle media osservate per i gruppi:

$$SDO = \frac{1}{N_1} \sum_{i:d_i=1} y_i - \frac{1}{N_2} \sum_{i:d_i=0} y_i \stackrel{(N_1, N_2) \rightarrow \infty}{=} ATE$$

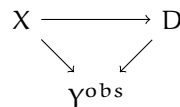
Dall'equazione 3.5 e 3.6 possiamo concludere che nel caso randomizzato avremo che  $ATE = ATT = ATU$ .

### 3.2 Studi osservazionali (?)

Gli studi osservazionali (?) sono invece strutturati in modo diverso, i ricercatori osservano e raccolgono dati su individui o gruppi senza intervenire o manipolare alcun aspetto dell'ambiente di studio, per 2 motivi principali:

1. Potrebbe essere non etico o pratico dividere la popolazione in maniera casuale (immaginiamo di volere studiare se fumare causa un aumento nel rischio del cancro)
2. Gli eventi sono già accaduti (immaginiamo di volere studiare se i tassi di interesse incidano sul consumo)

Dunque la cosa principale che cambia dal caso precedente è che  $D \not\perp (Y^0, Y^1)$ , possiamo dunque rappresentare la situazione con il seguente DAG:



**Figura 3.2:** Dag per studio osservazionale