ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°2 - 2020
Eliminación Gaussiana

1. Demuestre que:

   a) Si A y B son triangulares superiores (inferiores) con elementos diagonales iguales a 1, entonces AB también es triangular superior (inferior) con elementos diagonales iguales a 1.

   b) Probar que si A es triangular superior (inferior) con elementos diagonales iguales a 1, entonces A^{-1} también es triangular superior (inferior) con elementos diagonales iguales a 1.

2. Si $B = LA$, donde L es triangular inferior con unos en la diagonal, para $\mathcal{I} = \{1, \dots, k\}$ demuestre que $B_{\mathcal{I}\mathcal{I}} = L_{\mathcal{I}\mathcal{I}} A_{\mathcal{I}\mathcal{I}}$.

3. Considere las transformaciones de Gauss $M_k = I - v^k (e^k)^T$ donde $e^k \in \mathbb{R}^n$ es el k-ésimo vector canónico y $v^k \in \mathbb{R}^n$ con $v_i^k = 0$ para $i = 1, \dots, k$. Demuestre que

   a) $M_k^{-1} = I + v^k (e^k)^T$,

   b) $L = M_1^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} = I + \sum_{k=1}^{n-1} v^k (e^k)^T$.

4. Sea A una matriz simétrica definida. Suponga que A ha sido reducida a la forma

$$\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

   efectuando solo operaciones elementales por filas. Demuestre que $A^{(1)}$ es simétrica. ¿Qué ventajas tiene esto cuando se efectua eliminación gaussiana de A?

5. **Implemente** una función en `Python` que calcule la eliminación Gaussiana de un sistema $Ax = b$. La función debe llamarse `egauss`, tener entradas A, b y salidas U, y.

6. **Implemente** una función en `Python` que calcule la descomposición LU de una matriz. La función debe llamarse `dlu`, tener entrada A y salidas L ,U.

7. Escriba un pseudocódigo de un algoritmo de eliminación Gaussiana (sin pivoteo) adaptado a la estructura de una matriz A cuyos únicos elementos que pueden ser no nulos son a_{1n}, a_{n1} y a_{ij} con $|i - j| \leq 1$.

8. Muestre que si P es una matriz de permutación, entonces $P^T P = PP^T = I$

9. **Implemente** dos funciones en `Python`, llamadas `egaussp` y `dlup` que realicen las versiones con permutación de filas de los algoritmos de los ejercicios 5 y 6.

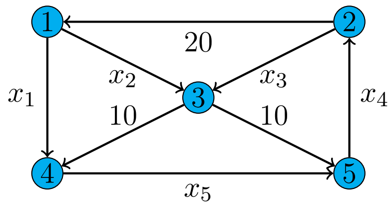
10. **Implemente** una función en `Python`, llamada `sol_egauss` que utilice eliminación Gaussiana con pivoteo parcial para resolver el sistema lineal $Ax = b$. Verifique su funcionamiento resolviendo el sistema lineal para:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 3 & 10 & 9 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 52 \\ 14 \\ 12 \\ 51 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \\ 12 \\ 48 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

11. **Implemente** una función en `Python`, llamada `inv_lu`, que calcule la inversa de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ utilizando descomposición LU con permutaciones y resolviendo n sistemas lineales. Encuentre la inversa de la matriz A del ejercicio anterior.

12. Calcule el costo computacional (en flops) para obtener la inversa de una matriz (tome en cuenta las entradas nulas de los vectores canónicos).

13. En una red en equilibrio los flujos entrantes y salientes en cada nodo deben ser iguales. Encuentre valores de flujos positivos para que la red esté en equilibrio.



¿Existe una única solución?

14. Toda circunferencia en el plano puede definirse implícitamente mediante la ecuación

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Realice una función en `Python` que dado tres puntos no colineales en el plano: (i) resuelva el sistema lineal resultante, (ii) retorne los valores para a, b y c, (iii) realice el gráfico de la circunferencia junto a los tres puntos dados.