ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°4 - 2020
Cuadrados mínimos

1. Resuelva el siguiente sistema lineal usando rotaciones de Givens y reflexiones de Householder
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

2. Encuentre una reflexión Q tal que $Qx = y$ para vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$.

3. **Implemente** la siguientes funciones en `Python` que realizan una descomposición QR. Deben tener como entrada una matriz A y como salida Q y R.

   a) `qrgivens` que utilice rotaciones de Givens.

   b) `qrhholder` que utilice reflexiones de Householder.

   c) `qrgschmidt` que utilice ortogonalización de Gram-Schmidt.

4. Sea $V \in R^{m\times n}$ definida por $v_{ij} = p_j^{i-1}$ con $p_j = \frac{j}{n}$, i.e., una matriz de Vandermonde. Calcule $\|I_m - Q^TQ\|_2$ para distintos valores de m y n, para las matrices Q dadas por el proceso de Gram-Schmidt y por descomposición QR por reflectores.

5. **Implemente** una función en `Python` llamada `qrgivensp` que utilice rotaciones de Givens con permutación de columnas. Debe tener como entrada la matriz A y como salida Q, R y P.

6. Demuestre que si $R \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$, $w \in \mathbb{R}^{n-1}$, $v \in \mathbb{R}^{m-n+1}$, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}^{m-n+1}$ tales que
$$A = \begin{bmatrix} R & w \\ 0 & v \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$
con A de rango completo, entonces $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \|d\|_2^2 - (v^Td/\|v\|_2)^2$

7. **Implemente** una función en `Python` llamada `sol_cuadmin` que dadas A y b retorne $\bar{x}$ solución del problema de cuadrados mínimos, i.e.,
$$\underset{x}{\text{minimizar}} \ \|Ax - b\|_2^2.$$
Utilice la función del ejercicio 5 y resuelva un sistema triangular.

8. Se desea hallar la recta que ajuste los datos $(x_i, y_i) = (i, i)$ para $i = 1, \ldots, 9$ y $(x_{10}, y_{10}) = (10, 0)$.

   a) Encuentre la solución de minimizar $\|Ax - b\|_2^2$ usando `sol_cuadmin` del ejercicio 7.

   b) Encuentre la solución de minimizar $\|Ax - b\|_1$ usando `scipy.optimize.linprog`.

   c) Encuentre la solución de minimizar $\|Ax - b\|_\infty$ usando `scipy.optimize.linprog`.

   d) Grafique simultaneamente las tres rectas y los datos.

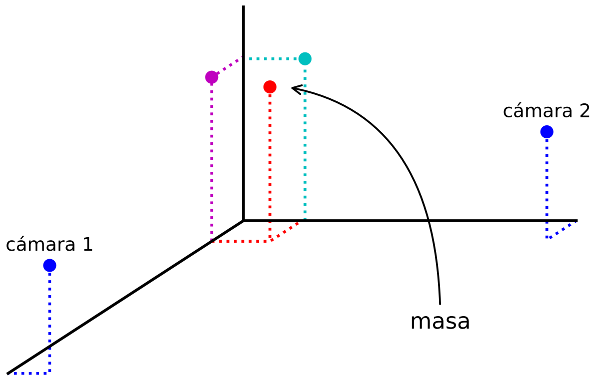
9. Se desea contar con un modelo para pronosticar el comportamiento de un sistema desconocido. Para ello, contamos con valores de entrada $u(t)$ y de salida $y(t)$ para tiempos $t = 0, \ldots, N$. Una estrategia, consiste en suponer que la salida depende de las últimas $\tau+1$ entradas, o sea,
$$y(t) \approx h_0u(t) + h_1u(t-1) + \cdots + +h_\tau u(t-\tau), \quad \text{para } t = \tau, \ldots, N.$$
Descargue el archivo `dryer2.dat` (datos de una secadora industrial obtenidos de DaISy) donde los datos t, $u(t)$, $y(t)$ están en las columnas 1, 2 y 5, respectivamente.

a) Grafique conjuntamente $u(t)$ e $y(t)$.

b) Entrene su modelo con $\tau = 100$ y $N = 500$.

c) Grafique su estimación $y_{\text{est}}(t)$ junto a $y(t)$ para $t > N$.

10. Se desea detectar la posición en tres dimensiones de una masa no uniforme. Se cuenta con información de la imagen de dos cámaras posicionadas como indica la figura. Tomando como unidad 1 m, las cámaras están situadas a 0.5 de la pared lateral, 2 de la pared del frente y 1.5 de altura. Tomando la esquina como el origen de coordenadas, desde la cámara 1 el centro de la masa está en la posición $(0.35, 1.43)$ y desde la cámara 2 en la posición $(-0.28, 1.55)$. Note que desde la cámara 2 el eje x tiene orientación negativa.



Determine la posición espacial de la masa.