Zusammenfassung Analysis III

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Maßtheorie

Problem (Schwaches Maßproblem)**.** Gesucht ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [\mathbb{R}, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

- Normierung: $\mu([0,1]^n) = 1$
- Endliche Additivität: Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkt, so gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- Bewegungsinvarianz: Für eine euklidische Bewegung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(f(A)) = \mu(A)$.

Satz (Hausdorff)**.** Das schwache Maßproblem ist für $n \geq 3$ unlösbar.

Satz (Banach)**.** Das schwache Maßproblem ist für $n = 1, 2$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Problem (Starkes Maßproblem)**.** Gesucht ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ wie im schwachen Maßproblem, die anstelle der endlichen Additivität die Eigenschaft der σ-Additivität besitzt:

- Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pw. disjunkter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Satz. Das starke Maßproblem besitzt keine Lösung.

Notation. Sei im Folgenden Ω eine Menge.

Def. $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Ring**, wenn für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{R}$ • Abgeschlossenheit unter Differenzen: $A \setminus B \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen: $A \cup B \in \mathfrak{R}$

Def. $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Algebra**, wenn für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{A}$ • Abgeschlossenheit unter Komplementen: $A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen: $A \cup B \in \mathfrak{A}$

Def. Eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega))$ heißt **σ-Algebra**, wenn $\mathfrak{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, d. h. für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

Bemerkung. • Jede Algebra ist auch ein Ring.

- Ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist auch unter endlichen Schnitten abgeschlossen, da $A \cap B = A \setminus (B \setminus A) \in \mathfrak{R}$
- Ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann eine Algebra, wenn $\Omega \in \mathfrak{R}$
- Eine σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist auch unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c\right)^c \in \mathfrak{A}$$

Notation. Sei im Folgenden $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring.

Satz. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Ringen / Algebren / σ-Algebren über Ω. Dann ist auch $\cap_{i\in I} A_i$ ein Ring / eine Algebra / eine σ-Algebra über Ω.

Def. Sei $E \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Setze

$$\mathcal{R}(E) := \{\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \subset \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \text{ Ring}\} \text{ und}$$
$$\mathcal{A}(E) := \{\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \subset \mathfrak{A}, \mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra}\}.$$

Dann heißen $\mathfrak{R}(E) := \bigcap_{\mathfrak{R}\in\mathcal{R}(E)} \mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}(E) := \bigcap_{\mathfrak{A}\in\mathcal{A}(E)} \mathfrak{A}$ von E **erzeugter Ring** bzw. von E **erzeugte σ-Algebra**.

Def. Ist $(\Omega, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dann heißt $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\Omega, \mathcal{O}) := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ **Borelsche σ-Algebra** von $(\Omega, \mathcal{O})$.

Bemerkung. Die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ wird auch erzeugt von $\{I \subset \mathbb{R} \mid I \text{ Intervall}\}$. Dabei spielt es keine Rolle, ob man nur geschlossene, nur offene, nur nach einer Seite halboffene Intervalle oder gar nur Intervalle obiger Art mit Endpunkten in $\mathbb{Q}$ zulässt.

Def. Eine Funktion $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Inhalt** auf $\mathfrak{R}$, falls

- $\mu(\emptyset) = 0$ • $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathfrak{R}$.

Def. Ein Inhalt $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf $\mathfrak{R}$, wenn μ σ-additiv ist, d. h. wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Elemente von $\mathfrak{R}$ mit $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt:

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Def. Ein **Maß** ist ein Prämaß auf einer σ-Algebra.

Satz. Für einen Inhalt μ auf $\mathfrak{R}$ gilt für alle $A, B \in \mathfrak{R}$:

- $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
- $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)
- Aus $A \subset B$ und $\mu(B) < \infty$ folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- Für $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{R}$ ist $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ (Subadditivität)
- Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Elemente aus $\mathfrak{R}$, sodass $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$, so gilt $\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

Def. Ein Inhalt / Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ / einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ heißt **endlich**, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ bzw. $A \in \mathfrak{A}$.

Satz. Ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist σ-subadditiv, d. h. es gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{für alle Folgen } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{A}.$$

Def. Sei $A \subset \Omega$. Dann heißt die Abbildung

$$\chi_A = \mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto |\{\star \mid \omega \in A\}| = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Indikatorfunktion oder **charakteristische Funktion** von A.

Def. Eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen $A \subset \Omega$, notiert $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, wenn $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $\mathbb{1}_A$ konvergiert.

Def. Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ heißen

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in unendlich vielen } A_n\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in allen bis auf endlich vielen } A_n\}$$

Limes Superior bzw. **Limes Inferior** der Folge A_n. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Satz. Es gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = A \iff \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$.

Def. Eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt

- **monoton wachsend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \subset A_{n+1}$,
- **monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \supset A_{n+1}$.

Satz. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Ist (A_n) monoton wachsend, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
- Ist (A_n) monoton fallend, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Satz. Sei μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Wir betrachten die Aussagen:

(i) μ ist ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$.

(ii) Stetigkeit von unten: Für jede monoton wachsende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $A := \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(iii) Stetigkeit von oben: Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $A := \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(iv) Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Dann gilt (i) $\iff$ (ii) $\implies$ (iii) $\iff$ (iv).
Falls μ endlich ist, so gilt auch (iii) $\implies$ (ii).

Satz. Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt:

- Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty}(\mu(A_n))$.
- Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, sodass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) < \infty$, dann gilt $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
- Sei μ endlich und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)$.
- Sei μ endlich und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen A konvergente Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt $A \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Def. Ein Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **σ-endlich**, wenn gilt: Es gibt eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$, sodass

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \quad \text{und} \quad \mu(S_n) < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Def. Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wird **numerische Funktion** genannt.

Def. Eine numerische Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **äußeres Maß** auf Ω, wenn gilt:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie)
- Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ gilt $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Bemerkung. Wegen $\mu^*(\emptyset) = 0$ und der Monotonie nimmt ein äußeres Maß nur Werte in $[0, \infty]$ an.

Def. Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt **μ^*-messbar**, falls

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \quad \text{für alle } Q \subset \Omega.$$

Satz (Carathéodory)**.** Für ein äußeres Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ ist

- $\mathfrak{A}^* := \{A \subset \Omega \,|\, A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$ eine σ-Algebra und
- $\mu^*|_{\mathfrak{A}^*}$ ein Maß auf $\mathfrak{A}^*$.

Satz (**Fortsetzungssatz**)**.** Sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathfrak{R}$, dann gibt es ein Maß $\tilde{\mu}$ auf der von $\mathfrak{R}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ mit $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{R}} = \mu$. Falls μ σ-endlich ist, so ist $\tilde{\mu}$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Im Beweis wird ein äußeres Maß auf Ω so definiert:

$$\mathfrak{U}(Q) := \left\{ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, Q \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \text{ und } A_n \text{ Folge in } \mathfrak{R} \right\},$$

$$\mu^*(Q) := \inf\left(\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_n) \,\middle|\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{U}(Q) \right\} \cup \{\infty\} \right).$$

Das äußere Maß μ^* eingeschränkt auf $\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ ist ein Maß.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}$, der unter Schnitten abgeschlossen ist. Es gebe eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist μ durch die Werte auf $\mathcal{E}$ eindeutig festgelegt.

Das Lebesgue-Borel-Maß

Notation. Für $a = (a_1, ..., a_n)$ und $b = (b_1, ..., b_n)$ schreibe

- $a \lhd b$, falls $a_j < b_j$ für alle $j = 1, ..., n$.
- $a \unlhd b$, falls $a_j \leq b_j$ für alle $j = 1, ..., n$.

Def. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, a \lhd x \lhd b\}, \quad \mu((a, b)) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

Elementarquader und **Elementarinhalt**. Sei im Folgenden $\mathcal{E}$ die Menge aller Elementarquader.

Satz. Für alle $A \in \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ gibt es paarweise disjunkte Elementarquader $Q_1, ..., Q_p \in \mathcal{E}$ sodass $A = Q_1 \sqcup ... \sqcup Q_p$.

Def. Für $A \in \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ setze $\mu(A) := \sum_{i=1}^{p} \mu(Q_i)$, wenn $A = Q_1 \sqcup ... \sqcup Q_p$ für paarweise disjunkte $Q_1, ..., Q_p$.

Satz. μ definiert ein Prämaß auf $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$, genannt das **Lebesgue-Borel-Prämaß** auf $\mathbb{R}^n$.

Def. Die eindeutige (da μ σ-endlich) Fortsetzung $\tilde{\mu}$ von μ auf $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ wird **Lebesgue-Borel-Maß** genannt.

Bemerkung. Nur das Lebesgue-Borel-Maß ist ein Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, welches jedem Elementarquader seinen Elementarinhalt zuordnet.

Def. Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Eine Menge $N \subset \Omega$ heißt (μ)-**Nullmenge**, wenn es $A \in \mathfrak{A}$ gibt mit $N \subset A$ und $\mu(A) = 0$. Die Menge aller Nullmengen ist $\mathfrak{N}_\mu \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Def. Sei μ das Lebesgue- Borel-Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt die von $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ und den entsprechenden Nullmengen erzeugte σ-Algebra $\tilde{\mathfrak{A}}_\mu$ **Lebesguesche σ-Algebra**, notiert $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, und das fortgesetzte Maß **Lebesgue-Maß**.

Def. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω, sowie ggf. μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Dann heißt

- das Tupel $(\Omega, \mathfrak{A})$ **messbarer Raum**,
- das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ **Maßraum**.

Def. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ zwei messbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt **messbar** oder genauer $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-messbar, wenn für alle $A' \in \Omega'$ gilt $f^{-1}(A') \in \Omega$ oder, kürzer, $f^{-1}(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{A}$.

Bemerkung. Die messbaren Räume bilden eine Kategorie mit messbaren Abbildungen als Morphismen, d. h. die Identitätsabbildung von einem messbaren Raum zu sich selbst ist messbar und die Verkettung zweier messbarer Abbildungen ist messbar.

Satz.
- Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum, Ω' eine Menge und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Die größte σ-Algebra auf Ω', sodass f messbar ist, ist dann $\mathfrak{A}' := \{A' \subset \Omega' \,|\, f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\}$.
- Ist Ω eine Menge und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein messbarer Raum sowie $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Dann ist $f^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra.
- Seien I eine Indexmenge, Ω eine Menge, $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i), i \in I$ messbare Räume und $f_i : \Omega \to \Omega_i$ Abbildungen, dann ist

  $$\mathfrak{A} := \mathfrak{A}\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \right)$$

  die kleinste σ-Algebra auf Ω, sodass alle Abbildungen f_i, $i \in I$, messbar sind. Diese σ-Algebra wird die von der Familie $\{f_i \,|\, i \in I\}$ **erzeugte σ-Algebra** genannt.

Satz. Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$, dann ist

$$\mathfrak{A}(f^{-1}(\mathcal{E}')) = f^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}')).$$

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung, sowie $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$. Dann gilt:

$$f \text{ ist } (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}(\mathcal{E}'))\text{-messbar} \iff f^{-1}(\mathcal{E}') \subset \mathfrak{A}$$

Satz. Seien $(\Omega, \mathcal{O})$ und $(\Omega', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ bzw. $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ die dazugehörigen Borelschen σ-Algebren. Dann ist jede stetige Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-messbar.

Satz (Projektionssatz)**.** Seien I eine Indexmenge, $(\Omega_0, \mathfrak{A}_0)$ sowie $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$, $i \in I$ messbare Räume und Ω eine Menge. Seien $g_i : \Omega \to \Omega_i, i \in I$ und $f : \Omega_0 \to \Omega$ Abbildungen. Wir setzen $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}\left(\bigcup_{i\in I} g_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \right)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- f ist $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A})$-messbar.
- Für alle $i \in I$ sind die Abbildungen $g_i \circ f$ $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_i)$-messbar.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \to \Omega'$ eine messbare Abbildung, dann ist

$$\mu' = f_*(\mu) = \mu \circ f^{-1} : \mathfrak{A}' \to [0, \infty], \quad A' \mapsto \mu(f^{-1}(A'))$$

ein Maß auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$, genannt das **Bildmaß** von f.

Bemerkung. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ messbare Räume und $f : \Omega' \to \Omega''$, $g : \Omega \to \Omega'$ messbare Abbildungen, dann gilt $(f \circ g)_*\mu = f_*(g_*\mu)$.

Def. Die σ-Algebra der Borelmengen auf $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{\pm\infty\} \,|\, A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}.$$

Satz. $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathfrak{A}(\{[a, \infty] \,|\, a \in \mathbb{R}\})$

Notation. Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei numerische Funktionen. Setze

$$\{f \leq g\} := \{\omega \in \Omega \,|\, f(\omega) \leq g(\omega)\} \subset \Omega$$

und definiere analog $\{f < g\}$, $\{f \geq g\}$, $\{f > g\}$, $\{f = g\}$, $\{f \neq g\}$.

Satz. Für eine numerische Fkt. $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ sind äquivalent:

- f ist messbar
- $\forall\, a \in \mathbb{R} : \{f \geq a\} = f^{-1}([a, \infty]) \in \mathfrak{A}$
- $\forall\, a \in \mathbb{R} : \{f > a\} \in \mathfrak{A}$
- $\forall\, a \in \mathbb{R} : \{f \leq a\} \in \mathfrak{A}$
- $\forall\, a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathfrak{A}$

Satz. Für zwei numerische Funktionen $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ gilt:

- $\{f < g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f > g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f = g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \leq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \geq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \neq g\} \in \mathfrak{A}$

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbare numerische Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann auch messbar (‡: falls $0 \notin \text{Bild}(f)$):

- $\lambda \cdot f$
- $f + \mu \cdot g$
- $f \cdot g$
- $\frac{1}{f}$ (‡)
- $\frac{g}{f}$ (‡)

Satz. Seien $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}}), n \in \mathbb{N}$ messbare numerische Funktionen, dann auch messbar:

- $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$
- $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$
- $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$
- $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$

Dabei werden Infimum, Supremum, usw. punktweise gebildet.

Satz. Seien $f_1, ..., f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbare numerische Fktn., dann sind auch $\max(f_1, ..., f_n)$ und $\min(f_1, ..., f_n)$ messbar.

Def. Für $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißen die Funktionen

- $|f| := \max(f, -f) : \Omega \to [0, \infty]$ **Betrag** von f
- $f^+ := \max(f, 0) : \Omega \to [0, \infty]$ **Positivteil** von f
- $f^- := -\min(f, 0) : \Omega \to [0, \infty]$ **Negativteil** von f

Bemerkung. $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$

Satz. Falls $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbar, dann auch $|f|$, f^+ und f^-.

Das Lebesguesche Integral

Def. Eine Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ heißt **einfache Funktion** oder **Elementarfunktion** auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, wenn gilt:

- f ist messbar
- $f(\Omega) \subset [0, \infty)$
- $f(\Omega)$ ist endlich

Die Menge aller einfachen Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Def. Sei $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\Omega = A_1 \sqcup ... \sqcup A_k$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen mit $A_j \in \mathfrak{A}$ für alle $j = 1, ..., k$, sodass $f(A_j) = \{y_j\}$, dann heißt die Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^{k} y_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} \quad \textbf{kanonische Darstellung}.$$

Bemerkung. Die kanonische Darstellung ist nicht eindeutig.

Satz. Seien $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $a \geq 0$. Dann auch in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$:

- $f + g$
- $f \cdot g$
- $\max(f, g)$
- $\min(f, g)$
- $a \cdot f$

Def. Sei $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $f = \sum_{j=1}^{k} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine kanonische Darstellung von f. Sei ferner μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Dann heißt die Größe

$$\int_\Omega f \, d\mu := \sum_{j=1}^{k} y_j \mu(A_j) \quad \textbf{Lebesgue-Integral} \text{ von } f \text{ bzgl. } \mu.$$

Bemerkung. Obige Größe ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der kanonischen Darstellung.

Satz. Seien $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$, μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$ und $\alpha \geq 0$, dann gilt

- $\int_\Omega (\alpha \cdot f + g) \, d\mu = \alpha \cdot \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu$ (Linearität)
- Falls $g \leq f$, dann $\int_\Omega g \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu$ (Monotonie)

Satz. Angenommen, die Funktionen $f_n \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), n \in \mathbb{N}$ bilden eine monoton wachsende Funktionenfolge und für $g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ gilt $g \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, dann gilt $\int_\Omega g \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu$.

Korollar. Seien $f_n, g_n \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A}), n \in \mathbb{N}$ und die Funktionenfolgen f_n und g_n monoton wachsend mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$. Dann gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega g_n \, d\mu.$$

Def. Sei $\overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller Funktionen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, die Grenzfunktionen (pktw. Konvergenz) monoton wachsender Funktionenfolgen in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sind.

Def. Für eine Funktion $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ (d. h. es existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$) und ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$ heißt

$$\int_\Omega f \, d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega g_n \, d\mu \quad \textbf{Lebesgue-Integral} \text{ von } f \text{ bzgl. } \mu.$$

Satz. $\overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}) = \{f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}) \mid f \text{ messbar und } f \geq 0\}$

Satz. Die Eigenschaften des Integrals für einfache Funktionen (Linearität, Monotonie) übertragen sich auf das Lebesgue-Integral.

Satz (Satz von der monotonen Konvergenz)**.** Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen in $\overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$, dann gilt für $f := \lim_{n \to \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ und jedes Maß μ auf $\mathfrak{A}$:

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$$

Bemerkung. Die Aussage ist für monoton fallende Fktn. i. A. falsch.

Def. Eine messbare Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ heißt **integrierbar** bzw. μ-integrierbar (im Sinne von Lebesgue), falls

$$\int_\Omega f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_\Omega f^- \, d\mu < \infty.$$

In diesem Fall definieren wir das **Lebesgue-Integral** von f als

$$\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu.$$

Notation. $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(\mu)$ bezeichnet die Menge der μ-integrierbaren Funktionen auf Ω.

Satz. Für eine messbare Fkt. $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ sind äquivalent:

- $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.
- $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.
- $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $|f| \leq g$.
- Es gibt nicht negative $u, v \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $f = u - v$.

Im letzten Fall gilt $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega u \, d\mu - \int_\Omega v \, d\mu$.

Satz.

- $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ist ein $\mathbb{R}$-VR und die Abbildung
$$\int : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_\Omega f \, d\mu \quad \text{ist linear.}$$
- $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \implies \max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $f \leq g \implies \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$ (Monotonie)
- $|\int_\Omega f \, d\mu| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ($\triangle$-Ungleichung)

Def. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$ und $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ oder $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Dann ist das ***$\mu$*-Integral von *$f$* über *$A$***

$$\int_A f \, d\mu = \int_\Omega (\mathbb{1}_A \cdot f) \, d\mu.$$

Def. Ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt **vollständig**, wenn jede Nullmenge $N \subset \Omega$ in $\mathfrak{A}$ liegt.

Def. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Setze

$$\tilde{\mathfrak{N}}_\mu := \{N \subset \Omega \mid N \text{ ist } \mu\text{-Nullmenge }\},$$
$$\tilde{\mathfrak{A}}_\mu := \{A \cup N \mid A \in \mathfrak{A},\ N \in \tilde{\mathfrak{N}}_\mu\}.$$

Dann ist $\tilde{\mathfrak{A}}_\mu$ eine σ-Algebra und mit $\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ ist $(\Omega, \tilde{\mathfrak{A}}_\mu, \tilde{\mu})$ ein Maßraum, genannt **Vervollständigung** von $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Def. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E(\omega)$ eine Aussage für alle $\omega \in \Omega$. Man sagt, E ist **(μ)-fast-überall wahr**, wenn $\{\omega \in \Omega \mid \neg E(\omega)\}$ eine Nullmenge ist.
Zwei Funktionen $f, g : \Omega \to X$ heißen **$(\mu$-$)$fast-überall gleich**, notiert $f \overset{\text{f.ü.}}{=} g$, wenn $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}$ eine Nullmenge ist.
Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **(μ)-fast-überall** endlich, wenn $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = \infty\}$ eine Nullmenge ist.

Bemerkung. Das Cantorsche Diskontinuum ist eine Menge $C \subset [0, 1]$, $C \in \mathfrak{B}$, welche die bemerkenswerte Eigenschaft hat, dass sie gleichzeitig überabzählbar ist und Maß 0 besitzt. Da außerdem $\mathfrak{B} \cong \mathbb{R}$ gilt, folgt $\mathcal{P}(C) \cong \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ncong \mathbb{R} \cong \mathfrak{B}$. Somit gibt es eine Nullmenge $N \subset C$, die nicht in $\mathfrak{B}$ liegt. Es folgt:

Satz. Der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu)$ ist nicht vollständig.

Def. Sei $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n_L, \lambda)$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n, \mu$, dann heißt $\mathfrak{B}_L$ die **Lebesguesche σ-Algebra** und λ das **Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}^n$ (analog: $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}}, \lambda)$).

Satz. Sei $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, dann gilt $\int_\Omega f \, d\mu = 0 \iff f \overset{\text{f.ü.}}{=} 0$.

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbar mit $f \overset{\text{f.ü.}}{=} g$, dann gilt:

- Wenn $f, g \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$, dann $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$.
- Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, dann $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$.

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ eine messbare Fkt. und $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), g \geq 0$. Wenn $|f| \overset{\text{f.ü.}}{\leq} g$, dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Satz (Lemma von Fatou)**.** Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit f_n μ-integrierbar und $f_n \overset{\text{f.ü.}}{\geq} 0$. Dann $\int_\Omega (\liminf_{n \to \infty} f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$.

Satz. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge messbarer Fkt. $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ und $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), g \geq 0$, sodass $\forall\, n \in \mathbb{N} : |f_n| \overset{\text{f.ü.}}{\leq} g$. Dann:

$$\int_\Omega (\liminf_{n \to \infty}(f_n)) \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty}(\int_\Omega f_n \, d\mu) \leq$$
$$\leq \limsup_{n \to \infty}(\int_\Omega f_n \, d\mu) \leq \int_\Omega (\limsup_{n \to \infty} f_n) \, d\mu.$$

Satz (von der majorisierten Konvergenz)**.** Sei $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), g \geq 0$.

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge messbarer Fkt. $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ mit $|f_n| \overset{\text{f.ü.}}{\leq} g$ (Majorisierung). Sei ferner $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar mit $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{f.ü.}} f$, d. h. $\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \text{ falsch}\}$ ist Nullmenge.

Dann ist f integrierbar mit $\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$.

Satz. Sei $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ bzw. $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathfrak{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$, $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann:

$$\int_A f \, d\mu := \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f \, d\mu \right).$$

Satz. Seien $f, f_j : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $j \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen, $g : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ integrierbar, sodass $|\sum_{j=1}^{n} f_j| \overset{\text{f.ü.}}{\leq} g \, \forall n \in \mathbb{N}$ und $f \overset{\text{f.ü.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_j$. Dann sind f, f_j integrierbar mit $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu$.

Satz (Ableiten unter Integral)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f : (a, b) \times \Omega \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine Funktion, sodass:

- Für alle $t \in (a, b)$ ist die Abbildung $f(t, -) : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar.
- Für alle $\omega \in \Omega$ ist die Abbildung $f(-, \omega) : (a, b) \to \mathbb{R}$ diff'bar.
- Es gibt eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $g \geq 0$, sodass für alle $t \in (a, b)$ und fast alle $\omega \in \Omega$ gilt: $|f(-, \omega)'(t)| \leq g(\omega)$.

Dann ist die Funktion $F : (a, b) \to \mathbb{R}, t \mapsto \int_\Omega f_t \,\mathrm{d}\mu$ differenzierbar mit $F'(t) = \int_\Omega h_t \,\mathrm{d}\mu$, wobei $h_t : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto f(-, \omega)'(t)$.

Satz. Sei $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Dann ist die Abbildung

$$f\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

ein Maß, genannt **Maß mit der Dichte f bzgl. μ** oder **Stieltjes-Maß** zu f.

Zusammenhang mit dem Riemann-Integral

Def. Eine **Zerlegung** eines Intervalls $[a, b]$ ist eine geordnete endliche Teilmenge $\{a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b\} \subset [a, b]$.

Notation. Die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$ ist $\mathcal{Z}([a, b])$.

Def. Die **Feinheit** einer Zerlegung $\{x_0 < ... < x_k\} \in \mathcal{Z}([a, b])$ ist

$$|Z| := \max\{x_j - x_{j-1} \,|\, j \in \{1, ..., n\}\}.$$

Def. Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z = \{a_0, ..., a_n\} \in \mathcal{Z}([a, b])$ bezeichnen

$$O(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} (\sup\{f(x) \,|\, x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1}),$$

$$U(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} (\inf\{f(x) \,|\, x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1})$$

die **(Darbouxschen) Ober- und Untersummen** von f bzgl. Z.

Notation.

$$O_*(f) := \inf\{O(f, Z) \,|\, Z \in \mathcal{Z}([a, b])\}$$
$$U^*(f) := \sup\{U(f, Z) \,|\, Z \in \mathcal{Z}([a, b])\}$$

Def. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, wenn $O_*(f) = U^*(f)$. In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x := O_*(f) = U^*(f) \quad \textbf{Riemann-Integral} \text{ von } f.$$

Notation. Sei $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{Z}([a, b])$ mit $Z_k = \{a_0^k, a_1^k, ..., a_{n_k}^k\}$. Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren wir $f^k, f_k, f^*, f_* : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f^k = \sup f([a, a_1^k]) \cdot \mathbb{1}_{[a, a_1^k]} + \sum_{j=2}^{n_k} \sup f([a_{j-1}^k, a_j^k]) \cdot \mathbb{1}_{(a_{j-1}^k, a_j^k]},$$

$$f_k = \inf f([a, a_1^k]) \cdot \mathbb{1}_{[a, a_1^k]} + \sum_{j=2}^{n_k} \inf f([a_{j-1}^k, a_j^k]) \cdot \mathbb{1}_{(a_{j-1}^k, a_j^k]}$$

$$f^*(x) = \liminf_{y \to x} f(y) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \inf \{f(y) \,|\, y \in [x - \epsilon, x + \epsilon] \cap [a, b]\}$$

$$f^*(x) = \limsup_{y \to x} f(y) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \sup \{f(y) \,|\, y \in [x - \epsilon, x + \epsilon] \cap [a, b]\}$$

Bemerkung. Es gilt: $f_* \leq f \leq f^*$ und $f_*(x_0) = f(x_0) = f^*(x_0)$ für $x_0 \in [a, b]$ genau dann, wenn f in x_0 stetig ist.

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{Z}([a, b])$ mit $\lim_{n \to \infty} |Z_k| = 0$. Dann gilt:

- Sei $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n_k} \{a_j^k\}$ die Vereinigung aller Zerlegungen $Z_k, k \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in [a, b] \setminus R$ gilt dann
$$\lim_{k \to \infty} f^k(x) = f^*(x) \quad \text{und} \quad \lim_{k \to \infty} f_k(x) = f_*(x).$$
- Die Funktionen f^* und f_* sind Borel-messbar und integrierbar bzgl. des Borel-Maßes μ mit
$$\int_{[a,b]} f^* \,\mathrm{d}\mu = O_*(f) \quad \text{und} \quad \int_{[a,b]} f_* \,\mathrm{d}\mu = O^*(f).$$

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

- f ist Riemann-integrierbar.
- f ist fast-überall stetig (im Sinne des Lebesgue-Borel-Maßes).

Satz. Ist eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist sie auch auf $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar bzgl. dem Lebesgue-Maß λ und es gilt

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Satz. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ über jedem kompakten Teilintervall von I Riemann-integrierbar. Dann sind äquivalent:

- $|f|$ ist auf I uneigentlich Riemann-integrierbar.
- f ist auf I Lebesgue-integrierbar.

Falls eine der Bedingungen erfüllt ist, so stimmt das Riemann-Integral von f auf I mit dem Lebesgue-Integral von f auf I überein.

Miscellanea

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Dann ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}, t \mapsto \int_{[a,t]} f \,\mathrm{d}\lambda$ stetig.

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Wenn $\forall\, t \in [a, b]$ gilt: $\int_{[a,t]} f \,\mathrm{d}\lambda = F(t) = 0$, dann $f \overset{\text{f.ü.}}{=} 0$.

Notation. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, dann setzen wir

$$C(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f \text{ stetig in } x\} \text{ und}$$
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f \text{ unstetig in } x\} = \mathbb{R} \setminus C(f).$$

Def. Sei $A \subset \mathbb{R}$, A heißt

- **G_δ-Menge**, wenn gilt: $A = \cap_{n \in \mathbb{N}} O_n$, $O_n \Subset \mathbb{R} \; \forall\, n \in \mathbb{N}$
- **F_σ-Menge**, wenn gilt: $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, $F_n \Subset \mathbb{R} \; \forall\, n \in \mathbb{N}$

Bemerkung. A ist G_δ-Menge $\iff$ A^C ist F_σ-Menge.

Satz (Young)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Dann ist $C(f)$ eine G_δ-Menge (und somit $D(f)$ eine F_σ-Menge).

Korollar. Es gibt keine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Def. Ein Maß μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ heißt **translationsinvariant**, wenn für jedes $v \in \mathbb{R}^d$ gilt $(T_v)_*\mu = \mu$, wobei $T_v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto x + v$ die Translation um den Vektor v bezeichnet.

Notation. Bezeichne mit μ_{LB} das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$.

Notation. Der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^d$ ist $W_1 := ((0, ..., 0), (1, ..., 1)]$.

Satz. Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\alpha := \mu(W_1) < \infty$, dann gilt $\mu = \alpha \cdot \mu_{LB}$.

Satz. Sei $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} \,|\, \det A \neq 0\}$, dann gilt

$$A_*\mu_{LB} = \tfrac{1}{|\det(A)|} \cdot \mu_{LB}.$$

Satz. Das Lebesgue-Borel-Maß μ_{LB} ist invariant unter Transformationen in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Ferner ist μ_{LB} invariant unter Euklidischen Bewegungen.

Satz (Kurt Hensel)**.** Sei $\Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gibt es einen Gruppenautomorphismus $\phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, sodass $\Phi = \phi \circ \det$.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $h \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$. Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $h\mu$-integrierbar, wenn $(f \cdot h)$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}(h\mu) = \int_\Omega f \cdot h \,\mathrm{d}\mu.$$

Obige Gleichung ist auch erfüllt, wenn lediglich $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ gilt.

Bemerkung. Somit ist $g(h\mu) = (g \cdot h)\mu$.

Satz. Sei $U, \widetilde{U} \Subset \mathbb{R}^d$, $\phi : U \to \widetilde{u}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, dann gilt:

$$\phi_*^{-1} \mu_{LB}|_{\widetilde{U}} = \underbrace{|\det(D\phi)|}_{U \to \mathbb{R}_{>0} \text{ stetig}} \mu_{LB}|_U$$

Satz. Sei $U, \widetilde{U} \Subset \mathbb{R}^d$, $\phi : U \to \widetilde{u}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und $Q = (a, b) \subset U$ Elementarquader mit $a \lhd b$, dann gilt

$$\mu_{LB}(Q) \cdot \inf_{q \in Q} |\det D\phi(q)| \leq \mu_{LB}(\phi(Q)) \leq \mu_{LB}(Q) \cdot \sup_{q \in Q} |\det(D(\phi(q)))|.$$

Satz (Transformationssatz). Sei $U, \widetilde{U} \Subset \mathbb{R}^d$ und sei $\phi : U \to \widetilde{U}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion $f : \widetilde{U} \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann auf $\widetilde{U}$ Lebesgue-Borel-integrierbar, wenn $(f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| : U \to \overline{\mathbb{R}}$ auf U Lebesgue-Borel-interierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_U (f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| \, \mathrm{d}\mu_{LB} = \int_{\phi(U)} f \, \mathrm{d}\mu_{LB} = \int_{\widetilde{U}} f \, \mathrm{d}\mu_{LB}.$$

Obige Gleichung ist auch erfüllt, wenn lediglich $f \in \overline{\mathbb{E}}(\widetilde{U}, \mathfrak{B}(\widetilde{U}))$ gilt.

Bemerkung. Im Transformationssatz kann man „Lebesgue-Borel" durch „Lebesgue" ersetzen.

Def. Seien $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)$ Maßräume für $j = 1, ..., n$. Die kleinste σ-Algebra $\mathfrak{A}$ auf σ, sodass alle $\pi_j, j = 1, ..., n$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_j)$-messbar sind, heißt **Produkt** der σ-Algebren $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_n$, notiert $\mathfrak{A} =: \mathfrak{A}_1 \otimes ... \otimes \mathfrak{A}_n$.

Satz. Sei $\mathcal{E}_j$ Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}_j, j = 1, ..., n$, d. h. $\mathfrak{A}(\mathcal{E}_j) = \mathfrak{A}_j$. Annahme: Für alle $j \in \{1, ..., n\}$ gibt es eine monoton gegen Ω_j wachsende Folge $(E_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}_j$. Dann ist

$$\mathfrak{A}_1 \otimes ... \otimes \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}(\mathcal{E}_1 \times ... \times \mathcal{E}_n) \text{ mit}$$
$$\mathcal{E}_1 \times ... \times \mathcal{E}_n = \{E_1 \times ... \times E_n \,|\, E_j \in \mathcal{E}_j, j = 1, ..., n\}.$$

Satz. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes ... \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})}_{n\text{-mal}}$.

Satz (Eindeutigkeit von Produktmaßen). Seien $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)$ Maßräume und E_j ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}_j$ für $j = 1, ..., n$. Angenommen, E_j ist stabil unter Schnitten und $\exists (E_k^{(j)})_{k \in \mathbb{N}} \uparrow \Omega_j$ mit $\mu_j(E_k^{(j)}) < \infty$ für alle j. Dann gibt es höchstens ein Maß $\nu : \mathfrak{A}_1 \otimes ... \otimes \mathfrak{A}_n \to [0, \infty]$, sodass für alle $E_j \in \mathcal{E}_j, j \in \{1, ..., n\}$ gilt:

$$\nu(E_1 \times ... \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdot ... \cdot \mu_n(E_n).$$

Def. Sei Ω eine Menge. Eine Teilmenge $\mathfrak{D} \subset \Omega$ heißt **Dynkin-System**, wenn gilt:
- $\Omega \in \mathfrak{D}$ • $D \in \mathfrak{D} \implies D^C = \Omega \setminus D \in \mathfrak{D}$
- $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge pw. disjunkter Mengen in $\mathfrak{D}$, dann: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathfrak{D}$

Notation. Seien Ω_1, Ω_2 Mengen, $\Omega \subset \Omega_1 \otimes \Omega_2, \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$

$$Q_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 \,|\, (\omega_1, \omega_2) \in Q\} = \pi_2(\pi_1^{-1}(\{\omega_1\}) \cap Q)$$
$$Q_{\omega_2} := \{\omega_1 \in \Omega_1 \,|\, (\omega_1, \omega_2) \in Q\} = \pi_1(\pi_2^{-1}(\{\omega_2\}) \cap Q)$$

Satz. $Q \subset \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2 \implies Q_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2, Q_{\omega_2} \in \mathfrak{A}_1$.

Satz. (Cavalieri 1) Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume, $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dann:

- $h_Q^1 : \Omega_1 \to [0, \infty]\,, \;\; \omega_1 \mapsto \mu_2(Q_{\omega_1})$ ist $(\mathfrak{A}_1, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar.
- $h_Q^2 : \Omega_2 \to [0, \infty]\,, \;\; \omega_2 \mapsto \mu_1(Q_{\omega_2})$ ist $(\mathfrak{A}_2, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar.

Satz (Existenz von Produktmaßen). Die Abbildungen

$$\nu_1 : \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \to [0, \infty]\,, \quad Q \mapsto \int_{\Omega_1} \mu_2(Q\omega_1) \, \mathrm{d}\mu_1$$
$$\nu_2 : \mathfrak{A}_2 \otimes \mathfrak{A}_1 \to [0, \infty]\,, \quad Q \mapsto \int_{\Omega_2} \mu_1(Q\omega_2) \, \mathrm{d}\mu_2$$

sind Maße und es gilt für alle $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$

$$\nu_1(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) = \nu_2(A_1 \times A_2)$$

und somit $\nu_1 = \nu_2$. Dieses Maß $\mu_1 \otimes \mu_2 := \nu_1 = \nu_2$ heißt **Produktmaß** von μ_1 und μ_2.

Notation. Für $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$ schreibe

$$f_{\omega_1} : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}, \, \omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2), \qquad f_{\omega_2} : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}}, \, \omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$$

Lemma. Angenommen, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar. Dann ist auch für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ die Abbildung f_{ω_1} $(\mathfrak{A}_2, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar und für alle $\omega_2 \in \Omega_2$ die Abbildung f_{ω_2} $(\mathfrak{A}_1, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar.

Satz (Tonelli). Sei $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$, dann:

- $\Omega_2 \to [0, \infty]\,, \;\; \omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f_{\omega_2} \, \mathrm{d}\mu_1$ ist $(\mathfrak{A}_2, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar,
- $\Omega_1 \to [0, \infty]\,, \;\; \omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, \mathrm{d}\mu_2$ ist $(\mathfrak{A}_1, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar,
- $\int_{\Omega_1 \otimes \Omega_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, \mathrm{d}\mu_2 \big) \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} \big(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2} \, \mathrm{d}\mu_1 \big) \, \mathrm{d}\mu_2.$

Satz (Fubini). Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-integrierbar. Dann ist für μ_1-fast-alle $\omega_1 \in \Omega_1$ der Schnitt f_{ω_1} μ_2-integrierbar, und die μ_1-fast-überall definierte Funktion $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, \mathrm{d}\mu_2$ ist μ_1-integrierbar. Analoges gilt mit 1 und 2 vertauscht. Es gilt:

$$\int_{\Omega_1 \otimes \Omega_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \big(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, \mathrm{d}\mu_2 \big) \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_2} \big(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2} \, \mathrm{d}\mu_1 \big) \, \mathrm{d}\mu_2.$$

Alternierende Multilinearformen

Notation. Sei im Folgenden V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Def. Eine **alternierende k-Form** auf V ist eine Abb.

$$\omega : \underbrace{V \times ... \times V}_{k\text{-fach}} \to \mathbb{R} \quad \text{mit}$$

- ω ist **multilinear**, d. h. linear in jedem Argument, d. h. für alle $l \in \{1, ..., k\}$ und $v_1, ..., v_{l-1}, v_{l+1}, ..., v_k \in V$ ist
$$\omega(v_1, ..., v_{l-1}, -, v_{l+1}, ..., v_k) \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}).$$
- Falls $v_j = v_l$ für $j < l$, dann ist $\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_l, ..., v_k) = 0$.

Bsp. Die Determinante ist eine alternierende n-Form auf $\mathbb{R}^n$.

Notation. $\Lambda^k V^* := \{k\text{-Formen auf } V\}$ für $k \in \mathbb{N}^*$

Bemerkung. $\Lambda^1 V^* = V^*$, $\Lambda^0 V^* := \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Lemma. Sei $\omega \in \Lambda V^*, \sigma \in S_k$, dann gilt:

$$\omega(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_1, ..., v_k).$$

Def. Für $\phi_1, ..., \phi_k \in \Lambda^1 V^* = V^*$ ist das **Dachprodukt** $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \in \Lambda^k V^*$ definiert durch

$$\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k : V \times ... \times V \to \mathbb{R}$$
$$(v_1, ..., v_k) \mapsto \det \begin{pmatrix} \phi_1(v_1) & \phi_1(v_2) & ... & \phi_1(v_k) \\ \phi_2(v_1) & \phi_2(v_2) & ... & \phi_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_k(v_1) & \phi_k(v_2) & ... & \phi_k(v_k) \end{pmatrix}$$

Eigenschaften.
- Das Dachprodukt von Elementen aus V^* ist in jedem Argument linear.
- Für $\sigma \in S_k$ gilt $\phi_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge \phi_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot (\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k)$.

Proposition.
- Ist $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ eine Basis von V^*, dann ist $\{\phi_{j_1} \wedge ... \wedge \phi_{j_k} \,|\, 1 \le j_1 < j_2 < ... < j_k \le n\}$ eine Basis von $\Lambda^k V^*$.
- $\dim(\Lambda^k V^*) = \binom{n}{k}$ • $\Lambda^k V^* = \{0\}$ für $k > n$

Proposition. Seien $\phi_1, ..., \phi_k \in V^*$ und $A = (a_{jl}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ gegeben. Dann gilt für $\varphi_j := \sum_{l=1}^k a_{jl} \phi_l \in V^*, j = 1, ..., k$:

$$\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k = \det(A) \cdot (\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k).$$

Satz. Seien $k, l, m \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:
- Es gibt eine eindeutig bestimmte bilineare Abbildung
$$(\Lambda^k V^*) \times (\Lambda^l V^*) \to \Lambda^{k+l} V^*, \quad (\omega, \widetilde{\omega}) \mapsto \omega \wedge \widetilde{\omega},$$
sodass für $\omega = \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k$ und $\widetilde{\omega} = \widetilde{\phi}_1 \wedge ... \wedge \widetilde{\phi}_l$ $(\phi_j, \widetilde{\phi}_i \in V^*)$ gilt:
$$(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k) \wedge (\widetilde{\phi}_1 \wedge ... \wedge \widetilde{\phi}_l) = \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_k \wedge \widetilde{\phi}_1 \wedge ... \wedge \widetilde{\phi}_l.$$
- Sei $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ eine Basis von V^*, dann gilt für $\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} (\phi_{i_1} \wedge ... \wedge \phi_{i_k})$ und $\widetilde{\omega} = \sum_{j_1 < ... < j_k} \widetilde{a}_{j_1 \ldots j_k} (\phi_{j_1} \wedge ... \wedge \phi_{j_k})$:
$$\omega \wedge \widetilde{\omega} = \sum_{\substack{i_1 < ... < i_k \\ j_1 < ... < j_l}} (a_{i_1 \cdots i_k} \cdot \widetilde{a}_{j_1 \cdots j_l}) \cdot (\phi_{i_1} \wedge ... \wedge \phi_{i_k} \wedge \phi_{j_1} \wedge ... \wedge \phi_{j_l})$$

Differentialformen

Notation. Sei im Folgenden $u \in U \Subset \mathbb{R}^n$.
Setze $T_u U := \{u\} \times \mathbb{R}^n = \{(u, V) \,|\, V \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n$

Bemerkung. $T_u U$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit
- $(u, V) + (u, W) = (u, V + W)$, • $\lambda(u, V) = (u, \lambda V)$.

Bemerkung. Für $U_1, U_2 \Subset \mathbb{R}^n$, $u \in U_1 \cap U_2$ gilt $T_u U_1 = T_u U_2$.

Def.
- **Tangentialbündel** an $U \Subset \mathbb{R}^n$: $TU = \bigsqcup_{u \in U} T_u U$
- **Dualraum** von $T_u U$: $T_u^* = \{\alpha : T_u U \to \mathbb{R} \,|\, \alpha \text{ linear }\}$
- **Kotangentialbündel** an U: $T^* U = \bigsqcup_{u \in U} T_u^* U$
- **Einsform** (Differentialform von Grad 1, Pfaffsche Form) auf U:
$$\omega : U \to T^* U \quad \text{mit} \quad \omega(u) \in T_u^* U$$

Bsp. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ total diff'bar, dann heißt die Einsform
$$\mathrm{d}f : U \to T^* U, \quad u \mapsto (u, V) \mapsto D_u f(V) \quad \textbf{totales Differential}.$$

Notation. $x_j : U \to \mathbb{R}, \quad (u_1, ..., u_n) \mapsto u_j$

Bemerkung. $\mathrm{d}x_j(v_1, ..., v_n) = v_j$

Def. Eine **k-Form** auf U, $k \in \mathbb{N}^*$, ist eine Abbildung

$$\omega : U \to \bigsqcup_{u \in U} \Lambda^k T_u^* U \quad \text{mit} \quad \omega(u) \in \Lambda^k T_u^* U \text{ für alle } u \in U.$$

Eine **0-Form** ist eine Abbildung $\omega : U \to \mathbb{R}$.

Beobachtung. Sei ω eine k-Form auf U, dann gibt es $\binom{n}{k}$ Funktionen $f_{j_1 \cdots j_k} : U \to \mathbb{R}$, $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$, sodass

$$\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} f_{j_1 \cdots j_k} \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_k}.$$

Def. Die k-Form ω auf U heißt stetig/diff'bar/$\mathcal{C}^k$, wenn alle $\binom{n}{k}$ Abbildungen $f_{j_1 \cdots j_k} : U \to \mathbb{R}$ stetig/total diff'bar/$\mathcal{C}^k$ sind.

Beobachtung. • $\{k\text{-Form auf } U\}$ ist Modul über $\{f : U \to \mathbb{R}\}$

- Für eine k-Form ω und eine l-Form η ist $\omega \wedge \eta$ definiert durch $(\omega \wedge \eta)(u) := \omega(u) \wedge \eta(u)$ für $u \in U$ eine $(k+l)$-Form auf U.

Def. Sei $\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} f_{j_1 \cdots j_k} (\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_k})$ eine diff'bare k-Form auf U, dann heißt die $(k+1)$-Form

$$\mathrm{d}\omega := \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \mathrm{d}f_{j_1 \cdots j_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_k} \quad \textbf{äußere Ableitung}.$$

Bemerkung. • Für eine diff'bare Einsform $\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ auf U gilt

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j<l} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_l} \right) \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_l.$$

- Eine diff'bare $(n-1)$-Form ω auf U können wir schreiben als

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} \wedge \ldots \wedge x_n$$

mit total diff'baren Funktionen $f_j : U \to \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathrm{d}\omega = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Satz. • $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$

- $\mathrm{d}(\lambda\omega_1 + \omega_2) = \lambda \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2$ • $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$, falls ω $\mathcal{C}^2$ ist

Def. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$, $\widetilde{U} \Subset \mathbb{R}^m$, $\phi : \widetilde{U} \to U$ total diff'bar und ω eine k-Form auf U. Die k-Form $\phi^*\omega$ auf $\widetilde{U}$, welche durch

$$(\phi^*\omega(\widetilde{u}))(X_1, \ldots, X_k) = (\omega(\phi(\widetilde{u})))(D_{\widetilde{u}}\phi(X_1), \ldots, D_{\widetilde{u}}\phi(X_k))$$

für alle $\widetilde{u} \in \widetilde{U}$, $X_1, \ldots, X_k \in T_{\widetilde{u}}\widetilde{U}$ definiert ist, heißt **Rücktransport** von ω über ϕ.

Anmerkung. Sei $\phi : \widetilde{U} \to U$ total diff'bar. Sei $\widetilde{u} \in \widetilde{U}$, dann ist

$$D_{\widetilde{u}}\phi : T_{\widetilde{u}}\widetilde{U} \to T_{\phi(\widetilde{u})}U \quad \text{linear.}$$

Satz. Sei $\check{U} \Subset \mathbb{R}^d$, $\widetilde{U} \Subset \mathbb{R}^m$, $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $\psi : \check{U} \to \widetilde{U}$ und $\phi : \widetilde{U} \to U$ total diff'bar. Seien $\omega, \omega_1, \omega_2$ k-Formen auf U, η ein l-Form auf U und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- $\phi^*(\lambda\omega_1 + \omega_2) = \lambda\phi^*(\omega_1) + \phi^*(\omega_2)$ (Linearität)
- $\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta)$ (Verträglichkeit mit $\wedge$)
- $\psi^*(\phi^*\omega) = (\phi \circ \psi)^*\omega$ (Funktorialität)
- $\mathrm{d}(\varphi^*\omega) = \phi^*(\mathrm{d}\omega)$, falls ω diff'bar und ϕ eine $\mathcal{C}^2$-Abb. ist
- Wenn $\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} f_{j_1 \cdots f_k} \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_k} : U \to \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\phi^*\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} (f_{j_1 \cdots j_k} \circ \phi) \mathrm{d}\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\phi_{j_k}$$

Def. • Für $k \ge 1$ heißt eine k-Form auf U **exakt**, wenn es eine diff'bare $(k-1)$-Form η auf U gibt, sodass $\omega = \mathrm{d}\eta$.

- Eine diff'bare k-Form ω auf U heißt **geschlossen**, wenn $\mathrm{d}\omega = 0$.

Beobachtung. Jede diff'bare exakte k-Form auf U ist geschlossen.

Def. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, falls es einen Punkt $u_0 \in U$ gibt, sodass für alle anderen Punkte $u \in U$ die Verbindungsstrecke von u_0 nach u in U liegt.

Lemma (Poincaré)**.** Ist U sternförmig, dann ist jede geschlossene, stetig diff'bare k-Form mit $k \ge 1$ auch exakt.

Bemerkung. Statt Sternförmigkeit kann man auch nur Zusammenziehbarkeit fordern.

Lemma. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $V \Subset R^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sodass der Zylinder $[0,1] \times U$ in V liegt. Sei σ eine geschlossene stetig diff'bare k-Form auf V mit $k \ge 1$ und sei $\varphi_r : U \to V$, $u \mapsto (r, u)$ für $r \in \{0, 1\}$. Dann gibt es eine stetig diff'bare $(k-1)$-Form η auf U mit $\varphi_1^*\sigma - \varphi_2^*\sigma = \mathrm{d}\eta$.

Vektoranalysis

Def. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, dann heißt das stetige Vektorfeld

$$\mathrm{grad} f : U \to \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(u), \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(u) \right)^T \quad \textbf{Gradient} \text{ von } f.$$

Def. Sei $F = (F_1, \ldots, F_n)^T : U \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-VF, dann heißt

$$\mathrm{div} F : U \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \sum_{j=1}^n \tfrac{\partial F_j}{\partial x_j} \quad \textbf{Divergenz} \text{ von } F.$$

Def. Ist n=3 und $F = (F_1, F_2, F_3)^T : U \to \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$-VF, dann ist die **Rotation** von f definiert als folgendes VF:

$$\mathrm{rot} F : U \to \mathbb{R}^3, \quad u \mapsto \left(\tfrac{\partial F_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial F_2}{\partial x_3}, \tfrac{\partial F_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x_1}, \tfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)^T (u)$$

Physiker-Notation. **Nabla-Operator**: $\vec{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$ Damit schreibt man auch:

$$\mathrm{grad} f = \vec{\nabla} f, \quad \mathrm{div} F = \vec{\nabla} \cdot F, \quad \mathrm{rot} F = \vec{\nabla} \times F$$

Physiker-Notation. Für Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$ verwendet man:

$$\mathrm{d}\vec{s} := (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3)^T$$
$$\mathrm{d}\vec{S} := (\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)^T$$
$$\mathrm{d}V := \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$$

Bemerkung. Sei ω_i eine i-Form auf $U \Subset \mathbb{R}^3$ für $i \in \{0,1,2,3\}$. Dann gilt für passende $f, g : U \to \mathbb{R}$ und Vektorfelder $F, G : U \to \mathbb{R}^3$:

$$\omega_0 = f, \quad \omega_1 = F \cdot \mathrm{d}\vec{s}, \quad \omega_2 = G \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \quad \omega_3 = g\mathrm{d}V$$

Angenommen, f, g, F, G sind stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\mathrm{d}f = \mathrm{grad} f \cdot \mathrm{d}\vec{s}, \quad \mathrm{d}\left(F \cdot \mathrm{d}\vec{s}\right) = \mathrm{rot} F \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \quad \mathrm{d}\left(G \cdot \mathrm{d}\vec{S}\right) = \mathrm{div} G \, \mathrm{d}V$$

Lemma. Für $f : U \to \mathbb{R}$ und $F : U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig diff'bar gilt

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot} F) = 0.$$

Lemma. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und $F, G : U \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbar.

- Wenn $\mathrm{rot} F = 0$, dann ex. $f : U \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit $F = \mathrm{grad} f$.
- Wenn $\mathrm{div} G = 0$, dann ex. $F : U \to \mathbb{R}^3$ stetig diff'bar mit $G = \mathrm{rot} F$.

Integration von Differentialformen

Def. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$, $\omega = f \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ eine n-Form, wobei $f : U \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar sei. Für eine Borel-Menge $C \subset U$ heißt dann

$$\int_C \omega \, \mathrm{d} := \int_C f \, \mathrm{d}\lambda_n \in \mathbb{R} \qquad \textbf{Integral} \text{ von } \omega \text{ über } C.$$

Def. Seien $U, \tilde{U} \Subset \mathbb{R}^n$. Ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\phi : \tilde{U} \to U$ heißt

- **orientierungserhaltend**, wenn $\det(J_{\tilde{u}}\phi) > 0$ für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$,
- **orientierungsumkehrend**, wenn $\det(J_{\tilde{u}}\phi) < 0$ für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$.

Lemma. Seien $U, \tilde{U} \Subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : \widetilde{U} \to U$ total diff'bar. Dann gilt für eine n-Form $\omega = f \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ auf U:

$$\phi^*\omega = ((f \circ \phi) \cdot \det(D\phi)) \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

Satz. Seien $U, \tilde{U} \Subset \mathbb{R}^n$, $C \subset \tilde{U}$ kompakt, $\phi : \tilde{U} \to U$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeo und $\omega = f \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ eine stetige n-Form auf U. Dann gilt:

- Wenn ϕ orientierungserhaltend: $\int_{\phi(C)} f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\phi(C)} \omega = \int_C \phi^*\omega$
- Wenn ϕ orientierungsumkehrend: $\int_{\phi(C)} f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\phi(C)} \omega = -\int_C \phi^*\omega$

Bemerkung (Teilung der Eins)*.* Setze

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & \text{für } |x| < 0 \\ 0, & \text{für } |x| \ge 1 \end{cases}$$

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k)$$

$$h_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tfrac{g(x-k)}{G(x)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Dann gilt $h_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathrm{supp}(h_k) = [k-1, k+1]$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Menge $\{h_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bildet eine **Teilung der Eins**, da

$$\forall \, x \in \mathbb{R} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tfrac{g(x-k)}{G(x)} = \tfrac{1}{G(x)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k) = 1.$$

Integration von Differentialformen auf UMFen

Def. Eine k-dimensionale **Untermannigfaltigkeit** (UMF) des $\mathbb{R}^n$ ist eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, sodass für alle $x \in M$ gilt:

$$\exists \, \text{Umgebung } \widetilde{U} \text{ von } x : \exists \widetilde{V} \Subset \mathbb{R}^n : \exists \widetilde{\phi} : \widetilde{U} \to \widetilde{V} \text{ Diffeo} :$$

$$\widetilde{\phi}(M \cap \widetilde{U}) = \widetilde{V} \cap \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\} \cong \widetilde{V} \cap \mathbb{R}^k$$

Nomenklatur. $\widetilde{\phi} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ heißt **UMF-Karte**, notiert $(\widetilde{\phi}, \widetilde{U})$.

Notation. Für $n \ge k$: $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$.

Notation. $U := M \cap \widetilde{U}$, $\quad V := \pi_k(\widetilde{V})$

Def. $\widetilde{\mathcal{A}} = \{\underbrace{(\widetilde{\phi}_i, \widetilde{U}_i)}_{\text{UMF-Karten von } M} \,|\, i \in I\}$ mit $M \subset \bigcup\limits_{i \in I} \widetilde{U}_i$ heißt **UMF-Atlas**.

Beobachtung. Sei $\widetilde{\phi} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ UMF-Karte von M, dann ist $U = M \cup \widetilde{U} \Subset M$ und $V = \widetilde{V} \cap \mathbb{R}^k \Subset \mathbb{R}^k$ (bzgl. Relativtopologie).

Def. Sei $\widetilde{\phi} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ eine UMF-Karte mit $x \in U = M \cap \widetilde{U}$. Dann heißt der Homöo $\phi := \pi_k \circ \widetilde{\phi}|_U : U \to V$ **Karte** von M um x.

Def. Sei $\widetilde{A} = \{(\widetilde{\phi}_i, \widetilde{U}_i) \,|\, i \in I\}$ ein UMF-Atlas, dann heißt die Menge der davon induzierten Karten $\mathcal{A} = \{(\phi_i, U_i) \,|\, i \in I\}$ **Atlas** von M.

Def. Ein Atlas $\mathcal{A} = \{(\phi_i, U_i) \,|\, i \in I\}$ heißt **orientiert**, wenn alle **Kartenwechsel**, das sind die Diffeomorphismen

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} : \phi(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

für $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ orientierungserhaltend sind.

Def.
- Eine UMF M von $\mathbb{R}^n$ heißt **orientierbar**, wenn M einen orientierten Atlas besitzt.
- Zwei orientierte Atlanten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ von M heißen gleichorientiert, wenn $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ ein orientierter Atlas ist.
- Eine **Orientierung** auf einer orientierbaren UMF M ist eine Äquivalenzklasse bzgl. der Äquivalenzrelation

$$\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2 \quad :\iff \quad \mathcal{A}_1 \text{ und } \mathcal{A}_2 \text{ sind gleichorientiert}$$

  auf der Menge der Atlanten auf M.
- M orientierbare UMF, $[A]$ Orientierung von M, dann heißt $(M, [\mathcal{A}])$ **orientierte Untermannigfaltigkeit**.
- Ein orientierter Atlas $\mathcal{A}'$ von $(M, [\mathcal{A}])$ heißt **positiv orientiert**, wenn $\mathcal{A}' \in [\mathcal{A}]$.

Notation. Folgender Diffeomorphismus ist orientierungsumkehrend:

$$\tau : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad (x_1, ..., x_m) \mapsto (x_1, ..., x_{m-1}, -x_m)$$

Def. Sei $(M, [\mathcal{A}])$ eine orientierte UMF, $\mathcal{A} = \{(\phi_i, U_i) \,|\, i \in I\}$ ein positiv orientierter Atlas. Dann ist auch

$$\mathcal{A}' = \{(\phi_i', U_i) \,|\, i \in I\} \quad \text{mit} \quad \phi_i' = \tau \circ \phi_i : U_i \to \tau(V_i)$$

ein orientierter Atlas von M, aber $\mathcal{A}' \notin [A]$.
Dann heißt $-[\mathcal{A}] := [\mathcal{A}']$ die zu $[\mathcal{A}]$ entgegengesetzte Orientierung.

Bemerkung. Wenn $(M, [\mathcal{A}])$ nicht zusammenhängend ist, gibt es nicht nur die zwei Orientierungen $[\mathcal{A}]$ und $-[\mathcal{A}]$.

Def. Sei $\hat{U} \Subset \mathbb{R}^n$ und $M \subset \hat{U}$ eine orientierbare k-dimensionale UMF und $[\mathcal{A}]$ eine Orientierung von M. Sei ω eine stetige k-Form auf $\hat{U}$. Sei außerdem $C \subset M$ kompakt.

- Angenommen, es gibt eine Karte $\phi : U \to V$ mit $C \subset U$ in einem positiv orientierten Atlas $\mathcal{A}$ von $(M, [\mathcal{A}])$. Dann setzen wir

$$\int_C \omega := \int_{(C,[\mathcal{A}])} \omega := \int_{\phi(C)} (\phi^{-1})^* \omega.$$

- Angenommen, es gibt keine solche Karte. Dann wählen wir eine passende Teilung der Eins, also eine endliche Familie

$$\{\alpha_j : C \to \mathbb{R} \text{ stetig} \,|\, j \in \{1, ..., r\}\} \text{ mit } \forall\, x \in C : \sum_{i=1}^r \alpha_j(x) = 1,$$

  sodass es für jedes $j \in \{1, ..., r\}$ eine Karte $\phi_j : U_j \to V_j$ aus einem positiv orientierten Atlas von $(M, [\mathcal{A}])$ mit $\operatorname{supp}(\alpha_j) \subset U_j$ gibt. Setze $C_j := \operatorname{supp}(\alpha_j) \cap C$ für $j \in \{1, ..., r\}$ und definiere

$$\int_C \omega := \int_{(C,[\mathcal{A}])} \omega := \sum_{j=1}^r \int_{\phi_j(C_j)} (\alpha_j \circ \phi_j^{-1}) \cdot (\phi_j^{-1})^* \omega.$$

Notation. $H_k := \{(x_1, ..., x_k) \subset \mathbb{R}^k \,|\, x_1 \leq 0\}$ heißt Halbraum.

Bemerkung. $\partial H_k = \{(0, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k \,|\, x_2, ..., x_k \in \mathbb{R}\}$

Beobachtung. ∂H_k ist eine $(k-1)$-dimensionale UMF von $\mathbb{R}^k$ mit Atlas $\mathcal{A} = \{(\beta, \partial H_k)\}$, wobei die Karte β definiert ist durch

$$\tilde{\beta} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \quad (x_1, ..., x_k) \mapsto (x_2, ..., x_k, x_1),$$
$$\beta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-1}, \quad (0, x_2, ..., x_k) \mapsto (x_2, ..., x_k).$$

Def. Sei $C \subset M \subset \mathbb{R}^n$, wobei C kompakt und M eine k-dim. UMF. Ein Punkt $x \in M$ heißt **Randpunkt** von C relativ zu M, wenn gilt:

$$\forall \underbrace{U \Subset M}_{\text{in der Relativtopologie}} \text{ mit } x \in U : U \cap C \neq \emptyset \text{ und } U \cap (M \setminus C) \neq \emptyset.$$

Notation. $\partial_M C := \{\text{Randpunkte von } C \text{ relativ zu } M\}$

Def. Sei $C \subset M \subset \mathbb{R}^n$, wobei C kompakt und M eine k-dim. UMF. Dann hat C glatten Rand in M, wenn gilt: Für alle $x \in \partial_M C$ gibt es eine UMF-Karte $\widetilde{\phi} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ mit $x \in \widetilde{U}$, sodass für die Karte ϕ gilt:
- $\phi(U \cap C) = V \cap H_k$
- $\phi(U \cap \partial_M C) = V \cap \partial H_k$

Def. Eine UMF-Karte $(\widetilde{\phi}, \widetilde{U})$ (bzw. eine Karte (ϕ, U)), die diese Bedingungen erfüllt, heißt **Rand-adaptiert**.

Notation. $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\;(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_2, ..., x_k, x_1, x_{k+1}, ..., x_n)$

Lemma. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale UMF mit $k \geq 2$ und $C \subset M$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann gilt:

- Es gibt einen UMF-Atlas $\mathcal{A} = \{(\widetilde{\phi}_i, \widetilde{U}_i) \,|\, i \in I\}$ bestehend aus bzgl. C Rand-adaptierten UMF-Karten von M.
- Ist $\mathcal{A}$ ein solcher UMF-Atlas, dann ist ein UMF-Atlas von $\partial_M C$:

$$\mathcal{A}' := \{(\phi_i', \widetilde{U}_i) \,|\, i \in I\}. \quad \text{mit} \quad \phi_i' := \rho \circ \widetilde{\phi}$$

  Insbesondere ist $\partial_M C$ eine $(k-1)$-dimensionale UMF.
- Ist M orientiert, dann gibt es einen positiv orientierten, Rand-adaptierten Atlas $\mathcal{A} = \{(\widetilde{\phi}_i, \widetilde{U}_i) \,|\, i \in I\}$ von M. Sodann ist $\mathcal{A}'$ ein orientierter UMF-Atlas von $\partial_M C$.

Def. $[\mathcal{A}']$ heißt **induzierte Orientierung** auf $\partial_M C$.

Lemma. Sei ω eine stetig diff'bare $(k-1)$-Form auf $\mathbb{R}^k$ mit kompaktem Träger. Dann gilt:

$$\int_{H_k} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial H_k} \omega.$$

Satz (Stokes)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte k-dim. UMF von $\mathbb{R}^n$ und $C \subset M$ kompakt mit glattem Rand $\partial_M C$. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset U$ sowie ω eine stetig diff'bare $(k-1)$-Form auf U. Dann gilt (bzgl. der induzierten Orientierung auf $\partial_M C$):

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \int_{\partial_M C} \omega$$

Korollar. Sei ω stetig diff'bare $(k-1)$-Form auf $\widehat{U} \Subset \mathbb{R}^n$, $M \subset \widehat{U}$ eine orientierte k-dimensionale kompakte UMF. Dann gilt: $\int_M \mathrm{d}\omega = 0$

Satz (Divergenzsatz)**.** Sei $C \subset \hat{U} \Subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, $C^\circ \neq \emptyset$, $C = \overline{C^\circ}$, $G : \hat{U} \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld, dann gilt:

$$\int_C (\operatorname{div} G) \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\partial C} \langle G, \nu \rangle \,\mathrm{d}\mathcal{A}.$$

Def. Eine $(n-1)$-dimensionale UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Hyperfläche**.

Def. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine UMF und $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^\infty$ mit $\operatorname{im}(c) \subset M$, dann heißt der Vektor $(c(0), c'(0)) \in T_{c(0)}\mathbb{R}^n$ **Tangentialvektor** an M in $c(0) = x$.

Def. Die Menge aller Tangentialvektoren

$$T_x M = \{(x, v) \in T_x\mathbb{R}^n \,|\, (x, v) \text{ Tangentialvektor an } M \text{ in } x\}$$

heißt **Tangentialraum** an M in x.

Proposition. Sei $\widetilde{\phi} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ (mit $U, V \Subset \mathbb{R}^n$, ϕ ein Diffeomorphismus) eine UMF-Karte von M um x und ϕ sei die induzierte Karte. Dann gilt

$$T_x M = \{x\} \times D(\widetilde{\phi}^{-1})(\phi(x))\{y \in \mathbb{R}^n \,|\, y_{k+1} = ... = y_n = 0\}$$
$$= \{x\} \times \operatorname{span}\{\partial_1 \phi^{-1}(\phi(x)), ..., \partial_k \phi^{-1}(\phi(x))\}.$$

Def. $N_x M := (T_x M)^\perp$ heißt **Normalraum** an M in X

Def. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche. Eine stetige Abbildung $\nu : M \to \S^{n-1}$ heißt **Einheitsnormalenvektorfeld** (ENF) auf M, wenn $\forall\, x \in X : \langle x, \nu(x) \rangle \in N_x M$.

Def. Sei $(M, [\mathcal{A}])$ eine orientierte HF in $\mathbb{R}^n$. Ein ENF $\nu : M \to S^{n-1}$ heißt **positiv orientiert**, wenn

$$\forall\, x \in U : \det(\nu(x), \partial_1\phi^{-1}(\phi(x)), ..., \partial_{n-1}\phi^{-1}(\phi(x))) > 0,$$

wobei (ϕ, U) eine positiv orientierte Karte von M.

Satz. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche.
- Ist $[\mathcal{A}]$ eine Orientierung von M, so gibt es ein eindeutig bestimmtes positiv orientiertes (bzgl. $[\mathcal{A}]$) ENF auf M.
- Ist ν ein ENF auf M, dann trägt M genau eine Orientierung, sodass ν positiv orientiert ist.

Def. Sei $\phi : \partial C \cap U \to V \Subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von ∂C. Dann heißt

$$g = g_\phi : V \to \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} \langle \partial_1\phi^{-1}(v), \partial_1\phi^{-1}(v) \rangle & \langle \partial_2\phi^{-1}(v), \partial_1\phi^{-1}(v) \rangle \\ \langle \partial_1\phi^{-1}(v), \partial_2\phi^{-1}(v) \rangle & \langle \partial_2\phi^{-1}(v), \partial_2\phi^{-1}(v) \rangle \end{pmatrix}$$

1. Fundamentalform von ∂C bzgl. ϕ.

Def. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale UMF mit endlichen UMF-Atlas und $\{(\tilde{\phi}_j, U_j) \mid j = 1, ..., m\}$ der davon induzierte Atlas. Ist nun $\{\alpha_j \mid j = 1, ..., m\}$ eine stetige Teilung der Eins auf $\bigcup_{j=1}^{m} \tilde{U}_j$ mit $\alpha_j(x) = 0$ für $x \in (\bigcup_{l=1}^{m} \hat{U}_l) \setminus U_j$ Das **Oberflächenintegral** einer stetigen Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist

$$\int_M f \, \mathrm{d}S := \sum_{j=1}^{m} \int_{\phi_j(U_j)} ((\alpha_j \cdot f) \circ \phi_j^{-1}) \sqrt{\det(g_{\phi_j})} \, \mathrm{d}\lambda_k$$

Satz (Gauß-Ostrogradski)**.** Sei $\hat{U} \Subset \mathbb{R}^3$, $G = (G_1, ..., G_3)^T : \hat{U} \to \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld und $C \subset \hat{U}$ kompakt. Dann gilt

$$\int_C (\mathrm{div} G) \, \mathrm{d}V = \int_{\partial C} G \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \qquad \int_C (\mathrm{div} G) \, \mathrm{d}\lambda_3 = \int_{\partial C} \langle G, \nu \rangle \, \mathrm{d}S$$

Def. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve. Dann heißt

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t \quad \textbf{Kurvenintegral} \text{ von } f \text{ längs } \gamma.$$

Satz (Stokes, klassisch)**.** Sei $\hat{U} \Subset \mathbb{R}^3$, $M \subset \hat{U}$, eine 2-dimensionale UMF (also eine HF) mit positiv orientierten ENF ν. Sei $C \subset M$ kompakt mit glattem Rand und τ das Einheitstangentialvektorfeld von $\partial_M C$. Dann gilt für ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld $F : \hat{U} \to \mathbb{R}^3$:

$$\int_{\partial_M C} \langle F, \tau \rangle \, \mathrm{d}s = \int_C \langle \mathrm{rot} F, \nu \rangle \, \mathrm{d}S$$

Bemerkung. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mit $(x, y)^T \mapsto x + iy$.

Def. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn ihre (totalen) Ableitungen in jedem Punkt von U $\mathbb{C}$-linear sind.

Beobachtung. Eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn folgende Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann erfüllt sind:

$$\partial_1 u = \partial_2 v, \quad \text{und} \quad \partial_2 u = -\partial_1 v$$

Def. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig diff'bar und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t \quad \textbf{komplexes Kurvenintegral}.$$

Satz (Cauchyscher Integralsatz)**.** Sei $V \Subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei ferner $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine glatte reguläre einfach geschlossene Kurve und $C \subset \mathbb{C}$ das Kompaktum, welches vom Bild von γ berandet wird. Dann gilt

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = 0.$$