Spektralsequenzen

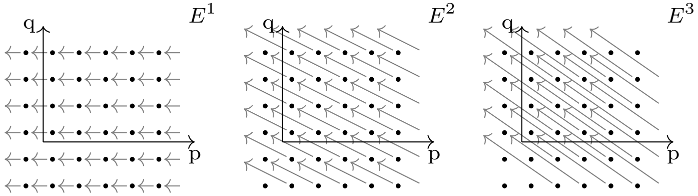
Sei $\mathcal{A}$ im Folgenden eine abelsche Kategorie.

Def. Eine (homologische) **Spektralsequenz** (SS) besteht aus

- Objekten $E^r_{p,q} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \geq 1$,
- Morphismen $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ mit $d^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{p,q} = 0$
- und Isos $\alpha : H_{p,q}(E^r) \coloneqq \ker(d^r_{p,q}) / \operatorname{im}(d^r_{p+r,q-r+1}) \xrightarrow{\cong} E^{r+1}_{p,q}$.

Sprechweise. • Die Morphismen $d^r_{p,q}$ heißen **Differentiale**.
• Die Gesamtheit $E^r \coloneqq \{E^r_{p,q}\}_{p,q}$ mit $r \in \mathbb{N}$ fest heißt r-te **Seite**.

Bem. Man stellt Seiten in einem 2-dim Raster dar:



Bem. Bei einer kohomologischen Spektralsequenz sind die Indizes vertauscht und die Differentiale laufen $d^{p,q}_r : E^{p,q}_r \to E^{p+r,q-r+1}_r$.

Def. Eine Spektralsequenz **konvergiert**, falls für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ ein $R \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $r \geq R$ die Differentiale von und nach $E^r_{p,q}$ null sind und damit $E^\infty_{p,q} \coloneqq E^R_{p,q} \cong E^{R+1}_{p,q} \cong E^{R+2}_{p,q} \ldots$
Der **Grenzwert** der SS ist die Unendlich-Seite $E^\infty \coloneqq \{E^\infty_{p,q}\}_{p,q}$.

Notation. $E^r \Rightarrow E^\infty$

Def. Eine SS **degeneriert** auf Seite R, wenn $d^r_{p,q} = 0$ für alle $r \geq R$.

Bem. Das entspricht der gleichmäßigen Konv. aus der Analysis.

Bem. Viele Spektralsequenzen leben im ersten Quadranten, d. h. $E^r_{p,q} = 0$ wenn $p < 0$ oder $q < 0$. Das impliziert, dass für p, q fest und r groß alle Differentiale von und nach $E^r_{p,q}$ aus dem ersten Quadranten heraus- oder hineinführen und damit Null sind.

Def. Ein **exaktes Pärchen** in $\mathcal{A}$ ist gegeben durch Objekte $A, E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ und Morphismen wie folgt

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

sodass das Dreieck an jeder Ecke exakt ist.

Bem. Für das Differential $d \coloneqq j \circ k : E \to E$ gilt $d^2 = 0$.

Def. Sei ein exaktes Pärchen wie oben gegeben.
Dann gibt es ein **abgeleitetes Pärchen**

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "i'"] & & A' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

mit • $E' \coloneqq \ker(d) / \operatorname{im}(d)$, • $A' \coloneqq i(A) \subset A$,
• $i' \coloneqq i|_{A'}$ • $j'(i(a)) \coloneqq [j(a)] \in E'$ • $k'([e]) \coloneqq k(e)$

Lem. Das abgeleitete Pärchen eines exakten Pärchens ist exakt.

Bem. Man erhält nun aus einem exakten Pärchen eine Spektralsequenz (im nachfolgenden Sinne) durch iteriertes Ableiten.

Bem. Man kann auch die r-te Seite als einzelnes Obj. E^r auffassen. Dann ist eine **Spektralsequenz** gegeben durch Objekte E^r, $r \geq 1$, Differentiale $d^r : E^r \to E_r$ mit $d^r \circ d^r = 0$ und Isomorphismen $\alpha^r : H(E^r) \coloneqq \ker(d^r) / \operatorname{im}(d^r) \to E^{r+1}$.

Def. Eine **Filtrierung** eines A-Moduls M ist eine aufsteigende Folge ... $\subseteq F_p M \subseteq F_{p+1} M \subseteq$ ... von Untermodulen von M mit $p \in \mathbb{Z}$, sodass $0 = \cap_p F_p M$ und $M = \cup_p F_p M$.