Dyn. Systeme in der Zahlentheorie

Def. Ein **dynamisches System** ist ein kompakter metrischer Raum X mit einer Gruppen-Wirkung $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(X)$, $g \mapsto T_g$ oder einer Monoid-Wirkung $\rho : M \to \mathrm{End}(X)$, $m \mapsto T_m$.

Bem. Falls $G = \mathbb{Z}$ oder $M = \mathbb{N}$, dann bezeichnen wir mit $T \coloneqq T_1$ den Erzeuger der Aktion und nennen (X, T) ein **zykl. System**.

Def. Sei X ein topol. Raum, $T : X \to X$ stetig. Ein Punkt $x \in X$ heißt **wiederkehrend**, falls für für alle Umgebungen $V \subset X$ von x ein $n \geq 1$ existiert mit $T^n(x) \in V$.

Bem. Sei X sogar ein metrischer Raum, $x \in X$ wiederkehrend. Dann gibt es eine Folge (n_k) mit $d(T^{n_k}(x), x) \to 0$ für $k \to \infty$.

Theorem. Sei X ein kompakter topol. Raum, $T : X \to X$ stetig. Dann gibt es einen wiederkehrenden Punkt.

Def. Sei K eine kompakte Gruppe, $a \in K$ und $T(x) \coloneqq ax$. Dann heißt (K, T) ein **Kronecker-System**.

Theorem. Jeder Punkt $x \in K$ in einem Kronecker-System ist wiederkehrend.

Def. Ein Homomorphismus zwischen zwei dyn. Systemen (X, G) und (X', G) (zweimal die gleiche Gruppe oder Monoid G) ist eine G-äquivariante stetige Abbildung $\phi : X \to X'$.

Def. Ein dyn. System (Y, G) ist **Faktor** eines dyn. System (X, G), wenn es einen surjektiven Homomorphismus $(X, G) \to (Y, G)$ gibt. Man nennt (X, G) dann eine **Erweiterung** von (Y, G).

Bem. Sei $\phi : X \to Y$ surjektiv. Dann kann man Y mit der Menge der Fasern von ϕ identifizieren.

Theorem. Sei $\phi : (X, T) \to (Y, T)$ ein Homomorphismus von zykl. Systemen und $x \in X$ wiederkehrend. Dann ist auch $\phi(x)$ wiederkehrend.