Zusammenfassung Topologie

Def. Ein **metrischer Raum** (X, d) besteht aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass f.a. $x, y, z \in X$ gilt:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ($\triangle$-Ungleichung)

Def. Für einen metrischen Raum (X, d) und eine Teilmenge $A \subset X$ ist $(A, d|_A)$ ein metrischer Raum und $d|_A$ heißt **induzierte Metrik**.

Def. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, falls für alle $x \in X$ gilt:

$$\forall \epsilon{>}0 \,:\, \exists \delta{>}0 \,:\, \forall x'{\in}X \,:\, d_X(x, x') < \delta \implies d_X(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Def. Die **offene Kugel** von Radius ϵ um $x \in X$ ist

$$B_\epsilon(x) := \{p \in X \,|\, d(p, x) < \epsilon\}.$$

Def. Eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes heißt **offen**, falls für alle $u \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(u) \subset U$.

Proposition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann offen, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Def. Ein **topologischer Raum** $(X, \mathcal{T})$ besteht aus einer Menge X und einer Menge $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\forall U, V \in \mathcal{T} : U \cap V \in \mathcal{T}$
- $\forall S \subset \mathcal{T} : \bigcap\limits_{U \in S} U \in \mathcal{T}$

Die Elemente von $\mathcal{T}$ werden **offene Teilmengen** von X genannt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist.

Notation. Seien im Folgenden X und Y topologische Räume.

Bsp. Die **diskrete Topologie** auf einer Menge X ist $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Bsp. Die **Klumpentopologie** auf einer Menge X ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Def. Die Menge der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes heißt von der Metrik **induzierte Topologie**.

Def. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt

$$\mathcal{T}|_A := \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

Unterraumtopologie oder von $\mathcal{T}$ **induzierte Topologie**.

Def. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik auf X existiert, sodass die von der Metrik induzierte Topologie mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt.

Def. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **Hausdorffsch**, falls gilt:

$$\forall x, y \in X \,:\, x \neq y \implies \exists U, V \in \mathcal{T} \,:\, x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset.$$

Proposition. Metrisierbare topologische Räume sind Hausdorffsch.

Def. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt **stetig**, falls gilt

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y \,:\, f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Bemerkung. Ist $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$, so ist auch $f|_A : A \to Y$ stetig.

Def. Falls $f : X \to Y$ bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind, so heißt f ein **Homöomorphismus**.

Def. Zwei topologische Räume X und Y heißen **homöomorph** (notiert $X \cong Y$), wenn ein Homöomorphismus zwischen X und Y existiert.

Satz. Für $n \neq m$ sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph.

Def. Sei X eine Menge und $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ Topologien auf X. Dann sagen wir

$$\mathcal{T} \text{ ist } \textbf{gröber} \text{ als } \mathcal{T}' \;\; :\iff \;\; \mathcal{T}' \text{ ist } \textbf{feiner} \text{ als } \mathcal{T} \;\; :\iff \;\; \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'.$$

Def. Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ offener Teilmengen eines topologischen Raumes heißt

- **Basis** der Topologie, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.
- **Subbasis** der Topologie, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen ist, von denen jede Schnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Bspe.
- Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \,|\, x \in X, \epsilon > 0\}$ eine Basis der induz. Topologie auf X.
- $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \,|\, x \in \mathbb{Q}^n, \epsilon \in \mathbb{Q}_+\}$ ist eine abz. Basis von $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}_{\mathrm{eukl}})$.

Proposition. Jede Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ist Subbasis von genau einer Topologie $\mathcal{T}$ von X.

Def. Die Topologie heißt die von $\mathcal{B}$ **erzeugte Topologie**.

Def. Sind $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, so ist auch $(X \times Y, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum mit der **Produkttopologie** $(\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$, die von

$$\mathcal{B} := \{U \times Y \,|\, U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times V \,|\, V \in \mathcal{T}_Y\} \quad \text{erzeugt wird.}$$

Proposition.
- Die Projektionen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ sind stetig bzgl. der Produkttopologie.
- Ist $\mathcal{T}$ eine echt gröbere Topologie auf $X \times Y$ als die Produkttopologie, so sind die Projektionen π_X und π_Y nicht beide stetig.

Def. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Dann erzeugt $\mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y$ die **Summentopologie** auf $X \cup Y$.

Bemerkung. Sie ist die feinste Topologie auf $X \cup Y$, sodass die beiden Inklusionen $i_X : X \hookrightarrow X \cup Y$ und $i_Y : Y \hookrightarrow X \cup Y$ stetig sind.

Proposition. Seien X, Y, Z topologische Räume.

- Falls $X \cap Y = \emptyset$, so ist eine Abbildung $f : X \cup Y \to Z$ genau dann stetig, falls die beiden Kompositionen $f \circ i_X : X \to Z$ und $f \circ i_Y : Y \to Z$ stetig sind.
- Eine Abb. $g : Z \to X \cup Y$ ist genau dann stetig, wenn die beiden Kompositionen $\pi_X \circ g : Z \to X$ und $\pi_Y \circ g : Z \to Y$ stetig sind.

Def. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann ist das **Innere** von A (notiert $\mathrm{int}(A)$) die Vereinigung aller in A enthaltenen offenen Mengen.

Bemerkung. Als Vereinigung offener Mengen ist das Innere offen.

Def. Der **Abschluss** $\overline{A}$ einer Menge $A \subset X$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen von X, die A enthalten.

Bemerkung. Es gilt $\overline{A} = X \setminus (\mathrm{int}(X \setminus A))$.

Def. Es sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $V \subset X$. Wir nennen V eine **Umgebung** von x, falls es eine offene Teilmenge $U \subset X$ gibt mit $x \in U$ und $U \subset V$.

Proposition. Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in $\overline{A}$, falls jede Umgebung von x einen Punkt aus A enthält.

Def. Der **Rand** einer Menge $A \subset X$ ist $\partial A := \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A)$.

Proposition. Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in ∂X, wenn jede Umgebung von x sowohl einen Punkt aus A wie einen Punkt aus $X \setminus A$ enthält.

Def. Ein topologischer Raum X heißt **wegweise zusammenhängend**, falls es für je zwei Punkte $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.

Bspe.
- $\mathbb{R}^n$ ist wegzusammenhängend
- $(\{p, q\}, \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\})$ ist wegzusammenhängend!
- $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[\subset \mathbb{R}$ ist nicht wegzusammenhängend.

Def. Die Äquivalenzklassen von

$$x \sim y \quad :\iff \quad x, y \text{ lassen sich durch einen Weg verbinden.}$$

heißen **Wegzusammenhangskomponenten**.

Proposition. Sei $f : X \to Y$ stetig und X wegzusammenhängend. Dann ist auch $f(X)$ bzgl. der Unterraumtopologie wegzusammenhängend.

Def. Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, falls X nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

Bspe. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind nicht zusammenhängend.

Proposition. Sei X ein topologischer Raum. Es sind äquivalent:

- X ist zusammenhängend.
- Für jede offene und abgeschlossene Menge $A \subset X$ gilt: $A \in \{X, \emptyset\}$.
- Jede stetige Abbildung $f : X \to \{0, 1\}$ in den diskreten Raum mit zwei Elementen ist konstant.

Proposition.
- Sei $f : X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.
- Sind A, B zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes X und gilt $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.

Korollar. Folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf X:

$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x \text{ und } y \text{ liegen beide in einem zusammenhängenden Unterraum von } X.$$

Def. Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen **Komponenten**.

Bsp. Die Komponenten von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind genau die Ein-Punkt-Mengen. Trotzdem ist $\mathbb{Q}$ nicht diskret!

Proposition. Die Menge $[0,1]$ ist zusammenhängend.

Korollar. Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.

Proposition (ZWS)**.** Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(0) < 0$ und $f(1) > 0$, so existiert ein $t \in \,]0,1[$ mit $f(t) = 0$.

Def. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Die Folge (x_n) **konvergiert gegen** $x \in X$, falls für jede Umgebung $U \subset X$ von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\forall\, n \geq N \,:\, x_n \in U$.

Notation. $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Achtung. Das „=“ ist nicht wörtlich zu verstehen!

Def. Sei $f : X \to Y$ eine Abb. zw. topol. Räumen X, Y. Dann heißt f

- **stetig in** $x \in X$, falls für jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von x ist.
- **folgenstetig in** $x \in X$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ die Bildfolge $(f(x_n))$ in Y gegen $f(x)$ konvergiert.

Proposition. Ist f stetig in x, so ist f auch folgenstetig in x.

Def. Eine **Umgebungsbasis** von $x \in X$ ist eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bestehend aus Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine der Umgebungen in $\mathcal{B}$ enthält.

Def. Der Raum X erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Bemerkung. Jeder metrische Raum X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, da für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\mathcal{B}_x \coloneqq \{B_{1/n}(x) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis ist.

Proposition. Sei $x \in X$ ein Punkt mit abzählbarer Umgebungsbasis. Dann ist jede in x folgenstetige Abbildung $f : X \to Y$ auch stetig in x.

Def. Eine **gerichtete Menge** ist eine Menge D mit einer partiellen Ordnung $(\leq) \subset D \times D$, sodass es für $\alpha, \beta \in D$ immer ein $\gamma \in D$ mit $\gamma \geq \alpha$ und $\gamma \geq \beta$ gibt.

Def. Ein **Netz** in X ist eine Abbildung $\phi : D \to X$, wobei D eine gerichtete Menge ist.

Def. Sei $x \in X$ und $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ ein Netz in X. Das Netz (x_α) **konvergiert** gegen x, falls es für jede Umgebung $U \subset X$ von x ein $\beta \in D$ gibt mit $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha \geq \beta$.

Notation. $\lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha = x$

Def. Eine Abb. $f : X \to Y$ heißt **netzstetig** in $x \in X$, falls für jedes Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ in X mit $\lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha = x$ das Bildnetz $(f(x_\alpha))_{\alpha\in D}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Proposition. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn sie netzstetig in x ist.

Proposition. Ist $A \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so besteht $\overline{A}$ genau aus den Limiten von Netzen in A, die in X konvergieren.

Def. Ein **Häufungspunkt** eines Netzes $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ in X ist ein Punkt $x \in X$, sodass für jede Umgebung $U \subset X$ von x das Netz **häufig** in U ist, d. h. für alle $\alpha \in D$ existiert ein $\beta \geq \alpha$ mit $x_\beta \in U$.

Def. Sind D und E gerichtete Mengen, so nennen wir eine Abbildung $h : E \to D$ **final**, falls für alle $\delta \in D$ ein $\eta \in E$ existiert mit $h(\gamma) \geq \delta$ für alle $\delta \geq \eta$.