

Zusammenfassung Geometrie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Geometrie von Kurven

Notation. Sei im Folgenden I ein Intervall, d. h. eine zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R} .

Definition. Eine Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **reguläre Kurve**, wenn c beliebig oft differenzierbar ist und $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Der affine Unterraum $\tau_{c,t} := c(t) + \mathbb{R}(c'(t))$ heißt **Tangente** an c im Punkt $c(t)$ bzw. Tangente an c zum Zeitpunkt t .

Definition. Die **Bogenlänge** (BL) einer regulären Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt.$$

Satz. Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisierung, d. h. sei $c : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $\phi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ ein Diffeomorphismus, dann gilt $L(c) = L(c \circ \phi)$.

Definition. Eine reguläre Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **nach Bogenlänge parametrisiert**, wenn $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

Satz. Jede reguläre Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich nach BL parametrisieren, d. h. es existiert ein Intervall J und ein Diffeomorphismus $\phi : J \rightarrow I$, welcher sogar orientierungserhaltend ist, sodass $\tilde{c} := c \circ \phi$ nach BL parametrisiert ist.

Definition. Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen **gleichgerichtet**, falls $a = \lambda b$ für ein $\lambda \geq 0$.

Satz. Sei $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, dann gilt

$$\left\| \int_a^b v(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|v(t)\| dt,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, falls alle $v(t)$ gleichgerichtet sind.

Satz. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $x := c(a), y := c(b)$. Dann gilt $L(c) \geq d(x, y)$. Wenn $L(c) = d(x, y)$, dann gibt es einen Diffeomorphismus $\phi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, sodass

$$c = c_{xy} \circ \phi,$$

wobei $c_{xy} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto x + t(y - x)$.

Definition. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ eine Zerteilung von $[a, b]$. Dann ist die Länge des **Polygonzugs** durch die Punkte $c(t_i)$ gegeben durch

$$\hat{L}_c(t_0, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^k \|c(t_j) - c(t_{j-1})\|.$$

Definition. Eine stetige Kurve c heißt **rektifizierbar** von Länge \hat{L}_c , wenn gilt: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ der Feinheit mindestens δ gilt:

$$\|\hat{L}_c - \hat{L}_c(t_0, t_1, \dots, t_k)\| < \epsilon.$$

Definition. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär und nach BL parametrisiert. Dann heißt der Vektor $c''(t)$ **Krümmungsvektor** von c in $t \in I$ und die Abbildung $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \|c''(t)\|$ heißt **Krümmung** der nach BL parametrisierten Kurve.

Definition. Eine Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird **ebene Kurve** genannt.

Definition. Sei c eine reguläre, nach BL parametrisierte, ebene Kurve. Dann heißt

$$n = n_c : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto J \cdot c'(t) \text{ mit } J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

das **Normalenfeld** von c .

Bemerkung. Für alle $t \in I$ bildet $(c'(t), n_c(t))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis des \mathbb{R}^2 . Es gilt außerdem $c''(t) \perp c'(t)$, also $c''(t) = \kappa(t) \cdot n_c(t)$, d. h. die Krümmung hat im \mathbb{R}^2 ein Vorzeichen.

Satz (Frenet-Gleichungen) ebener Kurven). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär, nach BL parametrisiert und $v = c'$, dann gilt

$$c'' = \kappa \cdot n \quad \text{und} \quad n' = -\kappa \cdot v.$$

Beispiel. Die nach BL parametrisierte gegen den UZS durchlaufene Kreislinie mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto m + r \begin{pmatrix} \cos(t/r) \\ \sin(t/r) \end{pmatrix}$$

hat konstante Krümmung $\kappa(t) = \frac{1}{r}$.

Satz. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ glatte, nach BL parametrisiert mit konstanter Krümmung $\kappa(t) = R \neq 0$. Dann ist c Teil eines Kreisbogens mit Radius $\frac{1}{|R|}$.

Definition. Für $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ regulär, nicht notwendigerweise nach BL parametrisiert, ist die Krümmung zur Zeit t definiert als

$$\frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}$$

Bemerkung. Obige Definition ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, und stimmt für nach BL parametrisierte Kurven mit der vorhergehenden Definition überein.

Satz (Hauptsatz der lokalen ebenen Kurventheorie). Sei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $t_0 \in I$ und $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v_0\| = 1$. Dann gibt es genau eine nach BL parametrisierte zweimal stetig differenzierbare Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ , $c(t_0) = x_0$ und $c'(t_0) = v(t_0) = v_0$.

Definition. Eine reguläre Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$ und $c'(a) = c'(b)$. Eine reguläre geschlossene Kurve c heißt **einfach geschlossen**, wenn $c|_{[a,b]}$ injektiv ist.

Definition. Für eine geschlossene reguläre ebene Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt die Zahl

$$\bar{\kappa}(c) := \int_a^b \kappa(t) \|c'(t)\| dt$$

Totalkrümmung von c .

Bemerkung. Ist c nach BL parametrisiert, so ist $\bar{\kappa}(c) = \int_a^b \kappa(t) dt$.

Satz. Die Totalkrümmung ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist $c : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve und $\phi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ eine Diffeomorphismus mit $\phi' > 0$, dann gilt $\bar{\kappa}(c) = \bar{\kappa}(c \circ \phi)$.

Satz (Polarwinkelfunktion). Sei $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} : [a, b] \rightarrow S^1$ stetig (glatt) und $\omega_a \in \mathbb{R}$, sodass $\gamma(a) = e^{i\omega_a}$. Dann gibt es eine eindeutige stetige (glatte) Abbildung $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, genannt Polarwinkelfunktion von γ mit $\omega(a) = \omega_a$ und $\gamma(t) = e^{i\omega(t)} = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t)) \\ \sin(\omega(t)) \end{pmatrix}$ für alle $t \in [a, b]$.

Satz. Seien ω und $\tilde{\omega}$ zwei stetige Polarwinkelfunktionen zu einer stetigen Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow S^1$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $\omega(t) - \tilde{\omega}(t) = 2\pi k$ für alle $t \in [a, b]$.

Satz. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene reguläre geschlossene Kurve, dann heißt die ganze Zahl

$$U_c := \frac{1}{2\pi} \bar{\kappa}(c) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) \|c'(t)\| dt$$

Tangentendrehzahl oder **Umlaufzahl** von c .

Satz (Umlaufsatz von Hopf). Die Tangentendrehzahl einer einfach geschlossenen regulären Kurve ist ± 1 .

Satz. Für die Absolutkrümmung einer einfach geschlossenen regulären Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt $\kappa_{\text{abs}} \geq 2\pi$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn κ_c das Vorzeichen nicht wechselt.

Satz (Whitney-Graustein). Für zwei glatte reguläre geschlossene ebene Kurven $c, d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) c ist zu d regulär homotop
- (ii) $U_c = U_d$

Definition. Eine glatte reguläre Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) heißt **Frenet-Kurve**, wenn für alle $t \in I$ die Ableitungen $c'(t), c''(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig sind.

Definition. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve und $t \in I$. Wende das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf $\{c'(t), c''(t), \dots, c^{(n-1)}(t)\}$ an und ergänze das resultierende Orthonormalsystem $(b_1(t), \dots, b_{n-1}(t))$ mit einem passenden Vektor $b_n(t)$ zu einer Orthonormalbasis, die positiv orientiert ist. Die so definierten Funktionen $b_1, \dots, b_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind stetig und werden zusammen das **Frenet- n -Bein** von c genannt.

Definition. Sei (b_1, \dots, b_n) das Frenet- n -Bein einer Frenet-Kurve c . Dann gilt:

$$A := (\langle b'_j, b_k \rangle)_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & & & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & & \kappa_2 & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\kappa_{n-2} & 0 \\ 0 & & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Funktion $\kappa_j : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \langle b'_j(t), b_{j+1}(t) \rangle, j = 1, \dots, n-1$ heißt j -te **Frenet-Krümmung** von c .

Satz (Hauptsatz der lokalen Raumkurventheorie). Seien $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$ und $t_0 \in I$ und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, sowie $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau eine nach BL parametrisierte Frenet-Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass gilt

- $c(t_0) = x_0$,
- das Frenet- n -Bein von c in t_0 ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ und
- die j -te Frenet-Krümmung von c ist κ_j .

Definition (Frenet-Kurven im \mathbb{R}^3). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach BL parametrisierte Frenet-Kurve und $t \in I$. Dann heißt

- $b_1(t) = v(t) = c'(t)$ der **Tangentenvektor** an c in t ,
- $b_2(t) = \frac{c''(t)}{\|c''(t)\|}$ **Normalenvektor** an c in t ,
- $\text{span}(b_1(t), b_2(t))$ **Schmiegeebene** an c in t ,
- $b_3(t) = b_1(t) \times b_2(t)$ **Binormalenvektor** an c in t ,
- $\tau_c(t) = \tau(t) := \kappa_2(t) = \langle b'_2(t), b_3(t) \rangle$ **Torsion** o. **Windung** von c .

Bemerkung. Die Frenet-Gleichungen für nach BL parametrisierte Frenet-Kurven im \mathbb{R}^3 lauten

$$b'_1 = \kappa_2 b_2, \quad b'_2 = -\kappa_c b_1 + \tau_c b_3, \quad b'_3 = -\tau_c b_2$$

Bemerkung. Für eine nicht nach BL parametrisierte Frenet-Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt für Krümmung und Torsion

$$\kappa_c := \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} \quad \text{und} \quad \tau_c := \frac{\det(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2}.$$

Definition. Für eine glatte geschlossene reguläre Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die **Totalkrümmung** definiert durch

$$\bar{\kappa}(c) := \int_a^b \kappa_c(t) \cdot \|c'(t)\| dt.$$

Hierbei ist die Krümmung einer regulären Raumkurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert: Sei $\phi : I \rightarrow J$ Orientierungserhaltend (d. h. $\phi' > 0$) und so gewählt, dass $\tilde{c} := c \circ \phi^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach BL parametrisiert ist, dann definieren wir $\kappa_c(t) := \kappa_{\tilde{c}}(\phi(t))$.

Satz (Fenchel). Für eine geschlossene reguläre glatte (oder \mathcal{C}^2) Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$\bar{\kappa}(c) \geq 2\pi.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn c eine einfach geschlossene konvexe reguläre glatte (oder \mathcal{C}^2) Kurve ist, die in einer affinen Ebene des \mathbb{R}^3 liegt.

Satz. Sei $v : [0, b] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine stetige rektifizierbare Kurve der Länge $L < 2\pi$ mit $c(0) = c(b)$, so liegt das Bild von v ganz in einer offenen Hemisphäre.

Lokale Flächentheorie

Notation. Sei im Folgenden $m \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Definition. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$\partial_v f(u) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u + hv) - f(u)}{h}$$

Richtungsableitung von f im Punkt u (falls der Limes existiert).

Für $v = e_j$ heißt

$$\partial_j f(u) := \partial_{e_j} f(u)$$

partielle Ableitung nach der j -ten Variable. Falls die partielle Ableitung für alle $u \in U$ existiert, erhalten wir eine Funktion $\partial_j : U \rightarrow \mathbb{R}^n, u \mapsto \partial_j f(u)$. Definiere

$$\partial_{j_1, j_2, \dots, j_k} f := \partial_{j_1} (\partial_{j_2} (\dots (\partial_{j_k} f))).$$

Definition. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt \mathcal{C}^k -Abbildung, wenn alle k -ten partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind. Wenn $f \in \mathcal{C}^k$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$, so heißt f **glatt**.

Satz (Schwarz). Ist f eine \mathcal{C}^k -Abbildung, so kommt es bei allen l -ten partiellen Ableitungen mit $l \leq k$ nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen an.

Definition. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt in $u \in U$ **total differenzierbar**, wenn gilt: Es gibt eine lineare Abbildung $D_u f = \partial f_u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, genannt das **totale Differential** von f in u , sodass für genügend kleine $h \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f(u + h) = f(u) + \partial f_u(h) + o(h)$$

für eine in einer Umgebung von 0 definierten Funktion $o : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$.

Definition. Für eine total differenzierbare Funktion f heißt die Matrix $J_u f = (D_u f(e_1), \dots, D_u f(e_n))$ **Jacobi-Matrix** von f in u .

Bemerkung. Es gelten folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist stetig partiell differenzierbar} \\ \implies & f \text{ ist total differenzierbar} (\implies f \text{ ist stetig}) \\ \implies & f \text{ ist partiell differenzierbar} \end{aligned}$$

Definition. Eine total differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **regulär** oder **Immersion**, wenn für alle $u \in U$ gilt: $\text{Rang}(J_u f) = m$, d. h. alle partiellen Ableitungen sind in jedem Punkt linear unabhängig und $J_u f$ ist injektiv. Insbesondere muss $m \leq n$ gelten.

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine (glatte) Immersion. Dann heißt das Bild $f(U)$ **immergierte Fläche**, immensierte Fläche oder parametrisiertes Flächenstück. Sei \tilde{U} offen in \mathbb{R}^n und $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus, dann heißt $\tilde{X} := X \circ \phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ **Umparametrisierung** von X .

Notation. Sei im folgenden $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion.

Definition. Für $u \in U$ heißt der Untervektorraum

$$T_u X := \text{span}(\partial_1 X(u), \dots, \partial_m X(u)) = \text{Bild}(D_u X) \subset \mathbb{R}^n$$

Tangentialraum von X in u und sein orthogonales Komplement $N_u X := (T_u X)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ **Normalraum** an X in u .

Bemerkung. Für $u \in U$ definiert

$$\langle v, w \rangle_u := \langle D_u X(v), D_u X(w) \rangle_{\text{eukl}}$$

ein Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^m . Die Positiv-Definitheit folgt dabei aus der Injektivität von D_u .

Bemerkung. Bezeichne mit $\text{SymBil}(\mathbb{R}^m)$ die Menge der symmetrischen Bilinearformen auf \mathbb{R}^m .

Definition. Die **erste Fundamentalform** (FF) einer Immersion X ist die Abbildung

$$I : U \rightarrow \text{SymBil}(\mathbb{R}^m), \quad u \mapsto I_u := \langle \cdot, \cdot \rangle_u.$$

Äquivalent dazu wird auch die Abbildung

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, \quad u \mapsto g_u := (J_u X)^T (J_u X)$$

manchmal als erste Fundamentalform bezeichnet.

Definition. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Wir nennen c eine **Kurve auf X** , wenn es eine glatte Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ gibt, sodass $c = X \circ \alpha$

Bemerkung. Im obigen Fall gilt

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \|D_{\alpha(t)} X(\alpha'(t))\| dt.$$

Bemerkung. Seien $c_1 = X \circ \alpha_1$ und $c_2 = X \circ \alpha_2$ zwei reguläre Kurven auf X , die sich in einem Punkt schneiden, d. h. $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2) =: u$. Dann ist der Schnittwinkel $\angle(c'_1(t), c'_2(t))$ von c_1 und c_2 in $X(u)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \cos(\angle(c'_1(t), c'_2(t))) &= \frac{\langle c'_1(t_1), c'_2(t_2) \rangle}{\|c'_1(t_1)\| \cdot \|c'_2(t_2)\|} \\ &= \frac{I_u(\alpha'_1(t_1), \alpha'_2(t_2))}{\sqrt{I_u(\alpha'_1(t_1), \alpha'_1(t_1)) \cdot I_u(\alpha'_2(t_2), \alpha'_2(t_2))}} \end{aligned}$$

Definition. Sei $C \subset U$ eine kompakte messbare Teilmenge, dann heißt

$$A(X(C)) := \int_C \sqrt{\det(g_u)} du$$

der Flächeninhalt von $X(C)$.

Satz (Transformation der ersten FF). Sei $\tilde{X} = X \circ \phi$ eine Umparametrisierung von X mit einem Diffeo $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$, dann gilt für $\tilde{g}_{\tilde{u}} = (J_{\tilde{u}} \tilde{X})^T (J_{\tilde{u}} \tilde{X})$:

$$\tilde{g}_{\tilde{u}} = (J_{\tilde{u}}(\phi))^T \cdot g_{\phi(\tilde{u})} \cdot J_{\tilde{u}}(\phi).$$

Beispiel (Drehfläche). Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}, t \mapsto (r(t), z(t))$ eine reguläre glatte Kurve. Dann heißt

$$X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, s) \mapsto (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s), z(t))$$

Drehfläche mit Profilkurve c . Es gilt:

$$g_{(t,s)} = \begin{pmatrix} \|c'(t)\|^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Kugelfläche). Die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 ist

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto (-\sin(t)\cos(s), \cos^2(t), \sin(t)).$$

Definition. Zwei Immersionen $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißen **lokal isometrisch**, wenn es eine Umparametrisierung $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ gibt, sodass die ersten Fundamentalformen von X und $\tilde{X} \circ \phi$ übereinstimmen. Ist eine Immersion X isometrisch zu einer Immersion, deren Bild eine offene Teilmenge einer affinen Ebene ist, so heißt X **abwickelbar**.

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion mit $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Dann heißt X **Hyperfläche** (HF) im \mathbb{R}^n .

Bemerkung. Es gilt in diesem Fall offenbar $\dim T_u = n - 1$ und $\dim N_u = 1$ für $u \in U$ und für einen Vektor $\nu_u \in N_u X \setminus \{0\}$ gilt $N_u X = \mathbb{R} \cdot \nu_u$.

Definition. $v_u := \sum_{j=1}^n \det(\partial_1 X(u), \dots, \partial_{n-1} X(u), e_j) e_j$

Bemerkung. Es gilt:

- $v_u \in N_u X \setminus \{0\}$
- $\det(\partial_1 X(u), \dots, \partial_{n-1} X(u), v_u) > 0$

Bemerkung. Für $n = 3$ und $m = 2$ gilt $v_u = \partial_1 X(u) \times \partial_2 X(u)$.

Definition. Für eine Hyperfläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt

$$\nu : U \rightarrow S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}, \quad u \mapsto \nu_u := \frac{v_u}{\|v_u\|}$$

Gaußabbildung.

Satz. Die Gaußabbildung einer Hyperfläche ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ ein Diffeo mit $\det(J_{\tilde{u}}\phi) > 0$ für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$, dann ist $\tilde{\nu} = \nu \circ \phi$.

Notation. $\text{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) := \{B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \mid B \text{ bilinear}\}$

Definition. Die **vektorwertige zweite Fundamentalform** ist die Abbildung einer Immersion X ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{I} : U &\rightarrow \text{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \quad u \mapsto \mathbb{I}(u) = \mathbb{I}_u, \text{ mit} \\ \mathbb{I}_u : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (v, w) \mapsto \mathbb{I}_u(v, w) := (\partial_v \partial_w X(u))^{N_u}, \end{aligned}$$

wobei $(\cdot)^{N_u}$ die orth. Projektion auf den Normalenraum bezeichnet.

Bemerkung. Nach dem Satz von Amandus Schwarz ist \mathbb{I}_u eine symmetrische Bilinearform.

Bemerkung. Für eine Hyperfläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n, (U \subseteq \mathbb{R}^{n-1})$ gilt

$$\mathbb{I}_u(v, w) = h_u(v, w)\nu_u \quad \text{mit} \quad h_u(v, w) = \langle \mathbb{I}_u(v, w), \nu_u \rangle.$$

Definition. Die Abbildung

$$h : U \rightarrow \text{SymBil}(\mathbb{R}^{n-1}), u \mapsto h_u = h(u)$$

mit $h_u(v, w) = \langle \mathbb{I}_u(v, w), \nu_u \rangle = \langle \partial_v \partial_w X(u), \nu_u \rangle$ heißt **zweite Fundamentalform** der Hyperfläche X .

Bemerkung. Man kann die zweite FF auch als matrixwertige Abb.

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \quad u \mapsto (h_{jk}(u)) = \langle \partial_j \partial_k X(u), \nu_u \rangle$$

auffassen.

Satz. Für die Gaußabbildung ν einer Hyperfläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt für alle $j, k \in \{1, \dots, m\}$

$$\langle \partial_j \nu, \partial_k X \rangle = -h_{jk} \quad \text{und} \quad \langle \partial_j \nu, \nu \rangle = 0.$$

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche und $u \in U$, dann heißt die lineare Abbildung

$$W_u := -D_u \nu \circ (D_u X)^{-1} : T_u X \rightarrow T_u X$$

Weingartenabbildung von X im Punkt u .

Bemerkung. Es gilt $W_u(\partial_j X(u)) = -\partial_j \nu(u)$.

Satz. • W_u ist selbstadjungiert bzgl. der Einschränkung $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_u}$.
• $h_{jk}(u) = \langle W_u(\partial_j X(u)), \partial_k X(u) \rangle$
• Die Weingartenabbildung ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ ein Diffeo mit $\det(J_\phi) > 0$, dann gilt für $\tilde{X} := X \circ \phi$ und alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$: $W_{\phi(\tilde{u})} = \tilde{W}_{\tilde{u}}$.

Satz. Sei $g_u = (g_{jk}(u))$ die Matrix der ersten und $h_u = (h_{jk}(u))$ die Matrix der zweiten FF einer Hyperfläche X , dann gilt für die Matrix $w_u = (w_{jk}(u))$ von W_u bzgl. der Basis $\{\partial_1 X(u), \dots, \partial_{n-1} X(u)\}$ von $T_u X$:

$$w_u = g_u^{-1} \cdot h_u$$

Bemerkung. Die Weingartenabbildung ist als selbstadjungierter Endomorphismus reell diagonalisierbar (Spektralsatz).

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche.

- Die Eigenwerte $\kappa_1(u), \dots, \kappa_{n-1}(u)$ mit Vielfachheiten von W_u heißen **Hauptkrümmungen** von X in u und die dazugehörigen Eigenvektoren **Hauptkrümmungsrichtungen** von X in u .
- Die **mittlere Krümmung** von X ist definiert als

$$H : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \frac{1}{n-1} \text{spur}(W_u) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \kappa_j(u).$$

- Die **Gauß-(Kronecker-)Krümmung** von X ist die Abbildung

$$K : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \det(W_u) = \frac{\det(h_u)}{\det(g_u)} = \prod_{j=1}^{n-1} \kappa_j(u).$$

Satz. Die Hauptkrümmungen, die mittlere Krümmung und die Gauß-Kronecker-Krümmung sind invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen.

Satz. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche und $u_0 \in U$ ein Punkt. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von u_0 und eine Umparametrisierung $\phi : U_0 \rightarrow \tilde{U}$, sodass für $\tilde{X} := X \circ \phi^{-1}$ gilt:

Es gibt eine glatte (bzw. C^2) Funktion $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D_{\phi(u_0)} f = 0$, sodass $\tilde{X} = \text{Graph}(f)$, d. h. es gilt für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$:

$$\tilde{X}(\tilde{u}) = (\tilde{u}, f(\tilde{u})).$$

Notation. $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_k f)$ heißt **Gradient** von $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Satz. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Dann ist die zweite FF der Graphen-Hyperfläche $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n, u \mapsto (u, f(u))$

$$h_{jk}(u) = \frac{\partial_{jk} f(u)}{\sqrt{1 + |\nabla f(u)|^2}}.$$

Satz. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, $u_0 \in U$, sowie $E_{u_0} := X(u_0) + T_{u_0} X$ die affine Tangentialebene an X in u_0 . Dann gilt:

- Ist $K(u_0) > 0$, so liegt für eine kleine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von u_0 das Bild $X(U_0)$ ganz auf einer Seite von E_{u_0} .
- Ist $K(u_0) < 0$, so trifft für jede Umgebung $U_0 \subset U$ von u_0 das Bild $X(U_0)$ beide Seiten von E_{u_0} .

Definition. Sei $u_0 \in U, v \in T_{u_0} X, P_v := X(u_0) + \text{span}(v, \nu(u_0))$. Sei $U_0 \subset U$ eine offene Umgebung von u_0 , dann heißt

$$P_v \cap X(U_0)$$

Normalenschnitt in u_0 in Richtung v .

Satz. Wenn U_0 hinreichend klein, dann ist $P_v \cap X(U_0)$ Bild einer regulären glatten Kurve.

Definition. Wenn $\|v\| = 1$, dann heißt

$$\kappa_v(u) := \langle W_u v, v \rangle$$

Normalkrümmungen von X in u in Richtung v .

Bemerkung. Sei $\|v\| = 1$. Sei $c : I \rightarrow P_v \cong \mathbb{R}^2$ nach BL parametrisiert, sodass $\text{Bild}(c) = P_v \cap X(U_0)$, und $c(0) = X(u_0)$ und $c'(0) = v$. Dann: $\kappa_v(u) = \kappa_c(0)$

Satz. Die Hauptkrümmungen $\kappa_1(u_0), \dots, \kappa_2(u_0)$ sind die Extrema der Abbildung

$$T_{u_0} X \supset S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \kappa_v(u_0) = \langle W_{u_0} v, v \rangle.$$

Die Levi-Civita-Ableitung

Definition. Ein **Vektorfeld** (VF) auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ist eine Abbildung $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Notation. $\chi(U) = \{v : U \rightarrow \mathbb{R}^n \mid v \text{ glatt}\}$

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine immergierte Fläche, $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ein **tangentiales Vektorfeld** längs X ist eine glatte Abbildung $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $V(u) \in T_u X \forall u \in U$.

Bemerkung. Mit typtheoretischer Syntax ist ein tangentiales Vektorfeld längs X eine glatte Abbildung $V : \prod_{u:U} T_u X$.

Notation. $\chi(TX) = \{V : U \rightarrow \mathbb{R}^n \mid V \text{ ist tang. VF längs } X\}$

Bemerkung. Folgende Abbildung ist eine Bijektion:

$$H : \chi(U) \rightarrow \chi(TU), \quad v \mapsto v^\wedge := \partial_v X, \text{ wobei} \\ \partial_v X : \prod_{u:U} T_u X, \quad u \mapsto \partial_{v(u)} X(u)$$

Notation. Für ein glattes Vektorfeld $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichnet Y^T das tangentielle Vektorfeld längs X definiert durch

$$Y^T : \prod_{u:U} T_u X, \quad u \mapsto (Y(u))^{T_u X}.$$

Definition. Die Abbildung

$$\nabla : \chi(U) \times \chi(TX) \rightarrow \chi(TX), \quad (w, V) \mapsto \nabla_w V := (\partial_w X)^T$$

heißt **Levi-Civita-Ableitung** von V in Richtung w .

Achtung. Gradient \neq Levi-Civita-Ableitung (trotz Symbol ∇)!

Satz (Eigenschaften der Levi-Civita-Ableitung). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, $w_1, w_2, w \in \chi(U)$, $V, V_1, V_2 \in \chi(TX)$. Dann gilt:

- $\nabla_{f(w_1)+w_2} V = f \cdot \nabla_{w_1} V + \nabla_{w_2} V$
- $\nabla_w (V_1 + V_2) = \nabla_w V_1 + \nabla_w V_2$
- $\nabla_w (f \cdot V) = f(\nabla_w V) + \partial_w f \cdot V$
- $\partial_w \langle V_w, V_2 \rangle = \langle \nabla_w V_1, V_2 \rangle + \langle V_1, \nabla_w V_2 \rangle$ (Metrizität)

Notation. Sei $j \in \{1, \dots, m\}$, dann betrachten wir die konstante Abbildung $e_j : U \rightarrow \mathbb{R}^n, u \mapsto e_j$. Wir setzen $\nabla_j V := \nabla_{e_j} V$.

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion, so schreiben wir:

$$\nabla_j(\partial_k X) = \sum_{l=1}^m \Gamma_{jk}^l \partial_l(X) \quad \text{für } j, k \in \{1, \dots, m\}.$$

Dabei heißen die Funktionen $\Gamma_{jk}^l : U \rightarrow \mathbb{R}$ **Christoffel-Symbole**.

Notation. $\Gamma_{jkl} := \sum_{r=1}^m g_{rl} \Gamma_{jk}^r : U \rightarrow \mathbb{R}$

Satz. $\Gamma_{jkl} = \sum_{r=1}^m \Gamma_{jk}^r \langle \partial_r X, \partial_l X \rangle = \langle \nabla_j(\partial_k X), \partial_l X \rangle = \langle \partial_j(\partial_k X), \partial_l X \rangle$

Satz. Es gilt $\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l$ und $\Gamma_{jkl} = \frac{1}{2}(\partial_j \cdot g_{kl} + \partial_k \cdot g_{jl} + \partial_l \cdot g_{jk})$.

Bemerkung. Die Christoffelsymbole kann man aus der 1. FF berechnen (hier sind g^{lh} die Komponenten von g^{-1}):

$$\Gamma_{jk}^l = \sum_{h=1}^m g^{lh} \cdot \Gamma_{jkh} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^m g^{lh} \cdot (\partial_j \cdot g_{kh} + \partial_k \cdot g_{jh} + \partial_h \cdot g_{jk}),$$

Bemerkung. Schreiben wir $v = \sum_{k=1}^m v^k e_k$ für $v \in \chi(U)$, dann ist

$$\nabla_j V = \sum_{l=1}^m \left(\partial_j v^l + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l v^k \right) \partial_l X.$$

Definition (Levi-Civita-Ableitung für Vektorfelder auf U). Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine immergierte Fläche, so heißt

$$\nabla : \chi(U) \times \chi(U) \rightarrow \chi(U) \\ (w, v) \mapsto \nabla_w v = H^{-1}(\nabla_w \widehat{H(v)}) = v^\wedge$$

Levi-Civita-Ableitung von v in Richtung w .

Bemerkung. Schreiben wir $v = \sum v^k \partial_k X$ für $V \in \chi(TX)$, dann ist

$$\nabla_j v = \sum_{l=1}^m \left(\partial_j v^l + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l v^k \right) e_l = \partial_j v + \Gamma_j v \text{ mit} \\ \Gamma_j : U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, \quad u \mapsto (\Gamma_{jk}^l(u))_{lk}.$$

Satz. Seien $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \chi(U)$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Dann:

- $\nabla_{f \cdot w_1 + w_2} v = f \cdot \nabla_{w_1} v + \nabla_{w_2} v$
- $\nabla_w (v_1 + v_2) = \nabla_w v_1 + \nabla_w v_2$
- $\nabla_w (f \cdot v) = f(\nabla_w v) + (\nabla_w f) \cdot v$
- $\partial_w \text{I}(v_1, v_2) = \text{I}(\nabla_w v_1, v_2) + \text{I}(v_1, \nabla_w v_2)$ (verträglich mit 1. FF)

Definition. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ eine glatte, reguläre Kurve, $c := X \circ \alpha$. Eine glatte Abbildung $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $V(t) \in T_{\alpha(t)} X \forall t \in [a, b]$ **tangentiales Vektorfeld** längs c .

Bemerkung. Eine glatte Abbildung $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ bestimmt eindeutig ein tang. VF vermöge

$$V(t) := v^\wedge(t) = \partial_{v(t)} X(\alpha(t)) = J_{\alpha(t)} X \cdot v(t).$$

Schreiben wir $v = \sum v^j e_j$ und $\alpha = \sum \alpha^j e_j$, so gilt für $V = v^\wedge$:

$$V' = \frac{d}{dt} V = \sum_{j=1}^m (v^j)' (\partial_j X \circ \alpha) + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\partial_k \partial_j X \circ \alpha).$$

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $c = X \circ \alpha$ eine reguläre glatte Kurve auf X . Sei V ein tang. VF längs c , dann heißt

$$\frac{\nabla V}{dt} := (V')^T$$

die **Levi-Civita-Ableitung** von V längs c . Das tang. VF V heißt **(Levi-Civita-)parallel**, wenn gilt

$$\frac{\nabla V}{dt} = 0.$$

Bemerkung. Für α, v, V aus der letzten Bemerkung folgt

$$\frac{\nabla V}{dt} = \sum_{l=1}^m \left((v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) (\partial_l X \circ \alpha).$$

Notation. $\hat{\Gamma}_\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, $(\hat{\Gamma}_\alpha(t))_{jl} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l(\alpha(t))((\alpha^k)'(t))$

Definition. Wir fassen eine glatte Abbildung $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ als VF längs $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ auf. Dann nennen wir

$$\frac{\nabla v}{dt} := \sum_{l=1}^m \left((v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) e_l = v' + \hat{\Gamma}_\alpha v$$

Levi-Cevita-Ableitung von v längs α .

Satz. Es gilt dann $\frac{\nabla(v^\wedge)}{dt} = \left(\frac{\nabla v}{dt} \right)^\wedge$. Ein VF $V = v^\wedge$ ist also genau dann parallel, wenn $v' + \hat{\Gamma}_\alpha v = 0$ bzw.

$$(v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) = 0 \quad \text{für alle } l = 1, \dots, m.$$

Bemerkung. Es handelt sich bei $v' + \hat{\Gamma}_\alpha v = 0$ um ein System linearer Differentialgleichungen (mit nicht konstanten stetigen Koeffizienten). Damit existiert bei gegebenem Anfangswert $v(a)$ eine auf ganz $[a, b]$ definierte eindeutige Lösung der Differentialgleichung.

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $c = X \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine reguläre glatte Kurve auf X . Für $t \in [a, b]$ heißt die Abbildung

$$P_t^c : T_{\alpha(a)} X \rightarrow T_{\alpha(t)} X, \quad x \mapsto V_x(t),$$

wobei $V_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ das parallele tangentielle VF längs c mit Anfangsbedingung $V_x(a) = x \in T_{\alpha(a)} X$ ist, **Parallelverschiebung** längs c von $c(a)$ nach $c(t)$.

Satz. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $c = X \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre glatte Kurve auf X . Für alle $t \in [a, b]$ ist die Abbildung $P_t^c : T_{\alpha(a)} X \rightarrow T_{\alpha(t)} X$ eine lineare Isometrie, d. h. P_t^c ist linear und es gilt $\langle x, y \rangle = \langle P_t^c x, P_t^c y \rangle$ für alle $x, y \in T_{\alpha(a)} X$.

Geodäten

Definition. Eine reguläre glatte Kurve $c = X \circ \alpha$ auf X heißt **Geodäte** auf X , wenn gilt

$$(c'')^T = \frac{\nabla c'}{dt} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\nabla \alpha'}{dt} = 0.$$

Satz. Eine Geodäte ist immer proportional zur BL parametrisiert, d. h. $\|c'\|$ ist konstant.

Bemerkung. Sei $c = X \circ \alpha$ mit $\alpha = \sum \alpha^j e_j$ mit glatten Abb. α^j . Dann gilt

$$\frac{\nabla c'}{dt} = \sum_{l=1}^m \left((\alpha^l)'' + \sum_{j,k=1}^m (\alpha^j)' (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) (\partial_l X \circ \alpha).$$

Somit ist c genau dann eine Geodäte, wenn gilt

$$(\alpha^l)'' + \sum_{j,k=1}^m (\alpha^j)' (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) = 0 \quad \text{für alle } l = 1, \dots, m$$

oder $\alpha'' + \Gamma_\alpha(\alpha', \alpha') = 0$ (i. F. **Geodätengleichung**), wobei

$$\Gamma_\alpha : [a, b] \rightarrow \text{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \quad t \mapsto \Gamma_{\alpha(t)} \text{ mit}$$

$$\Gamma_{\alpha(t)}(v, w) = \sum_{j,k,l=1}^m v^j w^k \Gamma_{jk}^l(\alpha(t)) e_l.$$

Bemerkung. Es handelt sich hierbei um ein System nichtlinearer gew. DG zweiter Ordnung, welches nach dem Satz von Picard-Lindelöf bei gegebenen Anfangswerten immer eine eindeutige lokale Lösung besitzt. Es folgt:

Satz (Lokale Existenz von Geodäten). Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion, sei $u \in U$ und $w \in \mathbb{R}^m$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_w \subseteq \mathbb{R}^m$ von w und eine $\epsilon > 0$, sodass gilt: Für jedes $v \in U_w$ gibt es eine eindeutige Lösung $\alpha_v :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U$ der Geodätengleichung mit $\alpha_v(0) = u$ und $\alpha'_v(0) = v$.
Anders ausgedrückt: Zu jedem $u \in U$ und zu jedem $W \in T_u X$ gibt es eine offene Umgebung $U_W \subseteq T_u X$ von W sowie ein $\epsilon > 0$, sodass es für jedes $V \in U_W$ eine eindeutige Geodäte $c_v :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ auf X gibt mit $c_v(0) = X(u)$ und $c'_v(0) = V$.

Satz (Spray-Eigenschaft). Sei $\alpha_v :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U$ die eindeutige Lsg. der Geodätengleichung mit $\alpha_v(0) = u$ und $\alpha'_v(0) = v$ und $r > 0$. Dann ist die eindeutige Lösung der Geodätengleichung α_{rv} mit $\alpha_{rv}(0) = rv$ und $\alpha'_{rv}(0) = rv$ auf dem Intervall $]-\frac{\epsilon}{r}, \frac{\epsilon}{r}[$ definiert und es gilt $\alpha_{rv}(t) = \alpha_v(rt)$ für alle $t \in]-\frac{\epsilon}{r}, \frac{\epsilon}{r}[$.

Satz. Sei $u \in U$. Dann gibt es ein $\epsilon_u > 0$, sodass für alle $v \in \overline{B_u^{\epsilon_u}}$ gilt: Die Geodätengleichung besitzt eine auf $[-1, 1]$ definierte Lösung α_v mit $\alpha_v(0) = u$ und $\alpha'_v(0) = v$.

Definition. Sei $u \in U$, dann heißt die Abbildung

$$\text{Exp}_u : B_u^{\epsilon_u} \rightarrow U, \quad v \mapsto \alpha_v(1)$$

(geodätische) **Exponentialabbildung** von X in u .

Definition. Sei $u \in U$, dann gibt es ein $0 < \epsilon \leq \epsilon_u$, sodass $\text{Exp}_u|B_u^\epsilon$ ein Diffeo auf sein Bild ist.

Definition. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ eine glatte Kurve, sodass $X \circ \alpha$ nach BL parametrisiert ist. Eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung

$$]-\epsilon, \epsilon[\times [a, b] \rightarrow U, \quad (s, t) \mapsto \alpha_s(t)$$

mit $\alpha_0 = \alpha$ heißt eine **Variation** von α . Ist nun $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion, so erhalten wir auch eine Variation der Kurve $c := X \circ \alpha$ auf X durch andere Kurven, nämlich $c_s := X \circ \alpha_s$ auf X .

Notation. $\delta := \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$.

Satz (Variationsformel der Länge). Unter obigen Annahmen gilt

$$\delta L(c_s) = \langle c'(b), \delta c_s(b) \rangle - \langle c'(a), \delta c_s(a) \rangle - \int_a^b \langle (c''(t))^T, \delta c_s(t) \rangle dt.$$

Satz (Gaußlemma). Die Parametrisierung $\tilde{X} := X \circ \text{Exp}_u : B_u^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch Exponentialkoordinaten ist eine radiale Isometrie: Seien $v \in B_u^{\epsilon_u} \setminus \{0\}$ und $w \in \mathbb{R}^m$ und zerlegen wir w in $w = w_{\parallel} + w_{\perp}$ mit $w_{\parallel} \in \mathbb{R}v$ und $\langle w_{\perp}, v \rangle = 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|D_v \tilde{X}(w_{\parallel})\| &= \|w_{\parallel}\| \\ D_v \tilde{X}(w) &\perp D_v \tilde{X}(v), \quad \text{wenn } w \perp v \text{ und somit} \\ \|D_v \tilde{X}(w)\|^2 &= \|w_{\parallel}\|^2 + \|D_v \tilde{X}(w_{\perp})\|^2. \end{aligned}$$

Satz. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow B_u^\epsilon$ reguläre glatte Kurve mit $\gamma(a) = 0, \gamma(b) = v$. Dann gilt: $L(X \circ \text{Exp}_u \circ \gamma) \geq \|v\|$ mit $L(X \circ \text{Exp}_u \circ \gamma) = \|v\| \iff \gamma(t) = \rho(t)v$ mit $\rho : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ streng monoton wachsend.

Satz. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Fläche, $u_0 \in U, \epsilon > 0$, sodass $\text{Exp}_{u_0} : B_{u_0}^\epsilon \rightarrow U$ Diffeomorphismus. Sei $u \in \text{Exp}_{u_0}(B_{u_0}^\epsilon)$. Dann gibt es (bis auf Umparametrisierung) genau eine bzgl. der Länge

$$L_1(\alpha) := \int_a^b I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) dt$$

kürzeste reguläre glatte Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ mit $\alpha(a) = u_0$ und $\alpha(b) = u$, nämlich $\alpha : [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto \text{Exp}_{u_0}(t \cdot \text{Exp}_{u_0}^{-1}(u))$.

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Fläche, dann heißt

$$[\cdot, \cdot] : \chi(U) \times \chi(U) \rightarrow \chi(U), \quad (v, w) \mapsto [v, w] = \partial_v w - \partial_w v$$

Lie-Klammer der Vektorfelder v und w .

Satz. Für alle $v, w \in \chi(U)$ ist $[v, w] = \nabla_v w - \nabla_w v$.

Definition. Die Abbildung

$$\begin{aligned} R : \chi(U) \times \chi(U) \times \chi(U) &\rightarrow \chi(U), \quad (v, w, z) \mapsto R(v, w)z \\ \text{mit } R(v, w)z &= \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_w(\nabla_v z) - \nabla_{[v, w]}z \end{aligned}$$

heißt **Krümmungstensor**.

Bemerkung (Krümmungstensor in Koordinaten). Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \nabla_j(\nabla_k z) &= \partial_j \partial_k z + (\partial_j \Gamma_k)z + \Gamma_k(\partial_j z) + \Gamma_j(\partial_k z) + \Gamma_j \Gamma_k z, \\ R_{jk}z &:= R(e_j, e_k)z = \Gamma_j \Gamma_k z - \Gamma_k \Gamma_j z + (\partial_j \Gamma_k - \partial_k \Gamma_j)z, \\ R_{jk} &:= R(e_j, e_k) = (\Gamma_j \cdot \Gamma_k - \Gamma_k \cdot \Gamma_j) + (\partial_j \Gamma_k - \partial_k \Gamma_j). \end{aligned}$$

Für $v = \sum v^j e_j, w = \sum w^k e_k : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $v^j, w^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist

$$R(v, w)z = \sum_{k,j=1}^m v^k w^j (R_{kj}z)$$

und mit $z = \sum z^l e_l : U \rightarrow \mathbb{R}^m, z^l : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt folgt

$$R(v, w)z = \sum_{i,j,k,l} v^i w^j z^k R_{ijk}^l e_l,$$

wobei $R_{ijk}^l : U \rightarrow \mathbb{R}$ so gewählt, dass $R_{ij}(e_k) = \sum R_{ijk}^l e_l$. Es gilt:

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \sum_{s=1}^m (\Gamma_{is}^l \Gamma_{jk}^s - \Gamma_{js}^l \Gamma_{ik}^s).$$

Satz. Die Abbildung

$$I_{R_{ij}} : \chi(U) \times \chi(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}), \quad (v, w) \mapsto \underbrace{I(R_{ij}, v, w)}_{w \mapsto I_u((R_{ij}v)(u), w(u))}$$

ist eine antisymmetrische Bilinearform.

Notation. $R_{ijkl} := I_u(R_{ij}(u)e_k, e_l)$

Satz (Gaußgleichung). Mit $\mathbb{I}_{jk}(u) = (\partial_j \partial_k X(u))^N$ gilt

$$R_{ijkl}(u) = \langle \mathbb{I}_{jk}(u) \mathbb{I}_{il}(u) \rangle - \langle \mathbb{I}_{ik}(u), \mathbb{I}_{jl}(u) \rangle.$$

Bemerkung. Im Spezialfall, dass X eine HF ist, gilt $\mathbb{I}_{jk} = h_{jk}\nu$. Da $\langle \nu, \nu \rangle = 1$, folgt $R_{ijkl} = h_{jk}h_{ie} - h_{ik}h_{jl}$.

Satz (Theorema egregium (Gauß)). Für eine HF $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$K(u) = \frac{\det(h(u))}{\det(g(u))} = \frac{R_{1221}(u)}{\det(g(u))}.$$

Letzter Ausdruck ist nur abh. von der 1. FF und ihren Ableitungen.

Satz (Codazzi-Mainardi-Gleichungen). Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ HF, dann

$$\partial_i h_{jk}(u) - \sum_{l=1}^{n-1} \Gamma_{ik}^l(u) h_{ej}(u) = \partial_j h_{ik}(u) - \sum_{l=1}^{n-1} \Gamma_{jk}^l(u) h_{ei}(u).$$

Satz (Hauptsatz der lokalen Flächentheorie (Bonnet)). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ einfach zusammenhängend und

$$g, h : U \rightarrow \{A \in \mathbb{R}^{m \times m} \mid A^T = A, A \text{ positiv definit}\}$$

glatt. Dann sind äquivalent:

- $\exists X : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ Hyperfläche mit g und h als 1. FF bzw. 2. FF.
- g, h erfüllen die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Gleichung.

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche. Ein Punkt $u \in U$ heißt **Nabelpunkt**, wenn in u alle Hauptkrümmungen gleich sind, also $W_u = \mu I$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$. Wenn alle $u \in U$ Nabelpunkte sind, so heißt X **Nabelpunkthyperfläche**.

Satz. Sei $n \geq 3$ und $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Nabelpunkt-HF in \mathcal{C}^3 , dann ist $X(U)$ Teilmenge einer Hyperebene oder einer Kugelsphäre im \mathbb{R}^n .

Definition. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine \mathcal{C}^2 -Abbildung $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **orthogonales Hyperflächensystem** (OHFS), wenn für alle $x \in O$ und alle $j, k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k$ gilt:

$$\langle \partial_j \Phi(x), \partial_k \Phi(x) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \partial_j \Phi(x), \partial_j \Phi(x) \rangle \neq 0$$

Notation. Für $t \in \mathbb{R}$ ist $U^{j,t} := \{(x_1, \dots, x_n) \in O \mid x_j = t\}$.

Bemerkung. Falls $U^{j,t}$ offen ist in $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = t\}$, ist

$$X^{j,t} := \Phi|_{U^{j,t}} : U^{j,t} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Hyperfläche und für alle $x \in U^{j,t}$ gilt

$$\partial_j \Phi(x) \perp T_x X^{j,t} = \text{Spann}\{\partial_k \Phi(x) \mid k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}\}.$$

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine HF und $c := X \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, I$ Intervall und $\alpha : I \rightarrow U$ glatt. Dann heißt c **Krümmungslinie**, wenn für alle $c'(t)$ für alle $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung von X ist, d. h. ein Eigenvektor von $W_{\alpha(t)}$.

Satz. Ist $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ OHFS, dann sind die Koordinatenlinien

$$h \mapsto \Phi(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j + h, t_{j+1}, \dots, t_n) \quad \text{mit } (t_1, \dots, t_n) \in O \text{ fest}$$

Krümmungslinien von X^{k,t_k} mit $k \neq j$.

Definition. Eine lineare Abb. $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **konform**, wenn

$$\angle(v, w) = \angle(F(v), F(w)) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung. Jede lineare Abbildung lässt sich darstellen als

$$F(x) = A_F \cdot x \text{ mit } A_F \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und es gilt F konform $\iff \frac{1}{\mu} A_F \in O(n)$ für ein $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$. Dieses μ wird **konformer Faktor** oder Streckungsfaktor genannt.

Definition. Seien $O, \tilde{O} \Subset \mathbb{R}^n$. Ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $f : O \rightarrow \tilde{O}$ heißt **konform**, wenn für alle $x \in O$ die Abbildung $D_x f$ konform ist.

Satz. Jede konforme Abbildung auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist bis auf Verknüpfung mit der komplexen Konjugation eine holomorphe reguläre Abbildung und umgekehrt.

Definition. Eine Abbildung $f : O \rightarrow \tilde{O}$ heißt **kugeltreu**, wenn sie offene Teilmengen von Sphären auf offene Teilmengen von Sphären abbildet. Dabei gelten Hyperebenen als Sphären mit Radius ∞ .

Satz (Liouville). Wenn $n \geq 3$, dann ist jede konforme \mathcal{C}^3 -Abb. $f : O \rightarrow \tilde{O}$ kugeltreu, d. h. falls $X : U \rightarrow O$ eine Nabelpunkt-HF ist, dann ist $f \circ X : U \rightarrow \tilde{O}$ auch eine Nabelpunkt-HF.

Beispiel. Konforme Abbildungen im \mathbb{R}^n sind:

- Isometrien: $f(x) = Ax + b, A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n$
- Zentrische Streckungen: $f(x) = rx, r > 0$
- Inversionen an Sphären: $\iota : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}, x \neq 0$

Lemma. Inversionen an Sphären sind kugeltreu und konform.

Definition. Eine Hintereinanderschaltung von Isometrien, zentrischen Streckungen und Inversionen an Sphären heißt **Möbius-Transformation**.

Bemerkung. Für $n = 2$ ist eine Möbius-Transformation eine Abb. $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, z \in \mathbb{C}$, sodass Ausdruck def. ist mit $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

Satz. Seien $O, \tilde{O} \Subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ und $f : O \rightarrow \tilde{O}$ winkel- und kugeltreu. Dann ist f Einschränkung einer Möbius-Transformation.

Korollar. Für $n \geq 3$ gilt: Jeder konforme \mathcal{C}^3 -Diffeomorphismus f ist Einschränkung einer Möbius-Transformation.

Minimalflächen

Lemma. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}, C = (A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wenn jeder Spaltenvektor von B senkrecht auf allen anderen Spaltenvektoren von C steht und normiert ist, dann gilt

$$\det(C) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Definition. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann heißt

$$\int_C f \, d\mathfrak{A} := \int_C f(u) \cdot \sqrt{\det(g_u)} \, d\mu(u)$$

Flächeninhalt.

Proposition. Der Flächeninhalt ist invariant unter Umparametrisierungen: Sei $X = \tilde{X} \circ \phi, \phi : U \rightarrow \tilde{U}$ Diffeomorphismus, $C \subset U$ kompakt, dann gilt

$$\int_C \sqrt{\det(g_u)} \, d\mu = \int_{\phi(C)} \sqrt{\det(\tilde{g}_u)} \, d\mu.$$

Definition. Sei $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ immergierte \mathcal{C}^2 -Fläche, $C \subset U \subset \mathbb{R}^m$ „schönes“ Kompaktum ($C = \overline{O}, O \Subset U$ mit glattem Rand). Dann ist eine Variation von X auf C eine Abbildung

$$]-\epsilon, \epsilon[\times U \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}^n, \quad (x, u) \mapsto X^s(u)$$

mit

- $X^s : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ \mathcal{C}^2 -Immersion
- $X^0 = X$
- $X^s|_{U \setminus C} = X|_{U \setminus C}$

Notation. • $\mathfrak{A}(s) := \mathfrak{A}(X^s(C))$ • $\delta := \frac{\delta}{\delta s}|_{s=0}$

Lemma. Für kleine $\epsilon > 0$, kann die Variation so umparametrisiert werden, dass das Variationsvektorfeld normal an X ist, d. h.

$$\xi(u) := \delta X^s(u) \in N_u X.$$