Zusammenfassung Gew. Diff'gleichungen

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def (Klassifikation von DGLn)**.**

(I) **Gewöhnliche** DGL: Gesucht ist Funktion in einer Variable
Partielle DGL: Gesucht ist Funktion in mehreren Variablen

(II) **Ordnung** einer DGL: Höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in Gleichung vorkommt

(III) **Explizite DGL**: Gleichung der Form $y^{(k)}{=}f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k-1)})$
Implizite DGL: Allgemeinere Form $F(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k)}) = 0$

(IV) **Skalare** DGL: Gesucht ist Funktion mit Wert in $\mathbb{R}$
n-dimensionale DGL: Gesuchte Funktion hat Wert in $\mathbb{R}^n$

(V) **Lineare** DGL: Gleichung hat die Form

$$a_k(t)y^{(k)}(t) + a_{(k-1)}(t)y^{k-1}(t) + ... + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = 0$$

(VI) **Autonome** DGL: Gleichung der Form $F(y, \dot{y}, ..., y^{(k)}) = 0$ (keine Abhängigkeit von t, Zeitinvarianz)

Notation. Sei im Folgenden I stets ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Def.
- Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von $\dot{y} = f(t, y)$, falls für alle $t \in I$ gilt: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$.
- Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times ...\mathbb{R}^n}_{k \text{ mal}}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. Eine k-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von $y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k-1)})$, falls für alle $t \in I$ gilt:
$$y^{(k)} = f(t, y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(k-1)}(t))$$

Satz.
- Ist $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k-1)})$ (1.2), dann ist
$$(y_1, ..., y_k) : I \to \mathbb{R}^{kn}$$
$$t \mapsto (y_1(t), ..., y_k(t)) = (y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(k-1)}(t))$$
eine Lösung von System (1.3)
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ &\vdots \\ \dot{y}_{k-1} &= y_k \\ \dot{y}_k &= f(t, y_1, y_2, ..., y_{k-1}, y_k) \end{aligned}$$
- Ist $(y_1, ..., y_k) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.3), dann ist $y = y_1 : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2).

Satz.
- Ist $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von AWP (1.1), dann ist
$$(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}^{n+1}$$
$$t \mapsto (y_1(t), y_2(t)) = (t, y(t))$$
eine Lösung des AWP (1.4)
$$\dot{y}_1(t) = 1, y_1(t_0) = t_0 \dot{y}_2(t) = f(y_1(t), y_2(t)), \qquad y_2(t_0) = y_0$$
- Ist $(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung von (1.4), dann ist $y = y_2 : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.1).