Kurzfassung Riemannsche Geometrie

Def. Eine **topologische Mannigfaltigkeit** (Mft) der Dim. m ist ein topologischer Raum M^m mit folgenden Eigenschaften:

- M^m ist **hausdorffsch**, d. h.

$$\forall x, y \in M^m : x \neq y \implies \exists U_x \Subset M^m : \exists U_y \Subset M^m : x \in U_x \wedge y \in U_y \wedge U_x \cap U_y = \emptyset.$$

- M^m erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, d. h. es gibt eine abzählbare Menge $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$, sodass

$$\forall A \Subset M^m : \exists K \subset \mathbb{N} : A = \bigcup_{k \in K} U_k.$$

- M^m ist **lokal euklidisch**, d. h. für alle $x \in M^m$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x und einen Homöomorphismus $\phi : U_x \to \mathcal{O}$ mit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Bem. lokal euklidisch $\not\Rightarrow$ hausdorffsch

Prop. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$M \text{ zusammenhängend} \iff M \text{ wegzusammenhängend.}$$

Def.
- Sei M eine m-dim. topol. Mft. Ein **Atlas** ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j : U_j \to \mathcal{O}_j) \mid j \in J\}$ mit $U_j \Subset M$ und $\mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^n$ offen und Homöomorphismen ϕ_j, für die gilt $\bigcup_{j \in J} U_j = M$.
- Die Paare (U_j, ϕ_j) werden **Karten** genannt.
- Für je zwei Karten (U_j, ϕ_j) und (U_k, ϕ_k) gibt es eine **Kartenwechselabbildung**

$$\phi_{kj} := \phi_k \circ \phi_j^{-1}|_{\phi_j(U_j \cap U_k)} : \phi_j(U_j \cap U_k) \to \phi_k(U_j \cap U_k).$$

- Ein Atlas heißt **differenzierbar**, wenn alle Kartenwechselabbildungen $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen sind.
- Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt **differenzierbare Struktur** von M, wenn gilt: Ist $(\tilde{U}, \tilde{\phi_j})$ eine Karte von M und $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \{(\tilde{U}, \tilde{\phi_j})\}$ ein differenzierbarer Atlas, dann gilt $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$.
- Eine topol. Mft versehen mit einer differenzierbaren Struktur heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

Notation. Seien ab jetzt M^m und N^n differenzierbare Mften der Dimensionen m und n.

Def.
- Eine Abb. $f : M \to N$ heißt in $x \in M$ **differenzierbar**, wenn es eine Karte $(U_x, \phi : U_x \to \mathcal{O}) \in \mathcal{A}_M$ und eine Karte $(\tilde{U}_{f(x)}, \tilde{\phi} : \tilde{U}_{f(x)} \to \tilde{\mathcal{O}}) \in \mathcal{A}_N$ gibt, sodass

$$\tilde{\phi} \circ f|_{U_x} \circ \phi^{-1} : \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}} \quad \text{differenzierbar } (\mathcal{C}^\infty) \text{ ist.}$$

- Die Abb. f heißt **diff'bar**, wenn sie in allen $x \in M$ diff'bar ist.

Notation. $\mathcal{C}^\infty(M, N) := \{f : M \to N \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$

Bem. Die Definition ist unabh. von Wahl der Karten um x und $f(x)$.

Def. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn f ein Homöo ist und f und f^{-1} differenzierbar sind.

Def. Sei $p \in M$. Zwei Funktionen $f : U_p \to \mathbb{R}$ und $g : V_p \to \mathbb{R}$ mit $U_p, V_p \Subset M$ heißen äquivalent, falls es eine offene Umgebung $W \subset U_p \cap V_p$ mit $f|_W = g|_W$ gibt. Die Äquivalenzklasse $[f]$ bezüglich der so definierten Äq'relation heißt **Funktionskeim** in p.

Notation. $\mathcal{C}^\infty(M, p) := \{[f] \mid [f] \text{ Funktionskeim in } p\}$

Bem. Die Menge der Funktionskeime ist eine $\mathbb{R}$-Algebra.

Def. Eine lineare Abb. $\delta : \mathcal{C}^\infty(M, p) \to \mathbb{R}$ heißt **Derivation**, falls

$$\forall [f], [g] \in \mathcal{C}^\infty(M, p) : \delta[f \cdot g] = \delta[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta[g].$$

Def. Der gewöhnliche Tangentialraum des $\mathbb{R}^n$ im Punkt p ist

$$\tilde{T}_p\mathbb{R}^n := \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

mit $(p, v) + (p, w) := (p, v + w)$ und $\lambda \cdot (p, v) := (p, \lambda \cdot v)$.

Def. Der **Tangentialraum** von M im Punkt $p \in M$ ist

$$T_pM := \{\partial : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, p) \to \mathbb{R} \mid \partial \text{ linear, derivativ}\}$$

Ein Element $v \in T_pM$ heißt **Tangentialvektor** an M in p.

Bem. Wir erhalten eine Abbildung

$$T_pM \times \mathcal{C}^\infty(M, p) \to \mathbb{R}, \quad (v, [f]) \mapsto v.f := v[f].$$

Bem. T_pM ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Satz. Die Vektorräume $T_p\mathbb{R}^n$ und $\tilde{T}_p\mathbb{R}^n$ sind isomorph. Insbesondere gilt $\dim(T_p\mathbb{R}^n) = n$.

Korollar. Für eine m-dim. diff'bare Mft M gilt: $\dim(T_pM) = m$.

Bem. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann kann man $\dot{c}(0)$ auffassen als Tangentialvektor an M in $c(0)$ mittels

$$\dot{c}(0)[f] := \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}(f \circ c).$$

Bem. Sei (U, ϕ) eine Karte von M. Wir setzen

$$\tfrac{\partial^\phi}{\partial x_i}|_p[f] := (\phi^{-1} \circ \alpha_i)^{\cdot}(0)[f] = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}(f \circ \phi^{-1} \circ \alpha_i)$$

$$\text{mit } \alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \to U, \quad t \mapsto \phi(p) + te_i.$$

Wir erhalten $\frac{\partial^\phi}{\partial x_i}|_p \in T_pM$.

Def. Sei $f : M \to N$ diff'bar. Die **Ableitung** von f in $p \in M$ ist

$$T_pf = f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N, \quad v \mapsto f_{*p}, \quad \text{wobei } f_{*p}(v).[g] := v.[g \circ f].$$

Lemma. Sei M eine diff'bare Mft, $p \in M$. Dann gilt
- f_{*p} ist linear
- $(\mathrm{id}_M)_{*p} = \mathrm{id}_{T_pM}$
- Kettenregel: Seien N, P diff'bare Mften. Dann gilt

$$\forall p \in M : (f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}.$$

Korollar. Wenn $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus ist, dann ist $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein VR-Isomorphismus für alle $p \in M$.

Satz. Sei M eine m-dimensionale Mft, $p \in M$ und (U, ϕ) eine Karte.
- Es gilt $T_pM = \{\dot{c}(0) \mid c : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ diff'bar}, c(0) = p\}$
- $\{\frac{\partial^\phi}{\partial x^i}|_p \mid i = 1, \ldots, n\}$ ist eine Basis von T_pM.

Def. $TM := \coprod_{p \in M} T_pM$ heißt **Tangentialbündel** von M.

Def. Die **Fußpunktabb.** ist die Proj. $\pi : TM \to M, \quad v \in T_pM \mapsto p$.

Def. Ein **Vektorfeld** auf M ist eine Abbildung $X : M \to TM$, sodass $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. Dies ist äquivalent zu $\forall p \in M : X(p) \in T_p(M)$.

Bem. Sei $X : M \to TM$ ein Vektorfeld, (U, ϕ) eine Karte. Dann gibt es Funktionen $\xi^j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ mit

$$\forall p \in U : X(p) = \sum_{j=1}^{n} \xi^j(p) \tfrac{\partial^\phi}{\partial x^j}|_p.$$

Def.
- Ein VF X auf M heißt in $p \in M$ **diff'bar** (bzw. $\mathcal{C}^\infty$), wenn es eine Karte (U, ϕ) um p gibt, sodass die Funktionen $\xi^1, \ldots, \xi^n$ diff'bar (bzw. $\mathcal{C}^\infty$) sind.
- X heißt **differenzierbar**, wenn X in allen $p \in M$ diff'bar ist.

Lemma. Wenn die Koordinatenfunktionen $\xi^1, \ldots, \xi^n$ für eine bestimmte Karte $(U, \phi : U \to \mathcal{O})$ differenzierbar sind, dann sind sie es für jede andere Karte $(\tilde{U}, \psi : \tilde{U} \to \tilde{\mathcal{O}})$ mit $\tilde{U} \subseteq U$.

Def. Sei M eine m-dimensionale diff'bare Mft mit diff'barer Struktur $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j) \mid j \in J\}$. Dann ist TM eine $2m$-dimensionale Mft mit Atlas $\tilde{\mathcal{A}} := \{(\tilde{U}_j := \pi^{-1}(U_j), \tilde{\Phi}_j) \mid j \in J\}$, wobei

$$\tilde{\Phi}_j : \pi^{-1}(U_j) \to \phi_j(U_j) \times \mathbb{R}^m, \quad \sum_{k=1}^{m} \xi^k(p) \tfrac{\partial^{\phi_j}}{\partial x^k}|_p \mapsto (\phi_j(p), \xi^1(p), \ldots, \xi^n(p)).$$

Eine Menge $V \subseteq TM$ heißt offen, wenn $\tilde{\Phi}_j(V \cap \pi^{-1}(U_j)) \Subset \mathbb{R}^{2n}$ offen ist für alle $j \in J$.

Notation. $\mathcal{X}(M) := \{ \text{ diff'bare Vektorfelder auf } M \}$

Bem. $\mathcal{X}(M)$ ist ein $\mathbb{R}$-VR und ein $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul.

Lemma. Jedes $X \in \mathcal{X}(M)$ induziert eine lineare, derivative Abb.

$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad \phi \mapsto X(\phi) := p \mapsto X(p).[\phi].$$

Lemma. $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M) : (\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) : X(f) = Y(f)) \iff X \equiv Y$

Def. Der **Kommutator** (o. **Lie-Klammer**) von $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ist das Vektorfeld $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$ definiert durch

$$[X, Y] : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Satz. Für $X, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt

$$[X, Y_1 + fY_2] = [X, Y_1] + X(f) \cdot Y_2 + f \cdot [X, Y_2].$$

Def. Eine diff'bare Kurve $c : (a, b) \to M$ heißt **Integralkurve** von einem VF $X \in \mathcal{X}(M)$, falls $\forall t \in (a, b) : \dot{c}(t) = X_{c(t)}$.

Lemma. Sei $X \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Dann hat das AWP

$$\dot{c}(t) = X_{c(t)}, \quad c(0) = p$$

eine eindeutige lokale Lösung $c = c_p^X : (-\epsilon, \epsilon) \to M$.

Def. $\Phi_X : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to M,\ (p,t) \mapsto c_p^X(t)$ heißt **Fluss** von X.

Def. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit einer $\mathbb{K}$-bilinearen Abbildung $[-,-] : V \times V \to V,\ (v,w) \mapsto [v,w]$ heißt **Lie-Algebra**, falls

- die Abb. antisymmetrisch ist, d. h. $\forall\, v,w \in V\ :\ [v,w] = -[w,v]$
- die **Jacobi-Identität** erfüllt ist, d. h.

$$\forall\, v,w,z \in V\ :\ [v,[w,z]] + [z,[v,w]] + [w,[z,v]] = 0.$$

Bspe. • $(\mathcal{X}(M), [-,-])$ ist eine Lie-Algebra.
- $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist eine Lie-Algebra mit $[A,B] := AB - BA$.

Def. Eine Gruppe G, welche ebenfalls eine diff'bare Mft ist, heißt **Lie-Gruppe**, wenn gilt:

- $\mu : G \times G \to G,\ (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ ist diff'bar.
- $\iota : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ ist diff'bar.

Bsp. Die allg. lin. Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n} \approx \mathbb{R}^{(n^2)}$ ist eine Lie-Gruppe. Die Diff'barkeit der Inv. folgt aus der Cramerschen Regel.

Def. Sei G eine Lie-Gruppe und $g \in G$. Dann sind

$$lg : G \to G,\quad x \mapsto g \cdot x = \mu(g,x)$$
$$rg : G \to G,\quad x \mapsto x \cdot g = \mu(x,g)$$

Diffeomorphismen mit Umkehrabbildung $l(g^{-1})$ bzw. $r(g^{-1})$.

Bsp. Abgeschl. Untergruppen von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ sind Lie-Gruppen, z. B.
- $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ • $O_n \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ • $U_n \subset \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$

Def. Sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus und $X \in \mathcal{X}(M)$. Dann ist

$$f_*X : N \to TN,\ x \mapsto f_{*f^{-1}(x)}X(f^{-1}(x))$$

Def. Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(G)$ heißt **linksinvariant**, wenn gilt:

$$\forall\, g,h \in G\ :\ X(g\cdot h) = lg_{*h}X(h) \quad (\text{kürzer: } \forall\, g \in G\ :\ lg_*X = X).$$

Notation. $\mathcal{L}(G) := \{X \in \mathcal{X}(G) \,|\, X \text{ ist linksinvariant}\} \subset \mathcal{X}(G)$

Bem. Ein linksinv. VF $X \in \mathcal{X}(G)$ ist eindeutig bestimmt durch $X(e)$. Andererseits: Ist $x \in T_eG$, dann gibt es ein linksinv. VF $X \in \mathcal{X}(G)$ mit $X(e) = x$. Somit gibt es einen VR-Isomorphismus

$$i : \mathcal{L}(G) \to T_eG,\quad X \mapsto X(e).$$

Lemma. Seien $X, Y \in \mathcal{L}(G)$. Dann ist $[X,Y] \in \mathcal{L}(G)$.

Korollar. $(\mathcal{L}(G), [-,-])$ ist eine $\dim(G)$-dimensionale Unter-Lie-Algebra von $(\mathcal{X}(G), [-,-])$.

Notation. $\mathfrak{G} := \mathrm{Lie}(G) := \mathcal{L}(G) \cong T_eG$

Def. Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform $\langle -,- \rangle$.
Die davon induzierte Norm ist $\|v\| := \sqrt{|\langle v,v\rangle|}$.

Def. Eine **Riemannsche Metrik** auf einer diff. Mft M ist eine Familie $g = (g_p)_{p\in M}$ von Skalarprodukten $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, die differenzierbar von p abhängt, d. h. für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ist $g(X,Y) : M \to \mathbb{R}, p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ differenzierbar ($\mathcal{C}^\infty$).
Das Tupel (M,g) heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

Bem. Sei (U,ϕ) eine Karte von M. Setze

$$g_{ij}^\phi : U \to \mathbb{R},\ \ p \mapsto g(\tfrac{\partial^\phi}{\partial x^i}|_p, \tfrac{\partial^\phi}{\partial x^j}|_p).$$

Seien $X = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial^\phi}{\partial x^i}$ und $Y = \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial^\phi}{\partial x^j}$ zwei VF in U. Dann gilt

$$g(X,Y)(p) = g_p(X(p), Y(p)) = \sum_{i,j=1}^n v^i(p) w^j(p) g_{ij}(p).$$

Def. Seien (M, g_M), (N, g_N) Riemannsche Mannigfaltigkeiten.
Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **Isometrie**, wenn gilt:

- f ist ein Diffeomorphismus
- f erhält Riemannsche Metriken, d. h. für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ gilt:

$$g_M(X,Y) = g_N(f_*X, f_*Y) \circ f,$$

$$\text{also } \forall\, p{\in}M\ :\ \forall\, v,w{\in}T_pM\ :\ g_{M,p}(v,w) = g_{N,f(p)}(f_{*p}(v), f_{*p}(w)).$$

Def. $\mathrm{Iso}(M) {:=} \{\tau : M \to M \,|\, \tau \text{ Isometrie}\}$ heißt **Isometriegruppe**.

Bem. $\mathrm{Iso}(M)$ ist in kan. Weise eine Lie-Gruppe (Myers-Steenrod).

Satz. Jede diff'bare Mannigfaltigkeit hat eine Riemannsche Metrik.

Bsp. Das Oberer-Halbraum-Modell des hyperbolischen Raum ist

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, e_n\rangle_{\text{eukl}} > 0\} \mathrel{\text{⊚}} \mathbb{R}^n$$

mit dem offensichtlichen Atlas und der Riemannschen Metrik

$$g_p^{\text{Hyp}}((p,\tilde{v}),(p,\tilde{w})) := \frac{\langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle_{\text{eukl}}}{\langle p, e_n\rangle^2}.$$

Def. Eine diff'bare Abb. $f : M \to N$ zwischen diff'baren Mften heißt **Immersion**, falls $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ f. a. $p \in M$ injektiv ist.

Def. Angenommen, N ist sogar eine Riem. Mft mit Metrik g_N. Dann erhalten wir eine Riem. Metrik auf M, die mit f **zurückgeholte Metrik**, durch

$$(f^*g_N)_p(v,w) := g_{N,f(p)}(f_{*p}(v), f_{*p}(w)).$$

Def. Eine Immersion $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ heißt **isometrisch**, falls $g^M = f^*g^N$.

Prop. Sei M eine zshgde Mft. Dann gibt es für alle $p, q \in M$ einen stückweise diff'baren Weg $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$.

Def. Für $\gamma : [a,b] \to M$ stückweise $\mathcal{C}^1$ heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \quad \textbf{Länge von } \gamma.$$

Def. Der **Riem. Abstand** auf (M,g) ist geg. durch die Metrik

$$d_g : M \times M \to \mathbb{R},\quad (p,q) \mapsto \inf\{\, L(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \to M \text{ stückweise } \mathcal{C}^1 \text{ mit } \gamma(a){=}p \text{ und } \gamma(b){=}q \,\}.$$

Bem. Nach dem Satz von Hopf-Rinow stimmt die von d_g induzierte Topologie mit der von M überein.

Def. Ein **Zusammenhang** (kov. Ableitung) ist eine Abbildung

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),\quad (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$$

sodass für $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt:

- $\nabla_{X_1 + fX_2} Y = \nabla_{X_1} Y + f \nabla_{X_2} Y$
- $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- $\nabla_X (fY) = f\,(\nabla_X Y) + (X(f)) \cdot Y$ (Leibniz-Regel)

Def. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M. Dann heißt

$$T^\nabla(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \qquad \textbf{Torsion} \text{ von } \nabla.$$

Wenn $T^\nabla \equiv 0$, dann heißt ∇ **torsionsfrei**.

Def. Ein Zshg ∇ auf einer Riem. Mft. heißt **metrisch**, wenn

$$\forall\, X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)\ :\ g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y,Z).$$

Satz. Auf jeder Riem. Mft. (M,g) gibt es genau einen torsionsfreien, metrischen Zusammenhang. Für diesen gilt:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ & + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X) \end{aligned}$$

Def. Der eindeutige torsionsfreie und metrische Zusammenhang auf (M,g) heißt **Levi-Civita-Zusammenhang** auf (M,g).

Bem. Sei (M,g) eine Riemannsche Mft., (U,ϕ) eine Karte von M. Dann gibt es diff'bare Ftk. $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ für $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$, sodass

$$\nabla_{\left(\frac{\partial^\phi}{\partial x^i}\right)} \left(\frac{\partial^\phi}{\partial x^j}\right) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^\phi}{\partial x^k}.$$

Die Funktionen Γ_{ij}^k heißen **Christoffel-Symbole** von ∇.

Lemma. $\left[\frac{\partial^\phi}{\partial x^j}, \frac{\partial^\phi}{\partial x^k}\right] = 0$

Satz. Für die Christoffel-Symbole gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial^\phi}{\partial x^j} g_{il} + \frac{\partial^\phi}{\partial x^i} g_{jl} - \frac{\partial^\phi}{\partial x^l} g_{ij} \right),$$

wobei

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R},\ p \mapsto g_p\left(\tfrac{\partial^\phi}{\partial x^i}(p), \tfrac{\partial^\phi}{\partial x^j}(p)\right)$$

$$g^{kl} : U \to \mathbb{R} \text{ definiert ist durch } \sum_{r=1}^n g^{jr} g_{rk} = \delta_k^j.$$

Def. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M. Dann heißt $X \in \mathcal{X}(M)$ **parallel**, falls $\nabla X : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),\ \ Y \mapsto \nabla_Y X$ verschwindet.

Def. Ein **Tensorfeld** vom Typ (j,k) mit $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0,1\}$ ist eine multilineare Abbildung

$$T : \mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M) \to \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M), & \text{falls } j = 0, \\ \mathcal{X}(M), & \text{falls } j = 1. \end{cases}$$

Bspe. • $T^\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ ist Tensor vom Typ $(1,2)$.
- $\nabla Y : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),\ \ X \mapsto \nabla_X Y$ ist Tensor vom Typ $(1,1)$.
- Alternierende k-Formen auf $\mathbb{R}^n$ sind Tensoren vom Typ $(0,k)$.

- Riemannsche Metriken sind Tensorfelder vom Typ $(0,2)$.

Satz. Sei T ein Tensorfeld auf M vom Typ (j,k). Sei $p \in M$. Seien $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$. Dann hängt $T(X_1, \dots, X_k)(p)$ nur von $X_1(p), \dots, X_k(p)$ ab.

Bem. Sei (U,ϕ) eine Karte von M und T ein Tensorfeld vom Typ $(1,k)$ auf M. Dann gibt es Funktionen $T^l_{i_1,\dots,i_k}$, sodass

$$T\left(\tfrac{\partial^\phi}{\partial x^{i_1}}, \dots, \tfrac{\partial^\phi}{\partial x^{i_k}}\right) = \sum_{l=1}^n T^l_{i_1,\dots,i_k} \tfrac{\partial^\phi}{\partial x^l}.$$

Notation. $\nabla_v Y := (\nabla_X Y)(p)$ für $v \in T_pM$ und X ein VF mit $X_p = v$ (wohldefiniert).

Satz. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M. Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ und $Y, \tilde{Y} \in \mathcal{X}(M)$. Falls für eine diff'bare Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ gilt

$$c(0) = p, \ \dot{c}(0) = v \ \text{ und } \ \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) : Y(c(t)) = \tilde{Y}(c(t)),$$

dann gilt $\nabla_v Y = \nabla_v \tilde{Y}$.

Def. Ein **VF längs einer Kurve** $c : I \to M$ ist eine Abbildung

$$X : I \to TM \quad \text{mit} \quad X(t) = X_t \in T_{c(t)}M,$$

welche diff'bar ist, d. h. für alle $t_0 \in I$ existiert eine Karte (U,ϕ) um $c(t_0)$, sodass man schreiben kann

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi^i(t) \tfrac{\partial^\phi}{\partial x^j}|_{c(t)} \quad \text{für alle } t \in c^{-1}(U)$$

mit diff'baren Funktionen $\xi^i : c^{-1}(U) \to \mathbb{R}$.

Bem. X_t muss nicht Einschränkung eines VF auf M sein.

Notation. $\mathcal{X}_c := \{$ Vektorfelder längs c $\}$

Bem. $\mathcal{X}_c$ ist ein Modul über $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

Satz. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M, sei $c : I \to M$ eine diff'bare Kurve. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t} = \frac{D}{\mathrm{d}t} = \frac{D^\nabla}{\mathrm{d}t} : \mathcal{X}_c \to \mathcal{X}_c,$$

sodass für $X, \tilde{X} \in \mathcal{X}_c$, $Y \in \mathcal{X}(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ gilt:
- $\frac{D}{\mathrm{d}t}(X + \tilde{X}) = \frac{D}{\mathrm{d}t}X + \frac{D}{\mathrm{d}t}\tilde{X}$, • $\frac{D}{\mathrm{d}t}(f \cdot X) = f \cdot \frac{D}{\mathrm{d}t}X + f'X$,
- $\frac{D(Y \circ c)}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\dot{c}} Y$.

Def. $\frac{D}{\mathrm{d}t}$ heißt von ∇ **induzierte kovariante Ableitung längs c**.

Satz. Sei (M,g) eine Riem. Mft, ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang und $c : I \to M$ diff'bar. Dann gilt

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}_c : g(X,Y)' = g(\tfrac{DX}{\mathrm{d}t}, Y) + g(X, \tfrac{DY}{\mathrm{d}t}).$$

Def. $X \in \mathcal{X}_c$ heißt **parallel** längs c (bzgl. ∇), wenn $\frac{DX}{\mathrm{d}t} = 0$.

Bem. Sei (U,ϕ) eine Karte, $\tilde{I} \subset I$ mit $c(\tilde{I}) \subset U$. In lokalen Koordinaten lässt sich Parallelität ausdrücken durch

$$(\xi^k)' + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(t)\xi^j(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n \text{ und alle } t \in \tilde{I}.$$

Für die Funktionen ξ^k ist das ein System linearer DGL mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}' = A(t) \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Dieses System ist linear beschränkt, es folgt daher die Existenz von parallelen Vektorfeldern in Kartenumgebungen.

Satz. Sei $t_0 \in I = (a,b)$ und $v \in T_{c(t_0)}M$ vorgegeben. Dann gibt es genau ein VF $X \in \mathcal{X}_c$ mit

$$\tfrac{DX}{\mathrm{d}t} \equiv 0 \quad \text{und} \quad X(t_0) = v.$$

Def. Die **Parallelverschiebung** längs einer diff'baren Kurve $c : [a,b] \to M$ bzgl. eines Zshg ∇ ist

$$P_c : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M, \ \ v \mapsto X^v(b), \ \text{ wobei } \tfrac{DX^v}{\mathrm{d}t} \equiv 0 \text{ und } X^v(a) = v.$$

Satz. P_c ist linear.

Satz. Ist (M,g) Riem. Mft und ∇ der LC-Zshg, dann gilt

$$g_{c(b)}(P_c(v), P_c(w)) = g_{c(a)}(v,w).$$

Mit anderen Worten: P_c ist eine lineare Isometrie.

Bem. Wir können nun die Definition der Ableitung als Limes des Differenzenquotienten auf Mften übertragen: Sei $v \in T_xM$, $X \in \mathcal{X}(M)$ und $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ mit $c(0) = x$ und $\dot{c}(0) = v$. Dann ist

$$\nabla_v X = \lim_{t \to 0} \frac{P^{-1}_{c(t)}(X(c(t))) - X(c(0))}{t}$$

Bem. Parallelverschiebung ist auch möglich und sinnvoll entlang stückweise glatter Kurven.

Def. Die **Holonomiegruppe** von M in $x \in M$ bzgl. ∇ ist

$$\mathrm{Hol}^\nabla_x := \{P_c : T_xM \to T_xM \mid c \text{ stückweise glatt mit } c(0) = c(1) = x.\}$$

Dabei ist $P_c \circ P_{\tilde{c}} = P_{c \circ \tilde{c}}$ und $(P_c)^{-1} = P_{c^{-1}}$.

Bem. Hol^∇_x ist sogar eine Lie-Gruppe und Untergr. von $O(T_xM, g_x)$.

Def. Eine glatte Kurve $c : I \to M$ heißt **Geodäte** bzgl. ∇, falls

$$\frac{D^\nabla \dot{c}}{\mathrm{d}t} \equiv 0, \quad \text{d. h. das Tangential-VF } \dot{c} \text{ ist parallel längs } c.$$

Bem. Sei (U,ϕ) eine Karte, $\tilde{I} \subset I$ mit $c(\tilde{I}) \subset U$. In lokalen Koord. lässt sich diese Bed. ausdrücken durch die **Geodätengleichung**

$$(\dot{c}^k)'(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(t)\dot{c}^j(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1, ..., n \text{ und alle } t \in \tilde{I}.$$

Satz. Zu jedem $p \in M$ und $v \in T_pM$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und genau eine Geodäte $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$.

Satz. Seien $c_{1,2} : I_{1,2} \to M$ zwei Geodäten bzgl ∇ mit $0 \in I_1 \cap I_2$. Falls $c_1(0) = c_2(0)$ und $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$, dann gilt $c_1|_{I_1 \cap I_2} \equiv c_2|_{I_1 \cap I_2}$.

Satz. Gegeben $p \in M$ und $v \in T_pM$, dann gibt es genau ein Intervall $I_v \Subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I_v$ und eine Geodäte

$$c_v : I_v \to M \quad \text{mit} \quad c_v(0) = p, \ \dot{c}_v(0) = v,$$

die maximal im folgenden Sinn ist: Für jede Geodäte $c : I \to M$ mit $\dot{c}(0) = v$ gilt: $I \subseteq I_v$ und $c = c_v|_I$.

Notation. Für $v \in T_pM$ sei $c_v : I_v \to M$ die zugeh. max. Geodäte.

Def. Ein Zshg ∇ auf M heißt **vollständig**, wenn $\forall v \in TM : I_v = \mathbb{R}$.

Lemma (Spray-Eigenschaft). Ist $v \in T_pM$, $c_v : I_v \to M$ die maximale Geodäte mit $\dot{c_v}(0) = v$. Sei $\lambda \neq 0$, dann ist

$$c_{\lambda v} : I_{\lambda v} \to M, \ \ t \mapsto c_v(\lambda t) \quad \text{wobei} \quad I_{\lambda v} := \tfrac{1}{\lambda} I_v$$

die maximale Geodäte mit $\dot{c_{\lambda v}}(0) = \lambda v$.

Def. Sei M eine Mft mit Zshg ∇ und $p \in M$. Dann heißt

$$\mathrm{Exp}_p : \widetilde{T_pM} \to M, \ \ v \mapsto c_v(1), \quad \widetilde{T_pM} := \{v \in T_pM \mid 1 \in I_v\}$$

Exponentialabbildung von ∇ in p.

Lemma. • $\widetilde{T_pM}$ ist sternförmig bzgl. 0
- $\forall v \in \widetilde{T_pM} : \forall t \in [0,1] : \mathrm{Exp}_p(tv) = c_v(t)$

Satz. • Es gibt eine offene Umgebung $\hat{U} \Subset T_pM$ mit $0 \in \hat{U} \subseteq \widetilde{T_pM}$, sodass $\mathrm{Exp}_p|_{\hat{U}} : \hat{U} \to M$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung ist.
- Wir können $\hat{U}$ so wählen, dass $\mathrm{Exp}_p|_{\hat{U}} : \hat{U} \to \mathrm{Exp}_p(\hat{U})$ ein Diffeomorphismus ist.

Bem. Man kann zeigen: • $\widetilde{T_pM} \Subset T_pM$
- $\mathrm{Exp}_p : \widetilde{T_pM} \to M$ ist überall $\mathcal{C}^\infty$, aber nicht überall ein lokaler Diffeomorphismus (Schnittpunkt-Phänomen)
- Ist (M,∇) geodätisch vollständig, dann gilt $\widetilde{T_pM} = T_pM$.

Def. Eine Kurve $c : I \to M$ heißt **nach** / **proportional zur BL parametrisiert**, wenn gilt:

$$\|\dot{c}(t)\| \equiv 1 \quad / \quad \|\dot{c}(t)\| \equiv \text{konst.}$$

Bem. • Jede Geodäte ist proportional zur BL parametrisiert.
- Eine Kurve ist genau dann prop. zur BL parametrisiert, wenn es $\alpha \geq 0$ gibt mit $L(c|_{[a,b]}) = \alpha \cdot (b-a)$.

Def. Eine **Variation** von $c : [a,b] \to M$ ist eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung

$$(-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M, \quad (s,t) \mapsto \alpha(s,t) \quad \text{mit } \forall t \in [a,b] : \alpha(0,t) = c(t).$$

Sie heißt **Variation mit festen Endpunkten**, wenn zudem gilt:

$$\forall s \in (-\epsilon,\epsilon) : \alpha(s,a) = c(a) \wedge \alpha(s,b) = c(b)$$

Sprechweise. s heißt **Variationsparameter**

Def. Eine Variation einer stückweise glatten Kurve $c : [a,b] \to M$ (mit c glatt auf den Teilintervallen $[t_{i-1}, t_i]$) ist eine stetige Abb.

$$\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M, \ \ (s,t) \mapsto \alpha_s(t) \quad \text{mit } \alpha|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[t_{i-1},t_i]} \text{ ist } \mathcal{C}^\infty.$$

Notation. • $\frac{\partial\alpha}{\partial s}(s_0,t_0)$ ist der Tang.-Vektor an $s\mapsto\alpha(s,t_0)$ in s_0.
• $\frac{\partial\alpha}{\partial t}(s_0,t_0)$ ist der Tangentialvektor an $s\mapsto\alpha(s_0,t)$ in t_0.

Def. Eine Abbildung $X:(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\to TM$ mit $X(s,t)\in T_{\alpha(s,t)}M$ heißt **Vektorfeld längs α**, wenn X differenzierbar (bzw. stückweise diff'bar) ist.

Notation. Sei X ein VF längs $\alpha(s,t)$. Dann

$$\frac{DX}{\partial s}(s_0,t_0) := \frac{D}{\mathrm{d}s}|_{s=s_0}(s\mapsto X(s,t_0))$$
$$\frac{DX}{\partial t}(s_0,t_0) := \frac{D}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0}(s\mapsto X(s_0,t))$$

Lemma. $\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s}$

Satz (**1. Variationsformel**)**.** Sei $\alpha:(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\to M$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Variation von einer $\mathcal{C}^\infty$-Kurve $c=\alpha_0:[a,b]\to M$. Sei $\|\dot c(t)\|=\text{konst}\neq 0$. Dann gilt mit $X(t):=\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0}L(\alpha_s)=\frac{1}{\|\dot c\|}\left(g(X,\dot c)|_a^b-\int_a^b g(X(\tau),\tfrac{D\dot c}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{d}\tau\right)$$

Sprechweise. $X(t):=\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)$ heißt **Variationsvektorfeld** (VVF).

Satz (**1. Variationsformel** für stückweise glattes c)**.**
Sei $\alpha:(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\to M$ eine stückweise glatte Variation, glatt auf $(-\epsilon,\epsilon)\times[t_{i-1},t_i]$ mit $a=t_0<\ldots<t_k=b$. Dann ist

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_s}{\mathrm{d}s}|_{s=0}=\frac{1}{\|\dot c\|}\left(g(X,\dot c)|_a^b+\sum_{i=1}^{k-1}g(X(t_i),\nabla_i\dot c)-\int_a^b g(X,\frac{D\dot c}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{d}t\right)$$
$$\text{mit } \nabla_i\dot c=\dot c(t_i^-)-\dot c(t_i^+)$$

Notation. $\dot c(t_i^+)=\lim_{t\downarrow t_i}\dot c(t),\quad \dot c(t_i^-)=\lim_{t\uparrow t_i}\dot c(t)$

Satz. Zu jedem (stückw.) glatten $X\in\mathcal{X}_c$ gibt es eine (stückw.) glatte Variation α von c mit $X=\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)$. Wenn $X(a)=X(b)=0$, so kann man α als Variation mit festen Endpunkten wählen.

Satz. Für $c:[a,b]\to M$ stückw. glatt mit $\|\dot c\|=\text{konst}$ sind äquiv.:
- c ist eine Geodäte
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0}L(\alpha_s)=0$ für jede stückweise glatte Variation α von c mit festen Endpunkten.

Korollar. Sei $c:[a,b]\to M$ stückweise glatt und kürzeste stückweise Verbindung ihrer Endpunkte (d. h. für alle $\tilde c:[a,b]\to M$ stückweise glatt mit $c(a)=\tilde c(a)$ und $c(b)=\tilde c(b)$ ist $L(c)\leq L(\tilde c)$). Dann ist c eine glatte Geodäte.

Achtung. Geodäten sind i. A. nicht global kürzeste Verbindungen, die Umkehrung gilt also nicht!

Notation. $\Omega_{p,q}:=\{c:[0,1]\to M\,|\,c(0)=p, c(1)=q, c \text{ stückw. glatt }\}$

Bem. Geodäten sind „kritische Punkte" von $L:\Omega_{p,q}\to\mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $\|\dot c\|=\text{konst}$. Ersetzt man das Längenfunktional durch die Energie, so ist diese NB unnötig.

Notation. $S_\rho(0)=\{x\in T_pM\,|\,\|x\|=\rho\}$

Satz (**Gaußlemma**)**.** Sei (M,g) eine zshgde Riem. Mft, $\nabla=\nabla^{\mathrm{LC}}$. Sei $p\in M$ und $\epsilon>0$, sodass

$$\mathrm{Exp}_p|_{B_\epsilon(0)}:B_\epsilon(0)\to\mathrm{Exp}_p(B_\epsilon(0))$$

ein Diffeo ist. Dann schneiden die radialen Geodäten

$$t\mapsto\mathrm{Exp}_p(tv)=c_v(t),\quad v\in T_pM\setminus\{0\},$$

die Hyperflächen $\mathrm{Exp}_p(S_\rho(0))$, $\rho\in(0,\epsilon)$ orthogonal.

Satz. Seien $p\in M$, $\epsilon>0$, $\rho\in[0,\epsilon)$ wie eben. Dann ist

$$c_v|_{[0,\rho]}:[0,\rho]\to M,\quad t\mapsto c_v(t)=\mathrm{Exp}_p(tv)\qquad(v\in T_pM,\|v\|=1)$$

die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte, genauer:
Es gilt $\rho=L(c_v|_{[0,\rho]})\leq L(\gamma)$ für jedes $\gamma:[a,b]\to M$ stückweise glatt mit $\gamma(a)=p$, $\gamma(b)=c_v(\rho)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\gamma(t)=c_v(r(t))$ mit $r:[a,b]\to[0,\rho]$ monoton wachsend.

Def. $i(p):=\sup\{\epsilon>0\,|\,\mathrm{Exp}_p|B_\epsilon(0) \text{ ist Diffeo aufs Bild }\}$ heißt **Injektivitätsradius** von M in p.

Satz. Sei M eine zshgde Riemannsche Mannigfaltigkeit.
- Ist $p\in M$, $\epsilon\in(0,i(p))$, dann ist
$$\mathrm{Exp}_p(B_\epsilon(0))=B_\epsilon(p):=\{q\in M\,|\,d(p,q)<\epsilon\},$$
$$\mathrm{Exp}_p(S_\epsilon(0))=S_\epsilon(p):=\{q\in M\,|\,d(p,q)=\epsilon\}.$$
- $d:M\times M\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Metrik.
- Die durch d ind. Topologie stimmt mit der gegebenen überein.

Satz (**Hopf-Rinow** 1)**.** Sei M eine zshgde Riem. Mft, $p\in M$. Angenommen, alle Geodäten γ auf M mit $\gamma(0)=p$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert (m.a.W: Exp_p ist auf ganz T_pM definiert). Dann gibt es für alle $q\in M$ eine kürzeste Geodäte von p nach q.

Satz (**Hopf-Rinow** 2)**.** Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M sind äquivalent:
- M ist geodätisch vollständig.
- $\forall\,p\in M$: Exp_p ist auf ganz T_pM definiert.
- Beschränkte und abgeschlossene Teilmengen von M sind kompakt.
- M ist ein vollständiger metrischer Raum.

Korollar. Jede kompakte Riemannsche Mft ist geodätisch vollständig und zwei ihrer Punkte können durch eine kürzeste Geodäte verbunden werden.

Korollar. Unter-Mften des $\mathbb{R}^n$ sind geodätisch vollständig.

Def. Der **Krümmungstensor** von einem Zshg ∇ auf M ist

$$R^\nabla=R:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M)$$
$$(X,Y,Z)\mapsto R(X,Y)Z:=\nabla_X(\nabla_YZ)-\nabla_Y(\nabla_XZ)-\nabla_{[X,Y]}Z.$$

Bem. R^∇ ist ein (1,3)-Tensor.

Notation. $R_p(u,v)w:=(R(X,Y)Z)(p)$ für $u,v,w\in T_pM$, wobei $X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$ mit $X(p)=u$, $Y(p)=v$, $Z(p)=w$.

Satz. Es gilt für $X,Y,Z,W\in\mathcal{X}(M)$:
- $-R(X,Y)Z=R(Y,X)Z$
- Falls ∇ torsionsfrei: **1. Bianchi-Identität** / **Jacobi-Identität**:
$$R(X,Y)Z+R(Z,X)Y+R(Y,Z)X=0.$$
- Ist (M,g) Riemannsch und ∇ metrisch, dann gilt
$$g(R(X,Y)Z,W)=-g(R(X,Y)W,Z).$$
- Ist ∇ der LC-Zshg von (M,g) Riemannsch, dann ist
$$g(R(X,Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y).$$

Def. Sei $p\in M$, $\sigma=\mathrm{span}(v,w)\in T_pM$ ein 2-dim UVR. Dann heißt

$$\sec(\sigma)=\kappa(\sigma):=\frac{g(R(v,w)w,v)}{\|v\|^2\cdot\|w\|^2-g(v,w)^2}$$

Riemannsche Schnittkrümmung von σ.

Lemma. $\sec(\sigma)$ ist unabhängig von der Basiswahl.

Satz. Sei $\alpha:(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\to M$ eine glatte Variation einer Kurve $\alpha_0:[a,b]\to M, t\mapsto\alpha(0,t)$. Sei $X:(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\to TM$ ein VF längs α. Dann gilt:

$$\frac{D}{\partial s}\frac{DX}{\partial t}-\frac{D}{\partial t}\frac{DX}{\partial s}=R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s},\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)X$$

Satz (**2. Variationsformel** für die Länge)**.** Sei $c:[a,b]\to M$ eine Geodäte, $\alpha:(-\epsilon,\epsilon)\times[a,b]\to M$ eine glatte Variation von c mit festen Endpunkten, $X(t):=\frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)\in\mathcal{X}_c$ das VVF mit $X^\perp:=X-g(X,\frac{\dot c}{\|\dot c\|})\frac{\dot c}{\|\dot c\|}$ senkrechtem Anteil zu $\dot c$. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}|_{s=0}L(\alpha_s)=\frac{1}{\|\dot c\|}\int_a^b\|\frac{DX^\perp}{\mathrm{d}t}\|^2-g(R(X,\dot c)\dot c,X)\,\mathrm{d}t.$$

Def. Der **Durchmesser** einer Riemannschen Mft (M,g) ist

$$\mathrm{diam}(M):=\sup\{d(p,q)\,|\,p,q\in M\}.$$

Satz (**Myers** 1935)**.** Jede vollständige zshgde Riem. Mft. mit $\sec\geq\delta>0$ ist kompakt mit Durchmesser $\mathrm{diam}(M)\leq\frac{\pi}{\sqrt\delta}$.

Bem. Das Bsp der Sphären zeigt: Die Schranke ist optimal.

Korollar. Sei M eine vollständige zshge Mft, $\dim(M)\geq 2$ mit $\sec\geq\delta>0$. Dann ist $\pi_1(M)$ endlich.

Def. Sei $p\in M$, $v\in T_pM$ mit $\|v\|=1$, $v=e_1,e_2,\ldots,e_n$ eine ONB von T_pM. Die **Ricci-Krümmung** von M in Richtung v ist dann

$$\mathrm{Ric}(v):=\sum_{j=2}^n\sec(\mathrm{span}(v,e_j)).$$

Bem. $\mathrm{Ric}(v)$ ist unabhängig von der Wahl der ONB:

$$\mathrm{Ric}(v)=\sum_{j=2}^n\sec(v,e_j)=\sum_{j=2}^n g(R(e_j,v)v,e_j)=$$
$$=\sum_{j=1}^n g(R(e_j,v)v,e_j)=\mathrm{spur}(x\mapsto R(x,v)v)$$

Def. $\mathrm{Ric}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},\ (v,w) \mapsto \mathrm{spur}(x \mapsto R(x,v)w)$ heißt **Ricci-Tensor**.

Bem. Der Ricci-Tensor ist ein (2,0)-Tensor und es gilt:
- $\mathrm{Ric}_p(v,w) = \mathrm{Ric}_p(w,v)$,
- $\mathrm{Ric}(v) = \mathrm{Ric}(v,v)$.

Def. (M,g) heißt **Einstein-Mft**, wenn die Ricci-Krümmung konstant ist, d. h. $\forall p \in M\ :\ \forall x,y \in T_pM\ :\ \mathrm{Ric}(x,y) = c \cdot g(x,y)$.

Beobachtung.
- $\sec \geq \delta \implies \mathrm{Ric}(v) \geq (n-1)\delta$
- Mften mit konstanter Schnittkrümmung sind Einstein.

Satz (**Myers**)**.** Jede vollständige zshgde Riem. Mft. mit $\mathrm{Ric} \geq (n-1)\delta$ ist kompakt mit Durchmesser $\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Def. Sei (M,g) eine Riem. Mft, $c : I \to M$ glatt, $Y \in \mathcal{X}_c$ heißt **Jacobi-Feld**, wenn die **Jacobi-Gleichung** gilt:

$$Y'' + R(Y,\dot c)\dot c = 0 \quad (Y'' := \tfrac{D}{\mathrm{d}t}(\tfrac{DY}{\mathrm{d}t}))\,.$$

Bem. Die Jacobi-Gleichung ist linear in Y, somit ist $\{X \in \mathcal{X}_c \mid X \text{ ist ein Jacobi-Feld}\}$ ein UVR von $\mathcal{X}_c$.

Satz. Sei $c : [a,b] \to M$ eine Geodäte, $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ eine glatte Variation von $c = \alpha_0$ durch Geodäten (d. h. α_s ist Geodäte für alle $s \in (-\epsilon,\epsilon)$). Dann ist das VVF $X = \frac{\partial\alpha}{\partial s}(0,t)$ ein Jacobi-Feld.

Satz. Sei $c : I \to M$ eine Kurve, $t_0 \in I$. Dann gibt es für alle $v, w \in T_{c(t_0)}M$ genau ein Jacobi-Feld $Y \in \mathcal{X}_c$ mit

$$Y(t_0) = v \quad \text{und} \quad Y'(t_0) = w.$$

Satz. Sei $v \in T_pM$, $w \in T_pM \cong T_v(T_pM)$. Dann gilt $(\mathrm{Exp}_p)_{*v}(w) = Y(1)$, wobei $Y \in \mathcal{X}_c$ ein Jacobi-Feld längs $c_v(t) = \mathrm{Exp}_p(tv)$ mit $Y(0) = 0$ und $Y'(0) = w$.

Satz. Sei Y ein Jacobifeld längs einer Geodäten c in (M,g). Wenn $\sec \leq 0$, dann gilt
- $(t \mapsto \|Y(t)\|^2)$ ist konvex.
- Wenn Y zwei verschiedene Nullstellen hat, dann $Y \equiv 0$.
- Es gibt keine konjugierten Punkte längs c.

Korollar. Falls (M,g) vollständig mit $\sec \leq 0$, dann ist Exp_p für alle p ein lokaler Diffeomorphismus, d. h.

$$\forall v \in T_pM\ :\ \exists U_v \Subset T_pM\ :\ \mathrm{Exp}_p|_{U_v} : U_v \to \mathrm{Exp}_p(U_v) \text{ ist Diffeo.}$$

Satz. Sei X wegzshgd, Y einfach zshgd, $\pi : X \to Y$ eine Überlagerung. Dann ist π ein Homöomorphismus.

Def. Eine Abbildung $\pi : (M_1,g_1) \to (M_2,g_2)$ zwischen Riemannsche Mften heißt **Riemannsche Überlagerung**, wenn gilt:
- π ist eine topologische Überlagerung
- π ist diffbar
- $\pi_{*p} : T_pM_1 \to T_{\pi(p)}M_2$ ist eine orthogonale Abb f. a. $p \in M_1$.

Satz. Sei $\pi : (M_1,g_1) \to (M_2,g_2)$ eine surjektive lokale Isometrie zwischen Riem. Mften. Wenn M_1 vollständig ist, dann ist π eine Riemannsche Überlagerung.

Satz (**Cartan-Hadamard**)**.** Sei (M,g) eine vollständige, zshgde Riemannsche Mft. mit Schnittkrümmung $\sec \leq 0$, $p \in M$. Dann ist $\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ eine Überlagerung.

Korollar. Falls (M^n,g) zusätzlich einfach zshgd ist, dann gilt $M \cong \mathbb{R}^n$. Je zwei Punkte in M lassen sich durch genau eine nach BL param. Geodäte verbinden (bis auf Umkehrung, Parametershift).

Satz (**Synge** 1936)**.** Jede zshgde kompakte orientierte Riem. Mft gerader Dimension mit $\sec > 0$ ist einfach zshgd.

Satz (**Weinstein** 1968, **Synge** 1936)**.** Sei M^n kompakte, zshgde, orientierte Riem. Mft, $\sec > 0$, n gerade. Sei $f : M^n \to M^n$ eine orientierungstreue Isometrie. Dann hat f einen Fixpunkt.

Prop. Sei (M,g) eine vollständige Riem. Mft, $p \in M$. Seien $f, g \in \mathrm{Iso}(M)$. Wenn $f(p) = g(p)$ und $f_{*p} = g_{*p}$, dann gilt $f \equiv g$.

Def. Eine zshgde Riem. Mft P heißt **Symmetrischer Raum**, wenn

$$\forall p \in P\ :\ \exists s_p \in \mathrm{Iso}(P)\ :\ s_p(p) = p\ \wedge\ (s_p)_{*p} = -\mathrm{id}_{T_pP}\,.$$

Sprechweise. s_p heißt **(geodätische) Spiegelung** in p.

Lemma. Sei P ein symmetrischer Raum, $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to P$ eine Geodäte, $p = \gamma(0)$. Dann gilt $\forall t \in (-\epsilon,\epsilon)\ :\ (s_p \circ \gamma)(t) = \gamma(-t)$.

Lemma. Sei P ein sym. Raum, $\gamma : (-\epsilon,\epsilon) \to P$ eine Geodäte, $\gamma(0) = p$, $\tau \in (-\epsilon,\epsilon)$, $q := \gamma(\tau)$. Dann gilt $(s_q \circ s_p)(\gamma(t)) = \gamma(t+2\tau)$, wenn $t + 2\tau \in (-\epsilon,\epsilon)$.

Korollar. Symmetrische Räume sind geodätisch vollständig.

Def. Eine Riem. Mft M heißt **homogen** (homogener Raum), wenn

$$\forall p,q \in M\ :\ \exists f \in \mathrm{Iso}(M,g)\ :\ f(p) = q.$$

Lemma. Symmetrische Räume sind homogen.

Lemma. Sei P ein symm. Raum, $p,q \in P$, $f \in \mathrm{Iso}(P)$ mit $f(p) = q$. Dann gilt $s_q = f \circ s_p \circ f^{-1}$.

Korollar. Ist (M,g) eine homogene zshgde Riem. Mft, sodass

$$\exists m \in M\ :\ \exists s_m \in \mathrm{Iso}(M)\ :\ s_m(m) = m \text{ und } (s_m)_{*m} = -\mathrm{id}_{T_mM}\,.$$

Dann ist M ein symmetrischer Raum.

Def. Sei M eine Mft mit Zshg ∇. Sei T ein Tensorfeld auf M vom Typ $(1,k)$. Dann ist ∇T das durch

$$(\nabla T)(X_1,...,X_k,Y) := \nabla_Y(T(X_1,...,X_k)) - \sum_{i=1}^k T(X_1,...,\nabla_Y X_i,...,X_k)$$

definierte Tensorfeld vom Typ $(1,k+1)$.

Bsp. Sei (M,g) Riem, $\nabla = \nabla^{\mathrm{LC}}$. Dann gilt $\nabla g = 0$ (∇ metrisch).

Def. T heißt **parallel**, wenn $\nabla T = 0$.

Satz. P symmetrisch $\implies \nabla^{\mathrm{LC}} R = 0$

Bem. Die Umkehrung gilt nur lokal.

Notation. Sei P im Folgenden ein symmetrischer Raum.

Def. Eine **Transvektion** von P ist eine Isometrie der Form

$$t_{pq} = s_p \circ s_q \quad \text{mit } p,q \in P,$$

d. h. ein Produkt geodätischer Spiegelungen.

Bsp. Im $\mathbb{R}^n$ sind die Transvektionen genau die Translationen.

Def. Die von den Transvektionen erzeugte abgeschl. Untergruppe

$$\mathrm{Trans}(P) := \langle t_{pq} \mid p,q \in P\rangle_c$$

heißt **Transvektionsgruppe** von P.

Lemma. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to P$ eine Geodäte, $p = \gamma(0)$, $X \in \mathcal{X}_\gamma$ parallel. Sei

$$Y := (s_p)_*X : \mathbb{R} \to TP, \quad t \mapsto (s_p)_{*\gamma(t)}X(t)$$

Dann gilt $Y(t) = -X(-t)$.

Lemma. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to P$ eine Geodäte. Dann gilt f. a. $\tau \in \mathbb{R}$:
- $(t_{\gamma(\tau)\gamma(0)} \circ \gamma)(t) = \gamma(t+2\tau)$
- $(t_{\gamma(\tau)\gamma(0)*}X)(t) = X(t+2\tau)$ für $X \in \mathcal{X}_\gamma$ parallel.

Lemma. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to P$ eine Geodäte. Dann ist die Abbildung

$$t^\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{Iso}(P), \quad \tau \mapsto t_{\gamma(\tau)\gamma(0)}$$

eine Ein-Parameter-Untergruppe.

Def. $t^\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{Iso}(P)$ heißt **Transvektion** längs γ.

Satz. Jede maximale Geodäte in P ist Bahn einer 1-Parameter-UG von Isometrien, nämlich von $\gamma(\tau) := (t^\gamma(\tau))(c(0))$.

Def. $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt **Periode** einer Geodäten γ, wenn f. a. $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\gamma(t) = \gamma(t+\lambda)$. Die Menge aller Perioden wird mit P_γ bezeichnet.

Lemma. Sei $b > a$ und $c(a) = c(b)$. Dann ist $\lambda := b - a \in P_\gamma$.

Korollar. Hat eine Geodäte γ in P einen Selbstschnitt, so ist γ periodisch. Sei λ_0 die minimale nichttriviale Periode einer nichttrivialen Geodäten γ in P. Dann ist $\gamma|_{[t,t+\lambda_0)}$ injektiv für alle t.

Satz (**Sphärensatz**)**.** Sei M^n eine kompakte, einfach zsghde Riem. Mft. mit $\frac{1}{4} < \sec \leq 1$. Dann ist M diffeomorph zur n-Sphäre.

Def. Sei M eine Riem. Mft, $p \in M$.

$$\mathrm{Iso}_p(M) := \{f \in \mathrm{Iso}(M) \mid f(p) = p\} \quad \text{heißt } \textbf{Isotropiegruppe} \text{ von } p.$$

Lemma. Seien $p,q \in M$, $f \in \mathrm{Iso}(M)$ mit $f(p) = q$. Dann ist

$$\mathrm{Iso}_q(M) = \{f \circ g \circ f^{-1} \mid g \in \mathrm{Iso}_p(M)\}.$$

Korollar. Ist M homogen, so sind alle Isotropiegruppen isomorph.

Bem. Sei M zshgd, vollständig. Dann ist

$$\phi : \mathrm{Iso}_p(M) \to O(T_pM), \quad f \mapsto f_{*p}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Satz. $\phi(\mathrm{Iso}_p(M))$ ist abgeschlossen in $O(T_pM)$, also kompakt.

Satz. Sei P ein sym. Raum. Dann ist $\mathrm{Hol}_p(P) \subseteq \phi(\mathrm{Iso}_p(P))$.

Bem. • Umkehrung: Sei M einfach zshgde, Riem. Mft. mit $\mathrm{Hol}_p(M) \subseteq \phi(\mathrm{Iso}_p(M))$. Dann ist P ein symmetrischer Raum.
- Für $P = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ gilt $\mathrm{Hol}_p(P) \subsetneq \phi(\mathrm{Iso}_p(P))$.
- Für eine zshgde, vollst. Riem. Mft. M gilt:

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{Iso}_p(M)) &= \text{Normalisator von } \mathrm{Hol}_p(M) \text{ in } O(T_pM)\\ &= \{g \in O(T_pM) \mid g\,\mathrm{Hol}_p(M)g^{-1} = \mathrm{Hol}_p(M)\}.\end{aligned}$$

Satz. Sei P ein kompakter sym. Raum. Dann ist $\pi_1(P)$ abelsch.

Def. Eine **Darstellung** einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ mit V ein Vektorraum.

Def. Eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ heißt **irreduzibel**, wenn

$$\forall\, U \subset V \text{ UVR} : (\forall\, g \in G : \rho(g)(U) = U) \implies U \in \{\{0\}, V\}.$$

Satz (de Rham)**.** Sei (M, g) eine einfach zshgde vollständige Riem. Mft. Dann ist M isometrisch zu einem Riemannschen Produkt

$$M \cong M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_k \quad \text{mit}$$

- M_0 ist ein euklidischer VR (evtl. $\{0\}$)
- $M_1, \ldots, M_k$ sind vollständige, einfach zshgde, unzerlegbare (im Sinne dieses Satzes) Riem. Mft, für die gilt: $\mathrm{Hol}_{p_j}(M_j)$ wirkt irreduzibel auf $T_{p_j}M_j$.

Def. Eine Riem. Mft (M, g) heißt **Isotropie-irreduzibel**, wenn gilt: Für alle $p \in M$ wirkt $\mathrm{Iso}_p(M)$ irreduzibel auf T_pM.

Satz. Sei P ein zshgder, de-Rham-unzerlegbarer sym. Raum. Dann ist P Isotropie-irreduzibel.

Lemma. Sei (M, g) ein Isotropie-irreduzibler homogener Raum und $B : TM \times TM \to \mathbb{R}$ ein symmetrischer $(0, 2)$-Tensor. Angenommen, B ist Isometrie-invariant, d. h.

$$\forall\, f \in \mathrm{Iso}(P) : \forall\, p \in M : \forall\, x, y \in T_pM : B_{f(p)}(f_{*p}x, f_{*p}y) = B_p(x, y).$$

Dann gilt $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} : B = \lambda \cdot g$.

Satz. Zshgde Isotropie-irred. homogene Räume sind Einsteinsch.

Def. Eine **Wirkung** einer eine Lie-Gruppe G auf einer diff'baren Mft M ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to \mathrm{Diff}(M)$, sodass $G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto \phi(g)(m)$ glatt ist.

Def. Das **Wirkungsvektorfeld** von ϕ zu $x \in \mathfrak{G} \cong T_eG$ ist

$$X^\phi : M \to TM, \quad p \mapsto \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\phi_{g_x(t)}(p).$$

Dabei ist $g_x : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ glatt mit $g_x(0) = e$, $\dot{g_x}(0) = x$.

Lemma. Sei G eine Lie-Gruppe, $X \in \mathcal{X}(G)$ ein linksinvariantes VF. Dann ist die Integralkurve c_e eine 1-Parameter-Untergruppe von G.

Lemma. Sei $X \in \mathcal{X}(G)$ linksinvariant. Dann ist $c_g = L_g \circ c_e$.

Lemma. Jede 1-Param-UG $\phi : \mathbb{R} \to G$ definiert ein linksinv. VF $X \in \mathcal{X}(G)$, dessen Integralkurve durch e gerade ϕ ist: $c_e = \phi$.

Fazit. $\forall\, x \in T_eG : \exists!$ 1-Param-UG $\phi_x : \mathbb{R} \to G : \dot{\phi_x}(0) = x$

Def. Die **Exponentialabbildung** der Lie-Gruppe G ist

$$\exp : T_eG \cong \mathfrak{G} \to G, \quad x \mapsto \phi_x(1).$$

Bem. Wenn G eine bi-inv. Metrik hat, dann ist $\exp = \mathrm{Exp}_e$.

Def. Ein VF $X \in \mathcal{X}(M)$ heißt **Killing-Feld**, wenn die lokalen Flüsse Φ_t von X aus lokalen Isometrien bestehen, d. h.

$$\forall\, x \in U : \forall\, v, w \in T_xM : g_{\Phi_t(x)}(\Phi_{t*}v, \Phi_{t*}w) = g_x(v, w).$$

Notation. $KF(M) \coloneqq \{X \in \mathcal{X}(M) \mid X \text{ Killing}\}$

Lemma. Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ ist genau dann ein Killing-VF, wenn ∇X schiefsymmetrisch ist, d. h.

$$\forall\, X, Y, Z \in \mathcal{X}(M) : g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y)$$

Facts. Sei $X \in KF(M)$.
- $KF(M)$ ist eine Unter-Lie-Algebra von $\mathcal{X}(M)$.
- Für jede Geodäte γ ist $X \circ \gamma \in \mathcal{X}_\gamma$ ein Jacobi-Feld längs γ.
- $\forall\, A, B \in \mathcal{X}(M) : L_X(A, B) \coloneqq \nabla_A\nabla_B X - \nabla_{\nabla_A B}X + R(X, A)B = 0$
- Ist (M, g) vollständig, dann ist $\Phi_t : M \to M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert.

Satz. Sei P ein sym. Raum, $G \coloneqq \mathrm{Iso}(P)$, $\mathfrak{G} \coloneqq \mathcal{L}(G) \cong T_eG$ die Lie-Algebra von G. Dann ist die Abbildung

$$\iota : \mathfrak{G} \to KF(P), \quad x \mapsto (X : p \mapsto \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_0 \exp(tx).p)$$

ist ein $\mathbb{R}$-VR-Isomorphismus.

Achtung. Es gilt $\iota([x, y]_{\mathfrak{G}}) = -[\iota(x), \iota(y)]_{\mathcal{X}(P)}$, es ist ι also fast (bis auf Vorzeichen) ein Lie-Algebra-Isomorphismus.

Def. Sei P ein symmetrischer Raum, $p \in P$. Setze

$$\begin{aligned}k_p &\coloneqq \iota^{-1}(\{X \in KF(P) \mid X(p) = 0\}) \subset \mathfrak{G},\\ p_p &\coloneqq \iota^{-1}(\{X \in KF(P) \mid \nabla X(p) = 0\}) \subset \mathfrak{G}.\end{aligned}$$

Lemma. Sei P ein symmetrischer Raum, $p \in P$. Dann gilt

$$\forall\, v \in T_pP : \exists!\, \tilde{v} \in p_p : \forall\, s \in \mathbb{R} : \exp(s\tilde{v}) = t^{\gamma_v}(s).$$

Prop. $k_p = \mathfrak{G}_p \coloneqq \mathcal{L}(\mathrm{Iso}_p(P)) \cong T_e\,\mathrm{Iso}_p(P)$

Prop. $\mathfrak{G} = p_p \oplus k_p$ (direkte Summe von UVR)

Prop (**Cartan-Relationen**)**.**
• $[k_p, k_p]_{\mathfrak{G}} \subseteq k_p$ • $[k_p, p_p]_{\mathfrak{G}} \subseteq p_p$ • $[p_p, p_p]_{\mathfrak{G}} \subseteq k_p$

Prop. Sei $\mathfrak{G} = k \oplus p$ eine Zerlegung einer reellen Lie-Algebra. Es gelten die Cartan-Relationen genau dann, wenn es eine Involution $\nabla : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ (d. h. ein Lie-Algebra-Autom. mit $\nabla^2 = \mathrm{id}$) gibt, sodass k der ER zum EW $+1$ und p der ER zum EW -1 von ∇ ist.

Prop. Sei P ein symmetrischer Raum, $p \in P$. Dann ist

$$R_p : p_p \to T_pP, \quad x \mapsto \iota(x)(p)$$

ein VR-Isomorphismus und es gilt

$$(R(\iota(v), \iota(w))\iota(u))(p) = \iota([u, [v, w]_{\mathfrak{G}}]_{\mathfrak{G}})(p).$$

Korollar. Sei P ein symmetrischer Raum. Dann ist

$$R_p(a, b) : T_pP \to T_pP, \quad x \mapsto R_p(a, b)x$$

eine Derivation von R_p, d. h. für alle $A, B, X, Y, Z \in \mathcal{X}(P)$ gilt

$$\begin{aligned}R(A, B)(R(X, Y)Z) = R(R(A, B)X, Y)Z + R(X, R(A, B)Y)Z\\ + R(X, Y)(R(A, B)Z).\end{aligned}$$