Zusammenfassung Modellkategorien

 Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Def. Eine **(schwache) 2-Kategorie** $\mathbb{C}$ besteht aus

- einer Ansammlung $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & B \arrow[Rightarrow, from=U, to=D] \end{tikzcd} \right\},$$

- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem Objekt $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}} : \; - \circ (- \circ -) \Longrightarrow (- \circ -) \circ -,$$

  wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$

- und für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ natürlichen Isomorphismen

$$\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (- \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} K(H(GF)) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] \arrow[d, "K\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}}"] & (KH)(GF) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{G}}"] & ((KH)G)H \\ K((HG)F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] & & (K(HG))F \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}F"'] \end{tikzcd}$$

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathbb{C}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} G \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{D},\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "G\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}}"'] & & (G \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \arrow[dl, "\rho_{\mathcal{D},\mathcal{E}}F"] \\ & G \circ F & \end{tikzcd}$$

Bspe.
- Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.
- Jede Kategorie $\mathcal{C}$ ist natürlich eine 2-Kategorie.
- Die Kategorie der Ringe $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathbb{R}) := \{\,\text{Ringe mit Eins}\,\}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) :=$ Kat. der B-A-Bimoduln mit $N \circ M := N \otimes_B M$ für $M \in \mathrm{Hom}(A, B)$ und $N \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\mathrm{Id}_A := A$.

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann $\otimes$ anstelle von $\circ$ geschrieben.

Def. Sei $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ von S ist eine Familie $\alpha_c : E \to S(c, c)$, $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von Morphismen in $\mathcal{A}$, sodass für alle $(f : c \to c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & S(c,c) \arrow[dr, "S(\mathrm{id}_c, f)"] & \\ E \arrow[ur, "\alpha_c"] \arrow[dr, "\alpha_{c'}"'] & & S(c,c') \\ & S(c',c') \arrow[ur, "S(f, \mathrm{id}_{c'})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, und E universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler S-**Keil**.

Notation. $E = \int_c S(c, c)$.

Bem. Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden: $\lim F = \int_c F(c)$; der Integrand ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$.

Bem. Das duale Konzept ist das eines ~~Anfangs~~ Koendes $\int^c S(c, c)$.

Bsp. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_c \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \;\cong\; \mathrm{Nat}(F, G).$$

Satz (Fubini)**.** Sei $S : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d,c)} S(d, d, c, c) \;\cong\; \iint_{dc} S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und $\int_c S(d, d', c, c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

Bsp. Sei R ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt $*$. Ein additiver Funktor $R^{(\mathrm{op})} \to \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein R-Linksmodul (bzw. R-Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{*\in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Lem (Ninja-Yoneda-Lemma)**.** Für jede Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ gilt

$$F \cong \int^c F(c) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

Def. Sei $\mathbb{C}$ eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ist geg. durch Morphismen $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ (genannt **Eins**) und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ (**Koeins**) mit $G\epsilon \circ \eta G = \mathrm{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \mathrm{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.

Lem. R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bem. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\mathrm{Hom}(F \circ -, -) \cong \mathrm{Hom}(-, G \circ -)$$

Bsp. $\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$

Bsp. Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein B-A-Modul M ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn M als Rechts-A-Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

Bem. Sind η und ϵ in $F \dashv G$ sogar Isomorphismen, so heißt $F \dashv G$ auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von F und G sowie einem der Morphismen ϵ, η) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

Kan-Erweiterungen

Def. Sei $\mathcal{A} \xleftarrow{T} \mathcal{M} \xrightarrow{K} \mathcal{C}$ ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE) (R, ϵ) von T längs K besteht aus

- einem Morph. $R : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$
- einem 2-Morph. $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$,

sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE $(S : \mathcal{C} \to \mathcal{A}, \eta : S \circ K \Rightarrow T)$ gibt es genau ein $\sigma : S \Rightarrow R$ mit $\epsilon \circ \sigma K = \eta$. Notation: $R = \mathrm{Ran}_K(T)$

Bem. Es sind äquivalent:
- (R, ϵ) ist RKE von T längs K
- $\eta \mapsto \epsilon \circ \eta K : \mathrm{Nat}(S, R) \to \mathrm{Nat}(S \circ K, T)$ ist bij. $\forall\, S : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$

Bem. Es gilt $R = \mathrm{Ran}_K(T)$ genau dann, wenn es in $S \in [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ natürliche Isomorphismen $\mathrm{Nat}(S, R) \cong \mathrm{Nat}(S \circ K, T)$ gibt.

Prop. RKEs sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bspe.
- Die RKE eines bel. Morphismus $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ längs $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ existiert stets und ist gegeben durch $(T, T \circ \mathrm{Id}_M \Rightarrow T)$.
- In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\mathrm{Ran}_K(T) = (\mathrm{Hom}_M(K, T), \; ev : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(K, T) \otimes_C K \Rightarrow T).$$

Bsp. Sei $K : \mathcal{M} \to \mathbb{1}$, $* \mapsto 1$ und $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von T längs K dasselbe wie ein Limes von T.

Thm. Seien $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ und $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Existiere für alle $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ der Limes $R(c) := \lim((f : c \to Km) \mapsto Tm)$. Dabei ist die Indexkategorie des Limes die Kommakat. $\Delta(c) \downarrow K$. Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ausdehnen und zwar zu einer RKE von T längs K.

Bem. Ist $\mathcal{M}$ klein und $\mathcal{C}$ lokal klein und ist $\mathcal{A}$ vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktweise RKE**.

Lem. Eine RKE ist genau dann punktweise, wenn sie für alle $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ unter dem Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$ erhalten bleibt.

Thm. Sei $K : M \to C$ ein Funktor. Betrachte $K^* : [\mathcal{C}, \mathcal{A}] \to [\mathcal{M}, \mathcal{A}]$.

- Wenn ein Funktor $\mathrm{Ran}_K : [\mathcal{M}, \mathcal{A}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ mit $K^* \dashv \mathrm{Ran}_K$ ex., so ist $\mathrm{Ran}_K(T)$ für alle $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ eine RKE von T längs K.
- Existiere für alle $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ eine RKE $\mathrm{Ran}_K(T)$. Dann kann man die Zuordnung $T \mapsto \mathrm{Ran}_K(T)$ zu einem Rechtsadjungierten von K^* ausdehnen.

Thm. Sei $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- G besitzt einen Linksadjungierten.
- $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$ existiert und $G \circ \mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}) = \mathrm{Ran}_G(G \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$.

In diesem Fall gilt $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}) \dashv G$ und $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$ wird sogar von allen Morphismen $H : \mathcal{A} \to \mathcal{Y}$ bewahrt.

Thm. Rechtsadjungierte bewahren RKE.

Kor. Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

Algebraische Strukturen in Kategorien

Def. Eine **Retrakt** ist ein Morphismus $r : Y \to X$, sodass ein Morphismus $i : X \to Y$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$ existiert.
Sprechweise: X ist ein Retrakt von Y (vermöge i).

Bsp. Ein Modul U ist genau dann Retrakt von einem Modul M, wenn U ein direkter Summand von M ist.

Prop. „– ist Retrakt von –" ist eine reflexive und trans. Relation.

Def. Ein **Retrakt eines Morphismus** $(X \xrightarrow{g} Y) \in \mathcal{C}$ ist ein Mor. $f : A \to B$, sodass es ein komm. Diagramm folgender Form gibt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "id_A"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "id_B"'] & Y \arrow[r, "s"] & B \end{tikzcd}$$

Bem. Ein Retrakt von $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ ist ein Retrakt von $f \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\to})$.

Prop. • Retrakte von Isomorphismen sind Isomorphismen.
• Sei $f \circ g = \mathrm{id}$. Dann ist f ein Retrakt von $g \circ f$.

Prop. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist die Klasse $\{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$ abgeschlossen unter Retrakten.

Def. Sei $i : A \to X$ und $p : E \to B$. Dann werden als äq. definiert:
• p ist **i-injektiv** • i ist **p-projektiv** • $i \boxslash p$
• i hat die Linkshochhebungseigenschaft (LHHE) bzgl. p
• p hat die Rechtshochhebungseigenschaft (RHHE) bzgl. i
• Für alle f, g wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales λ, sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

Bsp. Wegeliftung aus der Topologie: $i : \{0\} \to [0,1]$ erfüllt die LHHE bezüglich allen Überlagerungen $\pi : E \to B$.

Bsp. Ein Objekt P einer ab. Kat. $\mathcal{A}$ ist genau dann **projektiv**, wenn $(0 \to P)$ die LHHE bzgl. aller Epis in $\mathcal{A}$ hat. Dual ist $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ injektiv g.d.w. alle Monos in $\mathcal{A}$ die LHHE bzgl. $(I \to 0)$ besitzen.

Bsp. In **Set** gilt: Alle Inj. haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

Lem (**Retrakt-Argument**). Sei $f = q \circ j$.
• Ist f q-projektiv ($f \boxslash q$), so ist f ein Retrakt von j.
• Ist f j-injektiv ($j \boxslash f$), so ist f ein Retrakt von q.

Zellenkomplexe

Def. Sei λ eine Ordinalzahl. Eine **λ-Sequenz** in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein kolimesbewahrender Funktor $X : \lambda \to \mathcal{C}$ (wobei man λ als Präordnungskategorie aller $\beta < \lambda$ auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus $X_0 \to \mathrm{colim}_{\beta<\lambda} X_\beta$.

Bem. Kolimesbewahrung bedeutet: $\mathrm{colim}_{\alpha<\beta} X_\alpha = X_\beta$ für alle $\beta < \lambda$.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine kovollständige Kategorie, $I \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge.
• Ein **relativer I-Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer λ-Sequenz Z, sodass $\forall \alpha \in \mathcal{O}_n$ mit $\alpha+1 < \lambda$ ein Pushoutdiagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Z_\alpha \arrow[d] & \leftarrow \textbf{Anklebeabbildung} \\ B \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & Z_{\alpha+1} & \leftarrow \textbf{Zelle} \end{tikzcd}$$

mit $f \in I$ existiert. Sprechweise:
„$Z_{\alpha+1}$ entsteht aus Z_α, indem wir B längs C ankleben"
• Ein Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **I-Zellenkomplex**, wenn der Morph. $0 \to A$ aus dem initialen Obj. ein relativer I-Zellenkomplex ist.

Bsp. CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind I-Zellenkomplexe mit $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geqslant 0\}$ (und $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$).

Bspe. • Identitäten $A \to A$ sind relative I-Zellenkomplexe.
• Das initiale Objekt ist ein absoluter I-Zellenkomplex.

Lem. Sei $Z : \lambda \to \mathcal{C}$ eine λ-Sequenz. Sei jeder Morphismus $Z_\beta \to Z_{\beta+1}$ $(\beta + 1 < \lambda)$ ein Pushout eines Morphismus aus I. Dann ist die transfinite Komposition von Z ein I-Zellenkomplex.

Thm. Die Klasse der relativen I-Zellenkomplex ist abgeschl. unter:
• transfiniten Kompositionen • Isomorphismen • Koprodukten

Faktorisierungssysteme

Def. Eine Unterkat. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **links-saturiert**, falls $\mathcal{L}$ abgeschl. ist unter Pushouts, transfiniten Kompositionen und Retrakten.

Lem. Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ links-saturiert. Dann ist $\mathcal{L}$ unter Koprodukten abgeschlossen und enthält alle Isomorphismen.

Bsp. Sei $R \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$. Dann ist die Unterkategorie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ mit $\mathrm{Mor}(\mathcal{L}) := {}^{\boxslash}R := \{i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \mid \forall r \in R : i \boxslash r\}$ links-saturiert.

Def. • $L \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **proj. abgeschlossen**, falls $L \supseteq {}^{\boxslash}(L^{\boxslash})$.
• $R \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **injektiv abgeschlossen**, falls $R \supseteq ({}^{\boxslash}L)^{\boxslash}$.

Prop. • ${}^{\boxslash}(L^{\boxslash})$ ist die projektive Hülle von L, d. h. die kleinste Klasse von Morphismen, die projektiv abgeschl. ist und L umfasst.
• Die projektive Hülle von L ist links-saturiert. Ist L schon projektiv abgeschlossen, so ist L insbesondere links-saturiert.

Def. • Ein Paar (L, R) von Klassen von Morphismen von $\mathcal{C}$ **faktorisiert** $\mathcal{C}$, falls $\forall f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) : \exists i \in L, p \in R : f = p \circ i$.
• Ein faktorisierendes Paar (L, R) heißt **schwaches Faktorisierungssystem** (SFS), falls $L = {}^{\boxslash}R$ und $R = L^{\boxslash}$.
• Ein SFS (L, R) heißt **orth. Faktorisierungssystem**, falls jedes $i \in L$ die eindeutige LHHE bzgl. allen $p \in R$ erfüllt.

Prop. Sei (L, R) faktorisierend. Dann ist (L, R) genau dann ein SFS, wenn $L \boxslash R$ und L und R unter Retrakten abgeschlossen sind.

Bsp. $(\{\text{Surjektionen}\}, \{\text{Injektionen}\})$ ist ein (S)FS in **Set**

Modellkategorien

Motto. Modellkat. sind ein Werkzeug, math. Theorien zu studieren.

Def. Eine Klasse $W \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ von Morphismen erfüllt die **2-aus-3-Eigenschaft**, falls für jede Komposition $h = g \circ f$ in $\mathcal{C}$ gilt: Liegen zwei der drei Morphismen f, g, h in W, so auch der dritte.

Def. $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}$ wie eben heißt **Unterkat. schwacher Äquivalenzen**, falls $\mathcal{W}$ die 2-aus-3-Eig. erfüllt und abgeschl. unter Retrakten ist.

Bsp. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist $\mathcal{W} := F^{-1}(\{\text{Isos in } \mathcal{D}\})$ eine Unterkategorie schwacher Äquivalenzen.

Def. Ein Tripel $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ von Unterkategorien einer Kategorie $\mathcal{M}$ heißt **Modellstruktur** auf $\mathcal{M}$, falls sowohl $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ als auch $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ schwache Faktorisierungssysteme sind und $\mathcal{W}$ die 2-aus-3-Eigenschaft erfüllt.

Def. Eine bivollständige Kategorie $\mathcal{M}$ zusammen mit einer Modellstruktur $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ heißt eine **Modellkategorie**.

Sprechweise. Man verwendet folgende Bezeichnungen und Pfeile:

$\mathcal{W}$	$\xrightarrow{\sim}$	**schwache Äquivalenz**
$\mathcal{C}$	$\hookrightarrow$	**Kofaserung**
$\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$	$\overset{\sim}{\hookrightarrow}$	**azyklische Kofaserung**
$\mathcal{F}$	$\twoheadrightarrow$	**Faserung**
$\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$	$\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}$	**azyklische Faserung**

Bem. Ist $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ eine Modellstruktur auf $\mathcal{M}$, so ist $(\mathcal{W}^{\mathrm{op}}, \mathcal{F}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ eine Modellstruktur auf $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$.

Bem. Wegen $\mathcal{C} = {}^{\boxslash}(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ bzw. $\mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^{\boxslash}$ ist das Datum $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ überbestimmt.

Bsp. Sei $\mathcal{M}$ bivollständig. Sei $\mathcal{W} := \mathcal{C} := \{\text{Isos in } \mathcal{M}\}$. Dann wird $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{F} := \mathcal{M}$ eine Modellkategorie.

Prop. In einer Modellkategorie sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ links-saturiert.

Lem. $\mathcal{W}$ enthält alle Isomorphismen und ist unter Retrakten abgeschlossen, bildet also eine Unterkat. schwacher Äquivalenzen.

Notation. Das initiale Objekt von $\mathcal{M}$ wird mit $\varnothing$, das terminale Objekt mit $*$ bezeichnet.

Def. • Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ heißt **kofasernd**, falls $\varnothing \to X$ eine Kofaserung ist. Eine azyklische Faserung $q : QX \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ mit QX kofasernd heißt **kofasernder Ersatz** (oder Approx.) von X.
• Dual heißt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ **fasernd**, falls X in $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ kofasernd ist und $X \overset{\sim}{\hookrightarrow} RX$ mit RX fasernd heißt **fasernder Ersatz** von X.

Bsp. Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ beliebig. Dann faktorisiere $\varnothing \to X$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & X \\ & QX \arrow[ur, two heads, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Man erhält also immer einen kofasernden Ersatz QX für X.
Dual gibt es immer einen fasernden Ersatz RX für X.

Prop. Seien $q : QX \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ und $q' : Q'X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ zwei kofasernde Approximationen von X. Dann existiert eine schwache Äquivalenz $\xi : QX \xrightarrow{\sim} Q'X$ mit $q' \circ \xi = q$.

Def. Ein Obj. X heißt **bifasernd**, falls es fasernd und kofasernd ist.

Prop. Für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ sind RQX und QRX schwach äquivalent und beide bifasernd.

Lem (Ken Brown)**.** Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Funktor, $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, $\mathcal{N}$ besitze eine Unterkat. $\mathcal{W}'$ schwacher Äquivalenzen. Wenn F azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten nach $\mathcal{W}'$ abbildet, so bildet F alle schwachen Äquivalenzen zwischen kofasernden Objekten nach $\mathcal{W}'$ ab.

Def. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie. Ein **Zylinderobjekt** $X \times I$ zu einem $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ ist ein Obj. zusammen mit Morphismen wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i_0", "\sim"'] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] & & \\
& X \times I \arrow[r, "p", "\sim"'] & X \\
X \arrow[ur, "i_1"', "\sim"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Der Zylinder $X \times I$ heißt **gut**, falls $X \amalg X \to X \times I$ eine Kofaserung ist. Ein guter Zylinder heißt **sehr gut**, falls $p : X \times I \to X$ eine azyklische Faserung ist.

Bem. Sei die Kodiagonale $\nabla : X \amalg X \to X$ wie folgt faktorisiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, hook] & & & \\
& X \amalg X \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\nabla"] & X \times I \arrow[r, two heads, "\sim"] & X \\
X \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Dann erhalten wir ein Zylinderobjekt $X \times I$ für X.

Def. Zwei Morphismen $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{M}$ heißen **links-homotop** (notiert $f \sim^l g$), falls ein Zylinder $X \times I$ und ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\sim"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& X \times I \arrow[r, dashed, "h"] & Y \\
X \arrow[ur, "\sim"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

existiert. Wir definieren $\pi^l(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)/\langle \sim^l \rangle$, wobei $\langle \sim^l \rangle$ die von der symmetrischen, refl. Relation $\sim^l$ erzeugte Äq'relation ist. Die Homotopie heißt (sehr) gut, wenn der Zylinder $X \times I$ es ist.

Beob. Sei $X \amalg X \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p\,\sim} X$ irgendein Zylinderobjekt. Faktorisiere $i = q \circ i'$ in Kofaserung und azyklische Faserung. Dann ist auch

$$X \amalg X \overset{i'}{\hookrightarrow} X' \xrightarrow{pq\,\sim} X$$

ein Zylinderobjekt, sogar ein gutes. Ebenso kann man p faktorisieren und ein ein anderes Zylinderobjekt erhalten.

Lem. Sei X kofasernd, $X \amalg X \to X \times I \to X$ ein gutes Zylinderobj. Dann sind $i_{0,1} : X \to X \amalg X \to X \times I$ azyklische Kofaserungen.

Lem. Sei $h : f \simeq^l g$. Dann: $f \in \mathcal{W} \iff g \in \mathcal{W}$.

Def. Ein **Pfadobjekt** X^I ist eine Faktorisierung

$$X \underset{\sim}{\xrightarrow{i}} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

des Diagonalmorph. $\Delta : X \to X \times X$. Das Pfadobjekt X^I heißt gut, wenn p eine Faserung und sehr gut, wenn zus. i eine Kofaserung ist.

Def. Eine Rechtshomotopie $h : f \simeq^r g$ ist ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
& & Y \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Y^I \arrow[ur, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Bem. Ein Pfadobj. in $\mathcal{M}$ ist dasselbe wie ein Zylinderobj. in $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$.

Lem. Seien $f, g : X \to Y$ und $e : W \to X$, $d : Y \to Z$.
- $\exists\, h : f \simeq^l g \iff \exists\, h' : f \simeq^{l,\mathrm{gut}} g$.
- Sei Y fasernd. Dann: $\exists\, h : f \simeq^{l,\mathrm{gut}} g \iff \exists\, h' : f \simeq^{l,\text{sehr gut}} g$
- $\exists\, h : f \simeq^l g \implies \exists\, h' : d \circ f \simeq^l d \circ g$
- $\exists\, h : f \simeq^{l,\text{sehr gut}} g \implies \exists\, h' : f \circ e \simeq^{l,\text{sehr gut}} g \circ e$
- Sei X kofasernd. Dann ist $\simeq^l$ eine Äq'relation auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$.

Kor. Sei Y fasernd. Dann induziert Komposition eine Abbildung
$$\pi^l(X, Y) \times \pi^l(W, X) \to \pi^l(W, Y), \quad ([g], [f]) \mapsto [g \circ f].$$

Prop. Seien $f, g : X \to Y$.
- Sei X kofasernd. Dann: $f \simeq^l g \implies f \simeq^r g$
- Sei Y fasernd. Dann: $f \simeq^l g \impliedby f \simeq^r g$

Notation. Wenn X kofasernd und Y fasernd ist, schreibt man
$$\pi(X, Y) := \pi^l(X, Y) = \pi^r(X, Y).$$

Thm. Sei X kofasernd. Sei $p : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$ eine azyklische Faserung. Dann ist $p_* : \pi^l(X, Z) \to \pi^l(X, Y)$, $[f] \mapsto [p \circ f]$ eine Bijektion.

Thm (**Whitehead**)**.**
Für einen Morphismus $f : X \to Y$ zw. bifasernden Objekten gilt
$$\begin{aligned} f \in \mathcal{W} &\iff f \text{ ist eine Homotopieäquivalenz} \\ &:\iff \exists\, g : Y \to X \ : \ g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \wedge f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y \,. \end{aligned}$$

Lem. Sei $f : X \to Y$. Seien RX und RY fixierte fasernde Approx. an X bzw. Y. Dann hängt $Rf : RX \to RY$ bis auf Rechts- und auch Linkshomotopie nur von der Rechtshomotopieklasse von $r \circ f$ ab.

Achtung. I. A. ist $f \mapsto R(f)$ nicht funktoriell.

Die Homotopiekategorie einer Modellkategorie

Def. Sei $\mathcal{C}$ ein Kategorie, $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eine Klasse von Morphismen. Die **Lokalisierung** $\mathcal{C}[S^{-1}]$ von $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie, die folgende 2-universelle Eigenschaft erfüllt:
- $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ schickt Morphismen aus S aus Isos.
- Für jede Kategorie $\mathcal{D}$ ist $\gamma^* : [\mathcal{C}[S^{-1}], \mathcal{D}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{S \mapsto \mathrm{Isos}}$ eine Kategorienäquivalenz.

Bem. Die Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt Lokalisierung von Kategorien.

Def. Die **Homotopiekategorie** $\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$ einer Modellkategorie $\mathcal{M}$ ist die Lokalisierung von $\mathcal{M}$ an der Klasse der schwachen Äquivalenzen.

Konstruktion. Ganz explizit:
$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X, Y) := \pi(RQX, RQY)$$
Nach einem früheren Lemma ist die Komposition $([f], [g]) \mapsto [f \circ g]$ wohldefiniert. Der Funktor $\gamma : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$ ist gegeben durch
$$X \mapsto X, \quad f \mapsto [RQf].$$

Lem. Sei $f : X \to Y$ in $\mathcal{M}$. Dann gilt $f \in \mathcal{W} \Leftrightarrow Qf \in \mathcal{W} \Leftrightarrow RQf \in \mathcal{W}$.

Lem. γ wie definiert ist ein Funktor.

Lem. $f \in \mathcal{W} \iff \gamma(f)$ ist ein Iso.

Lem. Sei X kofasernd und Y fasernd. Dann ist die Abbildung
$$\pi(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X, Y), \quad [f] \mapsto [RQf]$$
eine Bijektion.

Lem. Ist $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein Funktor, der schwache Äq. auf Isos schickt, dann identifiziert F links- bzw. rechtshomotope Morphismen.

Lem. Jeder Morphismus in $\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$ ist Komposition von Morphismen der Form $\gamma(f)$, $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ und der Form $\gamma(f)^{-1}$, $f \in \mathcal{W}$.

Lem. Obige Konstruktion erfüllt die geforderte univ. Eigenschaft.

Lem. Sei $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$ die volle Unterkategorie der kofasernden Objekte und $F : \mathcal{M}_c \to \mathcal{C}$ ein Funktor, der azyklische Kofaserungen auf Isos schickt. Dann identifiziert F rechtshomotope Morphismen.

Thm. Ein Morphismus $p : Z \to Y$ zw. fasernden Objekten ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn $p_* : \pi(X, Z) \to \pi(X, Y)$ bijektiv ist für alle kofasernden Objekte $X \in \mathcal{M}$.

Beob. Sei X kofasernd und Y fasernd. Dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)/\!\sim$.

Def. Eine Klasse $W \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ besitzt die **2-aus-6-Eigenschaft**, wenn für alle Folgen von Morphismen
$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} K \qquad \in \mathcal{C}$$
gilt: Wenn $v \circ u$ und $w \circ v$ aus W sind, so auch u, v, w und $w \circ v \circ u$.

Beob. Die Klasse der Isomor. besitzt die 2-aus-6-Eigenschaft.

Kor. Die Klasse der schwache Äquivalenzen in einer Modellkategorie besitzt die 2-aus-6-Eigenschaft.

Klassen von Modellkategorien

Lokal präsentierbare Kategorien

Motto. Eine lokal präsentierare Kategorie ist eine große Kategorie, welche erzeugt wird von kleinen Objekten unter kleinen Kolimiten.

Def. Eine ∞-große Kardinalzahl κ heißt **regulär**, wenn die Vereinigung von weniger als κ vielen Mengen, die alle weniger als κ-viele Elem. enthalten, selbst weniger als κ-viele Elemente enthält.

Bem. Zu jeder Kardinalzahl λ existiert ein reguläres κ mit $\lambda \leqslant \kappa$.

Def. Sei κ eine Kardinalzahl. Eine Kategorie heißt **κ-klein**, falls sie nur κ-viele Morphismen besitzt.

Bem. Sei κ regulär. Dann ist eine Kat. bereits dann κ-klein, falls sie nur κ-viele Objekte besitzt und alle Hom-Mengen κ-klein sind.

Def. Eine Kategorie heißt **κ-filtriert**, wobei κ eine reguläre Kardinalzahl ist, wenn jedes α-kleine Diagramm in der Kategorie einen Kokegel besitzt, wobei $\alpha < \kappa$.

Def. Eine teilweise geordnete Menge $(I, \leqslant)$ heißt **α-gerichtet**, falls die zugehörige Kategorie α-filtriert ist, d. h. jeweils weniger als α-viele Elemente haben eine obere Schranke.

Bem. Sei $\lambda \geqslant \kappa$. Dann ist jede λ-filtrierte Kategorie auch κ-filtriert.

Def. Ein Objekt X einer Kat. $\mathcal{C}$ heißt **κ-kompakt** oder **α-klein**, wenn $\mathrm{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ mit κ-filtrierten Kolimiten vertauscht:

$$\mathrm{colim}_i \, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T_i) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{colim}_i \, T_i)$$

für alle κ-filtrierte Diagramme $(T_i)_{i \in \mathcal{I}}$.

Def. Ein Objekt heißt genau dann **klein**, wenn es κ-kompakt ist für irgendeine reguläre Kardinalzahl κ.

Bspe. • Jede endliche Menge ist $\aleph_0$-kompakt in **Set**.
- Jeder endlich-dim. VR ist $\aleph_0$-kompakt in $\mathbf{Vect}(\mathbb{R})$.
- Jeder endlich-präsentierte Modul ist $\aleph_0$-kompakt in $\mathbf{Mod}(R)$.
- Unendliche Mengen sind nicht $\aleph_0$-kompakt in **Set**.
- Jeder nicht diskrete topologische Raum ist nicht $\aleph_0$-kompakt.
- **Set** ist lokal $\aleph_0$-präsentierbar mit $S = \{\heartsuit\}$.
- $\mathbf{Mod}(R)$ ist lokal $\aleph_0$-präsentierbar mit $S = \{R^n/\mathrm{im}(A) \,|\, n \geqslant 0, A \in R^{n \times m}, m \geqslant 0\}$

Def. Eine **lokal κ-präsentierbare Kategorie** ist eine lokal kleine und kovollständige Kategorie, sodass eine *Menge* $S \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von κ-kompakten Objekten existiert, sodass jedes Objekt aus $\mathcal{C}$ kleiner Kolimes von Objekten aus S ist.

Def. Eine Kategorie heißt genau dann **lokal präsentierbar**, wenn sie lokal κ-präsentierbar für eine reguläre Kardinalzahl κ ist.

Lem. Ist $\mathcal{C}$ lokal präsentierbar, so auch $\mathcal{C}/X$ mit $X \in \mathrm{Ob}(X)$.

Bspe. • **sSet** ist lokal präsentierbar.
- Sei $\mathcal{C}$ klein. Dann ist $\mathbf{PSh}(\mathcal{C}) = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ lokal präsentierbar.
- **FinSet** ist nicht lokal präsentierbar (weil nicht kovollständig)

Fun Fact. Sei $\mathcal{C}$ lokal präsentierbar. Wenn auch $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ lokal präsentierbar ist, dann ist $\mathcal{C}$ die zu einer Quasiordnung gehörige Kategorie!

Lem. Sei $X : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor, wobei $\mathcal{I}$ α-filtriert und $\mathcal{J}$ α-klein. Dann ist der kanonische Isomorphismus $\mathrm{colim}_i \lim_j X(i,j) \to \lim_j \mathrm{colim}_i \, X(i,j)$ eine Bijektion.

Bsp. α-kleine Kolimiten α-kompakter Obj. sind wieder α-kompakt.

Kombinatorische Modellkategorien

Lem (Kleines-Objekt-Argument).
Sei $\mathcal{C}$ lokal präsentierbar, $\mathcal{I} \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge, $\mathrm{Cell}(\mathcal{I})$ die Unterkat. der relativen $\mathcal{I}$-Zellenkomplexe und $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ die Unterkat. der Retrakte von $\mathrm{Cell}(\mathcal{I})$. Dann ist $(\mathrm{Cof}(\mathcal{I}), \mathcal{I}^{\boxslash})$ ein SFS.

Def. • Eine Modellkategorie $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ heißt **kofasernd erzeugt**, wenn *Mengen* $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ mit $\mathcal{C} = \mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \mathrm{Cof}(\mathcal{J})$ existieren.
- Lokal präsentierbare und kofasernd erzeugte Modellkategorien heißen **kombinatorisch**.

Sprechweise. Die Kof. in $\mathcal{I}$ heißen **erzeugende Kofaserungen**, die in $\mathcal{J}$ **azyklische erzeugende Kofaserungen**.

Satz. Sei $\mathcal{M}$ eine lokal präsentierbare Kategorie. Sei $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ eine Unterkat. schw. Äquivalenzen. Seien $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ Mengen. Dann sind $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ genau dann erzeugende (azyklische) Kofaserungen einer Modellstruktur auf $\mathcal{M}$, falls
- $\mathrm{Cell}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{W}$ (Azyklizität) • $\mathcal{I}^{\boxslash} = \mathcal{J}^{\boxslash} \cap \mathcal{W}$ (Kompatibilität)

Eigentliche Modellkategorien

Def. Eine Modellkategorie $\mathcal{M}$ heißt **linkseigentlich**, falls für alle Pushouts der Form

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

auch der Morphismus $g : X \to Y$ eine schwache Äquivalenz ist. $\mathcal{M}$ heißt rechtseigentlich, falls $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ linkseigentlich ist, d. h. Pullbacks schwacher Äquivalenzen längs Faserungen wieder schwache Äquivalenzen sind.

Bsp. Eine Modellkategorie, in der jedes Objekt kofasernd ist, ist linkseigentlich.

Def. $\mathcal{M}$ heißt **eigentlich**, falls $\mathcal{M}$ links- und rechtseigentlich ist.

Prop. In jeder Modellkategorie ist der Pushout einer schwachen Äquivalenz zwischen kofasernden Objekten längs Kofaserungen wieder eine schache Äquivalenz.

Bem. Gute Homotopien kann man längs Kofaserungen erweitern:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"] \arrow[d, hook, "i"] & Y^I \arrow[d, "p_0", "\sim"'] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\overline{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

Prop. Eine Modellkategorie $\mathcal{M}$ ist genau dann links-eigentlich, wenn für alle Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f", "\sim"'] & C \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g", "\sim"'] & B \arrow[d, "h", "\sim"'] \\ A & C \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[r, "l"] & B \end{tikzcd}$$

auch der ind. Mor. $A \cup_C B \to A' \cup_{C'} B'$ eine schwache Äq. ist.

Quillen-Adjunktionen

Motto. Wir wollen Modellstrukturen und -kategorien vergleichen.

Def. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, $\mathcal{H}$ eine beliebige Kategorie. Ein Funktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ heißt **homotopisch**, falls F die schwachen Äquivalenzen in $\mathcal{M}$ auf Isomorphismen in $\mathcal{H}$ abbildet.

Bem. Homotopische Funktoren faktorisieren über $\mathcal{M}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Bsp. Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Funktor zw. Modellkategorien, der schwache Äquivalenzen erhält. Dann ist $\delta \circ F : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$ homotopisch, wobei $\delta : \mathcal{N} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$ die Lokalisierung ist.

Bem. Solch ein Funktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ induziert einen Funktor $\mathrm{Ho}(M) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$.

Def. Ein **linksabgeleiteter Funktor** eine Funktors $F : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ ist ein Funktor $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}$ zusammen mit einer natürlichen Transformation $\mu : \mathbb{L}F \circ \gamma \Rightarrow F$, sodass für alle weiteren Funktoren $G : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}$ und nat. Transformationen $\xi : G \circ \gamma \Rightarrow F$ genau eine natürliche Transformation $\nu : G \Rightarrow \mathbb{L}F$ existiert mit $\xi = \mu \circ \nu$, d. h. $\mathrm{Nat}(G, \mathbb{L}F) \cong \mathrm{Nat}(G \circ \gamma, F)$ ist für alle G eine Bijektion, d. h. eine Linksableitung von F ist nichts anderes als eine Rechts-Kan-Erweiterung von F längs γ.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{H} \\
\mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \arrow[ur, "\mathbb{L}F"] &
\end{tikzcd}$$

Analog ist eine **Rechtsableitung** $\mathbb{R}F$ von F eine Linkskanerweiterung von F längs $\gamma : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$.

Satz. Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ ein Funktor, der azyklische Kofaserungen zwischen kof. Obj. auf Isomorphismen abbildet. Dann existiert $\mathbb{L}F$ und $\mu_X : \mathbb{L}F(X) \to F(X)$ ist ein Iso für alle kofasernden X.

Konstruktion. Sei $h\mathcal{M}_c$ die volle Unterkategorie der kof. Objekte von $\mathcal{M}$ modulo Rechts-Homotopie. Betrachte die Komposition

$$\mathcal{M} \xrightarrow{Q} h\mathcal{M}_c \xrightarrow{F_*} \mathcal{H}.$$

Dabei ist Q der kofasernde Ersatz und F_* wird induziert von F, da F homotope Morphismen identifiziert. Nach Ken Brown bildet die Komposition schwache Äquivalenzen auf Isos ab und induziert daher den gesuchten Funktor $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}$ mit $\mathbb{L}F \circ \gamma = F_* \circ Q$. Definiere $\mu : \mathbb{L}F \circ \gamma \to F$ durch $\mu_X := F(q : QX \to X)$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$. Falls X selbst kofasernd ist, so ist q eine schwache Äquivalenz zw. kofasernden Objekten und somit $\mu_X = F(q)$ ein Isomorphismus.

Def. Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Funktor zwischen Modellkategorien. Eine **totale Linksableitung** $\mathbb{L}F$ ist ein Funktor $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$, sodass $\mathbb{L}F$ die Linksableitung von $\delta \circ F$ ist:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{N} \arrow[d, "\delta"] \\
\mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\mathbb{L}F"] \arrow[ur, Rightarrow] & \mathrm{Ho}(\mathcal{N})
\end{tikzcd}$$

Ein Funktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bilde azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten auf schache Äquivalenzen ab. Dann existiert seine totale Linksableitung $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$.

Def. Eine Adjunktion $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$ von Modellkategorien heißt **Quillen-Adjunktion**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- F erhält Kofaserungen und U erhält Faserungen,
- F erhält Kofaserungen und azyklische Kofaserungen,
- U erhält Faserungen und azyklische Faserungen,
- F erhält azyklische Kofaserungen und U azyklische Faserungen.

Bem. Die Äquivalenz folgt aus $Fi \boxslash p \iff i \boxslash Up$.

Def. Eine Quillen-Adj. (F, U) heißt **Quillen-Äquivalenz**, falls

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_c, Y \in \mathcal{N}_f \;:\; (FX \to Y) \in \mathcal{W} \iff (X \to UY) \in \mathcal{W}.$$

Satz. Sei (F, U) eine Quillenadjunktion. Dann existieren $\mathbb{L}F$, $\mathbb{R}U$ und bilden eine Adjunktion $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{N}) : \mathbb{R}U$.
Ist (F, U) sogar eine Quillenäquivalenz, so ist $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U)$ eine Adjunktion aus Äquivalenzen.

Kor. Quillenäq. Modellkat'n haben äquivalente Homotopiekat'n.

Prop. Für eine Quillenadjunktion $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$ sind äquivalent:

- (F, U) ist eine Quillenäquivalenz
- $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U)$ ist eine Adjunktion von Äquivalenzen
- F reflektiert schw. Äq'n zw. kof. Objekten und die Komposition $FQUY \xrightarrow{F(q_{UY})} FUY \xrightarrow{\epsilon} Y$ ist eine schw. Äq. für alle fas. Y.
- U reflektiert schw. Äq'n zw. fas. Objekten und die Komposition $X \xrightarrow{\eta} UFX \xrightarrow{U(r_{FX})} URFX$ ist eine schw. Äq. für alle kof. X.

Falls U schw. Äq'n in $\mathcal{N}$ erzeugt, dann ist auch äquivalent:
- $\eta : X \to UFX$ ist eine schwache Äq. für alle kofasernden X.

Falls F schw. Äq'n in $\mathcal{M}$ erzeugt, dann ist auch äquivalent:
- $\eta : X \to UFX$ ist eine schwache Äq. für alle kofasernden X.

Def. Sei $f : A \to B$ ein Mor. in der Modellkat. $\mathcal{M}$. Dieser induziert Funktoren $f^* : B/\mathcal{M} \to A/\mathcal{M}$ und $f_* : \mathcal{M}/A \to \mathcal{M}/B$. Der Funktor f^* besitzt einen Linksadj. $f_! : A/\mathcal{M} \to B/\mathcal{M}$, der durch Pushout entlang f geg. ist, und f_* besitzt einen Rechtsadj. $f^! : \mathcal{M}/B \to \mathcal{M}/A$.

Prop. $\mathcal{M}$ ist genau dann linkseigentlich, wenn $(f_!, f^*)$ eine Quillenadjunktion ist und genau dann rechtseigentlich, wenn $(f_*, f^!)$ eine Quillenadjunktion ist für alle schwachen Äquivalenzen f.

Satz. Sei $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$ eine Adj. von einer komb. Modellkat. $\mathcal{M}$ mit erz. Kofaserungen I und erz. azyklischen Kofaserungen J und einer lokal präsentierbaren Kategorie $\mathcal{N}$. Der Funktor U erzeuge schwache Äquivalenzen in $\mathcal{N}$ (d. h. wir nennen $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{N})$ eine schwache Äquivalenz, falls $U(f)$ eine schwache Äquivalenz ist). Dann wird $\mathcal{N}$ eine Modellkategorie mit erzeugenden Kofaserungen FI und erzeugenden azyklischen Kofaserungen FJ, falls gilt: Jeder relative FJ-Zellenkomplex ist eine schwache Äquivalenz (d. h. $U(\mathrm{Cell}(FJ)) \subset \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$). Bezüglich dieser Modellstruktur auf $\mathcal{N}$ wird (F, U) zu einer Quillenadjunktion.

Scheibenkategorien als Modellkategorien

Lem. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ ein Objekt. Dann sind die Scheibenkategorien $X/\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}/X$ Modellkat'n, wobei die Modellstruktur vom Vergissfunktor $U : X/\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ bzw. $U : \mathcal{M}/X \to \mathcal{M}$ erzeugt wird, d. h. ein Mor. f ist genau dann eine Faserung/Kofaserung/schwache Äquivalenz, wenn $U(f)$ es ist.

Lem.
- Ist $\mathcal{M}$ links- oder rechtseigentlich, so auch $\mathcal{M}/X$ und $X/\mathcal{M}$
- Ist $\mathcal{M}$ eigentlich, so auch $\mathcal{M}/X$ und $X/\mathcal{M}$
- Ist $\mathcal{M}$ kofasernd erzeugt, so auch $\mathcal{M}/X$
- Ist $\mathcal{M}$ kombinatorisch, so auch $\mathcal{M}/X$

Monoidale Modellkategorien

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ zusammen mit einem Bifunktor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, einem Objekt $\mathbb{1} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, natürlichen Isomorphismen $\alpha : (-\otimes-)\circ - \Rightarrow -\otimes(-\circ-)$, $\lambda : \mathbb{1} \otimes - \Rightarrow -$ und $\rho : - \otimes \mathbb{1} \Rightarrow -$, sodass die Kohärenzdiagramme aus der Definition einer schwachen 2-Kategorie kommutieren.

Bem. Eine monoidale Kategorie ist das gleiche wie eine 2-Kategorie mit nur einem Objekt.

Bspe. Monoidale Kategorien sind: • $(\mathbf{Set}, \times, \{\heartsuit\})$
• $(R\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}R, \otimes_R, R)$ wobei R ein Ring mit Eins ist

Def. Eine **symm. monoidale Kategorie** ist eine monoidale Kat. zusammen mit einem nat. Isomorphismus $\gamma : X \otimes Y \to Y \otimes X$, sodass die geeigneten Kohärenzdiagramme kommutieren. Es reicht aus, zu zeigen, dass folgende Diagramme kommutierten:

$$\begin{tikzcd}
(Y\otimes X)\otimes Z \arrow[d, "\alpha"] & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[l, "\gamma\otimes\mathrm{id}_Z"'] \arrow[r, "\alpha"] & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "\gamma"] \\
Y\otimes(X\otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}_Y\otimes\gamma"] & Y\otimes(Z\otimes X) & (Y\otimes Z)\otimes X \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes X \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & X\otimes\mathbb{1} \arrow[dl, "\rho"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Def. Ein **monoidaler Funktor** zwischen (symm.) monoidalen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zusammen mit natürlichen Isomorphismen $F - \otimes_{\mathcal{D}} F - \Rightarrow F(-\otimes_{\mathcal{C}} -)$ und $F\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$, welche verträglich mit α, λ, ρ (und eventuell γ) sind.

Bsp. $\mathbf{Set} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$, $X \mapsto$ freier R-Modul mit Basis X

Def. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ monoidale Funktoren. Eine natürliche Transformation $\eta : F \Rightarrow G$ heißt **monoidal**, wenn folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
FX\otimes FY \arrow[r] \arrow[d, "\eta_X\otimes\eta_Y"] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "\eta_{X\otimes Y}"] \\
GX\otimes GY \arrow[r] & G(X\otimes Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F(\mathbb{1}) \arrow[rr, "\eta_{\mathbb{1}}"] & & G(\mathbb{1})
\end{tikzcd}$$

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine monoidale Kategorie. Ein **Rechts-$\mathcal{C}$-Modul** ist eine Kategorie $\mathcal{D}$ mit einem Funktor $\otimes : \mathcal{D} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und ...

Bsp. Die Kat. $\mathcal{D}$ besitze kleine Koprodukte. Dann wird $\mathcal{D}$ zu einem $\mathbf{Set}$-Modul durch $\times = \otimes : \mathcal{D} \to \mathbf{Set} \to \mathcal{D}$, $(X, I) \mapsto \amalg_{i\in I} X$

Def. Sei $\mathcal{C}$ monoidale Kategorie. Ein Funktor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ zwischen $\mathcal{C}$-Rechts-Moduln $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ heißt **$\mathcal{C}$-Modulfunktor**, falls $F(X) \otimes I$ und $F(X \otimes I)$ natürlich isomorph sind.

Def. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ monoidale Kat'en und $i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein monoidaler Funktor. Dann heißt $(\mathcal{D}, i)$ eine **$\mathcal{C}$-Algebra**. Morphismen von $\mathcal{C}$-Algebren sind kommutative Quadrate von monoidalen Funktoren.

Def. Eine $\mathcal{C}$-Algebra $\mathcal{D}$ heißt **zentral**, falls $i(A) \otimes_{\mathcal{D}} B \cong B \otimes_{\mathcal{D}} i(A)$ natürlich für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

Bem. Ist die $\mathcal{C}$-Algebra $\mathcal{D}$ symmetrisch, so auch zentral.

Def. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ Kategorien. Eine **Adjunktion in 2 Variablen** oder Biadjunktion besteht aus Funktoren

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}, \quad \mathrm{Hom}_r : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{E} \to \mathcal{C}, \mathrm{Hom}_l : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{E} \to \mathcal{D}$$

und natürlichen Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \mathrm{Hom}_l(C, E)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(C \otimes D, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathrm{Hom}_r(D, E)).$$

Notation. ${}^{C}E := \mathrm{Hom}_l(C, E)$, $E^D := \mathrm{Hom}_r(D, E)$

Bem. $k \otimes i \boxslash p \iff k \boxslash \mathrm{Hom}_r(i, p) \iff i \boxslash \mathrm{Hom}_l(k, p)$

Bsp. Seien R, S, T drei Ringe, $\mathcal{C} := R\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}S$, $\mathcal{D} := S\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}T$, $\mathcal{E} := R\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}T$. Eine Biadjunktion ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}, &\quad (M, N) \mapsto M \otimes_S N, \\
\mathrm{Hom}_r : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{E} \to \mathcal{C}, &\quad (N, P) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}\text{-}T}(N, P), \\
\mathrm{Hom}_l : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{E} \to \mathcal{D}, &\quad (M, P) \mapsto \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(M, P).
\end{aligned}$$

Def. Eine monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ heißt **monoidal abgeschlossen**, wenn $\otimes$ Teil einer Biadjunktion ist.

Bspe. • $(R\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}R, \otimes_R, R)$ • $(\mathbf{Set}, \times, \{\heartsuit\})$

Def. Sei $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Teil einer Biadjunktion, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ Modellkategorien. Dann heißt $\otimes$ **Quillen-Biadjunktion**, falls für alle Kof'en $(f : U \hookrightarrow V) \in \mathcal{C}$, $(g : W \hookrightarrow X) \in \mathcal{D}$ der Morphismus

$$f \,\square\, g : P(f, g) := V \otimes W \cup_{U \otimes W} U \otimes X \to V \otimes X$$

eine Kofaserung in $\mathcal{E}$ ist, welche azyklisch ist, wenn f oder g azyklisch ist.

Lem. Die Bedingung ist äquivalent zu: Für alle Kofaserungen $(g : W \hookrightarrow X) \in \mathcal{D}$ und Faserungen $(p : Y \twoheadrightarrow Z) \in \mathcal{E}$ ist

$$\mathrm{Hom}_{r,\square} : \mathrm{Hom}_r(X, Y) \to \mathrm{Hom}_r(X, Z) \times_{\mathrm{Hom}_r(W,Z)} \mathrm{Hom}_r(W, Y)$$

eine Faserung und azyklisch, wenn g oder p es ist. Analog für Hom_l.

Prop. Sei $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ ein Quillenbifunktor. Ist $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ kofasernd, so ist $C \otimes - : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ ein Quillenfunktor mit Rechtsadj. $\mathrm{Hom}_l(C, -)$.

Bem. Analog: Sei E fasernd. Dann ist $\mathrm{Hom}_r(-, E) : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ein Quillen-Links-Adjungierter zu $\mathrm{Hom}_l(-, E) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

Lem. Sei $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ eine Biadj, $I \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, $J \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ Mengen. Dann gilt: $\mathrm{Cof}(I) \,\square\, \mathrm{Cof}(J) \subseteq \mathrm{Cof}(I \,\square\, J)$ mit $\mathrm{Cof}(K) := {}^{\boxslash}(K^{\boxslash})$.

Satz. Seien $(\mathcal{C}, I, J)$, $(\mathcal{D}, I', J')$ kombinatorische Modellkategorien. Dann ist $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ genau dann ein Quillenbifunktor, wenn $I \,\square\, I'$ Kofaserungen in $\mathcal{E}$ und $I \,\square\, J'$, $J \,\square\, I'$ jeweils azyklische Kofaserungen in $\mathcal{E}$ sind.

Def. Eine **monoidale Modellkategorie** ist eine Modellkategorie $\mathcal{M}$ mit monoidal abgeschlossener Struktur $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbb{1})$, sodass

- $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ein Quillenbifunktor und
- $Q\mathbb{1} \otimes X \to \mathbb{1} \otimes X \cong X$ und $X \otimes Q\mathbb{1} \to X \otimes \mathbb{1} \cong X$ für alle kofasernden X jeweils schwache Äquivalenzen sind.

Bem. Die zweite Bedingung ist äquivalent zu:

$$X \cong \mathrm{Hom}_r(\mathbb{1}, X) \to \mathrm{Hom}_r(Q\mathbb{1}, X), \quad X \cong \mathrm{Hom}_l(\mathbb{1}, X) \to \mathrm{Hom}_l(Q\mathbb{1}, X)$$

sind schwache Äquivalenzen für alle fasernden X.

Beob. Sei $\mathcal{M}$ eine mon. Modellkat, $(A \xrightarrow{i} X), (E \xrightarrow{p} B) \in \mathcal{M}$. Es gilt

$$i \boxslash p \iff (\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, E) \to P(i, p)) \text{ ist surjektiv.}$$

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **kartesisch abgeschlossen**, falls $(\mathcal{C}, \times, *)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie ist.

Bsp. Sei $\mathcal{C}$ eine bivollständige, kartesisch abgeschlossene Kategorie. Sei $\mathcal{C}_* := */\mathcal{C}$. Das initiale und terminale Objekt dieser Kategorie ist id_*, sie ist also punktiert. Für $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_*)$ definiere $X \wedge Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ durch folgenden Pushout:

$$\begin{tikzcd}
X \amalg Y \arrow[r] \arrow[d] & X \times Y \arrow[d] \\
* \arrow[r] & X \wedge Y
\end{tikzcd}$$

Für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ sei $X_+ := X \amalg * \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_*)$.
Es besteht die Adj. $(-)_+ : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{C}_* : U$, wobei U der Vergissfunktor ist. Mit $S^0 := *_+ = * \amalg *$ wird $(\mathcal{C}_*, \wedge, S^0)$ zu einer symmetrischen monoidalen Kategorie und $(-)_+$ zu einem monoidalen Funktor.
Für $V, W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_*)$ definiere $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_*}(V, W)$ als Pullback

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_*}(V, W) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(V, W) \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(*, *) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(*, W)
\end{tikzcd}$$

Dann ist $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_*}(X, -)$ rechtsadjungiert zu $- \wedge X$ für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_*)$ und damit $\mathcal{C}_*$ soagar monoidal abgeschlossen.
Trage $\mathcal{C}$ zusätzlich eine Modellstruktur, sodass $\times : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein Quillenfunktor und $*$ kofasernd ist (also $(\mathcal{C}, \times, *)$ eine monoidale Modellkategorie ist). Dann erzeugt $U : \mathcal{C}_* \to \mathcal{C}$ eine symmetrische monoidale Modellstruktur auf $(\mathcal{C}_*, \wedge, S^0)$ und $(-)_+ \dashv U$ ist eine Quillenadjunktion, sogar eine monoidale:

Def. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ monoidale Modellkategorien.
Eine Quillen-Adjunktion $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : U$ heißt **monoidal**, falls

- F monoidal ist und
- $FQ\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{Fq} F\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ eine schwache Äquivalenz ist.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine mon. Modellkat. Eine **$\mathcal{C}$-Modellkategorie** ist eine Modellkat. $\mathcal{D}$ mit Struktur $\otimes : \mathcal{D} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ als $\mathcal{C}$-Rechtsmodul, sodass

- $\otimes : \mathcal{D} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ist eine Quillenadjunktion,
- $X \otimes Q\mathbb{1} \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes q} X \otimes \mathbb{1}$ ist eine schw. Äq. für alle kof. $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

Bem. Wenn $\mathcal{C}$ punktiert ist, so auch $\mathcal{D}$.

Prop. Sei $(\mathcal{C}, \times, *)$ eine monoidale Modellkategorie und $*$ kofasernd. Ist dann $\mathcal{D}$ eine $\mathcal{C}$-Modellkategorie, so ist $\mathcal{D}_*$ eine $\mathcal{C}_*$-Modellkategorie. Damit gibt es eine Äquivalenz

$$\{\text{punktierte } \mathcal{C}\text{-Modellkategorie}\} \longleftrightarrow \{\mathcal{C}_*\text{-Modellkategorien}\}.$$

Prop. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ Modellkategorien und $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ eine Quillen-Biadjunktion. Dann ist $\otimes^{\mathbb{L}} : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{E})$ eine Biadjunktion mit Adjungierten $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_r$ und $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_l$.

Satz. Ist $\mathcal{C}$ eine (symm.) monoidale Modellkategorie, so ist $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ eine monoidal abgeschlossene Kategorie.

Simpliziale Mengen

Ref. Die Homologische-Algebra-Zusammenfassung enthält eine Einführung in simpliziale Mengen.

Bspe.
- $I := \Delta[1]$ heißt **Intervall**,
- $\Delta^i[n] := \{x \in \Delta[n] \mid i \notin \mathrm{im}(x)\} \subset \Delta[n]$ heißt **i-Seite**,
- $S^n := \cup_{i=0}^n \Delta^i[n]$ heißt **n-Sphäre**.
- $\Lambda^i[n] := \cup_{j \neq i} \Delta^j[n]$ heißt **i-Horn**.

Def. Ein Morphismus $p : E \to X$ simplizialer Mengen heißt **Kan-Faserung**, falls $\{\Lambda^i[n] \hookrightarrow \Delta[n] \mid 0 \leqslant i \leqslant n\} \boxslash p$

Def. Eine simpl. Menge heißt **Kan-Komplex**, falls $X \to * := \Delta[0]$ eine Kan-Faserung ist.

Def.
- Ein **inneres Horn** ist ein $\Lambda^i[n] \subset \Delta[n]$ mit $0 < i < n$.
- Eine simpl. Menge X heißt **innerer Kan-Komplex**, falls

$$\{\Lambda^i[n] \hookrightarrow \Delta[n] \mid 0 < i < n\} \boxslash (X \to *).$$

Bem. Es ist X also genau dann ein (innerer) Kan-Komplex, wenn man (innere) Hörner in X füllen kann.

Def. Seien $X \in \mathbf{sSet}$, $x, y \in X_0$, d. h. $x, y : \Delta[0] \to X_0$. Setze

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, \alpha : I \to X \; : \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y.$$

mit $\alpha(\epsilon) := \alpha \circ (\Lambda^\epsilon[1] \hookrightarrow I)$ für $\epsilon = 0, 1$. Setze $\pi_0(X) := X/{\sim}$.

Prop. Ist X ein Kan-Komplex, so ist $\sim$ eine Äq'relation.

Def. Eine **anodyne Erweiterung** ist ein Morphismus $i : A \to B$ von simpl. Mengen, welcher die LHHE bzgl. aller Kan-Faserungen hat, d. h. die Unterkategorie der anodynen Erweiterungen ist die Saturierung von $\{\Lambda^i[n] \to \Delta[n]\}$, also $\mathrm{Cof}(\{\Lambda^i[n] \to \Delta[n]\})$.

Satz. Die Monomorphismen in **sSet** sind genau die Retrakte von Zellkomplexen über $\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]\}$.

Def. Eine **triviale Faserung** ist ein Mor. in **sSet**, welcher die RHHE bzgl. $\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]\}$, d. h. bzgl. allen Monomor. hat.

Satz. (anodyne Erweiterungen, Kan-Faserungen) und (Monomorphismen, triviale Faserungen) sind jeweils schwache Faktorisierungssysteme von **sSet**.

Satz (Gabriel-Zisman). Sei $k : Y \to Z$ ein Monomorphismus. Ist dann $i : A \to B$ anodyn, so ist $i \,\square\, k : A \times Z \cup_{A \times Y} B \times Y \to B \times Z$ (mit $\otimes := \times$) ebenfalls anodyn.

Bem. Damit wird folgen, dass **sSet** eine kartesisch abgeschlossene Modellkategorie wird (d. h. $\times$ ist ein Quillen-Bifunktor).

Def. Seien X, Y simpliziale Mengen. Dann ist der **Funktionenkomplex** $Y^X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ definiert durch

$$(Y^X)_n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n] \times X, Y)$$

Bem. Es gilt $\mathrm{Hom}(Z, Y^X) \cong \mathrm{Hom}(Z \times X, Y)$.

Kor. Ist Y ein Kan-Komplex, so ist Y^X wieder ein Kan-Komplex.

Def. Zwei Morphismen $f, g : X \to Y$ zwischen simpl. Mengen X, Y heißen **homotop**, falls $f \sim g$ in Y^X, d. h. die Menge der Homotopieklassen von Morphismen ist $\pi_0(Y^X)$.

Kor (Homotopieerweiterungseigenschaft, HEE). Sei $p : E \to X$ eine Kan-Faserung und $i : Y \to Z$ ein Monomorphismus. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \times I \arrow[r, "h'"] \arrow[d, hook, "i \times \mathrm{id}_I"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "\overline{h}"] & X \\
Z \times \Lambda^\epsilon[1] \arrow[u] \arrow[uur] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

existiert der gestrichelte Pfeil.

Def. Ein Monomorphismus $i : A \to B$ in **sSet** heißt **starker Deformationsretrakt** (SDR), falls ein $r : B \to A$ mit $ri = \mathrm{id}_A$ und $[ir] = [\mathrm{id}_B] \in \pi_0(B^B$ in $A/\mathbf{sSet})$, d. h. es existiert $h : B \times I \to B$ mit $h_0 = \mathrm{id}_B$, $h_1 = ir$, $h|_{A \times I} = \mathrm{id}_{A \times I}$ oder ein Zickzack solcher h's.

Bspe. $\Lambda^0[1], \Lambda^1[1] \subset \Delta[1]$ sind starke Deformationsretrakte.

Prop. Sei $i : A \to B$ anodyn, A, B Kan-Komplexe. Dann ist A ein SDR von B vermöge i.

Prop. Sei $i : A \to B$ ein Monomorphismus, sodass A ein SDR von B ist. Dann ist i anodyn.

Prop. Für eine Kan-Faserung $p : E \to X$ sind äquivalent:

- p ist trivial.
- Es existiert ein Schnitt $s : X \to E$ und ein $h : E \times \Delta[1] \to E$ mit $ps = \mathrm{id}_X$ und $h : \mathrm{id}_E \sim sp \pmod{X}$
- p ist eine Homotopieäquivalenz, d. h. es existiert ein $s : X \to E$ mit Homotopien $k : ps \sim \mathrm{id}_X$ und $h : sp \sim \mathrm{id}_E$.

Prop. Sei $p : E \to X$ eine Faserung, $i : A \to X$ ein SDR. Dann ist $p^{-1}(A) \to E$ im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[d] \\
A \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

ebenfalls ein SDR.

Kor. Sei $p : E \to X \times \Delta[1]$ eine Faserung. Sei $p_0 := p|_{p^{-1}(X \times \Lambda^0[1])}$, $p_1 := p|_{p^{-1}(X \times \Lambda^1[1])} : E_i \to X$ Dann sind $p_0, p_1 : E_i \to X$ faserweise homotopieäquivalent, d. h. es existieren f, g in

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_0"'] & E_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_1"] & E_0 \arrow[dl, "p_0"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

mit $\mathrm{id}_{E_0} \sim gf \pmod{X}$ und $fg \sim \mathrm{id}_{E_1} \pmod{X}$

Kor. Sei $p : E \to Y$ eine Faserung und $f, g : X \to Y$ homotop. Dann sind die Pullbacks f^*E und g^*E faserweise homotop (also mod Y).

Kor. Sei X zshgd (d. h. $\pi_0(X) = *$), $p : E \to X$ eine Faserung. Dann sind je zwei Fasern von p homotopieäquivalent.

Def.
- Seien $x, y : \Delta[n] \to X$ zwei n-Simplizes in einer simplizialen Menge X mit $x|_{\partial\Delta[n]} = a = x|_{\partial\Delta[n]}$. Schreibe $x \sim y$ $(\partial\Delta[n])$, falls $\exists\, h : \Delta[n] \times \Delta[1] \to X$ mit $h|_{\Lambda^0[1]} = x$, $h_{\Lambda^1[1]} = y$, $h_{\partial\Delta[n]} = \mathrm{id}$.
- Ein Kan-Komplex X heißt **minimal**, falls

$$x \sim y \ (\partial\Delta[n]) \quad \Longleftrightarrow \quad x = y.$$

Lem. Sei X ein Kan-Komplex. Dann existiert ein SDR X' von X, sodass X' minimal ist.

Lem. Sei X minimal und $f : X \to X$ mit $f \sim \mathrm{id}_X$. Dann ist f ein Isomorphismus.

Kor. Sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz zwischen minimalen Komplexen. Dann ist f schon ein Isomorphismus.

Def. Eine Faserung $p : E \to X$ heißt **minimal**, falls für alle Simplizes $x, y : \mathrm{Hom}(\Delta[n], E)$ mit $p \circ x = p \circ y$ mit $x \sim y$ (mod $\partial\Delta[n]$).

Def. Ein **Bündel** mit Faser F ist eine Abb. $p : E \to B$, sodass für alle Simplizes $\sigma : \Delta[n] \to B$ der Pullback $\Delta[n] \times_B E$ homotopieäquivalent zu $\Delta[n] \times F$ ist.

Lem. Eine minimale Faserung $p : E \to X$ ist ein Bündel.

Def. Ein Morphismus $f : X \to Y$ in **sSet** heißt **schwache Äquivalenz**, falls für alle Kan-Komplexe K der induzierte Morphismus $[f, K] : [Y, K] \to [X, K]$ (mit $[Y, K] := \pi_0(K^Y)$)

Bspe.
- Homotopieäquivalenzen ist eine schwache Äquivalenzen.
- Triviale Faserungen sind schwache Äquivalenzen.
- Sei $i : A \to B$ eine anodyne Erweiterung. Für jeden Kan-Komplex K ist dann $K^i : K^B \to K^A$ eine triviale Faserung, insbesondere also eine schwache Homotopieäquivalenz.
- Ist $f : X \to Y$ eine schwache Äquivalenz zwischen Kan-Komplexen X, Y, so ist f eine Homotopieäquivalenz.

Bem. f ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn in allen Diagrammen der Form

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ Y \arrow[r] & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

mit $\overline{X}$, $\overline{Y}$ Kankomplexe, $X \to \overline{X}$, $Y \to \overline{Y}$ anodyn der Morphismus $\overline{f}$ eine schwache Äquivalenz ist.

Lem. Sei $i : A \to B$ anodyn, $p : E \to A$ ein Bündel. Dann existiert ein Pullback-Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ A \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

mit einem Bündel p'. Weiter ist p' eindeutig bis auf Isomorphie. Außerdem ist $E \hookrightarrow E'$ anodyn.

Prop.
- Eine Faserung $p : E \to X$ ist genau dann trivial, wenn p eine schwache Äquivalenz ist.
- Eine Kofaserung $i : A \to B$ ist genau dann anodyn, wenn i eine schwache Äquivalenz ist.

Lem. Pullbacks längs Bündeln erhalten schwache Äquivalenzen.

Satz (Quillen)**.** Die Kategorie der simplizialen Mengen mit den schwachen Äquivalenzen wird zu einer kartesisch abgeschlossenen, eigentlichen, kombinatorischen Modellkategorie, wenn als Kofaserungen die Monomorphismen und als Faserungen die Kan-Faserungen gewählt werden.

Kettenkomplexe

Sei R ein Ring und **Mod**-R die Kategorie der R-Moduln.

Def. Ein $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}\text{-}R)$ heißt **projektiv**, falls $\mathrm{Hom}_r(P, f) : \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, N)$ für alle surjektiven $f : M \to N$ surjektiv ist.

Bem. Eine Abb. $f : M \to N$ ist genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{Hom}(P, f)$ surjektiv für alle projektiven P.

Bspe.
- R ist projektiv
- Direkte Summen projektiver Moduln sind projektiv.
- Retrakte projektiver Moduln sind wieder projektiv.

Bem. Damit hat **Mod**-R genügend viele projektive, d. h. jedes Modul M erlaubt eine Surjektion $P \to M$ mit P projektiv.

Def. Sei $\mathrm{Ch}_*(R)$ die Kategorie der Kettenkomplexe, die in nichtnegativen Graden konzentriert sind, d. h. Objekte sind Diagramme der Form

$$\ldots \to C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \quad \text{mit } \partial_i \circ \partial_{i+1} = 0.$$

Elemente in $Z_nC := \{x \in C_n \mid \partial_n(x) = 0\}$ heißen **n-Zykel** und Elemente in $B_nC := \{\partial_n(y) \mid y \in C_{n+1}\} \subseteq Z_nC$ heißen **n-Ränder**. Die Gruppe $H_n(C) := Z_nC/B_nC$ heißt **n-te Homologie**. Ist $f : C \to C'$ ein Morphismus von Kettenkomplexen, so induziert dieser einen Morphismus $H_n(f) : H_n(C) \to H_n(C')$. Es heißt f ein Homologie-Isomorphismus (oder Quasi-Isomorphismus), falls $H_n(f)$ für alle $n \geqslant 0$ ein Isomorphismus ist.

Satz. Zusammen mit den Homologie-Isomorphismen als schwache Äquivalenzen wird $\mathrm{Ch}_*(R)$ zu einer komb. Modellkategorie, wenn wir als Kofaserungen gradweise Monomorphismen mit gradweise projektivem Kokern und als Faserungen Morphismen, die im positiven Grad gradweise Surjektionen sind, wählen.

Def. Diese Modellstr. heißt **proj. Modellstruktur** auf $\mathrm{Ch}_*(R)$.

Bem. Alle Komplexe in die projektive Modellstruktur sind fasernd, insbesondere ist $\mathrm{Ch}_*(R)$ rechtseigentlich. Die kofasernden Objekte sind die Komplexe projektiver Moduln. Projektive Auflösung entspricht dem kofasernden Ersatz.

Def. Es sei $D(n)$ der Komplex $\ldots \to R \xrightarrow{\mathrm{id}} R \to 0 \to \ldots$ mit R im Grad n und $n-1$ und $S(n)$ der Komplex $\ldots \to 0 \to R \to 0 \to \ldots$ mit R im Grad n.

Def. Der **Einhängungsfunktor** ist

$$\Sigma : \mathrm{Ch}_*(R) \to \mathrm{Ch}_*(R), \quad (\Sigma C)_{n+1} := C_n, \quad (\Sigma C)_0 := 0.$$

Bem. Es gilt $D(n+1) = \Sigma(D(n))$ und $S(n+1) = \Sigma(S(n))$.

Bem. Es gilt $\mathrm{Hom}(D(n), C) \cong C_n$ und $\mathrm{Hom}(S(n), C) \cong Z_nC$.

Lem. Ein Morphismus $f : C \to C'$ ist genau dann eine Faserung (d. h. im positiven Grad surjektiv), wenn f die RHHE bzgl. aller $\{0 \to D(n) \mid n \geqslant 1\}$ hat.

Bem. Folglich ist $\{0 \to D(n) \mid n \geqslant 1\}$ die Menge der erz. azykl. Kof. der projektiven Modellstruktur.

Lem. Sei $f : C \to C'$ ein Mor. in $\mathrm{Ch}_*(R)$. Dann sind äquivalent:

- f ist ein Homologie-Isomorphismus und in positiven Graden surjektiv
- Für alle $n \geqslant 0$ ist $C_n \to Z_{n-1}C \times_{Z_{n-1}C'} C'_n, x \mapsto (\partial x, f(x))$ surjektiv.
- f hat die RHE bzgl. $\{S(n) \to D(n) \mid n \geqslant 0\}$

Bem. Folglich ist $\{S(n) \to D(n) \mid n \geqslant 0\}$ die Menge der erzeugenden Kofaserungen der projektiven Modellstruktur.

Die Homotopiekategorie als $\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet})$-Modul

Def. Die **Kategorie der Räume** ist $\mathcal{S} := \mathrm{Ho}(\mathbf{sSet})$.

Ziel. Zeige, dass $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ für jede Modellkategorie $\mathcal{M}$ in natürlicher Weise ein Modul über $\mathcal{S}$ ist, d. h. wir wollen Funktoren

$$\begin{aligned}\mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \times \mathcal{S} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}), &\quad (X, K) \mapsto X \otimes^{\mathbb{L}} K,\\ \mathrm{Ho}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{S}, &\quad (X, Y) \mapsto \mathrm{Map}(X, Y) =: Y^X,\\ \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}), &\quad (K, X) \mapsto \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}(K, X) := X^K,\end{aligned}$$

sodass gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{M})}(X \otimes^{\mathbb{L}} K, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(K, Y^X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y^K).$$

Weiter gilt: $X \otimes^{\mathbb{L}} \Delta[0] \cong X$, d. h. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{M})}(X \times \Delta[0], Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\Delta[0], Y^X) = \pi_0(Y^X)$.

Def. Sei $\mathcal{B}$ eine kleine Kategorie und λ eine Ordinalzahl. Ein Funktor $f : \mathcal{B} \to \lambda$ heißt **lineare Einbettung**, falls:

$$\forall\, u : b \to c \;:\; F(u) = \mathrm{id} \implies u = \mathrm{id}\,.$$

In diesem Fall heißt $F(i)$ für $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ der **Grad von i**.
Eine Kategorie mit einer linearen Erweiterung heißt **gerichtet**.
Ist $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ gerichtet, so heißt $\mathcal{B}$ inverse Kategorie.

Def.
- Sei $\mathcal{C}$ kovollständig, $\mathcal{B}$ gerichtet, $i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$. Das i-te **Latching-Objekt** L_iX eines Funktors $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathcal{B}})$ ist $L_iX := \operatorname{colim}_{j \xrightarrow{+} i} X_j$. Die Indexkategorie ist dabei die Scheibenkategorie der Objekte vom Grad $< i$ über X_i.
- Sei $\mathcal{B}$ invers und $\mathcal{C}$ vollständig. Das i-te **Matching-Objekt** von X ist $M_iX := \lim_{i \xrightarrow{-} j} X_j$.

Bem. Es gibt nat. Transformationen $L_iX \to X_i$ und $X_i \to M_iX$.

Satz. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, $\mathcal{B}$ gerichtet. Dann gibt es folgende Modellstruktur auf $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}$: Ein Funktor $\tau : X \to Y$ ist eine
- schw. Äq. $\iff \forall\, i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \;:\; \tau_i : X_i \to Y_i$ ist schw. Äq,
- Faserung $\iff \forall\, i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \;:\; \tau_i : X_i \to Y_i$ ist Faserung,
- Kof. $\iff \forall\, i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \;:\; X_i \cup_{L_iX} L_iY \to Y_i$ ist eine Kof,
- triv. Kof. $\iff \forall\, i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) : X_i \cup_{L_iX} L_iY \to Y_i$ ist eine triv. Kof.

Bzgl. dieser Modellstr. ist $\operatorname{colim} : \mathcal{C}^{\mathcal{B}} \to \mathcal{C}$ ein Linksquillenfunktor.

Bem.
- Dual: $\mathcal{M}^{\mathcal{B}^{\mathrm{op}}} \simeq (\mathcal{M}^{\mathrm{op}})^{\mathcal{B}}$
- Ist τ eine Kofaserung in $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{B}$ gerichtet, so ist insbesondere $\forall\, i \,:\, \tau_i : X_i \to Y_i$ eine Kofaserung.

Beweis. Da colim ein Linksquillenfunktor ist, ist $L_iX \to L_iY$ eine Kofaserung. Damit ist auch $X_i \to X_i \cup_{L_iX} L_iY$ als Pushout von $L_iX \to L_iY$ eine Kofaserung. Somit ist auch die Komposition mit der Kofaserung $X_i \cup_{L_iX} L_iY \to Y_i$ wieder eine Kofaserung.

Def. Eine **Reedy-Kategorie** ist eine Kategorie $\mathcal{B}$ zusammen mit Unterkategorien $\mathcal{B}_+$ und $\mathcal{B}_-$ und einem Funktor $d : \mathcal{B} \to \lambda$, der Gradfunktion, wobei λ eine Ordinalzahl ist, sodass folgendes gilt:
- $\mathcal{B}_+$ ist bzgl. d gerichtet,
- $\mathcal{B}_-$ ist bzgl. d invers,
- Jeder Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{B})$ lässt sich eindeutig faktorisieren als $f = ip$ mit $i \in \mathcal{B}_+$ und $p \in \mathcal{B}_-$.

Bsp. Δ ist Reedy mit $\Delta_+ := \{$ injektive $\}$ und $\Delta_- := \{$ surjektive $\}$.

Bspe.
- Sei $A^\bullet$ ein kosimpliziales Objekt in $\mathcal{C}$, d. h. $A^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\Delta)$. Wir schreiben $A^\bullet[n] := A^\bullet_{[n]}$. Dann

$$L_0A^\bullet = \varnothing, \quad L_1A^\bullet = A^\bullet[0] \amalg A^\bullet[0], \quad M_0A^\bullet = *, \quad M_1A^\bullet = A^\bullet[0].$$

- Sei $X_\bullet$ ein simpl. Objekt in $\mathcal{C}$, d. h. $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\Delta^{\mathrm{op}}})$. Dann

$$L_0X_\bullet = \varnothing, \quad L_1A_\bullet = X_0, \quad M_0X_\bullet = *, \quad M_1X = X_0 \times X_0.$$

Bem. Sei $\mathcal{B}$ eine Reedy-Kategorie. Dann können wir Funktoren $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathcal{B}})$ wie folgt rekursiv konstruieren: Sei dazu $d : \mathcal{B} \to \lambda$ die Gradfunktion und $X|_{\mathcal{B}_{<\beta}}$ schon definiert. Sei dann $i \in \mathcal{B}$ mit $d(i) = \beta$. Wähle eine Faktorisierung $L_iX \to X_i \to M_iX$.
Sei $i \to j$ mit $d(i), d(j) \leqslant \beta$. Gesucht ist ein Morphismus $X_i \to X_j$.
Ohne Einschränkung sei $(i \to j) \neq \mathrm{id}$. Faktorisiere $(i \to j) = (k \xrightarrow{+} j) \circ (i \xrightarrow{-} k)$. Gesucht ist also $X_i \to X_k$ und $X_k \to X_j$ für $i \xrightarrow{-} k$, $k \xrightarrow{+} j$. Dazu betrachte

$$X_i \xrightarrow{\text{gewählt}} M_iX \xrightarrow{\text{kanonisch}} X_k, \qquad X_k \xrightarrow{\text{kanonisch}} L_jX \xrightarrow{\text{gewählt}} X_j.$$

Def. Sei $\mathcal{B} = \Delta$ und $A \in \mathcal{C}$. Dann sind $\ell^\bullet A, r^\bullet A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\Delta)$ def. durch

$$\ell^\bullet A[i] = A \times [i] := A \amalg \ldots \amalg A, \quad r^\bullet A[i] := A.$$

Bem. $\ell^\bullet \dashv (\mathrm{Ev}^\bullet : X^\bullet \to X^\bullet[0]) \dashv r^\bullet$

Satz. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie und $\mathcal{B}$ eine Reedy-Kategorie. Dann existiert folgende Modellstruktur auf $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}$:
Eine natürliche Transformation $f : X \to Y$ ist eine
- schw. Äq. $\iff \forall\, i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \;:\; f_i : X_i \to Y_i$ ist schw. Äq.
- (triv.) Kof. $\iff \forall\, i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \;:\; X_i \cup_{L_iX} L_iY \to Y_i$ ist (triv.) Kof.
- (triv.) Fas. $\iff \forall\, i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) : X_i \to Y_i \times_{M_iY} M_iX$ ist (triv.) Fas.

Bsp. $\mathcal{M}^\Delta$, $\mathcal{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ sind wieder Modellkategorien.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Modellkategorie, $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
- Ein **kosimplizialer Rahmen von A** ist eine Faktorisierung von $\ell^\bullet A \to r^\bullet A$ der Form $\ell^\bullet A \hookrightarrow A^* \xrightarrow{\sim} r^\bullet A.$, sodass $A^*[0] = A$.
- Dual ist ein simpl. Rahmen eine Faktorisierung $l_\bullet A \xrightarrow{\sim} A_* \twoheadrightarrow r_\bullet A$.

Bem. Ist A^* ein kosimplizialer Rahmen von A, so ist $A^*[1]$ ein gutes Zylinderobjekt.

Bsp. Sei $\mathcal{C}$ eine simpliziale Modellkategorie. Ist dann A kofasernd, so ist $A \otimes \Delta^{\mathrm{op}}$ mit $(A \otimes \Delta^\bullet)[n] = A \otimes (\Delta^\bullet[n])$ ein kosimplizialer Rahmen von A. Insbesondere ist $A \otimes \Delta^\bullet[i]$ ein gutes Zylinderobjekt.

Die Wirkung von $\mathcal{S} = \mathrm{Ho}(\mathbf{sSet})$

Konstruktion. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, K eine simpl. Menge, X ein Objekt aus $\mathcal{M}$. Wir wollen $X \otimes^{\mathbb{L}} K \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(\mathcal{M}))$ definieren:

a) Wähle kofasernden Ersatz $QX \xrightarrow{\sim} \!\!\!\!\to X$
b) Wähle kosimplizialen Rahmen $\ell^\bullet QX \hookrightarrow X^* \xrightarrow{\sim} r^\bullet QX$
c) Setze $X \otimes^{\mathbb{L}} K := \int^n X^*[n] \times K_n$.
d) Fasse $X \otimes^{\mathbb{L}} K$ als Objekt in $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ auf.

Sei $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$. Wir wollen $Y^K \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(\mathcal{M}))$ wie folgt definieren:

- Wähle fasernden Ersatz $Y \xhookrightarrow{\sim} RY$.
- Wähle simplizialen Rahmen $\ell_\bullet RY \to Y_* \to r_\bullet RY$.
- Setze $Y^K := \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}(K, Y) = \int_n Y_*[n]^{K_n}$.
- Fasse Y^K als Objekt in $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ auf.

Wir definieren $Y^X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ wie folgt:

- Wähle $QX \to X$ und $Y \to RY$ wie eben.
- Wähle X^*, Y_* wie eben.
- Setze $Y^X := \mathrm{Map}(X, Y) = \operatorname{diag}\mathrm{Hom}(X^*, Y_*) = \mathrm{Hom}(X^*, Y) = \mathrm{Hom}(X, Y_*)$.
- Fasse Y^X als Objekt von $\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet}) = \mathcal{S}$ auf.

Satz. Diese Konstruktion macht $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ zu einem wohldefinierten, abgeschl. $\mathcal{S}$-Modul. Sie ist mit Quillenadjunktionen verträglich.

Satz. Analog wird die Homotopiekategorie einer jeden punktierten Modellkategorie $\mathcal{M}$ in kanonischer Weise zu einem $\mathcal{S}_*$-Modul, wobei $\mathcal{S}_* := \mathrm{Ho}(\mathbf{sSet}_*)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \times \mathcal{S}_* \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}), &\quad (X, K) \mapsto X \wedge^{\mathbb{L}} K,\\ \mathrm{Ho}(\mathcal{M})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{S}_*, &\quad (X, Y) \mapsto \mathrm{Map}_*(X, Y),\\ \mathcal{S}_*^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}), &\quad (K, Y) \mapsto \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_*(K, Y).\end{aligned}$$

Es gilt dann $A \wedge^{\mathbb{L}} K_+ = A \otimes^{\mathbb{L}} K$.

Punktierte Modellkategorien

Def. Sei $\mathcal{C}_*$ eine punktierte Kategorie und $f : X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}_*$. Sei $0 : X \to * \to Y$ der eindeutig bestimmte Morphismus.

- Die **Kofaser** $\operatorname{cofib} f$ von f ist der Differenzkokern von $f, 0 : X \to Y$.
- Die **Faser** $\operatorname{fib} f$ von f ist der Differenzkern von $f, 0$.

Bem. Folgende Diagramme sind Pushout- bzw. Pullbackdiagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ * \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & \operatorname{cofib} f \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{fib} f \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ * \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Def. $\mathbb{S}^0 := \Delta[0]_+ \in \operatorname{Ob}(\mathbf{sSet}_*) = \operatorname{Ob}(\mathcal{S}_*)$, $\quad \mathbb{S}^1 := \Delta[1]_+ / \partial\Delta[1]_+$

Def. Sei $\mathcal{C}_*$ eine punktierte Modellkategorie. Dann heißt

$$\Sigma : \operatorname{Ho}(\mathcal{C}_*) \to \operatorname{Ho}(\mathcal{C}_*),\quad X \mapsto X \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^1 \qquad \textbf{Einhängung} \text{ und}$$
$$\Omega : \operatorname{Ho}(\mathcal{C}_*) \to \operatorname{Ho}(\mathcal{C}_*),\quad Y \mapsto \mathbb{R}\operatorname{Hom}_*(\mathbb{S}^1, Y) \quad \textbf{Verschleifung}.$$

Bem. $\Sigma \dashv \Omega$

Konstruktion. Sei $X \in \operatorname{Ob}(\operatorname{Ho}(\mathcal{C}_*))$. Wähle einen kofasernden Repräsentanten $QX \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C}_*)$ von X. Wähle dann einen komsimplizialen Rahmen $(QX)^o$. Dann ist

$$\begin{aligned} (QX)^o \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^1 &= ((QX)^o \wedge \Delta[1]_+) \,/\, ((QX)^o \wedge \delta\Delta[1]_+) \\ &= ((QX)^o \otimes \Delta[1]) \,/\, ((QX)^o \otimes \partial\Delta[1]) = (QX \times I) \,/ (QX \vee QX) \\ &= \operatorname{cofib}(QX \vee QX \to QX \times I) \end{aligned}$$

für einen gutes Zylinderobjekt $QX \times I$ zu QX. Ist X kofasernd, so gilt $X \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^1 = \operatorname{cofib}(X \vee X \to X \times I)$. Dual gilt für ein kofaserndes Y: $\Omega Y = \operatorname{fib}(Y^I \to Y)$ für ein gutes Wegeobjekt Y^I.

Def. $\mathbb{S}^l := \Sigma^l \mathbb{S}^0$ heißt **l-Sphäre**.

Notation. $[X, Y] := \operatorname{Hom}_{\operatorname{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y)$ für $X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{M})$

Bem. $\pi_0 \operatorname{Map}_*(X, Y) \cong [\mathbb{S}^0, \operatorname{Map}_*(X, Y)]$,
$\pi_l \operatorname{Map}_*(X, Y) = [\Sigma^l X, Y]$

Bem. $\mathbb{S}^1$ ist eine folgendermaßen ein Kogruppenobjekt in $\mathcal{S}_*$:
Für $X \in \operatorname{Ob}(\mathbf{sSet})$ sei $\tilde{X}$ definiert als Pushout

$$\begin{tikzcd} \operatorname{sk}_0 X \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \Delta[0] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & \tilde{X} \end{tikzcd}$$

Zum Beispiel ist $\widetilde{\Delta[1]} = \mathbb{S}^1$. Die Inklusionen $i : \Delta^1[2] \to \Delta[2]$ und $s : \Lambda^1[2] \to \Delta[2]$ induzieren Abbildungen $\tilde{i} : \mathbb{S}^1 = \widetilde{\Delta^1[2]} \to \widetilde{\Delta[2]}$ und $\tilde{s} : \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 = \widetilde{\Lambda^1[2]} \to \widetilde{\Delta[2]}$. Da s eine anodyne Erweiterung ist, ist auch $\tilde{s}$ als Pushout von s anodyn, also eine schwache Äquivalenz. Dann ist die Kogruppenkomultiplikation der Morphismus

$$\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\tilde{i}} \widetilde{\Delta[2]} \xrightarrow{\tilde{s}^{-1}} \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \quad \text{in } \mathcal{S}_*.$$

Satz. Sei $X \in \operatorname{Ho}(\mathcal{C}_*)$. Dann ist

- $\Sigma^l X$ kanonisch eine Kogruppe für $l \geqslant 1$ und abelsch für $l \geqslant 2$,
- $\Omega^l Y$ kanonisch eine Gruppe für $l \geqslant 1$ und abelsch für $l \geqslant 2$.

Kor. $\pi_l X := \pi_0 \mathbb{R}\operatorname{Hom}_*(\mathbb{S}^l, X) = [\mathbb{S}^l, X]$ ist eine Gruppe für $l \geqslant 1$ und abelsch für $l \geqslant 2$.

Bem. Die Index-Kategorie $I := \{\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet\}$ von Pushoutdiagrammen ist gerichtet, d. h. $\mathcal{C}_*^I$ trägt eine Modellstruktur. Bzgl. dieser ist $\operatorname{colim} : \mathcal{C}_*^I \to \mathcal{C}_*$ ein Linksquillenfunktor. Wir erhalten einen Funktor $\operatorname{colim}^{\mathbb{L}} : \operatorname{Ho}(\mathcal{C}_*^I) \to \operatorname{Ho}(\mathcal{C}_*)$.

Def. Die **Homotopiekofaser** eines Morphismus $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}_*$ ist

$$\operatorname{cofib}^{\mathbb{L}}(f) := \operatorname{colim}^{\mathbb{L}}(* \leftarrow A \xrightarrow{f} B).$$

Konstruktion. Wir haben das Diagramm $\left(* \leftarrow A \xrightarrow{f} B\right) \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C}_*^I)$. Durch Faktorisierung finden wir ein Diagramm $(C \hookleftarrow QA \hookrightarrow QB) \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C}_*^I)$, in dem C, QA und QB kofasernde Ersatzobjekte für $*$, A, bzw. B und die Morphismen Kofaserungen sind. Dieses Diagramm ist dann ein kof. Ersatz für das originale Diagramm in $\mathcal{C}_*^I$ und somit gilt $\operatorname{cofib}^{\mathbb{L}}(f) = QB \cup_{QA} C$.

Def. Dual ist die **Homotopiekofaser** eines Mor. $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}_*$

$$\operatorname{fib}^{\mathbb{R}}(f) := \overset{\mathbb{R}}{\lim}(* \to B \xleftarrow{f} A).$$

Bspe. • $\Omega Y = \operatorname{fib}^{\mathbb{R}}(X \xrightarrow{\Delta} X \times X)$

• $X \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^1 = \operatorname{cofib}(QX \vee QX \to QX \times_{\text{gut}} I) = \operatorname{cofib}^{\mathbb{L}}(X \vee X \xrightarrow{\nabla} X)$

Def. Die Folge $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C = \operatorname{cofib}^{\mathbb{L}}(f)$ heißt **Kofasersequenz** und $X = \operatorname{fib}^{\mathbb{R}}(h) \to Y \xrightarrow{h} Z$ heißt **Fasersequenz**.

Bem. ΣA kooperiert folgendermaßen auf $C = \operatorname{cofib}^{\mathbb{L}}(f)$:
Die Kooperationsabbildung $C \to C \vee \Sigma A$ entspricht nach dem Yoneda-Lemma einer Operation $[\Sigma A, X] \times [C, X] \to [C, X]$, welche natürlich in $X \in \operatorname{Ob}(\operatorname{Ho}(\mathcal{C}_*))$ ist. Sei zunächst RX ein faserner Ersatz von X. Sei $j \in [\Sigma A, X]$ und $k \in [C, X]$. Dann ist die Wirkung der Morphismus $C \xrightarrow{\beta} RX \times RX \xrightarrow{\operatorname{pr}_1} RX$ in folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} QA \arrow[r] \arrow[d, hook, "Qf"] & A \arrow[r, "j^*"] & \Omega X \arrow[r] & RX^I \arrow[d, two heads] & \\ QB \arrow[urrr, dashed, "\exists\, \alpha"] \arrow[d] & & & RX \times RX \arrow[r, two heads, "\operatorname{pr}_1"] \arrow[d, two heads, "\operatorname{pr}_0"] & RX \\ \operatorname{cofib}^{\mathbb{L}}(f) \arrow[urrr, dashed, "\exists!\, \beta"] \arrow[rr, "k"] & & X \arrow[r] & RX & \end{tikzcd}$$

Dabei ist RX^I ein sehr gutes Pfadobjekt. Dabei wird α als Lift konstruiert (beachte, dass die Komposition der vertikalen rechten Morphismen azyklisch ist nach der 2-aus-3-Eigenschaft und dass pr_0 und pr_1 Faserungen sind als Pullback von $RX \twoheadrightarrow *$). Wer dies hier liest, und mir verraten kann, welche universelle Eigenschaft β induziert, bekommt ein Ü-Ei geschenkt!

Dual. Sei $X = \operatorname{fib}^{\mathbb{R}}(h) \to Y \xrightarrow{h} Z$ eine Fasersequenz. Dann operiert die Gruppe ΩZ auf X. In einem Setting von topologischen Räumen ist die Wirkung folgendermaßen gegeben: Ein Element von ΩZ wird repräsentiert durch einen geschlossenen Weg $\gamma : I \to Z$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$. Sei x ein Element der Homotopie-Faser von h. Dann ist $[\gamma].x = \tilde{\gamma}(1)$, wobei $\tilde{\gamma} : I \to Y$ ein Lift von γ ist.

Satz. Das sind in der Tat (Ko-) Operationen.

Def. Sei $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ eine Kofasersequenz. Dann heißt

$$\partial : C \xrightarrow{\text{Koop}} C \vee \Sigma A \xrightarrow{(C \to *) \vee \mathrm{id}} * \vee \Sigma A = \Sigma A$$

der **Korandoperator** $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\partial} \Sigma A$

Dual. Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ eine Fasersequenz. Dann heißt

$$\partial : \Omega Z = * \times \Omega Z \xrightarrow{(* \to X) \times \Omega Z} \xrightarrow{\text{Op}} X$$

der **Randoperator** $\Omega Z \xrightarrow{\partial} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

Bsp. $* \to X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \xrightarrow{\partial} * = \Sigma *$ ist eine Kofasersequenz und als $* = \Omega * \xrightarrow{\partial} X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \to *$ gleichzeitig eine Fasersequenz.

Prop. Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ eine Kofasersequenz (in $\operatorname{Ho}(\mathcal{C}_*)$).
Dann ist $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X$ wieder eine Kofasersequenz, wobei die Kooperation von ΣY auf ΣX wie folgt ist:

$$\Sigma X \xrightarrow{\text{Komult.}} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{\mathrm{id} \vee \Sigma f} \Sigma X \vee \Sigma Y \xrightarrow{\mathrm{id} \vee \text{Inv.}} \Sigma X \vee \Sigma Y.$$

Dual. Ist $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Y$ eine Fasersequenz, so ist $\Omega Z \xrightarrow{\partial} X \xrightarrow{f} Y$ mit geeigneter Operation von ΩA auf ΩZ eine Fasersequenz.

Kor. Ausgehend von $X \xrightarrow{f} Y$ gibt eine lange Sequenz

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z = \operatorname{cofib}^{\mathbb{L}}(f) \xrightarrow{\partial} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma g} \Sigma Z \xrightarrow{-\Sigma \partial} \ldots$$

in der jedes Objekt die Homotopiekofaser der vorh. Mor. ist.

Dual. $\ldots \to \Omega X \to \Omega Y \to \Omega Z \to X \to Y \to Z$

Satz. • Ist $X \to Y \to Z$ eine Kofasersequenz, so ist

$$\begin{aligned} \dots \to [\Sigma Z, W] \to [\Sigma Y, W] \to [\Sigma X, W] \to \\ \to [Z, W] \to [Y, W] \to [X, W] \end{aligned}$$

für alle $W \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*))$ eine exakte Sequenz von Gruppen bzw. punktierten Mengen.

• Ist $X \to Y \to Z$ eine Fasersequenz, so ist

$$\begin{aligned} \dots \to [W, \Omega X] \to [W, \Omega Y] \to [W, \Omega Z] \to \\ \to [W, X] \to [W, Y] \to [W, Z] \end{aligned}$$

für alle W eine exakte Sequenz.

Bem. Für $\Omega = \mathbb{S}^0$ erhält man eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen:

$$\begin{aligned} \dots \to \pi_2(Z) \to \pi_1(X) \to \pi_1(Y) \to \pi_1(Z) \to \\ \to \pi_1(X) \to \pi_1(Y) \to \pi_1(Z) \end{aligned}$$

Lem. Es sei der durchgezogene Teil des folgenden Diagramms gegeben. Dann existiert der gestrichelte Teil.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathrm{cofib}^{\mathbb{L}}(f) \arrow[d, dashed, "s"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, dashed] & \mathrm{cofib}^{\mathbb{L}}(f) \end{tikzcd}$$

Außerdem ist s verträglich mit den Kooperationen.

Lem. Sei der durchgezogene Teil des folgenden Diagramms gegeben:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "v"] & & Z \arrow[rr] \arrow[dr] & & W \\ & Y \arrow[ur, "u"] \arrow[dr] & & V \arrow[ur, dashed, "s"] & \\ & & U \arrow[ur, dashed, "r"] & & \end{tikzcd}$$

Dabei sind $X \to Y \to U$, $Y \to Z \to W$ und $X \to Z \to V$ Kofasersequenzen. Dann existieren r, s wie eingezeichnet und r ist ΣU-äquivariant, s ist Σv-äquivariant. Des Weiteren ist $U \to V \to W$ eine Kofasersequenz mit Kowirkung $W \xrightarrow{\text{Koop}} W \vee \Sigma Y \xrightarrow{\mathrm{id} \vee \Sigma d}$.

Kor. $\Sigma \operatorname{cofib}^{\mathbb{L}}(uv) = \operatorname{cofib}^{\mathbb{L}}(\operatorname{cofib}^{\mathbb{L}} u \to \Sigma \operatorname{cofib}^{\mathbb{L}} v)$

Lem. Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ eine Kofasersequenz in $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*)$, $X' \xrightarrow{i} Y' \xrightarrow{p} Z'$ eine Fasersequenz. Dann gilt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dashed, "\exists"] & \Sigma X \arrow[d, "-\alpha^*"] \\ \Omega Z' \arrow[r, "\partial"] & X' \arrow[r, "i"] & Y' \arrow[r, "p"] & Z' \end{tikzcd}$$

Lem. Ist $F : \mathcal{C}_* \rightleftarrows \mathcal{D}_* : U$ eine Quillenadjunktion, so erhält $\mathbb{L}F$ Kofasersequenzen und $\mathbb{R}U$ Fasersequenzen.

Satz. Der Funktor $- \wedge^{\mathbb{L}} - : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*) \times \mathcal{S}_* \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*)$ ist mit Kofasersequenzen verträglich, d. h.

• Ist $A \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*))$, $X \to Y \to Z$ eine Kofaserseq. in $\mathcal{S}_*$, so ist $A \wedge^{\mathbb{L}} X \to A \wedge^{\mathbb{L}} Y \to A \wedge^{\mathbb{L}} Z$ eine Kofaserseq. mit Kowirkung

$$\begin{aligned} A \wedge^{\mathbb{L}} Z \to A \wedge^{\mathbb{L}} (Z \vee \Sigma X) &\cong (A \wedge^{\mathbb{L}} Z) \vee (A \wedge^{\mathbb{L}} \Sigma X) \\ &\cong (A \wedge^{\mathbb{L}} Z) \vee \Sigma(A \wedge^{\mathbb{L}} X). \end{aligned}$$

• Ist $K \in \mathcal{S}_*$, $X \to Y \to Z$ eine Kofasersequenz in $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*)$, so ist $X \wedge^{\mathbb{L}} K \to Y \wedge^{\mathbb{L}} K \to Z \wedge^{\mathbb{L}} K$ eine Kofasersequenz mit Kowirkung

$$\begin{aligned} Z \wedge^{\mathbb{L}} K \to (Z \vee \Sigma X) \wedge^{\mathbb{L}} K &\cong (Z \wedge^{\mathbb{L}} K) \vee (\Sigma X \wedge^{\mathbb{L}} K) \\ &\cong (Z \wedge^{\mathbb{L}} K) \vee \Sigma(X \wedge^{\mathbb{L}} K). \end{aligned}$$

Achtung. Man beachte das Vorzeichen:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^n \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^m \arrow[r, "\text{kan}", "\sim"'] \arrow[d, "\gamma", "\sim"'] & \mathbb{S}^{m+n} \arrow[d, "(-1)^{mn}\,\mathrm{id}"] \\ \mathbb{S}^m \wedge^{\mathbb{L}} \mathbb{S}^n \arrow[r, "\text{kan}", "\sim"'] & \mathbb{S}^{n+m} \end{tikzcd}$$

Stabile Modellkategorien

Def. Eine punktierte Modellkategorie $\mathcal{C}_*$ heißt stabil, falls $\Sigma : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*)$ eine Kategorienäquivalenz ist.

Bem. Es folgt, dass dann $\Omega = \Sigma^{-1}$.

Prop. Damit wird $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*)$ zu einer additiven Kategorie.

Beweis. Jedes Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*))$ ist natürlicherweise eine abelsche Gruppe: $X \cong \Omega^2 \Sigma^2 X$. □

Bem. Die Kowirkung von ΣX auf Z zu einer Kofasersequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in einer stabilen Modellkategorie ist schon durch $\partial : Z \to \Sigma X$ gegeben:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\text{Kowirk}"] \arrow[rr, bend right, "{(\mathrm{id}, \partial)}"'] & Z \vee \Sigma X \arrow[r, equal] & Z \times \Sigma X \end{tikzcd}$$

Produkt und Koprodukt fallen zusammen, da $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*)$ additiv ist.

Lem. Sei $\mathcal{C}_*$ stabil. Dann gilt

$$\begin{aligned} & X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X && \text{ist Kofaserseq.} \\ \iff \quad & \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{-\Sigma g} \Sigma Z \xrightarrow{-\Sigma \partial} \Sigma^2 X && \text{ist Kofaserseq.} \end{aligned}$$

Prop. Es gilt

$$\begin{aligned} & X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X && \text{ist Kofaserseq.} \\ \iff \quad & \Omega Z \xrightarrow{-\partial^*} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \Sigma \Omega Z = Z && \text{ist Faserseq.} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten fallen Faser- und Kofasersequenzen zusammen und $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}_*)$ ist eine triangulierte Kategorie.

Kor. Ist $X \to Y \to Z \xrightarrow{\partial} \Sigma X$ ein exaktes Dreieck, so ist

$$\begin{aligned} \dots \to [W, \Sigma^{-1} Z] \to [W, X] \to [W, Y] \to [W, Z] \to \\ \to [W, \Sigma X] \to [W, \Sigma Y] \to [W, \Sigma Z] \to \dots \end{aligned}$$

eine lange exakte Sequenz.

Def (**Bousfield-Lokalisierung**)**.** Sei $S \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ eine Menge von Mor. einer Modellkat. $\mathcal{M}$. Dann heißt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ ***S*-lokal**, falls

$$\forall\, (A \xrightarrow{f} B) \in S \, : \, \mathrm{Map}(B, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Map}(Y, X) \quad \text{ist schwache Äq.}$$

Weiter heißt $f : A \to B$ eine ***S*-lokale Äquivalenz**, falls für alle S-lokalen Objekte X der Morphismus f^* wie eben eine schwache Äquivalenz ist. (Offensichtlich gilt dann $S \subseteq \{\, S\text{-lokale Äq.} \,\}$.)
Ist dann $\mathcal{M}$ links-eigentlich und kombinatorisch, so existiert eine Modellstruktur $L_S \mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}$, deren Kofaserungen dieselben sind wie von $\mathcal{M}$ und deren schwachen Äq. die S-lokalen Äq. sind.

Def. Sei $\mathcal{C}_*$ eine (punktierte), simpliziale, links-eigentliche, kombinatorische Modellkategorie. Die **Kategorie der Spektren** $\mathcal{C}_*^\infty$ hat als Objekte Familien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Objekten aus $\mathcal{C}_*$ zusammen mit Morphismen $(\alpha_i : \Sigma X_i \to X_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$. Wir schreiben

$$X^\infty : X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow X_2 \dashrightarrow \dots$$

Ein Morphismus besteht aus Morphismen $(X_i \to X_i')_{i/in\mathbb{N}}$, welche mit den α_i und α_i' verträglich sind.

Bsp. Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_*)$. Dann heißt

$\Sigma^\infty X : X \dashrightarrow \Sigma X \dashrightarrow \Sigma^2 X \dashrightarrow \dots$ **Einhängungsspektrum** von X.

Das **Sphärenspektrum** ist $\mathbb{S}^\infty := \Sigma^\infty \mathbb{S}^0$.

Def. Die **projektive Modellstruktur** auf $\mathcal{C}_*^\infty$ ist diejenige, für die gilt: Ein Mor. $f : X^\infty \to Y^\infty$ ist eine

- schwache Äq. $\iff$ alle $f_i : X_i^\infty \to Y_i^\infty$ sind schw. Äq.
- Faserung $\iff$ alle $f_i : X_i^\infty \to Y_i^\infty$ sind Faserungen.

Def. Ein Spektrum X^∞ heißt Ω-Spektrum, falls alle $\alpha_i^* : X_i \to \Omega X_{i+1}$ schwache Äquivalenzen sind.

Lem. Es gibt eine Klasse $S \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C}_*^\infty)$, sodass gilt:

$$X^\infty \text{ ist } S\text{-lokal} \iff X^\infty \text{ ist ein } \Omega\text{-Spektrum.}$$

Bem. Damit existiert die Bousfield-Lokalisierung der projektiven Modellstruktur auf $\mathcal{C}_*^\infty$ nach den Ω-Spektren. Diese Modellstruktur ist die übliche Modellstruktur auf $\mathcal{C}_*^\infty$.

Satz. Mit dieser Modellstr. wird $\mathcal{C}_*^\infty$ zu einer stabilen Modellkat.

Anhang: Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel $(S, \leqslant)$ bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung $\leqslant$ auf S.

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\ldots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \ldots$

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz)**.** Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leqslant_S)] \leqslant [(T, \leqslant_T)] \;:\Longleftrightarrow\; \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leqslant_S) \to (T, \leqslant_T).$$

Notation. • $0 := [\varnothing]$, • $n := [\{1, \ldots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega := [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots$$

Prinzip (**Transfinite Induktion**)**.**
Sei $P : \mathcal{O}_n \to \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert:
Für $\alpha = [(S, \leqslant_S)]$ und $\beta = [(T, \leqslant_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

- $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leqslant_{S \amalg T})]$, wobei gilt:
$$\leqslant_{S\amalg T} |_{S \times S} := \leqslant_S, \quad \leqslant_{S \amalg T} |_{T \times T} := \leqslant_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$
- $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leqslant_{S \rtimes T})]$ mit der lexikogr. Ordnung
$$(s_1, t_1) \leqslant_{S \rtimes T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \;\vee\; (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leqslant_S s_2)$$
- $\alpha^{\beta} := [(\{\text{Abb. } f : S \to T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leqslant)]$ mit
$$f < g \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall\, t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 := [(\varnothing, \leqslant)] \in \mathcal{O}_n$.
b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.
c) Die Limeszahl $\lim A := \sup A$ einer Teil*menge* $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

a)	b)	c)
$\alpha + 0 := \alpha$	$\alpha + (\beta+1) := (\alpha+\beta)+1$	$\alpha + \lim A := \lim \{\alpha+\gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha \cdot 0 := 0$	$\alpha \cdot (\beta+1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$	$\alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha^0 := 1$	$\alpha^{\beta+1} := \alpha^{\beta} \cdot \alpha$	$\alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^{\gamma} \mid \gamma \in A\}$

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe ist mit
• $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, • $a \cdot 0 = 0$.

Lem (Rechenregeln in $\mathcal{O}_n$)**.** • $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
• $\alpha^0 = 1$ • $0^{\alpha} = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^{\alpha} = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$
• $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$ • $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

- $\mathcal{O}_n$ ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht*!
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:
$$\forall \beta < \gamma : \quad \alpha+\beta < \alpha+\gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \;(\alpha > 0), \quad \alpha^{\beta} < \alpha^{\gamma} \;(\alpha > 1).$$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \ldots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.