

# Zusammenfassung Topologie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Def.** Ein **metrischer Raum**  $(X, d)$  besteht aus einer Menge  $X$  und einer Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , sodass f.a.  $x, y, z \in X$  gilt:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  ( $\Delta$ -Ungleichung)

**Def.** Für einen metrischen Raum  $(X, d)$  und eine Teilmenge  $A \subset X$  ist  $(A, d|_A)$  ein metrischer Raum und  $d|_A$  heißt **induzierte Metrik**.

**Def.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig**, falls für alle  $x \in X$  gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

**Def.** Die **offene Kugel** von Radius  $\epsilon$  um  $x \in X$  ist

$$B_\epsilon(x) := \{p \in X \mid d(p, x) < \epsilon\}.$$

**Def.** Eine Teilmenge  $U \subset X$  eines metrischen Raumes heißt **offen**, falls für alle  $u \in U$  ein  $\epsilon > 0$  existiert mit  $B_\epsilon(u) \subset U$ .

**Proposition.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist genau dann offen, wenn für alle offenen Teilmengen  $U \subset Y$  das Urbild  $f^{-1}(U) \subset X$  offen ist.

**Def.** Ein **topologischer Raum**  $(X, \mathcal{T})$  besteht aus einer Menge  $X$  und einer Menge  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  mit den Eigenschaften

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\forall U, V \in \mathcal{T} : U \cup V \in \mathcal{T}$
- $\forall S \subset \mathcal{T} : \bigcap_{U \in S} U \in \mathcal{T}$

Die Elemente von  $\mathcal{T}$  werden **offene Teilmengen** von  $X$  genannt. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A$  offen ist.

**Notation.** Seien im Folgenden  $X$  und  $Y$  topologische Räume.

**Bsp.** Die **diskrete Topologie** auf einer Menge  $X$  ist  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ .

**Bsp.** Die **Klumpentopologie** auf einer Menge  $X$  ist  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ .

**Def.** Die Menge der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes heißt von der Metrik **induzierte Topologie**.

**Def.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann heißt

$$\mathcal{T}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

**Unterraumtopologie** oder von  $\mathcal{T}$  **induzierte Topologie**.

**Def.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik auf  $X$  existiert, sodass die von der Metrik induzierte Topologie mit  $\mathcal{T}$  übereinstimmt.

**Def.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **Hausdorffsch**, falls gilt:

$$\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset.$$

**Proposition.** Metrisierbare topologische Räume sind Hausdorffsch.

**Def.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  heißt **stetig**, falls gilt

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

**Notation.**  $\mathcal{C}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}$

*Bemerkung.* Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $A \subset X$ , so ist auch  $f|_A : A \rightarrow Y$  stetig.

**Def.** Falls  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  stetig sind, so heißt  $f$  ein **Homöomorphismus**.

**Def.** Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  heißen **homöomorph** (notiert  $X \approx Y$ ), wenn ein Homöomorphismus zwischen  $X$  und  $Y$  existiert.

**Satz.** Für  $n \neq m$  sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  nicht homöomorph.

**Def.** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  Topologien auf  $X$ . Dann sagen wir

$$\mathcal{T} \text{ ist } \mathbf{größer} \text{ als } \mathcal{T}' : \iff \mathcal{T}' \text{ ist } \mathbf{feiner} \text{ als } \mathcal{T} : \iff \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'.$$

**Def.** Eine Menge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  offener Teilmengen eines topologischen Raumes heißt

- **Basis** der Topologie, falls jede offene Menge  $U \in \mathcal{T}$  Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist.
- **Subbasis** der Topologie, falls jede offene Menge  $U \in \mathcal{T}$  Vereinigung von Mengen ist, von denen jede Schnitt endlich vieler Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist.

**Bspe.** • Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist  $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon > 0\}$  eine Basis der induz. Topologie auf  $X$ .  
•  $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, \epsilon \in \mathbb{Q}_+\}$  ist eine abz. Basis von  $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ .

**Proposition.** Jede Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  ist Subbasis von genau einer Topologie  $\mathcal{T}$  von  $X$ .

**Def.** Die Topologie heißt die von  $\mathcal{B}$  **erzeugte Topologie**.

**Def.** Sind  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume, so ist auch  $(X \times Y, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$  ein topologischer Raum mit der **Produkttopologie**  $(\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$ , die von

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times V \mid V \in \mathcal{T}_Y\} \text{ erzeugt wird.}$$

**Proposition.** • Die Projektionen  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  sind stetig bzgl. der Produkttopologie.

- Ist  $\mathcal{T}$  eine echt gröbere Topologie auf  $X \times Y$  als die Produkttopologie, so sind die Projektionen  $\pi_X$  und  $\pi_Y$  nicht beide stetig.

**Def.** Seien  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume. Dann erzeugt  $\mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y$  die **Summentopologie** auf  $X \cup Y$ .

*Bemerkung.* Sie ist die feinste Topologie auf  $X \cup Y$ , sodass die beiden Inklusionen  $i_X : X \hookrightarrow X \cup Y$  und  $i_Y : Y \hookrightarrow X \cup Y$  stetig sind.

**Proposition.** Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume.

- Falls  $X \cap Y = \emptyset$ , so ist eine Abbildung  $f : X \cup Y \rightarrow Z$  genau dann stetig, falls die beiden Kompositionen  $f \circ i_X : X \rightarrow Z$  und  $f \circ i_Y : Y \rightarrow Z$  stetig sind.
- Eine Abb.  $g : Z \rightarrow X \cup Y$  ist genau dann stetig, wenn die beiden Kompositionen  $\pi_X \circ g : Z \rightarrow X$  und  $\pi_Y \circ g : Z \rightarrow Y$  stetig sind.

**Def.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann ist das **Innere** von  $A$  (notiert  $\text{int}(A)$ ) die Vereinigung aller in  $A$  enthaltenen offenen Mengen.

*Bemerkung.* Als Vereinigung offener Mengen ist das Innere offen.

**Def.** Der **Abschluss**  $\bar{A}$  einer Menge  $A \subset X$  ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen von  $X$ , die  $A$  enthalten.

*Bemerkung.* Es gilt  $\bar{A} = X \setminus (\text{int}(X \setminus A))$ .

**Def.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x \in X$  und  $V \subset X$ . Wir nennen  $V$  eine **Umgebung** von  $x$ , falls es eine offene Teilmenge  $U \subset X$  gibt mit  $x \in U$  und  $U \subset V$ .

**Proposition.** Ein Punkt  $x \in X$  liegt genau dann in  $\bar{A}$ , falls jede Umgebung von  $x$  einen Punkt aus  $A$  enthält.

**Def.** Der **Rand** einer Menge  $A \subset X$  ist  $\partial A := \bar{A} \setminus \text{int}(A)$ .

**Proposition.** Ein Punkt  $x \in X$  liegt genau dann in  $\partial X$ , wenn jede Umgebung von  $x$  sowohl einen Punkt aus  $A$  wie einen Punkt aus  $X \setminus A$  enthält.

**Def.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegweise zusammenhängend**, falls es für je zwei Punkte  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$  gibt.

**Bspe.** •  $\mathbb{R}^n$  ist wegzusammenhängend

- $(\{p, q\}, \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\})$  ist wegzusammenhängend!
- $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subset \mathbb{R}$  ist nicht wegzusammenhängend.

**Def.** Die Äquivalenzklassen von

$$x \sim y : \iff x, y \text{ lassen sich durch einen Weg verbinden.}$$

heißen **Wegzusammenhangskomponenten**.

**Proposition.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $X$  wegzusammenhängend. Dann ist auch  $f(X)$  bzgl. der Unterraumtopologie wegzusammenhängend.

**Def.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **zusammenhängend**, falls  $X$  nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

**Bspe.**  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  und  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind nicht zusammenhängend.

**Proposition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Es sind äquivalent:

- $X$  ist zusammenhängend.
- Für jede offene und abgeschlossene Menge  $A \subset X$  gilt:  $A \in \{X, \emptyset\}$ .
- Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  in den diskreten Raum mit zwei Elementen ist konstant.

**Proposition.** • Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $X$  zusammenhängend, dann ist auch  $f(X)$  zusammenhängend.

- Sind  $A, B$  zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes  $X$  und gilt  $A \cap B \neq \emptyset$ , dann ist auch  $A \cup B$  zusammenhängend.

**Korollar.** Folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf  $X$ :

$$x \sim y \iff x \text{ und } y \text{ liegen beide in einem zusammenhängenden Unterraum von } X.$$

**Def.** Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen **Komponenten**.

**Bsp.** Die Komponenten von  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  sind genau die Ein-Punkt-Mengen. Trotzdem ist  $\mathbb{Q}$  nicht diskret!

**Proposition.** Die Menge  $[0, 1]$  ist zusammenhängend.

**Korollar.** Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.

**Proposition (ZWS).** Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Gilt  $f(0) < 0$  und  $f(1) > 0$ , so existiert ein  $t \in (0, 1)$  mit  $f(t) = 0$ .

**Def.** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ . Die Folge  $(x_n)$  **konvergiert gegen**  $x \in X$ , falls für jede Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit  $\forall n \geq N : x_n \in U$ .

**Notation.**  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

**Achtung.** Das „ $\lim$ “ ist nicht wörtlich zu verstehen!

**Def.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abb. zw. topol. Räumen  $X, Y$ . Dann heißt  $f$

- **stetig in**  $x \in X$ , falls für jede Umgebung  $V \subset Y$  von  $f(x)$  das Urbild  $f^{-1}(V) \subset X$  eine Umgebung von  $x$  ist.
- **folgenstetig in**  $x \in X$ , falls für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  die Bildfolge  $(f(x_n))$  in  $Y$  gegen  $f(x)$  konvergiert.

**Proposition.** Ist  $f$  stetig in  $x$ , so ist  $f$  auch folgenstetig in  $x$ .

**Def.** Eine **Umgebungsbasis** von  $x \in X$  ist eine Menge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  bestehend aus Umgebungen von  $x$ , sodass jede Umgebung von  $x$  eine der Umgebungen in  $\mathcal{B}$  enthält.

**Def.** Der Raum  $X$  erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, falls jeder Punkt  $x \in X$  eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

*Bemerkung.* Jeder metrische Raum  $X$  erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, da für jeden Punkt  $x \in X$  die Menge  $\mathcal{B}_x := \{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$  eine abzählbare Umgebungsbasis ist.

**Proposition.** Sei  $x \in X$  ein Punkt mit abzählbarer Umgebungsbasis. Dann ist jede in  $x$  folgenstetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  auch stetig in  $x$ .

**Def.** Eine **gerichtete Menge** ist eine Menge  $D$  mit einer partiellen Ordnung  $(\leq) \subset D \times D$ , sodass es für  $\alpha, \beta \in D$  immer ein  $\gamma \in D$  mit  $\gamma \geq \alpha$  und  $\gamma \geq \beta$  gibt.

**Def.** Ein **Netz** in  $X$  ist eine Abbildung  $\phi : D \rightarrow X$ , wobei  $D$  eine gerichtete Menge ist.

**Def.** Sei  $x \in X$  und  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  ein Netz in  $X$ . Das Netz  $(x_\alpha)$  **konvergiert** gegen  $x$ , falls es für jede Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  ein  $\beta \in D$  gibt mit  $x_\alpha \in U$  für alle  $\alpha \geq \beta$ .

**Notation.**  $\lim_{\alpha \in D} x_\alpha = x$

**Def.** Eine Abb.  $f : X \rightarrow Y$  heißt **netzstetig** in  $x \in X$ , falls für jedes Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  in  $X$  mit  $\lim_{\alpha \in D} x_\alpha = x$  das Bildnetz  $(f(x_\alpha))_{\alpha \in D}$  gegen  $f(x)$  konvergiert.

**Proposition.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig in  $x \in X$ , wenn sie netzstetig in  $x$  ist.

**Proposition.** Ist  $A \subset X$  eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so besteht  $\overline{A}$  genau aus den Limiten von Netzen in  $A$ , die in  $X$  konvergieren.

**Def.** Ein **Häufungspunkt** eines Netzes  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  in  $X$  ist ein Punkt  $x \in X$ , sodass für jede Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  das Netz **häufig** in  $U$  ist, d. h. für alle  $\alpha \in D$  existiert ein  $\beta \geq \alpha$  mit  $x_\beta \in U$ .

**Def.** Sind  $D$  und  $E$  gerichtete Mengen, so nennen wir eine Abbildung  $h : E \rightarrow D$  **final**, falls für alle  $\delta \in D$  ein  $\eta \in E$  existiert mit  $h(\gamma) \geq \delta$  für alle  $\gamma \geq \eta$ .

**Def.** Ein **Unternetz** eines Netzes  $\phi : D \rightarrow X$  ist eine Komposition  $\phi \circ h : E \rightarrow X$  wobei  $h : E \rightarrow D$  eine finale Funktion ist. Wir schreiben auch  $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in E}$

**Proposition.** Sei  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  ein Netz in  $X$ . Ein Punkt  $x \in X$  ist genau dann Häufungspunkt von  $(x_\alpha)$ , falls ein Unternetz von  $(x_\alpha)$  gegen  $x$  konvergiert.

**Def.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt **Cauchy-Folge**, falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $d(x_n, x_m) < \epsilon$  für alle  $n, m \geq N$ .

**Def.** Der metrische Raum  $(X, d)$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in  $X$  konvergiert.

**Achtung.** Vollständigkeit ist keine Homöomorphieinvariante!

**Def.** Sei  $X$  eine Menge. Dann ist die Menge

$$\mathcal{B}(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

der **beschränkten Fktn.**  $X \rightarrow \mathbb{R}$  ein metrischer Raum mit

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

**Proposition.** Dieser Raum  $(\mathcal{B}(X), d)$  ist vollständig.

**Def.** Sie  $(X, d)$  und  $(X', d')$  metrische Räume, so heißt  $f : X \rightarrow X'$

- eine **isometrische Einbettung**, falls für alle  $x, y \in X$  gilt:

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

- eine **Isometrie**, falls  $f$  zusätzlich bijektiv ist. In diesem Fall ist auch  $f^{-1}$  eine Isometrie und  $f$  ein Homöomorphismus.

**Proposition.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann gibt es eine isometrische Einbettung von  $X$  in einen vollständigen metrischen Raum.

**Def.** Eine **Vervollständigung** eines metrischen Raumes  $X$  ist ein vollständiger metrischer Raum  $Y$  zusammen mit einer isometrischen Einbettung  $f : X \rightarrow Y$ , sodass  $f(X)$  **dicht** in  $Y$  liegt, d. h.  $\overline{f(X)} = Y$ .

**Satz.** Ist  $X$  ein metrischer Raum, so existiert eine Vervollständigung  $X \hookrightarrow Y$ .

**Proposition.** Es sei  $X$  ein metrischer Raum und es seien

$$f_1 : X \rightarrow Y_1, \quad f_2 : X \rightarrow Y_2$$

Vervollständigungen von  $X$ . Dann existiert genau eine Isometrie  $\phi_{21} : Y_1 \rightarrow Y_2$  mit  $\phi_{21}|_{f_1(X)} = f_2 \circ f_1^{-1}$ .

**Bsp.** Die kanonische Inklusion  $C_c^\infty(U) \hookrightarrow L^p(U)$  ist eine Vervollständigung von  $(C_c^\infty, d_p)$  mit

$$d_p(f, g) := \left( \int_U |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

**Def.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine **offene Überdeckung** von  $X$  ist eine Familie  $(U_i)_{i \in I}$  offener Teilmengen von  $X$  mit  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .

**Def.** Der Raum  $X$  heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt, also eine endliche Teilmenge  $I_0 \subset I$  mit  $\bigcup_{i \in I_0} U_i = X$ .

**Def.** Eine Familie  $\mathcal{C}$  von Teilmengen von  $X$  habe die **endliche Schnitteigenschaft**, falls der Schnitt je endlich vieler Mengen aus  $\mathcal{C}$  nichtleer ist.

**Proposition.** Ein Raum  $X$  ist genau dann kompakt, falls jede Familie  $(C_i)_{i \in I}$  von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$ , die die endliche Schnitteigenschaft besitzt, einen nichtleeren Schnitt hat.

*Bemerkung.* Kompaktheit ist eine Homöomorphieinvariante.

**Proposition.** Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist abgeschlossen.

**Proposition.** Ist  $X$  kompakt und  $f : X \rightarrow Y$  stetig, so ist auch  $f(X) \subset Y$  kompakt.

**Proposition.** Jeder abgeschlossene Teilraum eines kompakten Raumes ist kompakt.

**Proposition.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum. Dann ist  $f$  ein Homöomorphismus.

**Proposition.** Das Einheitsintervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist kompakt.

**Proposition.** Seien  $X, Y$  kompakt. Dann ist auch  $(X \times Y)$  kompakt.

**Satz (Heine-Borel).** Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Satz.** Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie kompakter Räume. Dann ist das topologische Produkt  $\prod_{i \in I} X_i$  ebenfalls kompakt.

**Def.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  eine konvergente Teilfolge besitzt.

**Proposition.** Es sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann ist  $X$  genau dann kompakt, wenn  $X$  folgenkompakt ist.

**Proposition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- $X$  ist kompakt.
- $X$  ist **netzkompakt**, d. h. jedes (nichtleere) Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  in  $X$  besitzt ein konvergentes Unternetz.

**Def.** Sei  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  ein Netz in einem topologischen Raum  $X$  und  $A \subset X$ . Dann ist  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  **schließlich** in  $A$ , falls es ein  $\beta \in D$  gibt mit  $x_\alpha \in A$  für alle  $\alpha \geq \beta$ .

**Def.** Ein Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  heißt **universell**, falls für jede Teilmenge  $A \subset X$  das Netz entweder schließlich in  $A$  oder in  $X \setminus A$  ist.

**Proposition.** Jedes nichtleere Netz in  $X$  besitzt ein universelles Unternetz.

*Bemerkung.* Der Beweis der Prop. verwendet das Lemma von Zorn.

**Satz.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- $X$  ist kompakt.
- Jedes nichtleere universelle Netz konvergiert in  $X$ .
- Jedes nichtleere Netz in  $X$  hat ein konvergentes Unternetz.

**Satz** (Tychonoff). Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie kompakter Räume. Dann ist das topologische Produkt  $\prod_{i \in I} X_i$  ebenfalls kompakt.

**Lemma.** Alle Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent, d. h. für je zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  existieren Zahlen  $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \lambda \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \Lambda \|v\|_1.$$

**Lemma** (Riesz). Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter reeller VR und  $C \subset V$  ein echter Untervektorraum, der abgeschlossen bzgl.  $\|\cdot\|$  ist. Sei  $0 < \delta < 1$ . Dann existiert ein  $v \in V \setminus C$  mit  $\|v\| = 1$  und

$$d(v, C) := \inf_{c \in C} \|v - c\| > 1 - \delta.$$

**Lemma.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter VR und  $C \subset V$  ein endlichdim. UVR. Dann ist  $C$  abgeschlossen bzgl.  $\|\cdot\|$ .

**Proposition.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Die abgeschlossene Einheitskugel  $B := \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$  ist genau dann kompakt, wenn  $\dim(V) < \infty$ .

**Def.** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter VR über  $\mathbb{R}$ . Der VR der **beschränkten Funktionale** ist der normierte VR

$$V^* := \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist linear und stetig}\}$$

versehen mit der Norm  $\|f\| := \sup_{\|v\| \leq 1} |f(v)|$ .

**Def.** Die **Schwach-\*-Topologie** auf  $V^*$  ist die grösste Topologie, sodass alle Abbildungen  $\phi_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(v)$  stetig sind.

**Satz.**  $B \subset (V^*, \|\cdot\|)$  ist kompakt, bzgl. der Schwach-\*-Topologie.

**Def.** Ein topol. Raum  $X$  heißt **normal**, falls gilt: Für alle disjunkte abgeschlossene Mengen  $A, B \subset X$  gibt es offene Teilmengen  $U_A, U_B \subset X$  mit  $A \subset U_A, B \subset U_B$  und  $U_A \cap U_B = \emptyset$ .

- Bspe.** • Metrische Räume sind normal.  
• Kompakte Hausdorffräume sind normal.

**Lemma** (Urysohn). Sei  $X$  ein normaler topologischer Raum,  $F, G \subset X$  disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Dann gibt es eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , die auf  $F$  konstant gleich 0 und auf  $G$  konstant gleich 1 ist.

**Def.** Ein topologischer Raum erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls er eine abzählbare Basis besitzt.

**Satz** (Metrisierbarkeitssatz von Urysohn). Ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist genau dann metrisierbar, wenn er normal und Hausdorffsch ist.

**Satz** (Fortsetzungssatz von Tietze). Sei  $X$  ein normaler Raum,  $F \subset X$  abgeschlossen. Ist  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so existiert eine stetige Fortsetzung  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  auf  $X$ , d. h.  $g|_F = f$ , für die gilt:

$$\sup_{x \in F} f(x) = \sup_{x \in X} g(x) \quad \text{und} \quad \inf_{x \in F} f(x) = \inf_{x \in X} g(x).$$

**Def.** Eine **Kompaktifizierung** eines topol. Raumes  $X$  ist ein kompakter topologischer Raum  $Y$  zusammen mit einer topologischen Einbettung  $f : X \rightarrow Y$ , sodass  $f(X)$  dicht in  $Y$  liegt, d. h.  $\overline{f(X)} = Y$ .

**Def.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **lokal kompakt**, falls jeder Punkt  $x \in X$  eine kompakte Umgebung besitzt.

- Bspe.** • Jeder diskrete topologische Raum ist lokal kompakt.  
• Ein normierter Vektorraum ist genau dann lokal kompakt, wenn er endlichdimensional ist.

**Def.** Sei  $X$  ein Hausdorffraum. Setze  $X^+ := X \sqcup \{\infty\}$ . Eine Menge  $U \subset X^+$  heißt offen, wenn

- $U \subset X$  und  $U$  ist offen in  $X$  oder
- $\infty \in U$  und  $X \setminus U \subset X$  kompakt ist.

Dies definiert eine Topologie auf  $X^+$ , der sogenannten **Einpunktkompaktifizierung** von  $X$ .

*Bemerkung.* • Wenn  $X$  lokal kompakt, dann ist  $X^+$  Hausdorffsch.

- Falls  $X$  selbst kompakt ist, so trägt  $X^+$  die Summentopologie von  $X$  und  $\{\infty\}$ .

**Proposition.** Sei  $X$  ein lokal kompakter Hausdorffraum,  $Y$  ein kompakter Hausdorffraum,  $p \in Y$  und  $X$  homöomorph zu  $Y \setminus \{p\}$ . Dann ist  $X^+ \approx Y$ .

**Korollar.**  $S^n \approx (\mathbb{R}^n)^+$

**Notation.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig, so definieren wir

$$f^+ : X^+ \rightarrow Y^+, \quad f^+|_X := f, \quad f^+(\infty) := \infty.$$

*Bemerkung.* Die Abbildung  $f^+$  ist nicht i. A. stetig, z. B. nicht für

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto x.$$

**Def.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **eigentlich**, falls das Urbild jeder kompakten Menge in  $Y$  unter  $f$  kompakt in  $X$  ist.

**Proposition.** Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, so ist die induz. Abb.  $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$  genau dann stetig, wenn  $f$  eigentlich ist.

**Def.** Sei  $X$  ein normaler Hausdorffraum. Dann ist

$$f : X \rightarrow \prod_{\phi \in \mathcal{C}} [0, 1], \quad x \mapsto (\phi(x))_{\phi \in \mathcal{C}} \quad \text{mit } \mathcal{C} := \mathcal{C}(X, [0, 1])$$

eine topologische Einbettung. Dann ist  $\beta X := \overline{f(X)}$  kompakt. Die Abb.  $\beta : X \rightarrow \beta X$  heißt **Stone-Čech-Kompaktifizierung** von  $X$ .

**Proposition.** Sei  $X$  ein normaler Hausdorffraum und  $K$  ein kompakter Hausdorffraum. Dann faktorisiert jede stetige Abbildung  $\phi : X \rightarrow K$  in eindeutiger Weise über die Stone-Čech-Kompaktifizierung von  $X$ , d. h. es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung  $\pi : \beta X \rightarrow K$  mit  $\pi \circ \beta = \phi$ .

**Def.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $Y$  eine Menge und  $f : X \rightarrow Y$  surjektiv. Dann ist die **Finaltopologie** auf  $Y$  bzgl.  $f$  die feinste Topologie, bezüglich der  $f$  stetig ist, also

$$U \subset Y \text{ offen} : \iff f^{-1}(U) \subset X \text{ offen.}$$

**Def.** Eine surjektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen heißt **Identifizierung**, falls die Topologie auf  $Y$  genau die Finaltopologie bzgl.  $f$  ist.

**Proposition.** • Die Verkettung von Identifizierungen ist wieder eine Identifizierung.

- Eine surjektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann eine Identifizierung, falls gilt: Für alle topologischen Räume  $Z$  und Abbildungen  $g : Y \rightarrow Z$  ist  $g$  genau dann stetig, wenn  $g \circ f : X \rightarrow Z$  stetig ist.

**Def.** Sei  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf einem topol. Raum  $X$ . Dann heißt die Menge  $X/\sim$  versehen mit der Finaltopologie bzgl. der Abbildung  $p : X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]$  (der **Quotientenraum**) **Quotientenraum**.

*Bemerkung.* Bei der Quotientenbildung bleiben erhalten: Kompaktheit, Zusammenhang, Wegzusammenhang.

**Achtung.** Der Quotientenraum von Hausdorffräumen ist nicht unbedingt Hausdorffsch!

**Notation.** Für  $\emptyset \neq A \subset X$  ist  $X/A := X/\sim$  mit

$$x \sim y : \iff (x = y) \vee (\{x, y\} \subset A)$$

**Proposition.** Ist  $X$  ein normaler Hausdorffraum und  $A \subset X$  abgeschlossen, so ist  $X/A$  ebenfalls normal und Hausdorffsch.

**Def.** Die **reellen projektiven Räume** sind definiert als

$$\mathbb{R}P^n := S^n/\sim \quad \text{mit } x \sim y : \iff x = \pm y.$$

**Proposition.**  $\mathbb{R}P^n$  ist kompakt und Hausdorffsch.



**Bemerkung.** Mit  $D^n := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$D^n / \sim = \mathbb{R}P^n \quad \text{mit } x \sim y : \iff (\{x, y\} \subset \partial D) \wedge (x = \pm y).$$

**Bsp.** Möbiusband:  $M := [0, 1] \times [-1, 1] / (0, t) \sim (1, -t)$

**Def.** Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $A \subset X$  und  $f : A \rightarrow Y$  stetig. Sei  $\sim$  die kleinste Äquivalenzrelation auf  $X \sqcup Y$ , für die  $a \sim f(a)$  für alle  $a \in A$  gilt. Dann heißt

$$Y \cup_f X := (X \sqcup Y) / \sim \quad \text{Anheftung von } X \text{ entlang } f.$$

**Proposition.** Ist  $Y \cup_f X$  ein Anhefungsraum und  $A \subset X$  abgeschlossen, so ist  $Y \hookrightarrow Y \cup_f X, y \mapsto [y]$  ein Homöomorphismus auf einen abgeschlossenen Teilraum und  $X \setminus A \hookrightarrow Y \cup_f X, x \mapsto [x]$  ist ein Homöomorphismus auf einen offenen Teilraum.

**Def.** Für  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $f_0 : X \times \{0\} \rightarrow Y, (x, -) \mapsto f(x)$  heißt

$$Z_f = Y \cup_{f_0} (X \times [0, 1]) \quad \text{Abbildungszylinder } Z_f \text{ von } f.$$

Man identifiziert  $X$  mit  $X \times \{1\} \subset Z_f$ .

**Def.**  $C_f := Z_f / (X \times \{1\})$  heißt **Abbildungskegel**.

**Def.** Ein **abstrakter Simplicialkomplex** ist ein Paar  $(X, \Sigma)$  bestehend aus einer total geordneten Menge  $X$  und einer Teilmengen  $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$  (genannt Menge der **abstrakten Simplizes**), sodass gilt:

- Jedes Simplex  $\sigma \in \Sigma$  ist nichtleer und endlich.
- Für jede nichtleere Teilmenge  $\tilde{\sigma} \subset \sigma \in \Sigma$  gilt  $\tilde{\sigma} \in \Sigma$ .
- Jedes Element von  $X$  ist in mindestens einem Simplex enthalten, also  $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = X$ .

**Def.** • Für  $\sigma \in \Sigma$  heißt  $\dim(\sigma) := |\sigma| - 1$  die **Dimension** von  $\sigma$ .

- Teilmengen von  $\sigma$  heißen **Seiten** von  $\sigma$ .
- Nulldimensionale Simplizes heißen **Ecken**, eindimensionale Simplizes **Kanten**.
- Der Simplicialkomplex  $(X, \Sigma)$  heißt **endlich**, wenn  $X$  endlich ist.

**Notation.**  $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$  für  $n \in \mathbb{N}$

**Def.**  $\Delta^n_{\text{abstr}} := ([n], \mathcal{P}([n]))$  heißt **volles  $n$ -dim. Simplex**

**Def.** Für  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  heißt

$$\langle v_0, \dots, v_n \rangle := \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \mid 0 \leq t_0, \dots, t_n \text{ und } t_0 + \dots + t_n = 1\}$$

von den Vektoren  $v_0, \dots, v_k$  **aufgespanntes  $k$ -Simplex**. Falls  $v_0, \dots, v_k$  nicht affin unabhängig, so ist der  $k$ -Simplex degeneriert. Ist dies nicht der Fall, so ist jeder Punkt eindeutig durch die **baryzentrischen Koordinaten**  $t_0, \dots, t_n$  identifiziert.

**Def.**  $\Delta^n := \langle e_0, \dots, e_n \rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$  heißt **Standard- $n$ -Simplex**, wobei  $e_0, \dots, e_n$  die Einheitsvektoren in  $\mathbb{R}^{n+1}$  bezeichnen.

**Bemerkung.** Für  $k \leq n$  induziert jede ordnungserhaltende Abbildung  $\phi : [k] \rightarrow [n]$  eine Einbettung durch

$$i_\phi : \Delta^k \rightarrow \Delta^n, \quad \sum_{i=0}^k t_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^k t_{\phi(i)} e_{\phi(i)}.$$

**Def.** Für einen abstrakten Simplicialkomplex  $(X, \Sigma)$  heißt

$$|\Sigma| := T / \sim := \left( \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \Delta_\sigma \right) / \sim$$

mit  $\Delta_\sigma := \Delta^{\dim \sigma} = \Delta^{|\sigma|-1}$  und der Äquivalenzrelation  $\sim$ , die für alle Simplizes  $\tau \subseteq \sigma \in \Sigma$  und der durch die Totalordnung auf  $X$  induzierten ordnungserhaltenden Abbildung  $\phi : [\dim \tau] \rightarrow [\dim \sigma]$  alle Punkte  $x \in \Delta_\tau$  mit  $i_\phi(x) \in \Delta_\sigma$  identifiziert, **geometrische Realisierung** von  $\Sigma$ .

**Bemerkung.** Offensichtlich ist  $|\Sigma|$  immer normal und kompakt genau dann, wenn der abstrakte Komplex  $\Sigma$  endlich ist.

**Proposition.**  $|\Delta^n_{\text{abstr}}| = \Delta^n$ .

**Def.**  $\partial \Delta^n := \{ \sum_{i=0}^n t_i e_i \mid 0 \leq t_i, \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_j = 0 \text{ für ein } j \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

**Proposition.**  $|([n], \mathcal{P}([n]) \setminus \{[n]\})| \approx \partial \Delta^n$ .

**Def.** Ein topologischer Raum heißt **triangulierbar**, wenn er homöomorph zu einem geometrischen Simplicialkomplex ist. Den Homöomorphismus bezeichnet man als **Triangulierung**.

**Bsp.**  $S^n \approx \partial \Delta^{n+1}$

**Def.** Eine Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  heißt **konvex**, falls mit je zwei Punkten  $x, y \in K$  auch die Verbindungsstrecke  $\{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$  in  $K$  liegt. Ist  $K$  außerdem abgeschlossen, so heißt  $K$  **konvexer Körper** im  $\mathbb{R}^n$ .

**Def.** Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist die **konvexe Hülle** von  $A$  definiert durch

$$\text{conv } A := \bigcap \{X \subset \mathbb{R}^n \mid X \text{ konvex und } A \subset X\}.$$

**Proposition.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein konvexer Körper und  $0 \in \text{int}(K)$ . Dann schneidet jeder Strahl im  $\mathbb{R}^n$  mit Anfangspunkt  $0$  den Rand von  $K$  in höchstens einem Punkt. Ist  $K$  zusätzlich beschränkt (also kompakt und ein konvexer Körper), dann schneidet jeder Strahl den Rand von  $K$  in genau einem Punkt.

**Proposition.** Jeder beschränkte konvexe Körper  $K \subset \mathbb{R}^n$  mit  $0 \in \text{int}(K)$  ist homöomorph zu  $S^{n-1}$  vermöge

$$f : \partial K \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

**Notation.**  $D^n := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ .

**Proposition.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein kompakter konvexer Körper mit  $\text{int}(K) \neq \emptyset$ . Dann gilt  $\partial K \approx \partial D^n$  und  $K \approx D^n$ .

**Korollar.**  $\Delta^n \approx D^n$  und  $\partial \Delta^n \approx S^{n-1}$ .

**Proposition.** Sei  $S = (X, \Sigma)$  ein endlicher abstrakter Simplicialkomplex, also  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  und seien  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  affin unabhängig. Dann ist die Vereinigung all jener affinen Simplizes

$$\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle \subset \mathbb{R}^n \quad \text{mit } \{i_1, \dots, i_k\} \in \Sigma \quad \text{homöomorph zu } |S|.$$

**Def.** Eine Teilmenge  $T \subset \mathbb{R}^n$  heißt **(geometrischer) Simplicialkomplex**, falls  $T$  Vereinigung von affinen Simplizes  $\sigma_i \subset \mathbb{R}^n, i \in I$  mit der folgenden Eigenschaft ist: Der Schnitt  $\sigma_i \cap \sigma_j$  zweier dieser Simplizes ist entweder leer oder eine gemeinsame Seite von  $\sigma_i$  und  $\sigma_j$ .

**Bemerkung.** In diesem Fall ist  $T$  homöomorph zur geometrischen Realisierung eines abstrakten Simplicialkomplexes.

**Def.** Zwei stetige Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  heißen zueinander **homotop** (geschrieben  $f \simeq g$ ), falls es eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

mit  $H(-, 0) = f$  und  $H(-, 1) = g$  gibt.

**Lemma.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $X = C_1 \cup \dots \cup C_n$  wobei  $C_i \subset X$  abgeschlossen, seien  $f_i : C_i \rightarrow Y$  stetig mit

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}.$$

Dann ist  $F : X \rightarrow Y, x \mapsto f_i(x), x \in C_i$  stetig.

**Proposition.** • Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

- Seien  $f, g : X \rightarrow Y, h : X' \rightarrow X, k : Y \rightarrow Y'$  stetige Abbildungen. Gilt  $f \simeq g$ , so auch  $k \circ f \circ h \simeq k \circ g \circ h$ .

**Bsp.** • Für  $Y \subset \mathbb{R}^n$  konvex sind je zwei Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  zueinander homotop mittels der **linearen Homotopie**

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad (x, t) \mapsto tg(x) + (1-t)f(x).$$

- Für  $X = \{p\}$  einpunktig sind Homotopien  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  nichts anderes als Wege in  $Y$ .

**Def.** Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist eine **Homotopie-äquivalenz**, falls ein stetiges  $g : Y \rightarrow X$  existiert mit  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  und  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ . Dieses  $g$  heißt **Homotopieinverse** zu  $f$ .

**Def.** Existiert eine Homotopieäquivalenz  $f : X \rightarrow Y$ , so heißen  $X$  und  $Y$  **homotopieäquivalent**, geschrieben  $X \simeq Y$ .

**Bemerkung.** Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume. Ihre Äquivalenzklassen heißen **Homotopietypen**.

**Def.** Ein topol. Raum heißt **kontrahierbar** (zusammenziehbar), wenn er homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum ist.

**Lemma.** Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $Y$  kontrahierbar. Dann sind alle stetigen Abbildungen  $X \rightarrow Y$  homotop.

**Korollar.** Kontrahierbare Räume sind wegzusammenhängend.

**Proposition.** Die Sphären  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  sind nicht kontrahierbar.

**Def.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann heißt  $A$

- **Retrakt** von  $X$ , falls es eine **Retraktion**  $r : X \rightarrow A$  gibt, d. h.  $r$  ist stetig und  $r|_A = \text{id}_A$ .
- **Deformationsretrakt** von  $X$ , falls es eine Retraktion  $r : X \rightarrow A$  gibt, sodass  $i \circ r \simeq \text{id}_X$ . Dabei ist  $i : A \rightarrow X$  die Inklusion.
- **starken Deformationsretrakt** von  $X$ , falls es eine Retraktion  $r : X \rightarrow A$  gibt, sodass  $i \circ r \simeq \text{id}_X$  mittels einer Homotopie, die die Punkte in  $A$  nicht bewegt.

*Bemerkung.* Ist  $A \subset X$  ein Deformationsretrakt, so sind  $A$  und  $X$  homotopieäquivalent.

**Bsp.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $Y$  ein starker Deformationsretrakt des Abbildungszyklinders  $Z_f$

**Def.** Zwei stetige Abbildungen  $f, g : X \rightarrow Y$  heißen **homotop relativ zu**  $A \subset X$  (geschrieben  $f \simeq g \text{ rel } A$ ), falls es eine Homotopie  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  von  $f$  nach  $g$  gibt mit

$$H(a, t) = H(a, 0) \quad \text{für alle } a \in A \text{ und } t \in [0, 1].$$

*Bemerkung.*  $A \subset X$  ist genau dann ein starker Deformationsretrakt, wenn  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  homotop relativ  $A$  zu einer Abbildung  $f : X \rightarrow X$  mit  $f(X) = A$  ist.

**Lemma** (Reparametrisierungslemma). Seien  $\phi_1, \phi_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  stetig und auf  $\{0, 1\}$  gleich. Sei  $F : P \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie,  $G_i(p, t) := F(p, \phi_i(t))$  für  $i = 1, 2$ . Dann sind  $G_1, G_2 : P \times [0, 1] \rightarrow Y$  homotop relativ zu  $P \times \{0, 1\}$ .

**Def.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$  fest. Dann wird  $(X, x_0)$  ein **punktierter Raum** mit Basispunkt  $x_0$  genannt.

**Def.** Sei  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum. Definiere

$$\pi_1(X, x_0) := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \text{geschl. Weg mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\} / \sim$$

mit  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_1 \simeq \gamma_2 \text{ rel } \{0, 1\}$ .

**Proposition.** Die Verknüpfung  $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 \cdot \gamma_2$  induziert eine Gruppenstruktur auf  $\pi(X, x_0)$ .

**Notation.**  $\eta^{-1}(t) := \eta(1 - t)$  für jeden Weg  $\eta : [0, 1] \rightarrow X$ .

**Def.**  $\pi_1(X, x_0)$  heißt **Fundamentalgruppe** von  $(X, x_0)$ .

*Bemerkung.*  $\pi_1(X, x_0)$  hängt nur von der Wegkomponente von  $x_0$  ab, die  $x_0$  enthält.

**Proposition.** Seien  $x_0, x_1 \in X$ . Jeder Weg  $\eta : [0, 1] \rightarrow X$  von  $x_0$  nach  $x_1$  induziert einen Isomorphismus

$$\Psi_\eta : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1), \quad [\gamma] \mapsto [\eta^{-1} \cdot \gamma \cdot \eta].$$

Falls  $\eta \simeq \eta'$ , dann gilt  $\Psi_\eta = \Psi_{\eta'}$ .

Ist  $\eta'$  ein zweiter Weg von  $x_0$  nach  $x_1$ , so ist

$$\kappa := [(\eta')^{-1} \cdot \eta] \in \pi_1(X, x_1)$$

und für alle  $g \in \pi_1(X, x_0)$  gilt

$$\Psi_{\eta'}(g) = \kappa \cdot \Psi_\eta(g) \cdot \kappa^{-1} \in \pi(X, x_1)$$

und somit i. A.  $\Psi_\eta \neq \Psi_{\eta'}$ , falls  $\pi_1(X, x_1)$  nicht abelsch ist.

**Bspe.** •  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

•  $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z} \simeq 2\mathbb{Z}$  (mit  $x_0 \in \mathbb{R}P^2$  beliebig)

• Sei  $G$  eine beliebige Gruppe. Es gibt einen Simplicialkomplex  $X$  mit Basispunkt  $x_0 \in X$ , sodass  $\pi_1(X, x_0) \cong G$ .

**Def.** Seien  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  punktierte Räume. eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **basispunkterhaltend** oder **punktiert**, falls  $f(x_0) = y_0$ .

**Def.** Eine punktierte Abbildung  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induziert einen Morphismen der Fundamentalgruppen vermöge

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

**Proposition.** •  $(-)_*$  besitzt die Funktor-Eigenschaften, d. h.

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \quad \text{und} \quad (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

• Sind  $f, g : X \rightarrow Y$  punktierte stetige Abbildungen und  $f \simeq g$ , so gilt  $f_* = g_*$ .

**Def.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **einfach zusammenhängend**, falls  $X$  wegzusammenhängend ist und  $\pi_1(X, x_0) = 1$  für ein (und damit alle)  $x_0 \in X$ .

**Bsp.**  $S^1$  ist nicht einfach zusammenhängend.

**Proposition.** Ist  $X$  zusammenziehbar, so ist  $X$  einfach zusammenhängend.

**Proposition.** Seien  $X$  und  $Y$  wegzusammenhängend und  $x_0 \in X$ . Ist  $f : X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz, dann ist  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  ein Isomorphismus.

**Bsp.**  $\mathbb{R}^n$  ist zusammenziehbar, also einfach zusammenhängend.

**Proposition.** Für  $n \geq 2$  ist  $S^n$  einfach zusammenhängend.

**Def.** Für einen punktierten Raum  $(X, x_0)$  heißt

$$\pi_n(X, x_0) := \{\gamma : (S^n, p) \rightarrow (X, x_0) \mid \gamma \text{ stetig}\} / \sim$$

mit  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_1 \simeq \gamma_2 \text{ rel } \{p\}$ .

Dabei ist  $p \in S^n$  fest.

**Def.** Eine **Kategorie**  $\mathcal{C}$  besteht aus

- einer Klasse  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  von **Objekten**,
- für je zwei Objekte  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Menge  $\text{Hom}(A, B)$  von **Morphismen** von  $A$  nach  $B$ . Für  $f \in \text{Hom}(A, B)$  schreibt man auch  $f : A \rightarrow B$  oder  $A \xrightarrow{f} B$ . Dabei heißt  $\text{dom}(f) := A$  **Quelle** (Domain),  $\text{codom} f := B$  **Ziel** (Codomain) von  $f$ . Die Klasse aller Morphismen wird mit  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  bezeichnet.
- einer assoziativen Kompositionsoperation, d. h. einer Abbildung

$$\prod_{A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C), \quad (f, g) \mapsto f \circ g,$$

$$\text{mit } (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \text{ für alle } A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \in \mathcal{D}.$$

- für jedes  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  einem Identitätsmorphismus  $\text{id}_A : A \rightarrow A$  mit  $\text{id}_A \circ f = f$  und  $g \circ \text{id}_A = g$  für alle  $f : B \rightarrow A$  und  $g : A \rightarrow B$ .

*Bemerkung.* Die Identitätsmorphismen sind eindeutig bestimmt, da

$$\text{id}_A = \text{id}_A \circ \text{id}'_A = \text{id}'_A.$$

**Def.** Ein Morphismus  $A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{C}$  heißt **Isomorphismus**, falls es einen Morphismus  $B \xrightarrow{g} A \in \mathcal{C}$  gibt mit  $f \circ g = \text{id}_B$  und  $g \circ f = \text{id}_A$ . Dieses  $g$  heißt dann **Inverses** von  $f$ , geschrieben  $f^{-1} := g$ .

**Bspe.** Es gibt die Kategorien

- **Set** der Mengen und Abbildungen,
- **Grp** (**AbGrp**) der (abelschen) Gruppen, **Rng** der Ringe, **Mod<sub>R</sub>** der  $R$ -Moduln, **Vect<sub>k</sub>** der  $k$ -VRe mit den jeweils strukturhaltenden Abbildungen,
- **Top** der topologischen Räume, **Met** der metrischen Räumen **KompHaus** der kompakten Hausdorffräume, **Top\*** der punktierten topologischen Räume mit den jeweils stetigen (und basispunkterhaltenden) Abbildungen,
- Jede Partialordnung  $\leq$  auf einer Menge  $X$  definiert eine Kategorie  $\mathcal{E}$  mit  $\text{Ob}(\mathcal{E}) := X$  und  $\text{Hom}(a, b) := \{\leq_{a,b} \mid a \leq b\}$ .
- der Relationen **Rel** mit Mengen als Objekten,  $\text{Hom}(A, B) := \mathcal{P}(A \times B)$  und, für  $S \subseteq B \times C$  und  $R \subseteq A \times B$ ,  $S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : aRb \wedge bSc\}$ .

*Bemerkung.* Eine Kategorie mit nur einem Objekt ist eine Gruppe.

**Def.** Ein **Grupoid** ist eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind.

**Def.** Das **Fundamentalgrupoid**  $\pi(X)$  eines topologischen Raumes  $X$  ist die Kategorie

$$\text{Ob}(\pi(X)) := X,$$

$$\text{Hom}(a, b) := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ stetig} \mid \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\} / \sim$$

mit  $\gamma_0 \sim \gamma_1 \iff \gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel } \{0, 1\}$ .

*Bemerkung.* Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  für die gilt:

- Falls  $f, g \in \text{Mor}(\mathcal{C})$  mit  $f \sim g$ , so ist  $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$  und  $\text{codom}(f) = \text{codom}(g)$ .
- Ist  $f \sim g \in \text{Hom}(A, B)$  und  $h \sim k \in \text{Hom}(B, C)$ , so gilt auch  $h \circ f \sim h \circ g \in \text{Hom}(A, C)$ .

Dann gibt es eine Kategorie  $\mathcal{C}/\sim$  mit  $\text{Ob}(\mathcal{C}/\sim) := \text{Ob}(\mathcal{C})$  und  $\text{Mor}(\mathcal{C}/\sim) := \text{Mor}(\mathcal{C})/\sim$ .

**Def.** Die **Homotopiekategorie** ist **HTop** := **Top**/ $\simeq$ . Die Kategorie **HTop\*** besteht aus basispunkterhaltenden Homotopieklassen von basispunkterhaltenden Abbildungen zwischen punktierten topologischen Räumen.

**Def.** Ein (kovarianter) **Funktor**  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zw. Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  besteht aus einer Abb. von Objekten  $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$  und einem Morphismus  $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$  für jeden Morphismus  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , sodass gilt:

- $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$  für alle  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  für alle  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  aus  $\mathcal{C}$ .

**Def.** Die Kategorie **Gpd** ist die Kategorie der Gruppoide mit Funktoren als Morphismen.

**Bspe.** • Für  $\mathcal{C} = \text{Grp}, \text{AbGrp}, \text{Rng}, \text{Top}, \dots$  gibt es den **Vergissfunktor**  $U : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ .

- Besitzen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  nur je ein Objekt (sind also Gruppen), so ist ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  nichts anderes als ein Gruppenhomomorphismus.

- Der **Potenzmengenfunktor**  $P : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  ist definiert durch
$$P(A) := \mathcal{P}(A), \quad P(f : A \rightarrow B)(X \subseteq A) := f(X) \subseteq B.$$
- Sind  $P$  und  $Q$  partiell geordnete Mengen, so ist ein Funktor  $P \rightarrow Q$  nichts anderes als eine ordnungserhaltende Abbildung.

*Bemerkung.* •  $\pi$  definiert einen Funktor  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Gpd}$ .

- $\pi_0$  definiert Funktoren  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  und  $\mathbf{HTop} \rightarrow \mathbf{Set}$ .
- $\pi_1$  definiert Funktoren  $\mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Grp}$  und  $\mathbf{HTop}^* \rightarrow \mathbf{Grp}$ .

**Def.** Die **duale Kategorie** einer gegebenen Kategorie  $\mathcal{C}$  ist die Kategorie  $\mathcal{D} := \mathcal{C}^{\text{op}}$  gegeben durch

$$\text{Ob}(\mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}), \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A), \quad f \circ_{\mathcal{D}} g := g \circ_{\mathcal{C}} f.$$

**Def.** Ein **kontravarianter Funktor** zwischen Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  ist ein Funktor  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**Bspe.** • Der **kontravariante Potenzmengenfunktor**

$$P^* : \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad P(A) := \mathcal{P}(A), \quad P(f : A \rightarrow B)(Y) := f^{-1}(Y)$$

- Sei  $k$  ein Körper, dann ist der **Dualisierungsfunktor**

$$\begin{aligned} * : \mathbf{Vect}_k^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{Vect}_k, & *(V) &:= \text{Hom}_{\mathbf{Vect}_k}(V, k), \\ *(f : V \rightarrow W) &:= (f^* : W^* \rightarrow V^*) &:= \phi \mapsto \phi \circ f \end{aligned}$$

**Def.** Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren. Eine **natürliche Transformation**  $\alpha : F \rightarrow G$  ordnet jedem  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  einen Morphismus  $\alpha_X \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$  zu, sodass für jeden Morphismus  $f : A \rightarrow B$  in  $\mathcal{C}$  folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & G(B) \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

*Bemerkung.* Ist  $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein weiterer Funktor und  $\beta : G \rightarrow H$  eine weitere natürliche Transformation, so ist  $\beta\alpha : F \rightarrow H$  definiert durch

$$(\beta\alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X : F(X) \rightarrow H(X)$$

eine natürliche Transformation zwischen  $F$  und  $H$ .

*Bemerkung.* Für zwei Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  gibt es die **Funktorkategorie**  $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$  der Funktoren zwischen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  mit natürlichen Transformation als Morphismen.

**Def.** Die Isomorphismen in  $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$  heißen **natürliche Isomorphismen**.

**Lemma.** Eine natürliche Transformation  $\eta : F \rightarrow G$  ist genau dann ein natürlicher Isomorphismus, wenn alle Komponenten  $(\eta_X : F(X) \rightarrow G(X))_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$  Isomorphismen sind.

**Bsp.** Sei  $** := * \circ * : \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Vect}_k$  der Bidualisierungsfunktor. Es gibt eine nat. Transformation  $\eta : \text{Id}_{\mathbf{Vect}_k} \rightarrow **$  gegeben durch

$$\eta_V(v \in V) := (\phi \mapsto \phi(v)).$$

Für endlichdimensionale VR  $V$  ist  $\eta_V$  ein Isomorphismus, also ist  $\eta|_{\mathbf{FinVect}_k} : \text{Id}_{\mathbf{FinVect}_k} \rightarrow **$  ein natürlicher Isomorphismus.

**Def.** Seien  $X, Y$  topologische Räume.

- Eine Teilmenge  $Y \subset Y$  wird durch eine stetige Abbildung  $p : X \rightarrow Y$  **gleichmäßig überlagert**, falls es einen diskreten Raum  $D$  und einen Homöomorphismus

$$\phi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times D \quad \text{mit} \quad p = \pi_1 \circ \phi$$

gibt, wobei  $\pi_1 : X \times D \rightarrow X$  die Projektion ist.

- Die Abbildung  $p$  heißt **Überlagerung**, falls jeder Punkt in  $Y$  eine durch  $p$  gleichmäßig überlagerte Umgebung besitzt.

**Bsp.**  $\mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad t \mapsto e^{2\pi i t}$  ist eine Überlagerung.

*Bemerkung.* Sei  $p : X \rightarrow Y$  eine Überlagerung,  $Y$  zshgd. Dann ist

$$Y \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}, \quad y \mapsto \#(p^{-1}(y))$$

konstant, da lokalkonstant. Falls  $d = \#(p^{-1}(y))$  endlich ist, heißt  $p$  eine  **$d$ -blättrige Überlagerung**. Ansonsten heißt  $p$  eine **unendliche Überlagerung**.

**Def.** Eine stetige Abbildung  $p : X \rightarrow Y$  heißt **lokaler Homöomorphismus**, falls für alle  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  existiert, sodass  $p|_{U_x} : U_x \rightarrow p(U_x)$  ein Homöomorphismus ist.

**Lemma.** Jede Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus.

**Proposition.** Sei  $p : X \rightarrow Y$  eine Überlagerung,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$  ein Weg und  $x \in X$  mit  $p(x) = \gamma(0)$ . Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Weg  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = x$  und  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .