Zusammenfassung Funktionalanalysis

1. Allgemeine Strukturen

Notation. Sei im Folgenden $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Def. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **Halbnorm** ist eine Abb. $\|-\| : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, sodass für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

- $\|x\| \geq 0$ (Positivität)
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($\triangle$-Ungleichung)

Eine **Norm** ist eine Halbnorm, für die zusätzlich gilt:

$$\|x\| = 0 \iff x = 0.$$

Def. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

- Eine Abbildung $f : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt **Sesquilinearform**, wenn für alle $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:
$$f(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha f(x_1, y) + f(x_2, y) \qquad \text{(Linearität im 1. Arg)}$$
$$f(x, \alpha y_1 + y_2) = \overline{\alpha} f(x, y_1) + f(x, y_2) \qquad \text{(Antilinearität im 2. Arg)}$$
- Eine **Hermitische Form** f ist eine Sesquilinearform, für die gilt:
$$\forall\, x, y \in X \,:\, f(x, y) = \overline{f(y, x)} \qquad \text{(Symmetrie)}$$
Für alle $x \in X$ gilt dann $f(x, x) = \overline{f(x, x)}$, also ist $f(x, x)$ reell.
- Eine Sesquilinearform f heißt **positiv semidefinit**, falls $f(x, x) \geq 0$ für alle $x \in X$ gilt. Falls zusätzlich $f(x, x) = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 0$, dann heißt f **positiv definit**.
- Ein **Skalarprodukt** ist eine positiv definite Hermitische Form
$$(-\,|\,-) : X \times X \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto (x\,|\,y)\,.$$

Satz. Für eine positiv semidefinite Hermitische Form $(-|-)$ ist durch $x \mapsto \sqrt{(x\,|\,x)}$ eine Halbnorm definiert. Ist die Form auch positiv definit, also ein Skalarprodukt, handelt es sich dabei um eine Norm, die sogenannte **induzierte Norm**.

Satz. Für ein Skalarprodukt $(-|-)$ auf einem $\mathbb{K}$-VR X und die davon induzierte Norm gilt für alle $x, y \in X$:

- $|(x\,|\,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Parallelogrammidentität)

Gleichheit gilt bei CS genau dann, wenn x und y gleichgerichtet sind.

Def. Ein $\mathbb{K}$-VR mit einer Norm heißt **normierter Raum**, mit einem Skalarprodukt **Prähilbertraum**.

Satz. Die Norm und das Skalarprodukt sind stetig.

Def. Sei X ein Prähilbertraum. Zwei Vektoren $x, y \in X$ heißen **zueinander orthogonal**, notiert $x \perp y$, wenn $(x\,|\,y) = 0$.

Satz. Für zwei orthogonale Vektoren $x, y \in X$ gilt
$$\|x - y\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \qquad \text{(Pythagoras)}$$

Lemma. Seien Y und Z Unterräume eines VR X, dann ist auch $Y + Z \coloneqq \{y + z \,|\, y \in Y, z \in Z\}$ ein Unterraum von X.

Def. Für Unterräume Y und Z eines VR X mit $Y \cap Z = \{0\}$ heißt $Y \oplus Z \coloneqq Y + Z$ **direkte Summe** von Y und Z.

Def. Zwei Unterräume Y und Z von X heißen **orthogonal**, notiert $Y \perp Z$, falls $\forall\, y \in Y, z \in Z : y \perp z$.

Def. Für einen $\mathbb{K}$-VR X und einen Unterraum $Y \subset X$ heißt
$$Y^\perp \coloneqq \{x \in X \,|\, \operatorname{span}\{x\} \perp Y\} \quad \textbf{orthog. Komplement} \text{ von } Y.$$

Def. Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) mit einer Mange X und einer **Metrik** $d : X \times X \to \mathbb{R}$, d. h. für $x, y, z \in X$ gilt:

- $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Positivität)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symm.)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ($\triangle$-Ungl.)

Def. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **Fréchet-Metrik** ist eine Funktion $\rho : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für alle $x, y \in V$ gilt:

- $\rho(x) = \rho(-x)$
- $\rho(x) = 0 \iff x = 0$
- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Beispiel. Auf dem $\mathbb{R}^n$ ist $x \mapsto \frac{\|x\|}{1 + \|x\|}$ eine Fréchet-Metrik.

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$, so heißt
$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) \coloneqq \inf\{d(x, y) \,|\, x \in A_1, y \in A_2\} \quad \textbf{Abstand} \text{ zw. } A \text{ und } B.$$

Bemerkung. Für $A \subset X$ ist die Abbildung $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante ≤ 1.

Def. Sei (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$, $\epsilon > 0$, dann heißt
$$B_\epsilon(A) \coloneqq \{y \in X \,|\, \operatorname{dist}(\{y\}, A) < A\} \quad \boldsymbol{\epsilon}\textbf{-Umgebung} \text{ von } A.$$

Für $x \in X$ ist $B_\epsilon(x) \coloneqq B_\epsilon(\{x\})$ die **ϵ-Kugel** um x.

Def. Der **Durchmesser** von $A \subset X$ ist definiert durch
$$\operatorname{diam}(A) \coloneqq \sup\left(\{d(x, y) \,|\, x, y \in A\} \cup \{0\}\right).$$

Def. $A \subset X$ mit $\operatorname{diam}(A) < \infty$ heißt **beschränkt**.

Def. Sei (X, d) ein normierter Raum und $A \subset X$, dann heißt

- $\operatorname{int} A \coloneqq A^\circ \coloneqq \{x \in X \,|\, \exists\, \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset A\}$ das **Innere** von A,
- $\operatorname{clos} A \coloneqq \overline{A} \coloneqq \{x \in X \,|\, \forall\, \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}$ **Abschluss** von A,
- $\operatorname{bdry} A \coloneqq \partial A \coloneqq \overline{A} \setminus A^\circ$ **Rand** von A,
- $A^c \coloneqq \complement A \coloneqq X \setminus A$ **Komplement** von A.

Def. Eine Menge $A \subset X$ heißt **offen**, falls $A = A^\circ$, und **abgeschlossen**, falls $A = \overline{A}$.

Def. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, τ), wobei X eine Menge und $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X, den sogenannten **offenen** Mengen, ist, sodass gilt:

- $\emptyset \in \tau, X \in \tau$
- $\forall\, \tilde{\tau} \subset \tau : \bigcup\limits_{U \in \tilde{\tau}} U \in \tau$
- $\forall\, U_1, U_2 \in \tau : U_1 \cap U_2 \in \tau$

Def. Sei (X, τ) ein topolischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn das Komplement offen ist, also $A^c \in \tau$.

Def. Ein **Hausdorff-Raum** ist ein topologischer Raum (X, τ), der folgendes Trennungsaxiom erfüllt:
$$\forall\, x_1, x_2 \in X \,:\, \exists\, U_1, U_2 \in \tau \,:\, x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Def. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$, dann ist auch (A, τ_A) ein topologischer Raum mit der sogenannten **Relativtopologie** $\tau_A \coloneqq \{U \cap A \,|\, U \in \tau\}$.

Def. Sei (X, τ) ein topol. Raum und $A \subset X$, dann heißt

- $A^\circ \coloneqq \{x \in X \,|\, \exists\, U \in \tau : x \in U \text{ und } U \subset A\}$ das **Innere** von A,
- $\overline{A} \coloneqq \{x \in X \,|\, \forall\, U \in \tau \text{ mit } x \in U : U \cap A \neq \emptyset\}$ **Abschluss** von A.

Def. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist
$$(X, \tau) \quad \text{mit} \quad \tau \coloneqq \{A \subset X \,|\, \operatorname{int} A = A\}$$
ein topol. Raum, wobei τ die von d **induzierte Topologie** heißt.

Bemerkung. Die direkte Definitionen des Abschlusses, des Inneren, usw. für metrische Räume stimmen mit den Definitionen dieser Begriffe über die induzierte Topologie überein.

Def. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **dicht** in X, falls $\overline{A} = X$.

Def. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **separabel**, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt separabel, falls (A, τ_A) separabel ist.

Def. Seien τ_1, τ_2 zwei Topologien auf einer Menge X. Dann heißt τ_2 **stärker** (oder feiner) als τ_1 bzw. τ_1 **schwächer** (oder gröber) als τ_2, falls $\tau_1 \subset \tau_2$.

Def. Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X und τ_1 und τ_2 die induzierten Topologien. Dann heißt d_1 **stärker** als d_2, falls τ_1 stärker ist als τ_2. Ist $\tau_1 = \tau_2$, so heißen d_1 und d_2 äquivalent.

Satz. Seien $\|-\|_1$ und $\|-\|_2$ zwei Normen auf dem $\mathbb{K}$-VR X. Dann:

- $\|-\|_2$ ist stärker als $\|-\|_1 \iff \exists\, C > 0 : \forall\, x \in X : \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$
- $\|-\|_1$ und $\|-\|_2$ sind äquivalent $\iff$ $\exists\, c, C > 0 : \forall\, x \in X : c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$

Def. Die **p-Norm** auf dem $\mathbb{K}^n$ ist definiert für $p \in [1, \infty]$ als
$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{i=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } 1 \leq p < \infty, \quad \|x\|_\infty \coloneqq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Bemerkung. Alle p-Normen auf dem $\mathbb{K}^n$ sind zueinander äquivalent.

Def. Sei $p \in [1, \infty]$. Dann heißt die eindeutig bestimmte Zahl $p' \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ **dualer Exponent** von p.

Def. Seien (X, τ_X) und (Y, τ_Y) Hausdorff-Räume, $S \subset X$, sowie $x_0 \in S$. Eine Funktion $f : S \to Y$ heißt **stetig** in x_0, falls gilt:
$$\forall\, V \in \tau_Y \,:\, f(x_0) \in V \implies \exists\, U \in \tau_X \text{ mit } x_0 \in U \,:\, f(U \cap S) \subset V$$

Ist $X = S$, so heißt $f : X \to Y$ stetige Abbildung, falls f stetig in allen Punkten $x_0 \in X$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn das Urbild offener Mengen offen ist, d. h. $\forall\, V \in \tau_Y : f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Bemerkung. In metrischen Räumen ist diese Definition äquivalent zur üblichen Folgendefinition.

Def. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Die Folge heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$d(x_k,x_l)\xrightarrow{k,l\to\infty}0.$$

Ein Punkt $x\in X$ heißt **Häufungspunkt** der Folge, falls es eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ gibt mit $x_{k_i}-x\xrightarrow{i\to\infty}0$.

Def. Ein metrischer Raum (X,d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X einen Häufungspunkt (den Grenzwert) hat.

Def.
- Ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt **Banachraum**, wenn er vollständig bezüglich der induzierten Metrik ist.
- Ein Banachraum X heißt **Banach-Algebra**, falls er eine Algebra ist mit $\|x\cdot y\|_X\leq\|x\|_X\cdot\|y\|_X$.
- Ein **Hilbertraum** ist ein Prähilbertraum, der vollständig bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm ist.

Lemma. Ist (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $Y\subset X$ abgeschlossen, so ist auch $(Y,d|_Y)$ ein vollständiger metr. Raum.

Bemerkung. Ein normierter Raum X ist genau dann ein Prähilbertraum, falls die Parallelogrammidentität

$$\forall\,x,y\in X\,:\,\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

gilt. Folglich ist ein Banachraum genau dann ein Hilbertraum, falls die Parallelogrammidentität gilt.

Def. Sei $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}:=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{K}\}$. Die Fréchet-Metrik

$$\rho(x):=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\tfrac{|x_i|}{1+|x_i|}<1$$

macht $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ zu einem metrischen Raum, dem **Folgenraum**.

Satz. Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ mit $x^k=(x_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$ und $x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, so gilt

$$\rho(x^k-x)\xrightarrow{k\to\infty}0\iff\forall\,i\in\mathbb{N}\,:\,x_i^k\xrightarrow{k\to\infty}x_i.$$

Satz. Der Folgenraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ist vollständig.

Def. Für $p\in[1,\infty]$ und $x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ heißt die Norm

$$\|x\|_{\ell^p}:=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\in[0,\infty]\,,\ \text{für } 1\leq p<\infty$$

$$\|x\|_{\ell^\infty}:=\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|\in[0,\infty]$$

ℓ^p-Norm auf dem Raum $\ell^p(\mathbb{K}):=\{x\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\,|\,\|x\|_{\ell^p}<\infty\}$.

Satz. Der Raum $(\ell^p(\mathbb{K}),\|{-}\|_{\ell^p})$ ist ein Banachraum.

Bemerkung. Im Fall p=2 ist $\ell^2(\mathbb{K})$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(x\,|\,y)_{\ell^2}:=\sum_{i=0}^{\infty}x_i\overline{y_i}$ für $x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $y=(y_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\ell^2(\mathbb{K})$.

Satz (Vervollständigung)**.** Sei (X,d) ein metrischer Raum. Betrachte die Menge $X^{\mathbb{N}}$ aller Folgen in X und definiere

$$\widetilde{X}:=\{x\in X^{\mathbb{N}}\,|\,x\text{ ist Cauchy-Folge in }X\}/\sim$$

mit der Äquivalenzrelation $x\sim y$ in $\widetilde{X}$ $:\iff d(x_j,y_j)\xrightarrow{j\to\infty}0$. Diese Menge wird mit der Metrik

$$\widetilde{d}(x,y):=\lim_{i\to\infty}d(x_i,y_i)$$

zu einem vollständigen metrischen Raum. Die injektive Abbildung $J:X\to\tilde{X}$, welche $x\in X$ auf die konstante Folge $(x)_{i\in\mathbb{N}}$ abbildet, ist isometrisch, d. h. $\forall\,x,y\in X\,:\,\widetilde{d}(J(x),J(y))=d(x,y)$. Wir können also X als einen dichten Unterraum von $\widetilde{X}$ auffassen.

Def. Man nennt $\widetilde{X}$ **Vervollständigung** von X.

Funktionenräume

Notation. Sei im Folgenden Y ein Banachraum.

Def. Sei S eine Menge. Dann ist

$$B(S,Y):=\{f:S\to Y\,|\,f(S)\text{ ist beschränkt in }Y\}$$

der **Raum der beschränkten Funktionen** von B nach Y. Diese Menge ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und wird mit der **Supremumsnorm** $\|f\|_{B(S)}:=\sup_{x\in S}\|f(x)\|$ zu einem Banachraum.

Def. Sei $S\subset\mathbb{R}^n$ kompakt, dann ist

$$\mathcal{C}^0(S,Y):=\mathcal{C}(S,Y):=\{f:S\to Y\,|\,f\text{ ist stetig }\}$$

der **Raum der stetigen Funktionen** von S nach Y. Er ist ein abgeschlossener Unterraum von $B(S,Y)$ mit der Supremumsnorm, also ein Banachraum.

Bemerkung. Für $Y=\mathbb{K}$ ist $\mathcal{C}^0(S;\mathbb{K})=\mathcal{C}(S)$ eine kommutative Banach-Algebra mit dem Produkt $(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)$.

Def. Sei $S\subset\mathbb{R}^n$ und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teil- mengen des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt (K_n) eine **Ausschöpfung** von S, falls:
- Für alle $x\in S$ gibt es ein $\delta>0$ und $i\in\mathbb{N}$, sodass $B_\delta(x)\subset K_i$.
- $S=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n$
- $\emptyset\neq K_i\subset K_{i+1}\subset S$ für alle $i\in\mathbb{N}$

Bemerkung. Zu $S\Subset\mathbb{R}^n$ und S ◖ $\mathbb{R}^n$ existiert eine Ausschöpfung.

Def. Es sei $S\subset\mathbb{R}^n$ so, dass eine Ausschöpfung $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von S existiert. Dann ist

$$C^0(S;Y):=\{f:S\to Y\,|\,f\text{ ist stetig auf }S\}$$

der **Raum der stetigen Funktionen** von S nach Y. Er ist ein vollständiger metrischer Raum mit der Fréchet-Norm

$$\varrho(f):=\sum_{i\in\mathbb{N}}2^{-i}\frac{\|f\|_{C^0(K_i)}}{1+\|f\|_{C^0(K_i)}}.$$

Bemerkung.
- Die von dieser Metrik erzeugte Topologie ist unabhängig von der Wahl der Ausschöpfung.
- Ist $S\subset\mathbb{R}^n$ kompakt, so stimmt die Topologie mit der von $\|{-}\|_{B(S,Y)}$ überein.
- ist $S\subset\mathbb{R}^n$ offen, so gibt es auf $\mathcal{C}^0(S)$ keine Norm, die dieselbe Topologie wie die Fréchet-Metrik ρ erzeugt.

Def. Sei $S\subset\mathbb{R}^n$. Für $f:S\to Y$ heißt

$$\operatorname{supp}f:=\overline{\{x\in S\,|\,f(x)\neq0\}}\subset\overline{S}\quad\textbf{Träger}\text{ von }f.$$

Def. Sei $S\subset\mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Dann ist

$$\mathcal{C}_0^0(S;Y):=\{f\in\mathcal{C}^0(S;Y)\,|\,\operatorname{supp}f\text{ ist kompakt in }\mathbb{R}^n\}$$

die Menge der **stetigen Funktionen mit kompaktem Träger**.

Def. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m\in\mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^m(\overline{\Omega},Y):=\{f:\Omega\to Y\,|\,&f\text{ ist }m\text{-mal stetig differenzierbar in }\Omega\\&\text{und für }k\leq m\text{ und }s_1,...,s_k\in\{1,...,n\}\\&\text{ist }\partial_{s_1}\cdots\partial_{s_k}f\text{ auf }\overline{\Omega}\text{ stetig fortsetzbar }\}\end{aligned}$$

der **Raum der differenzierbaren Funktionen** von Ω nach Y und mit folgender Norm ein Banachraum:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})}=\sum_{|s|\leq m}\|\partial^s f\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}$$

Bemerkung. In obiger Norm wird die Summe über alle k-fache partielle Ableitungen mit $k\leq m$ gebildet.

Def. Sei $S\subset\mathbb{R}^n$ und $f:S\to Y$. Für $\alpha\in\,]0,1]$ heißt

$$\text{Höl}_\alpha(f,S):=\sup_{x,y\in S}\tfrac{\|f(y)-f(x)\|}{\|y-x\|^\alpha}\in[0,\infty]$$

Hölder-Konstante von f auf S zum Exponenten α.
Im Fall α=1 heißt $\text{Lip}(f,S):=\text{Höl}_1(f,s)$ **Lipschitz-Konstante**.

Def. Ist Ω offen und beschränkt und $m\in\mathbb{N}$, so ist

$$\mathcal{C}^{m,\alpha}(\overline{\Omega},Y):=\{f\in\mathcal{C}^m(\overline{\Omega},Y)\,|\,\forall\,s\text{ mit }|s|{=}m\,:\,\text{Höl}_\alpha(\partial^s f,\overline{\Omega})<\infty\}$$

ein sogenannter **Hölder-Raum**. Er ist ein Banachraum mit Norm

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{m,\alpha}}:=\sum_{|s|\leq m}\|\partial^s f\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)}+\sum_{|s|=m}\text{Höl}_\alpha(\partial^s f,\overline{\Omega}).$$

Def. Funktionen aus $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega},Y)$ heißen **Hölder-stetig** (zum Exponenten α), Funktionen aus $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega},Y)$ **Lipschitz-stetig**.

Def. Der **Vektorraum der unendlich oft diff'baren Fktn** und dessen Unterraum der Fktn mit kompakten Träger sind

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega,Y):=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{C}^m(\Omega,Y)\quad\text{bzw.}\quad\mathcal{C}_0^\infty(\Omega,Y):=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{C}_0^m(\Omega,Y).$$

Def. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und Y ein Banachraum. Eine Funktion $f : \Omega \to Y$ heißt **elementare Funktion**, wenn f die Form

$$f = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i} b_i \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},\ E_1, ..., E_n \in \mathfrak{A},\ b_1, ..., b_n \in Y$$

und $\mu(E_i) < \infty$ für $i = 1, ..., n$ besitzt. Für eine solche Funktion heißt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) b_i \quad \text{Bochner-Integral.}$$

Eine messbare Funktion $f : \Omega \to Y$ heißt **Bochner-integrierbar**, wenn es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementarer Funktionen gibt, sodass

$$\int_\Omega \|f - f_n\| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

wobei links das gewöchnliche Lebesgue-Integral steht. Dann heißt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \quad \textbf{Bochner-Integral} \text{ von } f.$$

Notation. $L(\mu, Y) := L(\mu) := \{f : \Omega \to Y \mid f \text{ Bochner-integrierbar}\}$

Def. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : \Omega \to Y$ heißt **μ-messbar** (μ-mb), wenn gilt:

- $\forall U \Subset Y$ offen : $f^{-1}(U) \in \mathfrak{A}$
- Es gibt eine μ-Nullmenge N, sodass $f(\Omega \setminus N)$ separabel ist.

Satz (Bochner-Kriterium)**.** Für $f : \Omega \to Y$ gilt:

$$f \in L(\mu, Y) \iff f \text{ ist } \mu\text{-messbar und } |f| \in L(\mu, \mathbb{R}).$$

Satz (Majoranten-Kriterium)**.** Sei $f : \Omega \to Y$ μ-messbar und $g \in L(\mu, \mathbb{R})$ mit $\|f\| \le g$ μ-fast-überall. Dann ist $f \in L(\mu, Y)$.

Satz. Sei $f : \Omega \to Y$ μ-messbar und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-messbarer Funktionen von Ω nach Y. Angenommen, es gilt $\|f_n(\omega)\| \le g(\omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und μ-fast-alle $\omega \in \Omega$ und ein $g \in L(\mu, \mathbb{R})$. Dann gilt:

$$f_n \xrightarrow[\text{f.ü.}]{n\to\infty} f \implies f \in L(\Omega, Y) \text{ mit } \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Def. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und Y ein Banachraum. Dann heißt $f : \Omega \to Y$ **wesentlich beschränkt**, falls

$$\sup_{\omega\in\Omega\setminus N} \|f(\omega)\| < \infty \quad \text{für eine Nullmenge } N \subset \Omega.$$

Def. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, Y ein Banachraum und $p \in [1, \infty[$.

$$L^p(\mu, Y) := \{f : \Omega \to Y \mid f \text{ ist } \mu\text{-mb und } \|f\|^p \in L(\mu, \mathbb{R})\}/\sim$$
$$L^\infty(\mu, Y) := \{f : \Omega \to Y \mid f \text{ ist } \mu\text{-mb und wes. beschr. bzgl. } \mu\}/\sim$$

heißen **Lebesgue-Räume**. Dabei ist $f \sim g$, wenn f und g fast-überall übereinstimmen. Sie sind Banachräume mit Norm

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_{L^\infty} := \inf_{\substack{N\subset\Omega \\ N \text{ Nullmenge}}} \left(\sup_{\omega\in\Omega\setminus N} \|f(\omega)\|\right).$$

Bemerkung. Für p=2 wird, falls Y ein Hilbertraum ist, $L^2(\mu, Y)$ ebenfalls zu einem Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f \,|\, g)_{L^2(\mu,Y)} := \int_\Omega (f \,|\, g)_Y \,\mathrm{d}\mu.$$

Satz. Sei $n \in \mathbb{N}$, $q, p_1, ..., p_n \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{q}$ und $f_i \in L^{p_i}(\mu, \mathbb{K})$ für $i \in \{1, ..., n\}$. Dann ist $f_1 \cdot ... \cdot f_n \in L^q(\mu, \mathbb{K})$ und es gilt die Hölder-Ungleichung $\|f_1 \cdot ... \cdot f_n\|_{L^q} \le \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdot ... \cdot \|f_n\|_{L^{p_n}}$.

Bemerkung. Das Majorantenkriterium sowie der Konvergenzsatz von Lebesgue übertragen sich direkt auf $L^p(\mu, Y)$ mit $y < \infty$.

Def. Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Falls für einen Multi-Index s

$$\int_\Omega \partial^s \zeta f \,\mathrm{d}\lambda_n = (-1)^{|s|} \cdot \int_\Omega \zeta g \,\mathrm{d}\lambda_n \quad \text{für alle } \zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

gilt, so heißt g die ***s*-te schwache Ableitung** von g.

Def. Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$. Dann heißt

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \mid f \text{ hat für alle Multi-Indizes } s \text{ mit } |s| \le m \text{ eine schwache Ableitung } f^{(s)} \in L^p(\Omega)\}$$

Sobolev-Raum der Ordnung m zum Exponenten p. Mit der Norm

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|s|\le m} \|f^{(s)}\|_{L^p(\Omega)}$$

wird $W^{m,p}(\Omega)$ für $p < \infty$ zum Banachraum.

Bemerkung. Für $p \ge 2$ sind Sobolev-Funktionen i. A. nicht stetig!

Def. Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty[$. Dann heißt

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \{f \in W^{m,p}(\Omega) \mid \exists \text{ Folge } (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \text{ sodass } \|f - f_k\|_{W^{m,p}(\Omega)} \to 0 \text{ für } k \to \infty\}$$

Sobolev-Raum mit Null-Randwerten der Ordnung m zum Exponent p. Er ist ein abgeschlossener Unterraum von $W^{m,p}(\Omega)$.

2. Teilmengen von (Funktionen-)Räumen

Def. Sei X ein $\mathbb{K}$-VR. Die **konvexe Hülle** von $A \subset X$ ist

$$\operatorname{conv}(A) := \{\sum_{i=0}^{k} a_i x_i \mid k\in\mathbb{N}, x_1, ..., x_k \in A, a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}_{>0}, \sum_{i=1}^{k} a_i = 1\}.$$

Die Menge A heißt **konvex**, wenn $A = \operatorname{conv}(A)$.

Def. Ist $A \subset X$ konvex, so heißt $f : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ **konvexe Funktion**, falls für alle $x, y \in A$ und $t \in [0, 1]$ gilt:

$$f((1-t)x + ty) \le (1 - t)f(x) + tf(y)$$

Eine Funktion $g : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt konkav, falls $-g$ konvex ist.

Satz. Sei X ein Hilbertraum und $A \subset X$ nicht leer, abgeschlossen und konvex. Dann gibt es genau eine Abbildung $P : X \to A$ mit

$$\|x - P(x)\|_X = \operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y\in A} \|x - y\|_X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Für $x \in X$ ist eine äquivalente Charakterisierung von $P(x)$ durch

$$\operatorname{Re}(x - P(x) \,|\, a - P(x))_X \le 0 \quad \text{für alle } a \in A$$

gegeben. Die Abbildung P heißt **orthogonale Projektion** auf A.

Def. Sei X ein $\mathbb{K}$-VR. $A \subset X$ heißt **affiner Unterraum**, falls

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in A \quad \text{für alle } x, y \in A,\ \alpha \in \mathbb{K}.$$

Satz. Ist im vorherigen Satz A nicht leer, abgeschlossen und affiner Unterraum von X, dann ist P affin linear, d. h.

$$P((1-\alpha)x + \alpha y) = P((1-\alpha)x) + P(\alpha y) \quad \text{für alle } x, y \in A,\ \alpha \in \mathbb{K}.$$

Satz. Ist im vorherigen Satz A nicht leer und abgeschlossener Unterraum von X, dann ist P linear und $\forall x \in X : x - P(x) \perp A$.

Satz (vom fast orthogonalen Komplement)**.** Sei X ein normierter Raum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener echter Teilraum und $\theta \in]0, 1[$ (bzw. $\theta \in]0, 1]$, falls X ein Hilbertraum). Dann gibt es ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$ und $\theta \le \operatorname{dist}(x_0, Y) \le 1$.

Def. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **präkompakt**, falls es für jedes $\epsilon > 0$ eine Überdeckung von A mit endlich vielen ϵ-Kugeln $A \subset B_\epsilon(x_1) \cup ... \cup B_\epsilon(x_{n_\epsilon})$ mit $x_1, ..., x_{n_\epsilon} \in X$ gibt.

Def. Sei $A \subset X$ eine Menge. Eine Überdeckung von A ist ein System von Teilmengen $\{A_i \subset X \mid i \in I\}$, sodass $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

Def. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **kompakt**, falls eine der folgenden äquiv. Aussagen gilt:

- A ist **überdeckungskompakt**: Für jede offene Überdeckung $\{A_i \Subset X \mid i \in I\}$ von A gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I$, sodass $\{A_i \mid i \in J\}$ ebenfalls eine Überdeckung von A ist.
- A ist **folgenkompakt**: Jede Folge in A besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A.
- $(A, d|_A)$ ist vollständig und A ist präkompakt.

Achtung. In topologischen Räumen sind die obigen Begriffe i. A. nicht äquivalent.

Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt:

- A präkompakt $\implies$ A beschränkt,
- A kompakt $\implies$ A abgeschlossen und präkompakt,
- Falls X vollständig, dann A präkompakt $\iff$ $\overline{A}$ kompakt.

Satz. Sei $A \subset \mathbb{K}^n$. Dann gilt: • A präkompakt $\iff$ A beschränkt,

- A kompakt $\iff$ A abgeschlossen und beschränkt (Heine-Borel).

Lemma. Jeder endlich-dimensionale Unterraum eines normierten Raumes ist vollständig und daher abgeschlossener Unterraum.

Lemma. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Ist $Y \subset X$ und $(Y, d|_{Y\times Y})$ vollständig, so ist Y abgeschlossen in X.

Satz. Für jeden normierten Raum X gilt:

$$\overline{B_1(0)} \text{ kompakt} \iff \dim(X) < \infty.$$

Satz. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ kompakt. Dann gibt es zu $x \in X$ ein $a \in A$ mit $d(x,a) = \operatorname{dist}(x,A)$.

Def. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, Y ein Banachraum und $A \subset \mathcal{C}^0(S,Y)$. A heißt **gleichgradig stetig**, falls $\sup\limits_{f\in A} \|f(x) - f(y)\| \xrightarrow[\|x-y\|\to 0]{} 0$.

Satz (Arzelà-Ascoli)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, Y ein endlich-dimensionaler Banachraum und $A \subset \mathcal{C}^0(S,Y)$. Dann gilt

$$A \text{ präkompakt} \iff A \text{ ist pktw. beschränkt und gleichgradig stetig.}$$

Def. Sei $\varphi \in L^1(\lambda_n, \mathbb{R})$, $f \in L^p(\lambda_n, Y)$ mit $p \in [1,\infty]$. Dann heißt

$$(\varphi * f) : \mathbb{R}^n \to Y, \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \cdot f(y)\,\mathrm{d}y$$

Faltung von φ mit f. Es gilt $\varphi * f \in L^p(\lambda_n, Y)$.

Satz. Es gilt in diesem Fall die Faltungsabschätzung

$$\|\varphi * f\|_{L^p(\lambda_n,Y)} \leq \|\varphi\|_{L^1(\lambda_n,\mathbb{R})} \cdot \|f\|_{L^p(\lambda_n,Y)}.$$

Satz. $\operatorname{supp}(\varphi * f) \subset \{x + y \mid x \in \operatorname{supp}(\varphi), y \in \operatorname{supp}(f)\}$

Lemma. Ist $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\lambda_n, \mathbb{R})$, $f \in L^p(\lambda_n, \mathbb{R})$, so ist $\varphi * f \in \mathcal{C}^\infty(\lambda_n, \mathbb{R})$ und für einen beliebigen Multi-Index s gilt: $\partial^s(\varphi * f) = (\partial^s\varphi) * f$.

Bemerkung. $L^1(\lambda_n, \mathbb{K})$ ist mit der Faltung eine Banach-Algebra.

Def. Eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt (allgemeine) **Dirac-Folge**, falls

$$\varphi_k \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k\,\mathrm{d}\lambda_n = 1, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\rho(0)} \varphi_j\,\mathrm{d}\lambda_n \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Satz. Sei $\varphi \in L^1(\lambda^n, \mathbb{R})$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}\lambda_n = 1$. Setze

$$\varphi_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \epsilon^{-n} \cdot \varphi(\tfrac{x}{\epsilon}).$$

Dann ist $(\varphi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ eine allgemeine Dirac-Folge.

Def. Sei $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, sodass $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt die Folge $(\varphi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ aus obigem Satz **Standard-Dirac-Folge**.

Lemma. Sei $p \in [1,\infty[$. Dann gilt für $f \in L^p(\lambda_n, Y)$:

- $\|f(\cdot + h) - f\|_{L^p(\lambda_n)} \xrightarrow{|h|\to 0} 0$ mit $h \in \mathbb{R}^n$.
- Ist $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Dirac-Folge, so gilt $\varphi_k * f \xrightarrow{k\to\infty} f$ in $L^p(\lambda_n, Y)$.

Satz. Sei $p \in [1,\infty[$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und Y ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega, Y)$ dicht in $L^p(\Omega, Y)$.

Satz (M. Riesz)**.** Sei $p \in [1,\infty[$ und Y ein endlich-dimensionaler Banachraum. Dann ist $A \subset L^p(\lambda_n, Y)$ präkompakt genau dann, wenn

- $\sup\limits_{f\in A} \|f\|_{L^p(\lambda_n,Y)} < \infty$,
- $\sup\limits_{f\in A} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus B_R(0))} \xrightarrow{R\to\infty} 0$,
- $\sup\limits_{f\in A} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^p(\lambda_n,Y)} \xrightarrow{|h|\to 0} 0$ mit $h \in \mathbb{R}^n$.

Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Für $g \in L^1(\Omega, Y)$ sind dann äquivalent:

- Für alle $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty$ gilt $\int_\Omega (\xi \cdot g)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Es gilt $g \overset{\text{f.ü.}}{=} 0$ in Ω.
- Für alle beschränkten $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ mit $\overline{E} \subset \Omega$ gilt $\int_E g\,\mathrm{d}x = 0$.

Lemma. Für $p \in [1,\infty[$ ist $W^{m,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$.

3. Lineare Operatoren

Notation. Seien im Folgenden X, Y und Z normierte $\mathbb{K}$-VRe.

Notation. Für lineare Abb. $T : X \to Y$ und $S : Y \to Z$ schreibe

$$Tx := T(x), \quad Sy := S(y), \quad ST := S \circ T.$$

Satz. Sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen X und Y. Dann sind äquivalent:

- $\exists C > 0 : \forall x \in X : \|Tx\| \leq C \cdot \|x\|$.
- T ist stetig.
- T ist stetig in $x_0 \in X$.
- $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| < \infty$.

Bemerkung. Wenn X endlich-dimensional ist, dann ist jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ stetig.

Def. Seien X, Y Vektorräume mit einer Topologie. Dann heißt

$$\mathcal{L}(X,Y) := \{T : X \to Y \mid X \text{ ist linear und stetig }\}$$

Raum der **linearen stetigen Operatoren** zw. X und Y mit Norm

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|.$$

Falls die Stetigkeit nicht nur topologisch, sondern bezüglich einer Norm gilt, so redet man von **linearen beschränkten Operatoren**.

Notation. $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$

Bemerkung. Die linearen stetigen Operatoren zwischen VR bilden eine Kategorie, das heißt insbesondere, dass die Identitätsabbildung von einem VR in sich selbst sowie die Verkettung zweier linearer stetiger Operatoren wieder linear und stetig ist.

Satz.
- Ist Y ein Banachraum, dann auch $\mathcal{L}(X,Y)$.
- $\mathcal{L}(X)$ ist eine Banachalgebra (bzgl. $\circ$), falls X Banachraum.

Satz. Für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $x \in X$ gilt: $\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X$.

Def. Der Raum $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ heißt **Dualraum** von X. Die Elemente von X' heißen **lineare Funktionale**. Schreibe

$$\langle x', x\rangle_{X'\times X} := x'(x) \quad \text{für } x' \in X' \text{ und } x \in X \text{ (duale Paarung).}$$

Def. Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann heißt

$$\ker T := \{x \in X \mid Tx = 0\} \quad \textbf{Kern} \text{ von } T,$$
$$\operatorname{im} T := T(X) := \{Tx \mid x \in X\} \quad \textbf{Bild} \text{ von } T.$$

Bemerkung. Aus der Stetigkeit von T folgt, dass $\ker T$ ein abgeschlossener Unterraum von X ist.

Def. Der **adjungierter Operator** von $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ist

$$T' : Y' \to X', \quad y' \mapsto y' \circ T.$$

Satz. Es gilt $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$ und $\|T'\|_{\mathcal{L}(Y',X')} = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Beispiel. Seien $p, q \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $g \in L^q(S, \mathbb{K})$. Dann ist ein Funktional $T_g \in (L^p(S,\mathbb{K}))'$ definiert durch

$$T_g : L^p(S,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto \int_S f \cdot \overline{g}\,\mathrm{d}\mu.$$

Satz. Sei X Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\limsup\limits_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} < 1$. Dann ist $(\mathrm{Id} - T)$ bijektiv und $(\mathrm{Id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ mit

$$(\mathrm{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty T^n.$$

Bemerkung. Damit die Voraussetzung erfüllt ist, reicht $\|T\| < 1$.

Satz. Seien $X \neq \{0\}$, $Y \neq \{0\}$ Banachräume und $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$. Falls T invertierbar ist mit $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, dann auch S.

Bemerkung. Die Menge aller invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(X,Y)$ ist somit eine offene Teilmenge.

Satz. Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und X ein Banachraum. Dann gilt für $T \in \mathcal{L}(X)$:

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} < \rho \implies f(T) := \sum_{n=0}^\infty a_n T^n \in \mathcal{L}(X).$$

Beispiel. Die Exponentialfunktion auf einem Banachraum X ist

$$\exp : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X), \quad T \mapsto \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} T^n.$$

Für $T, S \in \mathcal{L}(X)$ mit $TS = ST$ gilt $\exp(T+S) = \exp(T) \circ \exp(S)$.

Beispiel. Der Logarithmus auf einem Banachraum X ist

$$\log : \{T \in \mathcal{L}(X) \mid \|\mathrm{Id} - T\| < 1\} \to \mathcal{L}(X), \quad T \mapsto -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(\mathrm{Id} - T)^n.$$

Def. Sei $\Omega \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n$ und $p \in [1,\infty]$. Dann heißt

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid \text{Für alle präkompakten } D \subset \mathbb{R}^n \text{ mit } D \subset \Omega \text{ ist } f|_D \in L^p(D)\}.$$

Raum der zur p-ten Potenz **lokal in Ω integrierbaren Fktn**.

Bemerkung. Analog ist $W^{m,p}_{\mathrm{loc}}$ definiert.

Def. Sei $\Omega \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n$ und für Multi-Indizes s mit $|s| \le m$ Funktionen $a_s : \Omega \to \mathbb{K}$ gegeben. Dann definiert

$$(Tf)(x) := \sum_{|s|\le m} a_s(x) \cdot \partial^s f(x)$$

einen **linearen Differentialoperator** der Ordnung m mit Koeffizienten a_s. Z. B. ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^m(\Omega), \mathcal{C}^0(\Omega))$.

4. Lineare Funktionale

Satz (Rieszscher Darstellungssatz)**.** Ist X ein Hilbertraum, so ist

$$J : X \to X', \quad x \mapsto y \mapsto \langle J(x), y\rangle_{X'\times X} := (y \mid x)_X$$

ein isometrischer konjugiert lin. Isomorphismus, d h. für $x, y \in X$ gilt:
- $\forall \alpha \in \mathbb{K} : J(\alpha x + y) = \overline{\alpha} Jx + Jy$ • $\|Jx\|_{X'} = \|x\|_X$

Umformulierung. Zu jedem $x' \in X'$ gibt es genau ein $x_0 \in X$ mit

$$\forall x \in X : \langle x', x\rangle_{X'\times X} = (x \mid x_0)_X \quad \text{und} \quad \|x'\|_{X'} = \|x_0\|_X.$$

Lemma. Sei X ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ koerziv, d. h.

$$\exists\, c_0 > 0 : \forall x \in X : \operatorname{Re}(x \mid Ax)_X \ge c_0 \cdot \|x\|_X^2.$$

Dann ist A invertierbar in $\mathcal{L}(X)$ und $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{c_0}$.

Satz (Lax-Milgram)**.** Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $a : X \times X \to \mathbb{K}$ sesquilinear. Es gebe Konstanten c_0 und C_0 mit $0 < c_0 \le C_0 < \infty$, sodass für alle $x, y \in X$ gilt:
- $|a(x,y)| \le C_0 \cdot \|x\|_X \cdot \|y\|_X$ (Stetigkeit)
- $\operatorname{Re} a(x,x) \ge c_0 \cdot \|x\|_X^2$ (Koerzivität)

Dann existiert genau eine Abbildung $A : X \to X$ mit

$$a(y,x) = (y \mid Ax)_X \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Außerdem gilt: $A \in \mathcal{L}(X)$ ist ein invertierbarer Operator mit

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \le C_0 \quad \text{und} \quad \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \tfrac{1}{c_0}.$$

Korollar. Sei $A \in \mathcal{L}(X)$ der Operator aus dem Satz von Lex-Milgram und J_X die Isometrie aus dem Rieszschen Darstellungssatz. Zu $x' \in X'$ ist dann $x := A^{-1}J^{-1}x'$ die eindeutige Lösung zu

$$a(y,x) = x'(y) \quad \text{für alle } y \in X.$$

Es gilt die Stabilitätsaussage $\|x\|_X \le \frac{1}{c_0}\|x'\|_{X'}$. Falls $a : X \times X \to \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt ist, so ist x das eindeutige Minimum von

$$E(y) := \tfrac{1}{2} a(y,y) - \operatorname{Re} x'(y).$$

Satz. Seien $p \in [1,\infty[$ und p' duale Exponenten und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann definiert

$$J : L^p(\Omega) \to (L^{p'}(\Omega))', \quad f \mapsto g \mapsto \int_\Omega g \cdot \overline{f} \,\mathrm{d}\lambda_n$$

einen konjugiert linearen isometrischen Isomorphismus. Für $p = 2$ ist J gerade der Isomorphismus aus dem Rieszschen Darstellungssatz.

Satz (Hahn-Banach)**.** Sei X ein $\mathbb{R}$-VR und
- $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear, d. h. für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ gelte
$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \text{und} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x),$$
- $f : Y \to \mathbb{R}$ linear auf einem Unterraum $Y \subset X$ und
- $f(x) \le p(x)$ für $x \in Y$.

Dann gibt es eine lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = f(x) \text{ für } x \in Y \quad \text{und} \quad F(x) \le p(x) \text{ für } x \in X.$$

Korollar. Sei $(X, \|{-}\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und Y ein Unterraum. Dann gibt es zu $y \in Y'$ ein $x' \in X'$ mit

$$x'|_Y = y' \quad \text{und} \quad \|x'\|_{X'} = \|y\|_{Y'}.$$

Satz. Sei Y abgeschlossener Unterraum des normierten Raumes X und $x_0 \in X \setminus Y$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit

$$x'|_Y = 0, \quad \|x'\|_{X'} = 1 \quad \text{und} \quad \langle x', x_0\rangle = \operatorname{dist}(x_0, Y).$$

Satz. Es gibt dann auch ein $x' \in X'$ mit

$$x'|_Y = 0, \quad \|x'\|_{X'} = (\operatorname{dist}(x_0,Y))^{-1} \quad \text{und} \quad \langle x', x_0\rangle = 1.$$

Bemerkung. Der Satz kann als Verallgemeinerung des Projektionssatzes für Hilberträume im linearen Fall aufgefasst werden: Ist X Hilbertraum mit abgeschlossenem Unterraum Y, so definiere

$$\langle x', x\rangle_{X'\times X} := \left(x \,\middle|\, \tfrac{x_0 - Px_0}{\|x_0 - Px_0\|_X}\right)_X,$$

wobei P die orthogonale Projektion auf Y sei. Dann gilt:

$$x'|_Y = 0, \quad \langle x', x_0\rangle_{X'\times X} = \|x_0 - Px_0\|_X \quad \text{und} \quad \langle x', x\rangle \le \|x\|_X.$$

Korollar. Sei X ein normierter Raum und $x_0 \in X$. Dann gilt
- Ist $x_0 \ne 0$, so ex. $x_0' \in X'$ mit $\|x_0'\| = 1$ und $\langle x_0', x_0\rangle_{X'\times X} = \|x_0\|_X$.
- Ist $\langle x', x_0\rangle_{X'\times X} = 0$ für alle $x' \in X'$, so ist $x_0 = 0$.
- Durch $Tx' := \langle x', x_0\rangle_{X'\times X}$ für $x' \in X'$ ist $T \in \mathcal{L}(X', \mathbb{K}) = X''$, dem Bidualraum, definiert mit $\|T\|_{X''} = \|x_0\|_X$.

5. Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Satz (Baire'scher Kategoriensatz)**.** Es sei $X \ne \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Mengen $A_k \overset{\bullet}{\subset} X$, sodass $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Dann gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(A_{k_0}) \ne \emptyset$.

Korollar. Jede Basis eines ∞-dim. Banachraumes ist überabzählb.

Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** Es sei $X \ne \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum, Y ein normierter Raum und $F \subset \mathcal{C}^0(X,Y)$ eine Menge von Funktionen. Dann gilt:

$$\forall x \in X : \sup_{f\in F} \|f(x)\|_Y < \infty \implies \exists x_0 \in X, \epsilon > 0 : \sup_{x \in B_\epsilon(x_0)} \sup_{f\in F} \|f(x)\| < \infty.$$

Satz (Banach-Steinhaus)**.** Es sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Dann gilt:

$$\forall x \in X : \sup_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty \implies \sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Def. Seien X und Y topologische Räume, so heißt $f : X \to Y$ **offen**, falls für alle offenen $U \overset{\circ}{\subset} X$ das Bild $f(U) \subset Y$ offen ist.

Bemerkung. Ist f bijektiv, so ist f genau dann offen, wenn f^{-1} stetig ist. Sind X, Y normierte Räume und ist $T : X \to Y$ linear, so gilt: T ist offen $\iff \exists\, \delta > 0 : B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$.

Satz (von der offenen Abbildung)**.** Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist T genau dann surjektiv, wenn T offen ist.

Satz (von der inversen Abbildung)**.** Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijektiv, so ist T^{-1} stetig, also $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Satz (vom abgeschlossenen Graphen)**.** Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear. Dann ist $\operatorname{Graph}(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$ genau dann abgeschlossen, wenn T stetig ist. Dabei ist $\operatorname{Graph}(T) \subset X \times Y$ mit der **Graphennorm** $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

6. Schwache Konvergenz

Def. Sei X ein Banachraum.
- Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X **konvergiert schwach** gegen $x \in X$ (notiert $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$), falls für alle $x' \in X'$ gilt:
$$\langle x', x_k\rangle_{X'\times X} \xrightarrow{k\to\infty} \langle x', x\rangle_{X'\times X}$$
- Eine Folge $(x_k')_{k\in\mathbb{N}}$ in X' **konvergiert schwach*** gegen $x' \in X'$ (notiert $x_k' \xrightarrow[*]{k\to\infty} x'$), falls für alle $x \in X$ gilt:
$$\langle x_k', x\rangle_{X'\times X} \xrightarrow{k\to\infty} \langle x', x\rangle_{X'\times X}$$
- Analog sind **schwache** und **schwache* Cauchyfolgen** definiert.
- Eine Menge $M \subset X$ (bzw. $M \subset X'$) heißt **schwach folgenkompakt** bzw. **schwach* folgenkompakt**, falls jede Folge in der Menge M eine schwach (bzw. schwach*) konvergente Teilfolge besitzt deren Grenzwert wieder in M liegt.

Bemerkung. Der schwache bzw. schwache* Grenzwert einer Folge ist eindeutig. Aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz.

Satz. Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist durch

$$J_X : X \to X'', \quad x \mapsto x' \mapsto \langle Jx, x'\rangle_{X''\times X'} := \langle x', x\rangle_{X'\times X}$$

eine isometrische Abbildung $J_X \in \mathcal{L}(X, X'')$ definiert.

Satz. Es gilt für $x, x_k \in X$, $x', x_k' \in X'$:

$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \text{ in } X \iff J_x x_k \xrightarrow[*]{k\to\infty} J_x x \text{ in } X''$$

$$x_k' \xrightarrow{k\to\infty} x' \text{ in } X' \implies x_k' \xrightarrow[*]{k\to\infty} x' \text{ in } X'$$

Lemma. • Aus $x'_k \xrightarrow[*]{k\to\infty} x'$ in X' folgt $\|x'\|_{X'} \le \liminf_{k\to\infty} \|x'_k\|_{X'}$, aus $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ in X folgt $\|x\|_X \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X$.

- Schwach bzw. schwach* konvergente Folgen sind beschränkt.
- Aus $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ in X und $x'_k \xrightarrow[*]{k\to\infty} x'$ in X' folgt $\langle x'_k, x_k\rangle_{X'\times X} \xrightarrow{k\to\infty} \langle x', x\rangle_{X'\times X}$. Dasselbe folgt mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ in X und $x'_k \xrightarrow{k\to\infty} x'$ in X'.

Achtung. In der letzten Behauptung müssen wir voraussetzen, dass mindestens eine Folge stark konvergiert. Für beidesmal schwache/schwache* Konvergenz ist die Aussage i. A. falsch.

Beispiel. Seien $p \in [1,\infty[$, p' duale Exponenten und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann gilt für $f, f_k \in L^p(\Omega)$ (jeweils mit $k\to\infty$):

$$f_k \rightharpoonup f \text{ in } L^p(\Omega) \iff \forall g \in L^{p'}(\Omega) : \int_\Omega f_k \cdot \overline{g}\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_\Omega f \cdot \overline{g}\,\mathrm{d}x$$

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $p \in [1,\infty]$, $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Für $u, u_k \in W^{m,p}(\Omega)$ gilt dann (jeweils mit $k\to\infty$):

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{m,p}(\Omega) \iff \forall s, |s| \le m : \partial^s u_k \rightharpoonup \partial^s u \text{ in } L^p(\Omega)$$

Satz (Banach-Alaoglu)**.** Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist die abgeschl. Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X'$ schwach* folgenkompakt.

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Dann ist $L^1(\lambda_n)$ separabel (Approx. durch elem. Funktionen). Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty(\Omega)$ beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und $f \in L^\infty(\Omega)$, sodass

$$\int_\Omega f_{k_l} x \cdot \overline{g}\,\mathrm{d} \xrightarrow{l\to\infty} \int_\Omega f \cdot \overline{g}\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } g \in L^1(\Omega).$$

Bemerkung. Schwach*-Konvergenz impliziert eine sogenannte Schwach*-Topologie in dem Sinne, dass man sagt, eine Folge $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X' ist bzgl. dieser Topologie konvergent, wenn sie punktweise für alle $x \in X$ konvergiert.

Def. Sei X ein Banachraum und J_X die Isometrie bzgl. des Bidualraumes. Dann heißt X **reflexiv**, falls J_X surjektiv ist.

Lemma. Sei X ein Banachraum.

- Ist X reflexiv, so stimmen schwache* und schwache Konvergenz in X' überein, d.h. für eine Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X' und $x' \in X'$ gilt

$$x'_n \xrightarrow{n\to\infty} x' \text{ in } X' \quad \iff \quad x'_n \xrightarrow[*]{n\to\infty} x' \text{ in } X'.$$

- Ist X reflexiv, dann auch jeder abgeschlossene Unterraum von X.
- Ist $T : X \to Y$ ein Iso, so gilt: X reflexiv $\iff$ Y reflexiv.
- Es gilt: X reflexiv $\iff$ X' reflexiv.

Lemma. Für jeden Banachraum X gilt:

$$X' \text{ separabel} \implies X \text{ separabel}.$$

Bemerkung. Die Umkehrung gilt i. A. nicht! Gegenbeispiel: $X := L^1$.

Satz (Eberlein-Shmulyan)**.** Sei X reflexiver Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.

Beispiele. • Hilberträume X sind reflexiv (Folgerung aus dem Rieszschen Darstellungssatz). Daher: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X, so existiert eine Teilfolge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und $x \in X$, sodass

$$(y\,|\,x_{k_l})_X \xrightarrow{l\to\infty} (y\,|\,x)_X \quad \text{für alle } y \in X.$$

- Seien $p \in]1,\infty[$, p' duale Exponenten und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.
- L^1 und L^∞ sind genau dann nicht reflexiv, wenn sie unendlich-dimensional sind.

Bemerkung. Analog zur schwach*-Topologie kann man auch eine schwache Topologie einführen.

Satz (Trennungssatz)**.** Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ nicht leer, abgeschlossen, konvex und $x_0 \in X \setminus M$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{Re}\langle x', x_0\rangle_{X'\times X} > \alpha \quad \text{und} \quad \forall x \in M : \mathrm{Re}\langle x', x\rangle_{X'\times X} \le \alpha.$$

Bemerkung. Dann ist $\{x \in X \mid \mathrm{Re}\langle x', x\rangle_{X'\times X} = \alpha\}$ eine Hyperebene, die M und x_0 trennt.

Satz. Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ abgeschlossen und konvex. Dann ist M schwach folgenabgeschlossen, d. h. für jede Folge $(x_k)_{k\in N}$ in M und $x \in X$ gilt:

$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \text{ in } X \implies x \in M.$$

Lemma (Mazur)**.** Sei X ein normierter Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$. Dann gilt $x \in \overline{\mathrm{conv}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}}$.

Satz. Sei X ein reflexiver Banachraum und $M \subset X$ nicht leer, konvex und abgeschlossen. Dann gibt es zu jedem $\widetilde{x} \in X$ ein $x \in M$ mit $\|x - \tilde{x}\| = \mathrm{dist}(\widetilde{x}, M)$.

Beispiel. • Sei $M = W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann ist die eindeutige Lösbarkeit des zugehörigen (schwachen) Dirichlet-Problems gesichert.

- Sei $M = \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \int_\Omega u\,\mathrm{d}x = 0\}$ und gelte $\int_\Omega f\,\mathrm{d}x = 0$. Dann sichern Punkt 3, 4 die eindeutige Lösbarkeit des zugehörigen Neumann-Problems.
- Seien $u_0, \psi_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ gegeben und $u_0(x) \ge \phi_0(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Definiere $M = \{v \in W^{1,2}(\Omega) \mid v = u_0 \text{ auf } \partial\Omega, v \ge \psi \text{ in } \Omega\}$. Dann sichern die Punkte 1 bzw. 2 und 4 die eindeutige Existenz einer Lösung dieses Hindernis-Problems.

7. Endlich-dimensionale Approximation

Lemma. Ist X ∞-dimensionaler Raum, so sind äquivalent:

- X ist separabel.
- Es gibt endlich-dim. Unterräume $\{X_n \subset X \mid n\in\mathbb{N}, \dim X_n < \infty\}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n \subset X_{n+1} \quad \text{und} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ dicht in } X.$$

- Es gibt endlich-dim. Unterräume $\{E_n \subset X \mid n\in\mathbb{N}, \dim E_n < \infty\}$ mit

$$\forall n \neq m : E_n \cap E_m = \{0\} \quad \text{und} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_0 \oplus \ldots \oplus E_n) \text{ dicht in } X.$$

- Es gibt eine linear unabhängige Menge $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, sodass $\mathrm{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X liegt.

Def. Sei X normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt **Schauder-Basis** von X, falls für alle $x \in X$ gilt:

$$\exists \text{ eindeutige Folge } (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{K} : \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k \xrightarrow{n\to\infty} x \text{ in } X.$$

Bemerkung. Seien X und $\widetilde{X}$ Banachräume mit Schauderbasen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\widetilde{e}_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und $S \in \mathcal{L}(X, \widetilde{X})$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte „unendliche Matrix“ $(s_{k,l})_{k,l\in\mathbb{N}}$, sodass

$$\forall x = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k e_k \in X : \quad Sx = \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty \alpha_k s_{k,l} \widetilde{e}_l.$$

Def. Ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Schauder-Basis eines Banachraumes X, dann definiere die **duale Basis** $(e'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von X' durch

$$e'_i : X \to \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^\infty \alpha_k e_k \mapsto \alpha_i.$$

Def. Sei X ein Prähilbertraum.

- Eine Menge $\{e_k \in X \mid k \in N\}$, $N \subset \mathbb{N}$ heißt **Orthogonalsystem**, falls $(e_k\,|\,e_l) = 0$ für $k \neq l$ und $e_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.
- Falls zusätzlich $\|e_k\| = 1$ für alle $k \in N$ gilt, so heißt die Menge **Orthonormalsystem** (ONS).

Lemma (Besselsche Ungleichung)**.** Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein (endliches) ONS des Prähilbertraumes X. Dann gilt für alle $x \in X$ und $n \in N$:

$$\begin{aligned} 0 \le \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |(x\,|\,e_k)|^2 &= \|x - \sum_{k=0}^\infty (x\,|\,e_k)\, e_k\|^2 \\ &= \mathrm{dist}(x, \mathrm{span}\{e_0, \ldots, e_n\})^2. \end{aligned}$$

Satz. Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ONS des Prähilbertraumes X. Dann äquivalent:

- $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Schauder-Basis.
- $\mathrm{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in X.
- $\forall x \in X : x = \sum_{k=0}^\infty (x\,|\,e_k)\, e_k$
- $\forall x \in X : \|x\|^2 = \sum_{k=0}^\infty |(x\,|\,e_k)|^2$
- $\forall x, y \in X : (x\,|\,y) = \sum_{k=0}^\infty (x\,|\,e_k)\,\overline{(y\,|\,e_k)}$ (Parseval-Identität)

Def. Falls eine der Eigenschaften aus dem Satz erfüllt ist, dann heißt $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **Orthonormalbasis** (ONB).

Satz. Jeder ∞-dimensionale Hilbertraum X über $\mathbb{K}$ ist genau dann separabel, wenn X eine Orthonormalbasis besitzt.

Beweisidee. Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Bemerkung. In diesem Fall ist X isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{K})$ (durch Übergang zu Koeffizienten bzgl. Basis).

Beispiel. Eine ONB $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $L^2(]-\pi,\pi[,\mathbb{C})$ ist gegeben durch

$$e_k :]-\pi,\pi[\to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}. \qquad \text{(Fourier-Basis)}$$

Lemma. Zu $f \in L^2(]-\pi,\pi[,\mathbb{C})$ sei mit e_k wie im Beispiel

$$P_n f = \sum_{|k|\le n} (f\,|\,e_k)_{L^2}\, e_k \qquad \text{(\textbf{Fourier-Summe})}$$

Wenn f Lipschitz-stetig ist, dann gilt $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n f(x)$.

Bemerkung. Die Fourier-Summe erlaubt die explizite Approx. von f im Unterraum $X = \operatorname{span}\{e_k \,|\, |k| \le n\}$.

Lineare Projektionen

Def. Sei Y Unterraum des VR X. Eine lineare Abb. $P : X \to X$ heißt **(lineare) Projektion auf Y**, falls $P^2 = P$ und $\operatorname{im}(P) = Y$.

Lemma. Für eine Projektion $P : X \to X$ gilt:
- $X = \ker(P) \oplus \operatorname{im}(P)$
- $(\mathrm{Id}-P)$ ist Projektion mit $\ker(\mathrm{Id}-P)=\operatorname{im}(P)$, $\operatorname{im}(\mathrm{Id}-P)=\ker(P)$.

Lemma. Sei $P : X \to X$ linear. Dann gilt

$$P \text{ ist Projektion auf } Y \iff \operatorname{im}(P) \subset Y \text{ und } P|_Y = \mathrm{Id}$$

Bemerkung. Zu jedem Unterraum $Y \subset X$ ex. eine Projektion auf Y.

Def. Sei X ein normierter Raum. Dann heißt

$$\mathcal{P} := \{P \in \mathcal{L}(X) \,|\, P^2 = P\}.$$

Menge der **stetigen (linearen) Projektionen** auf X.

Lemma. Für $P \in \mathcal{P}(X)$ gilt:
- $\ker(P)$ und $\operatorname{im}(P)$ sind abgeschlossen • $\|P\| \ge 1$ oder $\|P\| = 0$

Satz (vom abgeschlossenen Komplement)**.** Sei X ein Banachraum, Y abgeschlossener Unterraum sowie Z ein Unterraum mit $X = Y \oplus Z$. Dann ist Z genau dann abgeschlossen, wenn es eine stetige Projektion $P \in \mathcal{P}(X)$ auf Y mit $\ker(P) = Z$ gibt.

Umformulierung. Ist Y abgeschlossener Unterraum eines Banachraumes X, so besitzt Y ein abgeschlossenes Komplement genau dann, wenn es eine stetige Projektion auf Y gibt.

Satz. Sei X ein normierter Vektorraum, E ein n-dimensionaler Unterraum mit Basis $e_1, ..., e_n$ und Y ein abgeschlossener Unterraum mit $Y \cap E = \{0\}$. Dann gilt:
- $\exists\, e_1', ..., e_n' \in X' : e_j'|_Y = 0$ und $\langle e_j', e_i\rangle = \delta_{ij}$.
- Es gibt eine stetige Projektion P auf E mit $Y = \ker(P)$, nämlich

$$P(x) := \sum_{j=1}^{n} \langle e_j', x\rangle e_j.$$

Lemma. Sei Y abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums X und P die orthogonale Projektion aus Kapitel 2, so gilt
- $P \in \mathcal{P}(X)$ • $\operatorname{im}(P) = Y$ • $\ker(P) = Y^\perp$ • $X = Y \perp Y^\perp$
- Ist $Z \subset X$ Unterraum mit $X = Z \perp Y$, so gilt $Z = Y^\perp$.

Lemma. Sei X Hilbertraum und $P : X \to X$ linear. Dann äquivalent:
- P ist die orthogonale Projektion auf $\operatorname{im}(P)$, d. h.

$$\forall\, x, y \in X : \|x - Px\| \le \|x - Py\|.$$

- $P^2 = P$ und $\forall\, x, y \in X : (Px\,|\,y) = (x\,|\,Py)$
- $\forall\, x, y \in X : (x - Px\,|\,Py) = 0$ • $P \in \mathcal{P}(X)$ mit $\|P\| \le 1$

Bemerkung. Sei X ein Banachraum, $\{X_n \subset X \,|\, n \in \mathbb{N}, \dim X_n < \infty\}$ endlich-dimensionale Unterräume mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : X_n \subset X_{n+1} \quad \text{und} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ liegt dicht in } X.$$

Sei P_n die Projektion auf X_n für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\forall\, x \in X : P_n x \xrightarrow{n\to\infty} x \text{ in } X.$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus folgt $C := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$.

8. Kompakte Operatoren

Def. Seien X und Y normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann heißt

$$\mathcal{K}(X, Y) := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \,|\, \overline{T(B_1(0))} \text{ ist kompakt}\}$$

Menge der **kompakten linearen Operatoren** von X nach Y.

Def. Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann äquivalent:
- $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ • $\overline{T(B_1(0))}$ kompakt • $T(B_1(0))$ präkompakt
- Für alle beschränkten $M \subset X$ ist $T(M) \subset Y$ präkompakt.
- Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X besitzt $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge.

Def. Seien X, Y normierte Räume. Eine lineare Abb. $T : X \to Y$ heißt **vollstetig**, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und $x \in X$ gilt:

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \text{ schwach in } X \implies Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} Tx \text{ stark in } Y.$$

Lemma. Seien X, Y Banachräume. Dann gilt:
- Für jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ gilt: Wenn T kompakt ist, dann ist T vollstetig. Ist X reflexiv, gilt auch die Rückrichtung.
- $\mathcal{K}(X, Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(X, Y)$.
- Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\dim \operatorname{im}(T) < \infty$, so ist $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.
- Sei Y ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Es gilt $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ genau dann, wenn es eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(X, Y)$ gibt mit $\forall\, n \in \mathbb{N} : \operatorname{im}(T_n) < \infty$, sodass $\|T - T_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
- Für $P \in \mathcal{P}(X)$ gilt: $P \in \mathcal{K}(X) \iff \dim \operatorname{im}(P) < \infty$.

Lemma. Für $T_1 \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $T_2 \in \mathcal{L}(Y, Z)$ gilt:

$$T_1 \text{ oder } T_2 \text{ kompakt} \implies T_2 T_1 \text{ kompakt}$$

9. Spektraltheorie

Def. Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist
- die **Resolventenmenge** von T definiert als

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \ker(\lambda\mathrm{Id} - T) = \{0\} \text{ und } \operatorname{im}(\lambda\mathrm{Id} - T) = X\},$$

- das **Spektrum** von T gleich $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$

Das Spektrum wird noch weiter zerlegt in das
- **Punktspektrum** $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \,|\, \ker(\lambda\mathrm{Id} - T) \ne \emptyset\}$,
- **kontinuierliche Spektrum**

$$\sigma_c(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \,|\, \ker(\lambda\mathrm{Id} - T) = \{0\} \text{ und } \operatorname{im}(\lambda\mathrm{Id} - T) \ne X, \text{ aber } \overline{\operatorname{im}(\lambda\mathrm{Id} - T)} = X\},$$

- **Restspektrum** (Residualspektrum)

$$\sigma_r(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \,|\, \ker(\lambda\mathrm{Id} - T) = \{0\} \text{ und } \overline{\operatorname{im}(\lambda\mathrm{Id} - T)} \ne X\}.$$

Bemerkung. Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Offenbar ist $\lambda \in \rho(T)$ genau dann, $\lambda\mathrm{Id} - T : X \to X$ bijektiv ist. Nach dem Satz von der inversen Abbildung ist dies äquivalent zur Existenz von

$$R(\lambda, T) := (\lambda\mathrm{Id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

der sogenannten **Resolvente** von T in λ. Als Funktion von λ heißt R auch **Resolventenfunktion**. Weiterhin ist $\lambda \in \sigma_p(T)$ offenbar äquivalent zu $\exists\, x \ne 0 : Tx = \lambda x$. Dann heißt λ **Eigenwert** und x **Eigenvektor** (oder Eigenfunktion). Der Unterraum $\ker(\mathrm{Id}\lambda - T)$ ist der **Eigenraum** von T zum Eigenwert λ. Er ist T-invariant.

Satz. Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist offen und $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ ist eine komplex-analytische Abbildung von $\rho(T)$ nach $\mathcal{L}(X)$. Es gilt

$$\forall\, \lambda \in \rho(T) : \|R(\lambda, T)\|^{-1} \le \operatorname{dist}(\lambda, \rho(T)).$$

Satz. Das Spektrum $\sigma(T)$ ist kompakt und nichtleer (für $X{\ne}0$) mit

$$\sup_{\lambda\in\sigma(T)} = \lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \le \|T\|. \qquad \text{(\textbf{Spektralradius})}$$

Lemma. • Ist $\dim X < \infty$, so ist $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.
- Ist $\dim X = \infty$ und $T \in K(X)$, so ist $0 \in \sigma(T)$.

Bemerkung. Im Punkt 2 ist i. A. 0 kein Eigenwert, also $0 \notin \sigma_p(T)$.

Def. Eine Abb. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt **Fredholm-Operator**, falls
- $\dim\ker(A) < \infty$ • $\operatorname{im}(A)$ ist abgeschlossen • $\operatorname{codim}\operatorname{im}(A) < \infty$

Der **Index** eines Fredholm-Operators ist definiert als

$$\operatorname{ind}(A) := \dim\ker(A) - \operatorname{codim}\operatorname{im}(A).$$

Satz. Sei $T \in \mathcal{K}(X)$. Dann gilt für $A = \mathrm{Id} - T$:
- $\dim\ker T < \infty$ • $\ker A = \{0\} \implies \operatorname{im}(A) = X$
- $\operatorname{im}(A)$ ist abgeschlossen • $\operatorname{codim}\operatorname{im}(A) = \dim\ker(A)$

Insbesondere ist A also ein Fredholm-Operator mit Index 0.

Satz (Spektralsatz für kompakte Operatoren)**.** Für $T \in K(X)$ gilt:
- Die Menge $\sigma(T) \setminus \{0\}$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Elementen mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt. Es gilt:

$$|\sigma(T)| = \infty \implies \overline{\sigma(T)} = \sigma_p(T) \cup \{0\}$$

- Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ gilt für die **Ordnung** n_λ von λ

$$1 \le n_\lambda := \max\{n \in \mathbb{N}_+ \,|\, \ker(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n-1} \ne \ker(\lambda\mathrm{Id} - T)^n\} < \infty.$$

  Die Zahl $\dim(\ker(\lambda\mathrm{Id} - T))$ heißt **Vielfachheit** von λ.
- Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ gilt $X = \ker(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n_\lambda} \oplus \operatorname{im}(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n_\lambda}$.

Beide Unterräume sind abgeschlossen und T-invariant und der **charakteristische Unterraum** $\ker(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n_\lambda}$ ist endlich-dim.
- Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist $\sigma(T|_{\operatorname{im}(\lambda\mathrm{Id}-T)^{n_\lambda}}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$
- Ist E_λ für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ die Projektion auf $\ker(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n_\lambda}$ gemäß der Zerlegung in Punkt 3, so gilt $E_\lambda E_\mu = \delta_{\lambda\mu} E_\lambda$ für $\lambda, \mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$