Zusammenfassung Algebra 1

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def. Ein **Polynom** mit Unbestimmter X hat die Form

$$f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n.$$

Def. Falls oben $a_0 \neq 0$ gilt, so ist $\partial f = n$ der **Grad** des Polynoms.

Def. Eine **Linearkombination** ist ein Polynom der Form

$$f(X_1, \ldots, X_n) = a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n.$$

Algorithmus (Euklid)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a>b>0$ gegeben. Schreibe

$$a = k \cdot b + r$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $r < b$. Wiederhole diesen Schritt mit $(a, b) := (b, r)$, falls $r \neq 0$.

Def. Ein **gemeinsames Maß** zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, sodass es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $a = k \cdot c$ und $b = l \cdot c$ gibt.

Bemerkung. Zwei Zahlen haben genau dann ein gemeinsames Maß, wenn der euklidische Algorithmus, angewandt auf diese Zahlen, abbricht.

Def. Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, die kein gemeinsames Maß besitzen, heißen **inkommensurabel**. Ihr Verhältnis ist dann **irrational**.

Satz. Die Längen der Seite und der Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks sind zueinander inkommensurabel.

Def. Der **goldene Schnitt** ist die Zahl

$$\Phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618.$$

Bemerkung. Der goldene Schnitt ist Lösung der Polynomgleichung

$$X^2 - X - 1 = 0.$$

Def. Ein **Binom** ist ein Ausdruck der Form $(a + b)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Def. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \leqslant n$ schreibe $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Satz. Es gilt $(a + b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Verfahren (Tschirnhaus-Transformation)**.** Sei eine Polynomgleichung der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

gegeben. Substituiere $x := \tilde{x} - \frac{a_1}{n}$. Dann hat die neue Gleichung keinen x^{n-1}-Term. Lösungen der beiden Gleichungen können durch Addieren bzw. Subtrahieren von $\frac{a_1}{n}$ ineinander überführt werden.

Korollar. Beim Lösen von Polynomgleichungen kann man also annehmen, dass kein x^{n-1}-Term vorhanden ist.

Korollar (Mitternachtsformel)**.** Die Polynomgleichung zweiten Grades $x^2 + ax + b = 0$ wird gelöst durch

$$x = -\tfrac{a}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Satz. Eine Nullstelle der kubischen Gleichung $x^3 + ax - b = 0$ ist gegeben durch

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{b}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\tfrac{b}{2} - \sqrt{D}} \quad \text{mit } D := \left(\tfrac{a}{3}\right)^3 + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2.$$

Problem. Was, wenn in der Quadratwurzel eine neg. Zahl steht?

Def. Für die **imaginäre Zahl** i gilt: $i^2 = -1$. Die **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ sind Zahlen der Form $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
Es gelten die Rechenregeln

$$(x + yi) \pm (u + vi) = (x + u) \pm (y + v)i$$
$$(x + yi) \cdot (u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i$$
$$\frac{1}{x + yi} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2} i$$

Def. Für eine komplexe Zahl $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißen

$$\Re(z) := x \ \textbf{Realteil} \quad \text{und} \quad \Im(z) := y \ \textbf{Imaginärteil}.$$

Def. Die Operation $x + yi \mapsto x - yi$ heißt **komplexe Konjugation**. Man notiert sie mit einem Querstrich, also $z \mapsto \overline{z}$ für $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung. Die komplexe Konjugation ist verträglich mit Addition und Multiplikation und sogar ein Körperautomorphismus.

Def. Der **Betrag** einer komplexen Zahl $z = x + yi$ ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Satz. Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

- $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ ($\triangle$-Ungl)
- $|z| \cdot |w| = |z \cdot w|$

Def. Die **Exponentialfunktion** ist die Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{x^k}{k!}.$$

Satz. Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Def. Die **Eulersche Zahl** ist die Zahl

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \approx 2{,}718.$$

Notation. Schreibe $e^y := \exp(y)$ für alle $y \in \mathbb{C}$.

Proposition. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ti}| = 1$.

Proposition. Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

- $e^{2\pi i} = 1$
- $e^{\pi i} = -1$
- $e^{(2\pi + t)i} = e^{ti}$
- $e^{ti} = \cos(t) + i \sin(t)$

Bemerkung. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich als $z = |z| \cdot e^{si}$ mit $s \in [0, 2\pi[$ darstellen. Mit $w = |w| \cdot e^{ti}$ gilt $z \cdot w = (|z| \cdot |w|) \cdot e^{i(s+t)}$.

Def. Für $z = |z| \cdot e^{ti} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißen die Zahlen

$$\sqrt[n]{|z|} e^{(t + k2\pi)i/n}$$

für $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ **n-te Wurzel** von z.

Def. Die **n-ten Einheitswurzeln** sind die Zahlen

$$\zeta_k := e^{2\pi i k/n} \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1.$$

Satz. Jedes normierte Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Def. Ein **Monoid** ist ein Tupel $(M, \cdot, e)$ bestehend aus einer Menge M mit einer Verknüpfung $\cdot : M \times M \to M$ und einem **neutralen Element** $e \in M$, sodass gilt:

- $\forall\, x, y, z \in G : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität)
- $\forall\, g \in G : e \cdot g = g = g \cdot e$ (Neutralität)

Def. Eine **Gruppe** ist ein Tupel $(G, \cdot, e)$ bestehend aus einer Menge G mit einer Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$ und einem **neutralen Element** $e \in G$ zusammen mit einer Inversion $-^{-1} : G \to G$, sodass:

- $\forall\, x, y, z \in G : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität)
- $\forall\, g \in G : e \cdot g = g = g \cdot e$ (Neutralität)
- $\forall\, g \in G : g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

Def. Ein **Ring** ist ein Tupel $(R, +, \cdot, 0, 1)$ bestehend aus einer Menge R, zwei Verknüpfungen $+, \cdot : R \times R \to R$ und zwei Elementen $0, 1 \in R$, sodass

- $(R, +, 0)$ eine Gruppe bildet,
- $(R, \cdot, 1)$ einen Monoid bildet und
- folgende Distributivgesetze für alle $a, b, c \in R$ erfüllt sind:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Def. Ein **Körper** ist ein Tupel $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ bestehend aus einer Menge $\mathbb{K}$, zwei Verknüpfungen $+, \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und zwei Elementen $0, 1 \in \mathbb{K}$, sodass

- $(\mathbb{K}, +, 0)$ eine Gruppe bildet,
- $(\mathbb{K} \backslash \{0\}, \cdot, 1)$ eine Gruppe bildet und
- folgende Distributivgesetze für alle $a, b, c \in R$ erfüllt sind:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Bemerkung. Jeder Körper ist auch ein Ring.

Notation. $\mathbb{K}[x] := \{\text{Polynome mit Koeffizienten in } \mathbb{K}\}$

Bemerkung. Die Menge aller Polynome über $\mathbb{K}$ bildet einen Ring.

Def. In einem Ring R teilt ein Element $g \in R$ ein anderes Element $f \in R$, geschrieben $g \mid f$, falls es ein $h \in R$ mit $g \cdot h = f$ gibt.

Bemerkung. Ein Ring, in dem Division mit Rest möglich ist (z. B. der Polynomring oder $\mathbb{Z}$), wird **euklidischer Ring** genannt. In solchen Ringen kann man den euklidischen Algorithmus ausführen.

Satz. Ist $x_0 \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle des Polynoms $f \in \mathbb{K}[x]$, dann gilt $(X - x_0) \mid f$, genauer $f = (x - x_0) \cdot g$ für ein $g \in \mathbb{K}[x]$ mit $\partial g = \partial f - 1$.

Korollar. Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ vom Grad $n \geqslant 1$ hat höchstens n Nullstellen.

Korollar. Wenn $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente hat, sind die Koeffizienten von jedem $f \in \mathbb{K}[x]$ durch die Fkt. f eindeutig bestimmt.

Satz. Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ ist ein Produkt von Polynomen vom Grad 1, sogenannten Linearfaktoren, also

$$f = a \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \quad \text{mit } a, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}.$$

Bemerkung. Die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ müssen nicht alle verschieden sein.

Def. Die Anzahl der Vorkommen einer Nullstelle x_i in obiger Produktdarstellung heißt **Vielfachheit** der Nullstelle.

Def. Die **Ableitung** des Polynoms

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$$

ist das Polynom

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a 1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Bemerkung. Sei x_i eine k-fache Nullstelle von $f \in \mathbb{C}[x]$. Dann ist x_i auch eine $(k-1)$-fache Nullstelle von f'.

Def. Ein Körper $\mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass jedes Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ in Linearfaktoren zerfällt, heißt **algebraisch abgeschlossen**.

Def. Eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ heißt **algebraisch**, wenn es ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$, $f \neq 0$ mit $f(c) = 0$ gibt.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass die Menge der algebraischen Zahlen ein abzählbarer, algebraisch abgeschlossener Körper ist.