

# Zusammenfassung Modellkategorien

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

*Bem.* Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

## Die Ordinalzahlen

**Def.** Eine **Wohlordnung** auf einer Menge  $S$  ist eine Totalordnung auf  $S$  bezüglich der jede nichtleere Teilmenge  $A \subseteq S$  ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel  $(S, \leq)$  bestehend aus einer Menge  $S$  und einer Wohlordnung  $\leq$  auf  $S$ .

*Bem.* Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in  $S$  keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen  $\dots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \dots$ .

*Bem.* Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

**Axiom** (Wohlordnungssatz). Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

**Def.** Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

**Def.** Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

*Bem.* Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit  $\mathcal{O}_n$  bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$[(S, \leq_S)] \leq [(T, \leq_T)] \iff \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leq_S) \rightarrow (T, \leq_T).$

**Notation.** •  $0 := [\emptyset]$ , •  $n := [\{1, \dots, n\}]$  für  $n \in \mathbb{N}$ , •  $\omega := [\mathbb{N}]$  mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

*Bem.* Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega^\omega, \dots$$

**Prinzip** (**Transfinite Induktion**).

Sei  $P : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbf{Prop}$  eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

**Def.** Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert:

Für  $\alpha = [(S, \leq_S)]$  und  $\beta = [(T, \leq_T)] \in \mathcal{O}_n$  ist

•  $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leq_{S \amalg T})]$ , wobei gilt:

$$\leq_{S \amalg T} \upharpoonright_{S \times S} := \leq_S, \quad \leq_{S \amalg T} \upharpoonright_{T \times T} := \leq_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$

•  $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leq_{S \times T})]$  mit der lexikogr. Ordnung

$$(s_1, t_1) \leq_{S \times T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leq_S s_2)$$

•  $\alpha^\beta := [\{ \text{Abb. } f : S \rightarrow T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S \}, \leq]$  mit

$$f < g : \iff \exists t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

*Bem.* Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null  $0 := [(\emptyset, \leq)] \in \mathcal{O}_n$ .

b) Die Nachfolgerzahl  $\alpha + 1$  einer Zahl  $\alpha \in \mathcal{O}_n$ .

c) Die Limeszahl  $\lim A := \sup A$  einer Teilmenge  $A \subset \mathcal{O}_n$ .

*Bem.* Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \text{b)} & \text{c)} \\ \alpha + 0 := \alpha & \alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1 & \alpha + \lim A := \lim \{ \alpha + \gamma \mid \gamma \in A \} \\ \alpha \cdot 0 := 0 & \alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha & \alpha \cdot \lim A := \lim \{ \alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A \} \\ \alpha^0 := 1 & \alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha & \alpha^{\lim A} := \lim \{ \alpha^\gamma \mid \gamma \in A \} \end{array}$$

**Def.** Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel  $(S, +, \cdot, 0)$ , sodass  $(S, +, 0)$  ein Monoid und  $(S, \cdot)$  eine Halbgruppe ist mit

$$\bullet a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \bullet a \cdot 0 = 0.$$

**Lem** (Rechenregeln in  $\mathcal{O}_n$ ). •  $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$  •  $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$   
•  $\alpha^0 = 1$  •  $0^\alpha = 0$  für  $\alpha > 0$  •  $1^\alpha = 1$  •  $\alpha^1 = \alpha$   
•  $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$  •  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

•  $\mathcal{O}_n$  ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)

• Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht!*

• Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.

• Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.

• Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:

$$\forall \beta < \gamma : \quad \alpha + \beta < \alpha + \gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \quad (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \quad (\alpha > 1).$$

**Lem.** Jedes  $\alpha \in \mathcal{O}_n$  kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \dots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$  und  $\beta_1 > \dots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$ .

## Kategorientheorie

**Def.** Eine (**schwache**) **2-Kategorie**  $\mathbb{C}$  besteht aus

- einer Ansammlung  $\text{Ob}(\mathbb{C})$  von Objekten,
- für jedes Paar  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  von Objekten einer Kategorie

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ A \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{array} B \right\},$$

• für jedes Tripel  $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$  von Objekten einem Funktor

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

• für jedes Objekt  $\mathcal{C} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$  einem Objekt  $\text{Id}_{\mathcal{C}} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ ,

• für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$  einem natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} : - \circ (- \circ -) \implies (- \circ -) \circ -,$$

wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \text{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$

• und für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$  natürlichen Isomorphismen

$$\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (- \circ \text{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

• Für alle  $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} K(H(GF)) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}}} & (KH)(GF) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{G}}} ((KH)G)H \\ \downarrow K\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} & & \alpha_{\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}} F \uparrow \\ K((HG)F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{G}}} & (K(HG))F \end{array}$$

• Für alle  $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathcal{C}$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{D}, \mathcal{E}}} & (G \circ \text{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \\ & \searrow G\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} & \swarrow \rho_{\mathcal{D}, \mathcal{E}} F \\ & G \circ F & \end{array}$$

**Bspe.** • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.

• Jede Kategorie  $\mathcal{C}$  ist natürlich eine 2-Kategorie.

• Die Kategorie der Ringe  $\mathbb{R}$  mit  $\text{Ob}(\mathbb{R}) := \{ \text{Ringe mit Eins} \}$  und  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) := \text{Kat. der } B\text{-}A\text{-Bimoduln mit } N \circ M := N \otimes_B M$  für  $M \in \text{Hom}(A, B)$  und  $N \in \text{Hom}(B, C)$ . Dabei ist  $\text{Id}_A := A$ .

**Def.** Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorien mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann  $\otimes$  anstelle von  $\circ$  geschrieben.

**Def.** Sei  $S : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Ein **Ende**  $\int_{\mathcal{C}} S(c, c) \in \text{Ob}(\mathcal{A})$

von  $S$  ist eine Familie  $\alpha_d : \int_{\mathcal{C}} S(c, c) \rightarrow S(c, c)$ ,  $d \in \text{Mor}(\mathcal{C})$  von

Morphismen in  $\mathcal{A}$ , sodass für alle  $(c \xrightarrow{f} c') \in \mathcal{C}$  das Diagramm

TODO: Diagramm einfügen!

kommutiert und  $\int_{\mathcal{C}} S(c, c)$  universell mit dieser Eigenschaft ist.

*Bem.* Enden sind spezielle Limiten.

*Bem.* Das duale Konzept ist das eines Koendes  $\int^{\mathcal{C}} S(c, c)$ .

**Bsp.** Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  zwei Funktoren. Dann ist  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(-), G(-)) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  ein Funktor mit Ende  $\int_{\mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) = \text{Nat}(F, G)$ .

**Satz** (Fubini). Sei  $S : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d, c)} S(d, d, c, c) \cong \int_{d, c} \int S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und  $\int_{\mathcal{C}} S(d, d', c, c)$  für alle  $d, d' \in \mathcal{D}$  existieren.

**Bsp.** Sei  $R$  ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt. Ein additiver Funktor  $R^{(\text{op})} \rightarrow \mathbf{Ab}$  ist nichts anderes als ein  $R$ -Linksmodul (bzw.  $R$ -Rechtsmodul). Dann ist

$$\int^{* \in R} A \otimes_Z B \cong A \otimes_R B.$$

**Def.** Sei  $\mathbb{C}$  eine 2-Kategorie. Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$ . Eine **Adjunktion** von  $F \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  und  $G \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  ist ein nat. Isomorphismus

$$\text{Hom}(F \circ -, -) \cong \text{Hom}(-, G \circ -),$$

d. h. Morphismen  $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$  und  $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ , sodass  $G\epsilon \circ \eta G = \text{Id}_G$  und  $\epsilon F \circ \eta F = \text{Id}_F$ . Man notiert  $F \dashv G$ .