

Zusammenfassung Modellkategorien

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Def. Eine (**schwache**) **2-Kategorie** \mathbb{C} besteht aus

- einer Ansammlung $\text{Ob}(\mathbb{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ A \begin{array}{c} \xrightarrow{F} B \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{G} B \end{array} \right\},$$

- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$ einem Objekt $\text{Id}_{\mathcal{C}} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$ einem natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} : - \circ (- \circ -) \Rightarrow (- \circ -) \circ -,$$

wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \text{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$

- und für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$ natürlichen Isomorphismen

$$\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (- \circ \text{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathbb{C}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} K(H(GF)) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, G}} & (KH)(GF) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, G}} ((KH)G)H \\ \downarrow K\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} & & \alpha_{\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, G} \uparrow \\ K((HG)F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}, G}} & (K(HG))F \end{array}$$

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathbb{C}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{D}, \mathcal{E}}} & (G \circ \text{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \\ & \searrow G\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} & \swarrow \rho_{\mathcal{D}, \mathcal{E}} F \\ & G \circ F & \end{array}$$

Bspe. • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.

- Jede Kategorie \mathcal{C} ist natürlich eine 2-Kategorie.
- Die Kategorie der Ringe \mathbb{R} mit $\text{Ob}(\mathbb{R}) := \{\text{Ringe mit Eins}\}$ und $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) := \text{Kat. der } B\text{-}A\text{-Bimoduln mit } N \circ M := N \otimes_B M$ für $M \in \text{Hom}(A, B)$ und $N \in \text{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\text{Id}_A := A$.

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann \otimes anstelle von \circ geschrieben.

Def. Sei $S : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $E \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ von S ist eine Familie $\alpha_c : E \rightarrow S(c, c)$, $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ von Morphismen in \mathcal{A} , sodass für alle $(f : c \rightarrow c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & S(c, c) & & \\ & \alpha_c \nearrow & & \searrow S(\text{id}_c, f) & \\ E & & & & S(c, c') \\ & \alpha_{c'} \searrow & & \nearrow S(f, \text{id}_{c'}) & \\ & & S(c', c') & & \end{array}$$

kommutiert, und E universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler **S-Keil**.

Notation. $E = \int_{\mathcal{C}} S(c, c)$.

Bem. Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden: $\lim F = \int_{\mathcal{C}} F(c)$; der Integrand ist $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$.

Bem. Das duale Konzept ist das eines **Anfangs** Koendes $\int_{\mathcal{C}} S(c, c)$.

Bsp. Seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_{\mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \cong \text{Nat}(F, G).$$

Satz (Fubini). Sei $S : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d, c)} S(d, d, c, c) \cong \iint_{d, c} S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und $\int_{\mathcal{C}} S(d, d', c, c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

Bsp. Sei R ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt $*$. Ein additiver Funktor $R^{(\text{op})} \rightarrow \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein R -Linksmodul (bzw. R -Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Lem (Ninja-Yoneda-Lemma). Für jede Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ gilt

$$F \cong \int_{\mathcal{C}} F(c) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

Def. Sei \mathbb{C} eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ist geg. durch Morphismen $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ (genannt **Eins**) und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ (**Koeins**) mit $G\epsilon \circ \eta G = \text{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \text{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.

Lem. R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bem. Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren. Dann gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\text{Hom}(F \circ -, -) \cong \text{Hom}(-, G \circ -)$$

Bsp. $\exists f \dashv f^* \dashv \forall f$

Bsp. Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein B - A -Modul M ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn M als Rechts- A -Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

Bem. Sind η und ϵ in $F \dashv G$ sogar Isomorphismen, so heißt $F \dashv G$ auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von F und G sowie einem der Morphismen ϵ, η) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

Kan-Erweiterungen

Def. Sei $\mathcal{A} \xleftarrow{T} \mathcal{M} \xrightarrow{K} \mathcal{C}$ ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE) (R, ϵ) von T längs K besteht aus

- einem Morph. $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$
 - einem 2-Morph. $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$,
- sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE $(S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}, \eta : S \circ K \Rightarrow T)$ gibt es genau ein $\sigma : S \Rightarrow R$ mit $\epsilon \circ \sigma K = \eta$. Notation: $R = \text{Ran}_K(T)$

Bem. Es sind äquivalent: • (R, ϵ) ist RKE von T längs K
• $\eta \mapsto \epsilon \circ \eta K : \text{Nat}(S, R) \rightarrow \text{Nat}(S \circ K, T)$ ist bij. $\forall S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$

Bem. Es gilt $R = \text{Ran}_K(T)$ genau dann, wenn es in $S \in [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ natürliche Isomorphismen $\text{Nat}(S, R) \cong \text{Nat}(S \circ K, T)$ gibt.

Prop. RKEs sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bspe. • Die RKE eines bel. Morphismus $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ längs $\text{Id}_{\mathcal{M}}$ existiert stets und ist gegeben durch $(T, T \circ \text{Id}_{\mathcal{M}} \Rightarrow T)$.

- In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\text{Ran}_K(T) = (\text{Hom}_{\mathcal{M}}(K, T), \quad \text{ev} : \text{Hom}_{\mathcal{M}}(K, T) \otimes_{\mathcal{C}} K \Rightarrow T).$$

Bsp. Sei $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{1}$, $*$ $\mapsto 1$ und $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von T längs K dasselbe wie ein Limes von T .

Thm. Seien $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ und $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren. Existiere für alle $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ der Limes $R(c) := \lim((f : c \rightarrow Km) \mapsto Tm)$. Dabei ist die Indexkategorie des Limes die Kommakat. $\Delta(c) \downarrow K$. Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ausdehnen und zwar zu einer RKE von T längs K .

Bem. Ist \mathcal{M} klein und \mathcal{C} lokal klein und ist \mathcal{A} vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$, $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktweise RKE**.

Lem. Eine RKE ist genau dann punktweise, wenn sie für alle $a \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ unter dem Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$ erhalten bleibt.

Thm. Sei $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Betrachte $K^* : [\mathcal{C}, \mathcal{A}] \rightarrow [\mathcal{M}, \mathcal{A}]$.

- Wenn ein Funktor $\text{Ran}_K : [\mathcal{M}, \mathcal{A}] \rightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ mit $K^* \dashv \text{Ran}_K$ ex., so ist $\text{Ran}_K(T)$ für alle $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ eine RKE von T längs K .
- Existiere für alle $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ eine RKE $\text{Ran}_K(T)$. Dann kann man die Zuordnung $T \mapsto \text{Ran}_K(T)$ zu einem Rechtsadjungierten von K^* ausdehnen.

Thm. Sei $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- G besitzt einen Linksadjungierten.
- $\text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}})$ existiert und $G \circ \text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}}) = \text{Ran}_G(G \circ \text{Id}_{\mathcal{A}})$.

In diesem Fall gilt $\text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}}) \dashv G$ und $\text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}})$ wird sogar von allen Morphismen $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Y}$ bewahrt.

Thm. Rechtsadjungierte bewahren RKE.

Kor. Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

Algebraische Strukturen in Kategorien

Def. Eine **Retrakt** ist ein Morphismus $r : Y \rightarrow X$, sodass ein Morphismus $i : X \rightarrow Y$ mit $r \circ i = \text{id}_X$ existiert. Sprechweise: X ist ein Retrakt von Y (vermöge i).

Bsp. Ein Modul U ist genau dann Retrakt von einem Modul M , wenn U ein direkter Summand von M ist.

Prop. „ $-$ ist Retrakt von $-$ “ ist eine reflexive und trans. Relation.

Def. Ein **Retrakt eines Morphismus** $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}$ ist ein Morph. $g : X \rightarrow Y$, sodass es ein komm. Diagramm folgender Form gibt:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & A \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{s} & B \end{array}$$

Bem. Ein Retrakt von $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ ist ein Retrakt von $f \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\rightarrow})$.

Prop. • Retrakte von Isomorphismen sind Isomorphismen.

• Sei $f \circ g = \text{id}$. Dann ist f ein Retrakt von $g \circ f$.

Prop. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist die Klasse $\{f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$ abgeschlossen unter Retrakten.

Def. Sei $i : A \rightarrow X$ und $p : E \rightarrow B$. Dann werden als äq. definiert:

- p ist **i -injektiv** • i ist **p -projektiv** • $i \sqsupseteq p$
- i hat die Linkshochhebungseigenschaft (LHHE) bzgl. p
- p hat die Rechtshochhebungseigenschaft (RHHE) bzgl. i
- Für alle f, g wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales λ , sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow i & \searrow \exists \lambda & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Bsp. Wegeliftung aus der Topologie: $i : \{0\} \rightarrow [0, 1]$ erfüllt die LHHE bezüglich allen Überlagerungen $\pi : E \rightarrow B$.

Bsp. Ein Objekt P einer ab. Kat. \mathcal{A} ist genau dann **projektiv**, wenn $(0 \rightarrow P)$ die LHHE bzgl. aller Epis in \mathcal{A} hat. Dual ist $I \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ injektiv g.d.w. alle Monos in \mathcal{A} die LHHE bzgl. $(I \rightarrow 0)$ besitzen.

Bsp. In **Set** gilt: Alle Inj. haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

Lem (Retrakt-Argument). Sei $f = q \circ j$.

- Ist f q -projektiv ($f \sqsupseteq q$), so ist f ein Retrakt von j .
- Ist f j -injektiv ($j \sqsupseteq f$), so ist f ein Retrakt von q .

Zellenkomplexe

Def. Sei λ eine Ordinalzahl. Eine **λ -Sequenz** in einer Kategorie \mathcal{C} ist ein kolimesbewahrender Funktor $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ (wobei man λ als Präordnungskategorie aller $\beta < \lambda$ auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus $X_0 \rightarrow \text{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$.

Bem. Kolimesbewahrung bedeutet: $\text{colim}_{\alpha < \beta} X_\alpha = X_\beta$ für alle $\beta < \lambda$.

Def. Sei \mathcal{C} eine kovollständige Kategorie, $I \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge.

- Ein **relativer I -Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer λ -Sequenz Z , sodass $\forall \alpha \in \mathcal{O}_n$ mit $\alpha + 1 < \lambda$ ein Pushoutdiagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & Z_\alpha \\ \downarrow f & \lrcorner & \downarrow \\ B & \longrightarrow & Z_{\alpha+1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Anklebeabbildung} \\ \leftarrow \text{Zelle} \end{array}$$

mit $f \in I$ existiert. Sprechweise: „ $Z_{\alpha+1}$ entsteht aus Z_α , indem wir B längs C ankleben“

- Ein Objekt $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **I -Zellenkomplex**, wenn der Morph. $0 \rightarrow A$ aus dem initialen Obj. ein relativer I -Zellenkomplex ist.

Bsp. CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind I -Zellenkomplexe mit $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geq 0\}$ (und $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$).

Bspe. • Identitäten $A \rightarrow A$ sind relative I -Zellenkomplexe.

• Das initiale Objekt ist ein absoluter I -Zellenkomplex.

Lem. Sei $Z : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ eine λ -Sequenz. Sei jeder Morphismus $Z_\beta \rightarrow Z_{\beta+1}$ ($\beta + 1 < \lambda$) ein Pushout eines Morphismus aus I . Dann ist die transfinite Komposition von Z ein I -Zellenkomplex.

Thm. Die Klasse der relativen I -Zellenkomplex ist abgeschl. unter:

- transfiniten Kompositionen • Isomorphismen • Koprodukten

Faktorisierungssysteme

Def. Eine Unterkat. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **links-saturiert**, falls \mathcal{L} abgeschl. ist unter Pushouts, transfiniten Kompositionen und Retrakten.

Lem. Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ links-saturiert. Dann ist \mathcal{L} unter Koprodukten abgeschlossen und enthält alle Isomorphismen.

Bsp. Sei $R \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$. Dann ist die Unterkategorie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ mit $\text{Mor}(\mathcal{L}) := \sqsupset R := \{i \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid \forall r \in R : i \sqsupseteq r\}$ links-saturiert.

Def. • $L \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **proj. abgeschlossen**, falls $L \supseteq \sqsupset(L^\sqsupset)$.

• $R \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **injektiv abgeschlossen**, falls $R \supseteq (\sqsupset L)^\sqsupset$.

Prop. • $\sqsupset(L^\sqsupset)$ ist die projektive Hülle von L , d. h. die kleinste Klasse von Morphismen, die projektiv abgeschl. ist und L umfasst.

- Die projektive Hülle von L ist links-saturiert. Ist L schon projektiv abgeschlossen, so ist L insbesondere links-saturiert.

Def. • Ein Paar (L, R) von Klassen von Morphismen von \mathcal{C} **faktorisiert** \mathcal{C} , falls $\forall f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) : \exists i \in L, p \in R : f = p \circ i$.

• Ein faktorisierendes Paar (L, R) heißt **schwaches Faktorisierungssystem** (SFS), falls $L = \sqsupset R$ und $R = L^\sqsupset$.

- Ein SFS (L, R) heißt **orth. Faktorisierungssystem**, falls jedes $i \in L$ die eindeutige LHHE bzgl. allen $p \in R$ erfüllt.

Prop. Sei (L, R) faktorisierend. Dann ist (L, R) genau dann ein SFS, wenn $L \sqsupseteq R$ und L und R unter Retrakten abgeschlossen sind.

Bsp. ($\{\text{Surjektionen}\}, \{\text{Injektionen}\}$) ist ein (S)FS in **Set**

Modellkategorien

Motto. Modellkat. sind ein Werkzeug, math. Theorien zu studieren.

Def. Eine Klasse $W \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ von Morphismen erfüllt die **2-aus-3-Eigenschaft**, falls für jede Komposition $h = g \circ f$ in \mathcal{C} gilt: Liegen zwei der drei Morphismen f, g, h in W , so auch der dritte.

Def. $W \subseteq \mathcal{C}$ wie eben heißt **Unterkat. schwacher Äquivalenzen**, falls W die 2-aus-3-Eig. erfüllt und abgeschl. unter Retrakten ist.

Bsp. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist $\mathcal{W} := F^{-1}(\{\text{Isos in } \mathcal{D}\})$ eine Unterkategorie schwacher Äquivalenzen.

Def. Ein Tripel $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ von Unterkategorien einer Kategorie \mathcal{M} heißt **Modellstruktur** auf \mathcal{M} , falls sowohl $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ als auch $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ schwache Faktorisierungssysteme sind und \mathcal{W} die 2-aus-3-Eigenschaft erfüllt.

Def. Eine bivollständige Kategorie \mathcal{M} zusammen mit einer Modellstruktur $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ heißt eine **Modellkategorie**.

Sprechweise. Man verwendet folgende Bezeichnungen und Pfeile:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{\sim} & \text{schwache Äquivalenz} \\ \mathcal{C} & \hookrightarrow & \text{Kofaserung} \\ \mathcal{C} \cap \mathcal{W} & \xrightarrow{\sim} & \text{azyklische Kofaserung} \\ \mathcal{F} & \rightarrow & \text{Faserung} \\ \mathcal{F} \cap \mathcal{W} & \xrightarrow{\sim} & \text{azyklische Faserung} \end{array}$$

Bem. Ist $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ eine Modellstruktur auf \mathcal{M} , so ist $(\mathcal{W}^{\text{op}}, \mathcal{F}^{\text{op}}, \mathcal{C}^{\text{op}})$ eine Modellstruktur auf \mathcal{M}^{op} .

Bem. Wegen $\mathcal{C} = \sqsupset(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ bzw. $\mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^\sqsupset$ ist das Datum $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ überbestimmt.

Bsp. Sei \mathcal{M} bivollständig. Sei $\mathcal{W} := \mathcal{C} := \{\text{Isos in } \mathcal{M}\}$. Dann wird \mathcal{M} mit $\mathcal{F} := \mathcal{M}$ eine Modellkategorie.

Prop. In einer Modellkategorie sind \mathcal{C} und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ links-saturiert.

Lem. \mathcal{W} enthält alle Isomorphismen und ist unter Retrakten abgeschlossen, bildet also eine Unterkat. schwacher Äquivalenzen.

Notation. Das initiale Objekt von \mathcal{M} wird mit \emptyset , das terminale Objekt mit $*$ bezeichnet.

Def. • Ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ heißt **kofasernd**, falls $\emptyset \rightarrow X$ eine Kofaserung ist. Eine azyklische Faserung $q : QX \xrightarrow{\sim} X$ mit QX kofasernd heißt **kofasernder Ersatz** (oder Approx.) von X .

- Dual heißt $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ **fasernd**, falls X in \mathcal{M}^{op} kofasernd ist und $X \xrightarrow{\sim} RX$ mit RX fasernd heißt **fasernder Ersatz** von X .

Bsp. Sei $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ beliebig. Dann faktorisiere $\emptyset \rightarrow X$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow & \uparrow \sim \\ & QX & \end{array}$$

Man erhält also immer einen kofasernden Ersatz QX für X . Dual gibt es immer einen fasernden Ersatz RX für X .

Prop. Seien $q : QX \xrightarrow{\sim} X$ und $q' : Q'X \xrightarrow{\sim} X$ zwei kofasernde Approximationen von X . Dann existiert eine schwache Äquivalenz $\xi : QX \xrightarrow{\sim} Q'X$ mit $q' \circ \xi = q$.

Def. Ein Obj. X heißt **bifasernd**, falls es fasernd und kofasernd ist.

Prop. Für alle $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ sind RQX und QRX schwach äquivalent und beide bifasernd.

Lem (Ken Brown). Sei $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ein Funktor, \mathcal{M} eine Modellkategorie, \mathcal{N} besitze eine Unterkat. \mathcal{W}' schwacher Äquivalenzen. Wenn F azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten nach \mathcal{W}' abbildet, so bildet F alle schwachen Äquivalenzen zwischen kofasernden Objekten nach \mathcal{W}' ab.

Def. Sei \mathcal{M} eine Modellkategorie. Ein **Zylinderobjekt** $X \times I$ zu einem $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ ist ein Obj. zusammen mit Morphismen wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \searrow \scriptstyle i_0 & \text{id} \nearrow & \\ & X \times I & \\ \nearrow \scriptstyle i_1 & \text{id} \searrow & \\ X & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & \xrightarrow{p} & \\ & & \end{array}$$

Der Zylinder $X \times I$ heißt **gut**, falls $X \amalg X \rightarrow X \times I$ eine Kofaserung ist. Ein guter Zylinder heißt **sehr gut**, falls $p : X \times I \rightarrow X$ eine azyklische Faserung ist.

Bem. Sei die Kodiagonale $\nabla : X \amalg X \rightarrow X$ wie folgt faktorisiert:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \searrow & & \\ & X \amalg X & \\ \nearrow & & \\ X & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \nabla & \\ & \searrow & \nearrow \\ & X \times I & \\ & \xrightarrow{\sim} & \\ & X & \end{array}$$

Dann erhalten wir ein Zylinderobjekt $X \times I$ für X .

Def. Zwei Morphismen $f, g : X \rightarrow Y$ in \mathcal{M} heißen **links-homotop** (notiert $f \sim^l g$), falls ein Zylinder $X \times I$ und ein Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \searrow \scriptstyle \sim & f \nearrow & \\ & X \times I & \\ \nearrow \scriptstyle \sim & \text{---} h \text{---} & \\ X & & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & \xrightarrow{g} & \end{array}$$

existiert. Wir definieren $\pi^l(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y) / \langle \sim^l \rangle$, wobei $\langle \sim^l \rangle$ die von der symmetrischen, refl. Relation \sim^l erzeugte Äq'relation ist. Die Homotopie heißt (sehr) gut, wenn der Zylinder $X \times I$ es ist.

Beob. Sei $X \amalg X \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} X$ irgendein Zylinderobjekt. Faktorisiere $i = q \circ i'$ in Kofaserung und azyklische Faserung. Dann ist auch

$$X \amalg X \xrightarrow{i'} X' \xrightarrow{pq} X$$

ein Zylinderobjekt, sogar ein gutes. Ebenso kann man p faktorisieren und ein anderes Zylinderobjekt erhalten.

Lem. Sei X kofasernd, $X \amalg X \rightarrow X \times I \rightarrow X$ ein gutes Zylinderobj. Dann sind $i_{0,1} : X \rightarrow X \amalg X \rightarrow X \times I$ azyklische Kofaserungen.

Lem. Sei $h : f \simeq^l g$. Dann: $f \in \mathcal{W} \iff g \in \mathcal{W}$.

Def. Ein **Pfadobjekt** X^I ist eine Faktorisierung

$$X \xrightarrow{i} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

des Diagonalmorph. $\Delta : X \rightarrow X \times X$. Das Pfadobjekt X^I heißt gut, wenn p eine Faserung und sehr gut, wenn zus. i eine Kofaserung ist.

Def. Eine Rechtshomotopie $h : f \simeq^r g$ ist ein Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} & f \nearrow & \\ X & \xrightarrow{h} & Y^I \\ & g \searrow & \\ & Y & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & p_0 \nearrow & \\ & p_1 \searrow & \\ & Y & \end{array}$$

Bem. Ein Pfadobjekt in \mathcal{M} ist dasselbe wie ein Zylinderobj. in \mathcal{M}^{op} .

Lem. Seien $f, g : X \rightarrow Y$ und $e : W \rightarrow X, d : Y \rightarrow Z$.

- $\exists h : f \simeq^l g \iff \exists h' : f \simeq^{l, \text{gut}} g$.
- Sei Y fasernd. Dann: $\exists h : f \simeq^{l, \text{gut}} g \iff \exists h' : f \simeq^{l, \text{sehr gut}} g$
- $\exists h : f \simeq^l g \implies \exists h' : d \circ f \simeq^l d \circ g$
- $\exists h : f \simeq^{l, \text{sehr gut}} g \implies \exists h' : f \circ e \simeq^{l, \text{sehr gut}} g \circ e$
- Sei X kofasernd. Dann ist \simeq^l eine Äq'relation auf $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$.

Kor. Sei Y fasernd. Dann induziert Komposition eine Abbildung $\pi^l(X, Y) \times \pi^l(W, X) \rightarrow \pi^l(W, Y), \quad ([g], [f]) \mapsto [g \circ f]$.

Prop. Seien $f, g : X \rightarrow Y$.

- Sei X kofasernd. Dann: $f \simeq^l g \implies f \simeq^r g$
- Sei Y fasernd. Dann: $f \simeq^l g \iff f \simeq^r g$

Notation. Wenn X kofasernd und Y fasernd ist, schreibt man

$$\pi(X, Y) := \pi^l(X, Y) = \pi^r(X, Y).$$

Thm. Sei X kofasernd. Sei $p : Z \xrightarrow{\sim} Y$ eine azyklische Faserung. Dann ist $p_* : \pi^l(X, Z) \rightarrow \pi^l(X, Y), [f] \mapsto [p \circ f]$ eine Bijektion.

Thm (Whitehead). Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus zwischen bifasernden Objekten. Dann gilt

$$f \in \mathcal{W} \iff f \text{ ist eine Homotopieäquivalenz.}$$

Lem. Sei $f : X \rightarrow Y$. Seien RX und RY fixierte fasernde Approx. an X bzw. Y . Dann hängt $Rf : RX \rightarrow RY$ bis auf Rechts- und auch Linkshomotopie nur von der Rechtshomotopieklasse von $r \circ f$ ab.

Achtung. I. A. ist $f \mapsto R(f)$ nicht funktoriell.

Die Homotopiekategorie einer Modellkategorie

Def. Sei \mathcal{C} ein Kategorie, $S \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ eine Klasse von Morphismen. Die **Lokalisierung** $\mathcal{C}[S^{-1}]$ von \mathcal{C} ist eine Kategorie, die folgende 2-universelle Eigenschaft erfüllt:

- $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ schickt Morphismen aus S aus Isos.
- Für jede Kategorie \mathcal{D} ist $\gamma^* : [\mathcal{C}[S^{-1}], \mathcal{D}] \rightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{S \mapsto \text{Isos}}$ eine Kategorienäquivalenz.

Bem. Die Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt Lokalisierung von Kategorien.

Def. Die **Homotopiekategorie** $\text{Ho } \mathcal{M}$ einer Modellkategorie \mathcal{M} ist die Lokalisierung von \mathcal{M} an der Klasse der schwachen Äquivalenzen.

Konstruktion. Ganz explizit:

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\text{Ho } \mathcal{M}) &:= \text{Ob}(\mathcal{M}) \\ \text{Hom}_{\text{Ho } \mathcal{M}}(X, Y) &:= \pi(RQX, RQY) \end{aligned}$$

Nach einem früheren Lemma ist die Komposition $([f], [g]) \mapsto [f \circ g]$ wohldefiniert. Der Funktor $\gamma : \mathcal{M} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{M}$ ist gegeben durch

$$X \mapsto X, \quad f \mapsto [RQf].$$

Lem. Sei $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{M} . Dann gilt $f \in \mathcal{W} \iff Qf \in \mathcal{W} \iff RQf \in \mathcal{W}$.

Lem. γ wie definiert ist ein Funktor.

Lem. $f \in \mathcal{W} \iff \gamma(f)$ ist ein Iso.

Bem. Sei X kofasernd und Y fasernd. Dann ist die Abbildung

$$\pi(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho } \mathcal{M}}(X, Y), \quad [f] \mapsto [RQf]$$

eine Bijektion.

Lem. Ist $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor, der schwache Äq. auf Isos schickt, dann identifiziert F links- bzw. rechtshomotope Morphismen.

Lem. Jeder Morphismus in $\text{Ho } \mathcal{M}$ ist Komposition von Morphismen der Form $\gamma(f), f \in \text{Mor}(\mathcal{M})$ und der Form $\gamma(f)^{-1}, f \in \mathcal{W}$.

Lem. Sei $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$ die volle Unterkategorie der kofasernden Objekte und $F : \mathcal{M}_c \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor, der azyklische Kofaserungen auf Isos schickt. Dann identifiziert F rechtshomotope Morphismen.

Thm. Ein Morphismus $p : Z \rightarrow Y$ zw. fasernden Objekten ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn $p_* : \pi(X, Z) \rightarrow \pi(X, Y)$ bijektiv ist für alle kofasernden Objekte $X \in \mathcal{M}$.

Lokal präsentierbare Kategorien

Motto. Eine lokal präsentierbare Kategorie ist eine große Kategorie, welche erzeugt wird von kleinen Objekten unter kleinen Kolimiten.

Def. Eine ∞ -große Kardinalzahl κ heißt genau dann **regulär**, wenn die Vereinigung von weniger als κ vielen Mengen, die alle weniger als κ -viele Elem. enthalten, selbst weniger als κ -viele Elemente enthält.

Bem. Zu jeder Kardinalzahl λ existiert ein reguläres κ mit $\lambda \leq \kappa$.

Def. Sei κ eine Kardinalzahl. Eine Kategorie heißt κ -klein, falls sie nur κ -viele Morphismen besitzt.

Bem. Sei κ regulär. Dann ist eine Kat. bereits dann κ -klein, falls sie nur κ -viele Objekte besitzt und alle Hom-Mengen κ -klein sind.

Def. Eine Kategorie heißt genau dann κ -filtriert, wobei κ eine reguläre Kardinalzahl ist, wenn jedes κ -kleine Diagramm in der Kategorie einen Kokegel besitzt.

Bem. Sei $\lambda \geq \kappa$. Dann ist jede λ -filtrierte Kategorie auch κ -filtriert.

Def. Ein Objekt X einer Kat. \mathcal{C} heißt genau dann **κ -kompakt**, wenn $\text{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ mit κ -filtrierten Kolimiten vertauscht:

$$\text{colim}_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T_i) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{colim}_i T_i)$$

für alle κ -filtrierte Diagramme T_i .

Def. Ein Objekt heißt genau dann **klein**, wenn es κ -kompakt ist für irgendeine reguläre Kardinalzahl κ .

Bspe. • Jede endliche Menge ist \aleph_0 -kompakt in **Set**.

- Jeder endlich-dim. VR ist \aleph_0 -kompakt in **Vect**(\mathbb{R}).
- Jeder endlich-präsentierte Modul ist \aleph_0 -kompakt in **Mod**(R).
- Unendliche Mengen sind nicht \aleph_0 -kompakt in **Set**.
- Jeder nicht diskrete topologische Raum ist nicht \aleph_0 -kompakt.
- **Mod**(R) ist lokal \aleph_0 -präsentierbar mit $S = \{R^n / \text{im}(A) \mid n \geq 0, A \in R^{n \times m}, m \geq 0\}$

Def. Eine **lokal κ -präsentierbare Kategorie** ist eine lokal kleine und kovollständige Kategorie, sodass eine Menge $S \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$ von κ -kompakten Objekten existiert, sodass jedes Objekt aus \mathcal{C} kleiner Kolimes von Objekten aus S ist.

Def. Eine Kategorie heißt genau dann **lokal präsentierbar**, wenn sie lokal κ -präsentierbar für eine reguläre Kardinalzahl κ ist.

Bspe. • **sSet** ist lokal präsentierbar.

- Sei \mathcal{C} klein. Dann ist **PSh**(\mathcal{C}) = $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ lokal präsentierbar.
- **FinSet** ist nicht lokal präsentierbar (weil nicht kovollständig)

Fun Fact. Sei \mathcal{C} lokal präsentierbar. Wenn auch \mathcal{C}^{op} lokal präsentierbar ist, dann ist \mathcal{C} die zu einer Quasiordnung gehörige Kategorie!

Anhang: Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel (S, \leq) bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung \leq auf S .

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\dots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \dots$

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz). Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit \mathcal{O}_n bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leq_S)] \leq [(T, \leq_T)] \iff \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leq_S) \rightarrow (T, \leq_T).$$

Notation. • $0 := [\emptyset]$, • $n := [\{1, \dots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega := [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega^\omega, \dots$$

Prinzip (**Transfinite Induktion**).

Sei $P : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert:

Für $\alpha = [(S, \leq_S)]$ und $\beta = [(T, \leq_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

- $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leq_{S \amalg T})]$, wobei gilt:

$$\leq_{S \amalg T} \upharpoonright_{S \times S} := \leq_S, \quad \leq_{S \amalg T} \upharpoonright_{T \times T} := \leq_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$

- $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leq_{S \times T})]$ mit der lexikogr. Ordnung

$$(s_1, t_1) \leq_{S \times T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leq_S s_2)$$

- $\alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \rightarrow T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leq)]$ mit

$$f < g \iff \exists t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

- a) Die Null $0 := [(\emptyset, \leq)] \in \mathcal{O}_n$.
- b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.
- c) Die Limeszahl $\lim A := \sup A$ einer Teilmenge $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

| | | |
|------------------------|---|---|
| a) | b) | c) |
| $\alpha + 0 := \alpha$ | $\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$ | $\alpha + \lim A := \lim \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in A\}$ |
| $\alpha \cdot 0 := 0$ | $\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$ | $\alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\}$ |
| $\alpha^0 := 1$ | $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$ | $\alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$ |

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und (S, \cdot) eine Halbgruppe ist mit

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, • $a \cdot 0 = 0$.

Lem (Rechenregeln in \mathcal{O}_n). • $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$

- $\alpha^0 = 1$ • $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^\alpha = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$

- $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ • $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

- \mathcal{O}_n ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht!*
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:

$$\forall \beta < \gamma : \quad \alpha + \beta < \alpha + \gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \quad (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \quad (\alpha > 1).$$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \dots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \dots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.