

Zusammenfassung Modellkategorien

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel (S, \leq) bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung \leq auf S .

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\dots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \dots$.

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz). Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit \mathcal{O}_n bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leq_S)] \leq [(T, \leq_T)] : \iff \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leq_S) \rightarrow (T, \leq_T).$$

Notation. • $0 := [\emptyset]$, • $n := [\{1, \dots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega := [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega^\omega, \dots$$

Prinzip (**Transfinite Induktion**).

Sei $P : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert: Für $\alpha = [(S, \leq_S)]$ und $\beta = [(T, \leq_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

• $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leq_{S \amalg T})]$, wobei gilt:

$$\leq_{S \amalg T} \upharpoonright_{S \times S} := \leq_S, \quad \leq_{S \amalg T} \upharpoonright_{T \times T} := \leq_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$

• $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leq_{S \times T})]$ mit der lexikogr. Ordnung

$$(s_1, t_1) \leq_{S \times T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leq_S s_2)$$

• $\alpha^\beta := [\{\text{Abb. } f : S \rightarrow T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leq]$ mit

$$f < g : \iff \exists t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 := [\emptyset, \leq] \in \mathcal{O}_n$.

b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.

c) Die Limeszahl $\lim A := \sup A$ einer Teilmenge $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \text{b)} & \text{c)} \\ \alpha + 0 := \alpha & \alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1 & \alpha + \lim A := \lim \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in A\} \\ \alpha \cdot 0 := 0 & \alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha & \alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\} \\ \alpha^0 := 1 & \alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha & \alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\} \end{array}$$

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und (S, \cdot) eine Halbgruppe ist mit

$$\bullet a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \bullet a \cdot 0 = 0.$$

Lem (Rechenregeln in \mathcal{O}_n). • $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
• $\alpha^0 = 1$ • $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^\alpha = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$
• $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ • $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

• \mathcal{O}_n ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)

• Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht!*

• Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.

• Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.

• Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:

$$\forall \beta < \gamma : \quad \alpha + \beta < \alpha + \gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \quad (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \quad (\alpha > 1).$$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \dots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \dots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.

Kategorientheorie

Def. Eine (**schwache**) **2-Kategorie** \mathcal{C} besteht aus

- einer Ansammlung $\text{Ob}(\mathcal{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ A \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{array} B \right\},$$

- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einem Objekt $\text{Id}_{\mathcal{C}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einem natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} : - \circ (- \circ -) \implies (- \circ -) \circ -,$$

wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \text{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$

- und für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ natürlichen Isomorphismen

$$\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (- \circ \text{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} K(H(GF)) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}}} & (KH)(GF) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{G}}} ((KH)G)H \\ \downarrow K\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} & & \alpha_{\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}} F \uparrow \\ K((HG)F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{G}}} & (K(HG))F \end{array}$$

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathcal{C}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{D}, \mathcal{E}}} & (G \circ \text{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \\ & \searrow G\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} & \swarrow \rho_{\mathcal{D}, \mathcal{E}} F \\ & G \circ F & \end{array}$$

Bspe. • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.

- Jede Kategorie \mathcal{C} ist natürlich eine 2-Kategorie.

- Die Kategorie der Ringe \mathbb{R} mit $\text{Ob}(\mathbb{R}) := \{\text{Ringe mit Eins}\}$ und $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) := \text{Kat. der } B\text{-}A\text{-Bimoduln mit } N \circ M := N \otimes_B M$ für $M \in \text{Hom}(A, B)$ und $N \in \text{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\text{Id}_A := A$.

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann \otimes anstelle von \circ geschrieben.

Def. Sei $S : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $E \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ von S ist eine Familie $\alpha_c : E \rightarrow S(c, c)$, $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ von Morphismen in \mathcal{A} , sodass für alle $(f : c \rightarrow c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & S(c, c) & & \\ & \nearrow \alpha_c & & \searrow S(\text{id}_c, f) & \\ E & & & & S(c, c') \\ & \searrow \alpha_{c'} & & \nearrow S(f, \text{id}_{c'}) & \\ & & S(c', c') & & \end{array}$$

kommutiert, und E universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler **S-Keil**.

Notation. $E = \int_c S(c, c)$.

Bem. Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden: $\lim F = \int_c F(c)$; der Integrand ist $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$.

Bem. Das duale Konzept ist das eines ~~Anfangs~~ Koendes $\int_c^{\text{co}} S(c, c)$.

Bsp. Seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_c \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \cong \text{Nat}(F, G).$$

Satz (Fubini). Sei $S : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d, c)} S(d, d, c, c) \cong \int_d \int_c S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und $\int_c S(d, d', c, c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

Bsp. Sei R ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt $*$. Ein additiver Funktor $R^{(\text{op})} \rightarrow \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein R -Linksmodul (bzw. R -Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int_{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Bsp (Ninja-Yoneda-Lemma). Für jede Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ gilt

$$F \cong \int^c F(c) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

Def. Sei \mathcal{C} eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ist geg. durch Morphismen $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ (genannt **Eins**) und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ (**Koeins**) mit $G\epsilon \circ \eta G = \text{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \text{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.

Lem. R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bem. Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren. Dann gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\text{Hom}(F \circ -, -) \cong \text{Hom}(-, G \circ -)$$

Bsp. $\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$

Bsp. Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein B - A -Modul M ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn M als Rechts- A -Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

Bem. Sind η und ϵ in $F \dashv G$ sogar Isomorphismen, so heißt $F \dashv G$ auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von F und G sowie einem der Morphismen ϵ, η) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

Def. Sei $A \xleftarrow{T} M \xrightarrow{K} C$ ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE) (R, ϵ) von T längs K besteht aus

- einem Morphismus $R : C \rightarrow A$
- einem 2-Morphismus $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$,

sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE $(\tilde{R} : C \rightarrow A, \epsilon : \tilde{R} \circ K \Rightarrow T)$ gibt es genau ein $\sigma : \tilde{R} \Rightarrow R$ mit $\epsilon \circ \sigma K = \tilde{\epsilon}$. Notation: $R = \text{Ran}_K(T)$

Bem. (R, ϵ) ist RKE von T längs $K \iff \text{Hom}(\tilde{R}, R) \rightarrow \text{Hom}(\tilde{R} \circ K, T)$ ist bijektiv für alle $\tilde{R} : C \rightarrow A$.

Prop. RKE sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bsp. Die RKE eines bel. Morphismus $T : M \rightarrow A$ längs Id_M existiert stets und ist gegeben durch $(T, T \circ \text{Id}_M \Rightarrow T)$.

Bsp. In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\text{Ran}_K(T) = (\text{Hom}_M(K, T), \text{ev} : \text{Hom}_M(K, T) \otimes_C K \Rightarrow T).$$

Bsp. Sei $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{1}$ der eindeutig best. Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von T längs K dasselbe wie ein Limes von T .

Thm. Seien $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ und $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren. Existiere für alle Objekte $c \in \mathcal{C}$ der Limes

$$R(c) := \lim_{f:c \rightarrow Km} T(m).$$

Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ausdehnen und zwar zu einer RKE von T längs K .

Bem. Ist \mathcal{M} klein und \mathcal{C} lokal klein und ist \mathcal{A} vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$, $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktwise RKE**.

Lem. Eine RKE ist genau dann punktwise, wenn sie für alle $a \in \mathcal{A}$ unter dem Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$ erhalten bleibt.

Thm. Sei $K : M \rightarrow C$ ein Funktor. Betrachte $K^* : [C, A] \rightarrow [M, A]$.

- Wenn ein Funktor $\text{Ran}_K : [M, A] \rightarrow [C, A]$ mit $K^* \dashv \text{Ran}_K$ existiert, so ist für alle $T : M \rightarrow A$ $\text{Ran}_K(T)$ eine RKE von T längs K .
- Existiere für alle $T : M \rightarrow A$ eine RKE $\text{Ran}_K(T)$. Dann kann man die Zuordnung $T \mapsto \text{Ran}_K(T)$ zu einem Rechtsadjungierten von K^* ausdehnen.

Thm. Sei $G : A \rightarrow X$ in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- G besitzt einen Linksadjungierten.
- $\text{Ran}_G(\text{Id}_A)$ existiert und bleibt von G erhalten, d. h. $G \circ \text{Ran}_G(\text{Id}_A) = \text{Ran}_G(G \circ \text{Id}_A)$.

In diesem Fall gilt $\text{Ran}_G(\text{Id}_A) \dashv G$ und $\text{Ran}_G(\text{Id}_A)$ wird sogar von allen Morphismen $H : A \rightarrow Y$ bewahrt.

Thm. Rechtsadjungierte bewahren RKE.

Kor. Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)