Zusammenfassung Gewöhnliche DGLn

Def (Klassifikation von DGLn).

(I) **Gewöhnliche** DGL: Gesucht ist Funktion in einer Variable
Partielle DGL: Gesucht ist Funktion in mehreren Variablen

(II) **Ordnung** einer DGL: Höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in Gleichung vorkommt

(III) **Explizite** DGL: Gleichung der Form $y^{(k)}=f(t,y,\dot{y},...,y^{(k-1)})$
Implizite DGL: Allgemeinere Form $F(t,y,\dot{y},...,y^{(k)})=0$

(IV) **Skalare** DGL: Gesucht ist Funktion mit Wert in $\mathbb{R}$
n-dimensionale DGL: Gesuchte Funktion hat Wert in $\mathbb{R}^n$

(V) **Lineare** DGL: Gleichung hat die Form

$$a_k(t)y^{(k)}(t)+...+a_1(t)\dot{y}(t)+a_0(t)y(t)+c(t)=0$$

(VI) **Autonome** DGL: Gleichung der Form $F(y,\dot{y},...,y^{(k)})=0$ (keine Abhängigkeit von t, Zeitinvarianz)

Def. Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$ und $(t_0,y_0)\in\mathcal{D}$. Dann ist ein **Anfangswertproblem** (AWP) gegeben durch die Gleichungen

$$(1.1)\begin{cases}\dot{y}(t)=f(t,y(t)),\\ y(t_0)=y_0.\end{cases}$$

Notation. Seien im Folgenden I und J stets Intervalle in $\mathbb{R}$.

Def.
- Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Funktion $y:I\to\mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von $\dot{y}=f(t,y)$, falls für alle $t\in I$ gilt: $\dot{y}(t)=f(t,y(t))$.
- Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n)^k=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times...\times\mathbb{R}^n$, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$. Eine k-mal differenzierbare Funktion $y:I\to\mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von

$$y^{(k)}=f(t,y,\dot{y},...,y^{(k-1)}),\tag{1.2}$$

falls für alle $t\in I$ gilt: $y^{(k)}(t)=f(t,y(t),\dot{y}(t),...,y^{(k-1)}(t))$

Satz.
- Ist $y:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2), dann ist

$$(y_1,...,y_k):I\to\mathbb{R}^{kn},\qquad t\mapsto(y(t),\dot{y}(t),...,y^{(k-1)}(t))$$

eine Lösung des Systems von Gleichungen

$$(1.3)\begin{cases}\dot{y}_1=y_2\\ \dot{y}_2=y_3\\ \quad\vdots\\ \dot{y}_{k-1}=y_k\\ \dot{y}_k=f(t,y_1,y_2,...,y_{k-1},y_k)\end{cases}$$

- Ist umgekehrt $(y_1,...,y_k):I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.3), dann ist $y=y_1:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2).

Satz.
- Ist $y:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von AWP (1.1), dann ist

$$(y_1,y_2):I\to\mathbb{R}^{n+1},\qquad t\mapsto(y_1(t),y_2(t))=(t,y(t))$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.4)\begin{cases}\dot{y}_1(t)=1, & y_1(t_0)=t_0\\ \dot{y}_2(t)=f(y_1(t),y_2(t)), & y_2(t_0)=y_0\end{cases}$$

- Ist $(y_1,y_2):I\to\mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung von (1.4), dann ist $y=y_2:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.1).

Problem. Gesucht ist eine Lösung $y:I\to\mathbb{R}$ der linearen, skalaren, expliziten DGL 1. Ordnung (mit $a,b:I\to\mathbb{R}$ stetig)

$$\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)+b(t)\tag{1.5}$$

Satz. Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)$ ist gegeben durch $y_h(t)=c\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)$ mit $c\in\mathbb{R}$.

Satz (Superpositionsprinzip). Sei $y_p:I\to\mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung von (1.5). Dann ist die Menge aller Lösungen von (1.5)

$$\{y_p+y_h\,|\,y_h:I\to\mathbb{R}\text{ ist Lösung von }\dot{y_h}(t)=a(t)\cdot y_h(t)\}.$$

Bem. Der Ansatz mit **Variation der Konstanten** $y_p(t)=c(t)\cdot y_h(t)$ für (1.5) führt zu

$$c(t)=\frac{1}{c_0}\int_{t_0}^{t}b(\tau)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau}a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau$$

$$\Rightarrow y_p(t)=\left(\int_{t_0}^{t}b(\tau)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau}a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right)\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Korollar. Die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.6)\begin{cases}\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)+b(t)\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

mit $a,b:I\to\mathbb{R}$ stetig, $t_0\in I$ und $y_0\in\mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$y(t)=\left(y_0+\int_{t_0}^{t}b(\tau)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau}a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right)\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Problem. Ges. ist Lösung der DGL mit **getrennten Variablen**

$$\dot{y}(t)=g(t)\cdot h(y)\tag{1.7}$$

mit $g:I\to\mathbb{R}$ und $h:J\to\mathbb{R}$ stetig.

Lsg.
1. Fall: $h(y_0)=0$ für ein $y_0\in J$. Dann ist $y(t)=y_0$ eine Lsg.
2. Fall: Es gibt kein $y_0\in J$ mit $h(y_0)=0$. Sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ und G eine Stammfunktion von g. Da h stetig und nirgends null ist, ist h entweder strikt positiv oder strikt negativ. Somit ist H streng monoton steigend/fallend und somit umkehrbar. Eine Lösung von (1.7) ist nun gegeben durch

$$y(t)=H^{-1}(G(t)+c_0)\quad\text{mit }c_0\in\mathbb{R}.$$

Problem. Gesucht ist Lösung des AWP mit getrennten Variablen

$$(1.8)\begin{cases}\dot{y}(t)=g(t)\cdot h(y(t))\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

Lsg.
1. Fall: $h(y_0)=0$. Dann ist $y(t)=y_0$ eine Lösung.
2. Fall: $h(y_0)\neq0$. Dann ist h in einer Umgebung von y_0 strikt positiv/negativ. Setze

$$H_1(y):=\int_{y_0}^{y}\tfrac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s,\quad G_1(t):=\int_{t_0}^{t}g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dann ist H_1 in einer Umgebung von y_0 invertierbar und eine Lösung von (1.8) ist gegeben durch

$$y(t)=H_1^{-1}(G_1(t)).$$

Technik (Transformation). Manchmal lässt sich eine DGL durch **Substitution** eines Termes in eine einfachere DGL überführen, deren Lösung mit bekannten Methoden gefunden werden kann. Die Lösung der ursprünglichen DGL ergibt sich durch Rücksubstitution.

Bsp. Gegeben sei die DGL $\dot{y}=f(\alpha t+\beta y+\gamma)$ mit $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta\neq0$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig. Substituiere $z(t)=\alpha t+\beta y(t)+\gamma$. Es ergibt sich die neue DGL $\dot{z}(t)=\beta f(z(t))+\alpha$, die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt.

Bsp (Bernoulli-DGL). Gegeben sei die DGL $\dot{y}(t)=\alpha(t)\cdot y(t)+\beta(t)\cdot(y(t))^{\delta}$ mit $\alpha,\beta:I\to\mathbb{R}$ stetig und $\delta\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Multiplikation mit $(1-\delta)y^{-\delta}$ und Substitution mit $z(t)=(y(t))^{1-\delta}$ führt zur skalaren linearen DGL 1. Ordnung

$$\dot{z}(t)=(1-\delta)\alpha(t)z(t)+(1-\delta)\beta(t).$$

Def. Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$. Eine Abb. $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$ heißt **stetig in $x_0\in\mathcal{D}$**, falls

$$\forall\,\epsilon>0:\exists\,\delta>0:\forall\,x\in\mathcal{D}:\|x-x_0\|<\delta\implies\|f(x)-f(x_0)\|<\epsilon.$$

Die Abb. heißt **stetig** in $\mathcal{D}$, falls sie in jedem Punkt in $\mathcal{D}$ stetig ist.

Notation. $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n):=\{f:I\to\mathbb{R}^n\,|\,f\text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty:=\sup_{t\in I}\|f(t)\|$

Bem. $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n),\|{-}\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

Def. Eine Teilmenge $A\subset X$ eines topologischen Raumes X heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluss $\overline{A}$ kompakt in X ist.

Def. Seien $(X,\|{-}\|_X)$ und $(Y,\|{-}\|_Y)$ Banachräume. Sei $\mathcal{D}\subset X$. Eine Abbildung $T:\mathcal{D}\to Y$ heißt
- **stetig in $x\in\mathcal{D}$**, falls $Tx_n\xrightarrow{n\to\infty}Tx$ in Y für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$ in $\mathcal{D}$ gilt.
- **Lipschitz-stetig** in $\mathcal{D}$, falls eine Konstante $\alpha>0$ existiert mit

$$\forall\,x_1,x_2\in\mathcal{D}:\|Tx_1-Tx_2\|_Y\le\alpha\cdot\|x_1-x_2\|_X.$$

- **kontraktiv**, falls T Lipschitz-stetig mit $\alpha<1$ ist.
- **kompakt**, falls T stetig ist und beschränkte Mengen in X auf relativ kompakte Mengen in Y abgebildet werden, d. h. für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}$ besitzt die Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Bem. Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, die Umkehrung gilt aber nicht.

Satz (Arzelà-Ascoli)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompakt. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn

- $\mathcal{F}$ ist **punktweise beschränkt**, d. h.
$$\forall\, t \in I \,:\, \exists\, M \,:\, \forall\, f \in \mathcal{F} \,:\, \|f(t)\| \leq M$$
- $\mathcal{F}$ ist **gleichgradig stetig**, d. h.
$$\forall \epsilon{>}0 \,:\, \exists \delta{>}0 \,:\, \forall\, t_1, t_2{\in}I, f{\in}\mathcal{F} \,:\, \|t_1{-}t_2\| < \delta \Rightarrow \|f(t_1){-}f(t_2)\| < \epsilon$$

Satz (Fixpunktsatz von Banach)**.** Sei $(X, \|{-}\|_X)$ ein Banachraum, $\mathcal{D} \subset X$ nichtleer, abgeschlossen. Sei $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ eine Kontraktion. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $y = Ty$ genau eine Lösung in D.

Satz (Fixpunktsatz von Schauder)**.** Sei $(X, \|{-}\|_X)$ ein Banachraum, sei $\mathcal{D} \subset X$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt, konvex. Sei $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $y = Ty$ mindestens eine Lösung in $\mathcal{D}$.

Satz (Peano)**.** Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in D$. Dann ist das AWP (1.1) lokal lösbar, d. h. es existiert ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine stetig diff'bare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$, die das AWP (1.1) erfüllt.

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Sei $y : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung des AWP (1.1).

- Eine Lösung $u : J \to \mathbb{R}^N$ heißt **Fortsetzung** (bzw. **echte Fortsetzung**) der Lösung y, falls $I \subset J$ (bzw. $I \subsetneq J$) und $u|_I = y$.
- Die Lösung y heißt **maximale Lösung** des AWP (1.1), falls keine echte Fortsetzung von y existiert. Das Intervall I heißt dann **maximales Existenzintervall**.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$ stetig und $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- Jede lokale Lösung des AWP (1.1) kann zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden.
- Sei $y : I \to \mathbb{R}^N$ eine max. Lsg. des AWP (1.1). Dann ist I offen.

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$.

- Die Funktion f heißt **Lipschitz-stetig bzgl.** y auf $\mathcal{D}$, falls eine Konstante $\mathcal{L} > 0$ existiert, sodass
$$\forall\, (t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{D} \,:\, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \mathcal{L} \cdot \|y_1 - y_2\|.$$
- Wenn für alle $(t, y) \in \mathcal{D}$ eine Umgebung $U_{(t,y)} \subset \mathcal{D}$ existiert, sodass $f|_{U_{(t,y)}}$ Lipschitz-stetig bzgl. y ist, so heißt f **lokal Lipschitz-stetig bzgl.** y auf $\mathcal{D}$.

Lemma. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$ stetig und stetig diff'bar nach y in $\mathcal{D}$. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bzgl. y.

Satz (Picard-Lindelöf, lokal quantitativ)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0){\in}\mathcal{D}$ und $R_{a,b}{:=}[t_0{-}a, t_0{+}a] \times \overline{B_b}(y_0) \subset \mathcal{D}$. Sei f Lipschitz-stetig bzgl. y auf $R_{a,b}$. Dann besitzt das AWP (1.1) im Rechteck $R_{a,b}$ genau eine Lösung $y : I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ auf $I_\gamma := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$ mit $\gamma = \min(a, \frac{b}{M})$ und $M = \sup\limits_{(t,y) \in R_{a,b}} \|f(t, y)\|$.

Bem. Im Beweis des Satzes definiert man die Picard-Iterierten $u_j : I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ für $j \in \mathbb{N}$ durch

$$u_0(t) := y_0, \qquad u_{j+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_j(\tau))\, \mathrm{d}\tau.$$

Man zeigt: Die Funktionenfolge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Lösung $u_\infty : I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ des AWP.

Satz (Picard-Lindelöf, lokal qualitativ)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\mathcal{D}$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann besitzt das AWP (1.1) eine eindeutige lokale Lösung, d. h. es existiert $\gamma = \gamma(t_0, y_0) > 0$, sodass das AWP (1.1) auf $I_\gamma := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$ genau eine Lösung besitzt.

Satz (Picard-Lindelöf, global)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\mathcal{D}$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall $I = (a_-, a_+)$ mit $t_0{\in}I$ und

- Das AWP (1.1) besitzt genau eine Lösung γ auf I.
- Ist $\tilde{z} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige Lösung von (1.1) mit $t_0 \in \tilde{I}$, so gilt $\tilde{I} \subseteq I$ und $z = y|_{\tilde{I}}$.

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Falls f für jedes kompakte Intervall $\tilde{I} \subset I$ global Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\tilde{I} \times \mathbb{R}^n$ ist, dann hat das AWP (1.1) genau eine globale Lösung y auf I.

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $I \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Ist das Wachstum von f linear beschränkt in y auf $I \times \mathbb{R}^n$, d. h. gibt es stetige Funktionen $a, b : I \to [0, \infty)$ mit $\|f(t, y)\| \leq a(t)\|y\| + b(t)$ für alle $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$, dann besitzt das AWP (1.1) eine eindeutige Lösung auf I.

Satz (Randverhalten maximaler Lösungen)**.** Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y. Sei $y : (a_-, a_+) \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung des AWP (1.1).

- Ist $a_+ < \infty$, so ist y auf $[t_0, a_+)$ unbeschränkt oder der Rand $\partial\mathcal{D}$ ist nicht leer und $\lim\limits_{t \uparrow a_+} \operatorname{dist}((t, y(t)), \partial\mathcal{D}) = 0$.
- Ist $a_- > -\infty$, so ist y auf $(a_-, t_0]$ unbeschränkt oder der Rand $\partial\mathcal{D}$ ist nicht leer und $\lim\limits_{t \downarrow a_-} \operatorname{dist}((t, y(t)), \partial\mathcal{D}) = 0$.

Problem. Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Für $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ betrachten wir das AWP

$$(3.1) \begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das AWP (3.1) eine eindeutige (globale) Lösung auf I.

Notation. $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{u : I \to \mathbb{R}^n \mid u \text{ stetig}\}$

Def. Eine Teilmenge $M \subset V$ eines Vektorraums V heißt **affiner Teilraum**, wenn es ein $y \in V$ und einen Unterraum $U \subset V$ mit $M = y + U := \{y + u \mid u \in U\}$ gibt.

Satz. Seien $I \subset \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Setze

$$U_h := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \text{ auf } I\}.$$

Dann ist U_h ein n-dimensionaler UVR von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ und für Funktionen $y_1, ..., y_m \in U_h$ sind äquivalent:

- $y_1, ..., y_m$ sind linear unabhängig in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- Es gibt $t^* \in I$, sodass $y_1(t^*), ..., y_m(t^*)$ linear unabh. in $\mathbb{R}^n$ sind.
- Für alle $t \in I$ sind $y_1(t), ..., y_m(t)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Eine Menge $y_1, ..., y_n$ von linear unabhängigen Lösungen von $\dot{y} = A(t) \cdot y$ heißt ein **Fundamentalsystem** und $(y_1, ..., y_n)$ **Fundamentalmatrix** der DGL.

Satz. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig.

- Jede Fundamentalmatrix von $\dot{y} = A(t)y$ ist invertierbar f. a. $t \in I$.
- Jede Fundamentalmatrix $Y : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist stetig differenzierbar.
- Die globale eindeutige Lösung von
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
ist gegeben durch $y(t) = Y(t)\,(Y(t_0))^{-1}\, y_0$.

Satz. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, U_h wie oben und $U := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y} = A(t)y + f\}$. Dann gilt:

- U ist nicht leer.
- Ist $y_p \in U$ eine partikuläre Lösung, dann ist $U = y_p + U_h$, d. h. U ist affiner Unterraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- Sei $y_p, \tilde{y}_p \in U$, dann ist $y_p - \tilde{y}_p \in U_h$.

Satz (Variation der Konstanten)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $Y(t)$ die Fundamentalmatrix. Dann gilt:

- Eine partikuläre Lösung von $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ ist gegeben durch
$$y_p(t) := \int_{t_0}^{t} Y(t)(Y(s))^{-1} f(s)\, \mathrm{d}s, \quad t_0 \in I.$$
- Es gilt $U = \{\int_{t_0}^{t} Y(t)(Y(s))^{-1} f(s)\, \mathrm{d}s + Y(t)c \mid c \in \mathbb{R}^n\}$
- Die globale eindeutige Lsg vom AWP (3.1) ist gegeben durch
$$y(t) := Y(t)(Y(t_0))^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t} Y(t)(Y(s))^{-1} f(s)\, \mathrm{d}s, \quad t \in I.$$

Def. Die **Matrix-Exponentialfunktion** ist definiert als

$$\exp : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad A \mapsto e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Satz. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

- Falls A und B kommutieren, d. h. $AB = BA$, dann gilt
$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.$$
- Aus $e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt $AB = BA$.
- e^A ist invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- Wenn B invertierbar ist, dann gilt $e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^A B$.

- Ist A eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, ..., \lambda_n$, so gilt

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$
- $e^{t(A+\lambda I)} = e^{\lambda t} \cdot e^{tA}$

Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar, d. h. es existiere eine Basis aus Eigenvektoren $s_1, ..., s_n \in \mathbb{C}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ sodass $S^{-1}AS =: D$ mit $S := (s_1, ..., s_n)$ diagonal mit Einträgen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ist. Dann gilt

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Bem. Wenn e^{tA} eine Fundamentalmatrix ist, dann ist auch $e^{tA}S = Se^{tD}$ eine Fundamentalmatrix.

Def. Der **Jordanblock** der Größe n zum EW λ ist die Matrix

$$J(\lambda, n) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Bem (Jordan-Normalform). Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, für die gilt:

$$P_A(\lambda) = (-1)^N (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_k)^{a_k},$$

wobei $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene komplexe Eigenwerte mit algebraischen Vielfachheiten $a_1, ..., a_k$ sind. Dann gibt es eine Matrix $S \in GL_n(\mathbb{C})$ mit

$$S^{-1}AS = J_A := \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}, \quad \text{wobei}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} J(\lambda_j, p_{j1}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J(\lambda_j, p_{jg_j}) \end{pmatrix}$$

Prop. Für $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$e^{t\cdot J(\lambda,p)} = e^{t\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz. Sei $S^{-1}AS = J_A$ in Jordan-NF. Dann gilt:

$$e^{At} = Se^{J_A t}S^{-1} \text{ mit } e^{J_A t} = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{A_k t} \end{pmatrix} \quad \text{wobei}$$

$$e^{A_j t} = \begin{pmatrix} e^{tJ(\lambda_j, p_{j1})} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{tJ(\lambda_j, p_{jg_j})} \end{pmatrix}.$$

Satz. Kommutieren die Matrizen $(A(t))_{t\in I}$ miteinander, d. h.

$$A(t) \cdot A(s) = A(s) \cdot A(t) \quad \text{für alle } t, s \in I,$$

so ist eine Fundamentalmatrix von $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ gegeben durch

$$Y(t) := \exp\Big(\int_{t_0}^{t} A(s)\,\mathrm{d}s\Big) \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Bem. Insbesondere ist eine Fundamentalmatrix von $\dot{y} = Ay + f$ gegeben durch $Y(t) := e^{A(t-t_0)}$.

Problem. Gegeben seien $f, a_0, ..., a_{n-1} \in \mathcal{I}$, $t_0 \in I$ und $z_0, ..., z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Betrachte die lineare skalare DGL höherer Ordnung

$$(3.1') \begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = z_0, \ \ \dot{y}(t_0) = z_1, ..., y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}. \end{cases}$$

Bem. Nach Satz 1.1 ist dieses Problem äquivalent zum AWP

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}. \quad \text{Korresp. der Lsgn:} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a_0, ..., a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in I$, $z = (z_0, ..., z_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das AWP (3.1') eine eindeutige globale Lösung $y : I \to \mathbb{R}$.

Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a_0, ..., a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Setze

$$U_{h,n} := \{y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \,|\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_0(t)y = 0\},$$
$$U_n := \{y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \,|\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_0(t)y = f(t)\}.$$

Dann ist $U_{h,n}$ ein n-dimensionaler UVR von $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ und für Funktionen $x_1, ..., x_m \in U_{h_m}$ sind äquivalent:

- $x_1, ..., x_n$ sind linear unabhängig in $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
- $(x_1, \dot{x_1}, ..., x_1^{(n-1)}), ..., (x_m, \dot{x_m}, ..., x_m^{(n-1)})$ sind linear unabhängig in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- $(x_1(t^*), \dot{x_1}(t^*), ..., x_1^{(n-1)}(t^*)), ..., (x_m(t^*), \dot{x_m}(t^*), ..., x_m^{(n-1)}(t^*))$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$ für ein $t^* \in I$.
- $(x_1(t), \dot{x_1}(t), ..., x_1^{(n-1)}(t)), ..., (x_m(t), \dot{x_m}(t), ..., x_m^{(n-1)}(t))$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$ für alle $t \in I$.

Bezeichnen wir als Fundamentalsystem der DGL in (3.1') eine Menge von n global linear unabhängigen Lösungen der DGL in (3.1') mit $f(t) \equiv 0$, dann gilt:

- Ist $\{x_1, ..., x_n\}$ ein Fundamentalsystem, so ist
$$U_{h,n} = \{c_1x_1 + ... + c_nx_n \,|\, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}\}.$$
- $U_n \neq \emptyset$ und für eine partikuläre Lösung $y_p \in U_n$ der DGL (3.1') ist $U_n = y_p + U_{h,n}$ ein affiner Unterraum von $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Bem. Funktionen $x_1, ..., x_n \in U_{h_n}$ bilden ein Fundamentalsystem genau dann, wenn

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \dot{x_1}(t) & \cdots & \dot{x_n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{(n-1)}(t) & \cdots & x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Bem. Seien die Funktionen $a_j(t) \equiv a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, ..., n-1$ konstant. Dann heißt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Begleitmatrix und es gilt

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0).$$

Angenommen, es gilt $P_A(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$, wobei $\lambda_1, ..., \lambda_k$ verschiedene Nullstellen mit algebraischen Vielfachheiten $\alpha_1, ..., \alpha_k$ sind. Falls $k = n$ (bzw. $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 1$), so ist $\{e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_k t}\}$ ein Fundamentalsystem von (3.1'). Sonst ist

$$\tilde{F} := \tilde{F}_1 \cup ... \cup \tilde{F}_k \quad \text{mit} \quad \tilde{F}_j := \{e^{\lambda_j t}, e^{\lambda_j t}t, ..., e^{\lambda_j t}t^{\alpha_j - 1}\}$$

ein Fundamentalsystem von (3.1').

Bem. Um den Lösungsraum von (3.1') zu bestimmen, benötigen wir noch eine partikuläre Lösung y_p. Diese kann zum einen durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} y_{1,p}(t) \\ \vdots \\ y_{n,p}(t) \end{pmatrix} := \int_t^{t_0} Y(t) \cdot Y(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s, \qquad y_p := y_{1,p}.$$

bestimmt werden. Falls f elementaransatzfähig ist, d. h.

$$f(t) = g(t) \cdot e^{\mu t}\cos(\omega t) + q(t) \cdot e^{\mu t}\sin(\omega t)$$

für Polynome $g(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]$ und $\omega, \mu \in \mathbb{R}$ gilt, dann gibt es eine Lösung der Form

$$y_p(t) = t^\nu(\gamma_0 + \gamma_1 t + ... + \gamma_m t^m)e^{\mu t}\cos(\omega t)$$
$$+ t^\nu(\beta_0 + \beta_1 t + ... + \beta_m t^m)e^{\mu t}\sin(\omega t).$$

Dabei ist $m := \max(\deg g, \deg q)$ und

$$\nu := \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu + i\omega \text{ keine Nullstelle von } P_A(\lambda) \text{ ist,} \\ k, & \text{falls } \mu + i\omega \text{ eine } k\text{-fache Nullstelle von } P_A(\lambda) \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Zahlen $\gamma_0, ..., \gamma_m, \beta_0, ..., \beta_m \in \mathbb{R}$ sind noch zu bestimmen.

Bsp. Das AWP

$$\begin{cases} \ddot{y} + \Theta^2 y = \cos(\omega t) \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2-\Theta^2}\cos(\Theta t) + \frac{1}{\Theta^2-\omega^2}\cos(\omega t), & \text{falls } \omega^2 \neq \Theta^2, \\ \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t), & \text{falls } \omega^2 = \Theta^2. \end{cases}$$

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\mathcal{D}$. Eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}^n$ von $\dot{y} = f(t, y)$ und $y(t_0) = y_0$ auf einem Intervall $[t_0, \infty)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ heißt

- **(Lyapunov-) stabil** auf $[t_0, \infty)$, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $(t_0, z_0) \in \mathcal{D}$ und $\|y_0 - z_0\| < \delta$ das AWP
$$(\dagger) \begin{cases} \dot{z} = f(t, z), \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$
eine Lösung z auf $[t_0, \infty)$ besitzt, welche die Ungleichung $\|y(t) - z(t)\| < \epsilon$ für alle $t \geq t_0$ erfüllt.
- **attraktiv**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $(t_0, z_0) \in \mathcal{D}$ mit $\|y_0 - z_0\| < \delta$ das AWP $(\dagger)$ eine Lösung z auf $[t_0, \infty)$ besitzt mit
$$\lim_{t\to\infty} \|y(t) - z(t)\| = 0.$$
- **asymptotisch stabil**, falls y stabil und attraktiv ist.
- **exponentiell stabil**, wenn $\delta, \alpha, \omega > 0$ existieren, sodass für alle $(t_0, z_0) \in \mathcal{D}$ mit $\|y_0 - z_0\| < \delta$ das AWP $(\dagger)$ eine Lsg z besitzt mit
$$\|y(t) - z(t)\| \leq \alpha \|y_0 - z_0\| e^{-\omega(t-t_0)}.$$

Bem. exponentiell stabil $\Rightarrow$ asymptotisch stabil

Bsp. Eine Lösung y des AWP $\dot{y} = \alpha y$, $y(t_0) = y_0$ ist

- exponentiell stabil, falls $\alpha < 0$,
- stabil, falls $\alpha = 0$ und
- instabil (d. h. weder stabil noch attraktiv), falls $\alpha > 0$.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig.

- Die DGL $\dot{y} = f(y)$ ist translationsinvariant, d. h. ist y eine Lösung von $\dot{y} = f(y)$ auf $[t_0, \infty)$, dann ist $z(t) := y(t_0 + t)$ eine Lösung von $\dot{z} = f(z)$ auf $[0, \infty)$.
- Die Lösung y ist genau dann (exponentiell/asymptotisch) stabil, wenn z (exponentiell/asymptotisch) stabil ist.
- Eine Lösung von $\dot{y} = f(y)$ ist genau dann konstant, also $y(t) \equiv c \in \mathbb{R}^n$, wenn $f(c) = 0$.

Sprechweise. Konstante Lösungen werden auch stationäre Lösungen oder zeitinvariante Lösungen genannt.

Def. Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig auf $\mathcal{D}$. Jede Nullstelle von f heißt **Ruhelage** (Gleichgewichtspunkt, kritischer Punkt) von f.

Bem. Eine Lösung $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\dot{y} = Ay, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist genau dann (exponentiell/asymptotisch) stabil, wenn es die konstante Lösung $y(t) \equiv 0$ ist.

Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar. Das GGW $y_* \equiv 0$ der DGL $\dot{y} = Ay$ ist genau dann (exp/asympt) stabil, wenn das GGW $z_* \equiv 0$ der DGL $\dot{z} = S^{-1}ASz$ (exp/asympt) stabil ist.

Satz (Stabilität von linearen, autonomen DGLn)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A. Das GGW $y_* \equiv 0$ von $\dot{y} = Ay$ ist genau dann

- stabil, wenn für alle EWe $\Re(\lambda_j) \leq 0$ gilt und alle EWe mit $\Re(\lambda_j) = 0$ halbeinfach sind, d, h. die geometrische Vielfachheit mit der algebraischen übereinstimmt,
- exponentiell stabil, wenn für alle EWe $\Re(\lambda_j) < 0$ gilt,
- ansonsten instabil.

Bem. Falls $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von t abhängig, so gibt es kein Kriterium mit Eigenwerten von $A(t)$, um Stabilität der Lösung $y \equiv 0$ von $\dot{y} = A(t) \cdot y$ zu überprüfen.

Lemma. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig. Ist y eine Lsg von $\dot{y} = f(y)$ auf $[0, \infty)$ mit $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$, dann ist y_∞ eine Ruhelage von f, d. h. $f(y_\infty) = 0$.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $y_s(t) \equiv y_* \in \mathbb{R}^n$ eine stationäre Lsg von $\dot{y} = f(y)$, d. h. $f(y_*) = 0$. Sei

$$J_f(y_*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(y_*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(y_*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y_*) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von f in y_*. Dann gilt:

- Wenn jeder EW von $J_f(y_*)$ Realteil < 0 besitzt, dann ist $y_s \equiv y_*$ asymptotisch stabil.
- Hat $J_f(y_*)$ mind. einen EW mit Realteil > 0, dann ist y_s instabil.

Bem. Im Fall von EWen mit Realteil ≤ 0 und mindestens einem EW mit Realteil $= 0$ ist keine Aussage möglich.

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $\mathcal{E} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ heißt **erstes Integral** von $\dot{y} = f(y)$, wenn gilt: $\forall\, y \in \mathcal{D} : (\nabla\mathcal{E}(y) \,|\, f(y)) = 0$.

Bsp. Sei $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine Hamiltonische Funktion. Das zugehörige Hamiltonische System ist

$$\begin{cases} \dot{y} &= \frac{\partial}{\partial z} H(y, z) \\ \dot{z} &= -\frac{\partial}{\partial y} H(y, z). \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{E}(y, z) := H(y, z)$ ein erstes Integral.

Bsp. Das Räuber-Beute-Modell mit Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

$$\begin{cases} \dot{y} &= y(\alpha - \beta z) \\ \dot{z} &= z(\delta y - \gamma) \end{cases}$$

ist nicht hamiltonisch, aber besitzt das erste Integral

$$\mathcal{E}(y, z) := \alpha \ln|z| - \beta z + \gamma \ln|y| - \delta y \quad \text{auf } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

Def. Seien $h, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Die DGL $\dot{y}g(t, y) - h(t, y) = 0$ heißt **exakt**, falls es eine Stammfunktion $S : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ gibt, d. h. $S \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ und

$$\tfrac{\partial S}{\partial t}(t, y) = h(t, y) \quad \text{und} \quad \tfrac{\partial S}{\partial y}(t, y) = g(t, y).$$

Bem. Dann gilt für jede Lösung $y : [0, 1] \to \mathcal{D}$ der DGL:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t, y(t)) = \tfrac{\partial S}{\partial t}(t, y(t)) + \tfrac{\partial S}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \dot{y}(t) = 0.$$

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ stetig, lokal Lipschitz-stetig auf $\mathcal{D}$, y_* eine Ruhelage von f, $y_s(t) \equiv y_*$ die zugeh. stationäre Lösung, U_{y_*} eine offene Umgebung von y_*. Eine stetig diff'bare Funktion $V : U_{y_*} \to \mathbb{R}$ heißt

- **schwache Lyapunov-Funktion** der DGL $\dot{y} = f(y)$ für y_*, wenn $(\nabla V(y) \,|\, f(y)) \leq 0$ für alle $y \in U_{y_*}$.
- **starke Lyapunov-Funktion** der DGL $\dot{y} = f(y)$ für y_*, wenn $(\nabla V(y) \,|\, f(y)) < 0$ für alle $y \in U_{y_*} \setminus \{y_*\}$.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig auf $\mathcal{D}$, y_* eine Ruhelage von f, $y_*(t) \equiv y_*$ die zugeh. stationäre Lösung.

- Sei $V : U_{y_*} \to \mathbb{R}$ eine *schwache* Lyapunov-Funktion der DGL $\dot{y} = f(y)$ für $y_* \in U_{y_*}$ und es gelte $\forall\, y \in U_{y_*} \setminus \{y_*\} : V(y_*) < V(y)$, d. h. V hat in y_* ein isoliertes lokales Minimum. Dann ist $y_s(t)$ stabil.
- Wenn V sogar eine *starke* Lyapunov-Funktion ist, so ist $y_s(t)$ asymptotisch stabil.

Def. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\left\{ \begin{matrix} \textbf{positiv} \\ \textbf{negativ} \end{matrix} \right\} \textbf{definit}, \text{ falls } v^T A v \left\{ \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \right\} \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Bem. Eine (2×2)-Matrix ist genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante und ihre Spur positiv sind.

Bem. Die Funktion V hat in y_* ein isoliertes lokales Minimum, wenn die Hesse-Matrix $H := (\operatorname{Hess} f)(y_*)$ positiv definit ist, d. h. $\forall\, v \neq 0 : v^T H v > 0$.

Satz. Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig, y_* eine Ruhelage von f, $y_s(t) \equiv y_*$. Sei $v : U_{y_*} \to \mathbb{R}$ eine starke Lyapunov-Funktion von $\dot{y} = f(y)$ für $y_* \in U_{y_*}$. Gibt es in jeder Umgebung $\widehat{U}_{y_*} \subset U_{y_*}$ von y_* einen Punkt $\hat{y} \in \widehat{U}_{y_*}$ mit $V(\hat{y}) < V(y_*)$, so ist $y_s(t)$ instabil.

Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Angenommen, es gibt eine positiv definite Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass die Matrix $A^T P + PA$ negativ definit ist. Dann ist $V(y) := y^T P y$ eine starke Lyapunov-Funktion von $\dot{y} = Ay$ für $y_* = 0$ mit der Eigenschaft $\forall\, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : 0 = V(y_*) < V(y)$.

Satz. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine positiv definite Matrix Q hat die **Lyapunov-Gleichung** $A^T P + PA = -Q$ genau dann eine eindeutige positiv definite Lösung P, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben.

Korollar. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die stationäre Lsg $y_s(t) \equiv 0$ von $\dot{y} = Ay$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Lyapunov-Gleichung $A^T P + PA = -Q$ mit einer pos. definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine (eindeutige) Lösung $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt.

Satz. Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine pos. definite Lsg von $A^T P + PA = -I$. Dann gilt

$$\operatorname{Spec}(A) = \{\text{ Eigenwerte von } A \} \subset \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) \leq -\tfrac{1}{2\|P\|}\}.$$

Problem. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $p, q : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ stetig. Betrachte

$$\dot{y}p(t,y) + q(t,y) = 0 \tag{5.1}$$

Def. Die DGL (5.1) heißt **exakt** auf $\mathcal{D}$, falls es eine stetig diff'bare Funktion $S : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\tfrac{\partial S}{\partial t}(t,y) = q(t,y) \quad \text{und} \quad \tfrac{\partial S}{\partial y}(t,y) = p(t,y).$$

Satz. Die DGL (5.1) sei exakt mit Stammfunktion S. Dann erfüllt die Lösung y von (5.1) mit Anfangswert $y(t_0) = y_0$ die Gleichung

$$S(t, y(t)) \equiv S(t_0, y_0).$$

Bem. Falls $\frac{\partial S}{\partial y}(t_0, y_0) = p(t_0, y_0) \neq 0$, so kann man nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung $S(t,y) = S(t_0, y_0)$ nach y auflösen und erhält so eine lokale Lösung von (5.1).

Satz. Sei $\mathcal{D} = (a,b) \times (c,d) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $-\infty \leq c < d \leq \infty$. Dann ist die Gleichung (5.1) genau dann exakt, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\tfrac{\partial p}{\partial t}(t,y) = \tfrac{\partial q}{\partial y}(t,y)$$

für alle $(t,y) \in \mathcal{D}$ erfüllt ist. Die Stammfunktion ist dann

$$S(t,y) := \int_{t_0}^{t} q(s,y)\,\mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} p(t_0, z)\,\mathrm{d}z.$$

Def. Sei die DGL (5.1) gegeben. Eine stetige und bzgl. y Lipschitz-stetige Funktion $m : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ heißt **integrierender Faktor**, falls $m(t,y) \neq 0$ auf $\mathcal{D}$ und die DGL

$$\dot{y} \cdot (p(t,y) \cdot m(t,y)) + (q(t,y) \cdot m(t,y)) = 0 \tag{5.2}$$

exakt ist.

Bem. Da $m \not\equiv 0$ auf $\mathcal{D}$ nach Definition, hat (5.2) dieselben Lösungen wie (5.1).