

Zusammenfassung Numerik von PDEs

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine DGL der Form

$$F(x, u, Du, \dots, D^k u) = 0$$

heißt **partielle DGL/PDE** der Ordnung $k \geq 1$, wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist.

Def (Klassifikation von PDEs).

- Die PDE heißt **linear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

mit Funktionen $a_\alpha, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt.

- Die PDE heißt **semilinear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u) = 0$$

besitzt, wobei $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind.

- Die PDE heißt **quasilinear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u) D^\alpha u + a_0(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u) = 0$$

hat, wobei $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k}$ gegeben sind.

- Die PDE heißt **nichtlinear**, falls die Ableitungen der höchsten Ordnung nicht linear vorkommen.

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Eine PDE der Form

$$F(x, u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1} \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_1} \partial_{x_n} u, \dots, \partial_{x_n} \partial_{x_n} u) = 0$$

heißt **PDE zweiter Ordnung**.

Notation. $p_i := \partial_{x_i} u$, $p_{ij} := \partial_{x_i x_j}^2 u$

$$M(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_{11}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial p_{n1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{nn}} \end{pmatrix} = M(x)^T.$$

Def (Typeneinteilung für PDEs der 2. Ordnung).

Obige PDE zweiter Ordnung heißt

- elliptisch** in x , falls die Matrix $M(x)$ positiv o. definit ist.
- parabolisch** in x , falls genau ein EW von $M(x)$ gleich null ist und alle anderen dasselbe Vorzeichen haben.
- hyperbolisch** in x , falls genau ein EW ein anderes Vorzeichen als die anderen EWE hat.

Lösungstheorie elliptischer PDEs

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt.

- $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid u \text{ stetig}\}$, $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) := \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, mit Norm

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|u(x)\|. \quad (\text{Supremumsnorm})$$

- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N}$ ist der Raum aller auf Ω k -mal stetig diff'baren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden können.

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)}$$

- Sei $\alpha \in [0, 1)$. $\mathcal{C}^{0, \alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid H_\alpha(u, \overline{\Omega}) < \infty\}$ mit

$$H_\alpha(u, \overline{\Omega}) := \sup_{x, y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} \quad (\text{Hölder-Koeffizient})$$

heißt **Raum der glm. Hölder-stetigen Fktn** zum Exponent α . Der Hölder-Koeffizient ist dabei eine Seminorm auf $\mathcal{C}^{0, \alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$.

- $\mathcal{C}^{k, \alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid \forall |\gamma| = k : D^\gamma u \in \mathcal{C}^{0, \alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)\}$ heißt **Hölder-Raum**. Eine Norm ist gegeben durch

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k, \alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} + \sum_{|\gamma| = k} H_\alpha(D^\gamma u, \overline{\Omega}).$$

Bem. • Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

- $\mathcal{C}^{0, 1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ heißt **Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen**.
- \mathcal{C} , \mathcal{C}^k und $\mathcal{C}^{k, \alpha}$ sind Banach-Räume mit den jeweiligen Normen.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt.

Das Gebiet Ω gehört zur **Klasse $\mathcal{C}^{k, \alpha}$** , wenn in jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung in $\partial\Omega$ existiert, die sich in einem geeigneten Koordinatensystem als ein Graph einer Funktion aus $\mathcal{C}^{k, \alpha}$ darstellen lässt und Ω lokal immer auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.

Satz (Gauß'scher Integralsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet und $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n u_i \nu_i \, d\rho(x) = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu \, d\rho(x),$$

wobei ν der äußere Normalenvektor an den Rand von Ω ist.

Problem. Wir betrachten das Randwertproblem

$$(\text{RWP}) \begin{cases} \mathcal{L}u &= f & \text{in } \Omega & (\text{PDE}) \\ \mathcal{R}u &= g & \text{auf } \partial\Omega & (\text{Randbedingung}) \end{cases}$$

wobei \mathcal{L} der lineare Differentialoperator

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

mit Fktn $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist, sodass $A(x) := (a_{ij}(x))$ symmetrisch ist. Als Randbedingung (RB) verlangen wir:

$$\begin{array}{lll} \text{Dirichlet-RB:} & u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \text{Neumann-RB:} & (A(x) \nabla u) \cdot \nu &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \text{ oder} \\ \text{Robin-RB:} & (A(x) \nabla u) \cdot \nu + \delta u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{array}$$

Bem. Man kann auch auf verschiedenen Teilstücken des Randes verschiedene Bedingungen stellen.

Bem. Falls die Funktionen a_{ij} differenzierbar sind, so kann \mathcal{L} in **Divergenzform** geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x) \right) + b_i(x) \right)}_{\tilde{b}(x)} \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \\ &= - \operatorname{div}(A(x) \nabla u) + \tilde{b}(x) \cdot \nabla u + c(x)u \end{aligned}$$

Voraussetzung. Wir nehmen im Folgenden an:

- \mathcal{L} ist **gleichmäßig elliptisch**, d. h.

$$\exists \lambda_0 > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \Omega : \xi^T A(x) \xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2$$

Dabei heißt λ_0 **Elliptizitätskonstante**.

- $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$

Bem. $\mathcal{L} = f$ ist elliptisch auf $\Omega \iff A(x) > 0$ (spd) für alle $x \in \Omega$

Def. Eine Fkt $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ heißt **klassische Lsg** vom (RWP) mit $\mathcal{R}u := u$, wenn die beiden Gleichungen in (RWP) in jedem Punkt von Ω bzw. des Randes $\partial\Omega$ erfüllt sind.

Satz (Maximumsprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zshgd u. beschränkt. Sei $u \in \mathcal{C}^2(\omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ eine Lösung vom (RWP), $f \leq 0$ in Ω und $c \equiv 0$. Dann nimmt u sein Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an, d. h.

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} g(x)$$

Kor. Sei $c \geq 0$ und $f \leq 0$. Dann gilt $\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max\{\sup_{x \in \partial\Omega} u(x), 0\}$.

Kor (Vergleichsprinzip). Für $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ und $c \geq 0$ gelte $\mathcal{L}u_1 \leq \mathcal{L}u_2$ in Ω und $u_1 \leq u_2$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $u_1 \leq u_2$ auf $\overline{\Omega}$.

Kor (Eindeutigkeit). Sei $c \geq 0$. Dann hat (RWP) höchstens eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Satz. Sei Ω ein beschr. Lipschitz-Gebiet, $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $c \geq 0$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann besitzt (RWP) genau eine Lsg $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Achtung. Es muss aber nicht $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ gelten!

Differenzenverfahren

Verfahren (DV). Am Beispiel des Poisson-Problems

$$(RWP_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega = (0, 1) \\ u(0) = g_0, u(1) = g_1 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Wir führen folgende Schritte durch:

1. Diskretisierung: Wähle $n \in \mathbb{N}$, setze $h := \frac{1}{n}$ und

$$\begin{aligned} \Omega_h &:= \{x_i := ih \mid i = 1, \dots, n-1\} & (\text{innere Gitterpunkte}) \\ \partial\Omega_h &:= \{x_0 = 0, x_n = 1\} & (\text{Randpunkte}) \end{aligned}$$

2. Approx. der Ableitungen durch Differenzenquotienten (DQ)

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{1}{h} (u(x_i + h) - u(x_i)) & (\text{Vorwärts-DQ}) \\ u'(x_i) &\approx \frac{1}{h} (u(x_i) - u(x_i - h)) & (\text{Rückwärts-DQ}) \\ u'(x_i) &\approx \frac{1}{2h} (u(x_i + h) - u(x_i - h)) & (\text{zentraler DQ}) \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} u''(x_i) &= (u'(x_i))' \approx \frac{1}{h} (u'(x_i + h) - u'(x_i)) \approx \\ &\approx \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{h} (u(x_i + h) - u(x_i)) - \frac{1}{h} (u(x_i) - u(x_i - h)) \right) \\ &= \frac{1}{h^2} (u(x_i + h) - 2 \cdot u(x_i) + u(x_i - h)) =: \Delta_h u \end{aligned}$$

Dabei heißt Δ_h der diskrete eindim. Laplace-Operator. Das diskretisierte Randwertproblem ist nun

$$(RWP_1)_h \quad \begin{cases} -\Delta_h u_h = f & \text{in } \Omega_h, \\ u_h(0) = g_0, u_h(1) = g_1 & \text{auf } \partial\Omega_h. \end{cases}$$

3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (2u_h(x_1) - u_h(x_2)) &= f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} & (i=1) \\ \frac{1}{h^2} (-u_h(x_{i-1}) + u_h(x_i) - u_h(x_{i+1})) &= f(x_i) & (i=2, \dots, n-2) \\ \frac{1}{h^2} (-u_h(x_{n-2}) + 2u_h(x_{n-1})) &= f(x_{n-1}) + \frac{g_1}{h^2} & (i=n-1) \end{aligned}$$

Als lineares Gleichungssystem: $-\tilde{\Delta}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$ mit

$$-\tilde{\Delta}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)},$$

$$\tilde{u}_h = \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ \vdots \\ u_h(x_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{g_1}{h^2} \end{pmatrix}$$

Ziel. Herausfinden, was die Lösung u_h von $(RWP)_h$ (die man durch Lösen von (LGS) erhält) mit der Lösung u zum ursprünglichen Problem (RWP) zu tun hat. Ist etwa u_h die Einschränkung von u , oder zumindest annäherungsweise? Wenn ja, wie klein muss man h wählen, damit die Approximation gut wird?

$$\begin{aligned} (RWP) \quad & \begin{cases} -\mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \\ (RWP)_h \quad & \begin{cases} -\mathcal{L}_h u = f_h & \text{in } \Omega_h, \\ u_h = g_h & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases} \\ (LGS) \quad & \tilde{\mathcal{L}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h \end{aligned}$$

Notation. $U_h := \{\Omega_h \rightarrow \mathbb{R}\}$, $R_h : \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \rightarrow U_h$, $u \mapsto u|_{\Omega_h}$

Def. Das Differenzenverfahren $(RWP)_h$ heißt

- **konvergent** von der Ordnung p , falls $C > 0$, $h_0 > 0$ existieren, sodass für die Lösung u von (RWP) und die Lösung u_h von $(RWP)_h$ gilt:
$$\|u_h - R_h u\|_h \leq Ch^p \quad \text{für alle } 0 < h \leq h_0,$$
wobei $\|\cdot\|_h$ eine Norm zu U_h ist, wie z. B. $\|u_h\|_h := \max_{x \in \Omega_h} |u_h(x)|$.
- **konsistent** von der Ordnung p , falls
$$\|\mathcal{L}_h R_h u - R_h \mathcal{L}u\|_h \leq ch^p \|u\|_{\mathcal{C}^{p+2}(\bar{\Omega})} \quad \forall u \in \mathcal{C}^{p+2}(\bar{\Omega}).$$
- **stabil**, falls \tilde{L}_h invertierbar ist und ein $h_0 > 0$ existiert mit

$$\sup_{0 < h \leq h_0} \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h < \infty, \quad \text{wobei } \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h := \sup_{f \neq 0} \frac{\|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1} f\|_h}{\|f\|_h}.$$

Bem. Die ind. Matrixnorm ist $\|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h = \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |l_{ij}|$.

Satz. Ist das DV $(RWP)_h$ konsistent und stabil, so auch konvergent. Genauer gilt: Ist $(RWP)_h$ stabil und konsistent von der Ordnung p und $u \in \mathcal{C}^{p+2}(\bar{\Omega})$, dann ist $(RWP)_h$ konvergent von der Ordnung p .

Beweis. Setze $w_h := u_h - R_h u$. Für $x \in \partial\Omega_h$ gilt dann $w_h(x) = 0$ und für $x \in \Omega_h$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_h w_h(x) &= \mathcal{L}_h w_h(x) = \mathcal{L}_h u_h(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \\ &= f_h(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) = R_h f(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \\ &= R_h \mathcal{L}u(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \end{aligned}$$

Somit gilt $w_h = \tilde{\mathcal{L}}_h^{-1} (R_h \mathcal{L}u - \mathcal{L}_h R_h u)$ in Ω_h , also

$$\begin{aligned} \|w_h\|_h &= \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1} (R_h \mathcal{L}u - \mathcal{L}_h R_h u)\| \leq \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h \cdot \|R_h \mathcal{L}u - \mathcal{L}_h R_h u\|_h \\ &\leq c_1 \cdot c_2 \cdot h^p \cdot \|u\|_{\mathcal{C}^{p+2}(\bar{\Omega})} \leq Ch^p \quad \text{für } 0 < h \leq h_0. \end{aligned} \quad \square$$

Lem. Das DV $(RWP_1)_h$ ist konsistent von der Ordnung 2. Es gilt

$$\|\Delta_h R_h u - R_h \Delta u\|_h \leq \frac{1}{12} \|u\|_{\mathcal{C}^4(\bar{\Omega})} h^2 \quad \forall u \in \mathcal{C}^4(\bar{\Omega}).$$

Bem. Um zu zeigen, dass $(RWP_1)_h$ konvergent ist, müssen wir noch zeigen, dass $\tilde{L}_h = -\tilde{\Delta}_h$ invertierbar ist und $\sup_{0 < h \leq h_0} \|\tilde{\Delta}_h\| < \infty$.

Def. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **M-Matrix**, falls
a) $a_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, n$, b) $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$,
c) A invertierbar ist und d) für $A^{-1} =: B = (b_{ij})$ gilt $b_{ij} \geq 0$.

Lem. Erfülle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Bedingungen a) und b). Zerlege $A = D + L + R$ in eine Diagonalmatrix und strikte untere/obere Dreiecksmatrizen. Dann ist A genau dann eine M-Matrix wenn

$$\rho(D^{-1}(L + R)) < 1.$$

Bem. Es gilt folgende Monotonie-Eigenschaft für M-Matrizen:

$$x \leq y \implies A^{-1}x \leq A^{-1}y.$$

Def. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **reduzibel** (oder zerlegbar), wenn es eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, sodass

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}, 0 < k < n.$$

Lem (Gerschgorin). Alle EWe einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ liegen in der Menge

$$\bigcup_{i=1}^n \overline{B_{r_i}(a_{ii})} \quad \text{mit } r_i := \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Falls A irreduzibel ist, so liegen sie sogar in

$$\left(\bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(a_{ii}) \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n \partial B_{r_i}(a_{ii}) \right)$$

Def. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix.

- A heißt **schwach diagonaldominant**, falls

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

und ein i_0 existiert, sodass die Ungleichung strikt ist.

- A heißt **diagonaldominant**, falls

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

- A heißt **irreduzibel diagonaldominant**, falls A irreduzibel und schwach diagonaldominant ist.

Lem. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$ und $a_{ij} \leq 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, die diagonaldominant oder irreduzibel diagonaldominant ist. Dann ist A eine M-Matrix.

Bem. $-\tilde{\Delta}_h$ ist irreduzibel diagonaldominant, also eine M-Matrix.

Lem. Sei A eine irreduzible M-Matrix. Dann gilt $A^{-1} > 0$.

Lem. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine M-Matrix und es existiere ein Vektor v , sodass $(Av)_j \geq 1$, $j = 1, \dots, n$. Dann gilt $\|A^{-1}\|_\infty \leq \|v\|_\infty$.

Lem. $\|\tilde{\Delta}_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$

Satz. Das DV $(RWP_1)_h$ ist konvergent von der Ordnung 2, falls die Lösung von (RWP_1) zu $\mathcal{C}^4([0, 1])$ gehört. Es gilt die Abschätzung

$$\|u_h - R_h u\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \|u\|_{\mathcal{C}^4([0, 1])}.$$

Problem. Wir betrachten nun

$$(RWP_2) \quad \begin{cases} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

1. Diskretisierung: Setze $h := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$\Omega_h := \{(x, y) \in \Omega \mid x = ih, y = jh, i, j = 1, \dots, n-1\}$$

$$\partial\Omega_h := \{(x, y) \in \partial\Omega \mid x = ih, y = jh, i, j = 1, \dots, n-1\}$$

2. Approximation der Ableitungen

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \\ &\approx -\frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} - \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2} \\ &= -\frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) - 4u(x, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h)}{h^2} =: -\Delta_h u \end{aligned}$$

Dabei hat der diskrete Laplace-Operator Δ_h die Form eines Differenzensterns. Gesucht ist die Lsg $u_h : \Omega_h \cup \partial\Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$(\text{RWP}_2)_h \begin{cases} -\Delta_h u_h &= f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h &= g & \text{auf } \partial\Omega_h. \end{cases}$$

3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems $-\tilde{\Delta}_h \tilde{u}_h = f_h$:

$$\tilde{u}_h = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{n-1, n-2} \\ u_{n-1, n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2},$$

$$-\tilde{\Delta}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} A & -I & & 0 \\ -I & A & -I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & -I & A & -I \\ & & & -I & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n-1)^2},$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$$

Lem. Das DV $(\text{RWP}_2)_h$ ist konsistent von der Ordnung 2. Es gilt

$$\|\Delta_h R_h u - R_h \Delta u\|_h \leq \frac{1}{6} \|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} h^2.$$

Lem. Das DV $(\text{RWP}_2)_h$ ist stabil. Es gilt $\|\tilde{\Delta}_h^{-1}\|_\infty \leq 1/8$.

Satz. Das DV $(\text{RWP}_2)_h$ ist konvergent von der Ordnung 2, falls die Lösung von (RWP_2) zu $C^4(\bar{\Omega})$ gehört. Es gilt

$$\|u_h - R_h u\|_h \leq 1/48 \|u\|$$

Bem. Durch die Einbeziehung weiterer Gitterpunkte zur Approximation des Differentialoperators lässt sich die Konvergenzordnung erhöhen:

$$\begin{aligned} -\Delta_h^{(9)} u(x, y) &= \frac{1}{12h^2} (u(x-2h, y) - 16u(x-h, y) + 30u(x, y) \\ &\quad - 16u(x+h, y) + u(x+2h, y) + u(x, y-2h) - 16u(x, y-h) \\ &\quad + 30u(x, y) - 16u(x, y+h) + u(x, y+2h)) \approx -\Delta u(x, y) \end{aligned}$$

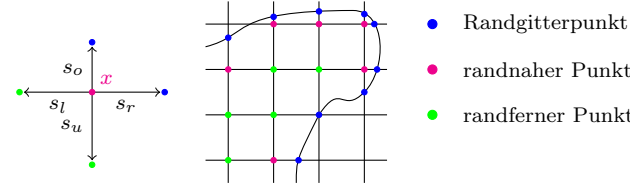
Damit erreicht man die Konsistenzordnung 4.

Situation. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt.

Def. • $\Omega_h := \{x, y \in \Omega \mid x/h, y/h \in \mathbb{Z}\}$ heißen **innere Gitterpunkte**.

- Ein Punkt $z_R \in \partial\Omega$ heißt **Randgitterpunkt** (notiert $z_R \in \partial\Omega_h$), falls es einen inneren Gitterpunkt $z \in \Omega_h$ gibt, sodass $z_R = r + \alpha h e_1$ oder $z_R = z + \alpha h e_2$ mit $|\alpha| \leq 1$. Die Nachbarn $N(x, y)$ eines Punktes (x, y) sind $(x + s_r h, y)$, $(x - s_l h, y)$, $(x, y + s_o h)$, $(x, y - s_u h)$, falls $s_r, s_l, s_o, s_u \in (0, 1]$ und die Verbindungsstrecken zu (x, y) in Ω liegen.
- Ein Punkt $(x, y) \in \Omega_h$ heißt **randnah**, falls (x, y) die Nachbarn $(x - s_l h, y)$, $(x + s_r h, y)$, $(x, y - s_u h)$, $(x, y + s_o h)$ hat mit mindestens einem $s_i < 1$. Ansonsten heißt (x, y) **randfern**.

Notation. Wir haben eine Einteilung $\Omega_h = \Omega_h^{\text{rn}} \sqcup \Omega_h^{\text{rf}}$ der Gitterpunkte in randnahe und randferne Punkte.



Lem (Dividierte Differenzen von Newton).

Für $u \in C^3([x_l, x_r])$, $x \in (x_l, x_r)$ gilt

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{2}{x_r - x_l} \left(\frac{u(x_r) - u(x)}{x_r - x} - \frac{u(x) - u(x_l)}{x - x_l} \right) + \mathcal{O}(x_r - x_l) \\ &= \frac{2}{x_r - x_l} \left(\frac{1}{x_r - x} u(x_r) + \frac{1}{x - x_l} u(x_l) \right) - \frac{2}{(x_r - x)(x - x_l)} u(x) \end{aligned}$$

Verfahren (Shortley-Weller-Diskretisierung).

Dadurch inspiriert approximieren wir den Laplace-Operator durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_h u(x, y) &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{2u(x - s_l h, y)}{s_l(s_r + s_l)} + \frac{2u(x + s_r h, y)}{s_r(s_r + s_l)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2u(x, y - s_u h)}{s_u(s_o + s_u)} + \frac{2u(x, y + s_o h)}{s_o(s_o + s_u)} - \left(\frac{2}{s_l s_r} + \frac{2}{s_o s_u} \right) u(x, y) \right) \end{aligned}$$

wobei $x_r - x = s_r h$, $x - x_l = s_l h$, $y_o - y = s_o h$, $y - y_u = s_u h$. Wir betrachten nun

$$(\text{RWP}_2)'_h \begin{cases} -\mathcal{D}_h u_h &= f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h &= g & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases}$$

$$(\text{LGS}_2)' \begin{cases} -\tilde{\mathcal{D}}_h \tilde{u}_h &= \tilde{f}_h \\ \tilde{f}_h &= f_h + g_h \end{cases}$$

$$\text{mit } g_h(x, y) = \frac{1}{h^2} \sum_{(x_N, y_N) \in N(x, y) \cap \partial\Omega_h} S_{x_N, y_N} g(x_N, y_N)$$

wobei

$$S_{x_N, y_N} := \begin{cases} 2/s_l(s_l + s_r) & \text{falls } (x_N, y_N) = (x - s_l h, y), \\ 2/s_r(s_l + s_r) & \text{falls } (x_N, y_N) = (x + s_r h, y), \\ 2/s_o(s_o + s_u) & \text{falls } (x_N, y_N) = (x, y + s_o h), \\ 2/s_u(s_o + s_u) & \text{falls } (x_N, y_N) = (x, y - s_u h), \end{cases}$$

$$-\tilde{\mathcal{D}}_h = (d_{ij}) \quad \text{mit} \quad d_{ii} = 1/h^2 \left(\frac{2}{s_{il}s_{ir}} + \frac{2}{s_{iu}s_{io}} \right) \quad \text{und}$$

$$d_{ij} = 1/h^2 \begin{cases} -2/s_{il}(s_{il} + s_{ir}) & \text{falls } j \text{ der linke Nachbar von } i \text{ ist,} \\ -2/s_{ir}(s_{il} + s_{ir}) & \text{falls } j \text{ der rechte Nachbar von } i \text{ ist,} \\ -2/s_{iu}(s_{iu} + s_{io}) & \text{falls } j \text{ der untere Nachbar von } i \text{ ist,} \\ -2/s_{io}(s_{iu} + s_{io}) & \text{falls } j \text{ der obere Nachbar von } i \text{ ist.} \end{cases}$$

Lem. • Die Matrix $-\tilde{\mathcal{D}}_h$ ist eine M-Matrix.

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und gehöre zu dem Streifen $(x_0, x_0 + d) \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R} \times (y_0, y_0 + d)$. Dann gilt $\|\tilde{\mathcal{D}}_h^{-1}\| \leq d^2/8$.

Bem. Das DV $(\text{RWP}_2)'_h$ hat in den randnahen Punkten nur die Konsistenzordnung 1. Dennoch gilt:

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und Teilmenge des Streifens $(x_0, x_0 + d) \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R} \times (y_0, y_0 + d)$. Dann ist das Verfahren $(\text{RWP}_2)'_h$ konvergent von der Ordnung 2. Es gilt

$$\|u_h - R_h u\|_h \leq (1/3h^3 + d^2/48h^2) \|u\|_{C^4(\bar{\Omega})}.$$

Idee. Bestimme den Wert von u bei randnahen Punkten (x, y) durch lineare Interpolation:

- $u(x, y) \approx \frac{s_r}{s_r + s_l} u(x - s_l h, y) + \frac{s_l}{s_r + s_l} u(x + s_r h, y)$
- $u(x, y) \approx \frac{s_o}{s_u + s_o} u(x, y - s_u h) + \frac{s_u}{s_u + s_o} u(x, y + s_o h)$

$$(\text{RWP}_2)''_h \begin{cases} -\mathcal{D}_h u &= f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h &= g & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases}$$

$$(\text{LGS}_2)'' \quad -\tilde{\mathcal{D}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$$

Lem. Dieses Verfahren besitzt Konsistenzordnung (und somit Konvergenzordnung) 2.

$$(\text{RWP}_3) \begin{cases} -\mathcal{L}u &= f & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit

$$-\mathcal{L}u = -(a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy}) + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y$$

wobei $c(x, y) \leq 0$, $\xi^T A(x, y) \xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2$, $\lambda_0 > 0$ und

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{21}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

1. Diskretisierung: $h = 1/n$, Ω_h , $\partial\Omega_h$ wie früher.

2. Approximation: $u_{xx}(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2}$,

$$u_{yy}(x, y) \approx \dots, \quad u_x(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h},$$

$$u_y(x, y) \approx \frac{u(x, y+h) - u(x, y-h)}{2h},$$

Mehrere Möglichkeiten für Approx. von u_{xy} :

- $u_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{4h^2} (u(x+h, y+h) - u(x+h, y-h) - u(x-h, y+h) + u(x-h, y-h))$

$$\begin{aligned}
u_{xy}(x, y) &\approx \frac{1}{2h^2} (-u(x-h, y) + 2u(x, y) - u(x+h, y) \\
&\quad + u(x-h, y-h) - u(x, y+h) - u(x, y-h) \\
&\quad + u(x+h, y+h)) \text{ falls } a_{12}(x, y) \geq 0, \\
u_{xy}(x, y) &\approx \frac{1}{2h^2} (u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y) \\
&\quad + u(x, y+h) - u(x-h, y+h) - u(x+h, y-h) \\
&\quad + u(x, y-h)) \text{ falls } a_{12}(x, y) < 0
\end{aligned}$$

Beziehungsweise als 9-Punkte-Stern

$$\frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

für $a_{12} \geq 0$ und

$$\frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Insgesamt haben wir als Approximation

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}u(x, y) &\approx \frac{1}{h^2} ((-a_{11} + |a_{12}| + h/2b_1)u(x-h, y) \\
&\quad + (-a_{11} + |a_{12}| - h/2b_1)u(x+h, y) \\
&\quad + (2a_{11} + 2a_{22} - 2|a_{12}| + h^2c)u(x, y) \\
&\quad + (-a_{22} + |a_{12}| + h/2b_2)u(x, y-h) \\
&\quad + (-a_{22} + |a_{12}| - h/2b_2)u(x, y+h) \\
&\quad + (-\max(a_{12}, 0))u(x-h, y-h) \\
&\quad + (-\max(a_{12}, 0))u(x+h, y+h) \\
&\quad + \min(a_{12}, 0)u(x-h, y+h) \\
&\quad + \min(a_{12}, 0)u(x+h, y-h))
\end{aligned}$$

$$(\text{RWP}_3)_h \quad \begin{cases} -\mathcal{L}_h u_h &= f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h &= g & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases}$$

$$(\text{LGS}_3) \quad -\tilde{\mathcal{L}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$$

Satz. Sei $|a_{12}| \leq \min(a_{11}, a_{22})$, $c \geq 0$ in Ω , \mathcal{L} gleichmäßig elliptisch. Falls $a_{ii} > |a_{12}| + \frac{h}{2}|b_i|$ für $i = 1, 2$ in Ω und $u \in \mathcal{C}^4(\bar{\Omega})$, so ist das DV $(\text{RWP}_3)_h$ konvergent von der Ordnung 2.

$$(\text{RWP}_4) \quad \begin{cases} u_t(x, t) - \Delta_x u(x, t) &= f(x, t) & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, T) \\ u(x, 0) &= g(x) & x \in (0, 1) \\ u(0, t) &= g_0(t) & t \in [0, T] \\ u(1, t) &= g_1(t) & t \in [0, T] \end{cases}$$

1. Diskretisierung: $x_i = ih$, $h = 1/n$, $t_k = k\tau$, $\tau = T/m$, $u(x_i, t_k) \approx u_i^k$
 2. Approximation der Ableitungen
- $$u_{xx}(x, t) \approx \frac{1}{h^2} (u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t)) =: \Delta_h u(x, t)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_h(t) - \tilde{\Delta}_h u_h(t) &= f_h(t) \\ u_h(0) &= g_h \end{cases}$$

mit

$$u_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(h, t) \\ u_h(2h, t) \\ \vdots \\ u_h(1-h, t) \end{pmatrix}, f_h(t) = \begin{pmatrix} f(h, t) + \frac{1}{h^2} g_0(t) \\ f(2h, t) \\ \vdots \\ f(1-h, t) + \frac{1}{h^2} g_1(t) \end{pmatrix}$$

Einschrittverfahren:

- Explizites Euler-Verfahren: $\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - \tilde{\Delta}_h u_i^k = f_i^k$, $u_i^0 = g_h$

- Implizites Euler-Verfahren $\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - \tilde{\Delta} u_i^{k+1} = f_i^{k+1}$, $u_i^0 = g_h$
- Crank-Nicolson-Verfahren $\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} - \frac{1}{2} \tilde{\Delta}_h (u_i^k + u_i^{k+1}) = f(x_i, t_k + \frac{\tau}{2})$, $u_i^0 = g_h$

Lem. Sei $f(x, -) \in \mathcal{C}^1([0, T])$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann gilt für die Approximation von (RWP_4) :

- Die Verfahren (EEV) und (IEV) besitzen einen Konsistenzfehler von $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$, falls $u \in \mathcal{C}^4([0, 1] \times [0, T])$
- Das Verfahren (CNV) besitzt einen Konsistenzfehler von $\mathcal{O}(h^2 + \tau^2)$, falls $u \in \mathcal{C}^4([0, 1] \times [0, T])$.