Kurzfassung Riemannsche Geometrie

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def. Eine **topologische Mannigfaltigkeit** (Mft) ist ein topologischer Raum M^m mit folgenden Eigenschaften:

- M^m ist **hausdorffsch**, d. h.
$$\forall x, y \in M^m : x \neq y \implies \exists U_x \Subset M^m : \exists U_y \Subset M^m : x \in U_x \wedge y \in U_y \wedge U_x \cap U_y = \emptyset.$$
- M^m erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, d. h. es gibt eine abzählbare Menge $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$, sodass
$$\forall A \Subset M^m : \exists K \subset \mathbb{N} : A = \bigcup_{k \in K} U_k.$$
- M^m ist **lokal euklidisch**, d. h. für alle $x \in M^m$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x und einen Homöomorphismus $\phi : U_x \to \mathcal{O}$ mit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Bemerkung. lokal euklidisch $\not\Rightarrow$ hausdorffsch

Prop. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt
$$M \text{ zusammenhängend} \iff M \text{ wegzusammenhängend.}$$

Def.
- Sei M eine m-dim. topol. Mft. Ein **Atlas** ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j : U_j \to \mathcal{O}_j) \mid j \in J\}$ mit $U_j \Subset M$ und $\mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^n$ offen und Homöomorphismen ϕ_j, für die gilt $\bigcup_{j \in J} U_j = M$.
- Die Paare (U_j, ϕ_j) werden **Karten** genannt.
- Für je zwei Karten (U_j, ϕ_j) und (U_k, ϕ_k) gibt es eine **Kartenwechselabbildung**
$$\phi_{kj} := \phi_k \circ \phi_j^{-1}|_{\phi_j(U_j \cap U_k)} : \phi_j(U_j \cap U_k) \to \phi_k(U_j \cap U_k).$$
- Ein Atlas heißt **differenzierbar**, wenn alle Kartenwechselabbildungen $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen sind.
- Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt **differenzierbare Struktur** von M, wen gilt: Ist $(\tilde{U}, \tilde{\phi_j})$ eine Karte von M und $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \{(\tilde{U}, \tilde{\phi_j})\}$ ein differenzierbarer Atlas, dann gilt $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$.
- Eine topol. Mft versehen mit einer differenzierbaren Struktur heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

Notation. Seien ab jetzt M^m und N^n differenzierbare Mften der Dimensionen m und n

Def.
- Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt in $x \in M$ **differenzierbar**, wenn es eine Karte $(U_x, \phi : U_x \to \mathcal{O}) \in \mathcal{A}_M$ und eine Karte $(\tilde{U}_{f(x)}, \tilde{\phi} : \tilde{U}_{f(x)} \to \tilde{\mathcal{O}}) \in \mathcal{A}_N$ gibt, sodass
$$\tilde{\phi} \circ f|_{U_x} \circ \phi^{-1} : \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}} \quad \text{differenzierbar } (\mathcal{C}^\infty) \text{ ist.}$$
- Die Abbildung f heißt **differenzierbar**, falls sie in jedem Punkt $x \in M$ differenzierbar ist.

Notation. $\mathcal{C}^\infty(M, N) := \{f : M \to N \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$

Bemerkung. Die Definition ist unabhängig von Wahl der Karten um x und $f(x)$.

Def. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn f ein Homöo ist und f und f^{-1} differenzierbar sind.

Def. Sei $p \in M$. Zwei Funktionen $f : U_p \to \mathbb{R}$ und $g : V_p \to \mathbb{R}$ mit $U_p, V_p \Subset M$ heißen äquivalent, falls es eine offene Umgebung $W \subset U_p \cap V_p$ mit $f|_W = g|_W$ gibt. Die Äquivalenzklasse $[f]$ bezüglich der so definierten Äq'relation heißt **Funktionskeim** in p.

Notation. $\mathcal{C}^\infty(M, p) := \{[f] \mid [f] \text{ Funktionskeim in } p\}$

Bemerkung. Die Menge der Funktionskeime ist eine $\mathbb{R}$-Algebra.

Def. Eine lineare Abb. $\delta : \mathcal{C}^\infty(M, p) \to \mathbb{R}$ heißt **Derivation**, falls
$$\forall [f], [g] \in \mathcal{C}^\infty(M, p) : \delta[f \cdot g] = \delta[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta[g].$$

Def. Der gewöhnliche Tangentialraum des $\mathbb{R}^n$ im Punkt p ist
$$\tilde{T}_p\mathbb{R}^n := \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$
mit $(p, v) + (p, w) := (p, v + w)$ und $\lambda \cdot (p, v) := (p, \lambda \cdot v)$.

Def. Der **Tangentialraum** von M im Punkt $p \in M$ ist
$$T_pM := \{\partial : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, p) \to \mathbb{R} \mid \partial \text{ linear, derivativ}\}$$
Ein Element $v \in T_pM$ heißt **Tangentialvektor** an M in p.

Bemerkung. Wir erhalten eine Abbildung
$$T_pM \times \mathcal{C}^\infty(M, p) \to \mathbb{R}, \quad (v, [f]) \mapsto v.f := v[f].$$

Bemerkung. T_pM ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Satz. Die Vektorräume $T_p\mathbb{R}^n$ und $\tilde{T}_p\mathbb{R}^n$ sind isomorph. Insbesondere gilt $\dim(T_p\mathbb{R}^n) = n$.

Korollar. Für eine m-dimensionale diff'bare Mft M gilt: $\dim(T_pM) = m$.

Bemerkung. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann kann man $\dot{c}(0)$ auffassen als Tangentialvektor an M in $c(0)$ mittels
$$\dot{c}(0)[f] := \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}(f \circ c).$$

Bemerkung. Sei (U, ϕ) eine Karte von M. Wir setzen
$$\tfrac{\partial^\phi}{\partial x_i}|_p[f] := (\phi^{-1} \circ \alpha_i)^{\cdot}(0)[f] = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}(f \circ \phi^{-1} \circ \alpha_i)$$
$$\text{mit } \alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \to U, \ \ t \mapsto \phi(p) + te_i.$$
Wir erhalten $\frac{\partial^\phi}{\partial x_i}|_p \in T_pM$.

Def. Sei $f : M \to N$ diff'bar. Die **Ableitung** von f in $p \in M$ ist die Abbildung
$$T_pf = f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N, \ \ v \mapsto f_{*p}v$$
$$\text{wobei } f_{*p}(v).[g] := v.[g \circ f].$$

Lemma. Sei M eine diff'bare Mft, $p \in M$. Dann gilt
- f_{*p} ist linear
- $(\mathrm{id}_M)_{*p} = \mathrm{id}_{T_pM}$
- Kettenregel: Seien N, P diff'bare Mften. Dann gilt
$$\forall p \in M : (f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}.$$

Korollar. Wenn $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus ist, dann ist $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein VR-Isomorphismus für alle $p \in M$.

Satz. Sei M eine m-dimensionale Mft, $p \in M$ und (U, ϕ) eine Karte.
- Es gilt $T_pM = \{\dot{c}(0) \mid c : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ diff'bar}, c(0) = p\}$
- $\{\frac{\partial^\phi}{\partial x_i}|_p \mid i = 1, ..., n\}$ ist eine Basis von T_pM.

Def. $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$ heißt **Tangentialbündel** von M. Die **Fußpunktabbildung** ist die Projektion
$$\pi : TM \to M, v \in T_pM \mapsto p.$$

Def. Ein **Vektorfeld** auf M ist eine Abbildung $X : M \to TM$, sodass $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. Dies ist äquivalent zu $\forall p \in M : X(p) \in T_p(M)$.

Bemerkung. Sei $X : M \to TM$ ein Vektorfeld, (U, ϕ) eine Karte. Dann gibt es Funktionen $\xi^j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n$ mit $X(p) = \sum_{j=1}^n \xi^j(p) \frac{\partial^\phi}{\partial x^j}|_p$ für alle $p \in M$.

Def.
- Ein Vektorfeld X auf M heißt in $p \in M$ **diff'bar** ($\mathcal{C}^\infty$), wenn es eine Karte (U, ϕ) um p gibt, sodass die Funktionen $\xi_1, ..., \xi^m$ diff'bar ($\mathcal{C}^\infty$) sind.
- X heißt **differenzierbar**, wenn X in allen $p \in M$ diff'bar ist.

Lemma. Wenn die Koordinatenfunktionen $\xi^1, ..., \xi^n$ für eine bestimmte Karte $(U, \phi : U \to \mathcal{O})$ differenzierbar sind, dann sind sie es für jede andere Karte $(\tilde{U}, \psi : \tilde{U} \to \tilde{\mathcal{O}})$ mit $\tilde{U} \subseteq U$.

Def. Sei M eine m-dimensionale diff'bare Mft mit diff'barer Struktur $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j) \mid j \in J\}$. Dann ist TM eine $2m$-dimensionale Mft mit Atlas $\tilde{\mathcal{A}} := \{(\tilde{U}_j := \pi^{-1}(U_j), \tilde{\Phi}_j) \mid j \in J\}$, wobei
$$\tilde{\Phi}_j : \pi^{-1}(U_j) \to \phi_j(U_j) \times \mathbb{R}^m, \quad \sum_{k=1}^m \xi^k(p) \tfrac{\partial^{\phi_j}}{\partial x^k}|_p \mapsto (\phi_j(p), \xi^1(p), ..., \xi^n(p)).$$
Eine Menge $V \subseteq TM$ heißt offen, wenn $\tilde{\Phi}_j(V \cap \pi^{-1}(U_j)) \Subset \mathbb{R}^{2n}$ offen ist für alle $j \in J$.

Notation. $\chi(M) := \{ \text{ diff'bare Vektorfelder auf } M \}$

Bemerkung. $\chi(M)$ ist ein $\mathbb{R}$-VR und ein $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul.

Lemma. Jedes $X \in \chi(M)$ induziert eine Abbildung
$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad \phi \mapsto X(\phi) := p \mapsto X(p).[\phi].$$
Die Abbildung X ist linear und derivativ.

Lemma. Seien $X, Y \in \chi(M)$ mit $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) : X(f) = Y(f)$. Dann gilt $X = Y$.

Lemma. Seien $X, Y \in \chi(M)$. Dann definiert
$$Z : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M), \ \ f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$$
ein Vektorfeld auf M.

Def. Dieses Vektorfeld $[X, Y] := Z$ wird als **Kommutator** oder **Lie-Klammer** von X und Y bezeichnet.

Def. Sei $X \in \chi(M)$. Eine diff'bare Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ heißt **Integralkurve** von X, falls

$$\forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon) \,:\, \dot{c}(t) = X_{c(t)}.$$

Lemma. Sei $X \in \chi(M)$, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{c}(t) = X_{c(t)}, \;\; c(0) = p$$

eine eindeutige lokale Lösung $c = c_p^X : (-\epsilon, \epsilon) \to M$.

Def. Die Abbildung $\Phi_X : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to M, \;\; (p, t) \mapsto c_p^X(t)$ heißt **Fluss** von X.

Def. Ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $[-,-] : V \times V \to V, \;\; (v, w) \mapsto [v, w]$ heißt **Lie-Algebra**, falls die Abbildung

- antisymmetrisch ist, d. h. $\forall\, v, w \in V \,:\, [v, w] = -[w, v]$
- die **Jacobi-Identität** erfüllt, d. h.

$$\forall\, v, w, z \in V \,:\, [v, [w, z]] + [z, [v, w]] + [w, [z, v]] = 0.$$

Bspe.
- $(\chi(M), [-,-])$ ist eine Lie-Algebra.
- $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist eine Lie-Algebra mit $[A, B] := AB - BA$.

Def. Eine Gruppe G, welche ebenfalls eine diff'bare Mft ist, heißt **Lie-Gruppe**, wenn gilt:

- $\mu : G \times G \to G, \;\; (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ ist diff'bar.
- $\iota : G \to G, \;\; g \mapsto g^{-1}$ ist diff'bar.

Bsp. Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n} \approx \mathbb{R}^{(n^2)}$ ist eine Lie-Gruppe. Die Differenzierbarkeit der Inversion folgt aus der Cramerschen Regel.

Def. Sei G eine Lie-Gruppe und $g \in G$. Dann sind

$$lg : G \to G, \quad x \mapsto g \cdot x = \mu(g, x)$$
$$rg : G \to G, \quad x \mapsto x \cdot g = \mu(x, g)$$

Diffeomorphismen mit Umkehrabbildung $l(g^{-1})$ bzw. $r(g^{-1})$.