Zusammenfassung Kommutative Algebra

 Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Ringe und Ideale

Def. Ein Ring ist ein Tupel $(A, +, \cdot, 0, 1)$ mit einer Menge A, Operationen $+, \cdot : A \times A \to A$ und Elementen $0, 1 \in A$, sodass

- $(A, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist,
- $(A, \cdot, 1)$ ein Monoid ist und
- die Multiplikation distributiv über die Addition ist, d. h.

$$x(y+z) = xy + xz \quad \text{und} \quad (y+z)x = yx + zx \qquad \forall\, x, y, z \in A.$$

Bspe. • $\mathbb{Z}$, • $K[x_1, \ldots, x_n]$, • **Nullring**: der Ring mit $0 = 1$

Def. Sei $(A, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $B \subseteq A$ heißt **Unterring**, falls $0, 1 \in B$ und B unter $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist.

Bspe. • $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, • $K \subset K[X]$

Def. Ein **Ringhomomorphismus** $\phi : A \to B$ ist eine Abbildung, welche sowohl ein Gruppenhomomor. $(A, +_A, 0_A) \to (B, +_B, 0_B)$ als auch ein Ringhomomorphismus $(A, \cdot_A, 1_A) \to (B, \cdot_B, 1_B)$ ist.

Bem. Ringe und Ringhomomorphismen bilden eine Kategorie **Ring**.

Lem. Ein Ringhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus (in dieser Kategorie), wenn er bijektiv ist.

Konvention. Seien A im Folgenden Ringe und $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

Def. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt (beidseitiges) **Ideal** von A, falls

- $\mathfrak{a} \subseteq A$ eine Untergruppe ist und
- für alle $a \in A$ und $x \in \mathfrak{a}$ gilt: $ax, xa \in \mathfrak{a}$.

Lem. Der Schnitt von (beliebig vielen) Idealen ist selbst ein Ideal.

Def. Sei $M \subseteq A$ eine Teilmenge. Das von M **erzeugte Ideal** ist der Schnitt aller Ideale von A, die M umfassen.

Bem. Falls A kommutativ ist, so gilt

$$\text{von } M \text{ erzeugtes Ideal} = \{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \,|\, n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in A, x_k \in M \}.$$

Notation. $(x_1, \ldots, x_n) \subseteq A$ ist das von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ erzeugte Ideal.

Bem. • Das **Nullideal** (0) ist das kleinste Ideal, denn $(0) = \{0\}$.
• Das **Einsideal** (1) ist das größte Ideal, denn $(1) = A$.

Prop. • Sei $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal. Dann ist auch $\phi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$ ein Ideal.
• Sei $A' \subseteq A$ ein Unterring. Dann ist auch $\phi(A') \subseteq B$ ein Unterring.

Def. Das Ideal $\ker \phi := \phi^{-1}((0))$ heißt **Kern** von ϕ.

Bem. ϕ ist injektiv $\iff$ $\ker \phi = 0$

Prop. Sei $\phi : A \to B$ surjektiv, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist auch das Bild $\phi(A) \subseteq B$ ein Ideal.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es einen Ring $A/\mathfrak{a}$ und einen Ringhomomor. $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ mit folgender universeller Eigenschaft:
Für jeden Ring B und Ringhomomor. $\psi : A \to B$ mit $\mathfrak{a} \subsetneq \ker \psi$ gibt es genau einen Ringhomomor. $\widetilde{\psi} : A/\mathfrak{a} \to B$ mit $\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi$.

Konstr. Sei durch $x \sim y \;:\iff\; x - y \in \mathfrak{a}$ eine Äq'relation $\sim$ auf A definiert. Setze $A/\mathfrak{a} := A/\!\sim$ und $\pi(x) := [x]$. Die Addition und Multiplikation auf A ind. die Addition bzw. Multiplikation auf $A/\mathfrak{a}$.

Def. $A/\mathfrak{a}$ heißt **Quotientenring** von A nach $\mathfrak{a}$.

Notation. Man lässt häufig die Äquivalenzklammern weg, man schreibt also „$x = y$ in $A/\mathfrak{a}$" anstatt „$[x] = [y]$".

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Folgende Korresp. ist bij. und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{ Ideale } \mathfrak{b} \subseteq A \text{ mit } \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a} \} & \leftrightarrow & \{ \text{ Ideale } \mathfrak{c} \subseteq A/\mathfrak{a} \} \\ \mathfrak{b} & \mapsto & \pi(\mathfrak{b}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{c}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{c} \end{array}$$

Prop (**Homomorphiesatz**). Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomor. Dann ist $\underline{\phi} : A/\ker(\phi) \to \operatorname{im}(\phi)$, $[x] \mapsto \phi(x)$ ein Ringisomorphismus.

Im Folgenden seien alle Ringe **kommutativ**, d. h. $xy = yx$ f. a. x, y.

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in A$ heißt

- **regulär**, falls $\forall\, y \in A : xy = 0 \implies y = 0$.
- **Nullteiler**, falls es nicht regulär ist, d. h. wenn ein $y \in A \setminus \{0\}$ mit $xy = 0$ existiert.

Def. Ein Ring A heißt **Integritätsbereich**, wenn $0 \in A$ der einzige Nullteiler in A ist.

Achtung. Die Null im Nullring ist regulär!

Bem. Ein Ring A ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn

$$0 \neq 1 \text{ in } A \qquad \text{und} \qquad \forall\, x, y \in : xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0.$$

Beob. Sei $\phi : A \to B$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Ist B ein Integritätsbereich, so auch A.

Def. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **Hauptideal**, falls $\mathfrak{a} = (a)$ für ein $a \in A$. Ein Ring A heißt **Hauptidealbereich**, falls jedes Ideal in A ein Hauptideal ist.

Bspe. • $\mathbb{Z}$, • $K[x]$

Gegenbsp. • $K[x_1, \ldots, x_n]$ für $n \geq 2$

Def. Ein Element $x \in A$ heißt **nilpotent**, falls $\exists\, n \geq 0 : x^n = 0$.

Beob. Ist A ein Integritätsbereich, so ist $0 \in A$ das einzige nilpotente Element in A.

Def. Sei A ein Ring, nicht notwendigerweise kommutativ. Ein Element $x \in A$ heißt **Einheit**, falls ein $y \in A$ mit $xy = yx = 1$ existiert. $A^\times := \{ \text{ Einheiten in } A \}$ heißt **Einheitengruppe**. Der Ring A heißt **Schiefkörper**, falls 0 die einzige Nicht-Einheit ist. Falls zusätzlich A kommutativ ist, so heißt A ein **Körper**.

Beob. • $x \in A$ ist eine Einheit $\iff$ $(x) = (1)$ $\iff$ $A/(x) = 0$
• Einheiten sind regulär.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring. Dann sind äquivalent:

- A ist ein Körper.
- A besitzt genau zwei Ideale (nämlich (0) und (1)).
- Ein Ringhomomorphismus $A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn B nicht der Nullring ist.

Def. • Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ heißt **Primideal**, falls $1 \not\in \mathfrak{p}$ und $\forall\, a, b \in A : ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p} \vee b \in \mathfrak{p}$.
• Ein Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ heißt **maximal**, falls für jedes Ideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq A$ *entweder* $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} = A$ (nicht beides!) gilt.

Bspe. • Jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ hat die Form (m) mit $m \in \mathbb{N}$. Das Ideal (m) ist genau dann prim, wenn $m = 0$ oder m eine Primzahl ist.
• Sei $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ ein irred. Polynom. Dann ist (f) prim.

Lem. $\mathfrak{p} \subseteq A$ ist prim $\iff$ $A/\mathfrak{p}$ ist ein Integritätsbereich
$\mathfrak{m} \subseteq A$ ist maximal $\iff$ $A/\mathfrak{m}$ ist ein Körper

Kor. Maximale Ideale sind prim.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Folgende Korresp. ist bij. und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{ Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \} & \leftrightarrow & \{ \text{ Primideale } \mathfrak{q} \subset A/\mathfrak{a} \} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \pi(\mathfrak{p}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{q}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

Genauso bekommt man eine bijektive, monotone Korrespondenz

$$\{ \text{ max. Ideale } \mathfrak{m} \subset A \text{ mit } \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a} \} \quad \leftrightarrow \quad \{ \text{ max. Ideale } \mathfrak{n} \subset A/\mathfrak{a} \}$$

Prop. Ein Ring besitzt genau dann ein maximales Ideal, wenn er nicht der Nullring ist.

Kor. • Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es genau dann ein maximales Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} \neq (1)$.
• Ein Element $x \in A$ liegt genau dann in einem maximalen Ideal von A, wenn x keine Einheit ist.

Def. Ein **lokaler Ring** ist ein komm. Ring A mit genau einem max. Ideal $\mathfrak{m}$. Der Körper $F := A/\mathfrak{m}$ heißt **Restklassenkörper** von A.

Notation. Man schreibt „Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring."

Def. Ein **halblokaler Ring** ist ein kommutativer Ring mit nur endlich vielen maximalen Idealen.

Lem. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein Ideal mit $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$. Dann ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.

Prop. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, sodass $1 + x$ für alle $x \in \mathfrak{m}$ eine Einheit ist. Dann ist $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$, also $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.

Prop. Die Menge $\mathfrak{n} := \{ \text{ nilpotente Elemente } \} \subseteq A$ ist ein Ideal, das sogenannte **Nilradikal**.

Bem. Der Ring $A/\mathfrak{n}$ hat außer 0 keine nilpotenten Elemente.

Prop. Das Nilradikal eines kommutativen Ringes ist der Schnitt aller seiner Primideale.

Def. Das **Jacobsonsche Ideal** $\mathfrak{j} \subset A$ ist der Schnitt aller maximalen Ideale von A.

Prop. Ein Element $x \in A$ liegt genau dann im Jacobsonschen Ideal $\mathfrak{j}$, wenn $1 - xy$ für alle $y \in A$ eine Einheit ist.

Def. Die **Summe von Idealen** $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ von A ist das Ideal

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i := \{ \sum_{k=1}^{n} x_k \mid k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathfrak{a}_{i_k}, i_k \in I\}.$$

Bem. $\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ ist das kleinste Ideal, das alle $\mathfrak{a}_i$ umfasst.

Beob. $(x_1) + \ldots + (x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$

Bem. Ideale eines Ringes A bilden mit Schnitt und Summe einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusionsordnung.

Def. Das **Produkt zweier Ideale** $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ ist

$$\mathfrak{ab} := \text{von } \{ab \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\} \text{ erzeugtes Ideal.}$$

Beob. • $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, • $(x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n) = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$

Bsp. In $A = \mathbb{Z}$ gilt für $m, n \in \mathbb{N}$
• $(m) + (n) = (m, n) = (\mathrm{ggT}(m, n))$, • $(m) \cap (n) = (\mathrm{kgV}(m, n))$.

Beob. • Summe, Schnitt und Produkt von Idealen sind assoziativ.
- Summe und Schnitt sind kommutativ. Das Produkt von Idealen ist kommutativ, wenn der Ring kommutativ ist.
- Distributivgesetz: $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{ab} + \mathfrak{ac}$
- Modularitätsgesetz: Ist $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{c}$, so folgt

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}).$$

Def. Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ heißen **koprim**, falls $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$.

Bsp. In $A = \mathbb{Z}$ gilt: (m), (n) sind koprim $\iff$ $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$

Prop. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n \subseteq A$ paarweise koprime Ideale. Dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i.$$

Def. Das **direkte Produkt** einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Ringen ist der Ring $\prod\limits_{i\in I} A_i := \{(a_i \in A_i)_{i\in I}\}$ mit kmpnntnwsr Verknüpfung.

Bem. Das direkte Produkt ist das kategorienth. Produkt in **Ring**.

Prop. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale. Dann ist

$$\phi : A \to \prod_{i=1}^{n} (A/\mathfrak{a}_i), \quad x \mapsto ([x], \ldots, [x])$$

genau dann surjektiv, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_i$ paarweise koprim sind.

Bem. Der Ringhomomor. ϕ ist genau dann injektiv, wenn $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = 0$.

Prop. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \subset A$ Primideale und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Gilt $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, so gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$.

Prop. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Gilt $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, so gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_j$.

Def. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ zwei Ideale. Der **Idealquotient** von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ ist das Ideal $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) := \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$.

Notation. • $(x : \mathfrak{b}) := ((x) : \mathfrak{b})$, • $(\mathfrak{a} : y) := (\mathfrak{a} : (y))$

Def. Der **Annulator** eines Ideals $\mathfrak{b} \subseteq A$ ist $\mathrm{ann}(\mathfrak{b}) := (0 : \mathfrak{b})$.

Lem. • $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ • $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ • $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{bc})$
• $(\bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) = \bigcap\limits_{i\in I} (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$ • $(\mathfrak{a} : \sum\limits_{i\in I} \mathfrak{b}) = \bigcap\limits_{i\in I} (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$

Def. Das **Wurzelideal** eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist das Ideal

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : x^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Bem. Das Nilradikal ist $\sqrt{(0)}$, das Wurzelideal des Nullideals. Es gilt $\sqrt{\mathfrak{a}} = \pi^{-1}(\sqrt{(0)})$ mit $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$, $x \mapsto [x]$.

Lem. • $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \mathfrak{a}$ • $\sqrt{\mathfrak{a}^n} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ für $n \geq 1$ • $\sqrt{\mathfrak{a}} = (1) \iff \mathfrak{a} = (1)$
• $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ • $\sqrt{\mathfrak{ab}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$ • $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$

Def. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **Wurzelideal**, falls $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Prop. Das Wurzelideal von $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ist der Schnitt aller Primideale von A, die $\mathfrak{a}$ enthalten.

Prop. $\{$ Nullteiler von A $\} = \bigcup\limits_{x\in A\setminus\{0\}} \sqrt{\mathrm{ann}(x)}$

Lem. $\sqrt{\mathfrak{a}}$ und $\sqrt{\mathfrak{b}}$ koprim $\implies$ $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ koprim

Def. Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus komm. Ringe. Die **Kontraktion** von $\mathfrak{b} \subseteq B$ (bzgl. ϕ) ist das Ideal $A \cap \mathfrak{b} := \phi^{-1}(\mathfrak{b})$.

Bem. Es wird also ϕ in der Notation unterdrückt. Falls ϕ die Inklusion eines Unterrings ist, so ist $A \cap \mathfrak{b}$ wörtlich zu verstehen.

Beob. $A \cap \mathfrak{b} = \ker(A \to B \to B/\mathfrak{b})$

Lem. Ist $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal, so auch $A \cap \mathfrak{q} \subset A$.

Achtung. Die Kontraktion max. Ideale ist i. A. nicht maximal!

Def. Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus komm. Ringe. Die **Erweiterung** von $\mathfrak{a} \subseteq A$ (bzgl. ϕ) ist das Ideal $B\mathfrak{a} := (\phi(\mathfrak{a}))$, das von $\phi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal.

Bem. Ist ϕ die Inklusion eines Unterrings, so ist $B\mathfrak{a}$ tatsächlich die Menge der B-Linearkombinationen von Elementen in $\mathfrak{a}$.

Bem. Die Erweiterung eines Primideals ist i. A. nicht mehr prim.

Prop. Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus komm. Ringe. Die Erweiterung und Kontraktion von Idealen (bzgl. ϕ) bilden eine Galois-Verbindung, d. h. für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ und $\mathfrak{b} \subseteq B$ gilt

$$B\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \iff \mathfrak{a} \subseteq A \cap \mathfrak{b}.$$

Äquivalent dazu sind Erw. und Kontraktion monoton und es gelten

$$\mathfrak{a} \subseteq A \cap (B\mathfrak{a}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} \supseteq B(A \cap \mathfrak{b}).$$

Außerdem folgt aus den Eigenschaften einer Galois-Verbindung, dass

$$B\mathfrak{a} = B(A \cap (B\mathfrak{a})) \quad \text{und} \quad A \cap \mathfrak{b} = A \cap (B(A \cap \mathfrak{b})).$$

Damit induzieren Erweiterung und Kontraktion eine bijektive ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den kontrahierten Idealen von A und den erweiterten Idealen von B.

Lem. Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subseteq A$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subseteq B$ gilt

• $B\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{B\mathfrak{a}}$	• $A \cap \sqrt{\mathfrak{b}} = \sqrt{A \cap \mathfrak{b}}$
• $B(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = B\mathfrak{a}_1 + B\mathfrak{a}_2$	• $A \cap (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) \supseteq A \cap \mathfrak{b}_1 + A \cap \mathfrak{b}_2$
• $B(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subseteq B\mathfrak{a}_1 \cap B\mathfrak{a}_2$	• $A \cap (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) = (A \cap \mathfrak{b}_1) \cap (A \cap \mathfrak{b}_2)$
• $B(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = (B\mathfrak{a}_1)(B\mathfrak{a}_2)$	• $A \cap (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) \supseteq (A \cap \mathfrak{b}_1)(A \cap \mathfrak{b}_2)$
• $B(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2) \subseteq (B\mathfrak{a}_1 : B\mathfrak{a}_2)$	• $A \cap (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2) \subseteq (A \cap \mathfrak{b}_1 : A \cap \mathfrak{b}_2)$

Moduln

Def. Sei A ein Ring. Ein **A-(Links-)Modul** ist eine abelsche Gruppe $(M,+,0)$ zusammen mit einer Abb. $\cdot : A \times M \to M$, sodass

- die Multiplikation eine Operation von $(A,\cdot,1)$ auf M ist, d. h. $(ab)x = a(bx)$ und $1\cdot x = x$ für alle $a,b \in A$ und $x \in M$.
- die Multiplikation distributiv über die Addition ist, d. h. $a(x+y) = ax + ay$ und $(a+b)x = ax + bx$ f. a. $a,b \in A$, $x,y \in M$.

Achtung. Es heißt *der* Modul, nicht *das* Modul!

Bspe.
- Der Ring A ist selbst ein A-Modul.
- Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist (durch Einschränkung der Multiplikation) ein A-Modul.
- Ein K-Modul (K ein Körper) ist dasselbe wie ein K-VR.
- Ein $\mathbb{Z}$-Modul ist dasselbe wie eine abelsche Gruppe.
- Ein $K[x]$-Modul ist dasselbe wie ein K-Vektorraum V zusammen mit einem Endomorphismus $V \to V$.
- Sei G eine endliche Gruppe und
$$A := K[G] := \{ \sum_{g\in G} a_g \cdot g \,|\, g \in G, a_g \in K\}$$
die **Gruppenalgebra** von G über K. Ein A-Modul ist dasselbe wie ein K-VR V mit einer linearen Darstellung $G \to \mathrm{End}_K(V)$.

Def. Ein A-Modulhomomorphismus ist eine Abbildung $\phi : M \to N$ zwischen A-Moduln M und N, welche ein Gruppenhomomorphismus $(M,+_M,0_M) \to (N,+_N,0_N)$ und verträglich mit der Wirkung des multiplikativen Monoids von M und N ist, d. h. $\phi(ax) = a\phi(x)$ für alle $a \in A$ und $x \in M$.

Bem. A-Moduln und A-Modulhomomor. bilden eine Kat. A-**Mod**.

Lem. Ein A-Modulhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus (in dieser Kategorie), wenn er bijektiv ist.

Def. Sei M ein A-Modul. Eine Teilmenge $M' \subseteq M$ heißt **Untermodul** von M, falls

- M' eine Untergruppe von $(M,+,0)$ ist und
- M' abgeschlossen unter Multiplikation mit Elementen aus A ist, d. h. $ax \in M'$ für alle $a \in A$ und $x \in M'$.

Bsp. Sei A kommutativ. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist genau dann ein Ideal von A, wenn $\mathfrak{a}$ ein Untermodul von A ist.

Def. Sei $\phi : M \to N$ eine A-Modulhomomorphismus.
Der **Kern** v. ϕ ist der Untermodul $\ker\phi := \{x \in M \,|\, \phi(x) = 0\} \subseteq M$.
Das **Bild** von ϕ ist der Untermodul $\mathrm{im}\,\phi := \phi(M) \subseteq N$.

Prop. Sei M ein A-Modul und $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Dann gibt es ein A-Modul M/M' und einen Ringhomomor. $\pi : M \to M/M'$ mit folgender universeller Eigenschaft:
Für jeden A-Modul N und A-Modulhomomor. $\psi : M \to N$ mit $M' \subseteq \ker\psi$ gibt es genau einen A-Modulhomomor. $\widetilde{\psi} : M/M' \to N$ mit $\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi$.

Konstr. $M/M' := M/\sim \quad \text{mit} \quad x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \in M'$

Def. Der Modul M/M' heißt **Quotientenmodul** von M nach M'.

Prop. Sei M ein A-Modul und $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Folgende Korrespondenz ist bijektiv und monoton:
$$\begin{array}{rcl} \{\text{ Untermoduln } M' \subseteq N \subseteq M \,\} & \leftrightarrow & \{\text{ Untermoduln } \overline{N} \subseteq M/M' \,\} \\ N & \mapsto & \pi(N) \\ \pi^{-1}(\overline{N}) & \leftarrow\!\shortmid & \overline{N} \end{array}$$

Def. Der **Kokern** eines A-Modulhomomorphismus $\phi : M \to N$ ist
$$\mathrm{coker}\,\phi := N/\,\mathrm{im}(\phi).$$

Bem. • ϕ injektiv $\iff \ker\phi = 0$ • ϕ surjektiv $\iff \mathrm{coker}\,\phi = 0$

Prop (**Homomorphiesatz**). Sei $\phi : M \to N$ ein A-Modulhomom. Dann ist $\underline{\phi} : M/\ker(\phi) \to \mathrm{im}(\phi)$, $[x] \mapsto \phi(x)$ ein A-Modulisomor.

Def. Sei M ein A-Modul. Die **Summe** einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Untermoduln von M ist
$$\sum_{i\in I} M_i := \{ \sum_{i\in I} x_i \,|\, x_i \in M_i\}$$
(Dabei ist $\sum_{i\in I} x_i$ endlich, d. h. $x_i = 0$ für alle bis auf endl. viele $i \in I$.)

Prop. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Dann ist auch der Schnitt $\bigcap_{i\in I} M_i$ ein Untermodul von M.

Bem. Untermoduln eines Moduls M bilden mit Schnitt und Summe einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusionsordnung.

Prop (**Isomorphiesätze**). Sei A ein Ring.

1. Sei M ein A-Modul und $M_1, M_2 \subseteq M$ zwei Untermoduln. Dann existiert ein kanonischer A-Modulisomorphismus
$$(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2).$$
2. Sei L ein A-Modul und $N \subseteq M \subseteq L$ Untermoduln. Dann existiert ein kanonischer A-Modulisomorphismus
$$(L/N)/(M/N) \cong L/M.$$

Def. Sei A kommutativ, M ein A-Modul und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Das **Produkt** von $\mathfrak{a}$ und M ist $\mathfrak{a}M := \{ax \,|\, a \in \mathfrak{a}, x \in M\}$.

Notation. $aM := (a)M = \{ax \,|\, x \in M\}$ für $a \in A$

Def. Sei A komm. und N, P Untermoduln eines A-Moduls M. Das Ideal $(N\!:\!P) := \{a\!\in\! A \,|\, aP \subseteq N\} \!\subseteq\! A$ heißt **Quotient** von N nach P.

Def. Das Ideal $\mathrm{ann}\,M := (0 : M)$ heißt **Annulator** von M.

Bem. Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{ann}\,M$, so können wir M auch als $A/\mathfrak{a}$-Modul auffassen.

Def. Der A-Modul M heißt **treu**, falls $\mathrm{ann}\,M = 0$.

Lem. Sei A kommutativ, $N, P \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt
- $\mathrm{ann}(N+P) = \mathrm{ann}(N) + \mathrm{ann}(P)$ • $(N:P) = \mathrm{ann}((N+P)/N)$

Def. Sei M ein A-Modul, $X \subset M$ eine Teilmenge.
Der von X **erzeugte Untermodul** ist
$$L(X) := \sum_{x\in X} Ax = \sum_{x\in X} \{ax \,|\, a \in A\} = \{ \sum_{x\in X} \lambda_x x \,|\, \lambda_x \in A\}.$$

Def. Eine Teilmenge $X \subset M$ heißt **Erzeugendensystem**, falls $L(X) = M$. Ein A-Modul M heißt **endlich erzeugt**, falls ein endliches Erzeugendensystem von M existiert.

Bem. Ein A-Modul M ist ganau dann endlich erzeugt, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und ein surj. A-Modulhomomorphismus $\phi : A^n \to M$ existiert.

Def. Das **direkte Produkt** einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von A-Moduln ist das A-Modul $\prod_{i\in I} M_i := \{(x_i \in M_i)_{i\in I}\}$ mit kmpnntnwsr Verkn.

Bem. Das direkte Produkt ist das kategorienth. Produkt in A-**Mod**.

Def. Die **direkte Summe** einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von A-Moduln ist
$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(x_i \in M_i)_{i\in I} \,|\, x_i = 0 \text{ für alle bis auf endl. viele } i \in I\} \subseteq \prod_{i\in I} M_i.$$

Bem. Die dir. Summe ist das kategorienth. Koprodukt in A-**Mod**.
Ist I endlich, so gilt $\bigoplus_{i\in I} M_i \cong \prod_{i\in I} M_i$.

Bsp (Direkte Summenzerlegung). Sei $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ ein endl. direktes Produkt komm. Ringe. Dann gilt $A \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$ als A-Modul mit
$$\mathfrak{a}_i := \{(x_i)_{i=1}^n \,|\, x_j = 0 \text{ für } j \neq i\}.$$

Def. Ein **A-Modul** M heißt frei, falls eine Menge I existiert, sodass $M \cong \bigoplus_{i\in I}$ als A-Modul.

Bem. Ein endlicher freier Modul ist ein Modul, der zu $A^n := A \oplus \ldots \oplus A$ für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph ist.

Prop. Sei A ein Ring. Ein A-Modul M ist genau dann endl. erzeugt, wenn M der Quotient eines A-Moduls der Form A^n für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

Prop. Sei A ein komm. Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Sei $\phi \in \mathrm{End}_A(M)$ mit $\mathrm{im}\,\phi \subseteq \mathfrak{a}M$. Dann erfüllt ϕ eine Gleichung der Form $\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$.

Kor. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $x \in A$ mit $x = 1$ modulo $\mathfrak{a}$ und $xM = 0$.

Lem (**Nakayama**). Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A, welches im Jacobsonschen Radikal $\mathfrak{j}$ von A enthalten ist. Dann folgt aus $\mathfrak{a}M = M$ schon $M = 0$.

Kor. Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, welches im Jacobsonschen Ideal $\mathfrak{j}$ enthalten ist. Dann folgt aus $M = \mathfrak{a}M + N$ schon $M = N$.

Def. Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring. Sei M ein endlich erz. A-Modul. Setze $M(\mathfrak{m}) := M/\mathfrak{m}M$. Wegen $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{ann}(M(\mathfrak{m}))$ ist $M(\mathfrak{m})$ in natürl. Art ein (endlich-dim.) F-Vektorraum, die **spezielle Faser** von M. Das Bild eines Elements $x \in M$ in $M(\mathfrak{m})$ wird **Wert des Schnittes** x in der speziellen Faser genannt.

Prop. Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring, M ein endlich erz. A-Modul. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Schnitte von M, deren Werte in $M(\mathfrak{m})$ eine Basis bilden. Dann erzeugen $x_1, \ldots, x_n$ den A-Modul M.

Exakte Sequenzen

Def. Sei A ein Ring. Eine Sequenz

$$\ldots \to M^{i-1} \xrightarrow{\phi^{i-1}} M^i \xrightarrow{\phi^i} M^{i+1} \to \ldots$$

von A-Moduln und A-Modulhomomorphismen heißt **exakt** bei M^i, falls $\operatorname{im}\phi^{i-1} = \ker\phi^i$. Die Sequenz heißt **exakt**, falls sie exakt bei jedem M^i ist.

Bsp. Sei $\phi : M \to N$ ein A-Modulhomomorphismus. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi \text{ ist injektiv} &\iff 0 \to M \xrightarrow{\phi} N \text{ ist exakt} \\ \phi \text{ ist surjektiv} &\iff M \xrightarrow{\phi} N \to 0 \text{ ist exakt} \end{aligned}$$

Def. Eine **kurze exakte Sequenz** k. e. S. von A-Moduln ist eine exakte Sequenz der Form $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$.

Bem. Jede lange exakte Sequenz $\ldots \to M^{i-1} \to M^i \to M^{i+1} \to \ldots$ zerfällt in kurze exakte Sequenzen: Mit $N^i = \operatorname{im}\phi^{i-1} = \ker\phi^i$ haben wir kurze exakte Sequenzen $0 \to N^i \to M^i \to N^{i+1} \to 0$.
Andersherum kann man solche kurzen exakten Sequenzen zu einer langen exakten Sequenz zusammenkleben.

Lem. Sei A ein komm. Ring. Eine Seq. $E : M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ ist genau dann exakt, wenn für alle A-Moduln N die Sequenz

$$\operatorname{Hom}(E, N) : 0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}(M', N).$$

exakt ist.

Lem. Sei A ein kommutativer Ring.

- Eine Sequenz $E : M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ ist genau dann exakt, wenn für alle A-Moduln N folgende induzierte Sequenz exakt ist:
$$\operatorname{Hom}(E, N) : 0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}(M', N).$$
- Eine Sequenz $F : 0 \to N' \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} N''$ ist genau dann exakt, wenn für alle A-Moduln M folgende induzierte Sequenz exakt ist:
$$\operatorname{Hom}(M, F) : \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\phi_*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\psi_*} \operatorname{Hom}(M, N'') \to 0.$$

Lem (**Schlangenlemma**). Sei A ein Ring. Sei folgendes komm. Diagramm von A-Moduln mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' & \end{tikzcd}$$

Dann gibt es einen Verbindungshomomorphismus $\delta : \ker\phi'' \to \operatorname{coker}\phi'$, mit dem folgende Sequenz exakt ist:

$$\ker\phi' \to \ker\phi \to \ker\phi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\phi' \to \operatorname{coker}\phi \to \operatorname{coker}\phi''.$$

Def. Sei A ein Ring und $\mathfrak{C}$ eine Klasse von A-Moduln.
Eine Abb. $\lambda : \mathfrak{C} \to G$ in eine ab. Gruppe heißt **additive Funktion**, falls für alle kurzen exakten Seq. $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ von Moduln aus $\mathfrak{C}$ gilt, dass $\lambda(C) = \lambda(C') + \lambda(C'')$.

Bsp. Sei K ein Körper und $\mathfrak{C}$ die Klasse der endlich-dim. VR über K. Dann ist $\dim : \mathfrak{C} \to \mathbb{Z}$ eine additive Funktion.

Prop. Sei A ein Ring, $\mathfrak{C}$ eine Klasse von A-Moduln und $\lambda : \mathfrak{C} \to G$ eine additive Funktion. Sei

$$0 \to M^0 \xrightarrow{\phi^0} M^1 \to \ldots \to M^{n-1} \xrightarrow{\phi^{n-1}} M^n \to 0$$

eine exakte Sequenz von Moduln in $\mathfrak{C}$, sodass auch die Kerne der ϕ^i in $\mathfrak{C}$ liegen. Dann gilt $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M^i) = 0$.

Tensorprodukt

Def. Seien M, N und P drei A-Moduln. Eine Abbildung $\beta : M \times N \to P$ heißt **A-bilinear**, falls für alle $x \in M$ die Abbildung $\beta(x, -)$ und für alle $y \in N$ die Abbildung $\beta(-, y)$ ein A-Modulhomomorphismus ist.

Bsp. Die Multiplikation $\cdot : A \times A \to A$ ist A-bilinear.

Prop. Seien M und N zwei A-Moduln. Dann existiert ein A-Modul $M \otimes_A N$ und eine bilineare Abbildung $\gamma : M \times N \to M \otimes_A N$ mit folgender universellen Eigenschaft:
Für jeden A-Modul P und für jede bilineare Abbildung $\beta : M \times N \to P$ gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus $\underline{\beta} : M \otimes_A N \to P$ mit $\beta = \underline{\beta} \circ \gamma$.

Def. $M \otimes_A N$ heißt **Tensorprodukt** von M und N über A.

Konstr.
- Sei C der freie A-Modul A^I mit $I := M \times N$. Elemente von C haben die Form $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i, y_i)$ mit $\lambda_i \in A$, $x_i \in M$, $y_i \in N$.
- Sei $D \subset C$ der von allen Elementen der Form
$$\begin{aligned} &(x + x', y) - (x, y) - (x', y), && (ax, y) - a(x, y), \\ &(x, y + y') - (x, y) - (x, y'), && (x, ay) - a(x, y) \end{aligned}$$
mit $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ und $a \in A$ erzeugte Untermodul.
- Setze $M \otimes_A N := C/D$.

Notation. $x \otimes y := \gamma(x, y)$

Bem. Jedes Element in $M \otimes_A N$ lässt sich als $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ mit $x_i \in M$, $y_i \in N$ schreiben. In $M \otimes_A N$ gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} &x \otimes (ay) = a(x \otimes y) = (ax) \otimes y \\ &(x + x') \otimes (y + y') = x \otimes y + x' \otimes y + x \otimes y' + x' \otimes y' \end{aligned}$$

Lem. Das Tensorprodukt induziert einen Bifunktor

$$\otimes_A : A\textbf{-Mod} \times A\textbf{-Mod} \to A\textbf{-Mod}.$$

Lem. Sei A ein komm. Ring, M und N zwei A-Moduln, $x_i \in M$ und $y_i \in N$ mit $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ in $M \otimes_A N$. Dann gibt es endlich erzeugte Untermoduln $M_0 \subseteq M$ und $N_0 \subseteq N$ mit $x_1, \ldots, x_n \in M_0$, $y_1, \ldots, y_n \in N_0$ und $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ in $M_0 \otimes_A N_0$

Def. Sei A ein komm. Ring, $M_1, \ldots, M_r$ und P A-Moduln.
Eine Abbildung $\mu : M_1 \times \ldots \times M_r \to P$ heißt **A-multilinear**, falls sie linear in jedem Argument ist.

Prop. Sei A ein komm. Ring, $M_1, \ldots, M_r$ A-Moduln. Es existiert ein A-Modul $M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r$ und eine multilineare Abbildung $\gamma : M_1 \times \ldots \times M_r \to M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r$ mit der univ. Eigenschaft
Für jeden A-Modul P und für jede multilineare Abbildung $\mu : M_1 \times \ldots \times M_r \to P$ gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus $\underline{\mu} : M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r \to P$ mit $\mu = \underline{\mu} \circ \gamma$.

Konstr. $M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r := M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A (\ldots \otimes_A M_r))$

Prop. Sei A ein komm. Ring und M, N und P drei A-Moduln. Es existieren kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} &M \otimes_A N \cong N \otimes_A M, && (M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A (N \otimes_A P), \\ &(M \oplus N) \otimes_A P \cong (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P), && A \otimes_A M \cong M. \end{aligned}$$

Def. Seien A und B zwei komm. Ringe. Ein (A, B)-Bimodul ist eine abelsche Gruppe, welche sowohl ein A- als auch ein B-Modul ist, sodass die Modulstrukturen miteinander verträglich sind, d. h. für alle $a \in A$, $b \in B$ und $x \in N$ gilt $a(bx) = b(ax)$.

Lem. Sei M ein A-Modul, P ein B-Modul und N ein (A, B)-Bimodul. Dann gibt es einen kanon. Isomorphismus abelscher Gruppen

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

Def. Sei $\phi : A \to B$ ein Morphismus kommutativer Ringe.

- Die **Skalareinschränkung** eines B-Moduls N (vermöge ϕ) ist der A-Modul N^A, der als Menge und ab. Gruppe N ist und dessen Skalarmult. durch $a \cdot x := \phi(a) \cdot x$ definiert ist.
- Die **Skalarerweiterung** eines A-Moduls M (vermöge ϕ) ist der B-Modul $M_B := B^A \otimes_A M$ mit der Skalarmultiplikation definiert durch $b(b' \otimes x) := (bb') \otimes x$.

Prop. Sei $\phi : A \to B$ ein Morphismus kommutativer Ringe.

- Sei N ein B-Modul. Ist B^A als A-Modul endlich erzeugt und N als B-Modul endlich erzeugt, so ist N^A als A-Modul endlich erzeugt.
- Sei M ein A-Modul. Ist m als A-Modul endlich erzeugt, so ist M_B als B-Modul endlich erzeugt.

Lem. Sei M ein A-Modul und N ein B-Modul. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $N \otimes_B M_B \cong N^A \otimes_A M$ von B-Moduln.

Prop. Sei A ein komm. Ring und M, N und P drei A-Moduln. Dann ist folgende Abbildung ein A-Modulisomorphismus:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(M \otimes_A N, P) &\to \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, P)), \\ \beta &\mapsto (x \mapsto (y \mapsto \beta(x \otimes y))). \end{aligned}$$

Bem. Mit anderen Worten: Es ex. eine Adj. $- \otimes_A N \dashv \operatorname{Hom}_A(N, -)$

Prop. Sei A ein komm. Ring. Das Tensorprodukt ist rechtsexakt, d. h. ist $E : M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln und N ein weiterer A-Modul, so ist auch die induzierte Sequenz

$$E \otimes_A N : M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0 \quad \text{exakt.}$$

Bem. Dies folgt daraus, dass das Tensorprodukt als Linksadjungierter Kolimiten erhält.

Achtung. Das Tensorprodukt ist i. A. nicht exakt. Insbesondere erhält es keine injektiven Abbildungen.

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Ein A-Modul M heißt flach, falls $(- \otimes_A M)$ exakt ist, d. h. falls für jede (lange) exakte Sequenz E auch $E \otimes_A M$ exakt ist.

Prop. Sei A komm. und M ein A-Modul. Es sind äquivalent:

- Der A-Modul M ist flach.
- Für jede kurze exakte Sequenz $E : 0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ ist die tensorierte Sequenz $E \otimes_A M$ exakt.
- Für jede injektive A-lineare Abbildung $\phi : N \to N'$ ist auch $\phi \otimes \mathrm{id}_M : N \otimes_A M \to N' \otimes_A M$ injektiv.
- Für jede inj. A-lineare Abb. $\phi : N \to N'$ zw. endl. erzeugten A-Moduln ist auch $\phi \otimes \mathrm{id}_M : N \otimes_A M \to N' \otimes_A M$ injektiv.

Prop. Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Ist M ein flacher A-Modul, so ist M_B ein flacher B-Modul.

Algebren

Def. Eine kommutative **A-Algebra** B ist ein kommutativer Ring B zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$, dem *Strukturmorphismus* der Algebra.

Bem. Ist $a \in A$ und $b \in B$, so definieren wir $ab := \phi(a)b$ (wie bei der Skalareinschränkung).

Bspe.
- Sei K ein Körper. Eine nichttriviale K-Algebra ist dasselbe wie ein Ring, der K als Unterring enthält.
- Jeder Ring ist auf genau eine Weise eine $\mathbb{Z}$-Algebra.

Def. Ein *Homomorphismus* von A-Algebren B und C ist ein Ringhomomorphismus $\chi : B \to C$, welcher einen Homomorphismus $\chi : B^A \to C^A$ von A-Moduln induziert.

Bem. Ein Ringhomomorphismus $\chi : B \to C$ ist also genau dann ein A-Algebrenhomomor., wenn $\chi(ab) = a\chi(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bem. A-Algebren und ihre Homomor. bilden eine Kategorie A-**Alg**.

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Eine kommutative A-Algebra B heißt eine ...

- ... **endliche A-Algebra**, falls B^A als A-Modul endlich erzeugt ist, d. h. falls endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_n \in B$ existieren, sodass jedes Element aus B als A-Linearkombination der b_i geschrieben werden kann.
- ... A-Algebra **endlichen Typs**, falls endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_n \in B$ existieren, sodass jedes andere Element von B als Polynom in den b_i mit Koeffizienten aus A geschrieben werden kann.

Def. Ein kommutativer Ring heißt **endlich erzeugt**, falls er eine $\mathbb{Z}$-Algebra endlichen Typs ist.

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Seien $\phi : A \to B$ und $\psi : A \to C$ die Strukturabbildungen zweier A-Algebren B und C. Dann ist auf $D := B^A \otimes_A C^A$ eine Multiplikation durch

$$\mu : D \times D \to D, \quad (b \otimes c, b' \otimes c') \mapsto (bb') \otimes (cc')$$

definiert. Der Ring D wird mit der Strukturabbildung

$$\rho : A \to D, \quad a \mapsto \phi(a) \otimes 1 = 1 \otimes \psi(A)$$

zu einer A-Algebra. Diese heißt **Tensorprodukt** $B \otimes_A C$ der kommutativen Algebren B und C.

Gerichtete Limiten

Def. Eine **gerichtete Menge** ist eine nichtleere teilweise geordnete Menge $(I, \leq)$, sodass für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$ existiert.

Bem. Eine teilweise geordnete Menge $(I, \leq)$ ist genau dann gerichtet, wenn in I, aufgefasst als Präordnungskategorie, jedes endliche Diagramm einen Kokegel besitzt.

Def. Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge und A ein Ring. Ein **gerichtetes System** $M_\bullet$ von A-Moduln über I ist ein Funktor

$$M_\bullet : I \to A\text{-}\mathbf{Mod}, \quad i \mapsto M_i, \quad (i \leq j) \mapsto \mu^i_j : M_i \to M_j,$$

wobei wir I als Präordnungskategorie auffassen.

Prop. Sei $M_\bullet$ ein gerichtetes System von A-Moduln. Dann existiert der Kolimes $\varinjlim_{i \in I} M_i$ von $M_\bullet$.

Def. Dieser Kolimes wird **gerichteter Limes** von $M_\bullet$ genannt.

Konstr.
- Sei $C := \bigoplus_{i \in I} M_i$.
- Sei $D \subseteq C$ der Untermodul, der von allen Elementen der Form $x_i - \mu^i_j(x_i)$ mit $i \leq j$ und $x_i \in M_i$ erzeugt wird.
- Dann erfüllt $M := C/D$ die geforderte universelle Eigenschaft.

Bem.
- Jedes $x \in \varinjlim_{i \in I} M_i$ wird durch ein $x_i \in M_i$ repräsentiert.
- Ein Element $x_i \in M_i$ repräsentiert dabei genau dann das Nullelement, falls ein $j \in I$ mit $i \leq j$ existiert, sodass $\mu^i_j(x_i) = 0$.

Lem. Jeder A-Modul ist der gerichtete Limes seiner endlich erzeugten Untermoduln.

Def. Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge. Ein *Homomorphismus* von gerichteten Systemen $M_\bullet$ und $N_\bullet$ von A-Moduln über I ist eine natürliche Transformation $\phi_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$.

Bem. Damit bilden gerichtete Systeme von A-Moduln über I zusammen mit ihren Homomorphismen eine Kategorie $[I, A\text{-}\mathbf{Mod}]$.

Prop. Sei $\phi_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ ein Morphismus zwischen gerichtete Systeme von A-Moduln über I, $M := \varinjlim_{i \in I} M_i$ und $N := \varinjlim_{i \in I} N_i$. Dann gibt es genau einen Morphismus $\phi := \varinjlim_{i \in I} \phi_i : M \to N$ mit

$$(M_i \to M \xrightarrow{\phi} N) = (M_i \xrightarrow{\phi_i} N_i \to N) \quad \text{für alle } i \in I.$$

Bem. Damit ist der gerichtete Limes ein Funktor

$$\varinjlim_{i \in I} : [I, A\text{-}\mathbf{Mod}] \to A\text{-}\mathbf{Mod}.$$

Def. Eine Sequenz $M_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet$ von gerichteten Systemen von A-Moduln über I heißt **exakt**, falls für alle $i \in I$ die Sequenz $M_i \xrightarrow{\phi_i} N_i \xrightarrow{\psi_i} P_i$ exakt ist.

Prop. Der Gerichteter-Limes-Funktor ist exakt:
Sei $M_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet$ eine exakte Sequenz gerichteter Systeme von A-Moduln über I. Dann ist die induzierte Sequenz

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \xrightarrow{\varinjlim \phi_i} \varinjlim_{i \in I} N_i \xrightarrow{\varinjlim \psi_i} \varinjlim_{i \in I} P_i \qquad \text{auch exakt.}$$

Prop. Sei $M_\bullet$ ein gerichtes System von A-Moduln über I und N ein A-Modul. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\varinjlim_{i \in I} (M_i \otimes_A N) \cong (\varinjlim_{i \in I} M_i) \otimes_A N.$$

Prop. Sei $A_\bullet$ ein gerichtetes System von Ringen und Ringhomomorphismen. Fasse $A_\bullet$ als gerichtetes System von ab. Gruppen (d. h. $\mathbb{Z}$-Moduln) auf. Dann gibt es $A := \varinjlim_{i \in I} A_i$ eine Multiplikation, sodass A ein Ring ist und die Gruppenhomomorphismen $A_i \to A$ sogar Ringhomomorphismen sind.

Prop. Ist $\varinjlim_{i \in I} A_i = 0$, so gibt es ein $i \in I$ mit $A_i = 0$.

Def. Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie kommutativer A-Algebren. Für eine endliche Teilmenge $J \subset I$ setzen wir $B_J := \bigotimes_{i \in J} B_i$.
Dann ist $B_\bullet$ ein gerichtetes System über $(\mathcal{P}(I)_{\text{fin}}, \subseteq)$. Der Limes $\bigotimes_{i \in I} B_i := \varinjlim_{J \subseteq I} B_J$ heißt **Tensorprodukt** über die Familie $(B_i)_{i \in I}$.