

Zusammenfassung Stochastik I

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Der abstrakte Maß- und Wkts-Begriff

Definition. Eine **Ereignisalgebra** oder **Boolesche Algebra** ist eine Menge \mathfrak{A} mit zweistelligen Verknüpfungen \wedge („und“) und \vee („oder“), einer einstelligen Verknüpfung \neg (Komplement) und ausgezeichneten Elementen $U \in \mathfrak{A}$ (unmögliches Ereignis) und $S \in \mathfrak{A}$ (sicheres Ereignis), sodass für alle $A, B, C \in \mathfrak{A}$ gilt:

- $A \wedge A = A$
- $A \wedge B = B \wedge A$
- $A \wedge S = A$
- $A \wedge U = U$
- $A \wedge \overline{A} = U$
- $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
- $A \vee A = A$
- $A \vee B = B \vee A$
- $A \vee S = S$
- $A \vee U = A$
- $A \vee \overline{A} = S$
- $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Definition. Sei \mathfrak{A} eine Ereignisalgebra und A, B Ereignisse.

- Durch $A \leq B : \iff A \wedge B = B$ (gesprochen A **impliziert** B) ist auf \mathfrak{A} eine Partialordnung definiert.
- A und B heißen **äquivalent**, falls $A \leq B$ und $B \leq A$.
- A und B heißen **unvereinbar**, falls $A \wedge B = U$.

Korollar. In einer Ereignisalgebra \mathfrak{A} gilt mit $A, B \in \mathfrak{A}$:

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \leq B \iff \overline{B} \leq \overline{A}$ (Kontraposition)
- $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
- $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ (De Morgansche Regeln)

Korollar. Durch Induktion folgt aus den De Morganschen Regeln:

$$\overline{\left(\bigvee_{i=1}^n A_i\right)} = \bigwedge_{i=1}^n \overline{A_i} \quad \text{und} \quad \overline{\left(\bigwedge_{i=1}^n A_i\right)} = \bigvee_{i=1}^n \overline{A_i} \quad \text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}.$$

Definition. Eine **Algebra** (Mengenalgebra) über Ω ist ein System von Teilmengen $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\Omega \in \mathfrak{A}$, das unter endl. Vereinigungen und Komplementen stabil ist, d. h. für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt:

- $\Omega \in \mathfrak{A}$
- $A \cup B \in \mathfrak{A}$
- $A^c := \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$

Bemerkung. Aus den De Morganschen Regeln folgt, dass Mengenalgebren auch unter endlichen Schnitten stabil sind.

Satz (Isomorphiesatz von Stone). Zu jeder Ereignisalgebra \mathfrak{A} gibt es eine Menge Ω , sodass \mathfrak{A} isomorph zu einer Mengenalgebra über Ω ist.

Notation. $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ heißt **symm. Differenz**.

Definition. Eine **σ -Algebra** über Ω ist eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ über Ω , die auch unter abzählbaren Vereinigungen stabil ist, d. h.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle Folgen } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{A}.$$

Bemerkung. Jede σ -Algebra ist auch unter abzählb. Schnitten stabil.

Definition. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer σ -Algebra \mathfrak{A} . Setze

$$\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \in \mathfrak{A}, \quad \liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \in \mathfrak{A}.$$

Bemerkung. In einer σ -Algebra, in der die Mengen mögliche Ereignisse beschreiben, ist der Limes Superior das Ereignis, das eintritt, wenn unendlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten. Der Limes Inferior tritt genau dann ein, wenn alle bis auf endlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten.

Definition. Eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einer σ -Algebra \mathfrak{A} **konvergiert** gegen $A \in \mathfrak{A}$, notiert $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, falls $A = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Satz. Für isotone / antitone Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{A} gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Definition. Ein **Ring** (Mengenring) über Ω ist ein System von Teilmengen $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\emptyset \in \mathfrak{R}$, das unter endlichen Vereinigungen und Differenzen stabil ist, d. h. für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{R}$
- $A \cup B \in \mathfrak{R}$
- $A \setminus B \in \mathfrak{R}$

Bemerkung. Ein Ring ist auch unter Schnitten stabil, da

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B).$$

Definition. Ein **σ -Ring** über Ω ist ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ über Ω , der auch unter abzählbaren Vereinigungen stabil ist, d. h.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R} \quad \text{für alle Folgen } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{R}.$$

Bemerkung. Jeder σ -Ring ist auch unter abzählb. Schnitten stabil.

Satz. \mathfrak{A} ist (σ) -Algebra $\iff \mathfrak{A}$ ist (σ) -Ring mit $\Omega \in \mathfrak{A}$.

Satz. Sei $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ Familie von (σ) -Ring(en) / (σ) -Algebren über Ω . Dann ist der Schnitt $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ ein (σ) -Ring / eine (σ) -Algebra über Ω .

Definition. Sei $E \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Setze

$$\mathcal{R}(E) := \{\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \in \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \text{ } \sigma\text{-Ring}\} \quad \text{und} \\ \mathcal{A}(E) := \{\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \in \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra}\}.$$

Dann heißen $\rho(E) := \bigcap_{\mathfrak{R} \in \mathcal{R}(E)} \mathfrak{R}$, $\sigma(E) := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(E)} \mathfrak{A}$

von E **erzeugter Ring** bzw. von E **erzeugte σ -Algebra**.

Definition. Die **Borel-Mengen** in \mathbb{R}^1 sind $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1) := \sigma(\mathcal{E})$, wobei wir \mathcal{E} aus folgenden äquivalenten Optionen wählen dürfen:

- $\{[a, b] \mid a \leq b\}$
- $\{[a, b[\mid a \leq b\}$
- $\{G \subset \mathbb{R}^1 \mid G \text{ abgeschl.}\}$
- $\{[a, b] \mid a \leq b\}$
- $\{[a, b[\mid a \leq b\}$
- $\{F \subset \mathbb{R}^1 \mid F \text{ offen}\}$

Definition. Allgemeiner ist für $d \in \mathbb{N}$ die σ -Algebra der Borel-Mengen in \mathbb{R}^d gleich $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{E})$, wobei

$$\mathcal{E} := \{\chi_{[a_i, b_i]}^d \mid \forall i \in \{1, \dots, d\} : a_i \leq b_i\}.$$

Notation. $\overline{\mathbb{R}^1} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, \infty]$

Definition. Funktionen mit Wertebereich $\overline{\mathbb{R}^1}$ heißen **numerisch**.

Definition. Sei \mathfrak{R} ein Ring über Ω . Eine Fkt. $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt

- Inhalt** auf \mathfrak{R} , falls $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt.
- Prämaß** auf \mathfrak{R} , wenn μ ein Inhalt ist und für alle Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{R} mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

- Maß**, wenn μ Prämaß und \mathfrak{R} in Wahrheit sogar eine σ -Algebra ist. Dann ist die letzte Voraussetzung in Punkt 2 immer erfüllt.

Definition. • Ein Inhalt / Maß μ auf einem Ring / einer σ -Algebra \mathfrak{A} über Ω heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$.

- Ein endliches Maß mit $\mu(\Omega) = 1$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** (W-Maß). W-Maße werden für gewöhnlich mit \mathbb{P} bezeichnet.

Notation. Sei Ω eine Menge, $A \subset \Omega$. Dann heißt

$$\chi_A = \mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto |\{\star \mid \omega \in A\}| = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Indikatorfunktion von A .

Beispiel. Sei \mathfrak{R} ein Ring über Ω und $\omega \in \Omega$. Die Abbildung

$$\delta_\omega : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \mathbb{1}_A(\omega)$$

ist dann ein Prämaß auf \mathfrak{R} , genannt **Dirac-(Prä)-Maß**.

Lemma. Sei μ ein Inhalt auf einem Ring \mathfrak{R} . Seien $A, B \in \mathfrak{R}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathfrak{R} mit $\mu(A) < \infty$ und $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) < \infty$. Dann:

- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
- $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ (Isotonie)
- $A \subset B \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ (Subadditivität)
- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$

Satz. Sei μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Wir betrachten die Aussagen:

- μ ist ein Prämaß auf \mathfrak{R} .
- Stetigkeit von unten: Für jede monoton wachsende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{R} mit $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
- Stetigkeit von oben: Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{R} mit $\mu(A_0) < \infty$ und $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
- Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{R} mit $\mu(A_0) < \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

Dann gilt (i) \iff (ii) \implies (iii) \iff (iv). Falls μ endlich ist, so gilt auch (iii) \implies (ii).

Definition. Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine Funktion, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ und $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d$. Dann heißt

$$(\triangle f)(\lceil x, x + h \rceil) := \sum_{\delta_1, \dots, \delta_d \in \{0, 1\}} (-1)^{d - (\delta_1 + \dots + \delta_k)} f(x_1 + \delta_1 h_1, \dots, x_d + \delta_d h_d)$$

Zuwachs von f im Hyperquader $\lceil x, x + h \rceil$.

Definition. Eine Funktion $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **maerzeugende Funktion**, falls gilt

- G ist nicht-fallend in jedem Argument, d. h. für alle $k \in \{1, \dots, d\}$ und $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ ist $f(x_1, \dots, x_{k-1}, -, x_{k+1}, \dots, x_d)$ nicht-fallend.
- G ist rechtsseitig stetig in jedem Argument, d. h. für alle $k \in \{1, \dots, d\}$ und $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{h \downarrow 0} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, x_d).$$

- Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d$ ist der Zuwachs $(\triangle G)(\lceil x, x + h \rceil) \geq 0$.

Definition. Eine maerzeugende Funktion F heißt **Verteilungsfunktion** (VF) in \mathbb{R}^d , falls zusätzlich gilt:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_d) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_d) = 0$$

für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ und $x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ fest.

Bemerkung. Sei μ ein W-Maß auf $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^1)$. Dann definiert $x \mapsto F_\mu(x) := \mu(\lceil -\infty, x \rceil)$ eine VF. Für eine VF $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definiert umgekehrt $\mu_F(\lceil a, b \rceil) := F(b) - F(a)$ ein W-Maß auf $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^1)$. Analog funktioniert dies auf dem \mathbb{R}^d .

Definition (Wichtige Verteilungsfunktionen).

- Normalverteilung** (Gaußverteilung) mit EW μ und Varianz σ^2 :

$$F_{\mu\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

$$\text{erfüllt } F'_{\mu\sigma^2}(x) = \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \, F_{\mu\sigma^2}(\mu - x) = 1 - F_{\mu\sigma^2}(\mu + x)$$

- Exponentialverteilung** mit Parameter $\lambda > 0$:

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x), & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

- Poisson-Verteilung** mit Parameter $\lambda > 0$:

$$F_\lambda(x) = \sum_{0 \leq n \leq x} \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda)$$

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Definition. Ein Ereignis $A \in \mathfrak{A}$ trete bei n Versuchen genau $h_n(A) \in \mathbb{N}$ mal auf. Dann heißt

- $h_n(A)$ **absolute Häufigkeit** von A ,
- $H_n(A) := \frac{h_n(A)}{n}$ **relative Häufigkeit** von A .

Bemerkung. Unmittelbar klar:

- $H_n(A) \in [0, 1]$ • $H_n(A) \leq H_n(B)$ für $A \subset B$
- $H_n(A \sqcup B) = H_n(A) + H_n(B)$ für $A \cap B = \emptyset$

Bemerkung. Bei wachsendem n stabilisiert sich normalerweise der Wert $H_n(A)$. Dieser Grenzwert ist die Wahrscheinlichkeit von A .

Definition. Seien $A, B \in \mathfrak{A}$ Ereignisse, $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Versuche. Dann heißt

$$H_n(A \mid B) := \frac{H_n(A \cap B)}{H_n(B)} = \frac{h_n(A \cap B)}{h_n(B)}$$

die **relative Wahrscheinlichkeit** von A unter der Bedingung B .

Bemerkung. Offenbar gilt:

- $H_n(A \mid B) \in [0, 1]$ • $H_n(A_1 \mid B) \leq H_n(A_2 \mid B)$ für $A_1 \subset A_2$
- $H_n(A_1 \sqcup A_2 \mid B) = H_n(A_1 \mid B) + H_n(A_2 \mid B)$ für $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Definition. Sei $\Omega \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda_d(\Omega) > 0$. Dann heißt das W-Maß

$$\mathbb{P} : \mathfrak{L}(\Omega) \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \frac{\lambda_d(A)}{\lambda_d(\Omega)} \quad \textbf{Gleichverteilung}.$$

Definition. Sei Ω eine endliche Menge. Dann definiert

$$\mathbb{P} : \mathcal{P} \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\# \text{ günstige Fälle}}{\# \text{ mögliche Fälle}}$$

ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, genannt **Laplace'sche Wkt.**

Bemerkung. Damit sind Berechnungen von Wkten mit kombinatorischen Überlegungen möglich.

Lemma (Fundamentalprinzip des Zählens). Seien A_1, \dots, A_n endliche Mengen. Dann gilt $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$.

Lemma. Sei A eine endliche Menge, $r \leq n := |A| < \infty$. Dann ist die Anzahl der r -Tupel mit Elementen aus A gleich

	Mit Wdh.	Ohne Wdh.
Mit Ordnung	n^r	$\frac{n!}{(n-r)!}$
Ohne Ordnung	$\frac{(n+r-1)!}{r!}$	$\binom{n}{r} := \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Lemma. Sei A eine endliche Menge, $n := |A| < \infty$. Dann ist die Anzahl der möglichen Zerlegungen von A in disjunkte Mengen B_1, \dots, B_k mit $|B_i| = n_i$ und $n_1 + \dots + n_k = n$ gleich

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} := \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}. \quad \textbf{(Multinomialkoeffizient)}$$

Modell. Eine Urne enthalte N Kugeln, darunter $M \leq N$ schwarze. Dann ist ist die Wkt für das Ereignis A_m^n , dass sich unter n gezogenen Kugeln genau $m \leq \min(n, M)$ schwarze Kugeln befinden,

$$\mathbb{P}(A_m^n) = \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}. \quad \textbf{(hypergeometrische Verteilung)}$$

Bemerkung. Für Maximum-Likelihood-Schätzungen:

- Der Ausdruck $\binom{N-M}{n-m} / \binom{N}{n}$ wird maximal bei $N := \lfloor \frac{n-M}{m} \rfloor$.
- Der Ausdruck $\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}$ wird maximal bei $M := \lfloor \frac{m(N-1)}{n} \rfloor$.

Modell. Eine Urne enthalte N Kugeln in $k \leq N$ verschiedenen Farben, darunter N_1 in der ersten Farbe, ..., N_k in der k -ten Farbe, $N_1 + \dots + N_k = N$. Dann ist ist die Wkt für das Ereignis A_{n_1, \dots, n_k}^n , dass sich unter n gezogenen Kugeln genau $n_1 \leq N_1$ Kugeln der ersten Farbe, ..., und $n_k \leq N_k$ Kugeln der k -ten Farbe befinden, $n_1 + \dots + n_k = n$, gleich

$$\mathbb{P}(A_{n_1, \dots, n_k}^n) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdot \dots \cdot \binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}.$$

Diese W-Verteilung heißt **polyhypergeometrische Verteilung**.

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, & \text{falls } \mathbb{P}(B) > 0 \\ 0, & \text{falls } \mathbb{P}(B) = 0 \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B .

Bemerkung. Falls $\mathbb{P}(B) > 0$ gilt, so ist $\mathbb{P}(- \mid B)$ ein W-Maß über B auf der Spur- σ -Algebra $\mathfrak{A}|_B$.

Lemma. Seien $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{A}$, dann gilt die Pfadregel:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \prod_{i=2}^k \mathbb{P}(A_i \mid A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}).$$

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A_1, \dots \in \mathfrak{A}$ ein vollständiges Ereignissystem, d. h. paarweise disjunkt mit

$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^\infty A_i.$$

Dann gilt für jedes $B \in \mathfrak{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i) \quad \text{(Formel der totalen Wkt)}$$

$$\mathbb{P}(A_n \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n)}{\sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)} \quad \textbf{(Bayessche Formel)}$$

Sprechweise. In der Bayesischen Statistik heißt

- $\mathbb{P}(A_i)$ **A-priori-Wahrscheinlichkeit**,
- $\mathbb{P}(A_i \mid B)$ **A-posteriori-Wahrscheinlichkeit**.

Definition. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ heißen **(\mathbb{P} -)unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Bemerkung. • $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mathbb{P}(A) = 0$ ist unabhängig zu jedem $B \in \mathfrak{A}$.

- Wenn $A, B \in \mathfrak{A}$ unabhängig, dann sind auch unabhängig:

$$(A^c, B), \quad (A, B^c), \quad (A^c, B^c)$$

Satz. $A, B \in \mathfrak{A}$ unabhängig $\iff \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.

Definition. Sei $(A_i)_{i \in I}$ (I bel.) eine Familie von Ereignissen in \mathfrak{A} .

- **vollständig unabhhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_m})$$

für alle $i_1, \dots, i_m \in I$ mit $2 \leq m < \infty$ und

- **paarweise unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j) \quad \text{für alle } i, j \in I, i \neq j.$$

Achtung. Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt nicht vollständige Unabhängigkeit (Gegenbeispiel: Bernsteins Tetraeder).

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$ Ereignissysteme. Dann heißen \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 **unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \quad \text{für alle } A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2.$$

Satz. Seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$ unabhängige Ereignissysteme, die Algebren sind. Dann sind auch die σ -Algebren $\sigma(\mathfrak{A}_1)$ und $\sigma(\mathfrak{A}_2)$ unabhängig.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge von unabhängigen Ereignissen mit gleicher Erfolgswkt $\mathbb{P}(A_i) = p$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Für $k \leq n, k, n \in \mathbb{N}$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Stück der Ereignisse A_1, \dots, A_n eintreten, genau

$$B(k, n, p) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Die zugehörige VF $x \mapsto \sum_{0 \leq k \leq x} B(k, n, p)$ heißt **Binomialverteilung**.

Lemma. Voraussetzung wie im vorherigen Satz. Sei $r, k \in \mathbb{N}, 1 \leq r$, dann ist die Wkt für das Ereignis $A_k^{(r)}$, dass beim Versuch A_{k+r} der r -te Erfolg eintritt, gleich

$$\mathbb{P}(A_k^{(r)}) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k.$$

Im Spezialfall $r = 1$ ist $\mathbb{P}(A_k^{(1)}) = p(1-p)^k$.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $A_1, \dots, A_r \in \mathfrak{A}$ mit $p_i := \mathbb{P}(A_i)$ für $i = 1, \dots, r$ und $p_1 + \dots + p_r = 1$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei $n \in \mathbb{N}$ Versuchen A_1 genau n_1 -mal, A_2 genau n_2 -mal, ..., A_r genau n_r -mal auftritt ($n_1 + \dots + n_r = n$), genau

$$B(n_1, \dots, n_r, n, p_1, \dots, p_r) := \binom{n}{n_1, \dots, n_r} p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}.$$

Diese W-Verteilung heißt **Multinomialverteilung**.

Satz. Für $0 \leq m \leq n, p \in [0, 1]$ gilt

$$\frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \xrightarrow{M, N \rightarrow \infty \atop M/N \rightarrow p} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

Satz (GWS von Poisson). Für $k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\binom{n}{m} p_n^m (1-p_n)^{n-m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty \atop np_n \rightarrow \lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda).$$

Definition. Sei (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum mit zwei W-Maßen \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 . Dann heißt

$$d_\infty(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) := \sup_{A \in \mathfrak{A}} |\mathbb{P}_1(A) - \mathbb{P}_2(A)|$$

Totalvariation des signierten Maßes $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2$.

Satz. Seien \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 zwei W-Maße auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\mathbb{P}_1(\{i\}) = p_i$, $\mathbb{P}_2(\{i\}) = q_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$d_\infty(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} |p_i - q_i|.$$

Lemma. Für $n, k \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$ und \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 wie eben definiert durch $p_i := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $q_i := \frac{(np)^k}{k!} \exp(-np)$ gilt

$$d_\infty(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) \leq 2np^2.$$

Lemma (Borel-Cantelli). Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt für $A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(A) = 0.$$

Falls die Ereignisse $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig sind, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}(A) = 1,$$

also zusammengefasst $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Definition. Sei $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von σ -Algebren über Ω . Dann ist

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \quad \text{mit} \quad \mathcal{T}_n := \sigma \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \mathfrak{A}_k \right)$$

die **terminale σ -Algebra** von $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz (Null-Eins-Gesetz von Kolmogorow). Sei $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Unter- σ -Algebren in einem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für alle Ereignisse $A \in \mathcal{T}_\infty$ der terminalen σ -Algebra.

Integrationstheorie

Definition. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ messbare Räume. Dann heißt $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ **$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ -messbar**, falls

$$f^{-1}(A_2) \in \mathfrak{A}_1 \quad \text{für alle } A_2 \in \mathfrak{A}_2.$$

Notation. Für solches f schreiben wir $f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$.

Beobachtung. Sei (Ω, \mathfrak{A}) messbarer Raum, $A \subset \Omega$, dann gilt

$$\mathbb{1}_A \text{ } (\mathfrak{A}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))\text{-messbar} \iff A \in \mathfrak{A}.$$

Lemma. Die Verkettung messbarer Abbildungen ist messbar, d. h. für $f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und $g : (\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \rightarrow (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ gilt $g \circ f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \rightarrow (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$.

Lemma. Sei $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abb. und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega)$, dann ist

$$\mathfrak{A}(f^{-1}(\mathcal{E}')) = f^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}')).$$

Lemma. Sei (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum und $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung, sowie $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}(\Omega')$. Dann gilt

$$f \text{ ist } (\mathfrak{A}, \sigma(\mathcal{E}))\text{-messbar} \iff f^{-1}(E) \in \mathfrak{A} \text{ für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Notation. Seien $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}$ zwei numerische Funktionen. Setze

$$\{f \leq g\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\} \subset \Omega$$

und definiere analog $\{f < g\}, \{f \geq g\}, \{f > g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\}$.

Satz. Für eine Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \overline{\mathfrak{B}})$ sind äquivalent:

- f ist messbar
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \geq a\} = f^{-1}([a, \infty]) \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f > a\} \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \leq a\} \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathfrak{A}$

Definition. • Sei (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum, $f : \Omega' \rightarrow \Omega$ eine Abbildung, dann heißt

$$\sigma(f) := f^{-1}(\mathfrak{A}) := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

die **von f erzeugte σ -Algebra**.

• Sei $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von messbaren Räumen, $f_i : \Omega' \rightarrow \Omega_i$ für alle $i \in I$ eine Abbildung. Dann heißt

$$\sigma((f_i)_{i \in I}) := \sigma(\bigcup_{i \in I} \sigma(f_i)) = \sigma(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i))$$

die **von der Familie $(f_i)_{i \in I}$ erzeugte σ -Algebra**.

Definition. Sei $(\Omega', \mathfrak{A}', \mu')$ ein Maßraum, (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum, $f : (\Omega', \mathfrak{A}) \rightarrow (\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist durch

$$\mu'_f := \mu' \circ f^{-1} : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \mu'(f^{-1}(A))$$

ein Maß auf (Ω, \mathfrak{A}) , das sog. **Bildmaß** von μ' unter f , definiert.

Satz. Für zwei numerische Funktionen $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \overline{\mathfrak{B}})$ gilt:

- $\{f < g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f > g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f = g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \leq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \geq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \neq g\} \in \mathfrak{A}$

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbare numerische Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann auch messbar (\dagger : falls $0 \notin \text{Bild}(f)$):

- $\lambda \cdot f$
- $f + \mu \cdot g$
- $f \cdot g$
- $\frac{1}{f} \text{ } (\dagger)$
- $\frac{g}{f} \text{ } (\dagger)$

Satz. Seien $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \overline{\mathfrak{B}}), n \in \mathbb{N}$ messbare numerische Funktionen, dann auch messbar:

- $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$
- $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$
- $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$
- $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$

Dabei werden Infimum, Supremum, usw. punktweise gebildet.

Definition. Für $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}$ heißen die Funktionen

- $|f| := \max(f, -f) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ **Betrag** von f
- $f^+ := \max(f, 0) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ **Positivteil** von f
- $f^- := -\min(f, 0) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ **Negativteil** von f

Satz. Falls $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbar, dann auch $|f|, f^+$ und f^- .

Satz. • Sei (Ω, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist $f \text{ } (\sigma(\mathcal{O}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ -messbar.

• $\sigma(\mathcal{O})$ ist die kleinste σ -Algebra, bezüglich der alle stetigen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ Borel-messbar sind.

Satz (von Lusin). Sei $M \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda_n(M) < \infty$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Borel-messbar, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists K_\epsilon \subset M \text{ kompakt} : \lambda_n(M \setminus K_\epsilon) < \epsilon \text{ und } f|_{K_\epsilon} \text{ stetig.}$$

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Càdlàg-Funktion** (continue à droite, limite à gauche), falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{y \uparrow x} f(y) \text{ existiert und } \lim_{y \downarrow x} f(y) = f(x).$$

Beobachtung. Jede kumulierte VF ist eine Càdlàg-Funktion.

Definition. Die **Variation** von $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. einer Zerlegung $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ von $[a, b]$ ist die nicht-negative Zahl

$$V(g, Z) := \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})|.$$

Die **Totalvariation** von $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$V_a^b(g) := \sup \{V(g, Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Falls $V_a^b(g) < \infty$, so heißt g **von beschränkter Variation**.

Satz. Es sind messbar:

- Monotone Funktionen
- Càdlàg-Funktionen
- Funktionen von beschränkter Variation

Definition. Eine \mathfrak{A} -messbare numerische Funktion X über einem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ heißt **Zufallsgröße** (ZG) oder **Zufallsvariable**.

Bemerkung. Häufig fordert man zusätzlich $\mathbb{P}(\{X = \pm \infty\}) = 0$.

Definition. Das durch die ZG X induzierte Bildmaß

$$P_X : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1) \rightarrow [0, 1], \quad B \mapsto \mathbb{P}(\{X \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

heißt **Verteilungsgesetz** der ZG X und

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto P_X([-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{X \leq x\})$$

heißt **Verteilungsfunktion** (VF) der ZG X .

Satz. Sei F eine VF auf \mathbb{R}^1 . Dann existiert ein W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und eine ZG X auf Ω derart, dass $F_X = F$.

Beweis. 1. Möglichkeit: Wähle $\Omega := \mathbb{R}^1, \mathfrak{A} := \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1)$ und $\mathbb{P} := \mu_F$ als das von F erzeugte Maß und setze $X := \text{id}$.

2. Möglichkeit: Wähle $\Omega := [0, 1], \mathfrak{A} := \mathcal{L}([0, 1]), \mathbb{P} := \lambda_1$. Setze $X(w) := F^-(w) := \inf\{F \geq w\}$ für $w > 0, \quad X(0) := \lim_{w \downarrow 0} F^-(w)$

Definition. Sei X_1, \dots, X_n eine endliche Familie von ZGen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Diese Familie heißt **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i \in B_i\}) \quad \text{für alle } B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}^1}).$$

Satz. Seien X_1, \dots, X_n unabhängige ZGen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar. Setze $Y_i := g_i(X_i) := g_i \circ X_i$ für $i = 1, \dots, n$, dann sind auch Y_1, \dots, Y_n unabhängige ZGen.

Definition. Eine Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ heißt **einfache Funktion** oder **Elementarfunktion** auf (Ω, \mathfrak{A}) , wenn gilt:

- f ist messbar
 - $f(\Omega) \subset [0, \infty[$
 - $f(\Omega)$ ist endlich
- Die Menge aller elementaren Funktionen auf (Ω, \mathfrak{A}) ist $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Notation. $a \wedge b := \min\{a, b\}$ und $a \vee b := \max\{a, b\}$

Satz. Seien $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $a \geq 0$. Dann auch in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$:

- $f + g$
- $f \cdot g$
- $f \vee g$
- $f \wedge g$
- $a \cdot f$

Definition. Sei $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\Omega = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen mit $A_j \in \mathfrak{A}$ für alle $j = 1, \dots, k$, sodass $f(A_j) = \{y_j\}$, dann heißt die Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^k y_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} \quad \textbf{kanonische Darstellung.}$$

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ elementar. Dann

heißt die (von der Darstellung $f = \sum_{j=1}^k y_j \cdot \mathbb{1}_{A_j}$ unabh.) Zahl

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{j=1}^k y_j \mu(A_j) \quad \textbf{\mu-Integral} \text{ von } f.$$

Satz. Es gilt für $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A}), a, b \geq 0$:

- $\int_{\Omega} \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$
- $f \leq g \implies \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu$
- $\int_{\Omega} a \cdot f + b \cdot g \, d\mu = a \cdot \int_{\Omega} f \, d\mu + b \cdot \int_{\Omega} g \, d\mu$

Satz. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone (= monotone) Folge elementarer Funktionen über (Ω, \mathfrak{A}) . Dann gilt für jede elementare Funktion f mit $f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ die Ungleichung $\int_{\Omega} f \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu$.

Korollar. Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ isotone Folgen elementarer Funktionen mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$. Dann ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n \, d\mu$.

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$ nichtnegativ. Dann gibt es eine isotone Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementarer Funktionen mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$.

Definition. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$ nichtnegativ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge elementarer Funktionen mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$. Dann heißt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu \quad \text{\textbf{\textit{\textcolor{blue}{\mu-Integral}}}} \text{ von } f.$$

Definition. Eine \mathfrak{A} -messbare, numerische Fkt. $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$ heißt **\textit{\textcolor{blue}{\mu-integrierbar}}**, falls

$$\int_{\Omega} f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} f^- \, d\mu < \infty.$$

In diesem Fall definieren wir das **\textit{\textcolor{blue}{Lebesgue-Integral}}}** von f als

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \int_{\Omega} f^+ \, d\mu - \int_{\Omega} f^- \, d\mu.$$

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$ messbar. Dann sind äquivalent:

- f ist μ -integrierbar
- f^+ und f^- sind μ -integrierbar
- $|f|$ ist μ -integrierbar
- $\exists \mu$ -integrierbare Funktion g mit $|f| \leq g$

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$ μ -integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind auch μ -integrierbar:

- $f \pm g$
- $f \vee g$
- $f \wedge g$
- $\alpha \cdot f$

Es gilt: $\int_{\Omega} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) \, d\mu = \alpha \int_{\Omega} f \, d\mu + \beta \int_{\Omega} g \, d\mu$ (Linearität)

- $|\int_{\Omega} f \, d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu$
- $f \leq g \implies \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu$ (Monotonie)

Achtung. Das Produkt $(f \cdot g)$ ist i. A. nicht μ -integrierbar!

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$. Für $p \in [1, \infty[$ heißt f **\textit{\textcolor{blue}{p-integrierbar}}**, falls $|f|^p$ μ -integrierbar ist.

$$L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1} \mid f \text{ p-integrierbar, also } \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu < \infty\},$$

$$L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1} \mid \exists C > 0 : |f| \leq C \text{ fast überall}\}$$

ist dann ein VR, genannt **\textit{\textcolor{blue}{Lebesgue-Raum}}}** (L^p -Raum), mit Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| := \inf\{C \in \mathbb{R} \mid |f| \leq C \text{ fast-überall}\}$$

Wir betrachten in L^p zwei Funktionen als gleich, wenn sie bis auf einer Nullmenge übereinstimmen. Die Δ -Ungleichung in L^p wird auch **\textit{\textcolor{blue}{Minkowski-Ungleichung}}}** genannt.

Satz. Der $L^p(\mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum, d. h. jede Cauchy-Folge bzgl. der Norm $\|\cdot\|_p$ ist auch konvergent.

Satz. Sei $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $fg \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und es gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \text{\textbf{\textit{\textcolor{blue}{Hölder-Ungleichung}}}.$$

Bemerkung. Für $p = 2$ ist $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ der Hilbertraum der quadratisch integrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} (f \cdot g) \, d\mu.$$

Mit $q = 2$ folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| = \|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad \text{\textbf{\textit{\textcolor{blue}{Cauchy-Schwarz-Ungl.}}}}$$

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$ nichtnegativ. Dann gilt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = 0 \quad \iff \quad f \stackrel{\text{f..}}{=} 0.$$

Satz (von der monotonen Konvergenz). Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ nicht negativ und \mathfrak{A} -messbar, sodass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge ist. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Korollar (Beppo Levi). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht negativer, \mathfrak{A} -messbarer, numerischer Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Definition. Sei (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum mit Maßen μ und η . Dann heißt μ **\textit{\textcolor{blue}{absolut stetig}}** bezüglich η (notiert $\mu \ll \eta$), falls

$$\eta(A) = 0 \implies \mu(A) = 0 \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$ nichtnegativ und μ -integrierbar. Dann definiert

$$\nu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \int_A f \, d\mu = \int_{\Omega} f \cdot \chi_A \, d\mu$$

ein zu μ absolut stetiges, endliches Maß auf (Ω, \mathfrak{A}) .

Lemma (Fatou). Sei für $n \in \mathbb{N}$ die Fkt. $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ nicht negativ und \mathfrak{A} -messbar. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Falls $\int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu < \infty$, gilt zusätzlich

$$\int_{\Omega} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Definition. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ \mathfrak{A} -messbarer, numerischer Fktn. ber $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ **\textit{\textcolor{blue}{konvergiert \mu-fast-überall}}}** gegen $f : \Omega \rightarrow \mathfrak{A}$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad \text{für } \mu\text{-fast-alles } \omega \in \Omega \text{ gilt.}$$

Satz (Riesz). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f..}} f$ mit $f \in L^p(\mu)$. Dann gilt

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p(\mu)} f \quad \iff \quad \int_{\Omega} |f_n|^p \, d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu.$$

Satz (von der majorisierten Konvergenz). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge \mathfrak{A} -messbarer numerischer Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und $g \in L^1(\mu)$ nicht negativ, sodass $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei desweiteren $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}$ messbar mit $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu\text{-f..}} f$. Dann ist

$$f \in L^1(\mu) \quad \text{mit} \quad \int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\Omega', \mathfrak{A}')$ und $\mu' := \mu \circ f^{-1}$ das Bildmaß von μ unter f . Sei $g : (\Omega', \mathfrak{A}') \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1))$ nicht negativ. Dann gilt

$$\int_{\Omega'} g \, d\mu' = \int_{\Omega} (g \circ f) \, d\mu.$$

Satz (Transformationssatz). Sei $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ und sei $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^1$ genau dann auf \tilde{U} Lebesgue-Borel-integrierbar, wenn $(f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| : U \rightarrow \mathbb{R}^1$ auf U Lebesgue-Borel-interierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_U (f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| \, d\lambda_d = \int_{\phi(U)} f \, d\lambda_d = \int_{\tilde{U}} f \, d\lambda_d.$$

Obige Gleichung ist auch erfüllt, wenn lediglich $f \geq 0$ gilt.

Definition. Für eine ZG $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}^1}))$ heißt die Zahl

$$\mathbb{E}X := \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P} \quad \text{\textbf{\textit{\textcolor{blue}{Erwartungswert}}}} \text{ von } X.$$

Satz. $\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}^1} \text{id} \, dP_X$, wobei $P_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$.

Korollar. Sei $g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ messbar und P_X -integrierbar. Dann gilt

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}^1} g \, dP_X = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dP_X(x),$$

wobei rechts ein uneigentliches Riemann-Stieltjes-Integral steht.

Definition. Für Zufallsvektoren $X = (X_1, \dots, X_k)$ mit Werten in \mathbb{R}^k definieren wir $\mathbb{E}X := (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_k)$.

Bemerkung. Sei $X = (X_1, \dots, X_k)$ ein Zufallsvektor und $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar und P_X -integrierbar. Dann ist

$$\mathbb{E}g(X_1, \dots, X_k) = \int_{\mathbb{R}^k} g \, dP_X.$$

Satz. Sei F_X VF einer ZG $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$. Dann existiert für Lebesgue-fast-alles $x \in \mathbb{R}^1$ die Ableitung $F'(x)$.

Definition. Sei F_X VF einer ZG $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$.

- F_X heißt **\textit{\textcolor{blue}{diskret}}**, falls F_X höchstens abzählbar viele Sprungstellen $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$ besitzt mit

$$\forall k \in J \subset \mathbb{N} : p_k := F_X(x_k) - \lim_{x \uparrow x_k} F_X(x) > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Dann ist F_X zwischen den Sprüngen konstant.

- F_X heißt **\textit{\textcolor{blue}{stetig}}** (diffus, atomlos), wenn F_X in jedem Punkt stetig ist. Dann gilt $P_X(\{X = x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für stetige Verteilungen ergibt sich eine weitere Unterteilung:

- F_X heißt **absolutstetig** (totalstetig), wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für höchstens abzählbar viele, disjunkte Intervalle $I_k =]a_k, b_k]$ mit $k \in J \subset \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k \in J} (b_k - a_k) < \delta \implies \sum_{k \in J} (F_X(b_k) - F_X(a_k)) < \epsilon.$$

- F_X heißt **singulärstetig** (stetig, aber nicht absolutstetig), wenn die Wachstumspunkte von F_X eine Nullmenge bilden, also

$$\lambda_1(\{x \in \mathbb{R}^1 \mid \forall \epsilon > 0 : F(x + \epsilon) - F(x - \epsilon) > 0\}) = 0$$

oder äquivalent dazu die Ableitung fast-überall verschwindet, also

$$\lambda_1(\{x \in \mathbb{R}^1 \mid F'_X(x) = 0\}) = 1.$$

Satz. Jede VF F auf \mathbb{R}^1 besitzt eine eindeutige Zerlegung (Lebesgue-Zerlegung) als konvexe Linearkombination einer diskreten, einer singulär-stetigen und einer absolut-stetigen VF

$$F = \alpha_d F_d + \alpha_s F_s + \alpha_a F_a \quad \text{mit} \quad \alpha_d, \alpha_s, \alpha_a \geq 0, \alpha_d + \alpha_s + \alpha_a = 1.$$

Definition. Falls F_X absolut-stetig, dann heißt die nicht negative, Lebesgue-messbare Funktion

$$f = f_X = F'_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \begin{cases} F'_X(x), & \text{falls Ableitung ex.} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(Wahrscheinlichkeits-)Dichte (WD) von F_X bzw. von X .

Bemerkung. Dann gilt für alle $y \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^y f_X(x) dx = F_X(y), \quad \text{also insbesondere} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

Bemerkung. F_X ist als VF genau dann absolut stetig, wenn das Maß P_X bezüglich λ_1 absolut stetig ist (also $P_Y \ll \lambda_1$ gilt).

Satz.
$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^1} x \cdot f_X(x) dx, & \text{falls } F_X \text{ absolutstetig mit WD } f_X \\ \sum_{k \in J} x_k \cdot p_k, & \text{falls } F_X \text{ diskret mit Sprüngen } p_k \\ & \text{bei } x_k, k \in J \subset \mathbb{N} \end{cases}$$

...

$F(X_1, \dots, X_k)$ heißt **absolut stetig**, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für $I_\alpha =]a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \dots$ mit $\sum_{j \geq 1} \lambda_k(I_j) \leq \delta$ gilt:

$$\sum_{j \geq 1} \mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_k)}(I) = \sum_{j \geq 1} (\text{triangle} F_{(X_1, \dots, X_k)}) I_j \leq \epsilon$$

Genau dann existiert eine (Lebesgue-) Borel-messbare Funktion

$$f_{(X_1, \dots, X_k)}(x_1, \dots, x_k) \geq 0 \text{ mit } \int_{\mathbb{R}^1} f_{(X_1, \dots, X_k)} d\lambda_k = 1$$

Sei $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ Borel-messbar

$$\mathbb{E}g(X_1, \dots, X_k) = \int_{\mathbb{R}^1} g \cdot f_{(X_1, \dots, X_k)} d\lambda_k$$

Falls $F_{(X_1, \dots, X_k)}$ "hinreichend glatt", so ergibt sich

$$f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \cdot \partial x_k} F_{(X_1, \dots, X_k)}(x_1, \dots, x_k)$$

F_{X_1, \dots, X_k} heißt singulär-stetig, falls $P_{(X_1, \dots, X_k)}(\{x\}) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^k$ und es existiert eine Lebesgue-messbare Menge S mit $\lambda_k(S) = 0$ und $P((X_1, \dots, X_k))(S) = 1$.

$F_{(X_1, \dots, X_k)}$ heißt diskret, falls eine höchstens abzählbare Punktmenge $S = \{x_1, \dots\} \subset \mathbb{R}^k$ und $p_i = P_{(X_1, \dots, X_k)}(\{x_i\}) > 0$ mit $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$

$$\text{Sei } x_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(k)}) \in \mathbb{R}^k$$

$$\mathbb{E}g(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i \geq 1} g(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(k)}) p_i$$

$g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ sei zunächst beliebig (stetig oder hinreichend glatt)

$$\text{Sei } a = \xi_0^{(n)} < \xi_1^{(n)} < \dots < x_{k_n}^{(n)} \text{ und } x_k^{(n)} \in]\xi_{k-1}^{(n)}, \xi_k^{(n)}[.$$

Definition. (ξ_n) sei eine Zerlegungsfolge mit $\max_{1 \leq k \leq k_n} (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$(x_k^{(n)})$ sei eine Zwischenwertfolge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} g(x_k^{(n)}) (F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)})) = \int_a^b g(x) dF(x) = \int_{[a,b]} g dF \lambda_1$$

wobei $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ zunächst beliebig (monoton oder von beschränkter Variation)

Sei g bzgl. F R-S-integrierbar, d. h. der Grenzwert oben existiert
Dann ist auch F bzgl. g R-S-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b g(x) dF(x) = [g(x) \cdot F(x)]_a^b - \int_a^b F(x) dg(x)$$

Ausnutzen der partiellen Integration zur Berechnung von Erwartungswerten

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

$$\int_a^b x dF_X(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} [x \cdot F_X(-x)]_0^{-a} - \int_0^{-a} F_X(-x) dx + [x(F_X(x) - 1)]_0^b - \int_0^b (F_X(x) - 1) dx$$

Falls $\lim x \rightarrow \infty F_X(-x) = \lim x \rightarrow \infty x(1 - F_X(x)) = 0$, so gilt

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) - F_X(-x) dx, \text{ falls } \mathbb{E}|X| < \infty$$

$$\mathbb{E}|X| = \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) - F_X(-x) dx$$

Genauso werden Erwartungswerte von Funktionen von X berechnet, z.B. mit $x^2 F_X(-x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ und $x^2(1 - F_X(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

$$\mathbb{E}X^2 = 2 \int_0^{\infty} x(1 - F_X(x) + F_X(-x)) dx = \mathbb{P}(|X| > x) \text{ (falls } F_X \text{ stetig)}$$

$$\mathbb{E}|X|^k = k \int_0^{\infty} x^{k-1} (1 - F_X(x) + F_X(-x)) dx$$

Definition. $\mathbb{E}X^k$ ($\mathbb{E}|X|^k$) heißt k -tes (absolutes) Moment der ZG X . $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k$ heißt k -tes zentriertes Moment der ZG X . $\text{Var}(X) := D^2 X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2$ heißt **Streuung** (Dispersion, Varianz) der ZG X .

X sei ZG über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}X^n = \int_{\mathbb{R}^n} x^n \mathbb{P}_X dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF_X(x)$$

heißt **n -tes Moment**

$\mathbb{E}X$ Erwartungswert (Schwerpunkt der W-Massenverteilung)

„Lageparameter“

$$D^2 X = \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 \geq 0$$

Eigenschaft: $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ für $a, b \in \mathbb{R}^1$

$$\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}(X - c)^2 \text{ für alle } c \in \mathbb{R}^1$$

$$\text{Var}(X) = 0 \iff X - \mathbb{E}X = 0 \iff X = \text{const } \mathbb{P}\text{-fast-sicher}$$

Satz. X sei eine ZG und $g : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty]$ nichtfallend. Dann gilt

$$\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}g(|X|)}{g(\epsilon)} \text{ für beliebiges } \epsilon > 0.$$

Spezialfälle:

- $g(x) = x$, dann $\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}X}{\epsilon}$ **Markow-Ungleichung**
- $g(x) = x^2$, dann $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}$ **Tschebyschew-Ungleichung**
- $g(x) = \exp(ax)$ für $a > 0$, dann $\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \exp(-a\epsilon) \mathbb{E} \exp(a|X|)$

$$\begin{aligned}
0 > B = \mathbb{E} \exp(a|X|) &\geq \frac{a^n \mathbb{E}|X|^n}{n!} \\
\implies \mathbb{E}|X|^n &\leq \frac{B}{a^n} n! \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\
\implies |\mathbb{E}X^n| &\leq \frac{B}{a^n} n! \\
\implies \mathbb{E} \exp(zX) &\text{ ist analytisch für } |z| < a
\end{aligned}$$

Definition. $\mathbb{E} \exp(zX)$ heißt momenterzeugende Funktion der ZG X oder VF F_X .

$$X = N(\mu, \sigma^2) \implies \mathbb{E} \exp(zX) = \exp\left(z\mu + \frac{\sigma^2}{2} z^2\right) \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

Höldersche Ungleichung:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}XY| &\leq \mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}} \text{ für } p, q \geq 1 \\
&\implies \text{Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung für } p = q = 2:
\end{aligned}$$

$$|\mathbb{E}XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

Verallgemeinerung:

$$\mathbb{E}(X_1^{n_1} \cdots X_k^{n_k}) \leq (\mathbb{E}|X_1|^{n_1})^{\frac{n_1}{n}} \cdots (\mathbb{E}|X_k|^{n_k})^{\frac{n_k}{n}}, \quad n = n_1 + \dots + n_k$$

Jensensche Ungleichung

Sei $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ konvex auf einem Intervall J , d. h.

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y) \text{ für alle } x, y \in I \text{ und } \alpha \in [0, 1]$$

$$\text{Per Induktion folgt: } g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i g(x_i) \text{ für } x_1, \dots, x_n \in J,$$

$$\alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$$

Satz. $g(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}g(X)$, falls $\mathbb{P}(X \in J) = 1$ und $\mathbb{E}|X| < \infty$

$$g(x) = |x|^{\frac{n}{m}} \text{ für } 0 < m \leq n, \implies \text{Ljapunow-Ungleichung}$$

Problem (Momentenproblem). Unter welchen Bedingungen ist eine Zahlenfolge $c_0 = 1, c_1, c_2, \dots$ eine Momentenfolge einer ZG X , d. h. $c_n = \mathbb{E}X^n$.

Antwort.

$$0 \leq \mathbb{E}(z_0 + z_1 X + \dots + z_n X^n)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^n z_i z_j X^{i+j}\right) = \sum_{i,j=1}^n z_i z_j c_{i+j}$$

genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Problem. Wann ist die zugehörige VF F_X eindeutig festgelegt?

$$c_n = \int_0^\infty x^n dF_X(x) \text{ (Stieltjes-MP)}, \quad c_n = \int_{-\infty}^\infty x^n dF_X(x) \text{ (Hamburger MP)}$$

Hinreichende Bedingung für Bestimmtheit:

$$\text{Stieltjes-MP: } \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{c_{2n}^{\frac{1}{2n}}} = \infty$$

$$\text{Hamburger MP: } \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{c_{2n}^{\frac{1}{2n}}} = \infty$$

(Carleman-Kriterien)

Definition. Sei $X = (X_1, \dots, X_k)$ eine k -dimensionale ZV über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. X_1, \dots, X_k heißen **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(\{X_i \in B_i\})$$

für alle $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_k \leq x_k)$$

für alle $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. Falls die W-Dichte

$f_X(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial}{\partial x_1 \cdots \partial x_k} F(x_1, \dots, x_k)$ existiert (also F_X absolut stetig), ist dies äquivalent zu

$$f_X(x_1, \dots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_k}(x_k).$$

Für diskrete Verteilungen ist dies äquivalent zu

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

für alle $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$.

Definition. Für eine k -dimensionale ZV $X = (X_1, \dots, X_k)$ heißt

$$F_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_l})}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}) = \lim_{x_j \rightarrow \infty, j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}} F_{(X_1, \dots, X_k)}(x_1, \dots, x_k)$$

für $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k$, $l = 1, \dots, k-1$ **l -dimensionale Rand-(Marginal-)verteilungsfunktion.**

Falls $f_X(x_1, \dots, x_k)$ existiert, so existieren sämtliche Randdichten

$$f_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \int_{\mathbb{R}^{k-l}} f_{(X_1, \dots, X_k)}(x_1, \dots, x_k) d(x_1, \widehat{x_{i_1}}, \dots, \widehat{x_{i_k}}, \dots, x_k)$$

Analog folgt für eine diskrete ZV die Diskretheit der Randverteilungen $k=2$:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_m^{(1)}) = \sum_{x_m^{(2)}} \mathbb{P}(X_1 = x_m^{(1)}, X_2 = x_m^{(2)})$$

$$\mathbb{P}(X_2 = x_m^{(2)}) = \sum_{x_m^{(1)}} \mathbb{P}(X_1 = x_m^{(1)}, X_2 = x_m^{(2)})$$

wobei $x_m = (x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(k)})$ die Massenschwerpunkte sind.

Wichtig: Im allgemeinen bestimmen die Randverteilungen nicht die gemeinsame Verteilung des Vektors.

Definition. (X, Y) sei eine zweidimensionale ZV über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Dann heißt

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$$

Kovarianz von X und Y und

$$\text{Cor}(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

Korrelation von X und Y .

Satz. • Falls X, Y unabhängig, so gilt $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cor}(X, Y) = 0$

$$\bullet |\text{Cor}(X, Y)| \leq 1$$

$$\bullet \text{Cor}(X, Y) = 1 \iff \exists a, b \in \mathbb{R}^1 : \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1.$$

Definition. Falls $\text{Cor}(X, Y) = 0$, so heißen X, Y **unkorreliert**.

Achtung. Aus Unkorreliertheit folgt i. A. nicht Unabhängigkeit!

Beispiel. Sei X eine ZG mit der symmetrischen Dichte

$$f_X(x) = f_X(-x) \text{ und } \int_{-\infty}^\infty |x|^3 f_X(x) dx < \infty, \text{ dann ist } \text{Cov}(X, X^2) = 0, \text{ aber } X \text{ und } X^2 \text{ nicht unabhängig.}$$

Bemerkung. • $\text{Cor}(X, Y) = 1$: positive Korrelation

$$\bullet \text{Cor}(X, Y) = -1: \text{ negative Korrelation}$$

$$\bullet \text{Cor}(X, Y) = 0: \text{ Unkorreliertheit}$$

Wichtig: Falls (X, Y) eine zweidimensionale Normalverteilung besitzt, so folgt aus $\text{Cor}(X, Y) = 0$ die Unabhängigkeit von X und Y .

Satz. X_1, \dots, X_n seien paarweise unkorrelierte ZGen mit $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

Wir wollen die Kovarianz der ZG X und Y berechnen.

1. Fall: Es existiert eine gemeinsame WD von (X, Y) , $f_{(X,Y)}(x, y)$

(Lebesgue-messbar, ≥ 0 , $\int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) \, d(x, y) = 1$)

Beispiel: 2-dimensionale Normalverteilungsdichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right),$$
$$\text{Cov}(X, Y) = \dots = \frac{\nu}{(\lambda + \nu)(\mu + \nu)(\lambda + \mu + \nu)}$$

wobei $\mu_1 = \mathbb{E}X$, $\mu_2 = \mathbb{E}Y$, $\sigma_1^2 = \text{Var}(X)$, $\sigma_2^2 = \text{Var}(Y)$

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \cdot f_{(X,Y)}(x, y) \, d(x, y) = \mu_1 \cdot \mu_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho$$

Also: $\text{Cov}(X, Y) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho$ und $\text{Cor}(X, Y) = \rho \in [-1, 1]$.

Randverteilungen:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(X,Y)}(x, y) \, dx \, dy$$

2. Fall: (X, Y) mit Werten in einer höchstens abzählbaren Menge an (x_i, y_i) wird mit Wahrscheinlichkeit $p_{ij} > 0$ angenommen, $i, j = 1, 2, \dots$

$$\mathbb{P}((X, Y) = (x_i, y_i)) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot y_j p_{ij}$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij}$$

$$\mathbb{E}Y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_j p_{ij}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j (p_{ij} - p_i \cdot q_j)$$

mit $p_i := \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$, $q_j := \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$

3. Fall: (X, Y) ist singular-stetig verteilt oder besitzt eine singular-stetige Komponente

Beispiel: Zweidimensionale Exponentialverteilung ...

$$\overline{F}(x, y) = \mathbb{P}(X > x, Y > y) = \exp(-(\lambda x + \mu y + \nu \max(x, y)))$$

$$F(x, y) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{E}XY = \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot y \, dF(x, y) = \dots = - \int_0^{\infty} [y \cdot \mathbb{P}(X > x, Y > y)]_{y=0}^{y=\infty} \, dx + \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^2} \mathbb{P}(X > x, Y > y) \, d(x, y) = \int_0^{\infty} y^n f_Y(y) \, dy = \dots = \exp(-\frac{n^2}{2})$$

Für $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(X > x, Y > y)}_{=\overline{F}(x, y)} \, dx \, dy$$

Falls $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, so gilt:

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\mathbb{P}(X > x, Y > y) + \mathbb{P}(X \leq -x, Y \leq -y) - \mathbb{P}(X \geq x, Y \leq -y) - \mathbb{P}(X \leq -x, Y \geq y)) \, dx \, dy$$

Im Beispiel:

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x - \mu y - \nu \max(x, y)) \, dx \, dy = \dots = \frac{1}{\lambda(\mu + \nu)} + \frac{1}{\mu(\lambda + \nu)}$$

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} x \, dF(x) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) \, dx = \frac{1}{\lambda + \nu}$$
$$\text{Cov}(X, Y) = \dots = \frac{\nu}{(\lambda + \nu)(\mu + \nu)(\lambda + \mu + \nu)}$$

Also: $\nu = 0$ genau dann, wenn X und Y unabhängig

$Y = g(X)$, $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ Borel-messbar

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(Y \text{ in }]-\infty, y]) = \mathbb{P}(X \in g^{-1}(]-\infty, y]))$$

Beispiel: $Y = X^2$, $y \geq 0$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{y}) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \mathbb{P}(X = -\sqrt{y}) + F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - \lim_{z \uparrow -\sqrt{y}} F_X(z)$$

Satz. X sei absolut stetig mit Dichte f_X und $\mathbb{P}(X \in D) = 1$ für $D \subset \mathbb{R}^1$ offen und $g: D \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion mit $g'(x) > 0$ für alle $x \in D$. Dann ist $Y = g(X)$ absolut-stetig mit der Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{für } y \in \mathbb{R}^1 \setminus g(D) \\ \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} & \text{für } y \in g(D) \end{cases}$$

Beispiel. $Y = e^{N(\mu, \sigma^2)} + c$

Dann heißt Y logarithmisch normalverteilt

$$g(x) = e^x + c$$

Ausgelassen: Rechnungen

Bemerkung. Falls die Ableitung $g'(x)$, $x \in D$ wechselndes Vorzeichen besitzt, so muss in Monotoniebereiche unterteilt werden.

Beispiel. $Y = e^{N(\mu, \sigma^2) + c}$, speziell $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $c = 0$, dann

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\log y)^2}{2}).$$

Die Funktion

$$f_a(y) := f_Y(y) \cdot (1 + a \cdot \sin(2\pi \log y)), y \in \mathbb{R}_{>0}^1, a \in [0, 1]$$

$$\mathbb{E}Y = \int_0^{\infty} y \, dF(y) = \int_0^{\infty} y f_Y(y) \, dy = \dots = 1$$

$$\mathbb{E}Y^n = \int_0^{\infty} y^n f_Y(y) \, dy = \dots = \exp(-\frac{n^2}{2})$$

$$\int_0^{\infty} y^n f_a(y) \, dy = \exp(-\frac{n^2}{2})$$

Sei $X = (X_1, \dots, X_k)$ ein k -dimensionaler Zufallsvektor, $g = (g_1, \dots, g_k): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $g_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ für $i = 1, \dots, k$ Borel-messbar. Dann ist $Y = g(X)$ ein k -dimensionaler ZV mit $P_Y = P_X \circ g^{-1}$ Falls $f_{(X_1, \dots, X_k)}$ eine W-Dichte von X ist und g ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus ist, dann existiert die W-Dichte von $f_{(Y_1, \dots, Y_k)}$ von Y .

Satz. Seien $G, H \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $g = (g_1, \dots, g_k): G \rightarrow H$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus. Dann findet man Funktionen $h_i: H \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, k$ mit $h(y_1, \dots, y_k) = (h_1(y_1, \dots, y_k), \dots, h_k(y_1, \dots, y_k))$ für $(y_1, \dots, y_k) \in H$, sodass für die Dichte von $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$ gilt:

$$f_{(Y_1, \dots, Y_k)}(y_1, \dots, y_k) = \begin{cases} \frac{f_{(X_1, \dots, X_k)}(h_1(y_1, \dots, y_k), \dots, h_k(y_1, \dots, y_k))}{|\det Dg(h_1(y_1, \dots, y_k), \dots, h_k(y_1, \dots, y_k))|} & \text{für } (y_1, \dots, y_k) \in H \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte:

$$\det D(h)(y_1, \dots, y_k) = \frac{1}{\det D(g)(h_1(y_1, \dots, y_k), \dots, h_k(y_1, \dots, y_k))}$$

Beispiel (Box-Muller-Transformation).

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) = \sqrt{-2 \log(X_1)} \sin(2\pi X_2)$$

$$Y_2 = g_2(X_1, X_2) = \sqrt{-2 \log(X_1)} \cos(2\pi X_2)$$

mit X_1 und X_2 gleichverteilt auf $[0, 1]$.

$$f_{(X_1)}(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{]0, 1[}$$

Behauptung: Dann ist $f_{(Y_1, Y_2)} = \phi(y_1) \cdot \phi(y_2)$, wobei

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2}) \text{ oder } Y_1, Y_2 \sim N(0, 1) \text{ und unabhängig.}$$

Beispiel.

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

$$Y_2 = g_2(X_1, X_2) = \begin{cases} \arctan(\frac{X_2}{X_1}) & \text{für } X_2 \geq 0, X_1 \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \\ \arctan(\frac{X_2}{X_1}) + \pi, & \text{für } X_2 < 0, X_1 \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \end{cases}$$

Wenn $X_1, X_2 \sim N(0, \sigma^2)$, unabhängig \implies

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \phi(\frac{x_1}{\sigma}) \phi(\frac{x_2}{\sigma})$$

$$\text{Ergebnis: } f_{(Y_1, Y_2)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{\frac{y_1}{\sigma^2} \exp(-\frac{y_1^2}{\sigma^2})}_{\text{Dichte der Rayleigh-Verteilung}} \quad \text{für } (y_1, y_2) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi]$$

$$F_{Y_1}(y) = \dots = 1 - \exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2})$$