

Zusammenfassung Funktionalanalysis

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Notation. Sei im Folgenden $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition. Ein **Prä-Hilbertraum** ist ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine **Fréchet-Metrik** ist eine Funktion $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für $x, y \in V$ gilt:

- $\rho(x) = \rho(-x)$
- $\rho(x) = 0 \iff x = 0$
- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A_1, A_2 \subset X$, so ist $\text{dist}(A_1, A_2) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A_1, y \in A_2\}$

der **Abstand** zwischen A_1 und A_2 .

Definition. Ein **topologischer Raum** ist ein paar (X, τ) , wobei X eine Menge und $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von offenen Mengen, sodass gilt:

- $\emptyset \in \tau$
- $\tilde{\tau} \subset \tau \implies \bigcup_{U \in \tilde{\tau}} U \in \tau$
- $U_1, U_2 \in \tau \implies U_1 \cap U_2 \in \tau$

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **Hausdorff-Raum**, wenn folgendes Trennungsaxiom erfüllt ist:

$$\forall x_1, x_2 \in X : \exists U_1, U_2 \in \tau : x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \tau$, also das Komplement offen ist.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißen

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ und } U \subset A\}$$

$$\bar{A} := \{x \in X \mid \forall U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$$

Abschluss bzw. **Inneres** von A .

Definition. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$, dann ist auch (A, τ_A) ein topologischer Raum mit der *Relativtopologie* $\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}$.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **dicht** in X , falls $\bar{A} = X$.

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **separabel**, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt separabel, falls (A, τ_A) separabel ist.

Definition. Seien τ_1, τ_2 zwei Topologien auf einer Menge X . Dann heißt τ_2 **stärker** (oder feiner) als τ_1 bzw. τ_1 **schwächer** (oder gröber) als τ_2 , falls $\tau_1 \subset \tau_2$.

Definition. Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X und τ_1 und τ_2 die induzierten Topologien. Dann heißt d_1 stärker als d_2 , falls τ_1 stärker ist als τ_2 .

Satz. Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf dem \mathbb{K} -Vektorraum X . Dann gilt:

- $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1 \iff \exists C > 0 : \forall x \in X : \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$
- $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent $\iff \exists c, C > 0 : \forall x \in X : c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$

Definition. Die **p-Norm** auf dem \mathbb{K}^n ist definiert als

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_\infty := \|x\|_{max} := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Bemerkung. Alle p -Normen sind zueinander äquivalent.

Definition. Seien $S \subset X$ eine Menge, (X, τ_X) und (Y, τ_Y) Hausdorff-Räume sowie $x_0 \in S$. Eine Funktion $f : S \rightarrow Y$ heißt **stetig** in x_0 , falls gilt:

$$\forall V \in \tau_Y : f(x_0) \in V \implies \exists U \in \tau_X \text{ mit } x_0 \in U \wedge f(U \cap S) \subset V$$

Ist $X = S$, so heißt $f : X \rightarrow Y$ stetige Abbildung, falls f stetig in allen Punkten $x_0 \in X$ ist, d. h. $V \in \tau_Y \implies f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Bemerkung. In metrischen Räumen ist diese Definition äquivalent zur üblichen Folgendefinition.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls $d(x_k, x_l) \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} 0$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Folge, falls es eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ gibt mit $x_{k_i} - x \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.

Definition. Ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum heißt **Banachraum**, falls er vollständig bzgl. der induzierten Metrik ist.

Definition. Ein Banachraum heißt **Banach-Algebra**, falls er eine Algebra ist mit $\|x \cdot y\|_X \leq \|x\|_X \cdot \|y\|_X$.

Definition. Ein **Hilbertraum** ist ein Prähilbertraum, der vollständig bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm ist.

Bemerkung. Ein normierter Raum ist genau dann ein Prähilbertraum, falls die Parallelogrammidentität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

gilt. Folglich ist ein Banachraum genau dann ein Hilbertraum, falls die Parallelogrammidentität gilt.

Definition. Sei $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N} : x_i \in \mathbb{K}\}$ die Menge aller Folgen in \mathbb{K} . Mit der Fréchet-Metrik

$$\rho(x) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|x_i|}{1 + |x_i|} < 1$$

wird der **Folgenraum** $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ zu einem Banachraum.

Satz. Sind $(x^k) = (x_i^k)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ und $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, so gilt

$$\rho(x^k - x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff \forall i \in \mathbb{N} : x_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_i.$$

Definition. Die Norm

$$\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty], \text{ für } 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \in [0, \infty]$$

heißt **ℓ^p -Norm** auf dem Raum $\ell^p(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_{\ell^p} < \infty\}$.

Satz. Der Raum $\ell^p(\mathbb{K})$ ist vollständig, also ein Banachraum.

Bemerkung. Im Fall $p = 2$ wird $\ell^2(\mathbb{K})$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle_{\ell^2} := \sum_{i=0}^{\infty} x_i \bar{y}_i$.

Definition (Vervollständigung). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Betrachte die Menge $X^{\mathbb{N}}$ aller Folgen in X und definiere

$$\tilde{X} := \{x \in X^{\mathbb{N}} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\} / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \text{ in } \tilde{X} \iff d(x_j, y_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Diese Menge wird mit der Metrik

$$\tilde{d}(x, y) := \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_i, y_i)$$

zu einem vollständigen metrischen Raum. Die injektive Abbildung $J : X \rightarrow \tilde{X}$, welche $x \in X$ auf die konstante Folge $(x)_{i \in \mathbb{N}}$, ist isometrisch, d. h. sie erhält. Wir können also X als einen dichten Unterraum von \tilde{X} auffassen. Man nennt \tilde{X} **Vervollständigung** von X .

Definition (Raum der beschränkten Funktionen). Sei S eine Menge und Y ein Banachraum über \mathbb{K} mit Norm $y \mapsto |y|$. Dann ist $B(S; Y) := \{f : S \rightarrow Y \mid f(S) \text{ ist eine beschränkte Teilmenge von } Y\}$ die Menge der beschränkten Funktionen von B nach Y . Diese Menge ist ein \mathbb{K} -Vektorraum und wird mit der Supremumsnorm $\|f\|_{B(S)} := \sup_{x \in S} |f(x)|$ zu einem Banachraum.

Satz. Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $Y \subset X$ abgeschlossen, so ist auch (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum.

Definition (Raum stetiger Funktionen auf einem Kompaktum). Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen (d. h. kompakt) und Y ein Banachraum über \mathbb{K} mit Norm $y \mapsto |y|$, so ist

$$\mathcal{C}^0(S; Y) := \mathcal{C}(S; Y) := \{f : S \rightarrow Y \mid f \text{ ist stetig}\}$$

die Menge der stetigen Funktionen von S nach Y . Sie ist ein abgeschlossener Unterraum von $B(S; Y)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(S; Y)} = \|\cdot\|_{B(S; Y)}$, also ein Banachraum.

Bemerkung. Für $Y = \mathbb{K}$ ist $\mathcal{C}^0(S; \mathbb{K}) = \mathcal{C}(S)$ eine kommutative Banach-Algebra mit dem Produkt $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **präkompakt**, falls es für jedes $\epsilon > 0$ eine Überdeckung von A mit endlich vielen ϵ -Kugeln $A \subset B_\epsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\epsilon(x_{n_\epsilon})$ mit $x_1, x_{n_\epsilon} \in X$ gibt.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **kompakt**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- A ist **überdeckungskompakt**: Für jede Überdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ mit $A_i \subseteq X$, gibt es eine endl. Teilmenge $J \subset I$ mit $A \subset \bigcup_{i \in J} A_i$.
- A ist **folgenkompakt**: Jede Folge in A besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A .
- $(A, d|_A)$ ist vollständig und A ist **präkompakt**.

Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

- A präkompakt $\implies A$ beschränkt,
- A kompakt $\implies A$ abgeschlossen und präkompakt,
- Falls X vollständig, dann A präkompakt $\iff \overline{A}$ kompakt.

Satz. Sei $A \subset \mathbb{K}^n$. Dann gilt:

- A präkompakt $\iff A$ beschränkt,
- A kompakt $\iff A$ abgeschlossen und beschränkt (Heine-Borel).

Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ kompakt. Dann gibt es zu $x \in X$ ein $a \in A$ mit $d(x, a) = \text{dist}(x, A)$.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen des \mathbb{R}^n . Dann heißt (K_n) eine **Ausschöpfung** von S , falls

- $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$,
- $\emptyset \neq K_i \subset K_{i+1} \subset S$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und
- für alle $x \in S$ gibt es ein $\delta > 0$ und $i \in \mathbb{N}$, sodass $B_\delta(x) \subset K_i$.

Bemerkung. Zu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und $S \bullet \mathbb{R}^n$ existiert eine Ausschöpfung.

Definition (Raum stetiger Funktionen auf Menge mit Ausschöpfung). Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ so, dass eine Ausschöpfung $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von S existiert und Y ein Banachraum. Dann bildet die Menge aller stetigen Funktionen

$$C^0(S; Y) := \{f : S \rightarrow Y \mid f \text{ ist stetig auf } S\}$$

einen K -Vektorraum und wird mit der Fréchet-Norm

$$\varrho(f) := \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \frac{\|f\|_{C^0(K_i)}}{1 + \|f\|_{C^0(K_i)}}$$

zu einem vollständigen metrischen Raum.

Bemerkung. • Die von dieser Metrik erzeugte Topologie ist unabhängig von der Wahl der Ausschöpfung.
 • Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so stimmt die Topologie mit der von $\|\cdot\|_{B(s)}$ überein.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Für $f : S \rightarrow Y$ heißt

$$\text{supp } f := \{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$$

Träger (engl. support) von f .

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Dann ist

$$C_0^0(S; Y) := \{f \in C^0(S; Y) \mid \text{supp } f \text{ ist kompakt in } S\}$$

die Menge der stetigen Fktn. mit kompaktem Träger von S nach Y .

Definition (Raum differenzierbarer Funktionen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge der differenzierbaren Funktionen von Ω nach Y

$$C^m(\overline{\Omega}, Y) := \{f : \Omega \rightarrow Y \mid f \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar in } \Omega \text{ und für } k \leq m \text{ und } s_1, \dots, s_k \in \{1, \dots, n\} \text{ ist } \partial_{s_1} \dots \partial_{s_k} f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar}\}$$

ein Vektorraum und mit folgender Norm ein Banachraum:

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$$

Bemerkung. In obiger Norm wird die Summe über alle k -fache partielle Ableitungen mit $k \leq m$ gebildet.

Satz. Sei X ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener echter Teilraum. Für $0 < \Theta < 1$ (falls X Hilbertraum, geht auch $\Theta = 1$) gibt es ein $x_\Theta \in X$ mit

$$\|x_\Theta\| = 1 \quad \text{und} \quad \Theta \leq \text{dist}(x_\Theta, Y) \leq 1.$$

Satz. Für jeden normierten Raum X gilt:

$$\overline{B_1(0)} \text{ kompakt} \iff \dim(X) < \infty.$$

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, Y ein Banachraum und $A \subset C^0(S, Y)$. Dann heißt A **gleichgradig stetig**, falls

$$\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \xrightarrow{|x-y| \rightarrow 0} 0.$$

Definition (Arzelà-Ascoli). Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, Y ein endlichdimensionaler Banachraum und $A \subset C^0(S, Y)$. Dann gilt

$$A \text{ präkompakt} \iff A \text{ ist beschränkt und gleichgradig stetig.}$$

Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Für $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, Y)$ sind dann äquivalent:

- Für alle $\xi \in C_0^\infty$ gilt $\int_\Omega (\xi \cdot g) \, dx = 0$.
- Für alle beschränkten $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ mit $\overline{E} \subset \Omega$ gilt $\int_E g \, dx = 0$.
- Es gilt $g \stackrel{\text{f.ü.}}{=} 0$ in Ω .

Satz. Sei $T : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen X und Y . Dann sind äquivalent:

- T ist stetig.
- T ist stetig in 0.
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$.
- $\exists C > 0 : \forall x \in X : \|Tx\| \leq C \cdot \|x\|$.

Definition. Seien X, Y Vektorräume mit einer Topologie. Dann ist

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

die Menge aller **linearen Operatoren** zwischen X und Y . Falls die Stetigkeit nicht nur topologisch, sondern bezüglich einer Norm gilt, so redet man von **beschränkten Operatoren**.

Satz. Seien $X \neq \{0\}, Y \neq \{0\}$ Banachräume und $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt: Falls T invertierbar ist und $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, dann ist auch S invertierbar.

Bemerkung. Die Menge aller invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(X, Y)$ ist somit eine offene Teilmenge.

Definition. Seien X und Y Banachräume über \mathbb{K} . Eine lineare Abbildung $T : X \rightarrow Y$ heißt **kompakter (linearer) Operator**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- $\overline{T(B_1(0))}$ ist kompakt.
- $T(B_1(0))$ ist präkompakt.
- Für alle beschränkten $M \subset X$ ist $T(M) \subset Y$ präkompakt.
- Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X besitzt $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge.

Definition. Sei X ein Vektorraum über \mathbb{K} . Dann ist $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ der **Dualraum** von X . Elemente von X' werden **lineare Funktionale** genannt.

Satz (Rieszscher Darstellungssatz). Ist X ein Hilbertraum, so ist

$$J : X \rightarrow X', \quad x \mapsto y \mapsto (y, x)_X$$

ein isometrischer konjugiert linearer Isomorphismus.

Satz (Lax-Milgram). Sei X ein Hilbertraum über \mathbb{K} und $a : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ sesquilinear. Es gebe Konstanten c_0 und C_0 mit $0 < c_0 \leq C_0 < \infty$, sodass für alle $x, y \in X$ gilt:

- $|a(x, y)| \leq C_0 \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ (Stetigkeit)
- $\text{Re } a(x, x) \geq c_0 \cdot \|x\|^2$ (Koerzitivität)

Dann existiert genau eine Abbildung $A : X \rightarrow X$ mit

$$a(y, x) = (y, Ax) \text{ für alle } x, y \in X.$$

Außerdem gilt: $A \in \mathcal{L}(X)$ ist ein invertierbarer Operator mit

$$\|A\| \leq C_0 \quad \text{und} \quad \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_0}.$$

Satz (Hahn-Banach). Sei X ein \mathbb{R} -VR und

- $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear, d. h. für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gelte $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ und $p(\alpha x) = \alpha p(x)$,

- $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ linear auf einem Unterraum $Y \subset X$ und
- $f(x) \leq p(x)$ für $x \in Y$.

Dann gibt es eine lineare Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = f(x) \text{ für } x \in Y \quad \text{und} \quad F(x) \leq p(x) \text{ für } x \in X.$$

Satz. (Hahn-Banach für lineare Funktionale) Sei X ein \mathbb{R} -VR, $Y \subset X$ ein Unterraum, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ linear und $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ linear, sodass $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in Y$. Dann existiert eine lineare Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = F|_Y$ und $F \leq p$.

Satz. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Unterraum. Dann gibt es zu $y \in Y'$ ein $x' \in X'$ mit $x'|_Y = y'$ und $\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}$.

Satz. Sei Y abgeschlossener Unterraum des normierten Raumes X und $x_0 \in X \setminus Y$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit $x'|_Y = 0$, $\|x'\|_{X'} = 1$, $\langle x', x_0 \rangle = \text{dist}(x_0, Y)$.

Bemerkung. Dann gibt es auch ein $x' \in X'$ mit $x'|_Y = 0$,

$$\|x'\|_{X'} = (\text{dist}(x_0, Y))^{-1} \quad \text{und} \quad \langle x', x_0 \rangle = 1.$$

Satz. Seien X normierter Raum und $x_0 \in X$. Dann gilt

- Ist $x_0 \neq 0$, so gibt es $x'_0 \in X'$ mit $\|x'_0\|_{X'} = 1$ und $\langle x'_0, x_0 \rangle_{X' \times X} = \|x_0\|_X$.
- Ist $\langle x', x_0 \rangle_{X' \times X} = 0$ für alle $x' \in X'$, so ist $x_0 = 0$.
- Durch $Tx' = \langle x', x_0 \rangle_{X' \times X}$ für $x' \in X'$ ist ein $T \in \mathcal{L}(X', \mathbb{K}) = X''$, dem Bidualraum, definiert mit $\|T\| = \|x_0\|_X$.

Satz (Baire'scher Kategoriensatz). Es sei $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum und $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ mit abgeschlossenen Mengen $A_k \subset X$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\text{int}(A_{k_0}) \neq \emptyset$.

Korollar. Jede Basis eines ∞ -dimensionalen Banachraumes ist überabzählbar.

Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Es sei X ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und Y ein normierter Raum. Gegeben sei eine Menge von Funktionen $F \subset C^0(X, Y)$ mit $\forall x \in X : \sup_{f \in F} \|f(x)\|_Y < \infty$. Dann gibt es ein $x_0 \in X$ und ein

$$\epsilon > 0, \text{ sodass } \sup_{B_\epsilon(x_0)} \sup_{f \in F} \|f(x)\|_Y < \infty.$$

Satz (Banach-Steinhaus). Es sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum, $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\forall x \in X : \sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty$.

Dann ist \mathcal{T} eine beschränkte Menge in $\mathcal{L}(X, Y)$, d. h.

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty.$$

Definition. Seien X und Y topologische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ **offen**, falls für alle offenen $U \Subset X$ das Bild $f(U) \Subset Y$ offen ist.

Bemerkung. Ist f bijektiv, so ist f genau dann offen, wenn f^{-1} stetig ist. Sind X, Y normierte Räume und ist $T : X \rightarrow Y$ linear, so gilt: T ist offen $\iff \exists \delta > 0 : B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$.

Satz (von der offenen Abbildung). Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist T genau dann surjektiv, wenn T offen ist.

Satz (von der inversen Abbildung). Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, so ist T^{-1} stetig, also $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Satz (vom abgeschlossenen Graphen). Seien X, Y Banachräume und $T : X \rightarrow Y$ linear. Dann ist $\text{Graph}(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$ genau dann abgeschlossen, wenn T stetig ist. Dabei ist $\text{Graph}(T) \subset X \times Y$ mit der **Graphennorm** $\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Definition. Sei X ein Banachraum.

- Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X **konvergiert schwach** gegen $x \in X$ (notiert $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$), falls für alle $x' \in X'$ gilt:

$$\langle x', x_k \rangle_{X' \times X} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle x', x \rangle_{X' \times X}$$

- Eine Folge $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X' **konvergiert schwach*** gegen $x' \in X'$ (notiert $x'_k \xrightarrow[k*]{k \rightarrow \infty} x'$), falls für alle $x \in X$ gilt:

$$\langle x'_k, x \rangle_{X' \times X} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle x', x \rangle_{X' \times X}$$

- Analog sind **schwache** und **schwache* Cauchyfolgen** definiert.
- Eine Menge $M \subset X$ (bzw. $M \subset X'$) heißt **schwach folgenkompakt** bzw. **schwach* folgenkompakt**, falls jede Folge in der Menge M eine schwach (bzw. schwach*) konvergente Teilfolge besitzt deren Grenzwert wieder in M liegt.

Bemerkung. Der schwache bzw. schwache* Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt. Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

Satz. Es gilt für $x, x_k \in X$, $x', x'_k \in X'$:

$$\begin{aligned} x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \text{ in } X &\iff J_x x_k \xrightarrow[k*]{k \rightarrow \infty} J_x x \text{ in } X'' \\ x'_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x' \text{ in } X' &\implies x'_k \xrightarrow[k*]{k \rightarrow \infty} x' \text{ in } X' \end{aligned}$$

Lemma. • Aus $x'_k \xrightarrow[k*]{k \rightarrow \infty} x'$ in X' folgt $\|x'\|_{X'} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x'_k\|_{X'}$,
aus $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ in X folgt $\|x\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_X$.

- Schwach bzw. schwach* konvergente Folgen sind beschränkt.

- Aus $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ in X und $x'_k \xrightarrow[k*]{k \rightarrow \infty} x'$ in X' folgt

$$\langle x'_k, x_k \rangle_{X' \times X} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle x', x \rangle_{X' \times X}. \text{ Dasselbe folgt mit } x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \text{ in } X \text{ und } x'_k \xrightarrow[k*]{k \rightarrow \infty} x' \text{ in } X'.$$

Achtung. In der letzten Behauptung müssen wir voraussetzen, dass mindestens eine Folge stark konvergiert. Für beidesmal schwache/schwache* Konvergenz ist die Aussage i. A. falsch.

Satz (Banach-Alaoglu). Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist die abgeschl. Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X'$ schwach* folgenkompakt.

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Dann ist $L^1(\Omega)$ separabel (Approximation durch Treppenfunktionen und der Satz besagt: Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $L^\infty(\Omega)$ beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ und ein $f \in L^\infty(\Omega)$, sodass

$$\int_\Omega f_{k_l} x \cdot \bar{g} \, d \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \int_\Omega f \cdot \bar{g} \, dx \quad \text{für alle } g \in L^1(\Omega)$$

Bemerkung. Schwach*-Konvergenz impliziert eine sogenannte Schwach*-Topologie in dem Sinne, dass man sagt, eine Folge $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X' ist bzgl. dieser Topologie konvergent, wenn sie punktweise für alle $x \in X$ konvergiert.

Definition. Sei X ein Banachraum und J_X die Isometrie bzgl. des Bidualraumes. Dann heißt X **reflexiv**, falls J_X surjektiv ist.

Lemma. • Ist X reflexiv, so stimmen schwache* und schwache Konvergenz in X' überein.

- Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.
- Ist $T : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus, so gilt:

$$X \text{ reflexiv} \iff Y \text{ reflexiv}$$

- Es gilt: $X \text{ reflexiv} \iff X' \text{ reflexiv}$.

Lemma. Für jeden Banachraum X gilt: X' separabel $\implies X$ separabel.

Bemerkung. Die Umkehrung gilt i. A. nicht! Gegenbeispiel: $X = L^1$.

Satz (Eberlein-Shmulyan). Sei X reflexiver Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.

Beispiel. • Hilberträume X sind reflexiv (folgt direkt aus dem Riesz'schen Darstellungssatz; im Reellen $J_X = (R_X R_{X'})^{-1}$, wobei $R_X : X \rightarrow X'$ der zugehörige Isomorphismus). Daher: Ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X , so existiert eine Teilfolge $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ und $x \in X$, sodass

$$(y|x_{k_l})_X \xrightarrow{l \rightarrow \infty} (y|x)_X$$

für alle $y \in X$.

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.
- L^1 und L^∞ sind genau dann nicht reflexiv, wenn sie unendlich-dimensional sind.

Bemerkung. Analog zur schwach*-Topologie kann man auch eine schwache Topologie einführen.

Satz (Trennungssatz). Seien X ein normierter Raum, $M \subset X$ nicht leer, abgeschlossen, konvex und $x_0 \in X \setminus M$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{Re} \langle x', x_0 \rangle_{X' \times X} > \alpha \quad \text{und} \quad \text{Re} \langle x', x \rangle_{X' \times X} \leq \alpha \quad \text{für } x \in M.$$

Satz. Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M schwach folgenabgeschlossen, d. h. sind $x_k, x \in X$ für $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : x_k \in M, x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \text{ in } X \implies x \in M$$

Lemma (Mazur). Sei X normierter Raum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Dann gilt $x \in \text{conv}\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Satz. Sei X ein reflexiver Banachraum und $M \subset X$ nicht leer, konvex, abgeschlossen. Dann gibt es zu \tilde{x} ein $x \in M$ mit $\|x - \tilde{x}\| = \text{dist}(\tilde{x}, M)$.

Beispiel. • Sei $M = W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann ist die eindeutige Lösbarkeit des zugehörigen (schwachen) Dirichlet-Problems gesichert.

- Sei $M = \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \int_\Omega u \, dx = 0\}$ und gelte $\int_\Omega f \, dx = 0$. Dann sichern Punkt 3, 4 die eindeutige Lösbarkeit des zugehörigen Neumann-Problems.

- Seien $u_0, \psi_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ gegeben und $u_0(x) \geq \phi_0(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Definiere $M = \{v \in W^{1,2}(\Omega) \mid v = u_0 \text{ auf } \partial\Omega, v \geq \psi \text{ in } \Omega\}$. Dann sichern die Punkte 1 bzw. 2 und 4 die eindeutige Existenz einer Lösung dieses Hindernis-Problems.

Lemma. Ist X ∞ -dimensionaler Raum, so sind äquivalent:

- X ist separabel
- $\exists X_n \subset X$ endlich-dim. Unterräume : $\forall n \in \mathbb{N} : X_n \subset X_{n+1}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ist dicht in X .
- $\exists X_n \subset X$ endlich-dim. Unterräume : $E_n \cap E_m = \{0\}$ für $n \neq m$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_0 \oplus \dots \oplus E_n)$ ist dicht in X .
- \exists linear unabhängige Menge $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $\text{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in X .

Definition. Sei X normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Schauder-Basis** von X , falls:

$$\forall x \in X : \exists \text{ eindeutige bestimmte } \alpha_k \in \mathbb{K} : \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ in } X.$$

S ist also eindeutig bestimmt durch die „unendliche Matrix“ $(a_{k,l})_{k,l \in \mathbb{N}}$.

Definition. Sei X ein Prähilbertraum. Eine Folge $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $N \subset \mathbb{N}$ in X heißt **Orthogonalsystem**, falls $(e_k | e_l) = 0$ für $k \neq l$ und $e_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und **Orthonormalsystem**, falls zusätzlich $\|e_k\| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Lemma (Besselsche Ungleichung). Sei $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein (endliches) Orthonormalsystem des Prähilbertraumes X . Dann gilt für alle $x \in X$: $0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n |(x|e_k)|^2 = \|x - \sum_{k=0}^n \infty(x|e_k)e_k\|^2 = \text{dist}(x, \text{span}\{e_0, \dots, e_n\})^2$.

Satz. Sei $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem des Prä-Hilbertraumes X . Dann sind äquivalent:

- $\text{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in X
- $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Schauder-Basis von X .
- Für alle $x \in X$ $x = \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_k)e_k$ (Darstellung)
- Für alle $x, y \in X$ gilt $(x|y) = \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_k)\overline{(y|e_k)}$ (Parseval-Identität)
- Für alle $x \in X$ gilt $\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2$

Definition. Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, nennen wir die $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ **Orthonormalbasis**.

Satz. Jeder ∞ -dim. Hilbertraum über \mathbb{K} ist genau dann X separabel, wenn X eine Orthonormalbasis besitzt.

Bemerkung. In diesem Fall ist X isometrisch isomorph zu $\uparrow^2(\mathbb{K})$ (Übergang zu Koeffizienten bzgl. Basis)

Beispiel. Betrachte $L^2(]-\pi, \pi[, \mathbb{K})$. Dann ist durch

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \text{ für } k \in \mathbb{Z} \text{ eine Orthonormalbasis von}$$

$$L^2(]-\pi, \pi[, \mathbb{C}) \text{ gegeben. Weiter ist durch } \tilde{e}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\tilde{e}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(kx) \text{ für } k > 0 \text{ und } \tilde{e}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(kx) \text{ für } k < 0$$

eine ONB von $L^2(]-\pi, \pi[, \mathbb{R})$ gegeben.

Lemma. Zu $f \in L^2(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$ sei $P_n f = \sum_{|k| \leq n} (f|e_k)_{L^2} e_k$ mit e_k wie im Beispiel die **Fourier-Summe** von f . Ist f Lipschitz-stetig, gilt $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n f(x)$.

Die Fourier-Summe erlaubt die explizite Approximation von f im Unterraum $X = \text{span}\{e_k \mid |k| \leq n\}$. Allgemein führt man ein:

Definition. Sei Y Unterraum des Vektorraums X . Eine lineare Abbildung $P : X \rightarrow X$ heißt **(lineare) Projektion auf Y** , falls $P^2 = P$ und $\text{Bild}(P) = Y$.

Lemma. • P ist Projektion auf $Y \iff P : X \rightarrow Y$ und $P = \text{Id}$ auf Y .

- $P : X \rightarrow X$ ist Projektion $\implies X = \ker(P) \oplus \text{im}(P)$
- $P : X \rightarrow X$ ist Projektion $\implies \text{Id} - P$ ist Projektion und $\ker(\text{Id} - P) = \text{im}(P)$, $\text{im}(\text{Id} - P) = \ker(P)$.
- Zu jedem Unterraum Y von X gibt es eine Projektion auf Y .

Lemma. Für $P \in \mathcal{P}(X)$ gilt:

- $\ker(P)$ und $\text{im}(P)$ sind abgeschlossen
- $\|P\| \geq 1$ oder $\|P\| = 0$

Satz (vom abgeschlossenen Komplement). Sei X ein Banachraum. Gegeben sei ein abgeschlossener Unterraum Y sowie ein Unterraum Z mit $X = Y \oplus Z$. Dann gilt:

\exists stetige Projektion P auf Y mit $Z = \ker(P) : \iff Z$ ist abgeschlossen

Bemerkung. Ist Y abgeschlossener Unterraum eines Banachraumes X , so besitzt Y ein abgeschlossenes Komplement genau dann, wenn es eine stetige Projektion auf Y gibt.

Zwei wichtige Klassen von Unterräumen, die ein abgeschlossenes Komplement besitzen, sind endlich-dimensionale Unterräume beliebiger Banachräume sowie abgeschlossene Unterräume von Hilberträumen.