Zusammenfassung Gew. Diff'gleichungen

Bsp. Gesucht: Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\forall t \in \mathbb{R} : \dot{y}(t) = y(t)$

Lsg. $y(t) = c \cdot e^t$ für $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Wenn man als Anfangsbedingung $y(0) = 1$ fordert, erhält man eine eindeutige Lösung ($c = 1$).

Bsp. Gesucht: Lösung von $(\dot{y}(t))^2 + (y(t))^2 = a$ für $a \in \mathbb{R}$

Lsg. Anzahl der Lösungen hängt von a ab:

- Falls $a < 0$: keine reelle Lsg
- Falls $a = 0$: Einzige Lsg $y(t) = 0$
- Falls $a > 0$: Lsgn: $y(t) = \sqrt{a}\cos(t + \phi)$ für $\phi \in \mathbb{R}$ bel., $y(t) = \pm\sqrt{a}$

Bsp. Sei $p(t)$ ist Populationsgröße zur Zeit t. Angenommen, $\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = a$ ist konstant, also $\dot{p}(t) = p(t)$. Sei $p(t_0) = p_0$.

Lsg. $p(t) = p_0 e^{(t-t_0)a}$

Bsp (Verhulst-Modell)**.** Gesucht: Lösung zu

$$\dot{p}(t) = a_0 p(t) - a_1 (p(t))^2$$

Lsg. $p(t) = \dfrac{a_0}{a_1(1 - ce^{-a_0 t})}$

Bsp.

Unterscheidung zwischen gewöhnliche DGL und partielle DGLn
Beispiele für gewöhnliche DGL $\dot{y}(t) = hy(t)$ $(\dot{y}(t))^2 + (y(t))^2 = a$
Beispiele für partielle DGLn:
$y_t = \alpha y_{xx} + y$, wobei $y_t(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} y(t, x)$, $y_{xx}(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t, x)$
Unterscheidung zwischen DGLn 1. Ordnung, DGLn 2. Ordnung und DGLn k-ter Ordnung
Beispiel für DGL 1. Ordnung: $\dot{y} = \alpha y(t)$
Beispiel für DGL 2. Ordnung: $\ddot{\phi}(t) = -\frac{\delta}{e}\sin(\phi(t))$
Beispiel für DGL k-ter Ordnung: $F(t, y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(k)}(t)) = 0$
Unterscheidung zischen expliziten und impliziten DGLn
Beispiel für explizite DGLn: $\dot{y}(t) = \alpha y(t)$ $\ddot{\phi}(t) = -\frac{g}{e}\sin(\phi(t))$
$y^{(k)}(t) = f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k-1)})$
Beispiele für implizite DGLn: $(\dot{y}(t))^2 + (y(t))^2 = a$
$F(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k)}(t))$
Oder (Gleichungen gehören zusammen) $\dot{y}_2(t) + y_1(t) = f_1(t)$
$y_2(t) = f_2(t)$ (differentiell-algebraische Gleichung)
Unterscheidung zwischen Skalaren DGLn und n-dimensionalen DGLn (Systeme von DGLn)
Beispiel für Skalare DGL: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist.
Beispiel für ein System von DGLn: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, wobei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gesucht
Unterscheidung zwischen linearen und nicht linearen DGLn
Beispiele für lineare DGLn: $\dot{y}(t) = \alpha y(t)$ $\dot{y}(t) = Ay(t) + g(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$a_k(t)y^{(k)}(t) + a_{(k-1)}(t)y^{k-1}(t) + ... + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = 0$
Beispiele für nicht lineare DGLn: $\ddot{\phi}(t) = -\frac{g}{e}\sin(\phi(t))$
$(\dot{y}(t))^2 + (y(t))^2 = a$
Unterscheidung zwischen autonomen und nicht autonomen DGLn
Beispiele für autonome DGLn:

- $\dot{y} = \alpha y(t)$
- $(\dot{y}(t))^2 + (y(t))^2 = a$
- $\dot{y}(t) = f(y(t))$
- $F(y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(k)}(t)) = 0$

Beispiele für nicht autonome DGLn:

- $\dot{y} = \alpha y(t) + e^t$
- $(\dot{y}(t))^2 + (y(t))^2 0 = a + t^2$
- $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$
- $F(t, y(t), \dot{y})(t), ..., y^{(k)}(t)) = 0$

Unterschied: Autonome DGLn hängen nicht explizit von der Zeit t ab

Def. Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ und $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Das System von Gleichungen

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

heißt **Anfangswertproblem** (AWP).

Notation. Sei im Folgenden I stets ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Def.
- Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von $\dot{y} = f(t, y)$, falls für alle $t \in I$ gilt: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$.
- Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \mathbb{R}^n}_{k \text{ mal}}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. Eine k-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von $y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k-1)})$, falls für alle $t \in I$ gilt:
$$y^{(k)} = f(t, y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(k-1)}(t))$$

Satz.
- Ist $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k-1)})$ (1.2), dann ist
$$(y_1, ..., y_k) : I \to \mathbb{R}^{kn}$$
$$t \mapsto (y_1(t), ..., y_k(t)) = (y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(k-1)}(t))$$
eine Lösung von System (1.3)
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ &\vdots \\ \dot{y}_{k-1} &= y_k \\ \dot{y}_k &= f(t, y_1, y_2, ..., y_{k-1}, y_k) \end{aligned}$$
- Ist $(y_1, ..., y_k) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.3), dann ist $y = y_1 : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2).

Satz.
- Ist $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von AWP (1.1), dann ist
$$(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}^{n+1}$$
$$t \mapsto (y_1(t), y_2(t)) = (t, y(t))$$
eine Lösung des AWP (1.4)
$$\dot{y}_1(t) = 1, y_1(t_0) = t_0 \dot{y}_2(t) = f(y_1(t), y_2(t)), \qquad y_2(t_0) = y_0$$
- Ist $(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung von (1.4), dann ist $y = y_2 : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.1).