

# Zusammenfassung Topologie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Def.** Ein **metrischer Raum**  $(X, d)$  besteht aus einer Menge  $X$  und einer Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , sodass f.a.  $x, y, z \in X$  gilt:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  ( $\Delta$ -Ungleichung)

**Def.** Für einen metrischen Raum  $(X, d)$  und eine Teilmenge  $A \subset X$  ist  $(A, d|_A)$  ein metrischer Raum und  $d|_A$  heißt **induzierte Metrik**.

**Def.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig**, falls für alle  $x \in X$  gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

**Def.** Die **offene Kugel** von Radius  $\epsilon$  um  $x \in X$  ist

$$B_\epsilon(x) := \{p \in X \mid d(p, x) < \epsilon\}.$$

**Def.** Eine Teilmenge  $U \subset X$  eines metrischen Raumes heißt **offen**, falls für alle  $u \in U$  ein  $\epsilon > 0$  existiert mit  $B_\epsilon(u) \subset U$ .

**Proposition.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist genau dann offen, wenn für alle offenen Teilmengen  $U \subset X$  das Urbild  $f^{-1}(U) \subset X$  offen ist.

**Def.** Ein **topologischer Raum**  $(X, \mathcal{T})$  besteht aus einer Menge  $X$  und einer Menge  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  mit den Eigenschaften

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\forall U, V \in \mathcal{T} : U \cup V \in \mathcal{T}$
- $\forall S \subset \mathcal{T} : \bigcap_{U \in S} U \in \mathcal{T}$

Die Elemente von  $\mathcal{T}$  werden **offene Teilmengen** von  $X$  genannt. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A$  offen ist.

**Notation.** Seien im Folgenden  $X$  und  $Y$  topologische Räume.

**Bsp.** Die **diskrete Topologie** auf einer Menge  $X$  ist  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ .

**Bsp.** Die **Klumpentopologie** auf einer Menge  $X$  ist  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ .

**Def.** Die Menge der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes heißt von der Metrik **induzierte Topologie**.

**Def.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann heißt

$$\mathcal{T}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

**Unterraumtopologie** oder von  $\mathcal{T}$  **induzierte Topologie**.

**Def.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik auf  $X$  existiert, sodass die von der Metrik induzierte Topologie mit  $\mathcal{T}$  übereinstimmt.

**Def.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **Hausdorffsch**, falls gilt:

$$\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset.$$

**Proposition.** Metrisierbare topologische Räume sind Hausdorffsch.

**Def.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  heißt **stetig**, falls gilt

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

*Bemerkung.* Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $A \subset X$ , so ist auch  $f|_A : A \rightarrow Y$  stetig.

**Def.** Falls  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  stetig sind, so heißt  $f$  ein **Homöomorphismus**.

**Def.** Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  heißen **homöomorph** (notiert  $X \cong Y$ ), wenn ein Homöomorphismus zwischen  $X$  und  $Y$  existiert.

**Satz.** Für  $n \neq m$  sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  nicht homöomorph.

**Def.** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  Topologien auf  $X$ . Dann sagen wir

$$\mathcal{T} \text{ ist } \mathbf{grö\ddot{b}er} \text{ als } \mathcal{T}' : \iff \mathcal{T}' \text{ ist } \mathbf{feiner} \text{ als } \mathcal{T} : \iff \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'.$$

**Def.** Eine Menge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  offener Teilmengen eines topologischen Raumes heißt

- **Basis** der Topologie, falls jede offene Menge  $U \in \mathcal{T}$  Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist.
- **Subbasis** der Topologie, falls jede offene Menge  $U \in \mathcal{T}$  Vereinigung von Mengen ist, von denen jede Schnitt endlich vieler Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist.

**Bspe.** • Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist  $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon > 0\}$  eine Basis der induz. Topologie auf  $X$ .  
•  $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, \epsilon \in \mathbb{Q}_+\}$  ist eine abz. Basis von  $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ .

**Proposition.** Jede Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  ist Subbasis von genau einer Topologie  $\mathcal{T}$  von  $X$ .

**Def.** Die Topologie heißt die von  $\mathcal{B}$  **erzeugte Topologie**.

**Def.** Sind  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume, so ist auch  $(X \times Y, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$  ein topologischer Raum mit der **Produkttopologie**  $(\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$ , die von

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times V \mid V \in \mathcal{T}_Y\} \text{ erzeugt wird.}$$

**Proposition.** • Die Projektionen  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  sind stetig bzgl. der Produkttopologie.

- Ist  $\mathcal{T}$  eine echt gröbere Topologie auf  $X \times Y$  als die Produkttopologie, so sind die Projektionen  $\pi_X$  und  $\pi_Y$  nicht beide stetig.

**Def.** Seien  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume. Dann erzeugt  $\mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y$  die **Summentopologie** auf  $X \cup Y$ .

*Bemerkung.* Sie ist die feinste Topologie auf  $X \cup Y$ , sodass die beiden Inklusionen  $i_X : X \hookrightarrow X \cup Y$  und  $i_Y : Y \hookrightarrow X \cup Y$  stetig sind.

**Proposition.** Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume.

- Falls  $X \cap Y = \emptyset$ , so ist eine Abbildung  $f : X \cup Y \rightarrow Z$  genau dann stetig, falls die beiden Kompositionen  $f \circ i_X : X \rightarrow Z$  und  $f \circ i_Y : Y \rightarrow Z$  stetig sind.

- Eine Abb.  $g : Z \rightarrow X \cup Y$  ist genau dann stetig, wenn die beiden Kompositionen  $\pi_X \circ g : Z \rightarrow X$  und  $\pi_Y \circ g : Z \rightarrow Y$  stetig sind.

**Def.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann ist das **Innere** von  $A$  (notiert  $\text{int}(A)$ ) die Vereinigung aller in  $A$  enthaltenen offenen Mengen.

*Bemerkung.* Als Vereinigung offener Mengen ist das Innere offen.

**Def.** Der **Abschluss**  $\bar{A}$  einer Menge  $A \subset X$  ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen von  $X$ , die  $A$  enthalten.

*Bemerkung.* Es gilt  $\bar{A} = X \setminus (\text{int}(X \setminus A))$ .

**Def.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x \in X$  und  $V \subset X$ . Wir nennen  $V$  eine **Umgebung** von  $x$ , falls es eine offene Teilmenge  $U \subset X$  gibt mit  $x \in U$  und  $U \subset V$ .

**Proposition.** Ein Punkt  $x \in X$  liegt genau dann in  $\bar{A}$ , falls jede Umgebung von  $x$  einen Punkt aus  $A$  enthält.

**Def.** Der **Rand** einer Menge  $A \subset X$  ist  $\partial A := \bar{A} \setminus \text{int}(A)$ .

**Proposition.** Ein Punkt  $x \in X$  liegt genau dann in  $\partial X$ , wenn jede Umgebung von  $x$  sowohl einen Punkt aus  $A$  wie einen Punkt aus  $X \setminus A$  enthält.

**Def.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegweise zusammenhängend**, falls es für je zwei Punkte  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$  gibt.

**Bspe.** •  $\mathbb{R}^n$  ist wegzusammenhängend

- $(\{p, q\}, \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\})$  ist wegzusammenhängend!
- $]-\infty, 0[ \cup ]0, \infty[ \subset \mathbb{R}$  ist nicht wegzusammenhängend.

**Def.** Die Äquivalenzklassen von

$$x \sim y : \iff x, y \text{ lassen sich durch einen Weg verbinden.}$$

heißen **Wegzusammenhangskomponenten**.

**Proposition.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $X$  wegzusammenhängend. Dann ist auch  $f(X)$  bzgl. der Unterraumtopologie wegzusammenhängend.

**Def.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **zusammenhängend**, falls  $X$  nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

**Bspe.**  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  und  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind nicht zusammenhängend.

**Proposition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Es sind äquivalent:

- $X$  ist zusammenhängend.
- Für jede offene und abgeschlossene Menge  $A \subset X$  gilt:  $A \in \{X, \emptyset\}$ .
- Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  in den diskreten Raum mit zwei Elementen ist konstant.

**Proposition.** • Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $X$  zusammenhängend, dann ist auch  $f(X)$  zusammenhängend.

- Sind  $A, B$  zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes  $X$  und gilt  $A \cap B \neq \emptyset$ , dann ist auch  $A \cup B$  zusammenhängend.

**Korollar.** Folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf  $X$ :

$$x \sim y \iff x \text{ und } y \text{ liegen beide in einem zusammenhängenden Unterraum von } X.$$

**Def.** Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen **Komponenten**.

**Bsp.** Die Komponenten von  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  sind genau die Ein-Punkt-Mengen. Trotzdem ist  $\mathbb{Q}$  nicht diskret!

**Proposition.** Die Menge  $[0, 1]$  ist zusammenhängend.

**Korollar.** Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.

**Proposition (ZWS).** Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Gilt  $f(0) < 0$  und  $f(1) > 0$ , so existiert ein  $t \in ]0, 1[$  mit  $f(t) = 0$ .

**Def.** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ . Die Folge  $(x_n)$  **konvergiert gegen**  $x \in X$ , falls für jede Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit  $\forall n \geq N : x_n \in U$ .

**Notation.**  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

**Achtung.** Das „ $\lim$ “ ist nicht wörtlich zu verstehen!

**Def.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abb. zw. topol. Räumen  $X, Y$ . Dann heißt  $f$

- **stetig in**  $x \in X$ , falls für jede Umgebung  $V \subset Y$  von  $f(x)$  das Urbild  $f^{-1}(V) \subset X$  eine Umgebung von  $x$  ist.
- **folgenstetig in**  $x \in X$ , falls für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  die Bildfolge  $(f(x_n))$  in  $Y$  gegen  $f(x)$  konvergiert.

**Proposition.** Ist  $f$  stetig in  $x$ , so ist  $f$  auch folgenstetig in  $x$ .

**Def.** Eine **Umgebungsbasis** von  $x \in X$  ist eine Menge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  bestehend aus Umgebungen von  $x$ , sodass jede Umgebung von  $x$  eine der Umgebungen in  $\mathcal{B}$  enthält.

**Def.** Der Raum  $X$  erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, falls jeder Punkt  $x \in X$  eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

*Bemerkung.* Jeder metrische Raum  $X$  erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, da für jeden Punkt  $x \in X$  die Menge  $\mathcal{B}_x := \{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$  eine abzählbare Umgebungsbasis ist.

**Proposition.** Sei  $x \in X$  ein Punkt mit abzählbarer Umgebungsbasis. Dann ist jede in  $x$  folgenstetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  auch stetig in  $x$ .

**Def.** Eine **gerichtete Menge** ist eine Menge  $D$  mit einer partiellen Ordnung  $(\leq) \subset D \times D$ , sodass es für  $\alpha, \beta \in D$  immer ein  $\gamma \in D$  mit  $\gamma \geq \alpha$  und  $\gamma \geq \beta$  gibt.

**Def.** Ein **Netz** in  $X$  ist eine Abbildung  $\phi : D \rightarrow X$ , wobei  $D$  eine gerichtete Menge ist.

**Def.** Sei  $x \in X$  und  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  ein Netz in  $X$ . Das Netz  $(x_\alpha)$  **konvergiert** gegen  $x$ , falls es für jede Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  ein  $\beta \in D$  gibt mit  $x_\alpha \in U$  für alle  $\alpha \geq \beta$ .

**Notation.**  $\lim_{\alpha \in D} x_\alpha = x$

**Def.** Eine Abb.  $f : X \rightarrow Y$  heißt **netzstetig** in  $x \in X$ , falls für jedes Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  in  $X$  mit  $\lim_{\alpha \in D} x_\alpha = x$  das Bildnetz  $(f(x_\alpha))_{\alpha \in D}$  gegen  $f(x)$  konvergiert.

**Proposition.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig in  $x \in X$ , wenn sie netzstetig in  $x$  ist.

**Proposition.** Ist  $A \subset X$  eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so besteht  $\bar{A}$  genau aus den Limiten von Netzen in  $A$ , die in  $X$  konvergieren.

**Def.** Ein **Häufungspunkt** eines Netzes  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  in  $X$  ist ein Punkt  $x \in X$ , sodass für jede Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  das Netz **häufig** in  $U$  ist, d. h. für alle  $\alpha \in D$  existiert ein  $\beta \geq \alpha$  mit  $x_\beta \in U$ .

**Def.** Sind  $D$  und  $E$  gerichtete Mengen, so nennen wir eine Abbildung  $h : E \rightarrow D$  **final**, falls für alle  $\delta \in D$  ein  $\eta \in E$  existiert mit  $h(\gamma) \geq \delta$  für alle  $\gamma \geq \eta$ .

**Def.** Ein **Unternetz** eines Netzes  $\phi : D \rightarrow X$  ist eine Komposition  $\phi \circ h : E \rightarrow X$  wobei  $h : E \rightarrow D$  eine finale Funktion ist. Wir schreiben auch  $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in E}$

**Proposition.** Sei  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  ein Netz in  $X$ . Ein Punkt  $x \in X$  ist genau dann Häufungspunkt von  $(x_\alpha)$ , falls ein Unternetz von  $(x_\alpha)$  gegen  $x$  konvergiert.

**Def.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  heißt **Cauchy-Folge**, falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit  $d(x_n, x_m) < \epsilon$  für alle  $n, m \geq N$ .

**Def.** Der metrische Raum  $(X, d)$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in  $X$  konvergiert.

**Achtung.** Vollständigkeit ist keine Homöomorphieinvariante!

**Def.** Sei  $X$  eine Menge. Dann ist die Menge

$$\mathcal{B}(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

der **beschränkten Fktn.**  $X \rightarrow \mathbb{R}$  ein metrischer Raum mit

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

**Proposition.** Dieser Raum  $(\mathcal{B}(X), d)$  ist vollständig.

**Def.** Sie  $(X, d)$  und  $(X', d')$  metrische Räume, so heißt  $f : X \rightarrow X'$

- eine **isometrische Einbettung**, falls für alle  $x, y \in X$  gilt:

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

- eine **Isometrie**, falls  $f$  zusätzlich bijektiv ist. In diesem Fall ist auch  $f^{-1}$  eine Isometrie und  $f$  ein Homöomorphismus.

**Proposition.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann gibt es eine isometrische Einbettung von  $X$  in einen vollständigen metrischen Raum.

**Def.** Eine **Vervollständigung** eines metrischen Raumes  $X$  ist ein vollständiger metrischer Raum  $Y$  zusammen mit einer isometrischen Einbettung  $f : X \rightarrow Y$ , sodass  $f(X)$  **dicht** in  $Y$  liegt, d. h.  $\overline{f(X)} = Y$ .

**Satz.** Ist  $X$  ein metrischer Raum, so existiert eine Vervollständigung  $X \hookrightarrow Y$ .

**Proposition.** Es sei  $X$  ein metrischer Raum und es seien

$$f_1 : X \rightarrow Y_1, \quad f_2 : X \rightarrow Y_2$$

Vervollständigungen von  $X$ . Dann existiert genau eine Isometrie  $\phi_{21} : Y_1 \rightarrow Y_2$  mit  $\phi_{21}|_{f_1(X)} = f_2 \circ f_1^{-1}$ .

**Bsp.** Die kanonische Inklusion  $C_c^\infty(U) \hookrightarrow L^p(U)$  ist eine Vervollständigung von  $(C_c^\infty, d_p)$  mit

$$d_p(f, g) := \left( \int_U |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

**Def.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine **offene Überdeckung** von  $X$  ist eine Familie  $(U_i)_{i \in I}$  offener Teilmengen von  $X$  mit  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .

**Def.** Der Raum  $X$  heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt, also eine endliche Teilmenge  $I_0 \subset I$  mit  $\bigcup_{i \in I_0} U_i = X$ .

**Def.** Eine Familie  $\mathcal{C}$  von Teilmengen von  $X$  habe die **endliche Schnitteigenschaft**, falls der Schnitt je endlich vieler Mengen aus  $\mathcal{C}$  nichtleer ist.

**Proposition.** Ein Raum  $X$  ist genau dann kompakt, falls jede Familie  $(C_i)_{i \in I}$  von abgeschlossenen Teilmengen von  $X$ , die die endliche Schnitteigenschaft besitzt, einen nichtleeren Schnitt hat.

*Bemerkung.* Kompaktheit ist eine Homöomorphieinvariante.

**Proposition.** Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist abgeschlossen.

**Proposition.** Ist  $X$  kompakt und  $f : X \rightarrow Y$  stetig, so ist auch  $f(X) \subset Y$  kompakt.

**Proposition.** Jeder abgeschlossene Teilraum eines kompakten Raumes ist kompakt.

**Proposition.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum. Dann ist  $f$  ein Homöomorphismus.

**Proposition.** Das Einheitsintervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist kompakt.

**Proposition.** Seien  $X, Y$  kompakt. Dann ist auch  $(X \times Y)$  kompakt.

**Satz (Heine-Borel).** Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Satz.** Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie kompakter Räume. Dann ist das topologische Produkt  $\prod_{i \in I} X_i$  ebenfalls kompakt.

**Def.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  eine konvergente Teilfolge besitzt.

**Proposition.** Es sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann ist  $X$  genau dann kompakt, wenn  $X$  folgenkompakt ist.

**Proposition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- $X$  ist kompakt.
- $X$  ist **netzkompakt**, d. h. jedes (nichtleere) Netz  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  in  $X$  besitzt ein konvergentes Unternetz.

**Def.** Sei  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  ein Netz in einem topologischen Raum  $X$  und  $A \subset X$ . Dann ist  $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$  **schließlich** in  $A$ , falls es ein  $\beta \in D$  gibt mit  $x_\alpha \in A$  für alle  $\alpha \geq \beta$ .