

# Zusammenfassung Topologie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Def.** Ein **metrischer Raum**  $(X, d)$  besteht aus einer Menge  $X$  und einer Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , sodass f.a.  $x, y, z \in X$  gilt:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  ( $\Delta$ -Ungleichung)

**Def.** Für einen metrischen Raum  $(X, d)$  und eine Teilmenge  $A \subset X$  ist  $(A, d|_A)$  ein metrischer Raum und  $d|_A$  heißt **induzierte Metrik**.

**Def.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **stetig**, falls für alle  $x \in X$  gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

**Def.** Die **offene Kugel** von Radius  $\epsilon$  um  $x \in X$  ist

$$B_\epsilon(x) := \{p \in X \mid d(p, x) < \epsilon\}.$$

**Def.** Eine Teilmenge  $U \subset X$  eines metrischen Raumes heißt **offen**, falls für alle  $u \in U$  ein  $\epsilon > 0$  existiert mit  $B_\epsilon(u) \subset U$ .

**Proposition.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist genau dann offen, wenn für alle offenen Teilmengen  $U \subset Y$  das Urbild  $f^{-1}(U) \subset X$  offen ist.

**Def.** Ein **topologischer Raum**  $(X, \mathcal{T})$  besteht aus einer Menge  $X$  und einer Menge  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  mit den Eigenschaften

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\forall U, V \in \mathcal{T} : U \cup V \in \mathcal{T}$
- $\forall S \subset \mathcal{T} : \bigcap_{U \in S} U \in \mathcal{T}$

Die Elemente von  $\mathcal{T}$  werden **offene Teilmengen** von  $X$  genannt. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A$  offen ist.

**Bsp.** Die **diskrete Topologie** auf einer Menge  $X$  ist  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ .

**Bsp.** Die **Klumpentopologie** auf einer Menge  $X$  ist  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ .

**Def.** Die Menge der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes heißt von der Metrik **induzierte Topologie**.

**Def.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann heißt

$$\mathcal{T}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

**Unterraumtopologie** oder von  $\mathcal{T}$  **induzierte Topologie**.

**Def.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik auf  $X$  existiert, sodass die von der Metrik induzierte Topologie mit  $\mathcal{T}$  übereinstimmt.

**Def.** Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt **Hausdorffsch**, falls gilt:

$$\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset.$$

**Proposition.** Metrisierbare topologische Räume sind Hausdorffsch.

**Def.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  heißt **stetig**, falls gilt

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

*Bemerkung.* Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $A \subset X$ , so ist auch  $f|_A : A \rightarrow Y$  stetig.

**Def.** Falls  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  stetig sind, so heißt  $f$  ein **Homöomorphismus**.

**Def.** Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  heißen **homöomorph** (notiert  $X \cong Y$ ), wenn ein Homöomorphismus zwischen  $X$  und  $Y$  existiert.

**Satz.** Für  $n \neq m$  sind  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  nicht homöomorph.

**Def.** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  Topologien auf  $X$ . Dann sagen wir  $\mathcal{T}$  ist **gröber** als  $\mathcal{T}'$  :  $\iff \mathcal{T}'$  ist **feiner** als  $\mathcal{T}$  :  $\iff \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ .

**Def.** Eine Menge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$  offener Teilmengen eines topologischen Raumes heißt

- **Basis** der Topologie, falls jede offene Menge  $U \in \mathcal{T}$  Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist.
- **Subbasis** der Topologie, falls jede offene Menge  $U \in \mathcal{T}$  Vereinigung von Mengen ist, von denen jede Schnitt endlich vieler Mengen aus  $\mathcal{B}$  ist.

**Bspe.** • Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist  $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon > 0\}$  eine Basis der induzierten Topologie auf  $X$ .  
•  $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, \epsilon \in \mathbb{Q}_+\}$  ist eine abzählbare Basis von  $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ .

**Proposition.** Jede Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  ist Subbasis von genau einer Topologie  $\mathcal{T}$  von  $X$ .

**Def.** Die Topologie heißt die von  $\mathcal{B}$  **erzeugte Topologie**.

**Def.** Sind  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume, so ist auch  $(X \times Y, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$  ein topologischer Raum mit der **Produkttopologie**  $(\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$ , die von

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times V \mid V \in \mathcal{T}_Y\}$$
 erzeugt wird.

**Proposition.** • Die Projektionen  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  sind stetig bzgl. der Produkttopologie.

- Ist  $\mathcal{T}$  eine echt gröbere Topologie auf  $X \times Y$  als die Produkttopologie, so sind die Projektionen  $\pi_X$  und  $\pi_Y$  nicht beide stetig.

**Def.** Seien  $(X, \mathcal{T}_X)$  und  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume. Dann erzeugt  $\mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y$  die **Summentopologie** auf  $X \cup Y$ .

*Bemerkung.* Sie ist die feinste Topologie auf  $X \cup Y$ , sodass die beiden Inklusionen  $i_X : X \hookrightarrow X \cup Y$  und  $i_Y : Y \hookrightarrow X \cup Y$  stetig sind.

**Proposition.** Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume.

- Falls  $X \cap Y = \emptyset$ , so ist eine Abbildung  $f : X \cup Y \rightarrow Z$  genau dann stetig, falls die beiden Kompositionen  $f \circ i_X : X \rightarrow Z$  und  $f \circ i_Y : Y \rightarrow Z$  stetig sind.
- Eine Abb.  $g : Z \rightarrow X \cup Y$  ist genau dann stetig, wenn die beiden Kompositionen  $\pi_X \circ g : Z \rightarrow X$  und  $\pi_Y \circ g : Z \rightarrow Y$  stetig sind.

**Def.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann ist das **Innere** von  $A$  (notiert  $\text{int}(A)$ ) die Vereinigung aller in  $A$  enthaltenen offenen Mengen.

*Bemerkung.* Als Vereinigung offener Mengen ist das Innere offen.

**Def.** Der **Abschluss**  $\overline{A}$  einer Menge  $A \subset X$  ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen von  $X$ , die  $A$  enthalten.

*Bemerkung.* Es gilt  $\overline{A} = X \setminus (\text{int}(X \setminus A))$ .

**Def.** Es sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x \in X$  und  $V \subset X$ . Wir nennen  $V$  eine **Umgebung** von  $x$ , falls es eine offene Teilmenge  $U \subset X$  gibt mit  $x \in U$  und  $U \subset V$ .

**Proposition.** Ein Punkt  $x \in X$  liegt genau dann in  $\overline{A}$ , falls jede Umgebung von  $x$  einen Punkt aus  $A$  enthält.

**Def.** Der **Rand** einer Menge  $A \subset X$  ist  $\partial A := \overline{A} \setminus \text{int}(A)$ .

**Proposition.** Ein Punkt  $x \in X$  liegt genau dann in  $\partial X$ , wenn jede Umgebung von  $x$  sowohl einen Punkt aus  $A$  wie einen Punkt aus  $X \setminus A$  enthält.

**Def.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **wegweise zusammenhängend**, falls es für je zwei Punkte  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$  gibt.

**Bspe.** •  $\mathbb{R}^n$  ist wegzusammenhängend

- $(\{p, q\}, \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\})$  ist wegzusammenhängend!
- $]-\infty, 0[ \cup ]0, \infty[ \subset \mathbb{R}$  ist nicht wegzusammenhängend.

**Def.** Die Äquivalenzklassen von

$$x \sim y : \iff x, y \text{ lassen sich durch einen Weg verbinden.}$$

heißen **Wegzusammenhangskomponenten**.

**Proposition.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $X$  wegzusammenhängend. Dann ist auch  $f(X)$  bzgl. der Unterraumtopologie wegzusammenhängend.

**Def.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **zusammenhängend**, falls  $X$  nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

**Bspe.**  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  und  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind nicht zusammenhängend.

**Proposition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Es sind äquivalent:

- $X$  ist zusammenhängend.
- Für jede offene und abgeschlossene Menge  $A \subset X$  gilt:  $A \in \{X, \emptyset\}$ .
- Jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow \{0, 1\}$  in den diskreten Raum mit zwei Elementen ist konstant.

**Proposition.** • Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $X$  zusammenhängend, dann ist auch  $f(X)$  zusammenhängend.

- Sind  $A, B$  zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes  $X$  und gilt  $A \cap B \neq \emptyset$ , dann ist auch  $A \cup B$  zusammenhängend.

**Korollar.** Folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf  $X$ :

$$x \sim y : \iff x \text{ und } y \text{ liegen beide in einem zusammenhängenden Unterraum von } X.$$

**Def.** Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen **Komponenten**.

**Bsp.** Die Komponenten von  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  sind genau die Ein-Punkt-Mengen. Trotzdem ist  $\mathbb{Q}$  nicht diskret!

**Proposition.** Die Menge  $[0, 1]$  ist zusammenhängend.

**Korollar.** Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.

**Proposition (ZWS).** Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Gilt  $f(0) < 0$  und  $f(1) > 0$ , so existiert ein  $t \in ]0, 1[$  mit  $f(t) = 0$ .