

Zusammenfassung Topologie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Def. Ein **metrischer Raum** (X, d) besteht aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass f.a. $x, y, z \in X$ gilt:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Δ -Ungleichung)

Def. Für einen metrischen Raum (X, d) und eine Teilmenge $A \subset X$ ist $(A, d|_A)$ ein metrischer Raum und $d|_A$ heißt **induzierte Metrik**.

Def. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig**, falls für alle $x \in X$ gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Def. Die **offene Kugel** von Radius ϵ um $x \in X$ ist

$$B_\epsilon(x) := \{p \in X \mid d(p, x) < \epsilon\}.$$

Def. Eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes heißt **offen**, falls für alle $u \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(u) \subset U$.

Proposition. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann offen, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Def. Ein **topologischer Raum** (X, \mathcal{T}) besteht aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\forall U, V \in \mathcal{T} : U \cup V \in \mathcal{T}$
- $\forall S \subset \mathcal{T} : \bigcap_{U \in S} U \in \mathcal{T}$

Die Elemente von \mathcal{T} werden **offene Teilmengen** von X genannt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist.

Bsp. Die **diskrete Topologie** auf einer Menge X ist $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Bsp. Die **Klumpentopologie** auf einer Menge X ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Def. Die Menge der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes heißt von der Metrik **induzierte Topologie**.

Def. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt

$$\mathcal{T}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

Unterraumtopologie oder von \mathcal{T} **induzierte Topologie**.

Def. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik auf X existiert, sodass die von der Metrik induzierte Topologie mit \mathcal{T} übereinstimmt.

Def. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt **Hausdorffsch**, falls gilt:

$$\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset.$$

Proposition. Metrisierbare topologische Räume sind Hausdorffsch.

Def. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) heißt **stetig**, falls gilt

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Def. Falls $f : X \rightarrow Y$ bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind, so heißt f ein **Homöomorphismus**.

Bemerkung. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und $A \subset X$, so ist auch $f|_A : A \rightarrow Y$ stetig.

Satz. Für $n \neq m$ sind \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m nicht homöomorph.

Def. Sei X eine Menge und $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ Topologien auf X . Dann sagen wir

$$\mathcal{T} \text{ ist } \mathbf{größer} \text{ als } \mathcal{T}' : \iff \mathcal{T}' \text{ ist } \mathbf{feiner} \text{ als } \mathcal{T} : \iff \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'.$$

Def. Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ offener Teilmengen eines topologischen Raumes heißt

- **Basis** der Topologie, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} ist.
- **Subbasis** der Topologie, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen ist, von denen jede Schnitt endlich vieler Mengen aus \mathcal{B} ist.

Def. Jede Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ist Subbasis von genau einer Topologie \mathcal{T} von X , der sogenannten von \mathcal{B} **erzeugten Topologie**.

Def. Sind (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume, so ist auch $(X \times Y, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum mit der **Produkttopologie** $(\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$, die von

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times V \mid V \in \mathcal{T}_Y\} \text{ erzeugt wird.}$$

Proposition. • Die Projektionen $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ und $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ sind stetig bzgl. der Produkttopologie.

- Ist \mathcal{T} eine echt gröbere Topologie auf $X \times Y$ als die Produkttopologie, so sind die Projektionen π_X und π_Y nicht beide stetig.

Def. Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Dann erzeugt $\mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y$ die **Summentopologie** auf $X \cup Y$.

Bemerkung. Sie ist die feinste Topologie auf $X \cup Y$, sodass die beiden Inklusionen $i_X : X \hookrightarrow X \cup Y$ und $i_Y : Y \hookrightarrow X \cup Y$ stetig sind.

Proposition. Seien X, Y, Z topologische Räume.

- Falls $X \cap Y = \emptyset$, so ist eine Abbildung $f : X \cup Y \rightarrow Z$ genau dann stetig, falls die beiden Kompositionen $f \circ i_X : X \rightarrow Z$ und $f \circ i_Y : Y \rightarrow Z$ stetig sind.
- Eine Abb. $g : Z \rightarrow X \cup Y$ ist genau dann stetig, wenn die beiden Kompositionen $\pi_X \circ g : Z \rightarrow X$ und $\pi_Y \circ g : Z \rightarrow Y$ stetig sind.

Def. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann ist das **Innere** von A (notiert $\text{int}(A)$) die Vereinigung aller in A enthaltenen offenen Mengen.

Bemerkung. Als Vereinigung offener Mengen ist das Innere offen.

Def. Der **Abschluss** \overline{A} einer Menge $A \subset X$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen von X , die A enthalten.

Bemerkung. Es gilt $\overline{A} = X \setminus (\text{int}(X \setminus A))$.

Def. Es sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $V \subset X$. Wir nennen V eine **Umgebung** von x , falls es eine offene Teilmenge $U \subset X$ gibt mit $x \in U$ und $U \subset V$.

Proposition. Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in \overline{A} , falls jede Umgebung von x einen Punkt aus A enthält.

Def. Der **Rand** einer Menge $A \subset X$ ist

$$\partial A := \overline{A} \setminus \text{int}(A).$$

Proposition. Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in ∂X , wenn jede Umgebung von x sowohl einen Punkt aus A wie einen Punkt aus $X \setminus A$ enthält.