Zusammenfassung Partielle DGLn

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

1. Einleitung

Def. Eine **partielle Differentialgleichung** (PDGL) hat die Form

$$E(x, u(x), Du(x), ..., D^k u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,} \qquad (\star)$$

wobei $E : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht ist. Die höchste Ableitungsordnung von u, die in E vorkommt, heißt **Ordnung** der PDGL.

Def. Eine PDGL von der Ordnung k heißt

- **linear**, falls sie folgende Form besitzt:
$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) = 0$$
- **semilinear**, falls sie linear in der höchsten Ableitungsordnung ist, man sie also schreiben kann als
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) = 0.$$
- **quasilinear**, falls sie sich schreiben lässt als
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) = 0.$$
- sonst **voll nichtlinear**.

Bemerkung. { lineare PDGLn } $\subsetneq$ { semilineare PDGLn } $\subsetneq$ { quasilineare PDGLn } $\subsetneq$ { PDGLn }

Def (Typeinteilung für lineare PDGLn 2. Ordnung)**.** Seien $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i, j \in \{1, ..., n\})$ vorgegebene Fktn. auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Die lineare PDGL
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **elliptisch**, falls die $(n \times n)$-Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.
- Die lineare PDGL
$$D_1 D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_j(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **hyperbolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.
- Die lineare PDGL
$$D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{2 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **parabolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

Def. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **klassische Lösung**, falls $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ und die Differentialgleichung $(\star)$ überall in Ω erfüllt ist.

Grundlagen

Notation. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibe

$$V \Subset \Omega \quad \text{für} \quad V \subset \mathbb{R}^n \text{ mit } \overline{V} \text{ kompakt und } \overline{V} \subset \Omega^\circ.$$

Notation. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $F = (F_1, ..., F_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann heißt

- $\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^n D_i F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **Divergenz** von F,
- $\operatorname{grad} f := \nabla f := (\partial_1 f, ..., \partial_n f)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **Gradient** von f,
- Δ mit $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^n D_i D_i f$ **Laplace-Operator**.

Satz (Transformationssatz)**.** Sei $T : \Omega \to T(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeo, dann gilt für $f : T(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f \in L^1(T(\Omega)) \iff (f \circ T) \circ |\det(DT)| \in L^1(\Omega) \quad \text{mit}$$

$$\int_{T(\Omega)} f \, dx = \int_\Omega (f \circ T) \cdot |\det(DT)| \, dx.$$

Bsp (Polarkoordinaten)**.** Sei $f \in L^1(B_r(K))$. Dann ist f auf fast jeder Sphäre $\partial B_\rho(K)$ für $\rho \in [0, r]$ integrierbar und es gilt

$$\int_{B_r(x)} f(x) \, dx = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x_0)} f \, dS \, d\rho$$

Satz (Gauß)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Ist $F \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} F \in L^1(\Omega)$, so gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} (F \circ \nu) \, dS,$$

wobei ν der äußere Einheitsnormalenvektor ist.

Korollar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Sind $f, g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, dann gilt die partielle Integrationsregel

$$\int_\Omega D_i f g \, dx = -\int_\Omega f D_i g \, dx + \int_{\partial\Omega} f g \nu^i \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Sind $f, g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, dann gelten die Greenschen Formeln

$$\int_\Omega Df \cdot Dg \, dx = -\int_\Omega f \Delta g \, dx + \int_\Omega f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f) \, dx = \int_{\partial\Omega} (f D_\nu g - g D_\nu f) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Prop (Diff. parameterabh. Integrale)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| < \infty$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$. Angenommen,

- $f(x, -) \in \mathcal{C}^1(I)$ für fast alle $x \in \Omega$,
- $f(-, t) \in L^1(\Omega) \frac{\partial f}{\partial t}(-, t) \in L^1(\Omega)$ für alle $t \in I$ und
- für alle $t \in I$ gibt es $\epsilon > 0$ sodass $(t - \epsilon, t + \epsilon) \subset I$ und
$$\sup_{s \in (t-\epsilon, t+\epsilon)} |\tfrac{\partial f}{\partial t}(-, s)| \in L^1(\Omega).$$

Dann ist die Abbildung

$$g : I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_\Omega f(x, t) \, dx$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx.$$

Bemerkung. Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn Ω offen und beschränkt ist, $f(x, -) \in \mathcal{C}^1(I)$ für alle $x \in \Omega$ und $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times I)$.

Notation. Bezeichne mit $\mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$. Für messbare Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ schreibe $|A| := \mathcal{L}^n(A)$.

Bsp. Zwischen dem Volumen von Kugeln und Sphären im $\mathbb{R}^n$ bestehen folgende Zusammenhänge:

$$|B_r(0)| = r^n \cdot |B_1(0)| \quad \text{und} \quad |B_r(0)| = \tfrac{r}{n} \cdot \int_{\partial B_r(0)} 1 \, dS$$

Notation. $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

Notation. Sei $f : \Omega/M \to \mathbb{R}$ integrierbar für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathcal{L}^k(\Omega) \in (0, \infty)$ bzw. $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $\int_M 1 \, dS \in (0, \infty)$

$$\fint_\Omega f(x) \, dx := \tfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x) \, dx \quad \text{bzw.} \quad \fint_M f(x) \, dx := \tfrac{1}{|M|} \int_M f(x) \, dx$$

heißen **Mittelwerte** von f auf Ω bzw. M.

Funktionenräume

Def. Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt (lokal) **Hölder-stetig** in $x_0 \in S$ zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$ mit Hölderkonstante $C_{x_0} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, falls für alle $x \in S$ (bzw. $x \in K$ für ein $K \Subset S$) gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C_{x_0} |x - x_0|^\alpha$$

Def. Die **Hölder-Seminorm** von $f : S \to \mathbb{R}$ ist

$$[f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(S)} := \sup_{x, x_0 \in S} \frac{|f(x_0) - f(x)|}{|x - x_0|^\alpha}.$$

Def (**Hölder-Räume**)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha \in (0, 1]$.

- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \mid [f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)} < \infty \text{ für alle komp. } K \Subset S\}$
- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \mid [f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty\}$.
- $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega) \mid [D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)} < \infty$ für alle kompakten $K \Subset \Omega$ und Multiindizes β mit $|\beta| = k\}$
- $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{f \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \mid$ alle Ableitungen bis zur Ordnung k von f sind beschränkt und $[D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty$ für alle Multiindizes β mit $|\beta| = k\}$

Bemerkung. Es gelten die Inklusionen $\mathcal{C}(\Omega) \supsetneq \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \supsetneq \mathcal{C}^1(\Omega)$, aber i. A. $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \not\subset \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$.

Bemerkung. Die Räume $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ und $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ sind Banachräume bzgl.

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} := \sum_{0\le|\beta|\le k} \sup_{\overline{\Omega}} |D^\beta f|,$$
$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|=k} [D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Def. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $p \in [1,\infty]$. Für $f : A \to I$ messbar sei

$$\|f\|_{L^p(A)} := \begin{cases} \left(\int_A |f|^p \,\mathrm{d}\right)^{1/p} & \text{falls } p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_A |f| & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Der **Lebesgue-Raum** $L^p(A)$ ist der Raum aller Äquivalenzklassen von fast-überall übereinstimmenden Funktionen, für die $\|{-}\|_{L^p(A)}$ endlich ist. Der Raum $L^p_{\mathrm{loc}}(A)$ ist der Raum aller Funktionen $A \to \mathbb{R}^n$, die für alle offenen $O \Subset A$ zu $L^p(O)$ gehören.

Bemerkung. $L^p(A)$ ist ein Banachraum mit der Norm $\|{-}\|_{L^p(A)}$.

Glättungen

Def. Ein **Glättungskern** auf $\mathbb{R}^n$ ist eine nicht-negative, radialsymmetrische Funktion $\eta \in \mathcal{C}^\infty_0(B_1(0))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \,\mathrm{d}x = 1$.

Def. Der **Standardglättungskern** ist die Funktion

$$\eta(x) := C \cdot \exp\left(\tfrac{1}{|x|^2-1}\right) \cdot \mathbb{1}_{B_1(0)}(x)$$

mit Normierungskonstante C. Für $\epsilon > 0$ ist der dazugehörige skalierte Glättungskern gegeben durch

$$\eta_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\eta(x/\eta).$$

Alle Glättungskern-Eigenschaften bleiben bei Skalierung erhalten.

Notation. $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$. Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ heißt die Funktion

$f_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \eta_\epsilon * f(x) := \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y$ **ϵ-Glättung** von f

Satz (Eigenschaften von Glättungen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$ und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann gilt

- Regularität: $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\epsilon)$ mit $D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha \eta_\epsilon) * f$ für beliebige Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- Ist $D_i f$ stetig auf Ω, so gilt $D_i(f_\epsilon) = (D_i f)_\epsilon$ auf Ω_ϵ.
- Falls $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0,1]$, so gilt $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega_\epsilon)$ mit derselben Hölderkonstante.
- Falls $f \in L^p(\Omega)$ für $p \in [0,\infty]$, so gilt $\|f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}$.
- $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} f$ fast-überall in Ω.
- Falls $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, so konvergiert f_ϵ gleichmäßig gegen f für $\epsilon \to 0$ auf kompakten Teilmengen von Ω,
- Falls $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für $p \in [1,\infty)$, so gilt $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} f$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
- Abschätzung der Approximationsgüte: Ist $Du \in L^p(\Omega)$, so gilt

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \le \epsilon \cdot \|Df\|_{L^p\Omega}.$$

Hausdorff-Maß

Def. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $k \in [0,\infty)$, $\delta > 0$. Das **approximierende Maß** H^k_δ von A ist definiert als

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) := \inf\{\sum_{i=1}^\infty \omega_k r_i^k \mid A \subset \bigcup_{i=1}^\infty \overline{B_{r_i}(x_i)}, r_i < \delta\}$$

Bemerkung. $\mathcal{H}^k_\delta(A)$ ist monoton fallend in δ.

Def. Das **k-dimensionale Hausdorff-Maß** $\mathcal{H}^k$ von A ist

$$\mathcal{H}^k(A) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^k_\delta(A).$$

Prop.
- Für $\delta > 0$ ist $\mathcal{H}^k_\delta$ ein Maß auf $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{H}^k$ ist ein Maß auf $\mathbb{R}^n$
- Bewegungsinvarianz: $\mathcal{H}^k(x + T(A)) = \mathcal{H}^k(A)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $T \in O(n)$.
- Ist $f : A \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig mit Konstante L_f, so gilt

$$\mathcal{H}^k(f(A)) \le L_f^k \mathcal{H}^k(A).$$

- Skalierungsverhalten: $\mathcal{H}^k(\lambda A) = \lambda^k \mathcal{H}^k(A)$
- Spezialfälle: $\mathcal{H}^0$ ist ein Zählmaß, $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ und $\mathcal{H}^k \equiv 0$.

Lemma. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \le k < k' < \infty$.

- Ist $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, so gilt $\mathcal{H}^{k'}(A) = 0$.
- Ist $\mathcal{H}^{k'}(A) > 0$, so gilt $\mathcal{H}^k(A) = \infty$.

Def. Die **Hausdorff-Dimension** von $A \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned}\dim_H(A) &:= \inf\{k \in \mathbb{R}_{\ge 0} \mid \mathcal{H}^k(A) = 0\} \\ &= \sup\{k \in \mathbb{R}_{\ge 0} \mid \mathcal{H}^k(A) = \infty\}.\end{aligned}$$

Prop. Für die Cantor-Menge $C \subset \mathbb{R}$ gilt $\dim_H(C) = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

2. Laplace- und Poisson-Gleichung

Def. Die **Laplace-** bzw. **Poisson-Gleichung** ist die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = f \qquad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Man nennt u

- **harmonisch**, falls $\Delta u = 0$ in Ω gilt.
- **subharmonisch**, falls $\Delta u \ge 0$ in Ω gilt.
- **superharmonisch**, falls $\Delta u \le 0$ in Ω gilt.

Bspe.
- Affine Funktionen sind harmonisch.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definiere $u(x) := x \cdot Ax$. Dann gilt $\Delta u = \operatorname{spur} A$, also $\Delta u = 0 \iff \operatorname{spur} A = 0$.
- Real- und Imaginärteil von holomorphen Fktn. sind harmonisch.

Def. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} -(2\pi)^{-1}\log|x|, & \text{wenn } n = 2 \\ (n(n-2)\,\omega_n)^{-1}|x|^{2-n}, & \text{wenn } n \ge 3 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung** der Laplacegleichung.

Bemerkung.
- Φ ist radialsymmetrisch, d. h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\|x_1\| = \|x_2\|$ gilt $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$.
- Φ, $|D\Phi| \in L^1(B_R(0))$ für alle $R > 0$ aber $|D^2\phi| \notin L^1(B_1(0))$.
- Die Konstanten wurden so gewählt, dass gilt:

$$-\int_{\partial B_r(0)} D\Phi \cdot \nu \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = 1 \quad \text{für alle } r > 0.$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_R(x_0) \subset \Omega$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Für

$$\phi : (0,R) \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r\to 0} \phi(r) = u(x_0)$
- $\phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B_r(x_0)} \Delta u(x) \,\mathrm{d}x$

Korollar (Mittelwertseigenschaft)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_r(x_0) \Subset \Omega$ und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$0 = \Delta u \implies u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{und} \quad u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

In diesen Gleichungen darf man $=$ durch $\le$, $<$, $\ge$ oder $>$ ersetzen.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:

- u ist harmonisch, d. h. es gilt $\Delta u = 0$ in Ω.
- u erfüllt die sphärische Mittelwertseigenschaft, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

- u erfüllt die Mittelwertseigenschaft auf Kugeln, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Bemerkung. Die Äquivalenz gilt auch unter den schwächeren Voraussetzungen $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ oder $u \in L^1(\Omega)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω, d. h. $\Delta u \ge 0$ in Ω. Dann gilt

- Das **schwache Maximumsprinzip**: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist Ω zusammenhängend und existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, so ist u konstant.

Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ harmonisch. Dann gilt

$$\min_{\partial\Omega} u < \max_{\partial\Omega} u \implies \min_{\partial\Omega} u < u < \max_{\partial\Omega} u \text{ auf } \Omega.$$

Korollar (Eindeutigkeit)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dann ist $u = v$, falls gilt:

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v & \text{in } \Omega \\ u = v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Bemerkung (Stetige Abhängigkeit von Randwerten). Gilt lediglich $\Delta u = \Delta v$ in Ω, aber nicht $u = v$ auf $\partial\Omega$, so gilt immerhin

$$\max_{\Omega}|u - v| = \max_{\partial\Omega}|u - v|.$$

Satz (Harnack-Ungleichung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \Subset \Omega$ offen, zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega, V)$, sodass

$$\sup_V u \le c \cdot \inf_V u \qquad \text{für alle harmonischen Fktn. } u : \Omega \to \mathbb{R}_{\ge 0}.$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und erfülle $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Sphären, d. h.

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Dann gilt $u(x) = u_\epsilon(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\epsilon < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. Insbesondere ist $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und harmonisch.

Korollar. Obiger Satz gilt auch, wenn $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Kugeln erfüllt, d. h.

$$u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Def. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem topologischen Raum X **konvergiert lokal gleichmäßig** gegen $f : X \to \mathbb{R}$, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x von x gibt, sodass f_n auf U_x gleichmäßig gegen f konvergiert.

Korollar (Konvergenzsatz von Weierstraß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiert. Dann ist u harmonisch auf Ω.

Korollar (Harnackscher Konvergenzsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf Ω. Gibt es ein $x_0 \in \Omega$, sodass $(u_k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt (und damit konvergent) ist, so konvergiert (u_k) lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion auf Ω.

Satz (von Hermann Weyl). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega u \cdot \Delta\phi \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Dann gibt es eine harmonische Funktion $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \tilde{u}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Satz (Innere Abschätzung für Ableitungen harmonischer Fktn). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gilt für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$ und jede Kugel $B_r(x_0) \Subset \Omega$:

$$|D^\alpha u(x_0)| \le C(n,k) r^{-n-k} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \quad \text{mit } C(n,k) := \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n}.$$

Satz (Liouville). Sei $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch.

- Ist u beschränkt, so ist u konstant.
- Gilt $\limsup\limits_{|x|\to\infty} \frac{|u(x)|}{|x|^{k+1}} = 0$, so ist u ein Polynom, dessen Grad $\le k$ ist.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **analytisch** in $x \in \Omega$, falls f sich lokal durch ihre Taylorreihe darstellen lässt, also ein $r \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega))$ existiert mit

$$f(y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \tfrac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x)(y - x)^\alpha \qquad \text{für alle } y \in B_r(x).$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Wenn u harmonisch ist, dann auch analytisch.

Problem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, (beschränkt), regulär und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht ist $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$(2.1) \begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Satz (Greensche Darstellungsformel). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand und $h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ mit $\Delta h \in L^1(\Omega)$. Es gilt für $x \in \Omega$:

$$h(x) = -\int_\Omega \Phi(x-y)\Delta h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y) - \int_{\partial\Omega} h(y) D_y\Phi(x-y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y)$$

Bemerkung. Für Randpunkte $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\tfrac{1}{2}h(x) = -\int_\Omega \Phi(x-y)\Delta h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y) - \int_{\partial\Omega} h(y) D_y\Phi(x-y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y)$$

Korollar (Darstellungsformel für Lsgn in $\mathbb{R}^n$). Sei $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$, setze

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (\Phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dann gilt: $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung.
- Für $n = 2$ ist die Lösung potentiell unbeschränkt.
- Für $n \ge 3$ ist diese Lsg beschränkt und erfüllt $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Prop. Jede andere beschränkte Lösung von $-\Delta u = f$ auf $\mathbb{R}^n$ unterscheidet sich nur durch eine additive Konstante.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine **Greensche Funktion** für Ω ist eine Funktion $G : \{(x,y) \in \Omega \times \Omega \,|\, x \ne y\} \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \Omega$ gilt:

- Die **Korrektorfunktion** $y \mapsto G(x,y) - \Phi(x-y)$ ist von der Klasse $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ und ist harmonisch in Ω.
- Die Funktion $G(x,-)$ hat Nullrandwerte auf $\partial\Omega$, d. h. es gilt $\lim\limits_{y\to y_0} G(x,y) = 0$ für alle $y_0 \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$.

Bemerkung.
- Ist Ω beschränkt, so ist die Greensche Funktion eindeutig.
- Die Funktion $G(x,-)$ ist in $\mathcal{C}^2(\Omega \setminus \{x\}) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$ und hat die gleiche Singularität wie $y \mapsto \Phi(x-y)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (2.1) und ist G die Greensche Funktion für Ω (falls existent), dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} g(y) \cdot D_y G(x,y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y).$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, G die Greensche Funktion für Ω und $B_r(x) \Subset \Omega$. Für $f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ gilt dann:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial B_\epsilon(x)} (G(x,y) Df(y) - f(y) D_y G(x,y)) \cdot \nu(y) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) = f(x).$$

Satz. Ist G die Greensche Funktion zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, so gilt $G(x,y) = G(y,x)$ für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \ne y$.

Korollar. Sei G die Greensche Funktion zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, so ist die Funktion $x \mapsto G(x,y)$ harmonisch auf $\Omega \setminus \{y\}$.

Def. Sei $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a)$. Dann heißt

$$x^* := a + r^2 \frac{x - a}{\|x - a\|^2} \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a) \quad \textbf{Spiegelungspunkt} \text{ von } x.$$

Bemerkung. Es gilt:
- $\|x - a\| \cdot \|x^* - a\| = r^2$
- $(x^*)^* = x$
- $\forall y \in \partial B_r(a) : \|x^* - y\|^2 = r^2 \|x - a\|^{-2} \|y - x\|^2$.

Notation. Für $B_r(a) \subset \mathbb{R}$ sei $g : B_r(a) \times B_r(a) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} -\Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y - x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ -\Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Prop. Für die Funktion g gilt:

- $g(x,y) - \Phi(x-y) = 0$ für alle $y \in \partial B_r(a)$ und $x \in B_r(a)$.
- $y \mapsto g(x,y)$ ist glatt und harmonisch in $B_r(a)$ für alle $x \in B_r(a)$.

Korollar. Die Greensche Funktion für $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ lautet

$$G_{B_r(a)}(x,y) := \Phi(x-y) + g(x,y) = \begin{cases} \Phi(x-y) - \Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y - x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ \Phi(a-y) - \Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Def. Der **Poisson-Kern für die Kugel** $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$K_{B_r(a)}(x,y) := \frac{1}{n\omega_n} \cdot \frac{r^2 - |x-a|^2}{r|x-y|^n}.$$

Satz (Poisson-Integralformel für Kugeln). Sei $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ und $g : \partial B_r(a)$ stetig.

- Für $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_r(a)})$ harmonisch mit $u = g$ auf $\partial B_r(a)$ gilt
$$u(x) = \int_{\partial B_r(a)} K_{B_r(a)}(x,y) g(y) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für alle } x \in B_r(a). \qquad (2.8)$$
- Umgekehrt definiert (2.8) die eindeutige harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}^1(\overline{B_r(a)})$ mit $u = g$ auf $\partial B_r(a)$.

Notation. $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0\}$ heißt **Halbraum**.

Def. Für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt $\overline{x} := (x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$ **Spiegelpunkt** von x bzgl. $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Satz. Die Greensche Funktion für $\mathbb{R}^n_+$ lautet

$$G_{\mathbb{R}^n_+}(x,y) := \Phi(x-y) - \Phi(x^* - y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n_+ \text{ mit } x \ne y.$$

Def. Der **Poisson-Kern für den Halbraum** $\mathbb{R}^n_+$ ist definiert als

$$K_{\mathbb{R}^n_+}(x,y) := \frac{1}{n\omega_n} \cdot \frac{2x_n}{|x-y|^n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n_+ \text{ und } y \in \partial\mathbb{R}^n_+.$$

Satz (Poisson-Integralformel für den Halbraum)**.** Sei $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Dann definiert

$$u(x) := \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K_{\mathbb{R}^n_+}(x,y) g(y) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n_+$$

eine beschränkte, harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit $u = g$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Notation. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibe

- $\Omega^+ := \{(x_1, ..., x_n) \in \Omega \,|\, x_n > 0\} = \Omega \cap \mathbb{R}^n_+$
- $\Omega^0 := \{(x_1, ..., x_n) \in \Omega \,|\, x_n = 0\} = \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$
- $\Omega^- := \{(x_1, ..., x_n) \in \Omega \,|\, x_n < 0\} = \Omega \setminus \overline{\mathbb{R}^n_+}$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und symmetrisch bzgl. $\partial\mathbb{R}^n_+$, d. h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x \in \Omega \iff \overline{x} \in \Omega$.

- Ungerades Spiegelungsprinzip: Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^+) \cap \mathcal{C}(\Omega^+ \cup \Omega^0)$ harmonisch auf Ω^+ mit $u = 0$ auf Ω^0, so ist die ungerade Fortsetzung

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega^+ \cup \Omega^0, \\ -u(\overline{x}) = -u(x_1, ..., -x_n) & \text{für } x \in \Omega^- \end{cases}$$

  harmonisch auf Ω.
- Gerades Spiegelungsprinzip: Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^+) \cap \mathcal{C}^1(\Omega^+ \cup \Omega^0)$ mit $D_n u = 0$ auf Ω^0, so ist die gerade Fortsetzung

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega^+ \cup \Omega^0, \\ u(\overline{x}) = u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \text{für } x \in \Omega^- \end{cases}$$

  harmonisch auf Ω.

Bemerkung. Aus dem Spiegelungsprinzip und dem Satz von Liouville folgt die Eindeutigkeit beschränkter harmonischer Funktionen auf dem Halbraum mit vorgegebenen Randwerten.

Problem (Dirichlet-RWP)**.** Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ gesucht mit

$$(2.9) \left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{in } \Omega, \\ u & = & g & \text{in } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ heißt **$\mathcal{C}^0$-subharmonisch**, falls die MW-Ungleichung auf Sphären erfüllt ist, d. h.

$$u(x_0) \leq \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle } x_0 \in \Omega \text{ und } r \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)).$$

Die Funktion heißt **$\mathcal{C}^0$-superharmonisch**, falls $-u$ $\mathcal{C}^0$-subharmonisch ist und **$\mathcal{C}^0$-harmonisch**, falls u sowohl subharmonisch als auch harmonisch ist.

Notation.
$$\begin{aligned} H^-(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \,|\, u \text{ ist subharmonisch auf } \Omega\} \\ H^+(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \,|\, u \text{ ist superharmonisch auf } \Omega\} \\ H^0(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \,|\, u \text{ ist harmonisch auf } \Omega\} \end{aligned}$$

Bemerkung. $\mathcal{C}^0$-harmonische Funktionen sind glatt und harmonisch.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ sind äquivalent:

- u ist $\mathcal{C}^0$-subharmonisch auf Ω.
- u erfüllt die MW-Ungleichung auf Kugeln, d. h. für alle $x_0 \in \Omega$ gilt

$$u(x_0) \leq \fint_{B_r(x_0)} u(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } r \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)).$$

- u erfüllt die MW-Ungleichung auf kleinen Kugeln, d. h. für alle $x_0 \in \Omega$ gibt es ein $R(x_0) \in (0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega))$ mit

$$u(x_0) \leq \fint_{B_r(x_0)} u(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } r \in (0, R(x_0)).$$

- Für alle Kugeln $B_r(x_0) \Subset \Omega$ gilt das Vergleichsprinzip mit harmonischen Funktionen, d. h. für jede harmonische Funktion $h \in \mathcal{C}(\overline{B_r(x_0)})$ gilt: $u \leq h$ auf $\partial B_r(x_0) \implies u \leq h$ in $B_r(x_0)$.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $B_r(x_0) \Subset \Omega$. Der **Perron-Projektor** $P_{x_0,r} : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega)$ ist definiert durch

$$(P_{x_0,r}u)(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus B_r(x_0) \\ \int_{\partial B_r(x_0)} K_{B_r(x_0)}(x,y) u(y) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y), & x \in B_r(x_0). \end{cases}$$

Bemerkung. Die Funktion $P_{x_0,r}(u)$ wird **harmonische Fortsetzung** von u auf $B_r(x_0)$ genannt.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:

- Sind $v \in H^-(\Omega)$ und $w \in H^+(\Omega)$, so gilt $v - w \in H^-(\Omega)$.
- Sind $v_1, v_2 \in H^-(\Omega)$, $w_1, w_2 \in H^+(\Omega)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, so ist

$$\{\max(v_1, v_2), \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\} \subset H^-(\Omega),$$
$$\{\min(w_1, w_2), \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\} \subset H^+(\Omega).$$

- Sind $v \in H^-(\Omega), w \in H^+(\Omega)$ und $B_r(x_0) \Subset \Omega$, so gelten

$$P_{x_0,r}v \geq v \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad P_{x_0,r}v \in H^-(\Omega),$$
$$P_{x_0,r}w \leq w \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad P_{x_0,r}w \in H^+(\Omega).$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann heißt $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ **Sublösung** des Dirichletproblems (2.9), falls $u \leq g$ auf $\partial\Omega$ gilt und **Superlösung** von (2.9), falls $u \geq g$ auf $\partial\Omega$ gilt.

Notation.
$$\begin{aligned} H_g^-(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^-(\Omega) \,|\, u \leq g \text{ auf } \partial\Omega\}, \\ H_g^+(\Omega) &:= \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^+(\Omega) \,|\, u \geq g \text{ auf } \partial\Omega\}, \\ u^-(x) &:= \sup\{v(x) \,|\, v \in H_g^-(\Omega)\}, \\ u^+(x) &:= \sup\{v(x) \,|\, v \in H_g^+(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Methode (Perron)**.** Zeige zunächst, das u^- und u^+ harmonisch sind. Zeige dann unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an Ω, dass $u^- = u^+$ gilt und die vorgegebenen Randwerte annimmt.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann sind u^- und u^+ wohldefiniert und es gilt

$$\inf_{\partial\Omega} g \leq u^- \leq u^+ \leq \sup_{\partial\Omega} g.$$

Bemerkung. Falls eine Lösung u des Dirichlet-Problems existiert, so gilt $u = u^- = u^+$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann sind u^- und u^+ harmonisch in Ω.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $x_0 \in \partial\Omega$. Eine Funktion $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+_0$ heißt (obere) **Barriere** zu Ω in x_0, falls

- $b \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^+(\Omega)$
- $b(x_0) = 0$ und $b(x) > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$

Falls eine solche Barriere existiert, so heißt x_0 **regulärer Randpunkt**.

Bemerkung. Eine Funktion $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^-_0$ heißt untere Barriere, falls $(-b) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+_0$ eine obere Barriere ist.

Def. Eine **lokale Barriere** zu Ω in $x_0 \in \partial\Omega$ ist eine Barriere $\tilde{b} : B_r(x_0) \cap \Omega \to \mathbb{R}^+_0$ zu $B_r(x_0) \cap \Omega$ in x_0.

Bemerkung. Aus jeder lokalen Barriere lässt sich eine globale Barriere konstruieren.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Falls das Dirichlet-Problem (2.9) für jede Funktion $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ besitzt, so sind alle Randpunkte $x_0 \in \partial\Omega$ regulär.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $x_0 \in \partial\Omega$. Ist x_0 regulär, dann gilt für jede stetige Funktion $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$:

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0} u^-(x) = g(x_0) = \lim_{\Omega \ni x \to x_0} u^+(x).$$

Satz (Perron)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann sind äquivalent:

- Der Rand $\partial\Omega$ ist regulär.
- Das Dirichlet-Problem (2.9) besitzt eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ für alle $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Def. Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt die **äußere Kugelbedingung** in $x_0 \in \partial\Omega$ an Ω, falls ein Ball $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ mit $\overline{\Omega} \cap \overline{B_r(a)} = \{x_0\}$ existiert.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Erfüllt Ω die äußere Kugelbedingung in $x_0 \in \partial\Omega$ an Ω, dann ist x_0 ein regulärer Randpunkt.

Bemerkung. Beschränkte Gebiete mit $\mathcal{C}^2$-Rand und strikt konvexe Gebiete erfüllen die äußere Kugelbedingung.

Problem. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht ist eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ der Poisson-Gleichung

$$(2.10) \begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prop. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und $\partial\Omega$ regulär. Sind $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, so besitzt (2.10) eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Bemerkung. Die Behauptung folgt leicht aus den vorherigen Sätzen, aber die Voraussetzung $f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$ ist zu stark.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Das **Newton-Potential** $N_f : \Omega \to \mathbb{R}$ einer Funktion $f \in L^\infty(\Omega)$ ist die Faltung

$$N_f(x) := \int_\Omega \Phi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y.$$

Bemerkung. Die Fktn f wird außerhalb von Ω durch 0 fortgesetzt.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $f \in L^\infty(\Omega)$. Dann gilt $N_f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ mit $DN_f(x) = \int_\Omega D_x\Phi(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y$ für alle $x \in \Omega$.

Korollar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $f \in L^\infty(\Omega)$. Dann gilt $N_f \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$ für alle $\alpha \in (0,1)$.

Satz (Hölder). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. und $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für ein bel. $\alpha \in (0,1)$. Dann gilt $N_f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ mit $-\Delta N_f = f$ in Ω und für jede Kugel B mit $\Omega \Subset B$ gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} D_i D_j N_f(x) =& \int_B D_{x_i} D_{x_j} \Phi(x-y)(f(y) - f(x)) \, \mathrm{d}y \\ &- f(x) \cdot \int_{\partial B} D_{x_j} \Phi(x-y) \nu_i(y) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y). \end{aligned}$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial\Omega$ regulär. Sind $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, so besitzt (2.10) eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Bemerkung. Für das Newtonpotential überträgt sich die Regularität von f wie folgt: Ist $\alpha \in (0,1)$ und $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{B_{2R}})$, so ist $N_f \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\overline{B_R})$ für alle $R > 0$. Im Allgemeinen gilt:

$$f \in L^\infty \not\Rightarrow N_f \in \mathcal{C}^2, \quad f \in \mathcal{C}^k \not\Rightarrow N_f \in \mathcal{C}^{k+2}, \quad f \in \mathcal{C}^{k,1} \not\Rightarrow N_f \in \mathcal{C}^{k+2,1}$$

Problem. Gesucht sind Lösungen des Eigenwertproblems mit Dirichlet-Randwert 0 für den Laplaceoperator, also Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenfunktionen $u_\lambda \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ mit

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda &= \lambda u_\lambda \quad \text{in } \Omega \\ u_\lambda &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bemerkungen.
- Es sind nur nichtnegative EWe möglich.
- Es gibt höchstens abzählbar viele EWe.
- Die zugehörigen Eigenräume sind endlich-dimensional.
- Eigenfunktionen zu unterschiedlichen EWen sind orthogonal bzgl.

$$\langle u, v \rangle_{L^2} := \int_\Omega u \cdot v \, \mathrm{d}x.$$

- Eigenfunktionen sind glatt.

3. Wärmeleitungsgleichung

Notation. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wir suchen $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto u(t,x)$ und schreiben $u_t := \frac{\partial u}{\partial t}$ für die Zeitableitung, $Du(t,x) := D_x u(t,x)$ für die Ortsableitung und $\Delta u(t,x) := \Delta_x u(t,x)$.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $T > 0$.
- Der **parabolische Zylinder** ist $\Omega_T := (0,T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
- Der **parabolische Rand** von Ω_T ist

$$\partial_p \Omega_T := (\{0\} \times \Omega) \cup ([0,T] \times \partial\Omega) \subset \partial\Omega_T.$$

Notation. Wir benötigen untersch. Regularitäten in Ort und Zeit:

$$\mathcal{C}_1^2(\Omega_T) := \{f \in \mathcal{C}^1(\Omega_T) \mid f \text{ ist zweimal stetig nach } x \text{ ableitbar}\}$$

Problem. Wärmeleitungsgleichung (WLG): $u_t - \Delta u = 0$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T > 0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T)$. Dann heißt u

$$\left.\begin{array}{l} \text{subkalorisch} \\ \textbf{kalorisch} \\ \text{superkalorisch} \end{array}\right\} \text{ falls } \left\{\begin{array}{l} u_t - \Delta u \le 0 \\ u_t - \Delta u = 0 \\ u_t - \Delta u \ge 0 \end{array}\right\} \text{ in } \Omega_T \text{ gilt.}$$

Bemerkung (Invarianzen der Lösungseigenschaft). Wenn $u \in \mathcal{C}_t^2(\Omega_T)$ kalorisch, dann auch (auf geeigneten Zylindern):

$$\begin{aligned} u_{0,x_0}(t,x) &:= u(t, x - x_0) && \text{für } x_0 \in \mathbb{R}^n \\ u_{\mathcal{T},0}(t,x) &:= u(t - \mathcal{T}, x) && \text{für } \mathcal{T} \in \mathbb{R} \\ u_R(t,x) &:= u(t, Rx) && \text{für } R \in SO(n) \\ u_\lambda(t,x) &:= \lambda^n u(\lambda^2 t, \lambda x) && \text{für } \lambda > 0 \end{aligned}$$

Es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} u_\lambda(t,y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} u(\lambda^2 t, y) \, \mathrm{d}y$.

Bspe.
- Sei v harmonisch auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $(t,x) \mapsto v(x)$ kalorisch auf Ω_T.
- Für $n = 1$ und $c_1, c_2, a \in \mathbb{R}$ sind kalorisch:

$$\begin{aligned} &(t,x) \mapsto \exp(a^2 t) \cdot (c_1 \sinh(ax) + c_2 \cosh(ax)) \\ &(t,x) \mapsto \exp(-a^2 t) \cdot (c_1 \sin(ax) + c_2 \cos(ax)) \\ &(t,x) \mapsto c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Def. Die **Fundamentallösung der WLG** ist die Funktion

$$\Psi : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Bemerkungen.
- $\Psi_t(t,x) - \Delta_x \Psi(t,x) = 0$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
- $\Psi(t,0) \xrightarrow{t \to 0} \infty$,
- $\Psi(t,x) \xrightarrow{t \to 0} 0$ bei $x \ne 0$ fest.
- Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t,x) \, \mathrm{d}x = 1$.
- Raum- und Zeitableitungen lassen sich explizit berechnen.
- $\|\Psi(t,-)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t \to \infty} 0$,
- $\|D\Psi(t,-)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\Psi_t(t,-)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t \to \infty} 0$,
- $\Psi(t,-) * \Psi(s,-) = \Psi(t+s,-)$

Bemerkung. Für die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung gilt:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n : B_1(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x_0 - x) > \Phi(re_1)\}$$

Def. Die **Wärmeleitungskugel** um $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $r > 0$ ist

$$\begin{aligned} W_r(t_0, x_0) &:= \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t < t_0 \text{ und } \Psi(t_0 - t, x_0 - x) > r^{-n}\} \\ &\subseteq (-\infty, t_0) \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Notation. $W_r := W_r(0,0)$

Notation. Für $r > 0$ setze

$$b_r : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto \tfrac{|x|^2}{4t} + n \log r - \tfrac{n}{2} \log(-4\pi t).$$

Bemerkungen.
- Monotonie: Für $r \le \tilde{r}$ gilt $W_r(x_0) \subseteq W_{\tilde{r}}(x_0)$
- Translationsinvarianz: $W_r(t_0, x_0) = (t_0, x_0) + W_r(0,0)$
- Parabolische Reskalierung: $(t,x) \in W_r \iff (r^{-2}t, r^{-1}x) \in W_1$
- Explizite Darstellung: Für $r > 0$ gilt

$$\begin{aligned} W_r(0,0) &= \{(t,x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \mid b_r(t,x) > 0\} \\ \partial W_r(0,0) &= \{(0,0)\} \cup \{(t,x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \mid b_r(t,x) = 0\} \\ W_r(0,0) &= \{(t,x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \mid -\tfrac{r^2}{4\pi} < t < 0 \text{ und} \\ &\qquad |x|^2 < 4t(-n \log r + \tfrac{n}{2} \log(-4\pi t))\} \end{aligned}$$

- Es gilt $\int_{W_r} \frac{|x|^2}{t^2} \, \mathrm{d}(t,x) = 4r^n$

Lemma. Sei $R > 0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(W_R)$. Für

$$\phi : (0,R) \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto \frac{1}{4r^n} \int_{W_r} u(t,x) \frac{|x|^2}{t^2} \, \mathrm{d}(t,x) \qquad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r \to 0} \phi(r) = u(0,0)$
- $\phi'(r) = \dfrac{n}{r^{n+1}} \displaystyle\int_{W_r} (-u_t(t,x) + \Delta u(t,x)) \cdot b_r(t,x) \, \mathrm{d}(t,x)$

Satz (MWE). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T > 0$, $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T)$ und $W_r(t_0, x_0) \Subset \Omega_T$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega_T \\ \implies & u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r^n} \int_{W_r(t_0,x_0)} u(t,x) \cdot \frac{|x - x_0|^2}{(t - t_0)^2} \, \mathrm{d}(t,x) \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen darf man $=$ durch $\le, <, \ge$ oder $>$ ersetzen.

Korollar. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T>0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T)$ sind äquivalent:
- u ist kalorisch
- u erfüllt die MWE auf WL-Kugeln, d. h. f. a. $W_r(t_0, x_0) \Subset \Omega_T$ gilt

$$u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r^n} \int_{W_r(t_0,x_0)} u(t,x) \cdot \frac{|x - x_0|^2}{(t - t_0)^2} \, \mathrm{d}(t,x)$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, $T > 0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_T})$ subkalorisch. Dann gilt:

- Das **schwache Maximumsprinzip**: $\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist Ω zshgd und gibt es $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ mit $u(t_0,x_0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u$, so ist u konstant auf Ω_{t_0}.

Bemerkung. Es gelten auch entsprechende Minimumsprinzipien für superkalorische Funktionen.

Bemerkung („unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit“).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend, $T > 0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_T})$ eine kalorische Funktion, die auf $[0,T] \times \partial\Omega$ verschwindet. Dann gilt

$$\min_{\{0\}\times\partial\Omega} u < \max_{\{0\}\times\partial\Omega} u \implies \min_{\partial\{0\}\times\Omega} u < u < \max_{\{0\}\times\partial\Omega} u \text{ in } \Omega_T.$$

Korollar (Eindeutigkeit)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $T > 0$, $u, v \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_T})$ mit

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v_t - \Delta v & \text{in } \Omega_T \\ u = v & \text{auf } \partial_p \Omega_T \end{cases}$$

Dann gilt $u \equiv v$ in Ω_T.

Prop. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit regulären Rand- punkten und $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann gilt für jede Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega \times (0,\infty)) \cap \mathcal{C}(\Omega \times [0,\infty))$ von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } (0,\infty) \times \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial_p \Omega_T \end{cases}$$

mit beliebigen Anfangswerten auf $\{0\} \times \Omega$:

$$\lim_{t\to\infty} u(t,-) = v,$$

wobei $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ die eindeutige Lösung der folgender Poisson-Gleichung ist:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Satz. Sei $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1,\infty]$. Dann ist die Funktion $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := (\Psi(t,-) * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t, x-y) \cdot g(y) \, dy$$

in $\mathcal{C}^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllt

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u = g & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Satz. Für die Funktion u aus dem vorherigen Satz gilt:

- Ist $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so konvergiert
$$u(t,x) \xrightarrow{t\to 0, x \to x_0} g(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$
Die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Mengen.
- Ist $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1,\infty]$, so ist $\|u(t,-)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ für alle $t > 0$. Ist $p < \infty$, so gilt
$$\|u(t,-) - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Prop. Es gilt außerdem

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, dx \quad \text{für alle } t > 0.$$

Satz. Sei $f \in \mathcal{C}_1^2([0,\infty] \times \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \Subset [0,\infty] \times \mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t-s, x-y) \cdot f(s,y) \, dy \, ds$$

in $\mathcal{C}_1^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllt die inhomogene WLG

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Satz (Allgemeine Lösungsformel)**.** Sei $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{C}_1^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \Subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t, x-y) \cdot g(y) \, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t-s, x-y) \cdot f(s,y) \, dy \, ds$$

in $\mathcal{C}_1^2((0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllt

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u = g & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

4. Wellengleichung

Notation. $u_{tt} := \partial_t^2 u$

Problem. Seien $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Gesucht ist eine Lösung der homogenen **Wellengleichung** (WG)

$$(4.1) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Satz. Seien $b \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{g} \in \mathcal{C}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Dann besitzt das AWP für die Transportgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u + b \cdot Du = \tilde{f} & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u = \tilde{g} & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^1((0,\infty) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, die gegeben ist durch

$$u(t,x) := \tilde{g}(x - tb) + \int_0^t \tilde{f}(s, x + (s-t)b) \, ds.$$

Satz. Seien $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ und

$$u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (t,x) \mapsto \tfrac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \tfrac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(s) \, ds.$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ die eindt. Lsg von (4.1) auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Bemerkung.
- Es gibt keinen Regularisierungseffekt, d. h. im Allgemeinen ist u nur in $\mathcal{C}^2$, nicht besser.
- „Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit“: Ist $\operatorname{supp}(g) \cup \operatorname{supp}(f) \subset [x_0 - r, x_0 + r]$ für $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, so gilt $\operatorname{supp}(t,-) \subset [x_0 - (t+r), x_0 + t + r]$.

Korollar. Seien $g \in \mathcal{C}^2([0,\infty))$ mit $\lim_{x\to 0} g''(x) = g(0) = 0$ und $h \in \mathcal{C}([0,\infty))$ mit $h(0) = 0$. Dann ist die Funktion $u : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$u(t,x) := \begin{cases} \tfrac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \tfrac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(s) \, ds & \text{für } x \ge t \ge 0, \\ \tfrac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) + \tfrac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(s) \, ds & \text{für } t \ge x \ge 0 \end{cases}$$

die $\mathcal{C}^2$-Lösung des AWP der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } (0,\infty) \times (0,\infty), \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \{0\} \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{auf } (0,\infty) \times \{0\}. \end{cases}$$

Notation. Für $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiere

$$U_x(t,r) := ⨍_{\partial B_r(x)} u(t,y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

$$G_x(r) := ⨍_{\partial B_r(x)} g(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y), \qquad H_x(r) := ⨍_{\partial B_r(x)} h(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

Lemma (Euler-Lagrange-Darboux-Gleichung)**.**
Sei $u \in \mathcal{C}^m([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ mit $m \ge 2$ eine Lsg von (4.1). Dann gilt $U_x \in \mathcal{C}^m([0,\infty) \times [0,\infty))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und U_x erfüllt das AWP

$$\begin{cases} \partial_t^2 U_x - \partial_r^2 U_x - \frac{n-1}{r} \partial_r U_x = 0 & \text{in } (0,\infty) \times (0,\infty), \\ U_x = G_x, \partial_t U_x = H_x & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Notation. $\widetilde{U}_x(t,r) := r U_x(t,r)$, $\widetilde{G}_x(r) := r G_x(r)$, $\widetilde{H}_x(r) := r H_x(r)$

Lemma. Sei $u \in \mathcal{C}^m([0,\infty) \times \mathbb{R}^3)$ für $m \ge 3$ eine Lösung der Wellengleichung (4.1). Dann gilt

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widetilde{U}_x - \partial_r^2 \widetilde{U}_x = 0 & \text{in } (0,\infty) \times (0,\infty) \\ \widetilde{U}_x(0,r) = \widetilde{G}_x(r), \partial_t \widetilde{U}_x(0,r) = \widetilde{H}_x(r) & \text{in } \{0\} \times (0,\infty) \\ \widetilde{U}_x(t,0) = 0 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Bemerkung. Mit der Darstellungsformel für $\widetilde{U}_x : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folgt die **Kirchhoffsche Formel** für $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \lim_{r\to 0} U_x(t,r) = \lim_{r\to 0} \frac{\widetilde{U}_x(t,r)}{r} \\ &= \partial_t \left(t ⨍_{\partial B_t(x)} g(y) \, dS(y) \right) + t ⨍_{\partial B_t(x)} h(y) \, dS(y) \\ &= ⨍_{\partial B_t(x)} \left(g(y) + Dg(y) \cdot (y-x) + t h(y)\right) dS(y) \end{aligned}$$

Satz. Seien $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch die Kirchhoffsche Formel. Es gilt

- $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^3)$
- u ist die eindeutige Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung mit Anfangswerten wie in (4.1)

Bemerkungen.
- Regularitätsverlust: u nur in $\mathcal{C}^2$, obwohl $g \in \mathcal{C}^3$
- $u(t,x)$ hängt nur von den Werten von g und h auf $\partial B_t(x)$ ab.

- Somit gilt das **Huygensche Prinzip**: Störungen der Anfangsdaten in der Umgebung eines Punktes ändern für große Zeiten die Lösung in dieser Umgebung nicht.
- Für ungerade Dimensionen n funktioniert die Strategie der Transformation auf eine Lösung der eindim. Wellengleichung mit

$$\widetilde{U}_x(t,r) := (r^{-1}\partial_r)^{(n-3)/2}(r^{n-2}U_x(t,r)).$$

Satz. Sei $n \geq 3$ ungerade, $g \in \mathcal{C}^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}$ und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := \left(\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(2k-1)\right)^{-1}\left[\partial_t\,(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B_t(x)} g\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}\right) + (t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B_t(x)} h\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}\right)\right]$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty)) \times \mathbb{R}^n$ und die eindeutige Lösung der homogenen WG auf $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ mit $u = g$ und $\partial_t u = h$ auf $\{0\}\times\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. (Zusammenhang von WG und WLG) Sei $\Psi_{(n=1)}$ die Fundamentallösung der WLG in $(0,\infty)\times\mathbb{R}^1$. Sei u eine glatte, beschränkte Lsg der Wellengleichung (4.1) mit $h \equiv 0$. Sei

$$v(t,x) := \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_{(n=1)}(t,s)\cdot\overline{u}(s,x)\,\mathrm{d}s \quad \text{mit} \quad \overline{u}(s,x) := u(|s|,x).$$

Dann erfüllt v die homogene WLG

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u &= g & \text{auf } \{0\}\times\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Bemerkung. Für ungerade Dimensionen n können wir Lsgen der WG herleiten. Sei nun $u : [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (4.1) mit n gerade. Dann definiert

$$\overline{u} : [0,\infty)\times\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad (t,(x,\_)) \mapsto u(t,x)$$

eine Lsg der homogenen WG mit Startwerten $\overline{u} = \overline{g}$, $\partial_t\overline{u} = \overline{h}$ auf $\{0\}\times\mathbb{R}^{n+1}$ (wobei $\overline{g}$ und $\overline{h}$ analog definiert zu $\overline{u}$ sind). Mit der Darstellung von $\overline{u}$ und passenden Transformationen ergibt sich eine Formel für u. Speziell für $n = 2$:

Satz. Seien $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$, $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ und $u : (0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := \tfrac{1}{2}\partial_t\left(t^2\fint_{B_t(x)}\frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,\mathrm{d}y\right) + \tfrac{1}{2}t^2\fint_{B_t(x)}\frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,\mathrm{d}y$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^2)$ die eindt. Lsg von (4.1) auf $(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$.

Bemerkung. Bei geraden Dimensionen hängt $u(t,x)$ von allen Anfangsdaten in $B_t(x)$ ab, d. h. es gilt kein Huygensches Prinzip.

Satz. Sei n gerade, $g \in \mathcal{C}^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{C}^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$ und $u : (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := \left(\prod_{k=1}^{n/2} 2k\right)^{-1}\left[\partial_t\,(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n\fint_{B_t(x)}\frac{g(y)}{(t^2-|x-y|^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}y\right) + (t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n\fint_{B_t(x)}\frac{h(y)}{(t^2-|x-y|^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}y\right)\right]$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty)) \times \mathbb{R}^n$ und die eindeutige Lösung der homogenen WG auf $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ mit $u = g$ und $\partial_t u = h$ auf $\{0\}\times\mathbb{R}^n$.

Satz. Sei $f \in \mathcal{C}^{\lfloor n/2\rfloor - 1}((0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$. Sei $v_s : (s,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $s \in (0,\infty)$ die Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_s - \Delta v_s = 0 & \text{in } (s,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ v_s = g,\ \partial_t v_s = f & \text{auf } \{s\}\times\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Setze $u(t,x) := \int_0^t v_s(t,x)\,\mathrm{d}s$. Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$ und u löst die inhomogene Wellengleichung mit Nullanfangsdaten

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u = 0, \partial_t u = 0 & \text{auf } \{0\}\times\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Bemerkung. Aus den Darstellungsformeln für $n = 1, 3$ ergibt sich:

$$u_{n=1}(t,x) = \tfrac{1}{2}\int_0^t\int_{x-\tilde{s}}^{x+\tilde{s}} f(t-\tilde{s},y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tilde{s}$$

$$u_{n=3}(t,x) = \tfrac{1}{4\pi}\int_{\partial B_t(x)}\frac{f(t-|y-x|,y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, $T > 0$ und $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in Ω_T mit $u = 0$ auf $[0,T]\times\partial\Omega$. Sei

$$e(t) := \tfrac{1}{2}\int_\Omega(\partial_t u(t,x))^2 + |Du(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{für } t \in [0,T]\,.$$

Dann ist e konstant auf $[0,T]$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, $T > 0$, $g \in \mathcal{C}^2(\partial_p\Omega_T)$, $h \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ und $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Seien u, v Lösungen von

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T, \\ u = g & \text{auf } \partial_p\Omega_T, \\ \partial_t u = h & \text{auf } \{0\}\times\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt $u \equiv v$.

Def. Sei $(t_0,x_0) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$C(t_0,x_0) := \{(t,x) \in (0,t_0)\times\mathbb{R}^n \mid |x-x_0| < t_0 - t\}$$

Vergangenheitskegel mit Spitze (t_0,x_0).

Satz. Sei $(t_0,x_0) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ und löse $u \in \mathcal{C}^2(\overline{C(t_0,x_0)})$ die homogene Wellengleichung in $C(t_0,x_0)$ mit Anfangsbedingung $u = 0$, $\partial_t u = 0$ auf $\{0\}\times B_{t_0}(x_0)$. Dann gilt $u \equiv 0$ in $C(t_0,x_0)$.

5. PDGLn erster Ordnung

Problem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit hinreichend regulären Rand und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ und $E : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hinreichend regulär (zumindest einmal stetig diff'bar). Gesucht ist eine Lösung u von

$$(5.1)\begin{cases} E(x,u(x),Du(x)) &= 0 & \text{in } \Omega, \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notation. Bezeichnungen der Argumente: $E(x,v,z)$

Satz (Charakteristische GLn). Sei $E \in \mathcal{C}^1(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ eine Lösung von $E(x,u(x),Du(x)) = 0$ in Ω. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\gamma \in \mathcal{C}^1(I,\Omega)$, $v := u\circ\gamma$ und $z := Du\circ\gamma$.
Ist γ eine Lösung der DGL $\gamma' = D_zE(\gamma,v,z)$ in I, so gilt in I:

$$v' = D_z(\gamma,v,z)\cdot z, \qquad z' = -D_x(\gamma,v,z) - D_vE(\gamma,v,z)\cdot z.$$

Def. Die Fktn γ, v und z heißen **Charakteristiken** von (5.1).

Notation. Sei im Folgenden $\Omega := \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+$.

Def. Ein Vektor $(x_0,v_0,z_0) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ heißt **zulässig** für das AWP (5.1), falls folgende Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sind:

$$g(x_0) = v_0, \quad (z_0)_i = D_ig(x_0) \text{ für } i \in \{1,\ldots,n-1\}, \quad E(x_0,v_0,z_0) = 0.$$

Bemerkung. Alle Werte bis auf $(z_0)_n$ sind eindt. durch x_0 bestimmt.

Def. Der Vektor (x_0,v_0,z_0) heißt **nichtcharakteristisch**, falls $D_{z_n}E(x_0,v_0,z_0) \neq 0$.

Lemma. Sei (x_0,v_0,z_0) ein zulässiger, nichtcharakteristischer Vektor für das AWP (5.1). Dann existiert $\delta > 0$, sodass für alle $y \in B_\delta(x_0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+$ eine eindeutige Lösung $\overline{z}(y)$ gibt für

$$\overline{z_i}(y) = D_ig(y) \text{ für } i \in \{1,\ldots,n-1\} \quad \text{und} \quad E(y,g(y),\overline{z}(y)) = 0.$$

Bemerkung. Sei $(x_0,v_0,z_0) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ein zulässiger, nichtcharakteristischer Vektor. Dann existiert nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine lokale Lösung $(\gamma(x_0,-),v(x_0,-),z(x_0,-))$ des Systems mit Anfangswerten

$$\begin{cases} \gamma'(x_0,s) &= D_zE(\gamma,v,z), \\ v'(x_0,s) &= D_zE(\gamma,v,z)\cdot z(x_0,s), \\ z'(x_0,s) &= -D_xE(\gamma,v,z) - D_vE(\gamma,v,z)\cdot z(x_0,s), \\ \gamma(x_0,0) = x_0, & v(x_0,0) = g(x_0), \quad z(x_0,0) = z_0 \end{cases}$$

Bsp. Die charakteristischen Gleichungen der allgemeinen quasilinearen Gleichung $a(-,u)\cdot Du + E_0(-,u) = 0$ sind

$$\gamma' = a(\gamma,v), \quad v' = a(\gamma,v)\cdot z = -E_0(\gamma,v).$$

Die Gleichung für z' wird nicht benötigt.

Lemma. Sei (x_0, v_0, z_0) ein zulässiger, nichtcharakteristischer Vektor für das AWP (5.1). Dann existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und Umgebungen $W \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ und $V \subset \mathbb{R}^n_+$ von x_0, sodass für alle $x \in V$ eindeutige $s = s(x) \in I \cap (0, \infty)$ und $y = y(x) \in W$ existieren mit $x = \gamma(y, s)$ und die Abbildung $x \mapsto (y(x), s(x))$ von der Klasse $\mathcal{C}^2$ ist.

Def. Seien $V, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $V \subset \Omega$. Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^1(V) \cap \mathcal{C}^0(V \cup (\partial\Omega \cap \overline{V}))$ heißt **lokale Lösung** von (5.1) in V, falls gilt:

$$\begin{cases} E(x, u(x), Du(x)) &= 0 \quad \text{in } V, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \cap \overline{V}. \end{cases}$$

Satz. Sei (x_0, v_0, z_0) ein zulässiger, nichtcharakteristischer Vektor für (5.1) und V die Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}^n_+$ aus dem letzten Lemma. Dann ist

$$u : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto v(y(x), s(x))$$

wohldefiniert, von der Klasse $\mathcal{C}^1$ und eine lokale Lsg von (5.1) in V.

Problem. Die **Erhaltungsgleichung** mit $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ist

$$\partial t u + \mathrm{div}_x F(u) = \partial_t u + F'(u) \cdot Du = 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Bsp. Mit $n = 1$ und $F(u) := \frac{u^2}{2}$ ergibt sich **Burgers Gleichung**

$$\partial t u + \mathrm{div}_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = \partial_t u + u\partial_x u = 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Die (wichtigen) charakteristischen Gleichungen sind

$$\gamma' = (1, F'(v)) = (1, v), \quad v' = (1, F'(v)) \cdot z = 0.$$

Die Charakteristiken sind also gerade Wege, auf denen u konstant ist und deren Richtung von den Anfangswerten abhängt. Damit hängt die Lösbarkeit von den Anfangswerten ab. Es kann vorkommen, dass sich verschiedene Charakteristiken in einem Punkt treffen oder Punkte von keiner Charakteristik getroffen wird.

Def. Seien $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Eine Funktion $u \in L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ heißt **schwache Lösung** des AWPs

$$(5.10) \begin{cases} \partial_t u + \mathrm{div}_x(F(u)) &= 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u &= g \quad \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

falls für alle Funktionen $v \in \mathcal{C}^\infty_0([0, \infty) \times \mathbb{R})$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (u\partial_t v + F(u) \cdot Dv) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} g(x)v(0, x) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Lemma. Ist $u \in L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ eine schwache Lösung von (5.10) mit $u \in \mathcal{C}^1(O)$ für eine offene Menge $O \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}$, so gilt

$$\partial_t u + \mathrm{div} F(u) = 0 \ \text{ in } O.$$

Lemma (Rankine-Hugeniot-Bedingung)**.** Ist $u \in L^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ eine schwache Lösung von (5.10) und $O \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine offene Menge, die durch eine $\mathcal{C}^1$-Kurve C in zwei disjunkte, offene Mengen O_l und O_r geteilt wird. Sei $u_l \in \mathcal{C}^1(O_l) \cap \mathcal{C}^0(O_l \cup C)$ mit $u = u_l$ in O_l und $u_r \in \mathcal{C}^1(O_r) \cap \mathcal{C}^0(U_r \cup C)$ mit $u = u_r$ in O_r. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} u_l - u_r \\ F(u_l) - F(u_r) \end{pmatrix} \cdot \nu = 0 \quad \text{in } C,$$

wobei ν den äußeren Normalvektor an O_l bezeichnet.