

Zusammenfassung Stochastik I

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Der abstrakte Maßbegriff

Definition. Eine **Ereignisalgebra** oder **Boolesche Algebra** ist eine Menge \mathfrak{A} mit zweistelligen Verknüpfungen \wedge („und“) und \vee („oder“), einer einstelligen Verknüpfung \neg (Komplement) und ausgezeichneten Elementen $U \in \mathfrak{A}$ (unmögliches Ereignis) und $S \in \mathfrak{A}$ (sicheres Ereignis), sodass für $A, B, C \in \mathfrak{A}$ gilt:

- | | |
|---|---|
| i. $A \wedge A = A$ | vii. $A \vee A = A$ |
| ii. $A \wedge B = B \wedge A$ | viii. $A \vee S = S$ |
| iii. $A \wedge S = A$ | ix. $A \vee U = A$ |
| iv. $A \wedge U = U$ | x. $A \vee \overline{A} = S$ |
| v. $A \wedge \overline{A} = U$ | xi. $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ |
| vi. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ | xii. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ |

Definition. Sei \mathfrak{A} eine Boolesche Algebra. Dann definiert

$$A \leq B: \iff A \wedge B = A$$

eine Partialordnung auf \mathfrak{A} , gesprochen A impliziert B .

Definition. Eine **Algebra** (auch Mengenalgebra) $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge Ω mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operationen stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Durchschnitt: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{A}$
- Komplementbildung: $A \in \mathfrak{A} \implies A^c := \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$

Satz (Isomorphiesatz von Stone). Zu jeder Booleschen Algebra \mathfrak{A} gibt es eine Menge Ω derart, dass \mathfrak{A} isomorph zu einer Mengenalgebra \mathfrak{A} in $\mathcal{P}(\Omega)$ ist.

Definition. Eine **σ -Algebra** ist eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, die nicht nur unter endlichen, sondern sogar unter abzählbaren Vereinigungen stabil ist, d. h.

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Bemerkung. Es gilt damit:

- $\Omega = \emptyset^c \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter abzählbaren Schnitten:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n)^c \right)^c \in \mathfrak{A}.$$

Definition. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer σ -Algebra \mathfrak{A} . Setze

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \in \mathfrak{A}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \in \mathfrak{A}.$$

Bemerkung. In einer σ -Algebra, in der die Mengen mögliche Ereignisse beschreiben, ist der Limes Superior das Ereignis, das eintritt, wenn unendlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten. Der Limes Inferior tritt genau dann ein, wenn alle bis auf endlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten.

Definition. Ein **Ring** $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge Ω mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operation stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Differenz: $A, B \in \mathfrak{A} \implies B \setminus A = B \cap A^c \in \mathfrak{A}$

Ein Ring, der nicht nur unter endlicher, sondern sogar unter abzählbarer Vereinigung stabil ist, heißt **σ -Ring**.

Bemerkung. \mathfrak{A} (σ -) Algebra $\iff \mathfrak{A}$ (σ -) Ring und $\Omega \in \mathfrak{A}$.

Satz. Sei $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von (σ -) Ringen / (σ -) Algebren über einer Menge Ω . Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ ein (σ -) Ring / eine (σ -) Algebra über Ω .

Satz. Sei \mathfrak{R} ein Ring und μ ein Inhalt. Es gelten für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{R}$ die Ein- und Ausschlussformeln

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}), \\ \mu(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}). \end{aligned}$$

Bemerkung. Sei μ ein W-Maß auf $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^1)$. Dann definiert $x \mapsto F_\mu(x) := \mu([-\infty, x])$ eine VF. Für eine VF $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definiert umgekehrt $\mu_F([a, b]) := F(b) - F(a)$ ein W-Maß auf $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^1)$. Analog funktioniert dies auf dem \mathbb{R}^d .

Definition (Wichtige Verteilungsfunktionen).

- **Normalverteilung** (Gaußverteilung) mit EW μ und Varianz σ^2 :

$$F_{\mu\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

$$\text{erfüllt } F'_{\mu\sigma^2}(x) = \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad F_{\mu\sigma^2}(\mu - x) = 1 - F_{\mu\sigma^2}(\mu + x)$$

- **Exponentialverteilung** mit Parameter $\lambda > 0$:

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-\lambda x), & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

- **Poisson-Verteilung** mit Parameter $\lambda > 0$:

$$F_\lambda(x) = \sum_{0 \leq n \leq x} \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda)$$

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Definition. Ein Ereignis $A \in \mathfrak{A}$ trete bei n Versuchen genau $h_n(A) \in \mathbb{N}$ mal auf. Dann heißt

- $h_n(A)$ **absolute Häufigkeit** von A ,
- $H_n(A) := \frac{h_n(A)}{n}$ **relative Häufigkeit** von A .

Bemerkung. Unmittelbar klar:

- $H_n(A) \in [0, 1]$ • $H_n(A) \leq H_n(B)$ für $A \subset B$
- $H_n(A \sqcup B) = H_n(A) + H_n(B)$ für $A \cap B = \emptyset$

Bemerkung. Bei wachsendem n stabilisiert sich normalerweise der Wert $H_n(A)$. Dieser Grenzwert ist die Wahrscheinlichkeit von A .

Definition. Seien $A, B \in \mathfrak{A}$ Ereignisse, $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Versuche. Dann heißt

$$H_n(A \mid B) := \frac{H_n(A \cap B)}{H_n(B)} = \frac{h_n(A \cap B)}{h_n(B)}$$

die **relative Wahrscheinlichkeit** von A unter der Bedingung B .

Bemerkung. Offenbar gilt:

- $H_n(A \mid B) \in [0, 1]$ • $H_n(A_1 \mid B) \leq H_n(A_2 \mid B)$ für $A_1 \subset A_2$
- $H_n(A_1 \sqcup A_2 \mid B) = H_n(A_1 \mid B) + H_n(A_2 \mid B)$ für $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Definition. Sei $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda_d(\Omega) > 0$. Dann heißt das W-Maß

$$\mathbb{P} : \mathcal{L}(\Omega) \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \frac{\lambda_d(A)}{\lambda_d(\Omega)}$$

auf $(\Omega, \mathcal{L}(\Omega))$ **Gleichverteilung**.

Definition. Sei Ω eine endliche Menge. Dann definiert

$$\mathbb{P} : \mathcal{P} \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\# \text{ günstige Fälle}}{\# \text{ mögliche Fälle}}$$

ein W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, genannt **Laplace'sche Wkt.**

Bemerkung. Damit sind Berechnungen von Wkten mit kombinatorischen Überlegungen möglich.

Lemma (Fundamentalprinzip des Zählens). Seien A_1, \dots, A_n endliche Mengen. Dann gilt $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$.

Lemma. Sei A eine endliche Menge, $r \leq n := |A| < \infty$. Dann ist die Anzahl der r -Tupel mit Elementen aus A gleich

	Mit Wdh.	Ohne Wdh.
Mit Ordnung	n^r	$\frac{n!}{(n-r)!}$
Ohne Ordnung	$\frac{(n+r-1)!}{r!}$	$\binom{n}{r} := \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Lemma. Sei A eine endliche Menge, $n := |A| < \infty$. Dann ist die Anzahl der möglichen Zerlegungen von A in disjunkte Mengen B_1, \dots, B_k mit $|B_i| = n_i$ und $n_1 + \dots + n_k = n$ gleich

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} := \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}. \quad (\text{Multinomialkoeffizient})$$

Modell. Eine Urne enthalte N Kugeln, darunter $M \leq N$ schwarze. Dann ist ist die Wkt für das Ereignis A_m^n , dass sich unter n gezogenen Kugeln genau $m \leq \min(n, M)$ schwarze Kugeln befinden,

$$\mathbb{P}(A_m^n) = \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}. \quad (\text{hypergeometrische Verteilung})$$

Bemerkung. Für Maximum-Likelihood-Schätzungen:

- Der Ausdruck $\binom{N-M}{n-m} / \binom{N}{n}$ wird maximal bei $N := \lfloor \frac{n-M}{m} \rfloor$.
- Der Ausdruck $\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}$ wird maximal bei $M := \lfloor \frac{m(N-1)}{n} \rfloor$.

Modell. Eine Urne enthalte N Kugeln in $k \leq N$ verschiedenen Farben, darunter N_1 in der ersten Farbe, ..., N_k in der k -ten Farbe, $N_1 + \dots + N_k = N$. Dann ist ist die Wkt für das Ereignis A_{n_1, \dots, n_k}^n , dass sich unter n gezogenen Kugeln genau $n_1 \leq N_1$ Kugeln der ersten Farbe, ..., und $n_k \leq N_k$ Kugeln der k -ten Farbe befinden, $n_1 + \dots + n_k = n$, gleich

$$\mathbb{P}(A_{n_1, \dots, n_k}^n) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdot \dots \cdot \binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}.$$

Diese W-Verteilung heißt **polyhypergeometrische Verteilung**.

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, & \text{falls } \mathbb{P}(B) > 0 \\ 0, & \text{falls } \mathbb{P}(B) = 0 \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B .

Bemerkung. Falls $\mathbb{P}(B) > 0$ gilt, so ist $\mathbb{P}(- \mid B)$ ein W-Maß über B auf der Spur- σ -Algebra $\mathfrak{A}|_B$.

Lemma. Seien $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{A}$, dann gilt die Pfadregel:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \prod_{i=2}^k \mathbb{P}(A_i \mid A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}).$$

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A_1, \dots \in \mathfrak{A}$ ein vollständiges Ereignissystem, d. h. paarweise disjunkt mit

$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Dann gilt für jedes $B \in \mathfrak{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i) \quad (\text{Formel der totalen Wkt})$$

$$\mathbb{P}(A_n \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)} \quad (\text{Bayessche Formel})$$

Sprechweise. In der Bayesischen Statistik heißt

- $\mathbb{P}(A_i)$ **A-priori-Wahrscheinlichkeit**,
- $\mathbb{P}(A_i \mid B)$ **A-posteriori-Wahrscheinlichkeit**.

Definition. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ heißen **(\mathbb{P} -)unabhängig**, falls $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Bemerkung. • $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mathbb{P}(A) = 0$ ist unabhängig zu jedem $B \in \mathfrak{A}$.

- Wenn $A, B \in \mathfrak{A}$ unabhängig, dann sind auch unabhängig:

$$(A^c, B), \quad (A, B^c), \quad (A^c, B^c)$$

Satz. $A, B \in \mathfrak{A}$ unabhängig $\iff \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.

Definition. Sei $(A_i)_{i \in I}$ (I bel.) eine Familie von Ereignissen in \mathfrak{A} .

- **vollständig unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_m})$$

für alle $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $2 \leq n < \infty$ und

- **paarweise unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j) \quad \text{für alle } i, j \in I, i \neq j.$$

Achtung. Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt nicht vollständige Unabhängigkeit (Gegenbeispiel: Bernsteins Tetraeder).

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$ Ereignissysteme. Dann heißen \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 **unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \quad \text{für alle } A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2.$$

Satz. Seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$ unabhängige Ereignissysteme, die Algebren sind. Dann sind auch die σ -Algebren $\sigma(\mathfrak{A}_1)$ und $\sigma(\mathfrak{A}_2)$ unabhängig.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge von unabhängigen Ereignissen mit gleicher Erfolgswkt $\mathbb{P}(A_i) = p$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Für $k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Stück der Ereignisse A_1, \dots, A_n eintreten, genau

$$B(k, n, p) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Die zugehörige VF $x \mapsto \sum_{0 \leq k \leq x} B(k, n, p)$ heißt **Binomialverteilung**.

Lemma. Voraussetzung wir im vorherigen Satz. Sei $r, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq r$, dann ist die Wkt für das Ereignis $A_k^{(r)}$, dass beim Versuch A_{k+r} der r -te Erfolg eintritt, gleich

$$\mathbb{P}(A_k^{(r)}) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k.$$

Im Spezialfall $r = 1$ ist $\mathbb{P}(A_k^{(1)}) = p(1-p)^k$.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $A_1, \dots, A_r \in \mathfrak{A}$ mit $p_i := \mathbb{P}(A_i)$ für $i = 1, \dots, k$ und $p_1 + \dots + p_r = 1$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei $n \in \mathbb{N}$ Versuchen A_1 genau n_1 -mal, A_2 genau n_2 -mal, ..., A_r genau n_r -mal auftritt ($n_1 + \dots + n_r = n$), genau

$$B(n_1, \dots, n_r, n, p_1, \dots, p_r) := \binom{n}{n_1, \dots, n_r} p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}.$$

Diese W-Verteilung heißt **Multinomialverteilung**.

Satz. Für $0 \leq m \leq n$, $p \in [0, 1]$ gilt

$$\frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \xrightarrow{M, N \rightarrow \infty} \frac{M, N \rightarrow \infty}{M/N \rightarrow p} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

Satz (GWS von Poisson). Für $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\binom{n}{m} p_n^m (1-p_n)^{n-m} \xrightarrow[n p_n \rightarrow \lambda]{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda).$$

Definition. Sei (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum mit zwei W-Maßen \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 . Dann heißt

$$d_\infty(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) := \sup_{A \in \mathfrak{A}} |\mathbb{P}_1(A) - \mathbb{P}_2(A)|$$

Totalvariation des signierten Maßes $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2$.

Satz. Seien \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 zwei W-Maße auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\mathbb{P}_1(\{i\}) = p_i$, $\mathbb{P}_2(\{i\}) = q_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$d_\infty(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} |p_i - q_i|.$$

Lemma. Für $n, k \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$ und \mathbb{P}_1 und \mathbb{P}_2 wie eben definiert durch $p_i := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $q_i := \frac{(np)^k}{k!} \exp(-np)$ gilt

$$d_\infty(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) \leq 2np^2.$$

Lemma (Borel-Cantelli). Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt für $A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(A) = 0.$$

Falls die Ereignisse $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig sind, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}(A) = 1,$$

also zusammengefasst $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Definition. Sei $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von σ -Algebren über Ω . Dann ist

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \quad \text{mit} \quad \mathcal{T}_n := \sigma\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \mathfrak{A}_k\right)$$

die **terminale σ -Algebra** von $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz (Null-Eins-Gesetz von Kolmogorow). Sei $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Unter- σ -Algebren in einem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für alle Ereignisse $A \in \mathcal{T}_\infty$ der terminalen σ -Algebra.

Integrationstheorie

Definition. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ messbare Räume. Dann heißt $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ **$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ -messbar**, falls

$$f^{-1}(A_2) \in \mathfrak{A}_1 \quad \text{für alle } A_2 \in \mathfrak{A}_2.$$

Notation. Für solches f schreiben wir $f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$.

Notation. Sei Ω eine Menge, $A \subset \Omega$. Dann heißt

$$\chi_A = \mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto |\{\star | \omega \in A\}| = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Indikatorfunktion von A .

Beobachtung. Sei (Ω, \mathfrak{A}) messbarer Raum, $A \subset \Omega$, dann gilt

$$\mathbb{1}_A \text{ } (\mathfrak{A}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))\text{-messbar} \iff A \in \mathfrak{A}.$$

Lemma. Die Verkettung messbarer Abbildungen ist messbar, d. h. für $f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und $g : (\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \rightarrow (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ gilt $g \circ f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \rightarrow (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$.

Lemma. Sei $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abb. und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega)$, dann ist

$$\mathfrak{A}(f^{-1}(\mathcal{E}')) = f^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}')).$$

Lemma. Sei (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum und $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung, sowie $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}(\Omega')$. Dann gilt

$$f \text{ ist } (\mathfrak{A}, \sigma(\mathcal{E}))\text{-messbar} \iff f^{-1}(E) \in \mathfrak{A} \text{ für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Notation. Seien $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zwei numerische Funktionen. Setze

$$\{f \leq g\} := \{\omega \in \Omega | f(\omega) \leq g(\omega)\} \subset \Omega$$

und definiere analog $\{f < g\}$, $\{f \geq g\}$, $\{f > g\}$, $\{f = g\}$, $\{f \neq g\}$.

Satz. Für eine numerische Fkt. $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ sind äquivalent:

- f ist messbar
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \geq a\} = f^{-1}([a, \infty]) \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f > a\} \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \leq a\} \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathfrak{A}$

Definition. • Sei (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum, $f : \Omega' \rightarrow \Omega$ eine Abbildung, dann heißt

$$\sigma(f) := f^{-1}(\mathfrak{A}) := \{f^{-1}(A) | A \in \mathfrak{A}\}$$

die **von f erzeugte σ -Algebra**.

- Sei $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von messbaren Räumen, $f_i : \Omega' \rightarrow \Omega_i$ für alle $i \in I$ eine Abbildung. Dann heißt

$$\sigma((f_i)_{i \in I}) := \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(f_i)\right) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)\right)$$

die **von der Familie $(f_i)_{i \in I}$ erzeugte σ -Algebra**.

Definition. Sei $(\Omega', \mathfrak{A}', \mu')$ ein Maßraum, (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum, $f : (\Omega', \mathfrak{A}) \rightarrow (\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist durch

$$\mu'_f := \mu' \circ f^{-1} : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \mu'(f^{-1}(A))$$

ein Maß auf (Ω, \mathfrak{A}) , das sog. **Bildmaß** von μ' unter f , definiert.

Satz. Für zwei numerische Funktionen $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ gilt:

- $\{f < g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f > g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f = g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \leq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \geq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \neq g\} \in \mathfrak{A}$

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbare numerische Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann auch messbar (\dagger : falls $0 \notin \text{Bild}(f)$):

- $\lambda \cdot f$
- $f + \mu \cdot g$
- $f \cdot g$
- $\frac{1}{f}(\dagger)$
- $\frac{g}{f}(\dagger)$

Satz. Seien $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$, $n \in \mathbb{N}$ messbare numerische Funktionen, dann auch messbar:

- $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$
- $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$
- $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$
- $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$

Dabei werden Infimum, Supremum, usw. punktweise gebildet.

Definition. Für $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißen die Funktionen

- $|f| := \max(f, -f) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ **Betrag** von f
- $f^+ := \max(f, 0) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ **Positivteil** von f
- $f^- := -\min(f, 0) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ **Negativteil** von f

Satz. Falls $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbar, dann auch $|f|$, f^+ und f^- .

Satz. • Sei (Ω, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist $f(\sigma(\mathcal{O}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ -messbar.

- $\sigma(\mathcal{O})$ ist die kleinste σ -Algebra, bezüglich der alle stetigen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ Borel-messbar sind.

Satz (von Lusin). Sei $M \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda_n(M) < \infty$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Borel-messbar, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists K_\epsilon \subset M \text{ kompakt} : \lambda_n(M \setminus K_\epsilon) < \epsilon \text{ und } f|_{K_\epsilon} \text{ stetig.}$$

Definition. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Càdlàg-Funktion** (continue à droite, limite à gauche), falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{y \uparrow x} f(y) \text{ existiert und } \lim_{y \downarrow x} f(y) = f(x).$$

Beobachtung. Jede kumulierte VF ist eine Càdlàg-Funktion.

Definition. Die **Variation** von $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bzgl. einer Zerlegung $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ von $[a, b]$ ist die nicht-negative Zahl

$$V(g, Z) := \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})|.$$

Die **Totalvariation** von $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$V_a^b(g) := \sup \{V(g, Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Falls $V_a^b(g) < \infty$, so heißt g **von beschränkter Variation**.

Satz. Es sind messbar:

- Monotone Funktionen
- Càdlàg-Funktionen
- Funktionen von beschränkter Variation

Definition. Eine \mathfrak{A} -messbare numerische Funktion X über einem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ heißt **Zufallsgröße** (ZG) oder **Zufallsvariable**.

Bemerkung. Häufig fordert man zusätzlich $\mathbb{P}(\{X = \pm\infty\}) = 0$.

Definition. Das durch die ZG X induzierte Bildmaß

$$P_X : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1) \rightarrow [0, 1], \quad B \mapsto \mathbb{P}(\{X \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

heißt **Verteilungsgesetz** der ZG X und

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto P_X([-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{X \leq x\})$$

heißt **Verteilungsfunktion** (VF) der ZG X .

Satz. Sei F eine VF auf \mathbb{R}^1 . Dann existiert ein W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und eine ZG X auf Ω derart, dass $F_X = F$.

Beweis. 1. Möglichkeit: Wähle $\Omega := \mathbb{R}^1$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1)$ und $\mathbb{P} := \mu_F$ als das von F erzeugte Maß und setze $X := \text{id}$.

2. Möglichkeit: Wähle $\Omega := [0, 1]$, $\mathfrak{A} := \mathcal{L}([0, 1])$, $\mathbb{P} := \lambda_1$. Setze

$$X(w) := F^-(w) := \inf\{F \geq w\} \quad \text{für } w > 0, \quad X(0) := \lim_{w \downarrow 0} F^-(w)$$

Definition. Sei X_1, \dots, X_n eine endliche Familie von ZGen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Diese Familie heißt **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i \in B_i\}) \quad \text{für alle } B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1).$$

Satz. Seien X_1, \dots, X_n unabhängige ZGen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar. Setze $Y_i := g_i(X_i) := g_i \circ X_i$ für $i = 1, \dots, n$, dann sind auch Y_1, \dots, Y_n unabhängige ZGen.

Definition. Eine Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ heißt **einfache Funktion** oder **Elementarfunktion** auf (Ω, \mathfrak{A}) , wenn gilt:

- f ist messbar
 - $f(\Omega) \subset [0, \infty[$
 - $f(\Omega)$ ist endlich
- Die Menge aller elementaren Funktionen auf (Ω, \mathfrak{A}) ist $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Notation. $a \wedge b := \min\{a, b\}$ und $a \vee b := \max\{a, b\}$

Satz. Seien $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $a \geq 0$. Dann auch in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$:

- $f + g$
- $f \cdot g$
- $f \vee g$
- $f \wedge g$
- $a \cdot f$

Definition. Sei $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\Omega = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen mit $A_j \in \mathfrak{A}$ für alle $j = 1, \dots, k$, sodass $f(A_j) = \{y_j\}$, dann heißt die Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^k y_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{kanonische Darstellung.}$$

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ elementar. Dann

heißt die (von der Darstellung $f = \sum_{j=1}^k y_j \cdot \mathbb{1}_{A_j}$ unabh.) Zahl

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sum_{j=1}^k y_j \mu(A_j) \quad \mu\text{-Integral von } f.$$

Satz. Es gilt für $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$, $a, b \geq 0$:

- $\int_{\Omega} \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$
- $f \leq g \implies \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$
- $\int_{\Omega} a \cdot f + b \cdot g d\mu = a \cdot \int_{\Omega} f d\mu + b \cdot \int_{\Omega} g d\mu$

Satz. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone (= monotone) Folge elementarer Funktionen über (Ω, \mathfrak{A}) . Dann gilt für jede elementare Funktion f mit $f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ die Ungleichung $\int_{\Omega} f d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu$.

Korollar. Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ isotone Folgen elementarer Funktionen mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$. Dann ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n d\mu$.

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}))$ nichtnegativ. Dann gibt es eine isotone Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementarer Funktionen mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$.

Definition. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}))$ nichtnegativ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge elementarer Funktionen mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$. Dann heißt

$$\int_{\Omega} f d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu \quad \mu\text{-Integral von } f.$$

Definition. Eine \mathfrak{A} -messbare, numerische Fkt.

$f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}))$ heißt **μ -integrierbar**, falls

$$\int_{\Omega} f^+ d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} f^- d\mu < \infty.$$

In diesem Fall definieren wir das **Lebesgue-Integral** von f als

$$\int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu.$$

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}^1, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}^1))$ messbar. Dann sind äquivalent:

- f ist μ -integrierbar
- f^+ und f^- sind μ -integrierbar
- $|f|$ ist μ -integrierbar
- $\exists \mu$ -integrierbare Funktion g mit $|f| \leq g$

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}^1, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}^1))$ μ -integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind auch μ -integrierbar:

- $f \pm g$
- $f \vee g$
- $f \wedge g$
- $\alpha \cdot f$

Es gilt: $\int_{\Omega} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu + \beta \int_{\Omega} g d\mu$ (Linearität)

• $|\int_{\Omega} f d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu$ • $f \leq g \implies \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$ (Monotonie)

Achtung. Das Produkt $(f \cdot g)$ ist i. A. nicht μ -integrierbar!

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}))$. Für $p \in [1, \infty[$ heißt f **p -integrierbar**, falls $|f|^p$ μ -integrierbar ist.

$$L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ } p\text{-integrierbar, also } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\},$$

$$L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid \exists C > 0 : |f| \leq C \text{ fast überall}\}$$

ist dann ein VR, genannt **Lebesgue-Raum** (L^p -Raum), mit Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| := \inf\{C \in \mathbb{R} \mid |f| \leq C \text{ fast-überall}\}$$

Wir betrachten in L^p zwei Funktionen als gleich, wenn sie bis auf einer Nullmenge übereinstimmen. Die Δ -Ungleichung in L^p wird auch **Minkowski-Ungleichung** genannt.

Satz. Der $L^p(\mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum, d. h. jede Cauchy-Folge bzgl. der Norm $\|\cdot\|_p$ ist auch konvergent.

Satz. Sei $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $g \in L^q(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $fg \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und es gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \text{(Hölder-Ungleichung).}$$

Bemerkung. Für $p = 2$ ist $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ der Hilbertraum der quadratisch integrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} (f \cdot g) d\mu.$$

Mit $q = 2$ folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| = \|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad \text{(Cauchy-Schwarz-Ungl.)}$$

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}^1, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}^1))$ nichtnegativ. Dann gilt

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0 \iff f \stackrel{\text{f.ü.}}{=} 0.$$

Satz (von der monotonen Konvergenz). Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}^1, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}^1))$ nicht negativ und \mathfrak{A} -messbar, sodass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge ist. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Korollar (Beppo Levi). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht negativer, \mathfrak{A} -messbarer, numerischer Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Definition. Sei (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum mit Maßen μ und η . Dann heißt μ **absolut stetig** bezüglich η (notiert $\mu \ll \eta$), falls

$$\eta(A) = 0 \implies \mu(A) = 0 \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}^1, \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}^1))$ nichtnegativ und μ -integrierbar. Dann definiert

$$\nu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \int_A f d\mu = \int f \cdot \chi_A d\mu$$

ein zu μ absolut stetiges, endliches Maß auf (Ω, \mathfrak{A}) .

Lemma (Fatou). Sei für $n \in \mathbb{N}$ die Fkt. $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ nicht negativ und \mathfrak{A} -messbar. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Falls $\int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu < \infty$, gilt zusätzlich

$$\int_{\Omega} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Satz. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, (Ω', \mathfrak{A}') ein messbarer Raum und $f : \Omega' \rightarrow \Omega$ messbar. Bezeichne mit $\mu' := \mu \circ f^{-1}$ das Bildmaß von μ unter f . Dann gilt für alle μ' -integrierbaren Funktionen $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_{\Omega'} g d\mu' = \int_{\Omega} g \circ f d\mu$$

Satz (Transformationssatz). Sei $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ und sei $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann auf \tilde{U} Lebesgue-Borel-integrierbar, wenn $(f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf U Lebesgue-Borel-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_U (f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| \, d\mu_{LB} = \int_{\phi(U)} f \, d\mu_{LB} = \int_{\tilde{U}} f \, d\mu_{LB}.$$

Obige Gleichung ist auch erfüllt, wenn lediglich $f \geq 0$ gilt (also $f \in \mathbb{E}(\tilde{U}, \mathfrak{B}(\tilde{U}))$); dann kann das Integral auch den Wert ∞ annehmen).

Definition. Für eine ZG $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ heißt die Zahl

$$\mathbb{E}X := \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^1} \text{id} \, dP_X$$

der **Erwartungswert** der ZG X , wobei $P_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$.

Korollar. Sei $g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ Borel-messbar und P_X -integrierbar. Dann gilt

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}^1} g \, dP_X = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dF_X(x),$$

wobei das rechte Integral das uneigentliche Riemann-Stieltjes-Integral bzgl. F_X ist.

Definition. Für Zufallsvektoren $X = (X_1, \dots, X_k)$ mit Werten in \mathbb{R}^k ist

$$\mathbb{E}X = (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_k)$$

Sei $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-messbar und $P_{(X_1, \dots, X_k)}$ -integrierbar. Dann ist

$$\mathbb{E}g(X_1, \dots, X_k) = \int_{\mathbb{R}^k} g(x_1, \dots) \, dP_{(X_1, \dots, X_k)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_k) \, dF_X(x_1, \dots, x_k).$$

$F = F_X$ sei die VF einer ZG $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1), P_X)$

Definition. • F_X heißt diskret, falls F_X höchstens abzählbar viele Sprünge $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$ mit $p_k := F(x_k) - \lim_{x \uparrow x_k} F(x) > 0$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \text{ besitzt (dann ist } F_X \text{) zwischen den Sprüngen konstant) item}$$

- F_X heißt **stetig** (diffus, atomlos), wenn F_X in jedem Punkt stetig ist. Dann gilt $P_X(\{X = x\}) = 0$.
- F_X heißt **absolut stetig** (totalstetig), wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für abzählbare viele, disjunkte Intervalle $I_k =]a_k, b_k]$ mit $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ sich $\sum_k (F_X(b_k) - F_X(a_k)) \leq \epsilon$ ergibt.
- **singulärstetig** (stetig, aber nicht absolutstetig), wenn die Wachstumspunkte VF F_X eine Lebesgue-Nullmenge bilden, also

$$\lambda_1(\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \epsilon > 0 : F(x + \epsilon) - F(x - \epsilon) > 0\}) = 0$$

Satz. $F'_X(x)$ existiert für Lebesgue-fast-alles $x \in \mathbb{R}^1$.

Satz. Jede VF F auf \mathbb{R}^1 besitzt eine eindeutige Zerlegung (Lebesgue-Zerlegung) als konvexe Linearkombination einer diskreten, singulär-stetigen und absolut-stetigen VF:

$$F = \alpha_d F_d + \alpha_s F_s + \alpha_a F_a$$

mit $\alpha_d, \alpha_s, \alpha_a \geq 0$ und $\alpha_d + \alpha_s + \alpha_a = 1$.

Definition. Falls F_X absolut-stetig, dann heißt die nicht-negative, Lebesgue-messbare Funktion

$$f f_X(x) := \begin{cases} F'_X(x) & \text{falls Ableitung ex.} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{welche } \int_{\mathbb{R}^1} f_X \, d\lambda_1 = 1 \text{ erfüllt,}$$

die **W-Dichte** von F_X .

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}^1} x \, dF_X = \int_{\mathbb{R}^1} \text{id} \cdot f_X \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \, dx$$

Bemerkung. Für diskrete F_X , also

$$F(x) = c_i \quad \text{für alle } x \in]x_i, x_{i+1}[$$

für $x_1, \dots \in \mathbb{R}$ und $c_1, \dots \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i)$$

Deutung der $\mathbb{E}X$ als Massenschwerpunkte

...
 $F(X_1, \dots, X_k)$ heißt **absolut stetig**, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für $I_\alpha =]a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \dots$ mit $\sum_{j \geq 1} \lambda_k(I_j) \leq \delta$ gilt:

$$\sum_{j \geq 1} \mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_k)}(I_j) = \sum_{j \geq 1} (\text{triangle} F_{(X_1, \dots, X_k)}) I_j \leq \epsilon$$

Genauso dann existiert eine (Lebesgue-) Borel-messbare Funktion

$$f_{(X_1, \dots, X_k)}(x_1, \dots, x_k) \geq 0 \text{ mit } \int_{\mathbb{R}^1} f_{(X_1, \dots, X_k)} \, d\lambda_k = 1$$

Sei $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ Borel-messbar

$$\mathbb{E}g(X_1, \dots, X_k) = \int_{\mathbb{R}^1} g \cdot f_{(X_1, \dots, X_k)} \, d\lambda_k$$

Falls $F_{(X_1, \dots, X_k)}$ "hinreichend glatt", so ergibt sich

$$f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \cdot \partial x_k} F_{(X_1, \dots, X_k)}(x_1, \dots, x_k)$$

F_{X_1, \dots, X_k} heißt singulär-stetig, falls $P_{(X_1, \dots, X_k)}(\{x\}) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^k$ und es existiert eine Lebesgue-messbare Menge S mit $\lambda_k(S) = 0$ und $P((X_1, \dots, X_k))(S) = 1$.

$F_{(X_1, \dots, X_k)}$ heißt diskret, falls eine höchstens abzählbare Punktmenge $S = \{x_1, \dots\} \subset \mathbb{R}^k$ und $p_i = P_{(X_1, \dots, X_k)}(\{x_i\}) > 0$ mit $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$

Sei $x_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(k)}) \in \mathbb{R}^k$

$$\mathbb{E}g(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i \geq 1} g(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(k)}) p_i$$

$g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ sei zunächst beliebig (stetig oder hinreichend glatt)

Sei $a = \xi_0^{(n)} < \xi_1^{(n)} < \dots < x_{k_n}^{(n)}$ und $x_k^{(n)} \in]\xi_{k-1}^{(n)}, \xi_k^{(n)}[$.

Definition. (ξ_n) sei eine Zerlegungsfolge mit

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$(x_k^{(n)})$ sei eine Zwischenwertfolge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} g(x_k^{(n)}) (F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)})) = \int_a^b g(x) \, dF(x) = \int_{[a,b]} g \, dF \lambda_1$$

wobei $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ zunächst beliebig (monoton oder von beschränkter Variation)

Sei g bzgl. F R-S-integrierbar, d. h. der Grenzwert oben existiert. Dann ist auch F bzgl. g R-S-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b g(x) \, dF(x) = [g(x) \cdot F(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \, dg(x)$$

Ausnutzen der partiellen Integration zur Berechnung von Erwartungswerten

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$$

$$\int_a^b x \, dF_X(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} [x \cdot F_X(-x)]_0^{-a} - \int_0^{-a} F_X(-x) \, dx + [x(F_X(x) - 1)]_0^b - \int_0^b (1 - F_X(x)) \, dx$$

Falls $\lim_{x \rightarrow \infty} x F_X(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F_X(x)) = 0$, so gilt

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x) - F_X(-x)) \, dx, \text{ falls } \mathbb{E}|X| < \infty$$

$$\mathbb{E}|X| = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x) - F_X(-x)) \, dx$$

Genauso werden Erwartungswerte von Funktionen von X berechnet, z.B. mit $x^2 F_X(-x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ und $x^2(1 - F_X(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

$$\mathbb{E}X^2 = 2 \int_0^{\infty} x(1 - F_X(x) + F_X(-x)) \, dx = \mathbb{P}(|X| > x) \text{ (falls } F_X \text{ stetig)}$$

$$\mathbb{E}|X|^k = k \int_0^{\infty} x^{k-1} (1 - F_X(x) + F_X(-x)) \, dx$$

Definition. $\mathbb{E}X^k (\mathbb{E}|X|^k)$ heißt k -tes (absolutes) Moment der ZG X . $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k$ heißt k -tes zentriertes Moment der ZG X . $\text{Var}(X) := D^2 X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2$ heißt **Streuung** (Dispersion, Varianz) der ZG X .

X sei ZG über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}X^n = \int_{\mathbb{R}^n} x^n \mathbb{P}_X \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, dF_X(x)$$

heißt **n -tes Moment**

$\mathbb{E}X$ Erwartungswert (Schwerpunkt der W-Massenverteilung)

„Lageparameter“

$$D^2 X = \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 \geq 0$$

Eigenschaft: $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ für $a, b \in \mathbb{R}^1$

$$\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}(X - c)^2 \text{ für alle } c \in \mathbb{R}^1$$

$$\text{Var}(X) = 0 \iff X - \mathbb{E}X = 0 \iff X = \text{const } \mathbb{P}\text{-fast-sicher}$$

Satz. X sei eine ZG und $g : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty]$ nichtfallend. Dann gilt $\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}g(|X|)}{g(\epsilon)}$ für beliebiges $\epsilon > 0$.

Spezialfälle:

- $g(x) = x$, dann $\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}X}{\epsilon}$ **Markow-Ungleichung**
- $g(x) = x^2$, dann $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}$ **Tschebyschew-Ungleichung**
- $g(x) = \exp(ax)$ für $a > 0$, dann $\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \exp(-a\epsilon)\mathbb{E}\exp(a|X|)$

$$\begin{aligned} 0 > B = \mathbb{E}\exp(a|X|) &\geq \frac{a^n \mathbb{E}|X|^n}{n!} \\ \implies \mathbb{E}|X|^n &\leq \frac{B}{a^n} n! \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \implies |\mathbb{E}X^n| &\leq \frac{B}{a^n} n! \\ \implies \mathbb{E}\exp(zX) &\text{ ist analytisch für } |z| < a \end{aligned}$$

Definition. $\mathbb{E}\exp(zX)$ heißt momenterzeugende Funktion der ZG X oder VF F_X .

$$X = N(\mu, \sigma^2) \implies \mathbb{E}\exp(zX) = \exp\left(z\mu + \frac{\sigma^2}{2}z^2\right) \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

Höldersche Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}XY| &\leq \mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}} \text{ für } p, q \geq 1 \\ \implies \text{Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung} &\text{ für } p = q = 2: \end{aligned}$$

$$|\mathbb{E}XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

Verallgemeinerung:

$$\mathbb{E}(X_1^{n_1} \cdots X_k^{n_k}) \leq (\mathbb{E}|X_1|^{n_1})^{\frac{n_1}{n}} \cdots (\mathbb{E}|X_k|^{n_k})^{\frac{n_k}{n}}, \quad n = n_1 + \dots + n_k$$

Jensensche Ungleichung

Sei $g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ konvex auf einem Intervall J , d. h.

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y) \text{ für alle } x, y \in I \text{ und } \alpha \in [0, 1]$$

Per Induktion folgt: $g(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i g(x_i)$ für $x_1, \dots, x_n \in J$,
 $\alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$

Satz. $g(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}g(X)$, falls $\mathbb{P}(X \in J) = 1$ und $\mathbb{E}|X| < \infty$

$$g(x) = |x|^{\frac{n}{m}} \text{ für } 0 < m \leq n, \implies \text{Ljapunow-Ungleichung}$$

Problem (Momentenproblem). Unter welchen Bedingungen ist eine Zahlenfolge $c_0 = 1, c_1, c_2, \dots$ eine Momentenfolge einer ZG X , d. h. $c_n = \mathbb{E}X^n$.

Antwort.

$$0 \leq \mathbb{E}(z_0 + z_1 X + \dots + z_n X^n)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^n z_i z_j X^{i+j}\right) = \sum_{i,j=1}^n z_i z_j c_{i+j}$$

genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Problem. Wann ist die zugehörige VF F_X eindeutig festgelegt?

$c_n = \int_0^\infty x^n dF_X(x)$ (Stieltjes-MP), $c_n = \int_{-\infty}^\infty x^n dF_X(x)$ (Hamburger MP)

Hinreichende Bedingung für Bestimmtheit:

$$\text{Stieltjes-MP: } \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{c_{2n}^n} = \infty$$

$$\text{Hamburger MP: } \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{c_{2n}^{\frac{1}{2n}}} = \infty$$

(Carleman-Kriterien)

Definition. Sei $X = (X_1, \dots, X_k)$ eine k -dimensionale ZV über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. X_1, \dots, X_k heißen **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(\{X_i \in B_i\})$$

für alle $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_k \leq x_k)$$

für alle $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. Falls die W-Dichte

$f_X(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial}{\partial x_1 \cdots \partial x_k} F(x_1, \dots, x_k)$ existiert (also F_X absolut stetig), ist dies äquivalent zu

$$f_X(x_1, \dots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_k}(x_k).$$

Für diskrete Verteilungen ist dies äquivalent zu

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

für alle $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$.

Definition. Für eine k -dimensionale ZV $X = (X_1, \dots, X_k)$ heißt

$$F_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_l})}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}) = \lim_{x_j \rightarrow \infty_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}}} F_{(X_1, \dots, X_k)}(x_1, \dots, x_k)$$

für $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k, l = 1, \dots, k-1$ **l -dimensionale Rand-(Marginal-)verteilungsfunktion.**

Falls $f_X(x_1, \dots, x_k)$ existiert, so existieren sämtliche Randdichten

$$f_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \int_{\mathbb{R}^{k-l}} f_{(X_1, \dots, X_k)}(x_1, \dots, x_k) d(x_1, \widehat{x_{i_1}}, \dots, \widehat{x_{i_k}}, \dots, x_k)$$

Analog folgt für eine diskrete ZV die Diskretheit der Randverteilungen $k = 2$:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_m^{(1)}) = \sum_{x_m^{(2)}} \mathbb{P}(X_1 = x_m^{(1)}, X_2 = x_m^{(2)})$$

$$\mathbb{P}(X_2 = x_m^{(2)}) = \sum_{x_m^{(1)}} \mathbb{P}(X_1 = x_m^{(1)}, X_2 = x_m^{(2)})$$

wobei $x_m = (x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(k)})$ die Massenschwerpunkte sind. Wichtig: Im allgemeinen bestimmen die Randverteilungen nicht die gemeinsame Verteilung des Vektors.

Definition. (X, Y) sei eine zweidimensionale ZV über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}X^2 < \infty, \mathbb{E}Y^2 < \infty$. Dann heißt

$$\text{Var}(X, Y) := \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$$

Kovarianz von X und Y und

$$\text{Cor}(X, Y) := \frac{\text{Var}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

Korrelation von X und Y .

Satz. • Falls X, Y unabhängig, so gilt $\text{Var}(X, Y) = \text{Cor}(X, Y) = 0$

- $|\text{Cor}(X, Y)| \leq 1$
- $\text{Cor}(X, Y) = 1 \iff \exists a, b \in \mathbb{R}^1 : \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1.$

Definition. Falls $\text{Cor}(X, Y) = 0$, so heißen X, Y **unkorreliert**.

Achtung. Aus Unkorreliertheit folgt i. A. nicht Unabhängigkeit!

Beispiel. Sei X eine ZG mit der symmetrischen Dichte

$$f_X(x) = f_X(-x) \text{ und } \int_{-\infty}^\infty |x|^3 f_X(x) dx < \infty, \text{ dann ist}$$

$\text{Var}(X, X^2) = 0$, aber X und X^2 nicht unabhängig.

Bemerkung. • $\text{Cor}(X, Y) = 1$: positive Korrelation

• $\text{Cor}(X, Y) = -1$: negative Korrelation

• $\text{Cor}(X, Y) = 0$: Unkorreliertheit

Wichtig: Falls (X, Y) eine zweidimensionale Normalverteilung besitzt, so folgt aus $\text{Cor}(X, Y) = 0$ die Unabhängigkeit von X und Y .

Satz. X_1, \dots, X_n seien paarweise unkorrelierte ZGen mit $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$