

Zusammenfassung Algebr. Topologie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Def. Ein **affines n -Simplex** ist die konvexe Hülle von $n+1$ affin unabhängigen Punkten $p_0, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{R}^N$. Die konvexe Hülle von einer Teilmenge dieser Eckpunkte wird **Seite** genannt. Das **Standard- n -Simplex** Δ_n ist das von den $n+1$ Standard-Basisvektoren im \mathbb{R}^{n+1} aufgespannte Simplex.

Def. Ein (endlicher) **geometrischer Simplicialkomplex** ist eine (endliche) Menge \mathcal{S} endlich vieler affiner Simplexes im \mathbb{R}^N , sodass:

- Ist $K \in \mathcal{S}$ und $T \subset K$ eine Seite von K , dann ist auch $T \in \mathcal{S}$.
- Für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$ ist $K_1 \cap K_2$ entweder eine Seite von K_1 und K_2 oder leer.

Def. — Die $|\mathcal{S}| := \bigcup_{K \in \mathcal{S}} K$ heißt zu \mathcal{S} gehörender **Polyeder** und \mathcal{S} Triangulierung von $|\mathcal{S}|$.

Def. Ein geometrischer Simplicialkomplex mit einer Totalordnung auf der Menge der Eckpunkte heißt **geordnet**.

Notation. Ein n -Simplex mit Eckpunkten v_0, \dots, v_n in einem geordneten geom. Simplicialkomplex wird mit $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ bezeichnet, falls $v_0 < v_1 < \dots < v_n$.

Notation. $\mathcal{S}_n := \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma \text{ ist geordneter } n\text{-Simplex}\}$

Def. Eine **simpliciale n -Kette** in einem geordneten geom. Simplicialkomplex ist eine endliche formale Linearkombination

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma,$$

wobei $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}$. Die Menge solcher Linearkombinationen ist $C_n(\mathcal{S})$. Sie ist die freie abelsche Gruppen über der Menge der Simplexes.

Bemerkung. $C_n(\mathcal{S})$ ist eine Gruppe.

Def. Der Rand eines orientierten n -Simplex $\langle v_0, \dots, v_n \rangle \in \mathcal{S}$ ist

$$\delta \langle v_0, \dots, v_n \rangle := \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle.$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Gruppenhomo $\partial_n : C_n(\mathcal{S}) \rightarrow C_{n-1}(\mathcal{S})$.

Def. Ein **Kettenkomplex** C_\bullet ist eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Gruppenhomomorphismen $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ mit der Eigenschaft $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Def. Sei C_\bullet ein Kettenkomplex.

- $Z_n(C_\bullet) := \ker \partial_n \subset C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n -Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) := \operatorname{im} \partial_{n+1} \subset C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n -Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet) / B_n(C_\bullet)$ heißt **n -te Homologiegruppe**.

Prop. Für $n \geq 1$ gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Die simplicialen n -Ketten bilden also einen Kettenkomplex.

Def. Ein **singuläres n -Simplex** in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Wir bezeichnen mit $\Delta_n(X)$ die Menge der singulären n -Simplexes in X und mit $C_n(X)$ die freie abelsche Gruppe über $\Delta_n(X)$. Wir definieren

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X), \quad \sigma \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n)}.$$

Analog zu oben gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, man erhält also einen Komplex $C_\bullet(X)$ der singulären Ketten in X . Die Homologie dieses Komplexes bezeichnet man mit $H_n(X)$.

Def. Eine **Kettenabbildung** zwischen Kettenkomplexen C_\bullet und D_\bullet ist eine Familie $(f_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Gruppenhomomorphismen, welche mit dem Differential verträglich sind, d. h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \partial_n^{(D)} \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n^{(C)}.$$

Aus einer solchen Abbildung erhält man wiederum eine Abbildung $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit definiert H_n einen Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Def. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von topologischen Räumen erhalten wir eine Abbildung $f_* : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ definiert durch $f_*(\sigma) := f \circ \sigma$ für ein n -Simplex $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$. Die Zuordnung $f \mapsto f_*$ erfüllt die Funktorialitätsaxiome. Somit definiert H_n für alle $n \in \mathbb{N}$ einen Funktor **Top** \rightarrow **AbGrp**.

Korollar. Homöomorphe Räume haben isomorphe singuläre Homologiegruppen.

Prop. Sei $\pi_0(X)$ die Menge der Wegekompenten von X . Die Inklusionen $A \hookrightarrow X$ (für $A \in \pi_0(X)$) induzieren einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{A \in \pi_0(X)} H_*(A) \cong H_*(X).$$

Prop. Sei $X \neq \emptyset$ wegzusammenhängend. Dann ist $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Def. Eine **Kettenhomotopie** zw. Kettenabb. $\phi_*, \psi_* : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ ist eine Folge von Homomorphismen $P_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n = \phi_n - \psi_n.$$

Prop. Seien $\phi_*, \psi_* : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt

$$H_*(\phi_*) = H_*(\psi_*) : H(C_\bullet) \rightarrow H(D_\bullet).$$

Satz. Seien $f, g : X \rightarrow Y$ homotope Abbildungen. Dann sind $f_*, g_* : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ kettenhomotop.

Korollar. • Seien $f, g : X \rightarrow Y$ homotope Abbildungen. Dann gilt

$$f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y).$$

- Homotopieäquivalente Räume haben isomorphe Homologiegruppen.

Bsp (Homologie von wichtigen Räumen).

$$H_i(S^n) = H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{wenn } i = 0, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = 0 \\ \mathbb{Z}/2, & \text{wenn } i < n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & \text{wenn } i \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i \leq 2n \text{ und } i \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$