

# Zusammenfassung Numerik von PDEs

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Def.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Eine DGL der Form

$$F(x, u, Du, \dots, D^k u) = 0$$

heißt **partielle DGL/PDE** der Ordnung  $k \geq 1$ , wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gesucht ist.

**Def (Klassifikation von PDEs).**

- Die PDE heißt **linear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

mit Funktionen  $a_\alpha, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt.

- Die PDE heißt **semilinear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u) = 0$$

besitzt, wobei  $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben sind.

- Die PDE heißt **quasilinear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u) D^\alpha u + a_0(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u) = 0$$

hat, wobei  $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k}$  gegeben sind.

- Die PDE heißt **nichtlinear**, falls die Ableitungen der höchsten Ordnung nicht linear vorkommen.

**Def.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Funktion. Eine PDE der Form

$$F(x, u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1} \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_1} \partial_{x_n} u, \dots, \partial_{x_n} \partial_{x_n} u) = 0$$

heißt **PDE zweiter Ordnung**.

**Notation.**  $p_i := \partial_{x_i} u$ ,  $p_{ij} := \partial_{x_i x_j}^2 u$

$$M(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_{11}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial p_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial p_{n1}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial p_{nn}} \end{pmatrix} = M(x)^T.$$

**Def (Typeneinteilung für PDEs der 2. Ordnung).**

Obige PDE zweiter Ordnung heißt

- elliptisch** in  $x$ , falls die Matrix  $M(x)$  positiv o. definit ist.
- parabolisch** in  $x$ , falls genau ein EW von  $M(x)$  gleich null ist und alle anderen dasselbe Vorzeichen haben.
- hyperbolisch** in  $x$ , falls genau ein EW ein anderes Vorzeichen als die anderen EWE hat.

## Lösungstheorie elliptischer PDEs

**Def.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, zusammenhängend und beschränkt.

- $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m \mid u \text{ stetig}\}$ ,  $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) := \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ , mit Norm

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|u(x)\|. \quad (\text{Supremumsnorm})$$

- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  ist der Raum aller auf  $\Omega$   $k$ -mal stetig diff'baren Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  stetig auf  $\overline{\Omega}$  fortgesetzt werden können.

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)}$$

- Sei  $\alpha \in [0, 1)$ .  $\mathcal{C}^{0, \alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid H_\alpha(u, \overline{\Omega}) < \infty\}$  mit

$$H_\alpha(u, \overline{\Omega}) := \sup_{x, y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} \quad (\text{Hölder-Koeffizient})$$

heißt **Raum der glm. Hölder-stetigen Fktn** zum Exponent  $\alpha$ . Der Hölder-Koeffizient ist dabei eine Seminorm auf  $\mathcal{C}^{0, \alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ .

- $\mathcal{C}^{k, \alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid \forall |\gamma| = k : D^\gamma u \in \mathcal{C}^{0, \alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)\}$  heißt **Hölder-Raum**. Eine Norm ist gegeben durch

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k, \alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} + \sum_{|\gamma| = k} H_\alpha(D^\gamma u, \overline{\Omega}).$$

**Bem.** • Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

- $\mathcal{C}^{0, 1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$  heißt **Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen**.
- $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}^k$  und  $\mathcal{C}^{k, \alpha}$  sind Banach-Räume mit den jeweiligen Normen.

**Def.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, zusammenhängend und beschränkt.

Das Gebiet  $\Omega$  gehört zur **Klasse  $\mathcal{C}^{k, \alpha}$** , wenn in jedem Punkt  $x \in \partial\Omega$  eine Umgebung in  $\partial\Omega$  existiert, die sich in einem geeigneten Koordinatensystem als ein Graph einer Funktion aus  $\mathcal{C}^{k, \alpha}$  darstellen lässt und  $\Omega$  lokal immer auf einer Seite von  $\partial\Omega$  liegt.

**Satz (Gauß'scher Integralsatz).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet und  $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n u_i \nu_i \, d\rho(x) = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu \, d\rho(x),$$

wobei  $\nu$  der äußere Normalenvektor an den Rand von  $\Omega$  ist.

**Problem.** Wir betrachten das Randwertproblem

$$(\text{RWP}) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega & (\text{PDE}) \\ \mathcal{R}u = g & \text{auf } \partial\Omega & (\text{Randbedingung}) \end{cases}$$

wobei  $\mathcal{L}$  der lineare Differentialoperator

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

mit Fktn  $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist, sodass  $A(x) := (a_{ij}(x))$  symmetrisch ist. Als Randbedingung (RB) verlangen wir:

$$\begin{array}{lll} \text{Dirichlet-RB:} & u & = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \text{Neumann-RB:} & (A(x)\nabla u) \cdot \nu & = g \quad \text{auf } \partial\Omega \text{ oder} \\ \text{Robin-RB:} & (A(x)\nabla u) \cdot \nu + \delta u & = g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{array}$$

**Bem.** Man kann auch auf verschiedenen Teilstücken des Randes verschiedene Bedingungen stellen.

**Bem.** Falls die Funktionen  $a_{ij}$  differenzierbar sind, so kann  $\mathcal{L}$  in **Divergenzform** geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x) \right) + b_i(x) \right)}_{\tilde{b}(x) :=} \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \\ &= - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \tilde{b}(x) \cdot \nabla u + c(x)u \end{aligned}$$

**Voraussetzung.** Wir nehmen im Folgenden an:

- $\mathcal{L}$  ist **gleichmäßig elliptisch**, d. h.

$$\exists \lambda_0 > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \Omega : \xi^T A(x) \xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2$$

Dabei heißt  $\lambda_0$  **Elliptizitätskonstante**.

- $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ ,  $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$

**Bem.**  $\mathcal{L} = f$  ist elliptisch auf  $\Omega \iff A(x) > 0$  (spd) für alle  $x \in \Omega$

**Def.** Eine Fkt  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  heißt **klassische Lsg** vom (RWP) mit  $\mathcal{R}u := u$ , wenn die beiden Gleichungen in (RWP) in jedem Punkt von  $\Omega$  bzw. des Randes  $\partial\Omega$  erfüllt sind.

**Satz (Maximumsprinzip).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, zshgd u. beschränkt. Sei  $u \in \mathcal{C}^2(\omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  eine Lösung vom (RWP),  $f \leq 0$  in  $\Omega$  und  $c \equiv 0$ . Dann nimmt  $u$  sein Maximum auf dem Rand  $\partial\Omega$  an, d. h.

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} g(x)$$

**Kor.** Sei  $c \geq 0$  und  $f \leq 0$ . Dann gilt  $\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max\{\sup_{x \in \partial\Omega} u(x), 0\}$ .

**Kor (Vergleichsprinzip).** Für  $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  und  $c \geq 0$  gelte  $\mathcal{L}u_1 \leq \mathcal{L}u_2$  in  $\Omega$  und  $u_1 \leq u_2$  auf  $\partial\Omega$ . Dann gilt  $u_1 \leq u_2$  auf  $\overline{\Omega}$ .

**Kor (Eindeutigkeit).** Sei  $c \geq 0$ . Dann hat (RWP) höchstens eine Lösung  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ .

**Satz.** Sei  $\Omega$  ein beschr. Lipschitz-Gebiet,  $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ ,  $c \geq 0$ ,  $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ . Dann besitzt (RWP) genau eine Lsg  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ .

**Achtung.** Es muss aber nicht  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  gelten!

# Differenzenverfahren

**Verfahren (DV).** Am Beispiel des Poisson-Problems

$$(RWP_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega = (0, 1) \\ u(0) = g_0, u(1) = g_1 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Wir führen folgende Schritte durch:

1. Diskretisierung: Wähle  $n \in \mathbb{N}$ , setze  $h := \frac{1}{n}$  und

$$\begin{aligned} \Omega_h &:= \{x_i := ih \mid i = 1, \dots, n-1\} & (\text{innere Gitterpunkte}) \\ \partial\Omega_h &:= \{x_0 = 0, x_n = 1\} & (\text{Randpunkte}) \end{aligned}$$

2. Approx. der Ableitungen durch Differenzenquotienten (DQ)

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{1}{h} (u(x_i + h) - u(x_i)) & (\text{Vorwärts-DQ}) \\ u'(x_i) &\approx \frac{1}{h} (u(x_i) - u(x_i - h)) & (\text{Rückwärts-DQ}) \\ u'(x_i) &\approx \frac{1}{2h} (u(x_i + h) - u(x_i - h)) & (\text{zentraler DQ}) \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} u''(x_i) &= (u'(x_i))' \approx \frac{1}{h} (u'(x_i + h) - u'(x_i)) \approx \\ &\approx \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{1}{h} (u(x_i + h) - u(x_i)) - \frac{1}{h} (u(x_i) - u(x_i - h)) \right) \\ &= \frac{1}{h^2} (u(x_i + h) - 2 \cdot u(x_i) + u(x_i - h)) =: \Delta_h u \end{aligned}$$

Dabei heißt  $\Delta_h$  der diskrete eindim. Laplace-Operator. Das diskretisierte Randwertproblem ist nun

$$(RWP_1)_h \quad \begin{cases} -\Delta_h u_h = f & \text{in } \Omega_h, \\ u_h(0) = g_0, u_h(1) = g_1 & \text{auf } \partial\Omega_h. \end{cases}$$

3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} (2u_h(x_1) - u_h(x_2)) &= f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} & (i=1) \\ \frac{1}{h^2} (-u_h(x_{i-1}) + u_h(x_i) - u_h(x_{i+1})) &= f(x_i) & (i=2, \dots, n-2) \\ \frac{1}{h^2} (-u_h(x_{n-2}) + 2u_h(x_{n-1})) &= f(x_{n-1}) + \frac{g_1}{h^2} & (i=n-1) \end{aligned}$$

Als lineares Gleichungssystem:  $-\tilde{\Delta}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$  mit

$$-\tilde{\Delta}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)},$$

$$\tilde{u}_h = \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ \vdots \\ u_h(x_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{g_1}{h^2} \end{pmatrix}$$

**Ziel.** Herausfinden, was die Lösung  $u_h$  von  $(RWP)_h$  (die man durch Lösen von (LGS) erhält) mit der Lösung  $u$  zum ursprünglichen Problem (RWP) zu tun hat. Ist etwa  $u_h$  die Einschränkung von  $u$ , oder zumindest annäherungsweise? Wenn ja, wie klein muss man  $h$  wählen, damit die Approximation gut wird?

$$\begin{aligned} (RWP) \quad & \begin{cases} -\mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \\ (RWP)_h \quad & \begin{cases} -\mathcal{L}_h u = f_h & \text{in } \Omega_h, \\ u_h = g_h & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases} \\ (LGS) \quad & \tilde{\mathcal{L}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h \end{aligned}$$

**Notation.**  $U_h := \{\Omega_h \rightarrow \mathbb{R}\}$ ,  $R_h : \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \rightarrow U_h$ ,  $u \mapsto u|_{\Omega_h}$

**Def.** Das Differenzenverfahren  $(RWP)_h$  heißt

- **konvergent** von der Ordnung  $p$ , falls  $C > 0$ ,  $h_0 > 0$  existieren, sodass für die Lösung  $u$  von (RWP) und die Lösung  $u_h$  von  $(RWP)_h$  gilt:
$$\|u_h - R_h u\|_h \leq Ch^p \quad \text{für alle } 0 < h \leq h_0,$$
wobei  $\|\cdot\|_h$  eine Norm zu  $U_h$  ist, wie z. B.  $\|u_h\|_h := \max_{x \in \Omega_h} |u_h(x)|$ .
- **konsistent** von der Ordnung  $p$ , falls
$$\|\mathcal{L}_h R_h u - R_h \mathcal{L} u\|_h \leq ch^p \|u\|_{\mathcal{C}^{p+2}(\bar{\Omega})} \quad \forall u \in \mathcal{C}^{p+2}(\bar{\Omega}).$$
- **stabil**, falls  $\tilde{L}_h$  invertierbar ist und ein  $h_0 > 0$  existiert mit

$$\sup_{0 < h \leq h_0} \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h < \infty, \quad \text{wobei } \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h := \sup_{f \neq 0} \frac{\|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1} f\|_h}{\|f\|_h}.$$

**Bem.** Die ind. Matrixnorm ist  $\|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h = \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |l_{ij}|$ .

**Satz.** Ist das DV  $(RWP)_h$  konsistent und stabil, so auch konvergent. Genauer gilt: Ist  $(RWP)_h$  stabil und konsistent von der Ordnung  $p$  und  $u \in \mathcal{C}^{p+2}(\bar{\Omega})$ , dann ist  $(RWP)_h$  konvergent von der Ordnung  $p$ .

**Beweis.** Setze  $w_h := u_h - R_h u$ . Für  $x \in \partial\Omega_h$  gilt dann  $w_h(x) = 0$  und für  $x \in \Omega_h$  gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_h w_h(x) &= \mathcal{L}_h w_h(x) = \mathcal{L}_h u_h(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \\ &= f_h(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) = R_h f(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \\ &= R_h \mathcal{L} u(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \end{aligned}$$

Somit gilt  $w_h = \tilde{\mathcal{L}}_h^{-1} (R_h \mathcal{L} u - \mathcal{L}_h R_h u)$  in  $\Omega_h$ , also

$$\begin{aligned} \|w_h\|_h &= \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1} (R_h \mathcal{L} u - \mathcal{L}_h R_h u)\| \leq \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h \cdot \|R_h \mathcal{L} u - \mathcal{L}_h R_h u\|_h \\ &\leq c_1 \cdot c_2 \cdot h^p \cdot \|u\|_{\mathcal{C}^{p+2}(\bar{\Omega})} \leq Ch^p \quad \text{für } 0 < h \leq h_0. \end{aligned} \quad \square$$

**Lem.** Das DV  $(RWP_1)_h$  ist konsistent von der Ordnung 2. Es gilt

$$\|\Delta_h R_h u - R_h \Delta u\|_h \leq \frac{1}{12} \|u\|_{\mathcal{C}^4(\bar{\Omega})} h^2 \quad \forall u \in \mathcal{C}^4(\bar{\Omega}).$$

**Bem.** Um zu zeigen, dass  $(RWP_1)_h$  konvergent ist, müssen wir noch zeigen, dass  $\tilde{L}_h = -\tilde{\Delta}_h$  invertierbar ist und  $\sup_{0 < h \leq h_0} \|\tilde{\Delta}_h\|_h < \infty$ .

**Def.** Eine Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **M-Matrix**, falls  
a)  $a_{ii} > 0$  für  $i = 1, \dots, n$ , b)  $a_{ij} \leq 0$  für  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  
c)  $A$  invertierbar ist und d) für  $A^{-1} =: B = (b_{ij})$  gilt  $b_{ij} \geq 0$ .

**Lem.** Erfülle  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Bedingungen a) und b). Zerlege  $A = D + L + R$  in eine Diagonalmatrix und strikte untere/obere Dreiecksmatrizen. Dann ist  $A$  genau dann eine M-Matrix wenn

$$\rho(D^{-1}(L + R)) < 1.$$

**Bem.** Es gilt folgende Monotonie-Eigenschaft für M-Matrizen:

$$x \leq y \implies A^{-1}x \leq A^{-1}y.$$

**Def.** Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt **reduzibel** (oder zerlegbar), wenn es eine Permutationsmatrix  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt, sodass

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}, 0 < k < n.$$

**Lem** (Gerschgorin). Alle EWe einer Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  liegen in der Menge

$$\bigcup_{i=1}^n \overline{B_{r_i}(a_{ii})} \quad \text{mit } r_i := \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Falls  $A$  irreduzibel ist, so liegen sie sogar in

$$\left( \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(a_{ii}) \right) \cup \left( \bigcap_{i=1}^n \partial B_{r_i}(a_{ii}) \right)$$

**Def.** Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix.

- $A$  heißt **schwach diagonaldominant**, falls

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

und ein  $i_0$  existiert, sodass die Ungleichung strikt ist.

- $A$  heißt **diagonaldominant**, falls

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

- $A$  heißt **irreduzibel diagonaldominant**, falls  $A$  irreduzibel und schwach diagonaldominant ist.

**Lem.** Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix mit  $a_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  und  $a_{ij} \leq 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ , die diagonaldominant oder irreduzibel diagonaldominant ist. Dann ist  $A$  eine M-Matrix.

**Bem.**  $-\tilde{\Delta}_h$  ist irreduzibel diagonaldominant, also eine M-Matrix.

**Lem.** Sei  $A$  eine irreduzible M-Matrix. Dann gilt  $A^{-1} > 0$ .

**Lem.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine M-Matrix und es existiere ein Vektor  $v$ , sodass  $(Av)_j \geq 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Dann gilt  $\|A^{-1}\|_\infty \leq \|v\|_\infty$ .

**Lem.**  $\|\tilde{\Delta}_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$

**Satz.** Das DV  $(RWP_1)_h$  ist konvergent von der Ordnung 2, falls die Lösung von  $(RWP_1)$  zu  $\mathcal{C}^4([0, 1])$  gehört. Es gilt die Abschätzung

$$\|u_h - R_h u\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \|u\|_{\mathcal{C}^4([0, 1])}.$$

**Problem.** Wir betrachten nun

$$(RWP_2) \quad \begin{cases} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

1. Diskretisierung: Setze  $h := \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und

$$\Omega_h := \{(x, y) \in \Omega \mid x = ih, y = jh, i, j = 1, \dots, n-1\}$$

$$\partial\Omega_h := \{(x, y) \in \partial\Omega \mid x = ih, y = jh, i, j = 1, \dots, n-1\}$$

2. Approximation der Ableitungen

$$-\Delta u(x, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$$

$$\approx -\frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} - \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2}$$

$$= -\frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) - 4u(x, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h)}{h^2} =: -\Delta_h u$$

Dabei hat der diskrete Laplace-Operator  $\Delta_h$  die Form eines Differenzensterns. Gesucht ist die Lsg  $u_h : \Omega_h \cup \partial\Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$  von

$$(\text{RWP}_2)_h \begin{cases} -\Delta_h u_h = f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h = g & \text{auf } \partial\Omega_h. \end{cases}$$

3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems  $-\tilde{\Delta}_h \tilde{u}_h = f_h$ :

$$\tilde{u}_h = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{n-1, n-2} \\ u_{n-1, n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2},$$

$$-\tilde{\Delta}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} A & -I & & 0 \\ -I & A & -I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & -I & A & -I \\ & & & -I & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n-1)^2},$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$$

**Lem.** Das DV  $(\text{RWP}_2)_h$  ist konsistent von der Ordnung 2. Es gilt

$$\|\Delta_h R_h u - R_h \Delta u\|_h \leq \frac{1}{6} \|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} h^2.$$

**Lem.** Das DV  $(\text{RWP}_2)_h$  ist stabil. Es gilt  $\|\tilde{\Delta}_h^{-1}\|_\infty \leq 1/8$ .

**Satz.** Das DV  $(\text{RWP}_2)_h$  ist konvergent von der Ordnung 2, falls die Lösung von  $(\text{RWP}_2)$  zu  $C^4(\bar{\Omega})$  gehört. Es gilt

$$\|u_h - R_h u\|_h \leq 1/48 \|u\|$$

*Bem.* Durch die Einbeziehung weiterer Gitterpunkte zur Approximation des Differentialoperators lässt sich die Konvergenzordnung erhöhen:

$$-\Delta_h^{(9)} u(x, y) = \frac{1}{12h^2} (u(x-2h, y) - 16u(x-h, y) + 30u(x, y) - 16u(x+h, y) + u(x+2h, y) + u(x, y-2h) - 16u(x, y-h) + 30u(x, y) - 16u(x, y+h) + u(x, y+2h)) \approx -\Delta u(x, y)$$

Damit erreicht man die Konsistenzordnung 4.

**Situation.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  beschränkt.

**Def.** •  $\Omega_h := \{x, y \in \Omega \mid x/h, y/h \in \mathbb{Z}\}$  heißen **innere Gitterpunkte**.

- Ein Punkt  $z_R \in \partial\Omega$  heißt **Randgitterpunkt** (notiert  $z_R \in \partial\Omega_h$ ), falls es einen inneren Gitterpunkt  $z \in \Omega_h$  gibt, sodass  $z_R = r + \alpha h e_1$  oder  $z_R = z + \alpha h e_2$  mit  $|\alpha| \leq 1$ . Die Nachbarn  $N(x, y)$  eines Punktes  $(x, y)$  sind  $(x + s_r h, y)$ ,  $(x - s_l h, y)$ ,  $(x, y + s_o h)$ ,  $(x, y - s_u h)$ , falls  $s_r, s_l, s_o, s_u \in (0, 1]$  und die Verbindungsstrecken zu  $(x, y)$  in  $\Omega$  liegen.
- Ein Punkt  $(x, y) \in \Omega_h$  heißt **randnah**, falls  $(x, y)$  die Nachbarn  $(x - s_l h, y)$ ,  $(x + s_r h, y)$ ,  $(x, y - s_u h)$ ,  $(x, y + s_o h)$  hat mit mindestens einem  $s_i < 1$ . Ansonsten heißt  $(x, y)$  **randfern**.

**Notation.** Wir haben eine Einteilung  $\Omega_h = \Omega_h^{\text{rn}} \sqcup \Omega_h^{\text{rf}}$  der Gitterpunkte in randnahe und randferne Punkte.



**Lem (Dividierte Differenzen von Newton).**

Für  $u \in C^3([x_l, x_r])$ ,  $x \in (x_l, x_r)$  gilt

$$u''(x) = \frac{2}{x_r - x_l} \left( \frac{u(x_r) - u(x)}{x_r - x} - \frac{u(x) - u(x_l)}{x - x_l} \right) + \mathcal{O}(x_r - x_l)$$

$$= \frac{2}{x_r - x_l} \left( \frac{1}{x_r - x} u(x_r) + \frac{1}{x - x_l} u(x_l) \right) - \frac{2}{(x_r - x)(x - x_l)} u(x)$$

**Verfahren (Shortley-Weller-Diskretisierung).**

Dadurch inspiriert approximieren wir den Laplace-Operator durch

$$\mathcal{D}_h u(x, y) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{2u(x - s_l h, y)}{s_l(s_r + s_l)} + \frac{2u(x + s_r h, y)}{s_r(s_r + s_l)} + \frac{2u(x, y - s_u h)}{s_u(s_o + s_u)} + \frac{2u(x, y + s_o h)}{s_o(s_o + s_u)} - \left( \frac{2}{s_l s_r} + \frac{2}{s_o s_u} \right) u(x, y) \right)$$

wobei  $x_r - x = s_r h$ ,  $x - x_l = s_l h$ ,  $y_o - y = s_o h$ ,  $y - y_u = s_u h$ . Wir betrachten nun

$$(\text{RWP}_2)'_h \begin{cases} -\mathcal{D}_h u_h = f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h = g & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases}$$

$$(\text{LGS}_2)' \begin{cases} -\tilde{\mathcal{D}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h \\ \tilde{f}_h = f_h + g_h \end{cases}$$

$$\text{mit } g_h(x, y) = \frac{1}{h^2} \sum_{(x_N, y_N) \in N(x, y) \cap \partial\Omega_h} S_{x_N, y_N} g(x_N, y_N)$$

wobei

$$S_{x_N, y_N} := \begin{cases} 2/s_l(s_l + s_r) & \text{falls } (x_N, y_N) = (x - s_l h, y), \\ 2/s_r(s_l + s_r) & \text{falls } (x_N, y_N) = (x + s_r h, y), \\ 2/s_o(s_o + s_u) & \text{falls } (x_N, y_N) = (x, y + s_o h), \\ 2/s_u(s_o + s_u) & \text{falls } (x_N, y_N) = (x, y - s_u h), \end{cases}$$

$$-\tilde{\mathcal{D}}_h = (d_{ij}) \quad \text{mit} \quad d_{ii} = 1/h^2 \left( \frac{2}{s_{il}s_{ir}} + \frac{2}{s_{iu}s_{io}} \right) \quad \text{und}$$

$$d_{ij} = 1/h^2 \begin{cases} -2/s_{il}(s_{il} + s_{ir}) & \text{falls } j \text{ der linke Nachbar von } i \text{ ist,} \\ -2/s_{ir}(s_{il} + s_{ir}) & \text{falls } j \text{ der rechte Nachbar von } i \text{ ist,} \\ -2/s_{iu}(s_{iu} + s_{io}) & \text{falls } j \text{ der untere Nachbar von } i \text{ ist,} \\ -2/s_{io}(s_{iu} + s_{io}) & \text{falls } j \text{ der obere Nachbar von } i \text{ ist.} \end{cases}$$

**Lem.** • Die Matrix  $-\tilde{\mathcal{D}}_h$  ist eine M-Matrix.

- Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  beschränkt und gehöre zu dem Streifen  $(x_0, x_0 + d) \times \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R} \times (y_0, y_0 + d)$ . Dann gilt  $\|\tilde{\mathcal{D}}_h^{-1}\| \leq d^2/8$ .

*Bem.* Das DV  $(\text{RWP}_2)'_h$  hat in den randnahen Punkten nur die Konsistenzordnung 1. Dennoch gilt:

**Satz.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  beschränkt und Teilmenge des Streifens  $(x_0, x_0 + d) \times \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R} \times (y_0, y_0 + d)$ . Dann ist das Verfahren  $(\text{RWP}_2)'_h$  konvergent von der Ordnung 2. Es gilt

$$\|u_h - R_h u\|_h \leq (1/3h^3 + d^2/48h^2) \|u\|_{C^4(\bar{\Omega})}.$$

**Idee.** Bestimme den Wert von  $u$  bei randnahen Punkten  $(x, y)$  durch lineare Interpolation:

- $u(x, y) \approx \frac{s_r}{s_r + s_l} u(x - s_l h, y) + \frac{s_l}{s_r + s_l} u(x + s_r h, y)$
- $u(x, y) \approx \frac{s_o}{s_u + s_o} u(x, y - s_u h) + \frac{s_u}{s_u + s_o} u(x, y + s_o h)$

$$(\text{RWP}_2)''_h \begin{cases} -\mathcal{D}_h u = f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h = g & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases}$$

$$(\text{LGS}_2)'' - \tilde{\mathcal{D}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$$

**Lem.** Dieses Verfahren besitzt Konsistenzordnung (und somit Konvergenzordnung) 2.

**Problem.** Wir betrachten nun

$$(\text{RWP}_3) \begin{cases} -\mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit

$$-\mathcal{L}u = -(a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy}) + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u$$

wobei  $c(x, y) \leq 0$ ,  $\xi^T A(x, y) \xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2$ ,  $\lambda_0 > 0$  und

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{21}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

**Verfahren.** 1. Diskretisierung:  $h = 1/n$ ,  $\Omega_h$ ,  $\partial\Omega_h$  wie früher.

## 2. Approximation:

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h}, \quad u_y(x, y) \approx \dots$$

$$u_{xx}(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2}, \quad u_{yy}(x, y) \approx \dots$$

Für die Approx. von  $u_{xy}$  haben wir mehrere Möglichkeiten:  
Wir könnten etwa den zentralen DQ in  $x$ - und  $y$ -Richtung verwenden und erhalten

$$u_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{4h^2} (u(x+h, y+h) - u(x+h, y-h) - u(x-h, y+h) + u(x-h, y-h))$$

Diese Annäherung hat allerdings den Nachteil, dass sie zu keiner M-Matrix führt. Stattdessen nehmen wir

$$u_{xy}(x, y) \approx \frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

für  $a_{12} \geq 0$                       für  $a_{12} < 0$ .

Wir fassen diese Approx. in folgendem 7-Stern zusammen:

$$-\mathcal{L}_h u := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} a_{12}^- & |a_{12}| - a_{22} & a_{12}^+ \\ |a_{12}| - a_{11} & 2(a_{11} + a_{22} - |a_{12}|) & |a_{12}| - a_{11} \\ -a_{12}^+ & |a_{12}| - a_{22} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -b_2 & & \\ -b_1 & 0 & b_1 \\ b_2 & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & & \end{pmatrix}$$

Dabei ist  $a_{ij}^+ := \max(a_{ij}, 0)$  und  $a_{ij}^- := \min(a_{ij}, 0)$ .

$$(\text{RWP}_3)_h \quad \begin{cases} -\mathcal{L}_h u_h &= f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h &= g & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases}$$

$$(\text{LGS}_3) \quad -\tilde{\mathcal{L}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$$

**Satz.** Sei  $|a_{12}| \leq \min(a_{11}, a_{22})$ ,  $c \geq 0$  in  $\Omega$ ,  $\mathcal{L}$  gleichmäßig elliptisch. Falls  $a_{ii} > |a_{12}| + \frac{h}{2}|b_i|$  für  $i = 1, 2$  in  $\Omega$  und  $u \in \mathcal{C}^4(\bar{\Omega})$ , so ist das DV  $(\text{RWP}_3)_h$  konvergent von der Ordnung 2.

**Problem.**  $\begin{cases} u_t(x, t) - \Delta_x u(x, t) = f(x, t) & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, T) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{für } x \in (0, 1) \\ u(0, t) = g_0(t) & \text{für } t \in [0, T] \\ u(1, t) = g_1(t) & \text{für } t \in [0, T] \end{cases}$

$(\text{RWP}_4)$

**Verfahren.** 1. Diskretisierung mit  $n$  Raum- und  $m$  Zeitschritten:

$$x_i = ih, \quad h = 1/n, \quad t_k = k\tau, \quad \tau = T/m, \quad u(x_i, t_k) \approx u_i^k$$

## 2. Approximation der Ableitungen:

$$u_{xx}(x, t) \approx \frac{1}{h^2} (u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t)) =: \Delta_h u(x, t)$$

Wir wollen nun eine Lösung von

$$\begin{cases} \dot{u}_h(t) - \tilde{\Delta}_h u_h(t) &= f_h(t) \\ u_h(0) &= g_h \end{cases}$$

für alle Zeiten  $t$  mit

$$u_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(h, t) \\ u_h(2h, t) \\ \vdots \\ u_h(1-h, t) \end{pmatrix}, \quad f_h(t) = \begin{pmatrix} f(h, t) + \frac{1}{h^2} g_0(t) \\ f(2h, t) \\ \vdots \\ f(1-h, t) + \frac{1}{h^2} g_1(t) \end{pmatrix}$$

berechnen. Dazu verwenden wir ein Einschrittverfahren, wie das expl./impl. Gauß-Verfahren oder das Crank-Nicolson-Verfahren:

$$(\text{EEV}) \quad \begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \tilde{\Delta}_h u_i^k &= f_i^k \\ u_i^0 &= g_h \end{cases}$$

$$(\text{IEV}) \quad \begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \tilde{\Delta}_h u_i^{k+1} &= f_i^{k+1} \\ u_i^0 &= g_h \end{cases}$$

$$(\text{CNV}) \quad \begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \frac{1}{2}\tilde{\Delta}_h(u_i^k + u_i^{k+1}) &= f(x_i, t_k + \frac{\tau}{2}) \\ u_i^0 &= g_h \end{cases}$$

**Lem.** Sei  $f(x, -) \in \mathcal{C}^1([0, T])$  für alle  $x \in [0, 1]$ .

Dann gilt für die Approximation von  $(\text{RWP}_4)$ :

- Die Verfahren (EEV) und (IEV) besitzen einen Konsistenzfehler von  $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$ , falls  $u \in \mathcal{C}^4([0, 1] \times [0, T])$
- Das Verfahren (CNV) besitzt einen Konsistenzfehler von  $\mathcal{O}(h^2 + \tau^2)$ , falls  $u \in \mathcal{C}^4([0, 1] \times [0, T])$ .

**Lem.** Es gelte  $2\tau \leq h^2$  für (EEV). Die Verfahren (EEV), (IEV) und (CNV) sind stabil.

**Problem.** Wellengleichung

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = f(x, t) & \text{in } \Omega = (0, 1) \times [0, T] \\ u(0, t) = g_0(t), u(1, t) = g_1(t) & \text{für } t \in [0, T] \\ u(x, 0) = q_0(x), u_t(x, 0) = q_1(x) & \text{für } x \in (0, 1) \end{cases}$$

**Verfahren.** 1. Diskretisierung:  $x_i = ih$ ,  $h = \frac{1}{n}$ ,  $t_k = k\tau$ ,  $\tau = \frac{T}{m}$

## 2. Approximation:

$$\partial_{xx} u(x_i, t_k) \approx \frac{1}{h^2} (u(x_{i-1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k))$$

$$\partial_{tt} u(x_i, t_k) \approx \frac{1}{\tau^2} (u(x_i, t_{k-1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k+1}))$$

$$\partial_t u(x_i, 0) \approx \frac{1}{2\tau} (u(x_i, t_1) - u(x_i, t_{-1}))$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau^2}(u_i^{k-1} - 2u_i^k + u_i^{k+1}) - \frac{c^2}{h^2}(u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k) = f_i^k \\ \text{für } i = 1, \dots, n-1 \text{ und } k = 0, \dots, m. \\ u_0^k = g_0^k = g_0(t_k), \quad u_n^k = g_1^k = g_1(t_k), \\ u_i^0 = q_{0,i} = q_0(x_i), \quad \frac{1}{2\tau}(u_i^1 - u_i^{-1}) = q_{1,i} = q_1(x_i) \end{cases}$$

*Bem.* Das Differenzenverfahren ...

☺ ... ist einfach in der Herleitung und Implementierung.

☺ ... besitzt eine gute Konvergenz (z. B. Ordnung 2) bei genügend glatter Lösung.

☹ ... ermöglicht Adaptivität bzw. unregelm. Gitter nur schwer.

# Schwache Lsgstheorie für elliptische DGLn

**Def.** Der  **$L^p$ -Raum** ist für  $1 \leq p < \infty$  definiert durch

$$L^p(\Omega) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|v\|_p < \infty\} \quad \text{mit} \quad \|v\|_p := \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

für  $p = \infty$  durch

$$L^\infty(\Omega) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|v\|_\infty < \infty\} \quad \text{mit} \quad \|v\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)|.$$

*Bem.*  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  ist ein Banachraum, für  $p = 2$  sogar ein

Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$ .

**Satz (Höldersche Ungleichung).** Sei  $u \in L^p(\Omega)$  und  $v \in L^q(\Omega)$  mit  $1 \leq p, q, r < \infty$  und  $1/p + 1/q = 1/r$ . Dann ist  $uv \in L^r(\Omega)$  mit

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q.$$

**Def.** Die Menge aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$  mit **kompaktem Träger** ist

$$\mathcal{C}_0^k(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega) \mid \operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}} \text{ ist kompakt}\}.$$

**Def.**  $\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  heißt Raum der **Testfunktionen** in  $\Omega$ .

**Lem** (Partielle Integration). Für  $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  gilt

$$\int_{\Omega} v(x) \mathcal{D}_i u(x) dx = \int_{\Omega} v(x) u(x) \eta_i(x) dx - \int_{\Omega} \mathcal{D}_i v(x) u(x) dx.$$

Für  $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$  und  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| \leq k$  gilt

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \mathcal{D}^\alpha u(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \mathcal{D}^\alpha \varphi(x) u(x) dx.$$

**Def.**  $L_{\text{loc}}^1(\Omega) := \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid v|_K \in L^1(K) \text{ für jedes } K \subset \subset \Omega\}$  heißt Raum der **lokal integrierbaren Funktionen**.

**Def.** Sei  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  und  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Eine Funktion  $v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  heißt **schwache (partielle) Ableitung** von  $u$  der Ordnung  $\alpha$  (oder die Ableitung von  $u$  im distributionellen Sinn), wenn

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) d\varphi(x) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Bem.* Ist eine Funktion im klassischen Sinne diff'bar, so auch im schwachen mit derselben Ableitung.

**Lem** (Fundamentallemma der Variationsrechnung).

Sei  $u \in L_{\text{loc}}^1$  und  $\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Dann gilt  $u(x) = 0$  für fast alle  $x \in \Omega$ .

**Kor.** Die schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt, d. h. sind  $v, w \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  schwache Ableitungen von  $u$ , so gilt  $v = w$  f. ü. in  $\Omega$ .

**Bsp.** Die schw. Abl. von  $u(x) = |x|$  ist  $v(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)} - \mathbb{1}_{(-\infty,0)}$ .

**Lem.** •  $\mathcal{D}^\alpha(u + \lambda v) = \mathcal{D}^\alpha u + \lambda \mathcal{D}^\alpha v$  •  $\mathcal{D}^{\alpha+\beta} u = \mathcal{D}^\alpha(\mathcal{D}^\beta u)$

**Def.** Der **Sobolev-Raum** für  $1 \leq p < \infty$  ist

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| \leq k : \\ \exists \text{ schwache Ableitung } \mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega) \end{array} \right\}$$

$$\|u\|_{k,p} := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

**Notation.**  $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$

**Satz.**  $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$  ist ein Banachraum.

*Bem.* • Auf  $H^k(\Omega)$  wird durch

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} := \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} \mathcal{D}^\alpha u \mathcal{D}^\alpha v dx$$

ein Skalarprodukt definiert, das die Norm  $\|\cdot\|_{k,2}$  induziert.

•  $(H^k(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^k(\Omega)})$  ist ein Hilbertraum.

**Satz** („ $H = W^\perp$ “).  $W^{k,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  liegt dicht in  $W^{k,p}(\Omega)$ , d. h.

$$\overline{W^{k,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}} = W^{k,p}(\Omega).$$

**Def.**  $W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}$ ,  $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$

**Satz.** Sei  $\Omega$  ein beschränktes  $\mathcal{C}^1$ -Gebiet und  $1 \leq p < \infty$ . Dann existiert eine lineare stetige Abbildung  $\tau : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ , sodass für alle  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  gilt:  $\tau(u) = u|_{\partial\Omega}$ .

**Def.** Die Abbildung  $\tau$  heißt **Spuroperator**,  $\tau(u)$  heißt die **Spur** von  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  auf  $\partial\Omega$ .

**Satz.** Sei  $\Omega$  ein beschränktes  $\mathcal{C}^1$ -Gebiet. Dann gilt

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid \tau(v) = 0\}.$$

**Def.** Sei  $(U, \|\cdot\|_U)$  ein Banachraum.

Der **Dualraum** von  $U$  ist  $(U', \|\cdot\|_{U'})$  mit

$$U' := \{\text{lineare, stetige Abbildungen } \psi : U \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$\|\psi\|_{U'} := \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{|\psi(u)|}{\|u\|_U}.$$

**Bsp.** Gelte  $1/p + 1/q = 1$  mit  $p, q \in (0, \infty)$  Die Abbildung

$$j : L^q(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))', \quad f \mapsto (g \mapsto \int_{\Omega} f(x)g(x) dx)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

**Notation.**  $\langle \psi, u \rangle_{U', U} := \psi(u)$  für  $\psi \in U'$ ,  $u \in U$ .

**Satz (Riesz'scher Darstellungssatz).**

Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  ein Hilbertraum. Dann ist

$$j : H \rightarrow H', \quad \psi \mapsto (\phi \mapsto \langle \psi, \phi \rangle_H)$$

ein isometrischer Isomorphismus.

**Def.**  $W^{-1,q} := (W_0^{1,p}(\Omega))'$ ,  $H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))'$ .

**Situation.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt. Wir betrachten nun wieder

$$(\text{RWP}_1) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \mathcal{L}u &= - \sum_{i=1}^d \mathcal{D}_i \left( \sum_{j=1}^d a_{ij}(x) \mathcal{D}_j u \right) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \mathcal{D}_i u + c(x)u \\ &= - \operatorname{div}(A(x) \mathcal{D}u) + b(x) \cdot \mathcal{D}u + c(x)u. \end{aligned}$$

Sei  $u$  eine Lsg von  $(\text{RWP}_1)$  und  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx &= \int_{\Omega} \mathcal{L}u \phi dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(A(x) \mathcal{D}u(x)) \phi(x) dx + \int_{\Omega} (b(x) \cdot \mathcal{D}u(x) + c(x)u(x)) \cdot \phi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} A(x) \mathcal{D}u(x) \cdot \mathcal{D}\phi(x) dx + \int_{\Omega} (b(x) \cdot \mathcal{D}u(x) + c(x)u(x)) \cdot \phi(x) dx \end{aligned}$$

**Def.** Die Funktion  $u \in H_0^1(\Omega)$  heißt **schwache Lösung** von  $(\text{RWP}_1)$ , wenn  $u$  folgende Variationsgleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(x) \mathcal{D}u(x) \cdot \mathcal{D}\phi(x) + b(x) \cdot \mathcal{D}u(x) \phi(x) + c(x)u(x) \phi(x) dx \\ = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx \quad \text{für alle } \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{VGL}_1)$$

**Problem** (Allgemeines Variationsproblem).

Seien Abb.  $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $l : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Gesucht:  $u \in H_0^1(\Omega)$ , sodass  $B(u, \phi) = l(\phi)$  für alle  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ .

*Bem.* Im obigen Setting ist  $l(\phi) := \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx$ ,

$$B(u, \phi) := \int_{\Omega} A(x) \mathcal{D}u(x) \cdot \mathcal{D}\phi(x) + b(x) \cdot \mathcal{D}u(x) \phi(x) + c(x)u(x) \phi(x) dx$$

**Def.** Sei  $X$  ein Banachraum. Eine Abb.  $B : X \times X \rightarrow X$  heißt

- **positiv**, falls  $B(u, u) > 0$  für alle  $u \in X \setminus \{0\}$ ,
- **stark positiv** (oder **koerziv**), falls  $\lambda > 0$  existiert, sodass

$$\forall u \in X : B(u, u) \geq \lambda \|u\|_X^2,$$

- **beschränkt**, falls ein  $\mu > 0$  existiert, sodass

$$\forall u, \phi \in X : |B(u, \phi)| \leq \mu \|u\|_X \|\phi\|_X.$$

**Lem.** • Die Abbildung  $B$  in  $(\text{VGL}_1)'$  ist bilinear und beschränkt.

- Die Abbildung  $l$  in  $(\text{VGL}_1)'$  linear und stetig.

**Satz.** Sei  $\Omega$  ein beschr. Lipschitz-Gebiet. Dann ist jede klassische Lsg  $u \in \mathcal{C}^2 \cap \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$  von  $(\text{RWP}_1)$  eine schwache Lsg von  $(\text{VGL}_1)'$ .

**Satz (Lax-Milgram).** Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte, koerzitive Bilinearform. Dann gibt es für jedes  $l \in H'$  eine eindeutige Lösung  $u \in H$  von  $\forall \phi \in H : B(u, \phi) = l(\phi)$ . Es gilt  $\|u\|_H \leq 1/\lambda \|l\|_{H'}$



**Lem (Poincaré-Ungleichung).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt. Dann existiert eine Konstante  $C > 0$ , sodass

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} = C \left( \int_{\Omega} \sum_i |\mathcal{D}_i u|^2 dx \right)^{1/2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

**Kor.** Mit  $C_1 := (1 + C^2)^{-1/2}$  und  $C_2 := 1$  gilt f. a.  $u \in H_0^1(\Omega)$

$$C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

**Lem.** Falls  $b(x) = 0$  und  $c(x) \geq 0$  in  $\Omega$ , so ist  $B$  in  $(\text{VGL}_1)'$  koerziv.

**Satz.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  beschränkt und sei  $\mathcal{L}u = -\text{div}(A(x)\mathcal{D}u) + c(x)u$  glm. elliptisch,  $c(x) \geq 0$  in  $\Omega$ ,  $a_{ij}, c_j \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann besitzt  $(\text{VGL}_1)'$  eine eindeutige Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Außerdem existiert ein  $\hat{C} > 0$ , sodass  $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \hat{C} \|f\|_{L^2(\Omega)}$ .

*Bemn.* • Sei  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . Eine Fktn  $u \in H_0^1(\Omega)$  heißt schw. Lsg von  $(\text{RWP}_1)$ , falls  $B(u, \phi) = \langle f, \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)$ . Gelte  $b = 0$ ,  $c \geq 0$ , glm. Elliptizität,  $c, a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ . Dann ex. nach Lax-Milgram genau ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$B(u, \phi) = \langle f, \phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \text{für alle } \phi.$$

• Es existiert ein  $\mu_0 > 0$ , sodass für alle  $\mu > \mu_0$  das RWP

$$(\text{RWP}) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u + \mu u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für alle  $f \in H^{-1}(\Omega)$  eine eindeutige Lsg  $u \in H_0^1(\Omega)$  besitzt.

**Problem.** Wir untersuchen nun das inhomogene Randwertproblem

$$(\text{RWP}_2) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Angenommen,  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt eine Fortsetzung  $\tilde{g} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{g}|_{\partial\Omega} = g$ . Dann ist  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  genau dann eine Lösung von  $(\text{RWP}_2)$ , wenn  $v := u - \tilde{g} \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  eine Lösung von

$$(\text{RWP}_2)', \quad \begin{cases} \mathcal{L}v &= f - \mathcal{L}\tilde{g} & \text{in } \Omega, \\ v &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

ist. Schwache Formulierung von  $(\text{RWP}_2)'$ : Ges. ist  $v \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (A(x)\mathcal{D}v(x) \cdot \mathcal{D}\phi(x) + b(x) \cdot \mathcal{D}v(x)\phi(x) + c(x)v(x)\phi(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} f \cdot \phi dx + \int_{\Omega} (A(x)\mathcal{D}\tilde{g} \cdot \mathcal{D}\phi + b \cdot \mathcal{D}\tilde{g}\phi + c\tilde{g}\phi) dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Voraussetzungen:  $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\tilde{g} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ . Gesucht ist also ein  $u \in U := \{w \in H^1(\Omega) \mid \tau(w) = g\}$  mit

$$\underbrace{\int_{\Omega} A(x)\mathcal{D}u \cdot \mathcal{D}\phi + b\mathcal{D}u\phi + cu\phi dx}_{B(u, \phi) :=} = \underbrace{\int_{\Omega} f\phi dx}_{l(\phi) :=} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{VGL}_2)$$

**Satz.** Sei  $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und koerziv. Dann besitzt  $(\text{VGL}_2)$  genau dann eine eindeutige Lösung  $u \in U$ , wenn ein  $u_0 \in H^1(\Omega)$  existiert, sodass  $\tau(u_0) = g$ .

**Problem.** Wir betrachten nun die Randbedingung

$$(\text{RWP}_3) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u &= f & \text{in } \Omega, \\ A(x)\mathcal{D}u \cdot \nu + \mu u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Falls  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  eine Lösung ist und  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ , so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f\phi dx &= - \int_{\Omega} \text{div}(A(x)\mathcal{D}u)\phi + b\mathcal{D}u\phi + cu\phi dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} A(x)\mathcal{D}u \cdot \nu \phi ds + \int_{\Omega} A(x)\mathcal{D}u\mathcal{D}\phi dx + \int_{\Omega} b(x)\mathcal{D}u\phi dx + \int_{\Omega} cu\phi dx \\ &\stackrel{(\text{RWP}_3)}{=} \int_{\partial\Omega} (l_n(w_1), \dots, l_n(w_{d_n}))^T \mathcal{D}\phi dx \quad (\text{Galerkin-Gleichung}) \end{aligned}$$

Aus der Randbedingung bekommen wir

$$\int_{\partial\Omega} A(x)\mathcal{D}u \cdot \nu \phi ds + \mu \int_{\partial\Omega} u\phi ds = \int_{\partial\Omega} g\phi ds.$$

Zusammengesetzt erhalten wir die Variationsgleichung

$$\mu \int_{\partial\Omega} u\phi ds + \int_{\Omega} A(x)\mathcal{D}u\mathcal{D}\phi + b(x) \cdot \mathcal{D}u\phi + c(x)u\phi dx = \int_{\Omega} f\phi dx + \int_{\partial\Omega} g\phi ds.$$

Wegen Dichttheit gilt diese Gleichung nicht nur für  $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$  sondern allgemeiner für  $\phi \in H^1(\Omega)$ .

**Def.** Sei  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$ . Eine Fktn  $u \in H^1(\Omega)$  heißt **schwache Lösung** von  $(\text{RWP}_3)$ , falls sie folgende Gleichung erfüllt:

$$\mu \int_{\partial\Omega} u\phi ds + \int_{\Omega} A\mathcal{D}u\mathcal{O}\phi + b\mathcal{D}u\phi + cu\phi dx = \int_{\Omega} f\phi dx + \int_{\partial\Omega} g\phi ds \quad \forall \phi \in H^1(\Omega)$$

Gegeben: Hilbertraum  $H$ ,  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte, koerzive Bilinearform,  $l : H \rightarrow \mathbb{R}$  linear, stetig.

Gesucht: ist  $u \in H$  mit  $\forall \phi \in H : B(u, \phi) = l(\phi)$  (VGL).

Idee: Seien  $U_n \subset H$  ein normierter Raum mit  $\dim(U_n) = d_n < \infty$ ,  $B_n : U_n \times U_n \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte, koerzive Bilinearform,  $l_n \in U_n'$ .

Gesucht ist  $u_n \in U_n$  mit  $\forall \phi \in U_n : B(u_n, \phi) = l_n(\phi)$  (VGL)<sub>n</sub>

Fragen: Wie wählt man  $U_n$ ,  $B_n$  und  $l_n$  so, dass  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ , wobei  $u$  die Lösung von (VGL) ist? Wie berechnet man die Lösung  $u_n$  von (VGL)<sub>n</sub>?

**Def.** Die Approximation von (VGL) mittels (VGL)<sub>n</sub> mit  $U_n \subset H$  und  $B_n = B|_{U_n \times U_n}$  heißt **konforme Approximation** von (VGL). Eine solche Methode wird als **Verfahren von Ritz** bezeichnet.

Sei  $\{w_1, \dots, w_{d_n}\}$  eine Basis von  $U_n$  und sei  $u_n$  eine Lösung von (VGL)<sub>n</sub>.

$$u_n = \sum_{i=1}^{d_n} \gamma_i w_i$$

$$B_n(u_n, \phi) = \sum_{i=1}^{d_n} \gamma_i B(w_i, \phi)$$

$$\sum_{j=1}^{d_n} \gamma_j B(w_j, w_i) = l(w_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, d_n$$

$$\hat{B}\gamma = \hat{l} \quad \text{mit } \hat{B} = (B_{ij}) \quad \text{mit } B_{ij} = B(w_j, w_i),$$

$$\hat{l} = (l_n(w_1), \dots, l_n(w_{d_n}))^T \quad (\text{Galerkin-Gleichung})$$

**Satz.** Für die Lösungen  $u_n$  der konformen Approximation (VGL)<sub>n</sub> und die Lösung  $u$  von (VGL) gilt

$$\|u_n - u\|_H \leq c \left( \inf_{v \in U_n} \|u - v\|_H + \|l_n - l\|_{U_n'} \right)$$

**Folgerung.** Es genügt,  $U_n$  und  $l_n$  so zu wählen, dass

- $\forall u \in H : \inf_{v_n \in U_n} \|u - v_n\|_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und
- $\|l_n - l\|_{U_n'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Wahl von  $U_n$ :

- Eigenfunktionen:  $\mathcal{L}w_j = \lambda_j w_j$

**Bsp.**

$$\begin{cases} -u_{xx} &= f & \text{in } \Omega = (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{cases}$$

Die Eigenfunktionen sind  $w_j(x) = \sin(\pi j x)$  für  $j > 0$ . Wir setzen  $U_n = \text{span}\{w_j \mid j = 1, \dots, n\}$ .