Zusammenfassung Logik für Informatiker

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Prädikatenlogik erster Stufe

Notation. Sei $\beta : \{x_0, x_1, ...\} \to D_I$ eine Belegung zu einer Interpretation I, x eine Variable und $d \in D_I$. Dann setze

$$\beta_x^d : \{x_0, x_1, ...\} \to D_I, \quad y \mapsto \begin{cases} d, & \text{falls } x = y \\ \beta(y), & \text{sonst} \end{cases}$$

Def. Eine Interpretation I und eine Belegung β erfüllen eine eine Formel F, geschrieben $I, \beta \vDash F$, falls

$$\begin{aligned}
I, \beta \vDash (t_1 = t_2) \quad &:\Longleftrightarrow (t_1)_{I,\beta} = (t_2)_{I,\beta} \\
I, \beta \vDash P(t_1, ..., t_n) \quad &:\Longleftrightarrow P^I((t_1)_{I,\beta}, ..., (t_n)_{I,\beta}) \\
I, \beta \vDash \neg A \quad &:\Longleftrightarrow I, \beta \nvDash A \\
I, \beta \vDash A \wedge B \quad &:\Longleftrightarrow (I, \beta \vDash A) \wedge (I, \beta \vDash B) \\
I, \beta \vDash A \vee B \quad &:\Longleftrightarrow (I, \beta \vDash A) \vee (I, \beta \vDash B) \\
I, \beta \vDash A \to B \quad &:\Longleftrightarrow (I, \beta \nvDash A) \vee (I, \beta \vDash B) \\
I, \beta \vDash A \leftrightarrow B \quad &:\Longleftrightarrow \quad ((I, \beta \nvDash A) \wedge (I, \beta \nvDash B)) \\
&\qquad \vee ((I, \beta \vDash A) \wedge (I, \beta \vDash B)) \\
I, \beta \vDash \forall x : A \quad &:\Longleftrightarrow \forall d \in D_I : I, \beta_x^d \vDash A \\
I, \beta \vDash \exists x : A \quad &:\Longleftrightarrow \exists d \in D_I : I, \beta_x^d \vDash A
\end{aligned}$$

Proposition. Es gilt für alle Interpretationen I, Belegungen β und Formeln A, B:

$$\begin{aligned}
I, \beta \vDash A \quad &\Longleftrightarrow I, \beta \nvDash \neg A \Longleftrightarrow I, \beta \vDash \neg\neg A \\
I, \beta \vDash A \wedge B \quad &\Longleftrightarrow I, \beta \vDash \neg(A \to \neg B) \\
I, \beta \vDash A \vee B \quad &\Longleftrightarrow I, \beta \vDash \neg A \to B \\
I, \beta \vDash A \leftrightarrow B \quad &\Longleftrightarrow I, \beta \vDash (A \to B) \wedge (B \to A) \\
I, \beta \vDash \exists x : A \quad &\Longleftrightarrow I, \beta \vDash \neg \forall x : \neg A
\end{aligned}$$

Def. Seien $A \in$ For, $M \subset$ For und I eine Interpretation. Dann heißt I ein **Modell** von A bzw. M, falls

$$\begin{aligned}
I \vDash A \quad &:\Longleftrightarrow \text{ für alle Belegungen } \beta \text{ gilt } I, \beta \vDash A, \\
I \vDash M \quad &:\Longleftrightarrow \forall F \in M : I \vDash F.
\end{aligned}$$

Notation. Für $M \subset$ For, eine Interpretation I und eine Belegung β schreiben wir:

$$I, \beta \vDash M \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall F \in M : I, \beta \vDash F$$

Def. Seien $A, B \subset$ For. Man sagt, B **folgt** aus A (geschrieben $A \vDash B$), falls für alle Interpretationen I und Belegungen β gilt:

$$I, \beta \vDash A \Longrightarrow I, \beta \vDash B.$$

Falls $A \vDash B$ und $B \vDash A$ gilt, so heißen A und B **logisch äquivalent**, geschrieben $A \vDash\!\!\!\dashv B$.

Notation. $A_1, ..., A_n \vDash A \quad :\Longleftrightarrow \quad \{A_1, ..., A_n\} \vDash A$

Satz. Für alle Interpretationen I und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$I \vDash \{A_1, ..., A_n\} \Longleftrightarrow I \vDash A_1 \wedge ... \wedge A_n$$

Satz. Für alle $A, B \in$ For und $M \subset$ For gilt:

$$M \vDash A \to B \Longleftrightarrow M \cup \{A\} \vDash B$$

Def. Eine Formel $A \in$ For heißt **Tautologie** oder **(allgemein-) gültig** (geschrieben $\vDash A$), falls $I \vDash A$ für alle Interpretationen I gilt.

Def. Eine Formel $A \in$ For heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation I und eine Belegung β mit $I, \beta \vDash A$ gibt. Falls es dies nicht gibt, so heißt A **unerfüllbar**.

Satz. Für $A \in$ For gilt:

- $\vDash A \Longrightarrow A$ ist erfüllbar
- $\vDash A \Longleftrightarrow \varnothing \vDash A$

Satz. Sei $A \in$ For und $M \subset$ For. Dann gilt $M \vDash A$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar ist. Insbesondere ist A genau dann gültig, wenn $\{\neg A\}$ unerfüllbar ist.

Def. **Universelle Formeln** sind Formeln, die sich nach den folgenden Regeln herleiten lassen:

$$\frac{A \text{ ist quantorenfrei}}{A} \qquad \frac{A \qquad B}{A \wedge B} \qquad \frac{A \qquad B}{A \vee B} \qquad \frac{A}{\forall x : A}$$

Proposition. Sei I eine Teil-Interpretation zu J, β eine Belegung zu I und A eine universelle Formel. Dann gilt:

$$J, \beta \vDash A \Longrightarrow I, \beta \vDash A.$$

Aussagenlogik

Def. Für $p \in \mathcal{P}^0$ heißen die Ausdrücke p und $\neg p$ **Literale**. Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine Konjunktion von Klauseln ist.

Problem (**SAT**)**.** Gegeben sei eine Formel in konjunktiver Normalform. Frage: Ist diese Formel erfüllbar?

Def. Eine Formel ist in **Negationsnormalform (NNF)**, wenn Negationen nur unmittelbar vor Atomen stehen.

Def. Der **Hilbert-Kalkül** besteht aus den Axiomen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ax}_1 &\coloneqq \{A \to (B \to A) \mid A, B \in \mathrm{For}\} \\
\mathrm{Ax}_2 &\coloneqq \{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \mid A, B, C \in \mathrm{For}\} \\
\mathrm{Ax}_3 &\coloneqq \{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \mid A, B, C \in \mathrm{For}\}
\end{aligned}$$

und der Schlussregel **Modus Ponens (MP)**

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

Def. Eine Formel $F \in$ For ist aus $M \subset$ For **H-herleitbar**, notiert $M \vdash_H A$, wenn es eine Folge $A_1, ..., A_n$ in For gibt mit $A_n = A$, sodass für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt:

$$A_i \in \mathrm{Ax}_1 \cup \mathrm{Ax}_2 \cup \mathrm{Ax}_3 \cup M \quad \text{oder} \quad \exists j, k < i : A_j = A_k \to A_i.$$

Def. $A \in$ For heißt **herleitbar**, notiert $\vdash A$, falls $\varnothing \vdash A$ gilt.

Beobachtung. Präfixe und Verkettungen von Herleitungen sind ebenfalls Herleitungen.

Proposition.
- Aus $M \vdash A$ und $M \vdash A \to B$ folgt $M \vdash B$.
- Aus $M \vdash \neg A \to \neg B$ folgt $M \vdash B \to A$.

Satz (Deduktionstheorem)**.** $M \vdash A \to B \Longleftrightarrow M \cup \{A\} \vdash B$

Satz. Für alle $A, B, C \in$ For gilt:

- $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
- $\vdash \neg A \to (A \to B)$
- $\vdash \neg\neg A \to A$
- $\vdash A \to \neg\neg A$
- $\vdash (\neg A \to A) \to A$

Proposition. Es gilt:

$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C} \qquad \frac{\neg\neg A}{A}$$

Satz (Korrektheitssatz)**.** Sei $A \in$ For und $M \subset$ For. Dann gilt

$$M \vdash A \Longrightarrow M \vDash A.$$

Def. $M \subset$ For heißt **konsistent**, wenn für kein $A \in$ For zugleich $M \vdash A$ und $M \vdash \neg A$ gilt.

Lemma.
- Ist M inkonsistent, so gilt $M \vdash B$ für alle $B \in$ For.
- Für $A \in$ For gilt: $M \nvdash A \Longrightarrow M \cup \{A\}$ ist konsistent.

Lemma (Modell-Lemma)**.** Jede konsistente Menge ist erfüllbar, d. h. sie besitzt ein Modell.

Satz (Vollständigkeitssatz)**.** Sei $A \in$ For und $M \subset$ For. Dann gilt

$$M \vDash A \Longrightarrow M \vdash A.$$

Proposition. Sei $M \subset$ For. Dann ist M genau dann erfüllbar, wenn M konsistent ist.

Satz (Endlichkeits- bzw. Kompaktheitssatz)**.** Sei $A \in$ For, $M \subset$ For.

- Dann gilt $M \vDash A$ genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge $M' \subset M$ mit $M' \vDash A$ gibt.
- Dann ist M genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von M erfüllbar ist.

Hilbert-Kalkül für Prädikatenlogik

Proposition. Es gilt für alle $A \in$ For, $M \subset$ For:

$$M \vDash A \Longrightarrow (\forall \text{ Interpretationen } I : I \vDash M \Longrightarrow I \vDash A)$$

Achtung. Die Umkehrung gilt nicht!

Proposition. Sei $A \in$ For. Dann gilt:

- $\forall x : A \vDash A$
- $A \vDash \forall x : A$ nicht (i. A.)

Def. Sei $A \in$ For. Dann bezeichnet $\mathrm{FV}(A)$ die Menge der **freien** Variablen und $\mathrm{BV}(A)$ die Menge der **gebundenen** Variablen in A.

Def. Eine Formel $A \in$ For heißt **geschlossen**, falls $\mathrm{FV}(A) = \varnothing$.

Def. • $\forall x : A$ heißt **Generalisierung** von $A \in$ For.

- Ist $\mathrm{FV}(A) = \{y_1, ..., y_n\}$, so heißt jede der $n!$ Formeln $\forall\, y_1 : \forall\, y_2 : ... \forall\, y_n : A$ ein **universeller Abschluss** von A.

Satz (Koinzidenzlemma)**.** Seien $A, B \in$ For, I eine Interpretation und β_1, β_2 Belegungen mit $\beta_1|_{\mathrm{FV}(A)} = \beta_2|_{\mathrm{FV}(A)}$. Dann gilt

$$I, \beta_1 \vDash A \iff I, \beta_2 \vDash A.$$

Korollar. Seien A, M geschlossen und β_1, β_2 Belegungen. Dann gilt

- $I, \beta_1 \vDash M \iff I, \beta_2 \vDash M$ • $I, \beta_1 \vDash M \iff I \vDash M$
- M ist erfüllbar $\iff$ M hat ein Modell
- $M \vDash A \iff (\forall$ Interpretationen $I : I \vDash M \iff I \vDash A)$

Proposition. • $I \vDash A \iff I \vDash \forall\, x : A$ • $\vDash A \iff \vDash \forall\, x : A$

Def. Sei x eine Variable und $t \in$ Term ein Term. Dann ist die Substitution $[t/x]$ für Terme und Formeln folgendermaßen definiert:

$$y[t/x] := \begin{cases} t, & \text{falls } y = x \\ y, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f(t_1, ..., t_n)[t/x] &:= f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]) && \text{für } f \in \mathcal{F}^n \\
P(t_1, ..., t_n)[t/x] &:= P(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]) && \text{für } P \in \mathcal{P}^n \\
(t_1 = t_2)[t/x] &:= (t_1[t/x] = t_2[t/x]) \\
(\neg A)[t/x] &:= \neg(A[t/x]) \\
(A \to B)[t/x] &:= A[t/x] \to A[t/x]
\end{aligned}$$

$$(\forall\, y : A)[t/x] := \begin{cases} \forall\, y : A, & \text{falls } x = y \\ \forall\, y : (A[t/x]), & \text{sonst und falls } y \notin \mathrm{FV}(t) \\ \forall\, z : (A[z/y][t/x]), & \text{sonst} \end{cases}$$

Im letzten Fall ist z eine frische Variable, d. h. $z \notin \mathrm{FV}(t) \cup \mathrm{FV}(A)$.

Def. Der **Hilbert-Kalkül** für Prädikatenlogik hat als Axiome für alle $A, B, C \in$ For und $t \in$ Term alle Generalisierungen von

$\mathrm{Ax}_1 : A \to (B \to A)$	
$\mathrm{Ax}_2 : (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	
$\mathrm{Ax}_3 : (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	
$\mathrm{Ax}_4 : (\forall\, x : A) \to A[t/x]$	(**SP**ezialisierung)
$\mathrm{Ax}_5 : A \to \forall\, x : A$, falls $x \notin \mathrm{FV}(A)$	(**GE**neralisierung)
$\mathrm{Ax}_6 : (\forall\, x : A \to B) \to ((\forall\, x : A) \to (\forall\, x : B))$	(**D**istr. **A**llquantor)
$\mathrm{Ax}_7 : x = x$	(**RE**flexivität)
$\mathrm{Ax}_8 : (x = y) \to (A \to A')$	(**GL**eichheit),

wobei bei der letzten Regel A quantorenfrei ist und A' aus A durch Ersetzen eines oder mehrerer Vorkommen von x durch y entsteht. Außerdem gilt die Schlussregel **Modus Ponens**.

Satz (Deduktionstheorem)**.** Wir beim Hilbert-Kalkül der Aussagenlogik gilt für $M \subset$ For und $A, B \in$ For:

$$M \vdash A \to B \iff M \cup \{A\} \vdash B$$

Satz (Generalisierungstheorem)**.** Sei $M \subset$ For und $A \in$ For. Angenommen, es gilt $\forall\, B \in M : x \notin \mathrm{FV}(B)$. Dann gilt $M \vdash \forall\, x : A$.

Korollar. $\vdash A \implies \vdash \forall\, x : A$

Proposition (α-Konversion)**.** Sei $y \in \mathrm{FV}(\forall\, x : A)$. Dann gilt

$$\vdash (\forall\, x : A) \to (\forall\, y : A[y/x]).$$

Satz (Korrektheit)**.** Es gilt für alle $M \subset$ For und $A \in$ For:

$$M \vdash A \implies M \vDash A.$$

Lemma. Für $M \subset$ For und $A \in$ For gilt:

- $M \nvdash A \implies M \cup \{A\}$ ist konsistent.
- $M \nvdash \forall\, x : A \implies M \cup \{\neg \forall\, x : A, \neg A[c/x]\}$ ist konsisten für jede Variable c, die nicht in M und A vorkommt.

Lemma (Modell-Lemma)**.** konsistent $\iff$ erfüllbar

Satz (Löwenheim-Skolem)**.** Jede erfüllbare Menge M geschlossener Formeln hat ein höchstens abzählbares Modell bzw. im Falle von Logik ohne Gleichheit ein abzählbar unendliches Modell.

Satz (Vollständigkeit)**.** Es gilt für alle $M \subset$ For und $A \in$ For:

$$M \vDash A \implies M \vdash A.$$

Satz (Endlichkeits- bzw. Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik)**.** Sei $A \in$ For, $M \subset$ For.

- Dann gilt $M \vDash A$ genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge $M' \subset M$ mit $M' \vDash A$ gibt.
- Dann ist M genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von M erfüllbar ist.

Bemerkung. Die Menge der gültigen Formeln ist aufzählbar bzw. semi-entscheidbar.

Satz (Church)**.** Das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik erster Stufe ist unentscheidbar.

Korollar. Es gibt kein $A \in$ For mit

- $I \vDash A \iff D_I$ ist endlich.
- Bei Logik ohne Gleichheit: $I \vDash A \iff |D_I| = n$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

Weitere Beweisverfahren

Def. Im **Gentzen-Kalkül** ($\vdash_G$) gelten die folgenden Schlussregeln:

rechts		links
$\dfrac{M \cup \{A\} \vdash_G B}{M \vdash A \to B}$	Imp	$\dfrac{M \cup \{\neg C\} \vdash_G A \quad M \cup \{B\} \vdash_G C}{M \cup \{A \to B\} \vdash_G C}$
$\dfrac{M \cup \{A\} \vdash_G \neg B}{M \cup \{B\} \vdash_G \neg A}$	Neg	$\dfrac{M \cup \{\neg B\} \vdash_G A}{M \cup \{\neg A\} \vdash_G B}$
$\dfrac{M \vdash_G A \quad M \vdash_G B}{M \vdash_G A \wedge B}$	Kon	$\dfrac{M \cup \{A, B\} \vdash_G C}{M \cup \{A \wedge B\} \vdash_G C}$
$\dfrac{M \cup \{\neg B\} \vdash_G A}{M \vdash_G A \vee B}$	Dis	$\dfrac{M \cup \{A\} \vdash_G C \quad M \cup \{B\} \vdash_G C}{M \cup \{A \vee B\} \vdash_G C}$

$$\dfrac{}{M \cup \{A\} \vdash_G A} \text{ (Axiom)}$$

Satz (Korrektheit, Vollständigkeit)**.** Es gilt für alle $A \in$ For und $M \subset$ For: $M \vdash_G A \iff M \vDash A$.

Notation. Für ein Literal l bezeichnet $\bar{l}$ das **negierte Literal**, also

$$\bar{p} := \neg p, \quad \overline{\neg p} := p.$$

Def. Sei A eine Formel in KNF mit Klauseln K und K', sodass ein Literal l existiert mit $l \in K$ und $\bar{l} \in K'$. Dann heißt

$$R = (K \setminus \{l\}) \cup (K' \setminus \{\bar{l}\}) \quad \textbf{Resolvente} \text{ von } K \text{ und } K'.$$

Def. Ein **Resolutionsschritt** fügt eine Resolvente einer Formel in KNF der Formel hinzu. Die Formel, die aus einer Formel A durch mehrere Resolutionsschritte entsteht, sodass keine weiteren Resolutionsschritte möglich sind, wird mit $\mathrm{Res}^*(A)$ bezeichnet.

Lemma. Sei A eine Formel in KNF mit Klauseln K und K' und einer Resolvente $R = (K \setminus \{l\}) \cup (K' \setminus \{\bar{l}\})$. Dann ist A genau dann erfüllbar, wenn $A \cup R$ es ist.

Satz (Resolutionssatz)**.** Eine KNF-Formel A ist genau dann unerfüllbar, wenn $\varnothing \in \mathrm{Res}^*(A)$.

Zusicherungskalkül

Def. Ein **Hoare-Tripel** hat die Form

$$\{A\}S\{B\},$$

wobei A und B prädikatenlogische Formeln, sogenannte **Zusicherungen**, und S eine Programmanweisung ist.

Def.
- Ein Hoare-Tripel $\{A\}S\{B\}$ **gilt schwach**, wenn B nach Ausführung von S unter der Vorbedingung A gilt, falls S ohne Fehlerabbruch terminiert.
- Gilt das Hoare-Tripel schwach und sichert die Vorbedingung A die Terminierung ohne Fehler von S, so gilt das Tripel **streng**.

Def. Im **Zusicherungskalkül** (Hoare-Kalkül) gelten folgende Schlussregeln:

$$\frac{}{\{B[E/x]\}\ \ x = E;\ \ \{B\}}\ (=\mathrm{p}) \qquad \frac{}{\{D_E \land B[E/x]\}\ \ x = E;\ \ \{B\}}\ (=\mathrm{t})$$

$$\frac{A \Rightarrow B \quad \{B\}\ S\ \{C\} \quad C \Rightarrow D}{\{A\}\ S\ \{D\}}\ (\mathrm{K}) \qquad \frac{\{A\}\ S\ \{B\} \quad \{B\}\ T\ \{C\}}{\{A\}\ S;T\ \{C\}}\ (\mathrm{sK})$$

$$\frac{\{A \land B\}\ S\ \{C\} \quad \{A \land \neg B\}\ T\ \{C\}}{\{A\}\ \text{if } (B) \text{ then } S \text{ else } T\ \{C\}}\ (\mathrm{if})$$

$$\frac{\{A \land B\}\ S\ \{A\}}{\{A\}\ \text{while } (B) \text{ do } S\ \{A \land \neg B\}}\ (\mathrm{Wp})$$

$$\frac{\forall z \in \mathbb{Z} : \{A \land B \land t = z\}\ S\ \{A \land t < z\} \quad A \land B \implies t \geq 0}{\{A\}\ \text{while } (B) \text{ do } S\ \{A \land \neg B\}}\ (\mathrm{Wt})$$

Temporale Logik

Def. Ein **Ablauf** $\pi = s_0, s_1, \ldots$ ist eine unendliche Folge von Zuständen aus einer Menge S mit einer Bewertung $L : S \to \mathfrak{P}(\mathcal{P})$.

Notation. $\pi^j \coloneqq s_j, s_{j+1}, \ldots$ heißt **j-tes Suffix** von π.

Def. Sei $\pi = s_0, s_1, \ldots$ ein Ablauf. Eine Formel $A \in$ TFor gilt für π (π erfüllt A, $\pi \models A$), falls gilt:

$$\begin{aligned}
&\pi \models p && :\iff p \in L(s_0)\\
&\pi \models \neg A && :\iff \pi \neg \models A\\
&\pi \models A \lor && :\iff (\pi \models A) \lor (\pi \models B)\\
&\pi \models \mathbf{X}A && :\iff \pi^1 \models A\\
&\pi \models \mathbf{G}A && :\iff \forall j \in \mathbb{N}_0 : \pi^j \models A\\
&\pi \models \mathbf{F}A && :\iff \exists j \in \mathbb{N}_0 : \pi^j \models A\\
&\pi \models A\,\mathbf{U}\,B && :\iff \exists j \in \mathbb{N}_0 : \pi^j \models B \land (\forall i < j : \pi^i \models A)
\end{aligned}$$

Def. Eine Formel $A \in$ TFor heißt **gültig** / **erfüllbar**, falls alle Abläufe / ein Ablauf A erfüllt.

Proposition. Für alle $A \in$ TFor gilt:
- $\mathbf{F}A \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\mathbf{F}\neg A$
- $\mathbf{F}A \mathrel{=\!\!|\!\models} \mathit{true}\,\mathbf{U}\,A$
- $A\,\mathbf{U}\,B \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg((\neg B)\,\mathbf{U}\,(\neg A \land \neg B)) \land \mathbf{F}B$

Satz. Für alle $A, B \in$ TFor gilt:
- $\models \mathbf{G}(A \to B) \to (\mathbf{G}A \to \mathbf{G}B)$
- $\models \mathbf{X}\mathbf{G}A \leftrightarrow \mathbf{G}\mathbf{X}A$
- $\models (A \land \mathbf{G}(A \to \mathbf{X}A)) \to \mathbf{G}A$
- $\models \mathbf{X}\mathbf{F}A \to \mathbf{F}A$

Def. Eine **Kripke-Struktur** $K = (S, \to, L, s_0)$ besteht aus einer Menge S von Zuständen mit Startzustand s_0, einer Bewertung $L : S \to \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ und einer Transitionsrelation $\to \subset S \times S$, sodass $\forall s \in S : \exists s' \in S : s \to s'$ gilt.

Def. Ein **Ablauf** π von K ist eine unendliche Folge von Zuständen beginnend mit s_0, also $\pi = s_0, s_1, s_2, \ldots$ mit $\forall i \in \mathbb{N}_0 s_i \to s_{i+1}$. Die Zustände eines solchen Ablaufs heißen **erreichbar**.

Def. Eine Kripke-Struktur K **erfüllt** $A \in$ TFor, falls für alle Abläufe π von K gilt $\pi \models A$.

Def. Sei K eine Kripke-Struktur, s ein Zustand. Eine Formel $A \in$ CTFor **gilt** für (K, s), falls (koinduktive Definition)

$$\begin{aligned}
&K, s \models p && :\iff p \in L(s)\\
&K, s \models \neg A && :\iff K, s \neg \models A\\
&K, s \models A \lor && :\iff (K, s \models A) \lor (K, s \models B)\\
&K, s \models \mathbf{AX}B && :\iff \forall s' \in S : (s \to s') \implies K, s' \models B\\
&K, s \models \mathbf{EX}B && :\iff \exists s' \in S : (s \to s') \land (K, s' \models B)\\
&K, s \models \mathbf{AG}B && :\iff K, s \models B \land \forall s' \in S : (s \to s') \implies K, s' \models \mathbf{AG}B\\
&K, s \models \mathbf{EG}B && :\iff K, s \models B \land \exists s' \in S : (s \to s') \land (K, s' \models \mathbf{EG}B)\\
&K, s \models \mathbf{AF}B && :\iff \forall \text{ Abläufe } \pi = s_0, s_1, s_2, \ldots \text{ von } K \text{ mit } s_0 = s :\\
& && \qquad \exists j \in \mathbb{N}_0 : K, s_j \models B\\
&K, s \models \mathbf{EF}B && :\iff \exists \text{ Ablauf } \pi = s_0, s_1, s_2, \ldots \text{ von } K \text{ mit } s_0 = s :\\
& && \qquad \exists j \in \mathbb{N}_0 : K, s_j \models B\\
&K, s \models \mathbf{A}(B\,\mathbf{U}\,C) && :\iff \forall \text{ Abläufe } \pi = s_0, s_1, s_2, \ldots \text{ von } K \text{ mit } s_0 = s :\\
& && \qquad \exists j \in \mathbb{N}_0 : (K, s_j \models C) \land (\forall i < j : K, s_i \models B)\\
&K, s \models \mathbf{E}(B\,\mathbf{U}\,C) && :\iff \exists \text{ Ablauf } \pi = s_0, s_1, s_2, \ldots \text{ von } K \text{ mit } s_0 = s :\\
& && \qquad \exists j \in \mathbb{N}_0 : (K, s_j \models C) \land (\forall i < j : K, s_i \models B)
\end{aligned}$$

Notation. $K \models A \ :\iff\ K, s_0 \models A$, wobei s_0 Startzustand von K.

Def. Eine Formel $A \in$ CTFor heißt **gültig** / **erfüllbar**, wenn alle Kripke-Strukturen / eine Kripke-Struktur A erfüllen / erfüllt.

Satz. Für alle $B, C \in$ CTFor gilt:
- $\models (B \land \mathbf{AG}(B \to \mathbf{AX}B)) \to \mathbf{AG}B$
- $\models \mathbf{AX}(B \to C) \land \mathbf{AX}B \to \mathbf{AX}C$

Satz. Für alle $A, B \in$ CTFor gilt:
- $\mathbf{AG}B \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\mathbf{EF}\neg B$
- $\mathbf{EG}B \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\mathbf{AF}\neg B$
- $\mathbf{EF}B \mathrel{=\!\!|\!\models} \mathbf{E}(\mathit{true}\,\mathbf{U}\,B)$
- $\mathbf{AF}B \mathrel{=\!\!|\!\models} \mathbf{A}(\mathit{true}\,\mathbf{U}\,B)$
- $\mathbf{AX}B \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\mathbf{EX}\neg B$
- $\mathbf{A}(B\,\mathbf{U}\,C) \mathrel{=\!\!|\!\models} \neg\mathbf{E}(\neg C\,\mathbf{U}\,(\neg C \land \neg B)) \land \mathbf{AF}C$

Modale Logik