Zusammenfassung Gewöhnliche DGLn

Def (Klassifikation von DGLn).

(I) **Gewöhnliche** DGL: Gesucht ist Funktion in einer Variable
Partielle DGL: Gesucht ist Funktion in mehreren Variablen

(II) **Ordnung** einer DGL: Höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in Gleichung vorkommt

(III) **Explizite** DGL: Gleichung der Form $y^{(k)}=f(t,y,\dot{y},...,y^{(k-1)})$
Implizite DGL: Allgemeinere Form $F(t,y,\dot{y},...,y^{(k)})=0$

(IV) **Skalare** DGL: Gesucht ist Funktion mit Wert in $\mathbb{R}$
n-dimensionale DGL: Gesuchte Funktion hat Wert in $\mathbb{R}^n$

(V) **Lineare** DGL: Gleichung hat die Form

$$a_k(t)y^{(k)}(t)+a_{(k-1)}(t)y^{k-1}(t)+...+a_1(t)\dot{y}(t)+a_0(t)y(t)=0$$

(VI) **Autonome** DGL: Gleichung der Form $F(y,\dot{y},...,y^{(k)})=0$ (keine Abhängigkeit von t, Zeitinvarianz)

Def. Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$ und $(t_0,y_0)\in\mathcal{D}$. Dann ist ein **Anfangswertproblem** (AWP) gegeben durch die Gleichungen

$$(1.1)\begin{cases}\dot{y}(t)=f(t,y(t)),\\ y(t_0)=y_0.\end{cases}$$

Notation. Seien im Folgenden I und J stets Intervalle in $\mathbb{R}$.

Def.
- Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Funktion $y:I\to\mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von $\dot{y}=f(t,y)$, falls für alle $t\in I$ gilt: $\dot{y}(t)=f(t,y(t))$.
- Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n)^k=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times...\times\mathbb{R}^n$, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$. Eine k-mal differenzierbare Funktion $y:I\to\mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von
$$y^{(k)}=f(t,y,\dot{y},...,y^{(k-1)}),\tag{1.2}$$
falls für alle $t\in I$ gilt: $y^{(k)}(t)=f(t,y(t),\dot{y}(t),...,y^{(k-1)}(t))$

Satz.
- Ist $y:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2), dann ist
$$(y_1,...,y_k):I\to\mathbb{R}^{kn},\qquad t\mapsto(y(t),\dot{y}(t),...,y^{(k-1)}(t))$$
eine Lösung des Systems von Gleichungen
$$(1.3)\begin{cases}\dot{y}_1=y_2\\ \dot{y}_2=y_3\\ \quad\vdots\\ \dot{y}_{k-1}=y_k\\ \dot{y}_k=f(t,y_1,y_2,...,y_{k-1},y_k)\end{cases}$$
- Ist umgekehrt $(y_1,...,y_k):I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.3), dann ist $y=y_1:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2).

Satz.
- Ist $y:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von AWP (1.1), dann ist
$$(y_1,y_2):I\to\mathbb{R}^{n+1},\qquad t\mapsto(y_1(t),y_2(t))=(t,y(t))$$
eine Lösung des Anfangswertproblems
$$(1.4)\begin{cases}\dot{y}_1(t)=1, & y_1(t_0)=t_0\\ \dot{y}_2(t)=f(y_1(t),y_2(t)), & y_2(t_0)=y_0\end{cases}$$
- Ist $(y_1,y_2):I\to\mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung von (1.4), dann ist $y=y_2:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.1).

Problem. Gesucht ist eine Lösung $y:I\to\mathbb{R}$ der linearen, skalaren, expliziten DGL 1. Ordnung (mit $a,b:I\to\mathbb{R}$ stetig)

$$\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)+b(t)\tag{1.5}$$

Satz. Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)$ ist gegeben durch $y_h(t)=c\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)$ mit $c\in\mathbb{R}$.

Satz. Sei $y_p:I\to\mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung von (1.5). Dann ist die Menge aller Lösungen von (1.5) gegeben durch

$$\{y_p+y_h\,|\,y_h:I\to\mathbb{R}\text{ ist Lösung von }\dot{y_h}(t)=a(t)\cdot y_h(t)\}$$

Bemerkung. Der Ansatz mit **Variation der Konstanten** $y_p(t)=c(t)\cdot y_h(t)$ für (1.5) führt zu

$$c(t)=\frac{1}{c_0}\int_{t_0}^{t}b(\tau)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau}a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau$$

$$\Rightarrow y_p(t)=\left(\int_{t_0}^{t}b(\tau)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau}a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right)\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Korollar. Die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.6)\begin{cases}\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)+b(t)\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

mit $a,b:I\to\mathbb{R}$ stetig, $t_0\in I$ und $y_0\in\mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$y(t)=\left(y_0+\int_{t_0}^{t}b(\tau)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau}a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right)\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Problem. Ges. ist Lösung der DGL mit **getrennten Variablen**

$$\dot{y}(t)=g(t)\cdot h(y)\tag{1.7}$$

mit $g:I\to\mathbb{R}$ und $h:J\to\mathbb{R}$ stetig.

Lsg.
1. Fall: $h(y_0)=0$ für ein $y_0\in J$. Dann ist $y(t)=y_0$ eine Lsg.
2. Fall: Es gibt kein $y_0\in J$ mit $h(y_0)=0$. Sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ und G eine Stammfunktion von g. Da h stetig und nirgends null ist, ist h entweder strikt positiv oder strikt negativ. Somit ist H streng monoton steigend/fallend und somit umkehrbar. Eine Lösung von (1.7) ist nun gegeben durch
$$y(t)=H^{-1}(G(t)+c_0)\quad\text{mit }c_0\in\mathbb{R}.$$

Problem. Gesucht ist Lösung des AWP mit getrennten Variablen

$$(1.8)\begin{cases}\dot{y}(t)=g(t)\cdot h(y(t))\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

Lsg.
1. Fall: $h(y_0)=0$. Dann ist $y(t)=y_0$ eine Lösung.
2. Fall: $h(y_0)\neq0$. Dann ist h in einer Umgebung von y_0 strikt positiv/negativ. Setze
$$H_1(y):=\int_{y(t_0)}^{y}\frac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s,\quad G_1(t):=\int_{t_0}^{t}g(s)\,\mathrm{d}s.$$
Dann ist H_1 in einer Umgebung von y_0 invertierbar und eine Lösung von (1.8) ist gegeben durch
$$y(t)=H_1^{-1}(G_1(t)).$$

Technik (Transformation). Manchmal lässt sich eine DGL durch **Substitution** eines Termes in eine einfachere DGL überführen, deren Lösung mit bekannten Methoden gefunden werden kann. Die Lösung der ursprünglichen DGL ergibt sich durch Rücksubstitution.

Bsp. Gegeben sei die DGL $\dot{y}=f(\alpha t+\beta y+\gamma)$ mit $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta\neq0$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig. Substituiere $z(t)=\alpha t+\beta y(t)+\gamma$. Es ergibt sich die neue DGL $\dot{z}(t)=\beta f(z(t))+\alpha$, die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt.

Bsp (Bernoulli-DGL). Gegeben sei die DGL $\dot{y}(t)=\alpha(t)\cdot y(t)+\beta(t)\cdot(y(t))^\delta$ mit $\alpha,\beta:I\to\mathbb{R}$ stetig und $\delta\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Multiplikation mit $(1-\delta)y^{-\delta}$ und Substitution mit $z(t)=(y(t))^{1-\delta}$ führt zur skalaren linearen DGL 1. Ordnung

$$\dot{z}(t)=(1-\delta)\alpha(t)z(t)+(1-\delta)\beta(t).$$

Def. Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$. Eine Abb. $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$ heißt **stetig in $x_0\in\mathcal{D}$**, falls

$$\forall\epsilon>0:\exists\delta>0:\forall x\in\mathcal{D}:\|x-x_0\|<\delta\implies\|f(x)-f(x_0)\|<\epsilon.$$

Die Abb. heißt **stetig** in $\mathcal{D}$, falls sie in jedem Punkt in $\mathcal{D}$ stetig ist.

Notation. $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n):=\{f:I\to\mathbb{R}^n\,|\,f\text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty:=\sup_{t\in I}\|f(t)\|$

Bemerkung. $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n),\|-\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

Def. Eine Teilmenge $A\subset X$ eines topologischen Raumes X heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluss $\overline{A}$ kompakt in X ist.

Def. Seien $(X,\|-\|_X)$ und $(Y,\|-\|_Y)$ Banachräume. Sei $\mathcal{D}\subset X$. Eine Abbildung $T:\mathcal{D}\to Y$ heißt

- **stetig in $x\in\mathcal{D}$**, falls $Tx_n\xrightarrow{n\to\infty}Tx$ in Y für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$ in $\mathcal{D}$ gilt.
- **Lipschitz-stetig** in $\mathcal{D}$, falls eine Konstante $\alpha>0$ existiert mit
$$\forall x_1,x_2\in\mathcal{D}:\|Tx_1-Tx_2\|_Y\leq\alpha\cdot\|x_1-x_2\|_X.$$
- **kontraktiv**, falls T Lipschitz-stetig mit $\alpha<1$ ist.
- **kompakt**, falls T stetig ist und beschränkte Mengen in X auf relativ kompakte Mengen in Y abgebildet werden, d. h. für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}$ besitzt die Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung. Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, die Umkehrung gilt aber nicht.

Satz (Arzelà-Ascoli)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompakt. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn

- $\mathcal{F}$ ist **punktweise beschränkt**, d. h.
$$\forall t \in I : \exists M : \forall f \in \mathcal{F} : \|f(t)\| \leq M$$
- $\mathcal{F}$ ist **gleichgradig stetig**, d. h.
$$\forall \epsilon{>}0 : \exists \delta{>}0 : \forall t_1, t_2{\in}I, f{\in}\mathcal{F} : \|t_1{-}t_2\| < \delta \Rightarrow \|f(t_1){-}f(t_2)\| < \epsilon$$

Satz (Fixpunktsatz von Banach)**.** Sei $(X, \|{-}\|_X)$ ein Banachraum, $\mathcal{D} \subset X$ nichtleer, abgeschlossen. Sei $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ eine Kontraktion. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $y = Ty$ genau eine Lösung in D.

Satz (Fixpunktsatz von Schauder)**.** Sei $(X, \|{-}\|_X)$ ein Banachraum, sei $\mathcal{D} \subset X$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt, konvex. Sei $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $y = Ty$ mindestens eine Lösung in $\mathcal{D}$.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in D$. Dann ist das AWP (1.1) lokal lösbar, d. h. es existiert ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine stetig diff'bare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$, die das AWP (1.1) erfüllt.

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Sei $y : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung des AWP (1.1).

- Eine Lösung $u : J \to \mathbb{R}^N$ heißt **Fortsetzung** (bzw. **echte Fortsetzung**) der Lösung y, falls $I \subset J$ (bzw. $I \subsetneq J$) und $u|_I = y$.
- Die Lösung y heißt **maximale Lösung** des AWP (1.1), falls keine echte Fortsetzung von y existiert. Das Intervall I heißt dann **maximales Existenzintervall**.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$ stetig und $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- Jede lokale Lösung des AWP (1.1) kann zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden.
- Sei $y : I \to \mathbb{R}^N$ eine max. Lsg. des AWP (1.1). Dann ist I offen.

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$.

- Die Funktion f heißt **Lipschitz-stetig bzgl. y** auf $\mathcal{D}$, falls eine Konstante $\mathcal{L} > 0$ existiert, sodass
$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{D} : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \mathcal{L} \cdot \|y_1 - y_2\|.$$
- Wenn für alle $(t, y) \in \mathcal{D}$ eine Umgebung $U_{(t,y)} \subset \mathcal{D}$ existiert, sodass $f|_{U_{(t,y)}}$ Lipschitz-stetig bzgl. y ist, so heißt f **lokal Lipschitz-stetig bzgl. y** auf $\mathcal{D}$.

Lemma. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$ stetig und stetig diff'bar nach y in $\mathcal{D}$. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bzgl. y.

Satz (Picard-Lindelöf, lokal quantitativ)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0){\in}\mathcal{D}$ und $R_{a,b}{:=}[t_0{-}a, t_0{+}a] \times \overline{B_b}(y_0) \subset \mathcal{D}$. Sei f Lipschitz-stetig bzgl. y auf $R_{a,b}$. Dann besitzt das AWP (1.1) im Rechteck $R_{a,b}$ genau eine Lösung $y : I_y \to \mathbb{R}^n$ auf $I_\gamma := [t_0 - y, t_0 + y]$ mit $\gamma = \min(a, \frac{b}{M})$ und $M = \sup_{(t,y) \in R_{a,b}} \|f(t, y)\|$.

Bemerkung. Im Beweis des Satzes definiert man die Picard-Iterierten $u_j : I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ für $j \in \mathbb{N}$ durch
$$u_0(t) := y_0, \qquad u_{j+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_j(\tau))\, d\tau.$$
Man zeigt: Die Funktionenfolge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Lösung $u_\infty : I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ des AWP.

Satz (Picard-Lindelöf, lokal qualitativ)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\mathcal{D}$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann besitzt das AWP (1.1) eine eindeutige lokale Lösung, d. h. es existiert $\gamma = \gamma(t_0, y_0) > 0$, sodass das AWP (1.1) auf $I_\gamma := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$ genau eine Lösung besitzt.

Satz (Picard-Lindelöf, global)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\mathcal{D}$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall $I =]a_-, a_+[$ mit $t_0{\in}I$ und

- Das AWP (1.1) besitzt genau eine Lösung γ auf I.
- Ist $\tilde{z} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige Lösung von (1.1) mit $t_0 \in \tilde{I}$, so gilt $\tilde{I} \subseteq I$ und $z = y|_{\tilde{I}}$.

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Falls f für jedes kompaktes Intervall $\tilde{I} \subset I$ global Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\tilde{I} \times \mathbb{R}^n$ ist, dann hat das AWP (1.1) genau eine globale Lösung y auf I.

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $I \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Ist das Wachstum von f linear beschränkt in y auf $I \times \mathbb{R}^n$, d. h. gibt es stetige Funktionen $a, b : I \to [0, \infty[$ mit $\|f(t, y)\| \leq a(t)\|y\| + b(t)$ für alle $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$, dann besitzt das AWP (1.1) eine eindeutige Lösung auf I.

Satz (Randverhalten maximaler Lösungen)**.** Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y. Sei $y :]a_-, a_+[\to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung des AWP (1.1).

- Ist $a_+ < \infty$, so ist y auf $[t_0, a_+[$ unbeschränkt oder der Rand $\partial\mathcal{D}$ ist nicht leer und $\lim_{t \uparrow a_+} \operatorname{dist}((t, y(t)), \partial\mathcal{D}) = 0$.
- Ist $a_- > -\infty$, so ist y auf $]a_-, t_0]$ unbeschränkt oder der Rand $\partial\mathcal{D}$ ist nicht leer und $\lim_{t \downarrow a_-} \operatorname{dist}((t, y(t)), \partial\mathcal{D}) = 0$.

Problem. Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Für $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ betrachten wir das AWP
$$(3.1) \begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das AWP (3.1) eine eindeutige (globale) Lösung auf I.

Notation. $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{u : I \to \mathbb{R}^n \mid u \text{ stetig}\}$

Def. Eine Teilmenge $M \subset V$ eines Vektorraums V heißt **affiner Teilraum**, wenn es ein $y \in V$ und einen Unterraum $U \subset V$ mit $M = y + U := \{y + U \mid u \in U\}$ gibt.

Satz. Seien $I \subset \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Setze
$$U_h := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \text{ auf } I\}.$$
Dann ist U_h ein n-dimensionaler UVR von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ und für Funktionen $y_1, ..., y_m \in U_h$ sind äquivalent:

- $y_1, ..., y_m$ sind linear unabhängig in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- Es gibt $t^* \in I$, sodass $y_1(t^*), ..., y_m(t^*)$ linear unabh. in $\mathbb{R}^n$ sind.
- Für alle $t \in I$ sind $y_1(t), ..., y_m(t)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Eine Menge $y_1, ..., y_n$ von linear unabhängigen Lösungen von $\dot{y} = A(t) \cdot y$ heißt ein **Fundamentalsystem** und $(y_1, ..., y_n)$ **Fundamentalmatrix** der DGL.

Satz. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig.

- Jede Fundamentalmatrix von $\dot{y} = A(t)y$ ist invertierbar f. a. $t \in I$.
- Jede Fundamentalmatrix $Y : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist stetig differenzierbar.
- Die globale eindeutige Lösung von
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
ist gegeben durch $y(t) = Y(t)\,(Y(t_0))^{-1}\, y_0$.

Satz. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$, $A : \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, U_h wie oben und $U := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y} = A(t)y + f\}$. Dann gilt:

- U ist nicht leer.
- Ist $y_p \in U$ eine partikuläre Lösung, dann ist $U = y_p + U_h$, d. h. U ist affiner Unterraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- Sei $y_p, \tilde{y}_p \in U$, dann ist $y_p - \tilde{y}_p \in U_h$.

Satz (Variation der Konstanten)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $Y(t)$ die Fundamentalmatrix. Dann gilt:

- Eine partikuläre Lösung von $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ ist gegeben durch
$$y_p(t) := \int_{t_0}^{t} Y(t)(Y(s))^{-1} f(s)\, ds \quad t_0 \in I.$$
- Es gilt $U = \{\int_{t_0}^{t} Y(t)(Y(s))^{-1} f(s)\, ds + Y(t)c \mid c \in \mathbb{R}^n\}$
- Die globale eindeutige Lsg vom AWP (3.1) ist gegeben durch
$$y(t) := Y(t)(Y(t_0))^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t} Y(t)(Y(s))^{-1} f(s)\, ds, \quad t \in I.$$

Def. Die Matrix-Expontentialfunktion ist definiert als
$$\exp : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad A \mapsto e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Satz. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

- Falls A und B kommutieren, d. h. $AB = BA$, dann gilt
$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.$$
- Aus $e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt $AB = BA$.
- e^A ist invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- Wenn B invertierbar ist, dann gilt $e^{B^{-1}AB} = B^{-1} e^A B$.
- Ist A eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, ..., \lambda_n$, so gilt
$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$
- $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$
- $e^{t(A+\lambda I)} = e^{\lambda t} \cdot e^{tA}$

Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar, d. h. es existiere eine Basis aus Eigenvektoren $s_1, ..., s_n \in \mathbb{C}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ sodass $S^{-1}AS =: D$ mit $S := (s_1, ..., s_n)$ diagonal mit Einträgen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ist. Dann gilt
$$e^{tA} = S e^{tD} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Bemerkung. Wenn e^{tA} eine Fundamentalmatrix ist, dann ist auch $e^{tA}S = Se^{tD}$ eine Fundamentalmatrix.