Zusammenfassung Homologische Algebra

Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{D}$ heißt **Unterkategorie** einer Kategorie $\mathcal{C}$ (notiert $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$), wenn für alle geeigneten X, Y, f, g gilt:

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \quad \text{und} \quad f \circ_{\mathcal{D}} g = f \circ_{\mathcal{C}} g.$$

Def. Eine Unterkategorie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **voll**, wenn

$$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \,:\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt …

- … **treu**, wenn für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ die Abbildung
$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$$
injektiv ist.
- … **voll**, wenn diese Abb. für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ surjektiv ist.

Bem. Die Einbettung einer (vollen) Unterkategorie ist ein (voll-)treuer Funktor.

Def.
- Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **initiales Objekt**, falls für alle $Y \in \mathrm{Ob}(Y)$ genau ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ existiert.
- Ein Objekt $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **terminales Objekt**, falls für alle $Y \in \mathrm{Ob}(Y)$ genau ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ existiert.

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein **Kategorienäquivalenz**, falls es einen Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ mit $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ und $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt. Die Funktoren F und G heißen dann zueinander **quasiinvers**.

Def. Zwei Kategorien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ heißen zueinander **äquivalent**, wenn es eine Kategorienäquivalenz $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ gibt.

Prop. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist genau dann eine Kategorienäquivalenz, wenn:
- F ist volltreu,
- $\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \,:\, \exists X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \,:\, Y \cong F(X)$

Bsp. Sei B ein lokal wegzshgder, semi-lokal einfach zshgder topol. Raum. Dann ist die Kategorie $\mathrm{Cov}(B)$ der Überlagerungen von B äquivalent zur Kategorie $[\pi(B), \mathbf{Set}]$ der Mengen-wertigen Funktoren auf dem Fundamentalgruppoid von B. Dabei ist

$$F : \mathrm{Cov}(B) \to [\pi(B), \mathbf{Set}], \quad F(p : \tilde{B} \to B) \coloneqq G_{\tilde{B},p},$$

$$G_{\tilde{B},p}(b \in B) \coloneqq p^{-1}(b), \quad G_{\tilde{B},p}(\gamma : [0,1] \to B)(\tilde{b} \in p^{-1}(\gamma(0))) \coloneqq \tilde{\gamma}(1),$$

$$\text{mit } \tilde{\gamma} \text{ Liftung von } \gamma \text{ mit } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{b}.$$

Def. Zwei Ringe A und B heißen **Morita-äquivalent**, wenn ihre Kategorien der (Links/Rechts)-Moduln äquivalent sind.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Der **kontravariante Hom-Funktor** $h_X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ist definiert durch

$$h_X(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}(Y,X), \quad h_X(h : Y' \to Y)(g : Y \to X) \coloneqq g \circ h.$$

Allgemeiner gibt es den Funktor $\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ mit

$$\mathrm{Hom}(h : Y' \to Y, f : X \to X')(g : Y \to X) \coloneqq f \circ g \circ h.$$

Notation. $\hat{\mathcal{C}} \coloneqq [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$

Def. Ein Element $x \in X(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}(Y,X)$ heißt **Y-Element** von X.

Def. Ein Funktor $F \in \mathrm{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$ wird **dargestellt** durch $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, falls $F \cong h_X$. Der Funktor F heißt **darstellbar**, falls ein solches $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ existiert.

Def. Die **Yoneda-Einbettung** ist der Funktor

$$Y : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}, \quad X \mapsto h_X, \quad \phi \mapsto (\phi \circ - : X(Y) \to X'(Y))_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}.$$

Lemma (Yoneda). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Es gibt es eine nat. Bij.

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \cong F(X) \quad \text{für alle } X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\, F \in \hat{\mathcal{C}}.$$

Korollar. Die Yoneda-Einbettung ist volltreu und liefert eine Kategorienäquivalenz von $\mathcal{C}$ und der vollen Unterkategorie der darstellbaren Funktoren in $\hat{\mathcal{C}}$.

Korollar. Ein darstellbarer Funktor wird von genau einem Objekt dargestellt (bis auf Isomorphie).

Def. Das **Produkt** von $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist ein Obj. $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, das $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, $U \mapsto X(U) \times Y(U)$, $\phi \mapsto ((- \circ \phi) \times (- \circ \phi))$ darstellt.

Bem. Diese Definition ist äquivalent zur folgenden:
Das Produkt von X, Y ist $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen

$$X \xleftarrow{p_X} Z \xrightarrow{p_Y} Y,$$

wenn für alle $Z' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mit Morphismen

$$X \xleftarrow{p'_X} Z' \xrightarrow{p'_Y} Y$$

genau ein $f : Z' \to Z$ mit $p'_X = p_X \circ f$ und $p'_Y = p_Y \circ f$ existiert.

Def. Seien $\phi : X \to S$ und $\psi : Y \to S$ Abb. von Mengen.
Das Faserprodukt von X und Y über S ist

$$X \times_S Y \coloneqq \{(x,y) \in X \times Y \mid \phi(x) = \psi(y)\}.$$

Def. Sei $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,S)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,S)$.
Das **Faserprodukt** von X und Y über S ist ein Obj. in $\mathcal{C}$, das den Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, $U \mapsto X(U) \times_{S(U)} Y(U)$ darstellt.

Bem. Das Faserprodukt von X und Y über S ist das Produkt von $X \xrightarrow{\phi} S$ und $Y \xrightarrow{\psi} S$ in der Scheibenkategorie $\mathcal{C}/S$.

Def. Eine **Gruppenstruktur** auf einem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist gegeben durch Gruppenstrukturen auf $\mathrm{Hom}(Y,X)$ für alle $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Gruppenmorphismen $\mathrm{Hom}(Y,X) \to \mathrm{Hom}(Y',X)$ für jeden Morphismus $\phi : Y' \to Y$ (die die offensichtlichen Axiome erfüllen).

Bem. Falls $\mathcal{C}$ ein term. Obj. 1 und die Produkte $X \times X$ und $X \times X \times X$ besitzt, dann ist eine Gruppenstr. auf X geg. durch Morphismen

$$m : X \times X \to X \text{ (Mult.)}, \quad i : X \to X \text{ (Inv.)}, \quad e : 1 \to X \text{(Einheit)},$$

die die offensichtlichen Axiome erfüllen.

Simpliziale Mengen

Def. **Verklebedaten** sind gegeben durch einen Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}}_{\mathrm{strikt}} \to \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ_{strikt} die Kategorie mit den Mengen $[n] \coloneqq \{0, 1, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und streng monotonen Abbildungen.

Notation. $X_{(n)} \coloneqq X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes.

Def. Das **Standard-n-Simplex** $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die von den $(n+1)$ Standardbasisvektoren aufgespannte affinlineare Hülle. Eine streng monotone Abb $f : [n] \to [m]$ induziert durch Abbilden des i-ten Basisvektors auf den $f(i)$-ten eine Inklusion $\Delta_f : \Delta_n \to \Delta_m$,

Def. Die **geometrische Realisierung** von Verklebedaten X ist der topologische Raum

$$|X| \coloneqq \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R$$

Dabei ist $X_{(n)}$ diskret. Die Äquivalenzrelation R wird erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\ x \in X_{(n)},\ f : [m] \to [n] \text{ s.m.s.}$$

Def. Das **k-Skelett** $\mathrm{sk}_k X$ von Verklebedaten X ist definiert durch

$$(\mathrm{sk}_k X)_{(n)} \coloneqq \{x \in X_{(n)} \mid n \leq k\}, \quad (\mathrm{sk}_k X)(f) \coloneqq X(f) \text{ sofern möglich}$$

Def. Eine **simpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ die Kategorie mit den Mengen $[n] \coloneqq \{0, 1, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und monotonen Abbildungen.

Notation. $X_n \coloneqq X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes.

Def. Eine **simpliziale Abbildung** zwischen simplizialen Mengen X und Y ist eine natürliche Transformation zwischen den beiden Funktoren $X, Y : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

Def. Die Kategorie der simplizialen Mengen ist die Funktorkategorie $\mathbf{sSet} \coloneqq [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$.

Def. Die **geometrische Realisierung** einer simplizialen Menge X ist der topologische Raum

$$|X| \coloneqq \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n) \right) / R$$

Die Äquivalenzrelation R wird dabei erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\ x \in X_n \text{ u. } f \in \mathrm{Hom}_\Delta([m], [n]).$$

Def. Ein topologischer Raum heißt **trianguliert**, wenn er die Realisierung von Verklebedaten ist.

Def. Der **Nerv** einer Überdeckung $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ eines topologischen Raumes ist die simpliziale Menge

$$X_n \coloneqq \{(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in A^{n+1} \mid U_{\alpha_0} \cap ... \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\}$$
$$X(f)(\alpha_0, ..., \alpha_n) \coloneqq (\alpha_{f(0)}, ..., \alpha_{f(m)}) \quad \text{für } f : [m] \to [n].$$

Bem. Falls die Überdeckung lokal endlich ist und alle nichtleeren, endlichen Schnitte $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$ zusammenziehbar sind, so ist die geom. Realisierung des Nerves der Überdeckung homotopieäq. zu X.

Def. Sei Y ein topol. Raum. Die simpliziale Menge X der **singulären Simplizes** in Y ist

$$X_n \coloneqq \{\, \text{stetige Abb. } \sigma : \Delta_n \to Y \,\}, \quad X_n(f)(\sigma) \coloneqq \sigma \circ \Delta_f.$$

Bem. Diese Konstruktion stiftet eine Funktor $\mathrm{Sing} : \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$.

Def. $\Delta[p]_n \coloneqq \{\, g : [n] \to [p] \text{ monoton steigend} \,\}$, $\Delta[p](f)(g) \coloneqq g \circ f$

Def. Der **klassifizierende Raum** einer Gruppe G ist gegeben durch die Realisierung der simpl. Menge BG mit $(BG)_n \coloneqq G^n$ und

$$BG(f : [m] \to [n])(g_1, \ldots, g_n) \coloneqq (h_1, \ldots, h_m), \quad h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j.$$

Def. Ein n-Simplex $x \in X_n$ heißt **degeneriert**, falls eine monotone surjektive Abbildung $f : [n] \to [m]$, $n > m$ und ein Element $y \in X_m$ existiert mit $x = X(f)(y)$.

Def. Seien X Verklebedaten. Wir konstruieren eine dazugehörende simpliziale Menge $\tilde{X}$ wie folgt:

$$\tilde{X}_n \coloneqq \{(x, g) \mid x \in X_{(k)}, g : [n] \to [k] \text{ monoton und surjektiv}\},$$

Für eine monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ und $(x, g) \in \tilde{X}_n$ schreiben wir zunächst $g \circ f = f_1 \circ f_2$ mit einer Injektion f_1 und einer Surjektion f_2 und setzen $\tilde{X}(f)(x, g) \coloneqq (X(f)(x), f_2)$.

Prop. Eine simpliziale Menge $\tilde{X}$ kann genau dann aus (dann eindeutigen) Verklebedaten gewonnen werden, falls für alle nicht-degenerierten Simplizes $x \in \tilde{X}_n$ und streng monotonen Abbildungen $f : [m] \to [n]$ auch $\tilde{X}(f)(x) \in \tilde{X}_m$ nicht degeneriert ist.

Prop. Seien X Verklebedaten, $\tilde{X}$ die entsprechende simpliziale Menge. Dann gilt $|X| \approx |\tilde{X}|$.

Def. Das **k-Skelett** $\mathrm{sk}_k X$ einer simplizialen Menge X ist geg. durch

$$(\mathrm{sk}_k X)_n \coloneqq \{X(f)(x) \mid p \leq k, f : [n] \to [p] \text{ monoton}, x \in X_p\}.$$

Def. Eine simpliziale Menge X hat **Dimension** n, falls $X = \mathrm{sk}_n X$.

Prop. Geom. Realisierung ist ein Funktor $|{-}| : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$.

Bspe.
- Eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eines topologischen Raumes ist Verfeinerung von $(V_\beta)_{\beta \in B}$, wenn es eine Abbildung $\psi : A \to B$ gibt, sodass $U_\alpha \subset V_{\psi(\alpha)}$ für alle $\alpha \in A$. Dies induziert eine simpliziale Abb. zwischen den Nerven der Überdeckungen durch
$$F_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \coloneqq (\psi(\alpha_0), \ldots, \psi(\alpha_n)).$$
- Ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$ stiftet eine Abbildung $BG \to BH$ zwischen den klassifizierenden Räumen durch
$$F(g_1, \ldots, g_n) \coloneqq (\phi(g_1), \ldots, \phi(g_n)).$$

Def. Ein **simplizialer topologischer Raum** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Top}.$$

Bem. Die geometrische Realisierung eines simplizialen topol. Raumes ist definiert wie die einer simplizialen Menge mit dem Unterschied, dass X_n im Allg. nicht die diskrete Topologie trägt.

Def. Eine **bisimpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Notation. $X_{nm} \coloneqq X([n], [m])$

Bsp. Das **direkte Produkt** von simplizialen Mengen X und Y ist die bisimpliziale Menge

$$(X \times Y)_n \coloneqq X_n \times Y_n, \quad (X \times Y)(f, g)(x, y) \coloneqq (f(x), g(y)).$$

Def. Die **Diagonale** DX einer bisimplizialen Menge X ist die simpliziale Menge mit $(DX)_n \coloneqq X_{nn}$ und $DX(f) \coloneqq X(f, f)$.

Def. Sei X eine bisimpliziale Menge.
- Setze $|X|^D \coloneqq |DX|$.
- Definiere einen simplizialen topologischen Raum X^I durch
$$X^I_n \coloneqq |X_{\bullet n}|, \quad X^I(g) \coloneqq |X(\mathrm{id}, g)|.$$
Setze $|X|^{I,II} \coloneqq |II, I|$.
- Definiere analog $|X|^{II,I}$.

Satz (Eilenberg-Zilber). $|X|^D \cong |X|^{I,II} \cong |X|^{II,I}$ kanonisch.

Garben

Def.
- Eine mengenwertige **Prägarbe** $\mathcal{F}$ auf einem topol. Raum X ist ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Dabei ist $\mathbf{Ouv}(X)$ die Präordnungs-Kategorie der offenen Teilmengen von X geordnet durch Inklusion.
- Allgemeiner ist eine $\mathcal{C}$-wertige Prägarbe ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ (z. B. $\mathcal{C} = \mathbf{AbGrp}, \mathbf{R\text{-}Mod}, \mathbf{Top}$).
- Ein Morphismus zwischen Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf demselben topol. Raum ist eine natürliche Transformation zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Notation. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe
- $\Gamma(U, \mathcal{F}) \coloneqq \mathcal{F}(U)$ heißt Menge der **Schnitte** von $\mathcal{F}$ über U.
- $r_{UV} \coloneqq \mathcal{F}(V \subseteq U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ heißt **Restriktionsabb.**
- $x|_V \coloneqq r_{UV}(x)$ für $V \subseteq U$ und $x \in \mathcal{F}(U)$ heißt **Einschränkung** von x auf V.

Def. Eine **Garbe** auf einem topol. Raum X ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$, für die gilt: Für alle Familien $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen und Schnitten $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$, die miteinander verträglich sind, d. h.

$$\forall\, i, j \in I \,:\, s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j},$$

gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(\cup_{i \in I} U_i)$ mit $\forall\, i \in I \,:\, s_i = s|_{U_i}$. Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismen zw. den Prägarben.

Bem. Sei $\mathcal{F}$ eine (Prä-)Garbe auf X und $U \subseteq X$ offen. Dann definiert $(\mathcal{F}|U)(V) \coloneqq \mathcal{F}(U \cap V)$ eine (Prä-)Garbe auf U.

Def. Eine Sequenz $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ von (Prä-)Garben abelscher Gruppen auf X heißt **exakt** bei $\mathcal{G}$, falls für alle offenen $U \subset X$ die Sequenz $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ exakt bei $\mathcal{G}(U)$ ist.

Def. Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben auf X. Definiere Prägarben $\mathcal{K}$ und $\mathcal{C}$ auf X durch

$$\mathcal{K}(U) \coloneqq \ker(f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)), \quad \mathcal{C}(U) \coloneqq \mathcal{G}(U)/\operatorname{im}(f_U).$$

Prop. Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sogar ein Morphismus von Garben. Dann ist auch $\mathcal{K}$ eine Garbe.

Achtung. Aber $\mathcal{C}$ ist im Allgemeinen keine Garbe!

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y. Der **Halm** von $\mathcal{F}$ in $y \in Y$ ist

$$\mathcal{F}_y \coloneqq \{(U, s) \,|\, U \subseteq Y \text{offen}, y \in U, s \in \mathcal{F}(U)\}/\sim,$$
$$(U, s) \sim (V, t) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, W \subset U \cap V \text{ offen}, y \in W \;:\; s|_W = t|_W.$$

Notation. $s_y \coloneqq [(U, s)]$ für $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $y \in U$.

Sprechweise. Elemente $[t] \in \mathcal{F}_y$ heißen **Keime** in y.

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y, $Z \subseteq Y$ beliebig. Definiere

$$\Gamma(Z, \mathcal{F}) \coloneqq \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{F}),$$

wobei der Limes über alle offenen $U \subset X$ mit $Z \subseteq U$ läuft.

Beobachtung. $\mathcal{F}_y = \Gamma(\{y\}, \mathcal{F})$

Def. Der **Totalraum** F einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf Y ist

$$F \coloneqq \coprod_{y \in Y} \mathcal{F}_y$$

mit der Topologie erzeugt durch die Mengen

$$\{s_y \,|\, y \in U\} \quad \text{für } U \subseteq X \text{ offen}, \; s \in \mathcal{F}(U).$$

Bem. Mit dieser Topologie ist die Projektion $\pi : F \to Y$ stetig und ein lokaler Homöomorphismus.

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf Y. Die **Garbifizierung** $\mathcal{F}^+$ von $\mathcal{F}$ ist die Garbe der stetigen Schnitte von $\pi : F \to Y$, also

$$\mathcal{F}^+(U) \coloneqq \{f : U \to F \,|\, \pi \circ f = (i : U \hookrightarrow Y)\}.$$

Prop. Es ex. ein kanonischer Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ def. durch

$$s \in \mathcal{F}(U) \quad \mapsto \quad (y \mapsto s_y : U \to F).$$

Wenn $\mathcal{F}$ schon eine Garbe ist, dann ist f ein Isomorphismus.

Def. Sei A eine Menge (oder ab. Gruppe, ...), Y ein topol. Raum.

- Die **konstante Prägarbe A** mit Faser A auf Y ist def. durch
$$\mathbf{A}(U) \coloneqq A, \quad r_{UV} \coloneqq \mathrm{id}_A \quad \text{für alle } V \subseteq U \subseteq Y.$$
- Die **konstante Garbe** mit Faser A ist die Garbifizierung $\mathcal{A} = \mathbf{A}^+$ von $\mathbf{A}$.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf Y heißt **lokal konstant**, falls jeder offene Punkt in Y eine offene Umgebung U besitzt, sodass $F|U$ isomorph zu einer konstanten Garbe ist.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum Y heißt ...

- ... **welk** (flabby, flasque), wenn die Einschränkungsabbildungen
$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$$
für alle *offenenen* $U \subseteq Y$ surjektiv sind.
- ... **weich** (soft, mou), wenn die Einschränkungsabbildungen
$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \to \Gamma(A, \mathcal{F})$$
für alle *abgeschlossenen* $A \subseteq Y$ surjektiv sind.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ ab. Gruppen auf einem topol. Raum Y heißt **fein** (fine, fin), wenn für je zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq Y$ ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ existiert, sodass α auf einer offenen Umgebung von A_1 Null und auf einer offenen Umgebung von A_2 die Identität ist.

Komplexe und (Ko-)Homologie

Def.
- Ein **Kettenkomplex** $C_\bullet$ ist eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ mit der Eigenschaft $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.
- Ein **Kokettenkomplex** $C^\bullet$ ist eine Folge $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ mit der Eigenschaft $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Def. Sei $C_\bullet$ ein Kettenkomplex.

- C_n heißt Gruppe der ***n*-Ketten**,
- $\partial : C_n \to C_{n-1}$ heißt **Randabbildung**,
- $Z_n(C_\bullet) \coloneqq \ker \partial_n \subset C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der ***n*-Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) \coloneqq \operatorname{im} \partial_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der ***n*-Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) \coloneqq Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$ heißt ***n*-te Homologiegruppe**.

Analog nennt man für einen Kokettenkomplex $C^\bullet$

- δ^n **Korandabbildung**,
- C^n ***n*-Koketten**,
- $Z^n \coloneqq \ker \delta^n$ ***n*-Kozykel**,
- $B^n \coloneqq \operatorname{im} \delta^{n-1}$ ***n*-Koränder**,
- $H^n(C^\bullet) \coloneqq Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet)$ n-te **Kohomologiegruppe**.

Def. Eine Morphismus $f : C_\bullet \to D_\bullet$ (bzw. $f : C^\bullet \to D^\bullet$) zwischen (Ko-)Kettenkomplexen ist eine Familie von Abbildungen

$$(f_n : C_n \to D_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\text{bzw. } (f^n : C^n \to D^n)_{n \in \mathbb{N}}),$$

die mit den Randabbildungen verträglich sind, d. h.

$$f_{n-1} \circ \partial_n^C = \partial_n^D \circ f_n \quad (\text{bzw. } f^{n+1} \circ \delta_C^n = \delta_D^n \circ f^n) \quad \text{für alle } n.$$

Prop. H_n (bzw. H^n) ist ein Funktor von der Kategorie der (Ko-)Kettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Def. Sei X eine simpl. Menge. Sei $C_n(X)$ die von den n-Simplizes X_n erzeugte abelsche Gruppe (d. h. die Gruppe der endl. formalen Linearkombinationen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). Sei $\delta_n^i : [n-1] \to [n]$ diejenige streng monotone Abb. mit $i \notin \operatorname{im} \delta_n^i$. Definiere

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X), \quad \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \sum_{i=0}^n (-1)^i X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Prop. $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ ist ein Kettenkomplex (d. h. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$)

Def. Sei X eine simpl. Menge und A eine ab. Gruppe. Dann ist ...

- ... der **Kettenkomplex** $(C_\bullet(X; A), \partial_\bullet)$ von X **mit Koeffizienten** in A definiert durch
$$C_n(X; A) \coloneqq C_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A, \;\; \partial_n \coloneqq \partial_n \otimes \mathrm{id} : C_n(X; A) \to C_{n-1}(X; A).$$
- ... der **Kokettenkomplex** $(C^\bullet(X; A), \delta^\bullet)$ von X mit **Koeffizienten** in A definiert durch
$$C^n(X; A) \coloneqq \operatorname{Hom}(C^n(X), A),$$
$$\delta^n : C^n(X; A) \to C^{n+1}(X; A), \quad f \mapsto f \circ \delta_{n+1}.$$

Beobachtung. $C_n(X; \mathbb{Z}) = C_n(X)$

Notation. Sei X eine simpliziale Menge. Setze

- $H_n(X) \coloneqq H_n(C_\bullet(X))$,
- $H^n(X) \coloneqq H^n(C^\bullet(X; \mathbb{Z}))$,
- $H_n(X; A) \coloneqq H_n(C_\bullet(X; A))$,
- $H^n(X; A) \coloneqq H^n(C^\bullet(X; A))$.

Prop. Für jede simpl. Menge X ex. ein kanonischer Isomorphismus

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \text{freie ab. Gr. erzeugt von Zshgskomponenten von } |X|.$$

Def. Der **Kegel** CX über Verklebedaten X ist definiert durch

$$(CX)_{(0)} \coloneqq X_{(0)} \amalg \{\star\}, \quad (CX)_{(n)} \coloneqq X_{(n)} \amalg (X_{(n-1)} \times \{\star\}),$$
$$(CX)(f)(x) \coloneqq X(f)(x),$$
$$(CX)(f)(x, *) \coloneqq \begin{cases} X(i \mapsto f(i) - 1)(x), & \text{wenn } f(0) > 0, \\ (X(i \mapsto f(i{+}1) - 1)(x), *), & \text{wenn } f(0) = 0. \end{cases}$$

Def. Für Verklebedaten ist der zugeh. (Ko-)Kettenkomplex (mit Koeffizienten) genauso definiert wie für simpliziale Mengen.

Prop. $H_0(CX) = \mathbb{Z}$, $H_{>0}(CX) = 0$

Def. Sei X eine simpliziale Menge.

- Ein **homol. Koeffizientensystem** $\mathcal{A}$ auf X ist ein Funktor
$$\mathcal{A} : (1 \downarrow X) \to \mathbf{AbGrp}.$$
Dabei ist $1 : \mathbf{1} \to \mathbf{Set}$ der Funktor, der konstant $\{\star\}$ ist (und $\mathbf{1}$ die Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismus).
Expliziter besteht ein Koeffizientensystem aus einer abelschen Gruppe $\mathcal{A}_\sigma$ für jedes n-Simplex $\sigma \in X_n$ und Abbildungen $\mathcal{A}(f, \sigma) : \mathcal{A}_\sigma \to \mathcal{A}_{X(f)(\sigma)}$ für alle $\sigma \in X_n$, $f \in \operatorname{Hom}_\Delta([m], [n])$ mit
$$\mathcal{A}(\mathrm{id}, \sigma) = \mathrm{id}, \quad \mathcal{A}(f \circ g, \sigma) = \mathcal{A}(g, X(f)(\sigma)) \circ \mathcal{A}(f, \sigma).$$
- Ein **kohomol. Koeffizientensystem** $\mathcal{B}$ auf X ist ein Funktor
$$\mathcal{B} : (1 \downarrow X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{AbGrp}.$$

- Ein Morphismus zw. (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf derselben simpl. Menge ist eine natürliche Transformation.

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung und X deren Nerv. Dann definiert

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n} &\coloneqq \{U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_n}\to\mathbb{R}\text{ stetig}\},\\ \mathcal{F}(f,(\alpha_0,\ldots,\alpha_n))(\phi) &\coloneqq \text{passende Einschränkung von }\phi.\end{aligned}$$

ein kohomologisches Koeffizientensystem auf X.

Def. Sei $\mathcal{A}$ ein homologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X. Wir setzen

$$C_n(X;\mathcal{A})\coloneqq\{\text{ formale endl. Linearkomb. }\sum_{\sigma\in X_n}\lambda_\sigma\cdot\sigma\text{ mit }\lambda_\sigma\in\mathcal{A}_\sigma\}$$

und definieren $\partial_n : C_n(X;\mathcal{A})\to C_{n-1}(X;\mathcal{A})$ durch

$$\sum_{\sigma\in X_n}\lambda_\sigma\cdot\sigma\ \mapsto\ \sum_{\sigma\in X_n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mathcal{A}(\partial_n^i,\sigma)(\lambda_\sigma)\cdot X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Die Homologiegruppen des so def. Kettenkomplexes $C_\bullet(X;\mathcal{A})$ heißen **Homologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in $\mathcal{A}$**.

Def. Sei $\mathcal{B}$ ein kohomologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X. Wir setzen

$$C^n(X;\mathcal{B})\coloneqq\{\text{ Funktionen }f:(\sigma\in X_n)\to\mathcal{B}_\sigma\}$$

und definieren $\delta_n : C^n(X;\mathcal{B})\to C_{n+1}(X;\mathcal{B})$ durch

$$\delta^n(f)(\sigma)\coloneqq\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\mathcal{B}(\partial_{n+1}^i,\sigma)(f(X(\partial_{n+1}^i)(\sigma))).$$

Die Kohomologiegruppen des so def. Kokettenkomplexes $C^\bullet(X;\mathcal{B})$ heißen **Kohomologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in $\mathcal{B}$**.

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $U=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, X und $\mathcal{F}$ wie im letzten Beispiel. Die Homologiegruppen $H^n(X,\mathcal{F})$ werden Čech-Kohomologiegruppen der Garbe der stetigen Funktionen auf Y bzgl. der Überdeckung U genannt.

Def. Eine (lange) **exakte Sequenz** ab. Gruppen ist ein (Ko-)Kettenkomplex mit verschwindenden Homologiegruppen, d. h.

$$\operatorname{im}\partial_n=\ker\partial_{n-1}\quad\text{für alle }n.$$

Def. Eine **kurze ex. Sequenz** (k. e. S.) ist eine ex. Seq. der Form

$$0\to A\to B\to C\to 0.$$

Def. Sei $0\to A\to B\to C\to 0$ eine k. e. S. in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Die Sequenz heißt **spaltend**, falls sie isomorph zur k. e. S. $0\to A\to A\oplus C\to C$ ist.

Prop. Für eine Sequenz $0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ sind äquivalent:

- Die Sequenz spaltet.
- Es existiert eine Retraktion $r:B\to A$ mit $r\circ f=\mathrm{id}_A$.
- Es existiert ein Schnitt $s:C\to B$ mit $g\circ s=\mathrm{id}_C$.

Def. Eine Sequenz $0\to A^\bullet\to B^\bullet\to C^\bullet\to 0$ von Komplexen heißt **exakt**, wenn für alle n die Seq. $0\to A_n\to B_n\to C_n\to 0$ exakt ist.

Prop. Eine kurze exakte Sequenz $0\to A^\bullet\xrightarrow{i^\bullet}B^\bullet\xrightarrow{p^\bullet}C^\bullet\to 0$ von Kokettenkomplexen induziert eine lange exakte Sequenz

$$\ldots\to H^n(A^\bullet)\xrightarrow{H^n(i^\bullet)}H^n(B^\bullet)\xrightarrow{H^n(p^\bullet)}H^n(C^\bullet)\xrightarrow{\delta^n}H^{n+1}(A^\bullet)\to\ldots$$

Lemma. Sei $0\to A\to B\to C\to 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann sind ebenfalls exakt:

$$\begin{aligned}&0\to C_\bullet(X;A)\to C_\bullet(X;B)\to C_\bullet(X;C)\to 0,\\ &0\to C^\bullet(X;A)\to C^\bullet(X;B)\to C^\bullet(X;C)\to 0.\end{aligned}$$

Korollar. Sei $0\to A\to B\to C\to 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann existieren lange exakte Sequenzen

$$\begin{aligned}&\ldots\to H_n(X;A)\to H_n(X;B)\to H_n(C)\to H_{n-1}(X;A)\to\ldots\\ &\ldots\to H^n(X;A)\to H^n(X;B)\to H^n(C)\to H^{n+1}(X;A)\to\ldots\end{aligned}$$

Def. Eine Sequenz $0\to\mathcal{B}'\to\mathcal{B}\to\mathcal{B}''\to 0$ von (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf einer simpl. Menge X heißt **exakt**, falls

$$0\to\mathcal{B}'_\sigma\to\mathcal{B}_\sigma\to\mathcal{B}''_\sigma\to 0\qquad\text{für alle }\sigma\in X_n\text{ exakt ist.}$$

Lemma. Eine kurze exakte Sequenz $0\to\mathcal{B}'\to\mathcal{B}\to\mathcal{B}''\to 0$ von (ko-)homologischen Koeff'systemen induziert kurze ex. Sequenzen

$$\begin{aligned}&0\to C_\bullet(X;\mathcal{B}')\to C_\bullet(X;\mathcal{B})\to C_\bullet(X;\mathcal{B}'')\to 0,\\ &0\to C^\bullet(X;\mathcal{B}')\to C^\bullet(X;\mathcal{B})\to C^\bullet(X;\mathcal{B}'')\to 0\end{aligned}$$

und damit auch entsprechende lange exakte Sequenzen.

Def. Eine **simpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A:\Delta^{\mathrm{op}}\to\mathbf{AbGrp}$.

Def. Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe.
Dann ist $(A_\bullet,\partial)$ ein Kettenkomplex mit

$$\partial_n : A_n\to A_{n-1},\quad a\mapsto\sum_{i=0}^{n}(-1)^iA(\partial_n^i)(a).$$

Def. Eine **kosimpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A:\Delta\to\mathbf{AbGrp}$.

Def. Sei A eine kosimpliziale abelsche Gruppe.
Dann ist $(A^\bullet,\delta)$ ein Kokettenkomplex mit

$$\delta^n : A^n\to A^{n+1},\quad a\mapsto\sum_{i=0}^{n}(-1)^iA(\partial_{n+1}^i)(a).$$

Def. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine (nicht unbedingt offene) Überdeckung von Y und $\mathcal{F}$ eine Garbe ab. Gruppen auf Y. Die kosimpliziale abelsche Gruppe $\check{C}(U,\mathcal{F})$ der **Čech-Koketten** ist

$$\check{C}^m(U,\mathcal{F})\coloneqq\prod_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m\in A}\mathcal{F}(U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_m}),$$

$$\begin{aligned}&\check{C}(U,\mathcal{F})(f:[m]\to[n])((f_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m})_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m})\coloneqq\\ &\qquad(f_{g(0),\ldots,g(m)}|U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_n})_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}.\end{aligned}$$

Bem. Die Randabb. im zugeh. Kokettenkomplex ist gegeben durch

$$(\delta^n\phi)_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1}}\coloneqq\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\phi_{\alpha_0,\ldots,\hat{\alpha_i},\ldots,\alpha_{n+1}}.$$

Def. Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes heißen **Čech-Homologiegruppen** von $\mathcal{F}$ bzgl. der Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Bem. $\check{H}(U,\mathcal{F})\cong\Gamma(X,\mathcal{F})$ hängt nicht von der Überdeckung ab.

Def. Sei Y ein topol. Raum und X dessen simpl. Menge der singulären Simplizes. Die Homologiegruppen von $C_\bullet(X;A)$ heißen **singuläre Homologiegruppen** $H_n(Y;A)$ von Y mit Koeff. A.

Def. Sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mft, $\Omega^k(M)$ das $C^\infty(M)$-Modul der k-Formen auf M. Die **äußere Ableitung** $\mathrm{d}:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$ ist in lokalen Koordinaten $(x^1,\ldots,x^n)$ definiert durch

$$\mathrm{d}\left(\sum_{|I|=k}f_I\,\mathrm{d}x^I\right)=\sum_{|I|=k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_I}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^I.$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Komplexes $\Omega^\bullet(M)$ heißen **De-Rham-Kohomologiegruppen**.

Def. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und A ein $\mathfrak{g}$-Modul. Setze $C^k(\mathfrak{g},A)\coloneqq L(\wedge^k\mathfrak{g},A)$ und definiere $\mathrm{d}:C^k(\mathfrak{g},A)\to C^{k+1}(\mathfrak{g},A)$ durch eine allgemeine Cartan-Formel

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}c)(g_1,\ldots,g_{k+1})\coloneqq&\sum_{1\le j<l\le k+1}(-1)^{j+l-1}c([g_j,g_l],g_1,\ldots,\hat{g_j},\ldots,\hat{g_l},\ldots,g_{k+1})\\ &+\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^jg_jc(g_1,\ldots,\hat{g_j},\ldots,g_{k+1}).\end{aligned}$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Kokettenkomplexes werden mit $H^\bullet(\mathfrak{g},A)$ bezeichnet.

Def. Eine **Kettenhomotopie** zw. Morphismen $f,g:C_\bullet\to D_\bullet$ von Kettenkomplexen ist eine Folge von Homomorphismen $k_n:C_n\to D_{n+1}$ mit $\forall\,n\in\mathbb{N}:\ \partial_{n+1}^D\circ k_n+k_{n-1}\circ\partial_n^C=f_n-g_n$.

Lemma. Seien $f,g:C_\bullet\to D_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt

$$H_n(f)=H_n(g)\quad\text{für alle }n\in\mathbb{N}.$$

Prop.
- Seien $\phi,\psi:X\to Y$ homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Dann sind die induzierten Abbildungen $\phi_*,\psi_*:C_\bullet(X;A)\to C_\bullet(Y;A)$ kettenhomotop.
- Seien $\phi,\psi:M\to N$ zwei glatt homotope Abbildungen von $\mathcal{C}^\infty$-Mften. Dann sind $\phi^*,\psi^*:\Omega^\bullet(N)\to\Omega^\bullet(M)$.

Korollar. Homotopieäquivalente Räume besitzen isomorphe singuläre Homologiegruppen.