Zusammenfassung Gewöhnliche DGLn

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def (Klassifikation von DGLn).

(I) **Gewöhnliche** DGL: Gesucht ist Funktion in einer Variable
Partielle DGL: Gesucht ist Funktion in mehreren Variablen

(II) **Ordnung** einer DGL: Höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in Gleichung vorkommt

(III) **Explizite** DGL: Gleichung der Form $y^{(k)}=f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k-1)})$
Implizite DGL: Allgemeinere Form $F(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k)}) = 0$

(IV) **Skalare** DGL: Gesucht ist Funktion mit Wert in $\mathbb{R}$
n-dimensionale DGL: Gesuchte Funktion hat Wert in $\mathbb{R}^n$

(V) **Lineare** DGL: Gleichung hat die Form

$$a_k(t)y^{(k)}(t) + a_{(k-1)}(t)y^{k-1}(t) + ... + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = 0$$

(VI) **Autonome** DGL: Gleichung der Form $F(y, \dot{y}, ..., y^{(k)}) = 0$ (keine Abhängigkeit von t, Zeitinvarianz)

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ und $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann ist ein **Anfangswertproblem** (AWP) gegeben durch die Gleichungen

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1.1}$$

Notation. Seien im Folgenden I und J stets Intervalle in $\mathbb{R}$.

Def.
- Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von $\dot{y} = f(t, y)$, falls für alle $t \in I$ gilt: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$.
- Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. Eine k-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von

$$y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k-1)}), \tag{1.2}$$

falls für alle $t \in I$ gilt: $y^{(k)}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(k-1)}(t))$

Satz.
- Ist $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2), dann ist

$$(y_1, ..., y_k) : I \to \mathbb{R}^{kn}, \qquad t \mapsto (y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(k-1)}(t))$$

eine Lösung des Systems von Gleichungen

$$(1.3) \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \quad \vdots \\ \dot{y}_{k-1} = y_k \\ \dot{y}_k = f(t, y_1, y_2, ..., y_{k-1}, y_k) \end{cases}$$

- Ist umgekehrt $(y_1, ..., y_k) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.3), dann ist $y = y_1 : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2).

Satz.
- Ist $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von AWP (1.1), dann ist

$$(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad t \mapsto (y_1(t), y_2(t)) = (t, y(t))$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.4) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = 1, & y_1(t_0) = t_0 \\ \dot{y}_2(t) = f(y_1(t), y_2(t)), & y_2(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Ist $(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung von (1.4), dann ist $y = y_2 : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.1).

Problem. Gesucht ist eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der linearen, skalaren, expliziten DGL 1. Ordnung (mit $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig)

$$\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \tag{1.5}$$

Satz. Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t)$ ist gegeben durch $y_h(t) = c \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Satz. Sei $y_p : I \to \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung von (1.5). Dann ist die Menge aller Lösungen von (1.5) gegeben durch

$$\{y_p + y_h \mid y_h : I \to \mathbb{R} \text{ ist Lösung von } \dot{y_h}(t) = a(t) \cdot y_h(t)\}$$

Bemerkung. Der Ansatz mit **Variation der Konstanten** $y_p(t) = c(t) \cdot y_h(t)$ für (1.5) führt zu

$$c(t) = \frac{1}{c_0} \int\limits_{t_0}^{t} b(\tau) \cdot \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \left(\int\limits_{t_0}^{t} b(\tau) \cdot \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}\tau\right) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Korollar. Die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.6) \begin{cases} \dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mit $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$y(t) = \left(y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} b(\tau) \cdot \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}\tau\right) \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Problem. Ges. ist Lösung der DGL mit **getrennten Variablen**

$$\dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y) \tag{1.7}$$

mit $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$ stetig.

Lsg.
1. Fall: $h(y_0) = 0$ für ein $y_0 \in J$. Dann ist $y(t) = y_0$ eine Lsg.
2. Fall: Es gibt kein $y_0 \in J$ mit $h(y_0) = 0$. Sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ und G eine Stammfunktion von g. Da h stetig und nirgends null ist, ist h entweder strikt positiv oder strikt negativ. Somit ist H streng monoton steigend/fallend und somit umkehrbar. Eine Lösung von (1.7) ist nun gegeben durch

$$y(t) = H^{-1}(G(t) + c_0) \quad \text{mit } c_0 \in \mathbb{R}.$$

Problem. Gesucht ist Lösung des AWP mit getrennten Variablen

$$(1.8) \begin{cases} \dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Lsg.
1. Fall: $h(y_0) = 0$. Dann ist $y(t) = y_0$ eine Lösung.
2. Fall: $h(y_0) \neq 0$. Dann ist h in einer Umgebung von y_0 strikt positiv/negativ. Setze

$$H_1(y) \coloneqq \int\limits_{y(t_0)}^{y} \frac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s, \quad G_1(t) \coloneqq \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dann ist H_1 in einer Umgebung von y_0 invertierbar und eine Lösung von (1.8) ist gegeben durch

$$y(t) = H_1^{-1}(G_1(t)).$$

Technik (Transformation). Manchmal lässt sich eine DGL durch **Substitution** eines Termes in eine einfachere DGL überführen, deren Lösung mit bekannten Methoden gefunden werden kann. Die Lösung der ursprünglichen DGL ergibt sich durch Rücksubstitution.

Bsp. Gegeben sei die DGL $\dot{y} = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Substituiere $z(t) = \alpha t + \beta y(t) + \gamma$. Es ergibt sich die neue DGL $\dot{z}(t) = \beta f(z(t)) + \alpha$, die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt.

Bsp (Bernoulli-DGL). Gegeben sei die DGL $\dot{y}(t) = \alpha(t) \cdot y(t) + \beta(t) \cdot (y(t))^\delta$ mit $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Multiplikation mit $(1 - \delta)y^{-\delta}$ und Substitution mit $z(t) = (y(t))^{1-\delta}$ führt zur skalaren linearen DGL 1. Ordnung

$$\dot{z}(t) = (1 - \delta)\alpha(t)z(t) + (1 - \delta)\beta(t).$$

Def. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abb. $f : D \to \mathbb{R}^n$ heißt **stetig** in $x_0 \in D$, falls

$$\forall\,\epsilon>0 : \exists\,\delta>0 : \forall\,x \in D : \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$