

# Zusammenfassung Geometrie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

## Geometrie von Kurven

**Notation.** Sei im Folgenden  $I$  ein Intervall, d. h. eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

**Def.** Eine Abbildung  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **reguläre Kurve**, wenn  $c$  beliebig oft differenzierbar ist und  $c'(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  gilt. Der affine Unterraum  $\tau_{c,t} := c(t) + \mathbb{R}(c'(t))$  heißt **Tangente** an  $c$  im Punkt  $c(t)$  bzw. Tangente an  $c$  zum Zeitpunkt  $t$ .

**Def.** Für eine reguläre Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt \quad \text{Bogenlänge (BL).}$$

**Satz.** Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisierung, d. h. sei  $c : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve und  $\phi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$  ein Diffeomorphismus, dann gilt  $L(c) = L(c \circ \phi)$ .

**Def.** Eine reguläre Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **nach Bogenlänge parametrisiert**, wenn  $\|c'(t)\| = 1$  für alle  $t \in I$ .

**Satz.** Jede reguläre Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich nach BL parametrisieren, d. h. es existiert ein Intervall  $J$  und ein Diffeomorphismus  $\phi : J \rightarrow I$ , welcher sogar orientierungserhaltend ist, sodass  $\tilde{c} := c \circ \phi$  nach BL parametrisiert ist.

**Def.** Zwei Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^n$  heißen **gleichgerichtet**, falls  $a = \lambda b$  für ein  $\lambda \geq 0$ .

**Satz.** Sei  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, dann gilt  $\|\int_a^b v(t) dt\| \leq \int_a^b \|v(t)\| dt$ , wobei Gleichheit genau dann gilt, falls alle  $v(t)$  gleichgerichtet sind.

**Satz.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve und  $x := c(a), y := c(b)$ . Dann gilt  $L(c) \geq d(x, y)$ . Wenn  $L(c) = d(x, y)$ , dann gibt es einen Diffeomorphismus  $\phi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ , sodass  $c = c_{xy} \circ \phi$ , wobei

$$c_{xy} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto x + t(y - x).$$

**Def.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Kurve und  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  eine Zerteilung von  $[a, b]$ . Dann ist die Länge des **Polygonzugs** durch die Punkte  $c(t_i)$  gegeben durch

$$\hat{L}_c(t_0, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^k \|c(t_j) - c(t_{j-1})\|.$$

**Def.** Eine stetige Kurve  $c$  heißt **rektifizierbar** von Länge  $\hat{L}_c$ , wenn gilt: Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass für alle Unterteilungen  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  der Feinheit mindestens  $\delta$  gilt:

$$\|\hat{L}_c - \hat{L}_c(t_0, t_1, \dots, t_k)\| < \epsilon.$$

**Def.** Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulär und nach BL parametrisiert. Dann heißt der Vektor  $c''(t)$  **Krümmungsvektor** von  $c$  in  $t \in I$  und die Abbildung  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \|c''(t)\|$  heißt **Krümmung** von  $c$ .

**Def.** Eine Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  wird **ebene Kurve** genannt.

**Def.** Sei  $c$  eine reguläre, nach BL parametrisierte, ebene Kurve. Dann ist das **Normalenfeld** von  $c$  die Abbildung

$$n = n_c : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto J \cdot c'(t) \quad \text{mit } J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Bemerkung.* Für alle  $t \in I$  bildet  $(c'(t), n_c(t))$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^2$ . Es gilt außerdem  $c''(t) \perp c'(t)$ , also  $c''(t) = \kappa(t) \cdot n_c(t)$ , d. h. die Krümmung hat im  $\mathbb{R}^2$  ein Vorzeichen.

**Satz (Frenet-Gleichungen)** ebener Kurven). Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulär, nach BL parametrisiert und  $v = c'$ , dann gilt

$$c'' = \kappa \cdot n \quad \text{und} \quad n' = -\kappa \cdot v.$$

**Bsp.** Für die nach BL parametrisierte gegen den UZS durchlaufene Kreislinie mit Mittelpunkt  $m \in \mathbb{R}^2$  und Radius  $r > 0$

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto m + r \begin{pmatrix} \cos(t/r) \\ \sin(t/r) \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad \forall t \in \mathbb{R} : \kappa(t) = \frac{1}{r}.$$

**Satz.** Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  glatte, nach BL parametrisiert mit konstanter Krümmung  $\kappa(t) = R \neq 0$ . Dann ist  $c$  Teil eines Kreisbogens mit Radius  $\frac{1}{|R|}$ .

**Def.** Für  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulär, nicht notwendigerweise nach BL parametrisiert, ist die Krümmung zur Zeit  $t$  definiert als

$$\kappa(t) := \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

*Bemerkung.* Obige Definition ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, und stimmt für nach BL parametrisierte Kurven mit der vorhergehenden Definition überein.

**Satz** (Hauptsatz der lokalen ebenen Kurventheorie). Sei  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $t_0 \in I$  und  $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|v_0\| = 1$ . Dann gibt es genau eine nach BL parametrisierte  $\mathcal{C}^2$ -Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Krümmung  $\kappa$ ,  $c(t_0) = x_0$  und  $c'(t_0) = v(t_0) = v_0$ .

**Def.** Eine reguläre Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **geschlossen**, falls  $c(a) = c(b)$  und  $c'(a) = c'(b)$ . Eine reguläre geschlossene Kurve  $c$  heißt **einfach geschlossen**, wenn  $c|_{[a,b]}$  injektiv ist.

**Def.** Für eine geschl. reguläre ebene Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt

$$\bar{\kappa}(c) := \int_a^b \kappa(t) \cdot \|c'(t)\| dt \quad \text{Totalkrümmung von } c.$$

*Bemerkung.* Ist  $c$  nach BL parametrisiert, so ist  $\bar{\kappa}(c) = \int_a^b \kappa(t) dt$ .

**Satz.** Die Totalkrümmung ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist  $c : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre Kurve und  $\phi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$  eine Diffeomorphismus mit  $\phi' > 0$ , dann gilt  $\bar{\kappa}(c) = \bar{\kappa}(c \circ \phi)$ .

**Satz (Polarwinkelfunktion).** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow S^1$  stetig (glatt) und  $\omega_a \in \mathbb{R}$ , sodass  $\gamma(a) = e^{i\omega_a}$ . Dann gibt es eine eindeutige stetige (glatte) Abb.  $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , genannt Polarwinkelfunktion von  $\gamma$  mit  $\omega(a) = \omega_a$  und  $\gamma(t) = e^{i\omega(t)} = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t)) \\ \sin(\omega(t)) \end{pmatrix}$  für alle  $t \in [a, b]$ .

**Satz.** Seien  $\omega$  und  $\tilde{\omega}$  zwei stetige Polarwinkelfunktionen zu einer stetigen Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow S^1$ . Dann gibt es ein  $k \in \mathbb{Z}$ , sodass  $\omega(t) - \tilde{\omega}(t) = 2\pi k$  für alle  $t \in [a, b]$ .

**Satz.** Für eine ebene reguläre geschl. Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt

$$U_c := \frac{1}{2\pi} \bar{\kappa}(c) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) \|c'(t)\| dt \in \mathbb{Z} \quad \text{Umlaufzahl von } c.$$

**Satz** (Umlaufsatz von Hopf). Die Umlaufzahl einer einfach geschlossenen regulären Kurve ist  $\pm 1$ .

**Def.** Für eine reg. geschlossene ebene Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt

$$\kappa_{\text{abs}}(c) := \int_a^b |\kappa_c(t)| \cdot \|c'(t)\| dt \quad \text{Absolutkrümmung.}$$

**Satz.** Für die Absolutkrümmung einer einfach geschlossenen regulären Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt  $\kappa_{\text{abs}} \geq 2\pi$ , wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $\kappa_c$  das Vorzeichen nicht wechselt.

**Satz** (Whitney-Graustein). Für zwei glatte reguläre geschlossene ebene Kurven  $c, d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $c$  ist zu  $d$  regulär homotop    (ii)  $U_c = U_d$

**Def.** Eine glatte reguläre Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) heißt **Frenet-Kurve**, wenn für alle  $t \in I$  die Ableitungen  $c'(t), c''(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$  linear unabhängig sind.

**Def.** Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Frenet-Kurve und  $t \in I$ . Wende das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf  $\{c'(t), c''(t), \dots, c^{(n-1)}(t)\}$  an und ergänze das resultierende Orthonormalsystem  $(b_1(t), \dots, b_{n-1}(t))$  mit einem passenden Vektor  $b_n(t)$  zu einer Orthonormalbasis, die positiv orientiert ist. Die so definierten Funktionen  $b_1, \dots, b_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind stetig und werden zusammen das **Frenet- $n$ -Bein** von  $c$  genannt.

**Def.** Sei  $(b_1, \dots, b_n)$  das Frenet- $n$ -Bein einer Frenet-Kurve  $c$ . Dann:

$$A := (\langle b'_j, b_k \rangle)_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & & & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\kappa_{n-2} & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Funktion  $\kappa_j : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \langle b'_j(t), b_{j+1}(t) \rangle, j = 1, \dots, n-1$  heißt  $j$ -te **Frenet-Krümmung** von  $c$ .

**Satz** (Hauptsatz der lokalen Raumkurventheorie). Seien  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatte Funktionen mit  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$  und  $t_0 \in I$  und  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis, sowie  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann gibt es genau eine nach BL parametrisierte Frenet-Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass gilt

- $c(t_0) = x_0$ ,
- das Frenet- $n$ -Bein von  $c$  in  $t_0$  ist  $\{v_1, \dots, v_n\}$  und
- die  $j$ -te Frenet-Krümmung von  $c$  ist  $\kappa_j$ .

**Def** (Frenet-Kurven im  $\mathbb{R}^3$ ). Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve und  $t \in I$ . Dann heißt

- $b_1(t) = v(t) = c'(t)$  der **Tangentenvektor** an  $c$  in  $t$ ,
- $b_2(t) = \frac{c''(t)}{\|c''(t)\|}$  **Normalenvektor** an  $c$  in  $t$ ,
- $\text{span}(b_1(t), b_2(t))$  **Schmiegeebene** an  $c$  in  $t$ ,
- $b_3(t) = b_1(t) \times b_2(t)$  **Binormalenvektor** an  $c$  in  $t$ ,
- $\tau_c(t) = \tau(t) := \kappa_2(t) = \langle b_2'(t), b_3(t) \rangle$  **Torsion** o. **Windung** von  $c$ .

*Bemerkung.* Die Frenet-Gleichungen für nach BL parametrisierte Frenet-Kurven im  $\mathbb{R}^3$  lauten

$$b_1' = \kappa_c b_2, \quad b_2' = -\kappa_c b_1 + \tau_c b_3, \quad b_3' = -\tau_c b_2$$

*Bemerkung.* Für eine nicht nach BL parametrisierte Frenet-Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt für Krümmung und Torsion

$$\kappa_c := \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} \quad \text{und} \quad \tau_c := \frac{\det(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2}.$$

**Def.** Für eine glatte geschl. reguläre Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt

$$\bar{\kappa}(c) := \int_a^b \kappa_c(t) \cdot \|c'(t)\| dt \quad \text{Totalkrümmung von } c.$$

Hierbei ist die Krümmung einer regulären Raumkurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  wie folgt definiert: Sei  $\phi : I \rightarrow J$  orientierungserhaltend (d. h.  $\phi' > 0$ ) und so gewählt, dass  $\tilde{c} := c \circ \phi^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  nach BL parametrisiert ist, dann definieren wir  $\kappa_c(t) := \kappa_{\tilde{c}}(\phi(t))$ .

**Satz** (Fenchel). Für eine geschlossene reguläre glatte (oder  $\mathcal{C}^2$ ) Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt  $\bar{\kappa}(c) \geq 2\pi$ . Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $c$  eine einfach geschlossene konvexe reguläre glatte (oder  $\mathcal{C}^2$ ) Kurve ist, die in einer affinen Ebene des  $\mathbb{R}^3$  liegt.

**Satz.** Sei  $v : [0, b] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine stetige rektifizierbare Kurve der Länge  $L < 2\pi$  mit  $c(0) = c(b)$ , so liegt das Bild von  $v$  ganz in einer offenen Hemisphäre.

## Lokale Flächentheorie

**Notation.** Sei im Folgenden  $m \in \mathbb{N}$  und  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen.

**Def.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung und  $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ . Dann heißt

$$\partial_v f(u) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u+hv) - f(u)}{h}$$

**Richtungsableitung** von  $f$  im Punkt  $u$  (falls der Limes existiert).

**Def.** Für  $v = e_j$  heißt  $\partial_j f(u) := \partial_{e_j} f(u)$  **partielle Ableitung** nach der  $j$ -ten Variable. Falls die partielle Ableitung für alle  $u \in U$  existiert, erhalten wir eine Funktion  $\partial_j : U \rightarrow \mathbb{R}^n, u \mapsto \partial_j f(u)$ .

**Notation.**  $\partial_{j_1, j_2, \dots, j_k} f := \partial_{j_1}(\partial_{j_2}(\dots(\partial_{j_k} f)))$

**Def.** Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung, wenn alle  $k$ -ten partiellen Ableitungen von  $f$  existieren und stetig sind. Wenn  $f \in \mathcal{C}^k$  für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$ , so heißt  $f$  **glatt**.

**Satz** (Schwarz). Ist  $f$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung, so kommt es bei allen  $l$ -ten partiellen Ableitungen mit  $l \leq k$  nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen an.

**Def.** Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt in  $u \in U$  **total differenzierbar**, wenn gilt: Es gibt eine lineare Abbildung  $D_u f = \partial f_u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , genannt das **totale Differential** von  $f$  in  $u$ , sodass für genügend kleine  $h \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$f(u+h) = f(u) + \partial f_u(h) + o(h)$$

für eine in einer Umgebung von 0 definierte Funktion  $o : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$ .

**Def.** Für eine total differenzierbare Funktion  $f$  heißt die Matrix  $J_u f = (D_u f(e_1), \dots, D_u f(e_n))$  **Jacobi-Matrix** von  $f$  in  $u$ .

*Bemerkung.* Es gelten folgende Implikationen:

$f$  ist stetig partiell differenzierbar  
 $\implies f$  ist total differenzierbar ( $\implies f$  ist stetig)  
 $\implies f$  ist partiell differenzierbar

**Def.** Eine total differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **regulär** oder **Immersion**, wenn für alle  $u \in U$  gilt:  $\text{Rang}(J_u f) = m$ , d. h. alle partiellen Ableitungen sind in jedem Punkt linear unabhängig und  $J_u f$  ist injektiv. Insbesondere muss  $m \leq n$  gelten.

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine (glatte) Immersion. Dann heißt das Bild  $f(U)$  **immergierte Fläche**, immensierte Fläche oder parametrisiertes Flächenstück. Sei  $\tilde{U}$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und  $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus, dann heißt  $\tilde{X} := X \circ \phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  **Umparametrisierung** von  $X$ .

**Notation.** Sei im folgenden  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion.

**Def.** Für  $u \in U$  heißt der Untervektorraum

$$T_u X := \text{span}(\partial_1 X(u), \dots, \partial_m X(u)) = \text{Bild}(D_u X) \subset \mathbb{R}^n$$

**Tangentialraum** von  $X$  in  $u$  und sein orthogonales Komplement  $N_u X := (T_u X)^\perp \subset \mathbb{R}^n$  **Normalraum** an  $X$  in  $u$ .

*Bemerkung.* Für  $u \in U$  definiert

$$\langle v, w \rangle_u := \langle D_u X(v), D_u X(w) \rangle_{\text{eukl}}$$

ein Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^m$ . Die Positiv-Definitheit folgt dabei aus der Injektivität von  $D_u$ .

**Notation.** Bezeichne mit  $\text{SymBil}(\mathbb{R}^m)$  die Menge der symmetrischen Bilinearformen auf  $\mathbb{R}^m$ .

**Def.** Die **erste Fundamentalform** (1. FF) einer Immersion  $X$  ist

$$I : U \rightarrow \text{SymBil}(\mathbb{R}^m), \quad u \mapsto I_u := \langle \cdot, \cdot \rangle_u.$$

Äquivalent dazu wird auch die Abbildung

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, \quad u \mapsto g_u := (J_u X)^T (J_u X)$$

manchmal als erste Fundamentalform bezeichnet.

**Def.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine glatte Kurve. Wir nennen  $c$  eine **Kurve auf X**, wenn es eine glatte Kurve  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  mit  $c = X \circ \alpha$  gibt.

*Bemerkung.* Dann gilt  $L(c) := \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \|D_{\alpha(t)} X(\alpha'(t))\| dt$ .

*Bemerkung.* Seien  $c_1 = X \circ \alpha_1$  und  $c_2 = X \circ \alpha_2$  zwei reguläre Kurven auf  $X$ , die sich in einem Punkt schneiden, d. h.

$\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2) =: u$ . Dann ist der Schnittwinkel  $\angle(c_1'(t), c_2'(t))$  von  $c_1$  und  $c_2$  in  $X(u)$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} \cos(\angle(c_1'(t), c_2'(t))) &= \frac{\langle c_1'(t_1), c_2'(t_2) \rangle}{\|c_1'(t_1)\| \cdot \|c_2'(t_2)\|} \\ &= \frac{I_u(\alpha_1'(t_1), \alpha_2'(t_2))}{\sqrt{I_u(\alpha_1'(t_1), \alpha_1'(t_1)) \cdot I_u(\alpha_2'(t_2), \alpha_2'(t_2))}} \end{aligned}$$

**Def.** Sei  $C \subset U$  eine kompakte messbare Teilmenge, dann heißt

$$A(X(C)) := \int_C \sqrt{\det(g_u)} du \quad \text{Flächeninhalt von } X(C).$$

**Satz** (Transformation der ersten FF). Sei  $\tilde{X} = X \circ \phi$  eine Umparametrisierung von  $X$  mit einem Diffeo  $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ , dann gilt

$$\forall \tilde{u} \in \tilde{U} : \tilde{g}_{\tilde{u}} = (J_{\tilde{u}} \tilde{X})^T (J_{\tilde{u}} \tilde{X}) = (J_{\tilde{u}}(\phi))^T \cdot g_{\phi(\tilde{u})} \cdot (J_{\tilde{u}}(\phi)).$$

**Bsp** (Drehfläche). Sei  $c : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}, t \mapsto (r(t), z(t))$  eine reguläre glatte Kurve. Dann heißt

$$X : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, s) \mapsto (r(t) \cos(s), r(t) \sin(s), z(t))$$

**Drehfläche** mit Profilkurve  $c$ . Es gilt:

$$g_{(t,s)} = \begin{pmatrix} \|c'(t)\|^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}$$

**Bsp** (Kugelfläche). Die Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^3$  ist

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto (-\sin(t) \cos(s), \cos^2(t), \sin(t)).$$

**Def.** Zwei Immersionen  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$  heißen **lokal isometrisch**, wenn es eine Umparametrisierung  $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$  gibt, sodass die ersten Fundamentalformen von  $X$  und  $\tilde{X} \circ \phi$  übereinstimmen. Ist eine Immersion  $X$  isometrisch zu einer Immersion, deren Bild eine offene Teilmenge einer affinen Ebene ist, so heißt  $X$  **abwickelbar**.

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion mit  $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$  offen. Dann heißt  $X$  **Hyperfläche** (HF) im  $\mathbb{R}^n$ .

*Bemerkung.* Es gilt in diesem Fall offenbar  $\dim T_u = n-1$  und  $\dim N_u = 1$  für  $u \in U$  und für einen Vektor  $\nu_u \in N_u X \setminus \{0\}$  gilt  $N_u X = \mathbb{R} \cdot \nu_u$ .

**Def.**  $v_u := \sum_{j=1}^n \det(\partial_1 X(u), \dots, \partial_{n-1} X(u), e_j) e_j$

*Bemerkung.* Es gilt:

- $v_u \in N_u X \setminus \{0\}$
- $\det(\partial_1 X(u), \dots, \partial_{n-1} X(u), v_u) > 0$
- Für  $n = 3$  und  $m = 2$  ist  $v_u = \partial_1 X(u) \times \partial_2 X(u)$ .

**Notation.**  $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  heißt **Einheitssphäre**.

**Def.** Für eine Hyperfläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt

$$\nu : U \rightarrow S^{n-1}, \quad u \mapsto \nu_u := \frac{v_u}{\|v_u\|} \quad \text{Gaußabbildung.}$$

**Satz.** Die Gaußabbildung einer Hyperfläche ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist  $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$  ein Diffeo mit  $\det(J_{\tilde{u}} \phi) > 0$  für alle  $\tilde{u} \in \tilde{U}$ , dann ist  $\tilde{\nu} = \nu \circ \phi$ .

**Notation.**  $\text{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) := \{B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \mid B \text{ bilinear}\}$

**Def.** Die **vektorwertige zweite Fundamentalform** ist die Abbildung einer Immersion  $X$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{I} : U \rightarrow \text{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \quad u \mapsto \mathbb{I}(u) = \mathbb{I}_u, \quad \text{mit} \\ \mathbb{I}_u : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (v, w) \mapsto \mathbb{I}_u(v, w) := (\partial_v \partial_w X(u))^{N_u}, \end{aligned}$$

wobei  $(\cdot)^{N_u}$  die orth. Projektion auf den Normalenraum bezeichnet.

*Bemerkung.* Nach dem Satz von Amandus Schwarz ist  $\mathbb{I}_u$  eine symmetrische Bilinearform.

*Bemerkung.* Für eine Hyperfläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(U \subseteq \mathbb{R}^{n-1})$  gilt

$$\mathbb{I}_u(v, w) = h_u(v, w)\nu_u \quad \text{mit} \quad h_u(v, w) = \langle \mathbb{I}_u(v, w), \nu_u \rangle.$$

**Def.** Die Abbildung  $h : U \rightarrow \text{SymBil}(\mathbb{R}^{n-1})$ ,  $u \mapsto h_u = h(u)$  mit  $h_u(v, w) = \langle \mathbb{I}_u(v, w), \nu_u \rangle = \langle \partial_v \partial_w X(u), \nu_u \rangle$  heißt **zweite Fundamentalform** (2. FF) der Hyperfläche  $X$ .

*Bemerkung.* Man kann die 2. FF als matrixwertige Abb. auffassen:

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \quad u \mapsto (h_{jk}(u)) = \langle \partial_j \partial_k X(u), \nu_u \rangle$$

**Satz.** Für die Gaußabbildung  $\nu$  einer Hyperfläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt

$$\langle \partial_j \nu, \partial_k X \rangle = -h_{jk} \quad \text{und} \quad \langle \partial_j \nu, \nu \rangle = 0 \quad \text{für alle } j, k \in \{1, \dots, m\}.$$

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Hyperfläche und  $u \in U$ , dann ist die **Weingartenabbildung** von  $X$  im Punkt  $u$  definiert durch

$$W_u := -D_u \nu \circ (D_u X)^{-1} : T_u X \rightarrow T_u X \quad (\text{linear}).$$

*Bemerkung.* Es gilt  $W_u(\partial_j X(u)) = -\partial_j \nu(u)$ .

**Satz.** •  $W_u$  ist selbstadjungiert bzgl. der Einschränkung  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_u}$ .  
•  $h_{jk}(u) = \langle W_u(\partial_j X(u)), \partial_k X(u) \rangle$   
• Die Weingartenabbildung ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist  $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$  ein Diffeo mit  $\det(J\phi) > 0$ , dann gilt für  $\tilde{X} := X \circ \phi$  und alle  $\tilde{u} \in \tilde{U}$ :  $W_{\phi(\tilde{u})} = \tilde{W}_{\tilde{u}}$ .

**Satz.** Sei  $g_u = (g_{jk}(u))$  die Matrix der ersten und  $h_u = (h_{jk}(u))$  die Matrix der zweiten FF einer Hyperfläche  $X$ , dann gilt für die Matrix  $w_u = (w_{jk}(u))$  von  $W_u$  bzgl. der Basis  $\{\partial_1 X(u), \dots, \partial_{n-1} X(u)\}$  von  $T_u X$ :

$$w_u = g_u^{-1} \cdot h_u$$

*Bemerkung.* Die Weingartenabbildung ist als selbstadjungierter Endomorphismus reell diagonalisierbar (Spektralsatz).

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Hyperfläche.

- Die Eigenwerte  $\kappa_1(u), \dots, \kappa_{n-1}(u)$  mit Vielfachheiten von  $W_u$  heißen **Hauptkrümmungen** von  $X$  in  $u$  und die dazugehörigen Eigenvektoren **Hauptkrümmungsrichtungen** von  $X$  in  $u$ .
- Die **mittlere Krümmung** von  $X$  ist definiert als

$$H : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \frac{1}{n-1} \text{spur}(W_u) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \kappa_j(u).$$

- Die **Gauß-(Kronecker-)Krümmung** von  $X$  ist die Abbildung

$$K : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \det(W_u) = \frac{\det(h_u)}{\det(g_u)} = \prod_{j=1}^{n-1} \kappa_j(u).$$

**Satz.** Die Hauptkrümmungen, die mittlere Krümmung und die Gauß-Kronecker-Krümmung sind invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen.

**Bsp.** Für die Drehfläche (s. o.) von  $c = (r, z) : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$  gilt:

$$w = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \frac{z'}{|c'|r} \end{pmatrix}, \quad \kappa_1 = \frac{\det(c', c'')}{|c'|^3} = \frac{z''r' - r''z'}{|c'|^3}, \quad \kappa_2 = \frac{z'}{|c'|r}.$$

**Satz.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Hyperfläche und  $u_0 \in U$  ein Punkt. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U_0 \subseteq U$  von  $u_0$  und eine Umparametrisierung  $\phi : U_0 \rightarrow \tilde{U}$ , sodass für  $\tilde{X} := X \circ \phi^{-1}$  gilt: Es gibt eine glatte (bzw.  $C^2$ ) Funktion  $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D_{\phi(u_0)} f = 0$ , sodass  $\tilde{X} = \text{Graph}(f)$ , d. h. es gilt für alle  $\tilde{u} \in \tilde{U}$ :

$$\tilde{X}(\tilde{u}) = (\tilde{u}, f(\tilde{u})).$$

**Notation.**  $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_k f)$  heißt **Gradient** von  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Satz.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Dann ist die zweite FF der Graphen-Hyperfläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u \mapsto (u, f(u))$

$$h_{jk}(u) = \frac{\partial_{jk} f(u)}{\sqrt{1 + |\nabla f(u)|^2}}.$$

**Satz.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine HF,  $u_0 \in U$ , sowie  $E_{u_0} := X(u_0) + T_{u_0} X$  die affine Tangentialebene an  $X$  in  $u_0$ . Dann gilt:

- Ist  $K(u_0) > 0$ , so liegt für eine kleine offene Umgebung  $U_0 \subset U$  von  $u_0$  das Bild  $X(U_0)$  ganz auf einer Seite von  $E_{u_0}$ .
- Ist  $K(u_0) < 0$ , so trifft für jede Umgebung  $U_0 \subset U$  von  $u_0$  das Bild  $X(U_0)$  beide Seiten von  $E_{u_0}$ .

**Def.** Sei  $u_0 \in U$ ,  $v \in T_{u_0} X$ ,  $P_v := X(u_0) + \text{span}(v, \nu(u_0))$ . Sei  $U_0 \subset U$  eine offene Umgebung von  $u_0$ , dann heißt

$$P_v \cap X(U_0) \quad \textbf{Normalenschnitt} \text{ in } u_0 \text{ in Richtung } v.$$

**Satz.** Wenn  $U_0$  hinreichend klein, dann ist  $P_v \cap X(U_0)$  Bild einer regulären glatten Kurve.

**Def.** Für  $u \in U$  und  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$  heißt

$$\kappa_v(u) := \langle W_u v, v \rangle \quad \textbf{Normalenkrümmung} \text{ in } u \text{ in Richtung } v.$$

*Bemerkung.* Sei  $\|v\| = 1$ . Sei  $c : I \rightarrow P_v \cong \mathbb{R}^2$  nach BL parametrisiert, sodass  $\text{Bild}(c) = P_v \cap X(U_0)$ , und  $c(0) = X(u_0)$  und  $c'(0) = v$ . Dann:  $\kappa_v(u) = \kappa_c(0)$

**Satz.** Die Hauptkrümmungen  $\kappa_1(u_0), \kappa_2(u_0)$  einer HF  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $u_0 \in U$  sind die Extrema der Abbildung

$$T_{u_0} X \supset S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \kappa_v(u_0) = \langle W_{u_0} v, v \rangle.$$

## Die Levi-Civita-Ableitung

**Def.** Ein **Vektorfeld** (VF) auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  ist eine Abbildung  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Notation.**  $\chi(U) = \{v : U \rightarrow \mathbb{R}^n \mid v \text{ glatt}\}$

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine immergierte Fläche,  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ . Ein **tangentiales Vektorfeld** längs  $X$  ist eine glatte Abbildung

$$V : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \forall u \in U : V(u) \in T_u X.$$

*Bemerkung.* Mit typtheoretischer Syntax ist ein tangentiales Vektorfeld längs  $X$  eine glatte Abbildung  $V : \prod_{u:U} T_u X$ .

**Notation.**  $\chi(TX) = \{V : U \rightarrow \mathbb{R}^n \mid V \text{ ist tang. VF längs } X\}$

*Bemerkung.* Folgende Abbildung ist eine Bijektion:

$$\begin{aligned} H : \chi(U) &\rightarrow \chi(TX), \quad v \mapsto v^\wedge := \partial_v X, \quad \text{wobei} \\ \partial_v X &: \prod_{u:U} T_u X, \quad u \mapsto \partial_{v(u)} X(u) \end{aligned}$$

**Notation.** Für ein glattes Vektorfeld  $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  bezeichnet  $Y^T$  das tangentielle Vektorfeld längs  $X$  definiert durch

$$Y^T : \prod_{u:U} T_u X, \quad u \mapsto (Y(u))^{T_u X}.$$

**Def.**  $\nabla : \chi(U) \times \chi(TX) \rightarrow \chi(TX)$ ,  $(w, V) \mapsto \nabla_w V := (\partial_w V)^T$  heißt **Levi-Civita-Ableitung** von  $V$  in Richtung  $w$ .

**Achtung.** Gradient  $\neq$  Levi-Civita-Ableitung (trotz Symbol  $\nabla$ )!

**Satz** (Eigenschaften der Levi-Civita-Ableitung). Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt,  $w_1, w_2, w \in \chi(U)$ ,  $V, V_1, V_2 \in \chi(TX)$ . Dann gilt:

- $\nabla_{f(w_1)+w_2} V = f \cdot \nabla_{w_1} V + \nabla_{w_2} V$  (Linearität 1)
- $\nabla_w (V_1 + V_2) = \nabla_w V_1 + \nabla_w V_2$  (Linearität 2)
- $\nabla_w (f \cdot V) = f \cdot (\nabla_w V) + \partial_w f \cdot V$  (Produktregel)
- $\partial_w \langle V_1, V_2 \rangle = \langle \nabla_w V_1, V_2 \rangle + \langle V_1, \nabla_w V_2 \rangle$  (Metrizität)

**Notation.** Sei  $j \in \{1, \dots, m\}$ , dann betrachten wir die konstante Abbildung  $e_j : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u \mapsto e_j$ . Wir setzen  $\nabla_j V := \nabla_{e_j} V$ .

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion, so schreiben wir:

$$\nabla_j (\partial_k X) = \sum_{l=1}^m \Gamma_{jk}^l \partial_l(X) \quad \text{für } j, k \in \{1, \dots, m\}.$$

Dabei heißen die Funktionen  $\Gamma_{jk}^l : U \rightarrow \mathbb{R}$  **Christoffel-Symbole**.

**Notation.**  $\Gamma_{jkl} := \sum_{r=1}^m g_{rl} \Gamma_{jk}^r : U \rightarrow \mathbb{R}$

**Satz.**  $\Gamma_{jkl} = \sum_{r=1}^m \Gamma_{jk}^r \langle \partial_r X, \partial_l X \rangle = \langle \nabla_j (\partial_k X), \partial_l X \rangle = \langle \partial_j (\partial_k X), \partial_l X \rangle$

**Satz.** Es gilt  $\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l$  und  $\Gamma_{jkl} = \frac{1}{2} (\partial_j \cdot g_{kl} + \partial_k \cdot g_{jl} + \partial_l \cdot g_{jk})$ .

*Bemerkung.* Die Christoffelsymbole kann man aus der 1. FF berechnen (hier sind  $g^{lh}$  die Komponenten von  $g^{-1}$ ):

$$\Gamma_{jk}^l = \sum_{h=1}^m g^{lh} \cdot \Gamma_{jkh} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^m g^{lh} \cdot (\partial_j \cdot g_{kh} + \partial_k \cdot g_{jh} + \partial_h \cdot g_{jk}),$$

**Bemerkung.** Schreiben wir  $V = \sum_{k=1}^m v^k \partial_k X$  für  $V \in \chi(TX)$ , dann ist

$$\nabla_j V = \sum_{l=1}^m \left( \partial_j v^l + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l v^k \right) \partial_l X.$$

**Def** (Levi-Civita-Ableitung für Vektorfelder auf  $U$ ). Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine immergierte Fläche, so heißt

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(U) \times \chi(U) &\rightarrow \chi(U) \\ (w, v) &\mapsto \nabla_w v = H^{-1}(\nabla_w \overbrace{H(v)}^{=v^\wedge}) \end{aligned}$$

**Levi-Civita-Ableitung** von  $v$  in Richtung  $w$ .

**Bemerkung.** Schreiben wir  $V = \sum v^k \partial_k X$  für  $V \in \chi(TX)$ , dann ist

$$\begin{aligned} \nabla_j V &= \sum_{l=1}^m \left( \partial_j v^l + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l v^k \right) e_l = \partial_j V + \Gamma_j V \quad \text{mit} \\ \Gamma_j : U &\rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, \quad u \mapsto (\Gamma_{jk}^l(u))_{lk}. \end{aligned}$$

**Satz.** Seien  $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \chi(U)$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt. Dann:

- $\nabla_{f \cdot w_1 + w_2} v = f \cdot \nabla_{w_1} v + \nabla_{w_2} v$  (Linearität 1)
- $\nabla_w(v_1 + v_2) = \nabla_w v_1 + \nabla_w v_2$  (Linearität 2)
- $\nabla_w(f \cdot v) = f \cdot \nabla_w v + (\nabla_w f) \cdot v$  (Produktregel)
- $\partial_w I(v_1, v_2) = I(\nabla_w v_1, v_2) + I(v_1, \nabla_w v_2)$  (verträglich mit 1. FF)

**Def.** Sei  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  eine glatte, reguläre Kurve,  $c := X \circ \alpha$ . Eine glatte Abbildung  $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $V(t) \in T_{\alpha(t)} X \forall t \in [a, b]$  **tangentiales Vektorfeld** längs  $c$ .

**Bemerkung.** Eine glatte Abbildung  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  bestimmt eindeutig ein tang. VF vermöge

$$V(t) := v^\wedge(t) = \partial_{v(t)} X(\alpha(t)) = J_{\alpha(t)} X \cdot v(t).$$

Schreiben wir  $v = \sum v^j e_j$  und  $\alpha = \sum \alpha^j e_j$ , so gilt für  $V = v^\wedge$ :

$$V' = \frac{d}{dt} V = \sum_{j=1}^m (v^j)' (\partial_j X \circ \alpha) + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\partial_k \partial_j X \circ \alpha).$$

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion und  $c = X \circ \alpha$  eine reguläre glatte Kurve auf  $X$ . Sei  $V$  ein tang. VF längs  $c$ , dann heißt

$$\frac{\nabla V}{dt} := (V')^T$$

die **Levi-Civita-Ableitung** von  $V$  längs  $c$ . Das tang. VF  $V$  heißt **(Levi-Civita-)parallel**, wenn gilt

$$\frac{\nabla V}{dt} = 0.$$

**Bemerkung.** Für  $\alpha, v, V$  aus der letzten Bemerkung folgt

$$\frac{\nabla V}{dt} = \sum_{l=1}^m \left( (v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) (\partial_l X \circ \alpha).$$

**Notation.**  $\hat{\Gamma}_\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $(\hat{\Gamma}_\alpha(t))_{jl} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l(\alpha(t)) ((\alpha^k)'(t))$

**Def.** Wir fassen eine glatte Abbildung  $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  als VF längs  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  auf. Dann nennen wir

$$\frac{\nabla v}{dt} := \sum_{l=1}^m \left( (v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) e_l = v' + \hat{\Gamma}_\alpha v$$

**Levi-Cevita-Ableitung** von  $v$  längs  $\alpha$ .

**Satz.** Es gilt dann  $\frac{\nabla(v^\wedge)}{dt} = \left( \frac{\nabla v}{dt} \right)^\wedge$ . Ein VF  $V = v^\wedge$  ist also genau dann parallel, wenn  $v' + \hat{\Gamma}_\alpha v = 0$  bzw.

$$(v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) = 0 \quad \text{für alle } l = 1, \dots, m.$$

**Bemerkung.** Es handelt sich bei  $v' + \hat{\Gamma}_\alpha v = 0$  um ein System linearer Differentialgleichungen (mit nicht konstanten stetigen Koeffizienten). Damit existiert bei gegebenem Anfangswert  $v(a)$  eine auf ganz  $[a, b]$  definierte eindeutige Lösung der Differentialgleichung.

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion und  $c = X \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine reguläre glatte Kurve auf  $X$ . Für  $t \in [a, b]$  heißt die Abbildung

$$P_t^c : T_{\alpha(a)} X \rightarrow T_{\alpha(t)} X, \quad x \mapsto V_x(t),$$

wobei  $V_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  das parallele tangentielle VF längs  $c$  mit Anfangsbedingung  $V_x(a) = x \in T_{\alpha(a)} X$  ist, **Parallelverschiebung** längs  $c$  von  $c(a)$  nach  $c(t)$ .

**Satz.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion und  $c = X \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre glatte Kurve auf  $X$ . Für alle  $t \in [a, b]$  ist die Abbildung  $P_t^c : T_{\alpha(a)} X \rightarrow T_{\alpha(t)} X$  eine lineare Isometrie, d. h.  $P_t^c$  ist linear und es gilt  $\langle x, y \rangle = \langle P_t^c x, P_t^c y \rangle$  für alle  $x, y \in T_{\alpha(a)} X$ .

## Geodäten

**Def.** Eine reguläre glatte Kurve  $c = X \circ \alpha$  auf  $X$  heißt **Geodäte** auf  $X$ , wenn gilt

$$(c'')^T = \frac{\nabla c'}{dt} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\nabla \alpha'}{dt} = 0.$$

**Satz.** Eine Geodäte ist immer proportional zur BL parametrisiert, d. h.  $\|c'\|$  ist konstant.

**Bemerkung.** Sei  $c = X \circ \alpha$  mit  $\alpha = \sum \alpha^j e_j$  mit glatten Abb.  $\alpha^j$ . Dann gilt

$$\frac{\nabla c'}{dt} = \sum_{l=1}^m \left( (\alpha^l)'' + \sum_{j,k=1}^m (\alpha^j)' (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) (\partial_l X \circ \alpha).$$

Somit ist  $c$  genau dann eine Geodäte, wenn gilt

$$(\alpha^l)'' + \sum_{j,k=1}^m (\alpha^j)' (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) = 0 \quad \text{für alle } l = 1, \dots, m$$

oder  $\alpha'' + \Gamma_\alpha(\alpha', \alpha') = 0$  (i. F. **Geodätengleichung**), wobei

$$\Gamma_\alpha : [a, b] \rightarrow \text{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \quad t \mapsto \Gamma_{\alpha(t)} \quad \text{mit}$$

$$\Gamma_{\alpha(t)}(v, w) = \sum_{j,k,l=1}^m v^j w^k \Gamma_{jk}^l(\alpha(t)) e_l.$$

**Bemerkung.** Es handelt sich hierbei um ein System nichtlinearer gew. DG zweiter Ordnung, welches nach dem Satz von Picard-Lindelöf bei gegebenen Anfangswerten immer eine eindeutige lokale Lösung besitzt. Es folgt:

**Satz** (Lokale Existenz von Geodäten). Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion, sei  $u \in U$  und  $w \in \mathbb{R}^m$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $U_w \Subset \mathbb{R}^m$  von  $w$  und eine  $\epsilon > 0$ , sodass gilt: Für jedes  $v \in U_w$  gibt es eine eindeutige Lösung  $\alpha_v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  der Geodätengleichung mit  $\alpha_v(0) = u$  und  $\alpha_v'(0) = v$ . Anders ausgedrückt: Zu jedem  $u \in U$  und zu jedem  $W \in T_u X$  gibt es eine offene Umgebung  $U_W \Subset T_u X$  von  $W$  sowie ein  $\epsilon > 0$ , sodass es für jedes  $V \in U_W$  eine eindeutige Geodäte  $c_v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf  $X$  gibt mit  $c_v(0) = X(u)$  und  $c_v'(0) = V$ .

**Satz** (Spray-Eigenschaft). Sei  $\alpha_v : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  die eindeutige Lsg. der Geodätengleichung mit  $\alpha_v(0) = u$  und  $\alpha_v'(0) = v$  und  $r > 0$ . Dann ist die eindeutige Lösung der Geodätengleichung  $\alpha_{rv}$  mit  $\alpha_{rv}(0) = rv$  und  $\alpha_{rv}'(0) = rv$  auf dem Intervall  $(-\frac{\epsilon}{r}, \frac{\epsilon}{r})$  definiert und es gilt  $\alpha_{rv}(t) = \alpha_v(rt)$  für alle  $t \in (-\frac{\epsilon}{r}, \frac{\epsilon}{r})$ .

**Satz.** Sei  $u \in U$ . Dann gibt es ein  $\epsilon_u > 0$ , sodass für alle  $v \in \overline{B_u^{\epsilon_u}}$  gilt: Die Geodätengleichung besitzt eine auf  $[-1, 1]$  definierte Lösung  $\alpha_v$  mit  $\alpha_v(0) = u$  und  $\alpha_v'(0) = v$ .

**Def.** Sei  $u \in U$ , dann heißt die Abbildung

$$\text{Exp}_u : B_u^{\epsilon_u} \rightarrow U, \quad v \mapsto \alpha_v(1)$$

(geodätische) **Exponentialabbildung** von  $X$  in  $u$ .

**Def.** Sei  $u \in U$ , dann gibt es ein  $0 < \epsilon \leq \epsilon_u$ , sodass  $\text{Exp}_u|_{B_u^\epsilon}$  ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

**Def.** Sei  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  eine glatte Kurve, sodass  $X \circ \alpha$  nach BL parametrisiert ist. Eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung

$$(-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow U, \quad (s, t) \mapsto \alpha_s(t)$$

mit  $\alpha_0 = \alpha$  heißt eine **Variation** von  $\alpha$ . Ist nun  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion, so erhalten wir auch eine Variation der Kurve  $c := X \circ \alpha$  auf  $X$  durch andere Kurven, nämlich  $c_s := X \circ \alpha_s$  auf  $X$ .

**Notation.**  $\delta := \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$ .

**Satz** (Variationsformel der Länge). Unter obigen Annahmen gilt

$$\delta L(c_s) = \langle c'(b), \delta c_s(b) \rangle - \langle c'(a), \delta c_s(a) \rangle - \int_a^b \langle c''(t), \delta c_s(t) \rangle dt.$$

**Satz** (Gaußlemma). Die Parametrisierung

$\tilde{X} := X \circ \text{Exp}_u : B_u^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch Exponentialkoordinaten ist eine radiale Isometrie: Seien  $v \in B_u^{\epsilon_u} \setminus \{0\}$  und  $w \in \mathbb{R}^m$  und zerlegen wir  $w$  in  $w = w_\parallel + w_\perp$  mit  $w_\parallel \in \mathbb{R}v$  und  $\langle w_\perp, v \rangle = 0$ , dann gilt

$$\|D_v \tilde{X}(w_\parallel)\| = \|w_\parallel\|$$

$$D_v \tilde{X}(w) \perp D_v \tilde{X}(v), \quad \text{wenn } w \perp v \text{ und somit}$$

$$\|D_v \tilde{X}(w)\|^2 = \|w_\parallel\|^2 + \|D_v \tilde{X}(w_\perp)\|^2.$$

**Satz.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow B_u^\epsilon$  reguläre glatte Kurve mit  $\gamma(a) = 0, \gamma(b) = v$ . Dann gilt:  $L(X \circ \text{Exp}_u \circ \gamma) \geq \|v\|$  mit  $L(X \circ \text{Exp}_u \circ \gamma) = \|v\| \iff \gamma(t) = \rho(t)v$  mit  $\rho : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  streng monoton wachsend.



**Satz.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Fläche,  $u_0 \in U$ ,  $\epsilon > 0$ , sodass  $\text{Exp}_{u_0} : B_{u_0}^\epsilon \rightarrow U$  Diffeomorphismus. Sei  $u \in \text{Exp}_{u_0}(B_{u_0}^\epsilon)$ . Dann gibt es (bis auf Umparametrisierung) genau eine bzgl. der Länge

$$L_I(\alpha) := \int_a^b \text{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) \, dt$$

kürzeste reguläre glatte Kurve  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  mit  $\alpha(a) = u_0$  und  $\alpha(b) = u$ , nämlich  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ ,  $t \mapsto \text{Exp}_{u_0}(t \cdot \text{Exp}_{u_0}^{-1}(u))$ .

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Fläche, dann heißt

$$[\cdot, \cdot] : \chi(U) \times \chi(U) \rightarrow \chi(U), \quad (v, w) \mapsto [v, w] = \partial_v w - \partial_w v$$

**Lie-Klammer** der Vektorfelder  $v$  und  $w$ .

**Satz.** Für alle  $v, w \in \chi(U)$  ist  $[v, w] = \nabla_v w - \nabla_w v$ .

**Def.** Die Abbildung

$$R : \chi(U) \times \chi(U) \times \chi(U) \rightarrow \chi(U), \quad (v, w, z) \mapsto R(v, w)z \\ \text{mit } R(v, w)z = \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_w(\nabla_v z) - \nabla_{[v, w]}z$$

heißt **Krümmungstensor**.

*Bemerkung* (Krümmungstensor in Koordinaten). Wir rechnen:

$$\nabla_j(\nabla_k z) = \partial_j \partial_k z + (\partial_j \Gamma_k)z + \Gamma_k(\partial_j z) + \Gamma_j(\partial_k z) + \Gamma_j \Gamma_k z, \\ R_{jk} z := R(e_j, e_k)z = \Gamma_j \Gamma_k z - \Gamma_k \Gamma_j z + (\partial_j \Gamma_k - \partial_k \Gamma_j)z, \\ R_{jk} := R(e_j, e_k) = (\Gamma_j \cdot \Gamma_k - \Gamma_k \cdot \Gamma_j) + (\partial_j \Gamma_k - \partial_k \Gamma_j).$$

Für  $v = \sum v^j e_j$ ,  $w = w^k e_k : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $v^j, w^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist

$$R(v, w)z = \sum_{k, j=1}^m v^k w^j (R_{kj} z)$$

und mit  $z = \sum z^l e_l : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $z^l : U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt folgt

$$R(v, w)z = \sum_{i, j, k, l} v^i w^j z^k R_{ijk}^l e_l,$$

wobei  $R_{ijk}^l : U \rightarrow \mathbb{R}$  so gewählt, dass  $R_{ij}(e_k) = \sum R_{ijk}^l e_l$ . Es gilt:

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \sum_{s=1}^m (\Gamma_{is}^l \Gamma_{jk}^s - \Gamma_{js}^l \Gamma_{ik}^s).$$

**Satz.** Die Abbildung

$$\text{I}_{R_{ij}} : \chi(U) \times \chi(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}), \quad (v, w) \mapsto \text{I}(\underbrace{R_{ij}}_{u \mapsto \text{I}_u((R_{ij} v)(u), w(u))}, v, w)$$

ist eine antisymmetrische Bilinearform.

**Notation.**  $R_{ijkl} := \text{I}_u(R_{ij}(u)e_k, e_l)$

**Lemma.** Es gilt  $-R_{ijkl} = R_{jikl} = -R_{ijlk}$ .

**Satz** (Gaußgleichung). Mit  $\mathbb{I}_{jk}(u) = (\partial_j \partial_k X(u))^{N_u}$  gilt

$$R_{ijkl}(u) = \langle \mathbb{I}_{jk}(u) \mathbb{I}_{il}(u) \rangle - \langle \mathbb{I}_{ik}(u) \mathbb{I}_{jl}(u) \rangle.$$

*Bemerkung.* Im Spezialfall, dass  $X$  eine HF ist, gilt  $\mathbb{I}_{jk} = h_{jk} \nu$ . Da  $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ , folgt  $R_{ijkl} = h_{jk} h_{ie} - h_{ik} h_{jl}$ .

**Satz** (Theorema egregium (Gauß)). Für eine HF  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt

$$K(u) = \frac{\det(h(u))}{\det(g(u))} = \frac{R_{1221}(u)}{\det(g(u))}.$$

Letzter Ausdruck ist nur abh. von der 1. FF und ihren Ableitungen.

**Satz** (Codazzi-Mainardi-Gleichungen). Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  HF, dann

$$\partial_i h_{jk}(u) - \sum_{l=1}^{n-1} \Gamma_{ik}^l(u) h_{ej}(u) = \partial_j h_{ik}(u) - \sum_{l=1}^{n-1} \Gamma_{jk}^l(u) h_{ei}(u).$$

**Satz** (Hauptsatz der lokalen Flächentheorie (Bonnet)). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  einfach zusammenhängend und

$$g, h : U \rightarrow \{A \in \mathbb{R}^{m \times m} \mid A^T = A, A \text{ positiv definit} \}$$

glatt. Dann sind äquivalent:

- $\exists X : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  Hyperfläche mit  $g$  und  $h$  als 1. FF bzw. 2. FF.
- $g, h$  erfüllen die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Gleichung.

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Hyperfläche. Ein Punkt  $u \in U$  heißt **Nabelpunkt**, wenn in  $u$  alle Hauptkrümmungen gleich sind, also  $W_u = \mu I$  für ein  $\mu \in \mathbb{R}$ . Wenn alle  $u \in U$  Nabelpunkte sind, so heißt  $X$  **Nabelpunkthyperfläche**.

**Satz.** Sei  $n \geq 3$  und  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Nabelpunkt-HF in  $\mathcal{C}^3$ , dann ist  $X(U)$  Teilmenge einer Hyperebene oder einer Hypersphäre im  $\mathbb{R}^n$ .

**Def.** Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^n$ . Eine  $\mathcal{C}^2$ -Abbildung  $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **orthogonales Hyperflächensystem** (OHFS), wenn für alle  $x \in O$  und alle  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \neq k$  gilt:

$$\langle \partial_j \Phi(x), \partial_k \Phi(x) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \partial_j \Phi(x), \partial_j \Phi(x) \rangle \neq 0$$

**Notation.** Für  $t \in \mathbb{R}$  ist  $U^{j,t} := \{(x_1, \dots, x_n) \in O \mid x_j = t\}$ .

*Bemerkung.* Falls  $U^{j,t}$  offen ist in  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = t\}$ , ist

$$X^{j,t} := \Phi|_{U^{j,t}} : U^{j,t} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Hyperfläche und für alle  $x \in U^{j,t}$  gilt

$$\partial_j \Phi(x) \perp T_x X^{j,t} = \text{Spann}\{\partial_k \Phi(x) \mid k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}\}.$$

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine HF und  $c := X \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I$  Intervall und  $\alpha : I \rightarrow U$  glatt. Dann heißt  $c$  **Krümmungslinie**, wenn für alle  $c'(t)$  für alle  $t \in I$  eine Hauptkrümmungsrichtung von  $X$  ist, d. h. ein Eigenvektor von  $W_{\alpha(t)}$ .

**Satz.** Ist  $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^n$  OHFS, dann sind die Koordinatenlinien

$$h \mapsto \Phi(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j + h, t_{j+1}, \dots, t_n) \quad \text{mit } (t_1, \dots, t_n) \in O \text{ fest}$$

Krümmungslinien von  $X^{k,t_k}$  mit  $k \neq j$ .

**Def.** Eine lineare Abb.  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **konform**, wenn

$$\angle(v, w) = \angle(F(v), F(w)) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

*Bemerkung.* Jede lineare Abbildung lässt sich darstellen als

$$F(x) = A_F \cdot x \text{ mit } A_F \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und es gilt  $F$  konform  $\iff \frac{1}{\mu} A_F \in O(n)$  für ein  $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dieses  $\mu$  wird **konformer Faktor** oder Streckungsfaktor genannt.

**Def.** Seien  $O, \tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus  $f : O \rightarrow \tilde{O}$  heißt **konform**, wenn für alle  $x \in O$  die Abbildung  $D_x f$  konform ist.

**Satz.** Jede konforme Abbildung auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  ist bis auf Verknüpfung mit der komplexen Konjugation eine holomorphe reguläre Abbildung und umgekehrt.

**Def.** Eine Abbildung  $f : O \rightarrow \tilde{O}$  heißt **kugeltreu**, wenn sie offene Teilmengen von Sphären auf offene Teilmengen von Sphären abbildet. Dabei gelten Hyperebenen als Sphären mit Radius  $\infty$ .

**Satz** (Liouville). Wenn  $n \geq 3$ , dann ist jede konforme  $\mathcal{C}^3$ -Abb.  $f : O \rightarrow \tilde{O}$  kugeltreu, d. h. falls  $X : U \rightarrow O$  eine Nabelpunkt-HF ist, dann ist  $f \circ X : U \rightarrow \tilde{O}$  auch eine Nabelpunkt-HF.

**Bsp.** Konforme Abbildungen im  $\mathbb{R}^n$  sind:

- Isometrien:  $f(x) = Ax + b$ ,  $A \in O(n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$
- Zentrische Streckungen:  $f(x) = rx$ ,  $r > 0$
- Inversionen an Sphären:  $\iota : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ ,  $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ ,  $x \neq 0$

**Lemma.** Inversionen an Sphären sind kugeltreu und konform.

**Def.** Eine **Möbius-Transformation** ist eine Verkettung von Isometrien, zentrischen Streckungen und Inversionen an Sphären.

*Bemerkung.* Für  $n = 2$ ,  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  ist eine Möbius-Transformation eine Abbildung  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , sodass dieser Ausdruck definiert ist mit  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ .

**Satz.** Seien  $O, \tilde{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  und  $f : O \rightarrow \tilde{O}$  winkel- und kugeltreu. Dann ist  $f$  Einschränkung einer Möbius-Transformation.

**Korollar.** Für  $n \geq 3$  gilt: Jeder konforme  $\mathcal{C}^3$ -Diffeomorphismus  $f$  ist Einschränkung einer Möbius-Transformation.

## Minimalflächen

**Lemma.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ ,  $C = (A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Wenn jeder Spaltenvektor von  $B$  senkrecht auf allen anderen Spaltenvektoren von  $C$  steht und normiert ist, dann gilt

$$\det(C) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

**Def.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann heißt

$$\int_C f \, dA := \int_C f(u) \cdot \sqrt{\det(g_u)} \, d\mu(u) \quad \textbf{Flächeninhalt}.$$

**Proposition.** Der Flächeninhalt ist invariant unter Umparametrisierungen: Sei  $X = \tilde{X} \circ \phi$ ,  $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$  ein Diffeomorphismus,  $C \subset U$  kompakt, dann gilt

$$\int_C \sqrt{\det(g_u)} \, d\mu(u) = \int_{\phi(C)} \sqrt{\det(\tilde{g}_u)} \, d\mu(\tilde{u}).$$

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  immergierte  $\mathcal{C}^2$ -Fläche,  $C \subset U \subset \mathbb{R}^m$  ein Kompaktum mit nichtleerem Inneren, dessen Rand eine Nullmenge ist. Dann ist eine Variation von  $X$  auf  $C$  eine Abbildung

$$(-\epsilon, \epsilon) \times U \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}^n, \quad (x, u) \mapsto X^s(u) \quad \text{mit}$$

•  $X^s : U \rightarrow \mathbb{R}^n$   $\mathcal{C}^2$ -Immersion, •  $X^0 = X$ , •  $X^s|_{U \setminus C} = X|_{U \setminus C}$ .

**Notation.** •  $\mathcal{A}(s) := \mathcal{A}(X^s(C))$  •  $\delta := \frac{\delta}{\delta s}|_{s=0}$

**Lemma.** Für  $\epsilon > 0$  klein genug kann die Variation so umparametrisiert werden, dass das Variationsvektorfeld normal an  $X$  ist, d. h.

$$\xi(u) := \delta X^s(u) \in N_u X \quad \text{für alle } u \in U.$$

**Def.** Eine kompakte  $\mathcal{C}^2$ -Variation  $X^s$  einer Immersion  $X$  heißt **normal**, wenn  $\delta X^s$  ein Normalenvektorfeld längs  $X$  ist.

**Def.** In dieser Situation schreiben wir mit der 2. FF II von  $X$

$$h^\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, \quad u \mapsto (\langle \Pi(e_j, e_k), \xi \rangle)_{jk}.$$

**Lemma.** Sei  $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_m(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{m \times m}$  diff'bar, dann

$$(\det(A))' = \det(A(t)) \cdot \text{spur}(A^{-1}(t) \cdot A'(t)).$$

**Satz** (1. Variation). Es gilt  $\delta \mathcal{A}(s) = -\int_C \text{spur}(g^{-1} h^\xi) d\mathcal{A}$ .

**Def.** Eine Fläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Minimalfläche**, wenn für jedes Kompaktum  $C \subset U$  mit nichtleerem Inneren und Rand von Maß Null und für jede normale Variation  $X^s$  von  $X$  auf  $C$  gilt:

$$\delta \mathcal{A}(X^s|_C) = 0.$$

**Satz.** Eine Fläche  $X$  ist genau dann eine Minimalfläche, wenn

$$\text{spur}(g^{-1} h^\mu) = 0$$

für jedes Normalenvektorfeld  $\mu$  an  $X$ .

*Bemerkung.* Sei  $\mu$  ein Normalenvektorfeld an eine Hyperfläche  $X$ . Dann gibt es eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mu = f \cdot \nu$ , wobei  $\nu$  die Gaußabbildung von  $X$  ist. Dann ist  $h^\mu = f \cdot h$  und  $g^{-1} h^\mu = f \cdot g^{-1} \cdot h = f \cdot w$ , wobei  $w$  die Weingartenabbildung ist.

**Satz** (1. Variation für HF). Ist  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine HF und  $X^s : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine normale Variation von  $X$  auf einem Kompaktum  $C \subset U$  mit nichtleerem Inneren und Rand vom Maß Null und  $\xi = \delta X^s = f \nu$  mit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\delta \mathcal{A}(X^s|_C) = -\int_C f(n-1)H d\mathcal{A}.$$

**Satz.** Eine Hyperfläche  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann minimal, wenn

$$H \equiv \frac{\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1}}{n-1} \equiv \frac{\text{spur}(w)}{n-1} \equiv 0.$$

**Satz.** Für eine minimale immergierte HF  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt: Um jeden Punkt  $u_0 \in U$  gibt es ein Kompaktum  $C \subset U$  mit nicht leerem Inneren, dessen Rand eine Nullmenge ist und welches  $u_0 \in C^\circ$  erfüllt, sodass für jede immergierte HF  $\tilde{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $X|_{U \setminus C} = \tilde{X}|_{U \setminus C}$  erfüllt gilt:  $\mathcal{A}(X(C)) \leq \mathcal{A}(\tilde{X}(C))$ . Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $\tilde{X}$  eine Umparametrisierung von  $X$  ist.

## Flächen konstanter mittlerer Krümmung

**Situation.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  immergierte  $\mathcal{C}^3$ -Hyperfläche und  $U_0 \subset U$  offen, sodass  $X|_{U_0}$  ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Sei  $C \subset U_0$  ein Kompaktum mit glattem Rand, das Abschluss einer offenen Menge  $C^\circ$  ist. Sei außerdem  $D \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, sodass  $X(C) \subset \partial D$ . Wir nennen  $D$  **Dose** mit **Deckel**  $X(C)$  und **Boden**  $\partial D \setminus X(C)$ . Wir betrachten eine  $\mathcal{C}^2$ -Variation  $(-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(s, u) \mapsto X^s(u)$  auf  $C$  mit  $X^0 = X$ , sodass gilt:

•  $X^s|_{U \setminus C} = X|_{U \setminus C}$  •  $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon) : X^s|_{U_0}$  ist eine Einbettung

Dann ist  $X^s(C)$  Flächenstück einer Dose  $D^s$ , wobei der Boden von  $D^s$  mit dem von  $D$  übereinstimmt, d. h.  $\partial D^s \setminus X^s(C) = \partial D \setminus X(C)$ .

**Def.**  $X^s$  heißt **Variation mit konstantem Volumen**, wenn

$$\text{Vol}(D^s) = \text{Vol}(D) \quad \text{für alle } s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

**Def.** Die Hyperfläche  $X$  heißt **minimal bei konstantem Volumen**, wenn für alle Variationen von  $X$  auf derartigen Kompakta  $C \subset U$  mit konstantem Volumen gilt:  $\delta \mathcal{A}(X^s|_C) = 0$ .

**Proposition.** Sei  $X^s = X + \tau_s \nu$  eine normale Variation von  $X$  auf  $C$ . Sei  $V^s := \text{Vol}(D^s)$ , dann gilt

$$\delta V^s = \int_C \delta \tau_s d\mathcal{A} = \int_C \langle \delta X^s(u), \nu(u) \rangle \sqrt{\det(g_u)} du.$$

**Notation.**  $\mathcal{C}_C^0(U, \mathbb{R}) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{stetig mit supp } f \text{ kompakt}\}$

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine HF. Dann ist folgende Abbildung ein Skalarprodukt, genannt  **$L^2$ -Skalarprodukt bzgl. dA**:

$$\mathcal{C}_C^0(U, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}_C^0(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f_1, f_2) \mapsto \int_C f_1 \cdot f_2 d\mathcal{A} =: \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2}$$

**Notation.** •  $\delta V^s := \int_C \langle X^s, \nu \rangle \sqrt{\det(g_u)} du = \langle f, 1 \rangle_{L^1}$ ,  $f := \langle X^s, \nu \rangle$

•  $\delta \mathcal{A}^s := \delta(\mathcal{A}(X^s(C))) = -\int_C f \cdot (n-1) \cdot H d\mathcal{A} = -\langle f, (n-1)H \rangle_{L^1}$

**Lemma.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{C}^2$ -Abbildung mit  $\text{supp}(f) \subset C$ . Wenn  $\int_C f d\mathcal{A} = 0$ , dann gibt es eine normale Variation  $X^s = X + \tau_s \nu$  mit konstantem Volumen, sodass  $f = \delta \tau_s = \langle \delta X^s, \nu \rangle$ .

**Proposition.** Es sind äquivalent:

- Es gilt  $\delta \mathcal{A}^s = 0$  für jede normale Variation  $X^s$  von  $X$  auf  $C$  mit konstantem Volumen.
- Es gibt  $\lambda \in \mathbb{R}$ , genannt **Lagrange-Multiplikator**, sodass  $\delta(\mathcal{A}^s + \lambda \nu^s) = 0$  für alle normalen Variationen.

**Def.** Eine Fläche heißt **CMC-Fläche** (constant mean curvature), wenn die mittlere Krümmung  $H$  konstant ist.

**Satz.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $\mathcal{C}^3$ -Hyperfläche mit  $U \Subset \mathbb{R}^{n-1}$  zusammenhängend, dann sind äquivalent:

- $X$  ist minimal bei konst. Volumen.
- $X$  ist eine CMC-Fläche.

## Minimalflächen im $\mathbb{R}^3$

**Situation.** Sei  $U \Subset \mathbb{C}$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion. Identifiziere  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  mittels  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + ib$ .

**Def.**  $F$  heißt in  $z_0$  **holomorph** (komplex diff'bar), wenn

$$F'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert.}$$

**Notation** (Wirtinger). •  $\partial_z F = \frac{1}{2}(\partial_1 F - i\partial_2 F)$

$$\bullet \partial_{\bar{z}} F = \frac{1}{2}(\partial_1 F + i\partial_2 F)$$

**Lemma.** Die Funktion  $F$  ist genau dann holomorph, wenn  $\partial_{\bar{z}} F = 0$ . In diesem Fall gilt:  $F' = \partial_z F$ .

**Notation.**  $\Delta F := \partial_1 \partial_1 F + \partial_2 \partial_2 F$

**Lemma.** Sei  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $\mathcal{C}^2$ -Funktion, dann gilt

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} F = \frac{1}{4} \Delta F = \frac{1}{4} (\partial_1 \partial_1 F + \partial_2 \partial_2 F).$$

**Def.** Folgende Abbildung ist symmetrisch und über  $\mathbb{C}$  bilinear:

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto \langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$$

*Bemerkung.* Die Abbildung ist nicht positiv definit, nicht hermitesch und damit auch kein Skalarprodukt.

**Def.** Ein Vektor  $z \in \mathbb{C}^n$  heißt **isotrop**, wenn  $\langle z, z \rangle = 0$ .

**Lemma.** Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$  mit  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

$$z \text{ isotrop} \iff \|x\| = \|y\| \text{ und } x \perp y$$

**Def.** Eine  $\mathcal{C}^2$ -HF  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt **konform parametrisiert**, wenn es eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , genannt **konformer Faktor**, gibt, sodass  $g = \lambda^2 I_2$ , wobei  $g$  die 1. FF von  $X$  ist.

*Bemerkung.* Durch Umparametrisierung kann jede hinreichend reguläre Hyperfläche konform parametrisiert werden.

**Lemma.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$  eine  $\mathcal{C}^2$ -Hyperfläche. Dann gilt

$$X \text{ ist konform parametrisiert} \iff \langle \partial_z X, \partial_z X \rangle \equiv 0.$$

Dann gilt  $\lambda = \sqrt{2 \langle \partial_z X, \partial_z X \rangle}$ .

**Lemma.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$  eine konform param.  $\mathcal{C}^2$ -HF. Dann:

$$\Delta X = 2\lambda^2 H \nu.$$

**Lemma.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Hyperfläche. Dann sind äquivalent:

- $X$  ist eine konform parametrisierte Minimalfläche.
- $\partial_z X : U \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  ist holomorph und isotrop, also  $\partial_{\bar{z}}(\partial_z X) = 0$  und  $\langle \partial_z X, \partial_z X \rangle = 0$ .

**Def.** Sei  $U \Subset \mathbb{C}$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Eine holomorphe Fkt.  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Stammfunktion** (STF) von  $f$ , wenn  $F' = f$ .

*Bemerkung.* Sei  $U$  zusammenhängend und  $F_1, F_2 : U \rightarrow \mathbb{C}$  zwei STF'n von  $f$ , dann ist  $F_1 - F_2 = \text{const.}$

**Def.** Sei  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Eine holomorphe Funktion  $F = (F_1, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  heißt **Stammfunktion** von  $f$ , wenn  $F'_j = f_j$  für  $j = 1, \dots, n$ .

**Notation.** Wir schreiben  $\int f$  für eine STF von  $f$ .

**Lemma.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine konform parametrisierte HF, dann:

$$X - 2\Re(\int \partial_z X) = \text{const.}$$

*Bemerkung.* Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  konform parametrisierte Minimalfläche, dann gilt  $X = 2\Re(\int \partial_z X)$  bis auf Translation.

**Satz.** Es gibt (bis auf Translation) eine eindeutige Beziehung zwischen der Menge der konform parametrisierten Hyperflächen  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$  und der Menge der holomorph isotropen Abbildungen  $Y \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  gegeben durch (bis auf Translation)

$$Y = 2\partial_z X, \quad X = \Re \int Y$$

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$  eine konform parametrisierte minimale  $\mathcal{C}^2$ -HF und  $Y := 2\partial_z X : U \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  (isotrop, holomorph). Sei  $\Theta \in \mathbb{R}$ , dann ist auch

$$Y_\Theta : U \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \quad u \mapsto \exp(i\Theta)Y(u)$$

holomorph und isotrop. Wir erhalten dann eine  $2\pi$ -periodische Schar von Minimalflächen durch

$$X_\Theta = \Re(\int Y_\Theta) = \Re(\exp(i\Theta)\int Y) : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \Theta \in \mathbb{R}.$$

**Lemma.** Jede Hyperfläche  $X_\Theta$  für  $\Theta \in \mathbb{R}$  in der assoziierten Familie von  $X$  ist isometrisch zu  $X$ , d. h.  $g_\Theta = g$ .

**Beobachtung.**  $X_{\Theta+\pi} = -X_\Theta$

**Def.** Sei  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine konform param. Minimalfläche, dann ist

$$X^* := X \frac{\pi}{2} = \Re(i \int Y) = -\Im(\int Y)$$

die zu  $X$  **konjugierte Minimalfläche**.

**Beobachtung.** Es gilt  $X_\Theta = \cos(\Theta)X + \sin(\Theta)X^*$ .

**Satz** (Weierstraß-Darstellung). Eine konform param. minimale  $\mathcal{C}^2$ -HF  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  hat (bis auf Translation) die Gestalt

$$X = \Re(\int Y) \quad \text{mit} \quad Y = h \cdot \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{g} - g\right), \frac{i}{2}\left(\frac{1}{g} + g\right), 1\right),$$

wobei  $h : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $g : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  meromorph sind, sodass die Komponenten von  $Y$  keine gemeinsamen Nullstellen haben und keine Singularitäten haben.

**Beobachtung.** Ist  $X$  durch  $g$  und  $h$  gegeben, dann ist die assoziierte Familie  $X_\Theta$  durch  $h_\Theta = \exp(i\Theta)h$  und  $g_\Theta = g$  definiert.

**Satz.** Sei  $U \Subset \mathbb{C}$  zusammenhängend,  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine konform param.  $\mathcal{C}^2$ -HF, die durch  $h$  und  $g$  gegeben ist. Dann gilt  $\nu = \Phi \circ g$  für die Gaußabb.  $\nu$  von  $X$  mit der stereographischen Projektion

$$\Phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \quad z \mapsto \frac{1}{|z|^2+1}(2z, |z|^2+1).$$

**Korollar.** Sei  $X$  eine zusammenhängende konform param. minimale  $\mathcal{C}^2$ -HF im  $\mathbb{R}^3$  mit Gaußabb.  $\nu$ , dann gilt für die Gaußabbildung  $\nu_\Theta$  der assoziierten Familie  $X_\Theta$

$$\nu_\Theta = \nu.$$