

Zusammenfassung Kommutative Algebra

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Ringe und Ideale

Def. Ein Ring ist ein Tupel $(A, +, \cdot, 0, 1)$ mit einer Menge A , Operationen $+, \cdot : A \times A \rightarrow A$ und Elementen $0, 1 \in A$, sodass

- $(A, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist,
- $(A, \cdot, 1)$ ein Monoid ist und
- die Multiplikation distributiv über die Addition ist, d. h.

$$x(y + z) = xy + xz \text{ und } (y + z)x = yx + zx \quad \forall x, y, z \in A.$$

Bspe. • \mathbb{Z} , • $K[x_1, \dots, x_n]$, • **Nullring**: der Ring mit $0 = 1$

Def. Sei $(A, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $B \subseteq A$ heißt **Unterring**, falls $0, 1 \in B$ und B unter $+$ und \cdot abgeschlossen ist.

Bspe. • $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, • $K \subset K[X]$

Def. Ein **Ringhomomorphismus** $\phi : A \rightarrow B$ ist eine Abbildung, welche sowohl ein Gruppenhomom. $(A, +_A, 0_A) \rightarrow (B, +_B, 0_B)$ als auch ein Ringhomomorphismus $(A, \cdot_A, 1_A) \rightarrow (B, \cdot_B, 1_B)$ ist.

Bem. Ringe und Ringhomomorphismen bilden eine Kategorie **Ring**.

Lem. Ein Ringhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus (in dieser Kategorie), wenn er bijektiv ist.

Konvention. Seien A im Folgenden Ringe und $\phi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus.

Def. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt (beidseitiges) **Ideal** von A , falls

- $\mathfrak{a} \subseteq A$ eine Untergruppe ist und
- für alle $a \in A$ und $x \in \mathfrak{a}$ gilt: $ax, xa \in \mathfrak{a}$.

Lem. Der Schnitt von (beliebig vielen) Idealen ist selbst ein Ideal.

Def. Sei $M \subseteq A$ eine Teilmenge. Das von M **erzeugte Ideal** ist der Schnitt aller Ideale von A , die M umfassen.

Bem. Falls A kommutativ ist, so gilt

$$\text{von } M \text{ erzeugtes Ideal} = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in A, x_k \in M \right\}.$$

Notation. $(x_1, \dots, x_n) \subseteq A$ ist das von $\{x_1, \dots, x_n\}$ erzeugte Ideal.

Bem. • Das **Nullideal** (0) ist das kleinste Ideal, denn $(0) = \{0\}$.
• Das **Einsideal** (1) ist das größte Ideal, denn $(1) = A$.

Prop. • Sei $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal. Dann ist auch $\phi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$ ein Ideal.
• Sei $A' \subseteq A$ ein Unterring. Dann ist auch $\phi(A') \subseteq B$ ein Unterring.

Def. Das Ideal $\ker \phi := \phi^{-1}((0))$ heißt **Kern** von ϕ .

Bem. ϕ ist injektiv $\iff \ker \phi = 0$

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ surjektiv, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist auch das Bild $\phi(\mathfrak{a}) \subseteq B$ ein Ideal.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es einen Ring A/\mathfrak{a} und einen Ringhomom. $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ mit folgender universeller Eigenschaft:
Für jeden Ring B und Ringhomom. $\psi : A \rightarrow B$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \ker \psi$ gibt es genau einen Ringhomom. $\tilde{\psi} : A/\mathfrak{a} \rightarrow B$ mit $\psi = \tilde{\psi} \circ \pi$.

Konstr. Sei durch $x \sim y : \iff x - y \in \mathfrak{a}$ eine Äq'-relation \sim auf A definiert. Setze $A/\mathfrak{a} := A/\sim$ und $\pi(x) := [x]$. Die Addition und Multiplikation auf A ind. die Addition bzw. Multiplikation auf A/\mathfrak{a} .

Def. A/\mathfrak{a} heißt **Quotientenring** von A nach \mathfrak{a} .

Notation. Man lässt häufig die Äquivalenzklammern weg, man schreibt also „ $x = y$ in A/\mathfrak{a} “ anstatt „ $[x] = [y]$ “.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Folgende Korresp. ist bij. und monoton:

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{Ideale } \mathfrak{b} \subseteq A \text{ mit } \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a} \} & \leftrightarrow & \{ \text{Ideale } \mathfrak{c} \subseteq A/\mathfrak{a} \} \\ \mathfrak{b} & \mapsto & \pi(\mathfrak{b}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{c}) & \leftarrow & \mathfrak{c} \end{array}$$

Prop (Homomorphiesatz). Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Ringhomom. Dann ist $\tilde{\phi} : A/\ker(\phi) \rightarrow \text{im}(\phi)$, $[x] \mapsto \phi(x)$ ein Ringisomorphismus.

Im Folgenden seien alle Ringe **kommutativ**, d. h. $xy = yx$ f. a. x, y .

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in A$ heißt

- **regulär**, falls $\forall y \in A : xy = 0 \implies y = 0$.
- **Nullteiler**, falls es nicht regulär ist, d. h. wenn ein $y \in A \setminus \{0\}$ mit $xy = 0$ existiert.

Def. Ein Ring A heißt **Integritätsbereich**, wenn $0 \in A$ der einzige Nullteiler in A ist.

Achtung. Die Null im Nullring ist regulär!

Bem. Ein Ring A ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn

$$0 \neq 1 \text{ in } A \quad \text{und} \quad \forall x, y \in A : xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0.$$

Bsob. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Ist B ein Integritätsbereich, so auch A .

Def. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **Hauptideal**, falls $\mathfrak{a} = (a)$ für ein $a \in A$. Ein Ring A heißt **Hauptidealbereich**, falls jedes Ideal in A ein Hauptideal ist.

Bspe. • \mathbb{Z} , • $K[x]$

Gegenbsp. • $K[x_1, \dots, x_n]$ für $n \geq 2$

Def. Ein Element $x \in A$ heißt **nilpotent**, falls $\exists n \geq 0 : x^n = 0$.

Bsob. Ist A ein Integritätsbereich, so ist $0 \in A$ das einzige nilpotente Element in A .

Def. Sei A ein Ring, nicht notwendigerweise kommutativ. Ein Element $x \in A$ heißt **Einheit**, falls ein $y \in A$ mit $xy = yx = 1$ existiert. $A^\times := \{ \text{Einheiten in } A \}$ heißt **Einheitengruppe**. Der Ring A heißt **Schiefkörper**, falls 0 die einzige Nicht-Einheit ist. Falls zusätzlich A kommutativ ist, so heißt A ein **Körper**.

Bsob. • $x \in A$ ist eine Einheit $\iff (x) = (1) \iff A/(x) = 0$
• Einheiten sind regulär.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring. Dann sind äquivalent:

- A ist ein Körper.
- A besitzt genau zwei Ideale (nämlich (0) und (1)).
- Ein Ringhomomorphismus $A \rightarrow B$ ist genau dann injektiv, wenn B nicht der Nullring ist.

Def. • Ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ heißt **Primideal**, falls $1 \notin \mathfrak{p}$ und $\forall a, b \in A : ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p} \vee b \in \mathfrak{p}$.

• Ein Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ heißt **maximal**, falls für jedes Ideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq A$ entweder $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} = A$ (nicht beides!) gilt.

Bspe. • Jedes Ideal in \mathbb{Z} hat die Form (m) mit $m \in \mathbb{N}$. Das Ideal (m) ist genau dann prim, wenn $m = 0$ oder m eine Primzahl ist.
• Sei $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ ein irred. Polynom. Dann ist (f) prim.

Lem. $\mathfrak{p} \subseteq A$ ist prim $\iff A/\mathfrak{p}$ ist ein Integritätsbereich
 $\mathfrak{m} \subseteq A$ ist maximal $\iff A/\mathfrak{m}$ ist ein Körper

Kor. Maximale Ideale sind prim.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Folgende Korresp. ist bij. und monoton:

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{Primideale } \mathfrak{p} \subseteq A \text{ mit } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \} & \leftrightarrow & \{ \text{Primideale } \mathfrak{q} \subseteq A/\mathfrak{a} \} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \pi(\mathfrak{p}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{q}) & \leftarrow & \mathfrak{q} \end{array}$$

Genauso bekommt man eine bijektive, monotone Korrespondenz

$$\{ \text{max. Ideale } \mathfrak{m} \subseteq A \text{ mit } \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a} \} \leftrightarrow \{ \text{max. Ideale } \mathfrak{n} \subseteq A/\mathfrak{a} \}$$

Prop. Ein Ring besitzt genau dann ein maximales Ideal, wenn er nicht der Nullring ist.

Kor. • Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es genau dann ein maximales Ideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} \neq (1)$.

• Ein Element $x \in A$ liegt genau dann in einem maximalen Ideal von A , wenn x keine Einheit ist.

Def. Ein **lokaler Ring** ist ein komm. Ring A mit genau einem max. Ideal \mathfrak{m} . Der Körper $F := A/\mathfrak{m}$ heißt **Restklassenkörper** von A .

Notation. Man schreibt „Sei (A, \mathfrak{m}, F) ein lokaler Ring.“

Def. Ein **halblokaler Ring** ist ein kommutativer Ring mit nur endlich vielen maximalen Idealen.

Lem. Sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein Ideal mit $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$. Dann ist (A, \mathfrak{m}) ein lokaler Ring.

Prop. Sei $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal, sodass $1 + x$ für alle $x \in \mathfrak{m}$ eine Einheit ist. Dann ist $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$, also (A, \mathfrak{m}) ein lokaler Ring.

Prop. Die Menge $\mathfrak{n} := \{ \text{nilpotente Elemente} \} \subseteq A$ ist ein Ideal, das sogenannte **Nilradikal**.

Bem. Der Ring A/\mathfrak{n} hat außer 0 keine nilpotenten Elemente.

Prop. Das Nilradikal eines kommutativen Ringes ist der Schnitt aller seiner Primideale.

Def. Das **Jacobsonsche Ideal** $\mathfrak{j} \subseteq A$ ist der Schnitt aller maximalen Ideale von A .

Prop. Ein Element $x \in A$ liegt genau dann im Jacobsonschen Ideal \mathfrak{j} , wenn $1 - xy$ für alle $y \in A$ eine Einheit ist.

Def. Die **Summe von Idealen** $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ von A ist das Ideal

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i := \{ \sum_{k=1}^n x_k \mid k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathfrak{a}_{i_k}, i_k \in I \}.$$

Bem. $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ ist das kleinste Ideal, das alle \mathfrak{a}_i umfasst.

Beob. $(x_1) + \dots + (x_n) = (x_1, \dots, x_n)$

Bem. Ideale eines Ringes A bilden mit Schnitt und Summe einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusionsordnung.

Def. Das **Produkt zweier Ideale** $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} := \text{von } \{ab \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\} \text{ erzeugtes Ideal.}$$

Beob. $\bullet \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \quad \bullet (x_1) \cdot \dots \cdot (x_n) = (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)$

Bsp. In $A = \mathbb{Z}$ gilt für $m, n \in \mathbb{N}$
 $\bullet (m) + (n) = (m, n) = (\text{ggT}(m, n)), \quad \bullet (m) \cap (n) = (\text{kgV}(m, n)).$

Beob. \bullet Summe, Schnitt und Produkt von Idealen sind assoziativ.
 \bullet Summe und Schnitt sind kommutativ. Das Produkt von Idealen ist kommutativ, wenn der Ring kommutativ ist.
 \bullet Distributivgesetz: $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$
 \bullet Modularitätsgesetz: Ist $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{c}$, so folgt

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}).$$

Def. Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ heißen **koprim**, falls $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$.

Bsp. In $A = \mathbb{Z}$ gilt: $(m), (n)$ sind koprim $\iff \text{ggT}(m, n) = 1$

Prop. Seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \subseteq A$ paarweise kopprime Ideale. Dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i.$$

Def. Das **direkte Produkt** einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Ringen ist der Ring $\prod_{i \in I} A_i := \{(a_i \in A_i)_{i \in I}\}$ mit kmpnntnwsr Verknüpfung.

Bem. Das direkte Produkt ist das kategorienth. Produkt in **Ring**.

Prop. Seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale. Dann ist

$$\phi : A \rightarrow \prod_{i=1}^n (A/\mathfrak{a}_i), \quad x \mapsto ([x], \dots, [x])$$

genau dann surjektiv, wenn die Ideale \mathfrak{a}_i paarweise koprim sind.

Bem. Der Ringhomomor. ϕ ist genau dann injektiv, wenn $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = 0$.

Prop. Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \subseteq A$ Primideale und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal.

Gilt $\mathfrak{a} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, so gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$.

Prop. Seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale und $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Primideal.

Gilt $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$, so gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_j$.

Def. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ zwei Ideale. Der **Idealquotient** von \mathfrak{a} nach \mathfrak{b} ist das Ideal $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) := \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$.

Notation. $\bullet (x : \mathfrak{b}) := ((x) : \mathfrak{b}), \quad \bullet (\mathfrak{a} : y) := (\mathfrak{a} : (y))$

Def. Der **Annulator** eines Ideals $\mathfrak{b} \subseteq A$ ist $\text{ann}(\mathfrak{b}) := (0 : \mathfrak{b})$.

Lem. $\bullet \mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \quad \bullet (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \quad \bullet ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c})$
 $\bullet (\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) = \bigcap_{i \in I} (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) \quad \bullet (\mathfrak{a} : \sum_{i \in I} \mathfrak{b}) = \bigcap_{i \in I} (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$

Def. Das **Wurzelideal** eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist das Ideal

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Bem. Das Nilradikal ist $\sqrt{(0)}$, das Wurzelideal des Nullideals.
Es gilt $\sqrt{\mathfrak{a}} = \pi^{-1}(\sqrt{(0)})$ mit $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}, \quad x \mapsto [x]$.

Lem. $\bullet \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \mathfrak{a} \quad \bullet \sqrt{\mathfrak{a}^n} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ für $n \geq 1 \quad \bullet \sqrt{\mathfrak{a}} = (1) \iff \mathfrak{a} = (1)$
 $\bullet \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \quad \bullet \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}} \quad \bullet \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$

Def. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **Wurzelideal**, falls $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Prop. Das Wurzelideal von $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ist der Schnitt aller Primideale von A , die \mathfrak{a} enthalten.

Prop. $\{ \text{Nullteiler von } A \} = \bigcup_{x \in A \setminus \{0\}} \sqrt{\text{ann}(x)}$

Lem. $\sqrt{\mathfrak{a}}$ und $\sqrt{\mathfrak{b}}$ koprim $\implies \mathfrak{a}$ und \mathfrak{b} koprim

Def. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.
Die **Kontraktion** von $\mathfrak{b} \subseteq B$ (bzgl. ϕ) ist das Ideal $A \cap \mathfrak{b} := \phi^{-1}(\mathfrak{b})$.

Bem. Es wird also ϕ in der Notation unterdrückt. Falls ϕ die Inklusion eines Unterrings ist, so ist $A \cap \mathfrak{b}$ wörtlich zu verstehen.

Beob. $A \cap \mathfrak{b} = \ker(A \rightarrow B \rightarrow B/\mathfrak{b})$

Lem. Ist $\mathfrak{q} \subseteq B$ ein Primideal, so auch $A \cap \mathfrak{q} \subseteq A$.

Achtung. Die Kontraktion max. Ideale ist i. A. nicht maximal!

Def. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.
Die **Erweiterung** von $\mathfrak{a} \subseteq A$ (bzgl. ϕ) ist das Ideal $B\mathfrak{a} := (\phi(\mathfrak{a}))$, das von $\phi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal.

Bem. Ist ϕ die Inklusion eines Unterrings, so ist $B\mathfrak{a}$ tatsächlich die Menge der B -Linearkombinationen von Elementen in \mathfrak{a} .

Bem. Die Erweiterung eines Primideals ist i. A. nicht mehr prim.

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.
Die Erweiterung und Kontraktion von Idealen (bzgl. ϕ) bilden eine Galois-Verbindung, d. h. für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ und $\mathfrak{b} \subseteq B$ gilt

$$B\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \iff \mathfrak{a} \subseteq A \cap \mathfrak{b}.$$

Äquivalent dazu sind Erw. und Kontraktion monoton und es gelten

$$\mathfrak{a} \subseteq A \cap (B\mathfrak{a}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} \supseteq B(A \cap \mathfrak{b}).$$

Außerdem folgt aus den Eigenschaften einer Galois-Verbindung, dass

$$B\mathfrak{a} = B(A \cap (B\mathfrak{a})) \quad \text{und} \quad A \cap \mathfrak{b} = A \cap (B(A \cap \mathfrak{b})).$$

Damit induzieren Erweiterung und Kontraktion eine bijektive ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den kontrahierten Idealen von A und den erweiterten Idealen von B .

Bem. Die Erweiterung ist ein Homomorphismus komm. Ringe.

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.
 $\bullet B(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = B\mathfrak{a} + B\mathfrak{b}$
 $\bullet B(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subseteq B\mathfrak{a}_1 \cap B\mathfrak{a}_2$
 $\bullet B(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) = (B\mathfrak{a}_1)(B\mathfrak{a}_2)$
 $\bullet B(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \subseteq (B\mathfrak{a} : B\mathfrak{b})$

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.

Def. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.
Die **Erweiterung** von $\mathfrak{a} \subseteq A$ (bzgl. ϕ) ist das Ideal $B\mathfrak{a} := (\phi(\mathfrak{a}))$, das von $\phi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal.

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.
 $\bullet B(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = B\mathfrak{a} + B\mathfrak{b}$
 $\bullet B(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subseteq B\mathfrak{a}_1 \cap B\mathfrak{a}_2$
 $\bullet B(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) = (B\mathfrak{a}_1)(B\mathfrak{a}_2)$
 $\bullet B(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \subseteq (B\mathfrak{a} : B\mathfrak{b})$

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.
 $\bullet B(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = B\mathfrak{a} + B\mathfrak{b}$
 $\bullet B(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subseteq B\mathfrak{a}_1 \cap B\mathfrak{a}_2$
 $\bullet B(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) = (B\mathfrak{a}_1)(B\mathfrak{a}_2)$
 $\bullet B(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \subseteq (B\mathfrak{a} : B\mathfrak{b})$

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.
Die **Erweiterung** von $\mathfrak{a} \subseteq A$ (bzgl. ϕ) ist das Ideal $B\mathfrak{a} := (\phi(\mathfrak{a}))$, das von $\phi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal.

Bem. Es wird also ϕ in der Notation unterdrückt. Falls ϕ die Inklusion eines Unterrings ist, so ist $A \cap \mathfrak{b}$ wörtlich zu verstehen.

Beob. $A \cap \mathfrak{b} = \ker(A \rightarrow B \rightarrow B/\mathfrak{b})$

Lem. Ist $\mathfrak{q} \subseteq B$ ein Primideal, so auch $A \cap \mathfrak{q} \subseteq A$.

Achtung. Die Kontraktion max. Ideale ist i. A. nicht maximal!

Def. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.
Die **Erweiterung** von $\mathfrak{a} \subseteq A$ (bzgl. ϕ) ist das Ideal $B\mathfrak{a} := (\phi(\mathfrak{a}))$, das von $\phi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal.

Bem. Ist ϕ die Inklusion eines Unterrings, so ist $B\mathfrak{a}$ tatsächlich die Menge der B -Linearkombinationen von Elementen in \mathfrak{a} .

Bem. Die Erweiterung eines Primideals ist i. A. nicht mehr prim.

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus komm. Ringe.

Moduln

Def. Sei A ein Ring. Ein **A-(Links-)Modul** ist eine abelsche Gruppe $(M, +, 0)$ zusammen mit einer Abb. $\cdot : A \times M \rightarrow M$, sodass

- die Multiplikation eine Operation von $(A, \cdot, 1)$ auf M ist, d. h. $(ab)x = a(bx)$ und $1 \cdot x = x$ für alle $a, b \in A$ und $x \in M$.
- die Multiplikation distributiv über die Addition ist, d. h. $a(x + y) = ax + ay$ und $(a + b)x = ax + bx$ f. a. $a, b \in A, x, y \in M$.

Achtung. Es heißt *der* Modul, nicht *das* Modul!

Bspe. • Der Ring A ist selbst ein A -Modul.

- Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist (durch Einschränkung der Multiplikation) ein A -Modul.
- Ein K -Modul (K ein Körper) ist dasselbe wie ein K -VR.
- Ein \mathbb{Z} -Modul ist dasselbe wie eine abelsche Gruppe.
- Ein $K[x]$ -Modul ist dasselbe wie ein K -Vektorraum V zusammen mit einem Endomorphismus $V \rightarrow V$.
- Sei G eine endliche Gruppe und

$$A := K[G] := \left\{ \sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid g \in G, a_g \in K \right\}$$

die **Gruppenalgebra** von G über K . Ein A -Modul ist dasselbe wie ein K -VR V mit einer linearen Darstellung $G \rightarrow \text{End}_K(V)$.

Def. Ein A -Modulhomomorphismus ist eine Abbildung $\phi : M \rightarrow N$ zwischen A -Moduln M und N , welche ein Gruppenhomomorphismus $(M, +_M, 0_M) \rightarrow (N, +_N, 0_N)$ und verträglich mit der Wirkung des multiplikativen Monoids von M und N ist, d. h. $\phi(ax) = a\phi(x)$ für alle $a \in A$ und $x \in M$.

Bem. A -Moduln und A -Modulhomom. bilden eine Kat. **A -Mod.**

Lem. Ein A -Modulhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus (in dieser Kategorie), wenn er bijektiv ist.

Def. Sei M ein A -Modul. Eine Teilmenge $M' \subseteq M$ heißt **Untermodul** von M , falls

- M' eine Untergruppe von $(M, +, 0)$ ist und
- M' abgeschlossen unter Multiplikation mit Elementen aus A ist, d. h. $ax \in M'$ für alle $a \in A$ und $x \in M'$.

Bsp. Sei A kommutativ. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist genau dann ein Ideal von A , wenn \mathfrak{a} ein Untermodul von A ist.

Def. Sei $\phi : M \rightarrow N$ eine A -Modulhomomorphismus. Der **Kern** v. ϕ ist der Untermodul $\ker \phi := \{x \in M \mid \phi(x) = 0\} \subseteq M$. Das **Bild** von ϕ ist der Untermodul $\text{im } \phi := \phi(M) \subseteq N$.

Prop. Sei M ein A -Modul und $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Dann gibt es ein A -Modul M/M' und einen Ringhomom. $\pi : M \rightarrow M/M'$ mit folgender universeller Eigenschaft:

Für jeden A -Modul N und A -Modulhomom. $\psi : M \rightarrow N$ mit $M' \subseteq \ker \psi$ gibt es genau einen A -Modulhomom. $\tilde{\psi} : M/M' \rightarrow N$ mit $\psi = \tilde{\psi} \circ \pi$.

Konstr. $M/M' := M/\sim$ mit $x \sim y : \iff x - y \in M'$

Def. Der Modul M/M' heißt **Quotientenmodul** von M nach M' .

Prop. Sei M ein A -Modul und $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Folgende Korrespondenz ist bijektiv und monoton:

$$\begin{aligned} \{ \text{Untermoduln } M' \subseteq N \subseteq M \} &\leftrightarrow \{ \text{Untermoduln } \overline{N} \subseteq M/M' \} \\ N &\mapsto \pi(N) \\ \pi^{-1}(\overline{N}) &\leftarrow \overline{N} \end{aligned}$$

Def. Der **Kokern** eines A -Modulhomomorphismus $\phi : M \rightarrow N$ ist

$$\text{coker } \phi := N / \text{im}(\phi).$$

Bem. • ϕ injektiv $\iff \ker \phi = 0$ • ϕ surjektiv $\iff \text{coker } \phi = 0$

Prop (Homomorphiesatz). Sei $\phi : M \rightarrow N$ ein A -Modulhomom. Dann ist $\underline{\phi} : M / \ker(\phi) \rightarrow \text{im}(\phi), [x] \mapsto \phi(x)$ ein A -Modulisomor.

Def. Sei M ein A -Modul. Die **Summe** einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Untermoduln von M ist

$$\sum_{i \in I} M_i := \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in M_i \right\}$$

(Dabei ist $\sum_{i \in I} x_i$ endlich, d. h. $x_i = 0$ für alle bis auf endl. viele $i \in I$.)

Prop. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M . Dann ist auch der Schnitt $\bigcap_{i \in I} M_i$ ein Untermodul von M .

Bem. Untermoduln eines Moduls M bilden mit Schnitt und Summe einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusionsordnung.

Prop (Isomorphiesätze). Sei A ein Ring.

1. Sei M ein A -Modul und $M_1, M_2 \subseteq M$ zwei Untermoduln. Dann existiert ein kanonischer A -Modulisomorphismus

$$(M_1 + M_2) / M_1 \cong M_2 / (M_1 \cap M_2).$$

2. Sei L ein A -Modul und $N \subseteq M \subseteq L$ Untermoduln. Dann existiert ein kanonischer A -Modulisomorphismus

$$(L/N) / (M/N) \cong L/M.$$

Def. Sei A kommutativ, M ein A -Modul und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Das **Produkt** von \mathfrak{a} und M ist $\mathfrak{a}M := \{ax \mid a \in \mathfrak{a}, x \in M\}$.

Notation. $\mathfrak{a}M := (a)M = \{ax \mid x \in M\}$ für $a \in A$

Def. Sei A komm. und N, P Untermoduln eines A -Moduls M . Das Ideal $(N : P) := \{a \in A \mid aP \subseteq N\} \subseteq A$ heißt **Quotient** von N nach P .

Def. Das Ideal $\text{ann } M := (0 : M)$ heißt **Annulator** von M .

Bem. Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \text{ann } M$, so können wir M auch als A/\mathfrak{a} -Modul auffassen.

Def. Der A -Modul M heißt **treu**, falls $\text{ann } M = 0$.

Lem. Sei A kommutativ, $N, P \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt

- $\text{ann}(N + P) = \text{ann}(N) + \text{ann}(P)$ • $(N : P) = \text{ann}((N + P)/N)$

Def. Sei M ein A -Modul, $X \subseteq M$ eine Teilmenge.

Der von X **erzeugte Untermodul** ist

$$L(X) := \sum_{x \in X} Ax = \sum_{x \in X} \{ax \mid a \in A\} = \left\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \in A \right\}.$$

Def. Eine Teilmenge $X \subseteq M$ heißt **Erzeugendensystem**, falls $L(X) = M$. Ein A -Modul M heißt **endlich erzeugt**, falls ein endliches Erzeugendensystem von M existiert.

Bem. Ein A -Modul M ist genau dann endlich erzeugt, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und ein surj. A -Modulhomomorphismus $\phi : A^n \rightarrow M$ existiert.

Def. Das **direkte Produkt** einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von A -Moduln ist das A -Modul $\prod_{i \in I} M_i := \{(x_i \in M_i)_{i \in I}\}$ mit kmpntnswr Verkn.

Bem. Das direkte Produkt ist das kategorienth. Produkt in **A -Mod.**

Def. Die **direkte Summe** einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von A -Moduln ist

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} M_i &:= \{(x_i \in M_i)_{i \in I} \mid x_i = 0 \text{ für alle bis auf endl. viele } i \in I\} \\ &\subseteq \prod_{i \in I} M_i. \end{aligned}$$

Bem. Die dir. Summe ist das kategorienth. Koprodukt in **A -Mod.** Ist I endlich, so gilt $\bigoplus_{i \in I} M_i \cong \prod_{i \in I} M_i$.

Bsp (Direkte Summenzerlegung). Sei $A = \sum_{i=1}^n A_i$ ein endl. direktes Produkt komm. Ringe. Dann gilt $A \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{a}_n$ als A -Modul mit $\mathfrak{a}_i := \{(x_i)_{i=1}^n \mid x_j = 0 \text{ für } j \neq i\}$.

Def. Ein **A -Modul** M heißt frei, falls eine Menge I existiert, sodass $M \cong \bigoplus_{i \in I} A$ als A -Modul.

Bem. Ein endlicher freier Modul ist ein Modul, der zu $A^n := A \oplus \dots \oplus A$ für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph ist.

Prop. Sei A ein Ring. Ein A -Modul M ist genau dann endl. erzeugt, wenn M der Quotient eines A -Moduls der Form A^n für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

Prop. Sei A ein komm. Ring, M ein endlich erzeugter A -Modul und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Sei $\phi \in \text{End}_A(M)$ mit $\text{im } \phi \subseteq \mathfrak{a}M$. Dann erfüllt ϕ eine Gleichung der Form $\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \dots + a_n = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$.

Kor. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und M ein A -Modul mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $x \in A$ mit $x = 1$ modulo \mathfrak{a} und $xM = 0$.

Lem (Nakayama). Sei \mathfrak{a} ein Ideal von A , welches im Jacobson'schen Radikal \mathfrak{j} von A enthalten ist. Dann folgt aus $\mathfrak{a}M = M$ schon $M = 0$.

Kor. Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, welches im Jacobson'schen Ideal \mathfrak{j} enthalten ist. Dann folgt aus $M = \mathfrak{a}M + N$ schon $M = N$.

Def. Sei (A, \mathfrak{m}, F) ein lokaler Ring. Sei M ein endlich erz. A -Modul. Setze $M(\mathfrak{m}) := M/\mathfrak{m}M$. Wegen $\mathfrak{m} \subseteq \text{ann}(M(\mathfrak{m}))$ ist $M(\mathfrak{m})$ in natürl. Art ein (endlich-dim.) F -Vektorraum, die **spezielle Faser** von M . Das Bild eines Elements $x \in M$ in $M(\mathfrak{m})$ wird **Wert des Schnittes** x in der speziellen Faser genannt.

Prop. Sei (A, \mathfrak{m}, F) ein lokaler Ring, M ein endlich erz. A -Modul. Seien x_1, \dots, x_n Schnitte von M , deren Werte in $M(\mathfrak{m})$ eine Basis bilden. Dann erzeugen x_1, \dots, x_n den A -Modul M .

Exakte Sequenzen

Def. Sei A ein Ring. Eine Sequenz

$$\dots \rightarrow M^{i-1} \xrightarrow{\phi^{i-1}} M^i \xrightarrow{\phi^i} M^{i+1} \rightarrow \dots$$

von A -Moduln und A -Modulhomomorphismen heißt **exakt** bei M^i , falls im $\phi^{i-1} = \ker \phi^i$. Die Sequenz heißt **exakt**, falls sie exakt bei jedem M^i ist.

Bsp. Sei $\phi : M \rightarrow N$ ein A -Modulhomomorphismus. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi \text{ ist injektiv} &\iff 0 \rightarrow M \xrightarrow{\phi} N \text{ ist exakt} \\ \phi \text{ ist surjektiv} &\iff M \xrightarrow{\phi} N \rightarrow 0 \text{ ist exakt} \end{aligned}$$

Def. Eine **kurze exakte Sequenz** k. e. S. von A -Moduln ist eine exakte Sequenz der Form $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$.

Bem. Jede lange exakte Sequenz $\dots \rightarrow M^{i-1} \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots$ zerfällt in kurze exakte Sequenzen: Mit $N^i = \operatorname{im} \phi^{i-1} = \ker \phi^i$ haben wir kurze exakte Sequenzen $0 \rightarrow N^i \rightarrow M^i \rightarrow N^{i+1} \rightarrow 0$. Andersherum kann man solche kurzen exakten Sequenzen zu einer langen exakten Sequenz zusammenkleben.

Lem. Sei A ein komm. Ring. Eine Seq. $E : M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \rightarrow 0$ ist genau dann exakt, wenn für alle A -Moduln N die Sequenz

$$\operatorname{Hom}(E, N) : 0 \rightarrow \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}(M', N).$$

exakt ist.

Lem. Sei A ein kommutativer Ring.

- Eine Sequenz $E : M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \rightarrow 0$ ist genau dann exakt, wenn für alle A -Moduln N folgende induzierte Sequenz exakt ist:

$$\operatorname{Hom}(E, N) : 0 \rightarrow \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}(M', N).$$

- Eine Sequenz $F : 0 \rightarrow N' \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} N''$ ist genau dann exakt, wenn für alle A -Moduln M folgende induzierte Sequenz exakt ist:

$$\operatorname{Hom}(M, F) : \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\phi_*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\psi_*} \operatorname{Hom}(M, N'') \rightarrow 0.$$

Lem (Schlangenlemma). Sei A ein Ring. Sei folgendes komm. Diagramm von A -Moduln mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow \phi' & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi'' & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' \end{array}$$

Dann gibt es einen Verbindungshomomorphismus $\delta : \ker \phi'' \rightarrow \operatorname{coker} \phi'$, mit dem folgende Sequenz exakt ist:

$$\ker \phi' \rightarrow \ker \phi \rightarrow \ker \phi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \phi' \rightarrow \operatorname{coker} \phi \rightarrow \operatorname{coker} \phi''.$$

Def. Sei A ein Ring und \mathfrak{C} eine Klasse von A -Moduln. Eine Abb. $\lambda : \mathfrak{C} \rightarrow G$ in eine ab. Gruppe heißt **additive Funktion**, falls für alle kurzen exakten Seq. $0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$ von Moduln aus \mathfrak{C} gilt, dass $\lambda(C) = \lambda(C') + \lambda(C'')$.

Bsp. Sei K ein Körper und \mathfrak{C} die Klasse der endlich-dim. VR über K . Dann ist $\dim : \mathfrak{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ eine additive Funktion.

Prop. Sei A ein Ring, \mathfrak{C} eine Klasse von A -Moduln und $\lambda : \mathfrak{C} \rightarrow G$ eine additive Funktion. Sei

$$0 \rightarrow M^0 \xrightarrow{\phi^0} M^1 \rightarrow \dots \rightarrow M^{n-1} \xrightarrow{\phi^{n-1}} M^n \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Moduln in \mathfrak{C} , sodass auch die Kerne der ϕ^i in \mathfrak{C} liegen. Dann gilt $\sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda(M^i) = 0$.

Tensorprodukt

Def. Seien M, N und P drei A -Moduln. Eine Abbildung $\beta : M \times N \rightarrow P$ heißt **A-bilinear**, falls für alle $x \in M$ die Abbildung $\beta(x, -)$ und für alle $y \in N$ die Abbildung $\beta(-, y)$ ein A -Modulhomomorphismus ist.

Bsp. Die Multiplikation $\cdot : A \times A \rightarrow A$ ist A -bilinear.

Prop. Seien M und N zwei A -Moduln. Dann existiert ein A -Modul $M \otimes_A N$ und eine bilineare Abbildung $\gamma : M \times N \rightarrow M \otimes_A N$ mit folgender universellen Eigenschaft:

Für jeden A -Modul P und für jede bilineare Abbildung $\beta : M \times N \rightarrow P$ gibt es genau einen A -Modulhomomorphismus $\underline{\beta} : M \otimes_A N \rightarrow P$ mit $\beta = \underline{\beta} \circ \gamma$.

Def. $M \otimes_A N$ heißt **Tensorprodukt** von M und N über A .

Konstr. • Sei C der freie A -Modul A^I mit $I := M \times N$. Elemente von C haben die Form $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i, y_i)$ mit $\lambda_i \in A, x_i \in M, y_i \in N$.

- Sei $D \subset C$ der von allen Elementen der Form

$$\begin{aligned} (x + x', y) - (x, y) - (x', y), & \quad (ax, y) - a(x, y), \\ (x, y + y') - (x, y) - (x, y'), & \quad (x, ay) - a(x, y) \end{aligned}$$

mit $x, x' \in M, y, y' \in N$ und $a \in A$ erzeugte Untermodul.

- Setze $M \otimes_A N := C/D$.

Notation. $x \otimes y := \gamma(x, y)$

Bem. Jedes Element in $M \otimes_A N$ lässt sich als $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ mit $x_i \in M, y_i \in N$ schreiben. In $M \otimes_A N$ gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} x \otimes (ay) &= a(x \otimes y) = (ax) \otimes y \\ (x + x') \otimes (y + y') &= x \otimes y + x' \otimes y + x \otimes y' + x' \otimes y' \end{aligned}$$

Lem. Das Tensorprodukt induziert einen Bifunktor

$$\otimes_A : A\text{-Mod} \times A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}.$$

Lem. Sei A ein komm. Ring, M und N zwei A -Moduln, $x_i \in M$ und $y_i \in N$ mit $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ in $M \otimes_A N$. Dann gibt es endlich erzeugte Untermoduln $M_0 \subseteq M$ und $N_0 \subseteq N$ mit $x_1, \dots, x_n \in M_0, y_1, \dots, y_n \in N_0$ und $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ in $M_0 \otimes_A N_0$

Def. Sei A ein komm. Ring, M_1, \dots, M_r und P A -Moduln. Eine Abbildung $\mu : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow P$ heißt **A-multilinear**, falls sie linear in jedem Argument ist.

Prop. Sei A ein komm. Ring, M_1, \dots, M_r A -Moduln. Es existiert ein A -Modul $M_1 \otimes_A \dots \otimes_A M_r$ und eine multilineare Abbildung $\gamma : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow M_1 \otimes_A \dots \otimes_A M_r$ mit der univ. Eigenschaft Für jeden A -Modul P und für jede multilineare Abbildung $\mu : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow P$ gibt es genau einen A -Modulhomomorphismus $\underline{\mu} : M_1 \otimes_A \dots \otimes_A M_r \rightarrow P$ mit $\mu = \underline{\mu} \circ \gamma$.

Konstr. $M_1 \otimes_A \dots \otimes_A M_r := M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A (\dots \otimes_A M_r))$

Prop. Sei A ein komm. Ring und M, N und P drei A -Moduln. Es existieren kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} M \otimes_A N &\cong N \otimes_A M, & (M \otimes_A N) \otimes_A P &\cong M \otimes_A (N \otimes_A P), \\ (M \oplus N) \otimes_A P &\cong (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P), & A \otimes_A M &\cong M. \end{aligned}$$

Def. Seien A und B zwei komm. Ringe. Ein (A, B) -Bimodul ist eine abelsche Gruppe, welche sowohl ein A - als auch ein B -Modul ist, sodass die Modulstrukturen miteinander verträglich sind, d. h. für alle $a \in A, b \in B$ und $x \in N$ gilt $a(bx) = b(ax)$.

Lem. Sei M ein A -Modul, P ein B -Modul und N ein (A, B) -Bimodul. Dann gibt es einen kanon. Isomorphismus abelscher Gruppen

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

Def. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Morphismus kommutativer Ringe.

- Die **Skalareinschränkung** eines B -Moduls N (vermöge ϕ) ist der A -Modul N^A , der als Menge und ab. Gruppe N ist und dessen Skalarmult. durch $a \cdot x := \phi(a) \cdot x$ definiert ist.
- Die **Skalarerweiterung** eines A -Moduls M (vermöge ϕ) ist der B -Modul $M_B := B^A \otimes_A M$ mit der Skalarmultiplikation definiert durch $b(b' \otimes x) := (bb') \otimes x$.

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Morphismus kommutativer Ringe.

- Sei N ein B -Modul. Ist B^A als A -Modul endlich erzeugt und N als B -Modul endlich erzeugt, so ist N^A als A -Modul endlich erzeugt.
- Sei M ein A -Modul. Ist m als A -Modul endlich erzeugt, so ist M_B als B -Modul endlich erzeugt.

Lem. Sei M ein A -Modul und N ein B -Modul. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $N \otimes_B M_B \cong N^A \otimes_A M$ von B -Moduln.

Prop. Sei A ein komm. Ring und M, N und P drei A -Moduln. Dann ist folgende Abbildung ein A -Modulisomorphismus:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(M \otimes_A N, P) &\rightarrow \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, P)), \\ \beta &\mapsto (x \mapsto (y \mapsto \beta(x \otimes y))). \end{aligned}$$

Bem. Mit anderen Worten: Es ex. eine Adj. $- \otimes_A N \dashv \operatorname{Hom}_A(N, -)$

Prop. Sei A ein komm. Ring. Das Tensorprodukt ist rechtsexakt, d. h. ist $E : M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von A -Moduln und N ein weiterer A -Modul, so ist auch die induzierte Sequenz

$$E \otimes_A N : M' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M'' \otimes_A N \rightarrow 0 \quad \text{exakt.}$$

Bem. Dies folgt daraus, dass das Tensorprodukt als Linksadjungierter Kolimiten erhält.

Achtung. Das Tensorprodukt ist i. A. nicht exakt. Insbesondere erhält es keine injektiven Abbildungen.

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Ein A -Modul M heißt *flach*, falls $(-\otimes_A M)$ exakt ist, d. h. falls für jede (lange) exakte Sequenz E auch $E \otimes_A M$ exakt ist.

Prop. Sei A komm. und M ein A -Modul. Es sind äquivalent:

- Der A -Modul M ist flach.
- Für jede kurze exakte Sequenz $E : 0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ ist die tensorierte Sequenz $E \otimes_A M$ exakt.
- Für jede injektive A -lineare Abbildung $\phi : N \rightarrow N'$ ist auch $\phi \otimes \text{id}_M : N \otimes_A M \rightarrow N' \otimes_A M$ injektiv.
- Für jede inj. A -lineare Abb. $\phi : N \rightarrow N'$ zw. endl. erzeugten A -Moduln ist auch $\phi \otimes \text{id}_M : N \otimes_A M \rightarrow N' \otimes_A M$ injektiv.

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Ist M ein flacher A -Modul, so ist M_B ein flacher B -Modul.

Algebren

Def. Eine kommutative **A-Algebra** B ist ein kommutativer Ring B zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\phi : A \rightarrow B$, dem *Strukturmorphismus* der Algebra.

Bem. Ist $a \in A$ und $b \in B$, so definieren wir $ab := \phi(a)b$ (wie bei der Skalareinschränkung).

Bspe. • Sei K ein Körper. Eine nichttriviale K -Algebra ist dasselbe wie ein Ring, der K als Unterring enthält.
• Jeder Ring ist auf genau eine Weise eine \mathbb{Z} -Algebra.

Def. Ein *Homomorphismus* von A -Algebren B und C ist ein Ringhomomorphismus $\chi : B \rightarrow C$, welcher einen Homomorphismus $\chi : B^A \rightarrow C^A$ von A -Moduln induziert.

Bem. Ein Ringhomomorphismus $\chi : B \rightarrow C$ ist also genau dann ein A -Algebrenhomomor., wenn $\chi(ab) = a\chi(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bem. A -Algebren und ihre Homomor. bilden eine Kategorie **A-Alg.**

Def. Sei A ein komm. Ring. Eine komm. A -Algebra B heißt eine ...

- ... **endliche A-Algebra**, falls B^A als A -Modul endlich erzeugt ist, d. h. falls endlich viele Elemente $b_1, \dots, b_n \in B$ existieren, sodass jedes Element aus B als A -Linearkombination der b_i geschrieben werden kann.
- ... **endlich erzeugte A-Algebra** oder A -Algebra **endlichen Typs**, falls endlich viele Elemente $b_1, \dots, b_n \in B$ existieren, sodass jedes andere Element von B als Polynom in den b_i mit Koeffizienten aus A geschrieben werden kann.

Def. Ein kommutativer Ring heißt **endlich erzeugt**, falls er eine \mathbb{Z} -Algebra endlichen Typs ist.

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Seien $\phi : A \rightarrow B$ und $\psi : A \rightarrow C$ die Strukturabbildungen zweier A -Algebren B und C . Dann ist auf $D := B^A \otimes_A C^A$ eine Multiplikation durch

$$\mu : D \times D \rightarrow D, \quad (b \otimes c, b' \otimes c') \mapsto (bb') \otimes (cc')$$

definiert. Der Ring D wird mit der Strukturabbildung

$$\rho : A \rightarrow D, \quad a \mapsto \phi(a) \otimes 1 = 1 \otimes \psi(a)$$

zu einer A -Algebra. Diese heißt **Tensorprodukt** $B \otimes_A C$ der kommutativen Algebren B und C .

Gerichtete Limiten

Def. Eine **gerichtete Menge** ist eine nichtleere teilweise geordnete Menge (I, \leq) , sodass $\forall i, j \in I : \exists k \in I : i \leq k \wedge j \leq k$.

Bem. Eine teilweise geordnete Menge (I, \leq) ist genau dann gerichtet, wenn in I , aufgefasst als Präordnungskategorie, jedes endliche Diagramm einen Koegel besitzt.

Def. Sei (I, \leq) eine gerichtete Menge und A ein Ring. Ein **gerichtetes System** M_\bullet von A -Moduln über I ist ein Funktor

$$M_\bullet : I \rightarrow A\text{-Mod}, \quad i \mapsto M_i, \quad (i \leq j) \mapsto \mu_j^i : M_i \rightarrow M_j,$$

wobei wir I als Präordnungskategorie auffassen.

Prop. Sei M_\bullet ein gerichtetes System von A -Moduln. Dann existiert der Kolimes $\varinjlim M_i$ von M_\bullet .

Def. Dieser Kolimes wird **gerichteter Limes** von M_\bullet genannt.

Konstr. • Sei $C := \bigoplus_{i \in I} M_i$.

- Sei $D \subseteq C$ der Untermodul, der von allen Elementen der Form $x_i - \mu_j^i(x_i)$ mit $i \leq j$ und $x_i \in M_i$ erzeugt wird.
- Dann erfüllt $M := C/D$ die geforderte universelle Eigenschaft.

Bem. • Jedes $x \in \varinjlim M_i$ wird durch ein $x_i \in M_i$ repräsentiert.

- Ein Element $x_i \in M_i$ repräsentiert dabei genau dann das Nullelement, falls ein $j \in I$ mit $i \leq j$ existiert, sodass $\mu_j^i(x_i) = 0$.

Lem. Jeder A -Modul ist der gerichtete Limes seiner endlich erzeugten Untermoduln.

Def. Sei (I, \leq) eine gerichtete Menge. Ein *Homomorphismus* von gerichteten Systemen M_\bullet und N_\bullet von A -Moduln über I ist eine natürliche Transformation $\phi_\bullet : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$.

Bem. Damit bilden gerichtete Systeme von A -Moduln über I zusammen mit ihren Homomorphismen eine Kategorie $[I, A\text{-Mod}]$.

Prop. Sei $\phi_\bullet : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ ein Morphismus zwischen gerichteten Systemen von A -Moduln über I , $M := \varinjlim M_i$ und $N := \varinjlim N_i$.

Dann gibt es genau einen Morphismus $\phi := \varinjlim \phi_i : M \rightarrow N$ mit

$$(M_i \rightarrow M \xrightarrow{\phi} N) = (M_i \xrightarrow{\phi_i} N_i \rightarrow N) \quad \text{für alle } i \in I.$$

Bem. Damit ist der gerichtete Limes ein Funktor

$$\varinjlim : [I, A\text{-Mod}] \rightarrow A\text{-Mod}.$$

Def. Eine Sequenz $M_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet$ von gerichteten Systemen von A -Moduln über I heißt **exakt**, falls für alle $i \in I$ die Sequenz $M_i \xrightarrow{\phi_i} N_i \xrightarrow{\psi_i} P_i$ exakt ist.

Prop. Der Gerichteter-Limes-Funktor ist exakt:

Sei $M_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet$ eine exakte Sequenz gerichteter Systeme von A -Moduln über I . Dann ist die induzierte Sequenz

$$\varinjlim M_i \xrightarrow{\varinjlim \phi_i} \varinjlim N_i \xrightarrow{\varinjlim \psi_i} \varinjlim P_i \quad \text{auch exakt.}$$

Prop. Sei M_\bullet ein gerichtetes System von A -Moduln über I und N ein A -Modul. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\varinjlim (M_i \otimes_A N) \cong (\varinjlim M_i) \otimes_A N.$$

Prop. Sei A_\bullet ein gerichtetes System von Ringen und Ringhomomorphismen. Fasse A_\bullet als gerichtetes System von ab. Gruppen (d. h. \mathbb{Z} -Moduln) auf. Dann gibt es $A := \varinjlim A_i$ eine Multiplikation, sodass

A ein Ring ist und die Gruppenhomomorphismen $A_i \rightarrow A$ sogar Ringhomomorphismen sind.

Prop. Ist $\varinjlim A_i = 0$, so gibt es ein $i \in I$ mit $A_i = 0$.

Def. Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie kommutativer A -Algebren. Für eine endliche Teilmenge $J \subset I$ setzen wir $B_J := \bigotimes_{i \in J} B_i$.

Dann ist B_\bullet ein gerichtetes System über $(\mathcal{P}(I)_{\text{fin}}, \subseteq)$. Der Limes $\bigotimes_{i \in I} B_i := \varinjlim_{J \subseteq I} B_J$ heißt **Tensorprodukt** über die Familie $(B_i)_{i \in I}$.

Lokalisierung

Def. Sei A ein Ring. Eine **multiplikativ abgeschl. Teilmenge** von A ist eine Teilmenge $S \subseteq A$ mit $1 \in S$ und $xy \in S$ für alle $x, y \in S$.

Bspe. • Ein Ring A ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn $A \setminus \{0\}$ multiplikativ abgeschlossen ist.
• Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist $1 + \mathfrak{a}$ mult. abgeschlossen.

Prop. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Dann gibt es einen komm. Ring $S^{-1}A$ und einen Ringhomom. $\iota : A \rightarrow S^{-1}A$ mit folgender universeller Eigenschaft:
Für jeden Ring B und Ringhomom. $\phi : A \rightarrow B$ mit $\phi(S) \subseteq B^\times$ gibt es genau einen Ringhomom. $\psi : S^{-1}A \rightarrow B$ mit $\phi = \psi \circ \iota$.

Konstr. • Führe auf der Menge der Paare $(a, s) \in A \times S$ eine Äquivalenzrelation ein durch

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists u \in S : u(at - bs) = 0.$$

- Setze $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$.
- Wir schreiben $\frac{a}{s}$ für die Äquivalenzklasse von (a, s) in $S^{-1}A$.
- Auf $S^{-1}A$ sind Addition und Mult. (wohl!) definiert durch

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}.$$

- Der Ringhomomorphismus ist gegeben durch $\iota(a) := \frac{a}{1}$.

Def. Der kommutative Ring $S^{-1}A$ heißt **Lokalisierung** von A nach S und $\iota : A \rightarrow S^{-1}A$ ihr **Strukturhomomorphismus**.

Prop. Sei A komm. und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Dann gilt:

- Für alle $s \in S$ ist $\iota(s)$ eine Einheit in $S^{-1}A$.
- Ist $a \in A$ mit $\iota(a) = 0$, so gibt es ein $s \in S$ mit $as = 0$ in A .
- Jedes Element in $S^{-1}A$ hat die Form $\iota(a)\iota(s)^{-1}$ für ein $a \in A$ und ein $s \in S$.

Bem. Diese drei Eigenschaften charakterisieren die Lokalisierung eindeutig: Ist $\phi : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, der die drei Eigenschaften von ι aus der letzten Prop. erfüllt, so gilt $B \cong S^{-1}A$.

Def. Sei A ein komm. Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist $A \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen. Der komm. Ring $A_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$ heißt **Lokalisierung** von A bei \mathfrak{p} oder **Halm** von A an \mathfrak{p} .

Bem. $A_{\mathfrak{p}}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} := A_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p} = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{p}, s \in A \setminus \mathfrak{p} \right\}.$$

Def. Sei A ein Integritätsbereich. Dann ist $S := A \setminus \{0\}$ mult. abgeschlossen. Die Lokal. $S^{-1}A$ heißt **Quotientenkörper** von A .

Bem. Der Strukturhomomorphismus $A \rightarrow S^{-1}A$ ist in diesem Fall injektiv, wir können daher A als Unterring von $S^{-1}A$ ansehen. Der Körper $S^{-1}A$ ist der kleinste Körper, der A als Unterring enthält.

Bsp. \mathbb{Q} ist der Quotientenkörper von \mathbb{Z}

Bsp. $S^{-1}A = 0 \iff 0 \in S$

Def. Sei A ein komm. Ring, $f \in A$. Dann ist $S := \{f^n \mid n \geq 0\}$ mult. abgeschlossen. Die Lokalisierung $A[f^{-1}] := S^{-1}A$ heißt **Lokalisierung** von A **außerhalb** von f .

Konstr. Sei A ein kommutativer Ring, $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen und M ein A -Modul.

- Wir definieren auf der Menge der Paare $M \times S$ eine Äquivalenzrelation durch

$$(m, s) \sim (m', s') \iff \exists u \in S : u(ms' - m's) = 0.$$

- Wir schreiben $\frac{m}{s}$ für die Äquivalenzklasse von (m, s) .
- Vermöge der Addition und der Skalarmultiplikation

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} := \frac{mt+ns}{st} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} := \frac{am}{st}$$

wird $S^{-1}M := (M \times S)/\sim$ zu einem $S^{-1}A$ -Modul.

Def. Der $S^{-1}A$ -Modul $S^{-1}M$ heißt **Lokalisierung** von M nach S und $\iota : M \rightarrow (S^{-1}M)^A$, $m \mapsto \frac{m}{1}$ sein **Strukturhomomorphismus**.

Def. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Der $A_{\mathfrak{p}}$ -Modul $M_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}M$ heißt **Lokalisierung** von M bei \mathfrak{p} oder **Halm** von M an \mathfrak{p} . Das Bild von $m \in M$ in $M_{\mathfrak{p}}$ heißt **Keim** von m an \mathfrak{p} .

Def. Sei $f \in A$. Dann heißt $M[f^{-1}] := \{f^n \mid n \geq 0\}^{-1}M$ die **Lokalisierung** von M außerhalb von f . Das Bild von $m \in M$ in $M[f^{-1}]$ heißt **Einschränkung** von m außerhalb von f .

Bem. Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Die Lokalisierung von A -Moduln nach S stiftet einen Funktor **A-Mod** $\rightarrow (S^{-1}A)\text{-Mod}$: Für einen Morphismus $\phi : M \rightarrow N$ ist

$$S^{-1}\phi : S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N, \quad \frac{m}{s} \mapsto \frac{\phi(m)}{s}.$$

Prop. Die Lokalisierung ist exakt: Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Ist $M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M''$ exakt, so ist auch $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}\phi} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}M''$ exakt.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Sei M ein A -Modul und $P, N \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:

- $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P \subseteq S^{-1}M$
- $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$ als $S^{-1}A$ -Moduln
- $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P \subseteq S^{-1}M$

Prop. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Sei M ein A -Modul. Dann ist folgende Abb. ein Iso von $S^{-1}A$ -Moduln:

$$\phi : S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M, \quad \frac{a}{s} \otimes m \mapsto \frac{am}{s}$$

Kor. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}A$ eine flache A -Algebra.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Seien M und N zwei A -Moduln. Dann ist folgende Abbildung ein Isomorphismus von $S^{-1}A$ -Moduln:

$$\phi : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \rightarrow S^{-1}(M \otimes_A N), \quad \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} \mapsto \frac{m \otimes n}{st}$$

Bsp. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \cong (M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}}$.

Lokale Eigenschaften

Sprechweise. Eine Eigenschaft kommutativer Ringe (oder Moduln über einem solchen) heißt **lokal**, falls gilt:

Ein Ring A (bzw. Modul M) besitzt die Eigenschaft genau dann, wenn all seine Halme $A_{\mathfrak{p}}$ (bzw. $M_{\mathfrak{p}}$) die Eigenschaft besitzen.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring und M ein A -Modul. Dann sind äquivalent:

- $M = 0$
- $M_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$
- $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$

Mit der Exaktheit der Lokalisierung folgt:

Kor. Sei A ein kommutativer Ring und $\phi : M \rightarrow N$ ein Homomorphismus von A -Moduln.

- Es sind äquivalent:
 - $\phi : M \rightarrow N$ ist injektiv.
 - $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ ist injektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$.
 - $\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$ ist injektiv für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.
- Es sind äquivalent:
 - $\phi : M \rightarrow N$ ist surjektiv.
 - $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ ist surjektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$.
 - $\phi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \rightarrow N_{\mathfrak{m}}$ ist surjektiv für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring und M ein A -Modul. Dann sind äquivalent:

- M ist ein flacher A -Modul.
- $M_{\mathfrak{p}}$ ist ein flacher $A_{\mathfrak{p}}$ -Modul für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$.
- $M_{\mathfrak{p}}$ ist ein flacher $A_{\mathfrak{m}}$ -Modul für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.

Ideale in Lokalisierungen

Notation. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ schreiben wir $S^{-1}\mathfrak{a} := (S^{-1}A)\mathfrak{a}$.

Bem. Dies ist gerechtfertigt, denn jedes Element in $(S^{-1}A)\mathfrak{a}$ hat die Form $\sum_i \frac{a_i}{s_i}$ und diese Terme können wir auf einen gemeinsamen Nenner bringen.

Prop. Alle Ideale in $S^{-1}A$ sind erweiterte Ideale, d. h. von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$.

Prop. $A \cap (S^{-1}\mathfrak{a}) = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$

Bsp. $S^{-1}\mathfrak{a} = (1) \iff \mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$

Prop. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist genau dann ein kontrahiertes Ideal bezüglich $A \rightarrow S^{-1}A$, wenn kein Element von S ein Nullteiler in A/\mathfrak{a} ist.

Prop. Sei A ein komm. Ring. Die Lokalisierung nach einer mult. abg. Teilmenge $S \subseteq A$ vertauscht mit folgenden Ideal-Operationen: endl. Summen, endl. Produkte, endl. Schnitte und Wurzeln. Das heißt, für zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ gilt:

- $S^{-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} + S^{-1}\mathfrak{b}$
- $S^{-1}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cdot S^{-1}\mathfrak{b}$
- $S^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cap S^{-1}\mathfrak{b}$
- $S^{-1}\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{S^{-1}\mathfrak{a}}$

Kor. $\sqrt{(0)} = S^{-1}\sqrt{(0)} \subseteq S^{-1}A$

Prop. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Folgende Korrespondenz ist bijektiv und monoton:

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \} & \leftrightarrow & \{ \text{Primideale } \mathfrak{q} \subset S^{-1}A \} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{p} = (S^{-1}A)\mathfrak{p} \\ A \cap \mathfrak{q} & \leftarrow & \mathfrak{q} \end{array}$$

Kor. Für ein Primideal $\mathfrak{r} \subset A$ liefert dies eine Korrespondenz

$$\{ \text{Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r} \} \leftrightarrow \{ \text{Primideale } \mathfrak{q} \subset A_{\mathfrak{r}} \}$$

Bem. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal und $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ ein weiteres Primideal. Lokalisieren bei \mathfrak{p} schneidet alle Primideale heraus, die nicht in \mathfrak{p} enthalten sind. Der Wechsel nach A/\mathfrak{q} schneidet alle Primideale heraus außer denen, die \mathfrak{q} enthalten. Somit enthält $A_{\mathfrak{p}}/(A_{\mathfrak{p}}\mathfrak{q}) = (A/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}}$ nur Primideale zwischen \mathfrak{q} und \mathfrak{p} .

Def. Sei A ein komm. Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Der Körper $A(\mathfrak{p}) := A_{\mathfrak{p}}/(A_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}) = (A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$ heißt **Restklassenkörper** von A an \mathfrak{p} .

Prop. Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Dann ist ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ genau dann eine Kontraktion eines Primideals in B , falls $A \cap (B\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

Prop. Sei A ein komm. Ring, $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen und M ein endlich erzeugter A -Modul. Dann ist $S^{-1}\text{ann}(M) = \text{ann}(S^{-1}M)$.

Kor. Sei A ein komm. Ring, $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen, M ein A -Modul und $N, P \subseteq M$ zwei Untermoduln. Ist P endlich erzeugt, so gilt $S^{-1}(N : P) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$.

Primärzerlegung

Def. Ein Ideal $\mathfrak{q} \subset A$ heißt **primär**, falls $1 \notin \mathfrak{q}$ und falls aus $xy \in \mathfrak{q}$ schon $x \in \mathfrak{q}$ oder $\exists n \in \mathbb{N} : y^n \in \mathfrak{q}$ folgt.

Lem. $\mathfrak{q} \subsetneq A$ ist primär $\iff \{ \text{Nullteiler} \} = \sqrt{(0)}$ in A/\mathfrak{q}

Bspe. • Primideale sind primär.

- Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Ist $\mathfrak{b} \subset B$ primär, so auch $A \cap \mathfrak{b} \subset A$.

Lem. Sei \mathfrak{q} primär. Dann ist $\sqrt{\mathfrak{q}}$ das kleinste Primideal mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$.

Def. Sei $\mathfrak{q} \subset A$ ein primäres Ideal und $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$. Dann heißt \mathfrak{q} ein **p-primäres** Ideal.

Bem. Primzahlen $\hat{=}$ Primideale
Primzahlpotenzen $\hat{=}$ primäre Ideale

Bsp. Die primären Ideale in \mathbb{Z} sind die Ideale der Form (0) und (p^n) für eine Primzahl p .

Achtung. Im Allgemeinen ist ein primäres Ideal keine Potenz eines Primideals! Andersherum ist die Potenz eines Primideals auch nicht notwendigerweise primär. Analoges gilt aber für max. Ideale:

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Ist $\mathfrak{m} := \sqrt{\mathfrak{a}}$ ein maximales Ideal, so ist \mathfrak{a} ein m-primäres Ideal.

Kor. Ist \mathfrak{m} ein max. Ideal, so sind \mathfrak{m}^n mit $n \geq 1$ alle m-primär.

Def. Sei A ein komm. Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Eine Darstellung von \mathfrak{a} als Schnitt $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ endlich vieler primärer Ideale \mathfrak{q}_i heißt **Primärzerlegung** von \mathfrak{a} . Sind die $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ paarweise verschieden und gilt $\mathfrak{q}_i \not\supseteq \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_j$ für alle i , so heißt die Primärzerlegung **minimal**.

Def. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **zerlegbar**, wenn es eine Primärzerlegung besitzt.

Lem. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal und $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ alle p-primär. Dann ist auch $(\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n)$ wieder p-primär.

Kor. Man kann eine Primärzerlegung eines Ideals zu einer minimalen Primärzerlegung reduzieren.

Lem. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ prim, \mathfrak{q} ein p-primäres Ideal und $x \in A$. Dann gilt:

- Ist $x \in \mathfrak{q}$, so gilt $(\mathfrak{q} : x) = (1)$.
- Ist $x \notin \mathfrak{q}$, so ist $(\mathfrak{q} : x)$ ein p-primäres Ideal.
- Ist $x \notin \mathfrak{p}$, so ist $(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{q}$.

Satz (erster Eindeutigkeitsatz). Sei A ein komm. Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Dann sind die Ideale \mathfrak{p}_i genau die Ideale, die von der Form $\sqrt{(\mathfrak{a} : x)}$ mit $x \in A$ sind.

Bem. Insb. sind die Ideale \mathfrak{p}_i unabh. von der Primärzerlegung.

Def. Die Ideale \mathfrak{p}_i heißen die zu \mathfrak{a} **assoziierten Primideale**.

Lem. Sei \mathfrak{p} ein zu \mathfrak{a} assoziiertes Primideal. Dann gibt es ein $x \in A$, sodass $(\mathfrak{a} : x)$ ein p-primäres Ideal ist.

Def. Sei A ein komm. Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Die minimalen Elemente der Menge der zu \mathfrak{a} assoz. Primideale heißen **isolierte Primideale**, alle anderen zu \mathfrak{a} assoz. Primideale **eingebettete Primideale**. Ein primäres Ideal \mathfrak{q}_i heißt isolierte / eingebettete **Primärkomponente** von \mathfrak{a} , wenn \mathfrak{p}_i isoliert / eingebettet ist.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein zerlegbares Primideal. Jedes Primideal \mathfrak{p} mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ enthält ein assoziiertes (und damit auch ein isoliertes) Primideal zu \mathfrak{a} .

Kor. Die isolierten Primideale zu \mathfrak{a} sind genau die min. Elemente von $\{ \text{Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \} \cong \{ \text{Primideale in } A/\mathfrak{a} \}$.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit min. Primärzerl. $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Dann gilt $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i = \{ x \in A \mid (\mathfrak{a} : x) \neq \mathfrak{a} \}$.

Prop. Sei A ein komm. Ring, in dem (0) zerlegbar ist. Dann gilt:

- Die Menge D der Nullteiler in A ist die Vereinigung der zu (0) assoziierten Primideale.
- Die Menge der nilpotenten Elemente ist der Schnitt aller (isolierten) Primideale, die zu (0) assoziiert sind.

Prop. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, \mathfrak{q} ein p-primäres Ideal und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

- Ist $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, so folgt $S^{-1}\mathfrak{q} = (1)$.
- Ist $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, so ist $S^{-1}\mathfrak{q}$ ein $S^{-1}\mathfrak{p}$ -primäres Ideal und es gilt $A \cap S^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$.

Kor. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist folgende Korrespondenz bijektiv und monoton:

$$\begin{array}{ccc} \{ \mathfrak{q} \subset A \text{ primär mit } \sqrt{\mathfrak{q}} \cap S = \emptyset \} & \leftrightarrow & \{ \mathfrak{r} \subset S^{-1}A \text{ primär} \} \\ \mathfrak{q} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{q} \\ A \cap \mathfrak{r} & \leftarrow & \mathfrak{r} \end{array}$$

Def. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Die **Sättigung** eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq A$ bzgl. S ist das Ideal $S(\mathfrak{a}) := A \cap S^{-1}\mathfrak{a}$.

Prop. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Seien die \mathfrak{q}_i so sortiert, dass ein m existiert mit $S \cap \mathfrak{p}_i = \emptyset \iff i \leq m$. Dann sind $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap S^{-1}\mathfrak{q}_m$ und $S(\mathfrak{a}) = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ minimale Primärzerlegungen.

Def. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring. Eine Menge \mathfrak{S} von zu \mathfrak{a} assoz. Primidealen heißt **isoliert**, falls gilt:

$$\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p} \in \mathfrak{S} \implies \mathfrak{p}' \in \mathfrak{S} \quad \text{für zu } \mathfrak{a} \text{ assoz. Ideale } \mathfrak{p}, \mathfrak{p}'.$$

Prop. Sei \mathfrak{S} eine isolierte Menge von zu \mathfrak{a} assoziierten Primidealen. Dann ist $S := A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen und für jedes an \mathfrak{a} assoziierte Primideal \mathfrak{p}' gilt: $\mathfrak{p}' \in \mathfrak{S} \iff \mathfrak{p}' \cap S = \emptyset$.

Satz (zweiter Eindeigkeitssatz). Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Ist $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m\}$ eine isolierte Menge von zu \mathfrak{a} assoziierten Primidealen, so ist $\mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_m$ unabhängig von der Zerlegung.

Für $m = 1$ folgt:

Kor. Die isolierten Primärkomp. von \mathfrak{a} sind eindeutig bestimmt.

Ganzheit

Def. Sei B ein komm. Ring und $A \subseteq B$ ein Unterring. Ein Element $x \in B$ heißt **ganz** über A , falls x eine Gleichung der Form $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ mit $a_i \in A$ erfüllt.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine Erw. komm. Ringe. Es sind äquivalent:

- x ist ganz über A .
- $A[x] \subseteq B$ ist als A -Modul endlich erzeugt.
- Es existiert ein Unterring $C \subseteq B$ mit $C \supseteq A[x]$, der als A -Modul endlich erzeugt ist.
- Es ex. ein treuer $A[x]$ -Modul M , der als A -Modul endl. erz. ist.

Kor. Sei $A \subseteq B$ eine Erw. komm. Ringe.

- Seien $x_1, \dots, x_n \in B$ jeweils ganz über A . Dann ist $A[x_1, \dots, x_n]$ ein endlich erzeugter A -Modul.
- Die Menge $C := \{ \text{über } A \text{ ganze Elemente } x \in B \} \subseteq B$ ist ein Unterring von B mit $C \supseteq A$.

Def. Die Menge $C \subseteq B$ heißt **ganzer Abschluss** von A in B . Ist $C = A$, so heißt A **ganz abgeschlossen** in B . Ist $C = B$, so heißt B **ganz über** A .

Bsp. \mathbb{Z} ist in \mathbb{Q} ganz abgeschlossen.

Def. Sei $\phi: A \rightarrow B$ ein Mor. komm. Ringe. (Dadurch wird B zu einer A -Algebra.) Dann heißt ϕ ganz und B eine **ganze A-Algebra**, falls B ganz über $\phi(A) \subseteq B$ ist.

Lem. Für eine A -Algebra B gilt:

B endlich $\iff B$ endlich erz. $\wedge B$ ganz (jeweils als A -Algebra).

Kor. Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Erweiterungen kommutativer Ringe. Ist B ganz über A und C ganz über B , so ist auch C ganz über A .

Kor. Sei C der ganze Abschluss von A in B . Dann ist C ganz abgeschlossen in B .

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erw. komm. Ringe. Dann gilt:

- Für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ ist B/\mathfrak{b} ganz über $A/(A \cap \mathfrak{b})$.
- Für jede mult. abg. Teilmenge $S \subseteq A$ ist $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$.

Prop (**Noethernormalisierung**). Sei K ein Körper und \mathfrak{a} ein Ideal in $A := K[x_1, \dots, x_n]$. Dann gibt es algebraisch unabhängige Elemente $y_1, \dots, y_n \in A$, sodass A ganz über $B := K[y_1, \dots, y_n]$ ist, und ein $0 \leq r \leq n$ mit $B \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \dots, y_n)$.

Beweis. Per Ind. über n . Der Fall $n = 0$ ist trivial. Sei nun $n > 0$.

- Falls $\mathfrak{a} = (0)$, so setze $y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n$ und $r := n$.
- Ansonsten wähle ein Polynom $f = \sum_{\alpha \in M} \lambda_\alpha x^\alpha \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$, wobei $M \subset \mathbb{N}^n$ endlich ist mit $\lambda_\alpha \in K^\times$ für alle $\alpha \in M$.
- Wähle $w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{N}$ und $w_n := 1$, sodass die Abbildung

$$w: M \rightarrow \mathbb{N}, \quad \alpha \mapsto \alpha \cdot w := \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

injektiv ist. (Dies kann man etwa erreichen, indem man die Tupel in M als Zahlen in einem Stellenwertsystem mit genügend großer Basis $b := 1 + \max_{\alpha \in M} \max_{i=1, \dots, n} \alpha_i$ ansieht und $w_i := b^{n-i}$ setzt.)

- Setze $z_i = x_i - x_n^{w_i}$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $A' := K[z_1, \dots, z_{n-1}]$.
- Dann kann man f im Polynomring $K[z_1, \dots, z_{n-1}, x_n] = A'[x_n]$,

$$f = \sum_{\alpha \in M} \lambda_\alpha (z_1 + x_n^{w_1})^{\alpha_1} \dots (z_{n-1} + x_n^{w_{n-1}})^{\alpha_{n-1}} \cdot x_n^{\alpha_n},$$

auch schreiben als $f = \lambda_\beta \cdot x_n^m + \mu_1 \cdot x_n^{m-1} + \dots + \mu_m$, wobei $\beta := \arg \max_{\alpha \in M} w(\alpha)$, $m := w(\beta)$ und $\mu_i \in K[z_1, \dots, z_{n-1}]$.

Somit sind x_n und alle weiteren x_i , also A , ganz über $A'[f]$.

- Setze $y_n := f$. Die IH, angewendet auf $A' := K[z_1, \dots, z_{n-1}]$, liefert algebraisch unabhängige $y_1, \dots, y_{n-1} \in A' \subset A$ mit A' ganz über $B' := K[y_1, \dots, y_{n-1}]$ und $0 \leq r \leq n-1$ mit $B' \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \dots, y_{n-1})$. Dann sind $B = B'[y_n] \subseteq A'[y_n] \subseteq A$ ganze Körpererweiterungen und $B \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \dots, y_n)$. \square

Bem. Insbesondere ist $K[y_1, \dots, y_r] \rightarrow A/\mathfrak{a}$ ein endlicher injektiver Homomorphismus von K -Algebren.

Die Cohen-Seidenbergsche Sätze

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen. Dann ist B genau dann ein Körper, wenn A ein Körper ist.

Kor. Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung komm. Ringe und $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal. Dann gilt: $\mathfrak{q} \subset B$ maximal $\iff A \cap \mathfrak{q} \subset A$ maximal.

Kor. Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung komm. Ringe. Seien $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ zwei Primideale in B mit $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}'$.

Satz. Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung komm. Ringe und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Satz („Going up“). Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erw. komm. Ringe. Sei $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Kette von Primidealen in A und $\mathfrak{q}_1 \subset B$ ein Primideal mit $A \cap \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1$. Dann gibt es eine Kette $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ von Primidealen in B mit $A \cap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung komm. Ringe, C der ganze Abschluss von A in B und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}C$ der ganze Abschluss von $S^{-1}A$ in $S^{-1}C$.

Def. Ein Integritätsbereich heißt **ganz abgeschlossen**, falls er in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist.

Bspe. \mathbb{Z} und $K[x_1, \dots, x_n]$ sind ganz abgeschlossen

Prop. Sei A ein Integritätsbereich. Dann sind äquivalent:

- A ist ganz abgeschlossen.

- Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ist $A_{\mathfrak{p}}$ ganz abgeschlossen.
- Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ ist $A_{\mathfrak{m}}$ ganz abgeschlossen.

Def. Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung komm. Ringe und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal.

- Ein Element $x \in B$ heißt **ganz** über \mathfrak{a} , falls x eine Gleichung der Form $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ erfüllt.
- Der **ganze Abschluss** von \mathfrak{a} in B ist $\{x \in B \mid x \text{ ist ganz über } \mathfrak{a}\}$.

Lem. Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und C der ganze Abschluss von A in B . Dann ist $\sqrt{C}\mathfrak{a}$ der ganze Abschluss von \mathfrak{a} in B .

Def. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Ein Element $x \in L$ heißt **algebraisch**, wenn es ganz über K ist.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei A ganz abgeschlossen mit Quotientenkörper K . Sei $x \in B$ ganz über einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Dann ist x algebraisch über K und für sein Minimalpolynom $f \in K[t]$ gilt $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}[t]$.

Satz („Going-down“). Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erw. von Integritätsbereichen und A ganz abgeschlossen. Sei $\mathfrak{p}_1 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Kette von Primidealen in A und $\mathfrak{q}_1 \subset B$ ein Primideal mit $A \cap \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1$. Dann gibt es eine Kette $\mathfrak{q}_1 \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{q}_n$ von Primidealen in B mit $A \cap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Prop. Sei A ein ganz abgeschl. Integritätsbereich mit Quotientenkörper K . Sei $L \supseteq K$ eine endliche, separable Körpererweiterung und B der ganze Abschluss von A in L . Dann ex. eine Basis v_1, \dots, v_n von L über K , sodass $B \subseteq Av_1 + \dots + Av_n$.

Bewertungsringe

Def. Ein Integritätsbereich B mit Quotientenkörper K heißt **Bewertungsbereich** für K , falls gilt: $\forall x \in K^\times : x \in B \vee x^{-1} \in B$.

Prop. Sei B ein Bewertungsring. Dann gilt:

- B ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} := B \setminus B^\times$.
- B ist ganz abgeschlossen.

Satz. Sei K ein Körper, $L \supset K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $B \subseteq K$ ein Unterring. Sei $\phi : B \rightarrow L$ ein nicht in K fortsetzbarer Ringhomomorphismus, d. h. ist $\hat{\phi} : B' \rightarrow L$ ein Ringhomomorphismus definiert auf einem Unterring $B' \subseteq K$ mit $B' \supseteq B$ mit $\hat{\phi}|_B = \phi$, so gilt $B = B'$. Dann gilt:

- B ist ein lokaler Ring mit max. Ideal $\mathfrak{m} = \ker \phi$.
- Sei $x \in K^\times$. Dann gilt $\mathfrak{m}[x] \neq B[x]$ oder $\mathfrak{m}[x^{-1}] \neq B[x^{-1}]$.
- B ist ein Bewertungsring für K .

Kor. Sei $A \subseteq K$ ein Unterring eines Körpers. Dann ist der ganze Abschluss \overline{A} von A in K der Schnitt aller Bewertungsringe B von K mit $B \supseteq A$.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine endlich erzeugte Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei $v \in B \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $u \in A \setminus \{0\}$ mit folgender Eigenschaft: Jeder Homomorphismus $\phi : A \rightarrow L$ in einen algebraisch abgeschlossenen Körper L mit $\phi(u) \neq 0$ kann zu einem Homomorphismus $\psi : B \rightarrow L$ mit $\psi(v) \neq 0$ fortgesetzt werden.

Kor. Ist eine endlich erzeugte K -Algebra B ein Körper, so ist B eine endliche algebraische Erweiterung von K .

Kor (Schwacher Hilbertscher Nullstellensatz). Ist \mathfrak{m} ein maximales Ideal einer endlich erzeugten K -Algebra A , so ist A/\mathfrak{m} eine endliche algebraische Erweiterung von K . Insbesondere ist $A/\mathfrak{m} \cong K$, falls K algebraisch abgeschlossen ist.

Kettenbedingungen

Prop. Sei X eine teilweise geordnete Menge. Dann sind äquivalent:

- Jede aufsteigende Folge $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ in X ist **stationär**, d. h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x_N$ für alle $n \geq N$.
- Jede nicht leere Teilmenge $A \subseteq X$ besitzt ein maximales Element, d. h. $\exists a \in A : \forall b \in A : a \leq b \implies a = b$.

Def. Sei A ein Ring und M ein A -Modul.

- Ist jede bzgl. der Inklusion aufsteigende Folge $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$ von Untermoduln von N stationär, so heißt M **noethersch**.
- Ist jede bzgl. der Inklusion absteigende Folge $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$ von Untermoduln von N stationär, so heißt M **artinsch**.

Bspe.	A	M	noethersch?	artinsch?
	\mathbb{Z}	irgendeine endl. Gruppe	✓	✓
	\mathbb{Z}	$\{x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid \text{ord}(x) = p^n\}$ mit p prim	✗	✓
	\mathbb{Z}	$\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ gekürzt} \mid b = p^n\}$	✗	✗

Prop. Sei A ein Ring. Ein A -Modul M ist genau dann noethersch, wenn alle seine Untermodule endlich erzeugt sind.

Prop. Sei A ein Ring und $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von A -Moduln. Dann gilt:

- M noethersch $\iff M', M''$ noethersch
- M artinsch $\iff M', M''$ artinsch

Kor. Die endliche direkt Summe von noetherschen/artinschen A -Moduln ist noethersch/artinsch.

Def. Ein Ring A heißt **noethersch/artinsch**, falls er als Modul über sich selbst noethersch/artinsch ist.

Bem. Ein Ring ist genau dann noethersch/artinsch, wenn die Menge seiner Ideale die aufsteigende/absteigende Kettenbedingung erfüllt.

Bspe.	A	noethersch?	artinsch?
	\mathbb{Z}	✓	✗
	ein bel. HIB	✓	?
	$K[x]$	✓	✗
	$K[x_1, x_2, \dots]$	✗	✗

Achtung. Unterringe von noetherschen Ringen sind nicht unbedingt noethersch.

Prop. Ist A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A -Modul, so ist M noethersch.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal in einem noetherschen Ring A . Dann ist auch der Ring A/\mathfrak{a} noethersch.

Def. Sei A ein Ring und M ein A -Modul.

- Eine **Untermodulkette** von M der Länge n ist eine Kette von Untermoduln der Form $M_\bullet : M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M_n = 0$.
- M heißt **einfach**, falls 0 und M die einzigen Untermoduln von M sind.
- Eine Untermodulkette heißt **Kompositionsreihe**, wenn die Quotienten M_i/M_{i+1} jeweils einfach sind.
- Die **Länge** $\ell(M) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ von M ist das Infimum aller Längen von Kompositionsreihen von M .

Prop. Sei A ein Ring und M ein A -Modul der Länge $n := \ell(M) < \infty$. Dann gilt:

- Für jeden echten Untermodul $N \subsetneq M$ gilt $\ell(N) < \ell(M)$.
- Die Länge jeder Untermodulkette in M ist $\leq \ell(M)$.
- Jede Kompositionsreihe von M hat die Länge n .
- Jede Untermodulkette von M lässt sich zu einer Kompositionsreihe erweitern.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring. Ein A -Modul M besitzt genau dann eine Kompositionsreihe, wenn M noethersch und artinsch ist.

Def. Ein A -Modul M heißt **von endlicher Länge**, wenn M noethersch und artinsch ist.

Prop. Sei A ein Ring. Die Länge ist eine additive Funktion auf $\mathfrak{C} := \{ A\text{-Moduln endlicher Länge} \}$.

Satz (Jordan-Hölder). Sind M_\bullet und M'_\bullet zwei Kompositionsreihen eines A -Moduls M endlicher Länge n , so existiert eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $M_{i-1}/M_i \cong M'_{\sigma(i-1)}/M'_{\sigma(i)}$.

Prop. Für einen VR V über einem Körper K sind äquivalent:

- V ist endlich-dimensional.
- V ist von endlicher Länge.
- V ist noethersch.
- V ist artinsch.

Kor. Seien $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ maximale Ideale in einem kommutativen Ring mit $(0) = \mathfrak{m}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{m}_n$. Dann ist A genau dann noethersch, wenn A artinsch ist.