Spektralsequenzen

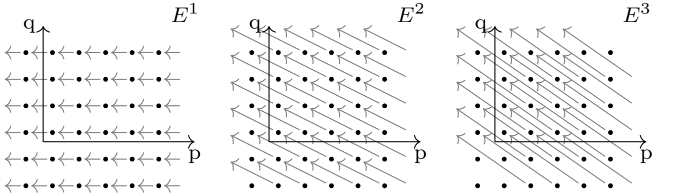
Sei $\mathcal{A}$ im Folgenden eine abelsche Kategorie.

Def. Eine (homologische) **Spektralsequenz** (SS) besteht aus

- Objekten $E^r_{p,q} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \geq 1$,
- Morphismen $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ mit $d^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{p,q} = 0$
- und Isos $\alpha : H_{p,q}(E^r) := \ker(d^r_{p,q}) / \operatorname{im}(d^r_{p+r,q-r+1}) \xrightarrow{\cong} E^{r+1}_{p,q}$.

Sprechweise. • Die Morphismen $d^r_{p,q}$ heißen **Differentiale**.
• Die Gesamtheit $E^r := \{E^r_{p,q}\}_{p,q}$ mit $r \in \mathbb{N}$ fest heißt r-te **Seite**.

Bem. Man stellt Seiten in einem 2-dim Raster dar:



Die Differentiale in E^2 laufen wie Springer-Züge beim Schach.

Bem. Bei einer kohomologischen Spektralsequenz sind die Indizes vertauscht und die Differentiale laufen $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$.

Notation. Man verwendet auch eine zweite, alternative Indizierung: $E^*_{n,p} =: E^*_{p,q}$ mit $n = p + q$.

Def. Ein Morphismus $E \to E'$ von (homol.) Spektralsequenzen ist gegeben durch Abbildungen $f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E'^r_{p,q}$ mit

- $d'^r_{p,q} \circ f^r_{p,q} = f^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{p,q}$,
- $f^{r+1}_{p,q} = H_{p,q}(f^r_{p,q})$.

Def. Eine Spektralsequenz **konvergiert**, falls für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ ein $R \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $r \geq R$ die Differentiale von und nach $E^r_{p,q}$ null sind und damit $E^\infty_{p,q} := E^R_{p,q} \cong E^{R+1}_{p,q} \cong E^{R+2}_{p,q} \ldots$
Der **Grenzwert** der SS ist die Unendlich-Seite $E^\infty := \{E^\infty_{p,q}\}_{p,q}$.

Notation. $E^r \Rightarrow E^\infty$

Bem. Viele Spektralsequenzen leben im ersten Quadranten, d. h. $E^r_{p,q} = 0$ wenn $p < 0$ oder $q < 0$. Das impliziert, dass für p, q fest und r groß alle Differentiale von und nach $E^r_{p,q}$ aus dem ersten Quadranten heraus- oder hineinführen und damit Null sind. Somit konvergieren solche Spektralsequenzen immer.

Def. Eine SS **degeneriert** auf Seite R, wenn $d^r_{p,q} = 0$ für alle $r \geq R$.

Bem. Das entspricht einer Art gleichmäßigen Konvergenz.

Def. Eine **Filtrierung** eines Obj. $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ist eine aufsteigende Folge ... $\subseteq F_p M \subseteq F_{p+1} M \subseteq$ ... von Unterobjekten von M, $p \in \mathbb{Z}$, sodass $0 = \cap_p F_p M := \lim\limits_{p \to -\infty} F_p M$ und $M = \cup_p F_p M := \operatorname*{colim}\limits_{p \to \infty} F_p M$.

Def. Eine SS E **konvergiert gegen** eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von Objekten aus $\mathcal{A}$ mit Filtrierungen $\ldots \subseteq F_p E_n \subseteq F_{p+1} E_{n+1} \subseteq \ldots$ falls $E^\infty_{p,q} \cong F_{p+1} E_{p+q} / F_p E_{p+q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.

Bem. Bei vielen SS sind die Objekte $E^1_{p,q}$ oder $E^2_{p,q}$ bekannt und man möchte mithilfe der Spektralsequenz die Objekte E_n berechnen. In anderen Anw. kennt man E_n und schließt daraus auf $E^r_{p,q}$. Allgemein gilt: Je mehr Objekte Null sind, desto leichter lässt sich die SS für konkrete Berechnungen verwenden.

Bem. Es gibt Invarianten, die in einer SS von Seite zu Seite unverändert bleiben:

Def. Sei C eine abelsche Gruppe und $\chi : \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \to C$ eine additive Funktion, d. h. $\chi(X) = \chi(Y) + \chi(X/Y)$ für alle $(Y \hookrightarrow X) \in \mathcal{A}$ und $\chi(X) = \chi(X')$ falls $X \cong X'$. Für einen endl. Komplex $K^\bullet$ heißt dann

$$\chi(K^\bullet) := \sum_i (-1)^i \chi(K^i) \qquad \textbf{Euler-Charakteristik} \text{ von } K^\bullet.$$

Lem. $\chi(K^\bullet) \cong \sum_i (-1)^i \chi(H^i(K^\bullet))$.

Bem. Sei E eine SS, die gegen $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ konvergiert. Setze

$$E^r_n := \oplus_{p+q=n} E^r_{p,q}, \quad d^r_n := \oplus_{p+q=n} d^r_{p,q} \qquad \text{für } r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Angenommen, für ein $r_0 \in \mathbb{N}$ sind alle obigen direkten Summen sowie $E^{r_0}{}_\bullet$ endlich. Dann gilt selbiges für alle $r \geq r_0$ und

$$\chi(E^r_\bullet) = \sum_i (-1)^i \chi(H_i(E^r_\bullet)) = \chi(E^{r+1}_\bullet) = \chi(E^\infty_\bullet) = \sum_n (-1)^n \chi(E^n),$$

$$\chi(E_n) = \sum_p \chi(F_{p+1} E_n / F_p E_n) = \sum_{p+q=n} \chi(E^\infty_{p,q}).$$

Exakte Pärchen

Def. Ein **exaktes Pärchen** (A, E) in $\mathcal{A}$ ist gegeben durch Objekte $A, E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ und Morphismen wie folgt

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

sodass das Dreieck an jeder Ecke exakt ist.

Bem. Für das Differential $d := j \circ k : E \to E$ gilt $d^2 = 0$.

Def. Sei ein exaktes Pärchen (A, E) gegeben.
Dann gibt es ein **abgeleitetes Pärchen** (A', E')

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "i'"] & & A' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

mit • $E' := \ker(d) / \operatorname{im}(d)$, • $A' := i(A) \subset A$,
• $i' := i|_{A'}$ • $j'(i(a)) := [j(a)] \in E'$ • $k'([e]) := k(e)$

Lem. Das abgeleitete Pärchen eines exakten Pärchens ist exakt.

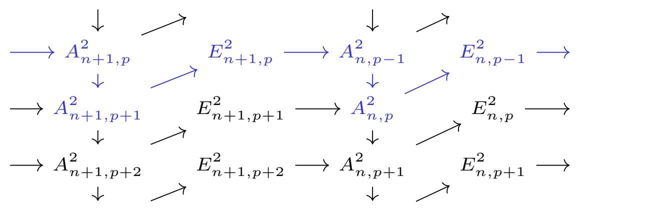
Bem. Man erhält nun aus einem exakten Pärchen (A^1, E^1) durch wiederholtes Ableiten eine Folge von exakten Pärchen $(A^r, E^r)_{r \in \mathbb{N}}$. Die E^r bilden mit $d^r : E^r \to E^r$ eine Spektralseq. im folgenden Sinne:

Bem. Man kann auch die r-te Seite als einzelnes Obj. E^r auffassen. Dann ist eine **Spektralsequenz** gegeben durch Objekte E^r, $r \geq 1$, Differentiale $d^r : E^r \to E_r$ mit $d^r \circ d^r = 0$ und Isomorphismen $\alpha^r : H(E^r) := \ker(d^r) / \operatorname{im}(d^r) \to E^{r+1}$.

Bem. Sei $\ldots \subseteq X_p \subseteq X_{p+1} \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Filtrierung eines topologischen Raumes X. Man kann dann die Homologiegruppen (mit Koeffizienten implizit) übersichtlich in ein Raster schreiben:

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(X_p) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n+1}(X_p, X_{p-1}) \arrow[r] & H_n(X_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_{p-1}, X_{p-2}) \arrow[r] & {} \\
H_{n+1}(X_{p+1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n+1}(X_{p+1}, X_p) \arrow[r] & H_n(X_p) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_p, X_{p-1}) \arrow[r] & {} \\
H_{n+1}(X_{p+2}) \arrow[r] & H_{n+1}(X_{p+2}, X_{p+1}) \arrow[r] & H_n(X_{p+1}) \arrow[r] & H_n(X_{p+1}, X_p) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Die langen exakten Sequenzen von Raumpaaren liegen treppenstufenartig in diesem Raster. Man erhält aus den langen Morphismen wie in den l. e. S. (rechts, rechts, runter) ein exaktes Pärchen (A, E) mit $A^1_{n,p} := H_n(X_p)$ und $E^1_{n,p} := H_n(X_p, X_{p-1})$. Beim Bilden des abgeleiteten Pärchens verschieben sich die exakten Sequenzen:



Prop. Angenommen, in jeder A^1-Spalte sind alle bis auf endlich viele Morphismen Isomorphismen. Dann hat man in jeder Spalte stabile obere und untere Werte $A^1_{n,\mp\infty}$. Außerdem konvergiert dann die Spektralsequenz der $E^r_{n,p}$.

- Falls $A^1_{n,-\infty} = 0$ für alle n, dann ist $E^\infty_{n,p} \cong F^p_n / F^{p-1}_n$, wobei
$$F^p_n := \operatorname{im}(A^1_{n,p} \to A^1_{n,\infty}) \subseteq A^1_{n,\infty}$$
eine Filtrierung $\ldots \subseteq F^{p-1}_n \subseteq F^p_n \subseteq \ldots$ von $A^1_{n,\infty}$ ist.
- Falls $A^1_{n,\infty} = 0$ für alle n, dann ist $E^\infty_{n,p} \cong F^{n-1}_p / F^{n-1}_{p-1}$ mit
$$F^p_{n-1} := \ker(A^1_{n-1,-\infty} \to A^1_{n-1,p}) \subseteq A^1_{n-1,-\infty}.$$

Bem. Die erste Bedingung ist äquivalent dazu, dass in jeder E^1-Spalte nur endlich viele Objekte ungleich Null sind.
Angenommen, die Filtrierung des Raums X erfüllt $X_p = \emptyset$ für $p < 0$. Im Homologiesetting ist die Bed. erfüllt, wenn es für alle n ein p gibt, sodass $H_n(X_p) \cong H_n(X_{p+1}) \cong \ldots \cong H_n(X)$ induziert durch Inklusion. Dann gilt $A^1_{n,\infty} = H_n(X; G)$ und $F^p_n = \operatorname{im}(H_n(X_p; G) \to H_n(X; G))$. Man sagt, die SS konvergiere gegen $H_*(X; G)$.

Bem. Oft ist X ein CW-Komplex und die Filtrierung X_p gegeben durch die p-Skelette von X. Dann ist $E^1_{n,p} := H_n(X_p, X_{p-1}; G) = 0$ für $n < p$, da (X_p, X_{p-1}) $(p-1)$-zusammenhängend ist. Das ist der Grund für die zwei alternativen Notationen $E^*_{n,p}$ und $E^*_{p,q}$.

Bem. In Kohomologie gibt es eine SS mit $A_1^{n,p} := H^n(X_p)$ und $E_1^{n,p} = H^n(X_p, X_{p-1})$. Für die Proposition benötigt man dann $H^n(X) \cong \ldots \cong H^n(X_{p+1}) \cong H^n(X_p)$ durch Inklusion für alle n und p groß. Dann ist $E_\infty^{n,p} \cong F_p^n / F_{p+1}^n$ mit $F_p^n = \ker(H^n(X) \to H^n(X_{p-1}))$.

Die Leray-Serre-Spektralsequenz

Def. Eine **Serre-Faserung** ist eine stetige Abb. $p : E \to B$, die die Homotopieliftungseigenschaft für alle CW-Komplexe A erfüllt, d. h. für alle H, H_0 wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales $\tilde{H}$, sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ A \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists\, \tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Lem. Die Homotopieliftungseig. ist genau dann für alle CW-Komplexe erfüllt, wenn sie für die Kuben $A = [0,1]^n$ erfüllt ist.

Bem. Jeder stetige Weg $\gamma : [0,1] \to B$ in B induziert eine Homotopieäquivalenz $\gamma_* : p^{-1}(\gamma(0)) \to p^{-1}(\gamma(1))$ zwischen den Fasern über Anfangs- und Endpunkt. Wenn B wegzshgd ist, so sind alle Fasern homotopieäquivalent und man notiert $F \to E \to B$ für die Faserung, wobei F die Faser über einem beliebigen Punkt ist. Man erhält eine Wirkung der Fundamentalgr. $\pi_1(B)$ auf der Homologie $H_k(F)$ durch

$$\pi_1(B) \to \mathrm{Aut}(H_k(F)), \quad [(\gamma : [0,1] \to B)] \mapsto (\gamma_* : F \to F)_*$$

Thm. Sei $F \to X \to B$ eine Serre-Faserung, B wegzshgd und G eine ab. Gruppe. Angenommen, $\pi_1(B)$ wirkt trivial auf $H_*(F;G)$. Dann gibt es die **(Leray-)Serre-Spektralsequenz** mit

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F;G)),$$

deren Eintrag $E^\infty_{p,q} = E^\infty_{p,n-p}$ der Quotient F_n^p / F_n^{p-1} in einer Filtration $0 \subseteq F_n^0 \subseteq \ldots \subseteq F_n^n = H_n(X;G)$ von $H_n(X;G)$ ist.

Konstruktion. Für einen CW-Komplex B und Faserung $p : X \to B$ mit Faser F sei $X_p := p^{-1}(B_p)$ das Urbild des p-Skeletts von B. Da (X, X_p) p-zshgd ist, induziert $X_p \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus $H_n(X_p; G) \cong H_n(X;G)$ für $n < p$. Man zeigt, dass für die von dieser Faserung von X induzierte SS gilt: $E^2_{p,q} \cong H_p(B; H_q(F;G))$.

Bem. Wenn G ein Körper ist, so folgt $H_n(X;G) \cong \oplus_p E^\infty_{p,n-p}$.

Thm. Sei $F \to X \xrightarrow{p} B$ eine Serre-Faserung, die die Bedingungen für Ex. der Serre-SS erfüllt, $B' \subset B$ ein Unterraum, $X' := p^{-1}(B')$. Dann gibt es eine **relative (Leray-)Serre-Spektralsequenz** mit

$$E^2_{p,q} = H_p(B, B'; H_q(F;G)),$$

welche gegen $H_*(X, X'; G)$ konvergiert.

Bem. Sei eine Abbildung $(f, \tilde{f})$ von Faserungen, die die Voraussetzungen für Existenz der Serre-SS erfüllen, wie folgt gegeben:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & B \arrow[d, "f"] \\ F' \arrow[r] & X' \arrow[r, "p'"] & B' \end{tikzcd}$$

Dann gibt es ind. Morphismus $f_* : E \to E'$ der zugeh. Serre-SS, der für $r \to \infty$ gegen die Abb. $\tilde{f}_* : H_*(X;G) \to H_*(X';G)$ konvergiert, welche mit den Filtrierungen F_n^p und $F_n'^p$ verträglich ist. Außerdem entspricht der Morphismus bei $E^2_{p,q}$ der von $B \to B'$ und $F \to F'$ induzierten Abbildung $H_p(B; H_q(F,G)) \to H_p(B'; H_q(F', G))$. Die Zuordnung $(f, \tilde{f}) \mapsto f_*$ ist funktoriell.

Prop. Sei eine Abbildung $(f, \tilde{f})$ von Faserungen wie oben, R ein Hauptidealbereich. Wenn zwei der Abbildungen $F \to F'$, $B \to B'$ und $X \to X'$ Isomorphismen in Homologie mit R-Koeffizienten induzieren, so auch die dritte.

Def. Sei $F \to X \xrightarrow{p} B$ eine Serre-Faserung. Betrachte

$$H_n(B) \xrightarrow{i_*} H_n(B, b_0) \xleftarrow{p_*} H_n(X, F) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(F)$$

Dabei ist i_* ein Iso für $n > 0$, p_* aber im Allgemeinen nicht. Die **Transgression** ist die induzierte Abbildung

$$t_n : i_*^{-1}(\mathrm{im}(p_*)) \to H_{n-1}(F)/\partial(\ker(p_*)).$$

Bem. Die Transgression entspricht dem Verbindungsmorphismus $\pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F)$ in der l. e. S. von Homotopiegr. einer Faserung. Manchmal wird auch die additive Relation $R \subseteq H_n(B) \times H_{n-1}(F)$ als Transgression bezeichnet.

Prop. Die Transgression ist gleich einem Differential der Serre-SS:

$$t_n = d_n : E^n_{n,0} \to E^n_{0,n-1}.$$

Thm. Sei $F \to E \to B$ eine Serre-Faserung, B wegzshgd und G eine ab. Gruppe. Angenommen, $\pi_1(B)$ wirkt trivial auf $H^*(F;G)$. Dann ex. die **(Leray-)Serre-Spektralsequenz** für Kohomologie mit

$$E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F;G)),$$

deren Eintrag $E_\infty^{p,n-p}$ der Quotient F_p^n / F_{p+1}^n in einer Filtration $0 \subseteq F_n^n \subseteq \ldots \subseteq F_0^n = H^n(X;G)$ von $H^n(X;G)$ ist.

Lem. Sei $F \to E \to B$ eine Serre-Faserung, die die Bed. für Existenz der Serre-SS erfüllt und R ein Ring. Dann gibt bilineare Abbildungen

$$d_r^{(p,q,s,t)} : E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \to E_r^{p+s,q+t}, \quad (x,y) \mapsto xy$$

mit folgenden Eigenschaften:

- d_r ist derivativ: $d_r(xy) = (d_r x)y + (-1)^{p+q} x (d_r y)$
- Die Abbildung d_{r+1} ist gegeben durch
  $$d_{r+1} : E_{r+1}^{p,q} \times E_{r+1}^{s,t} \to E_{r+1}^{p+s,q+t}, \quad ([x],[y]) \mapsto [xy].$$
  Diese ist wohldefiniert wegen Derivativität.
- $d_2 : E_2^{p,q} \times E_2^{r,s} \to E_2^{p+s,q+t}$ ist das $(-1)^{qs}$-fache des Cup-Produkts
  $$H^p(B; H^q(F;R)) \times H^s(B; H^t(F;R)) \to H^{p+s}(B; H^{q+t}(F;R)),$$
  wobei Koeffizienten mit dem Cup-Produkt von $H^*(F;R)$, $H^q(F;R) \times H^q(F;R) \to H^{q+t}(F;R)$, multipliziert werden.
- Das Cup-Produkt in $H^*(X;R)$ respektiert die Faserungen von $H^n(X;R)$ und schränkt daher ein zu Abb. $F_p^m \times F_s^n \to F_{p+s}^{m+n}$. Die induzierte Abbildung auf dem Quotienten $F_p^m / F_{p+1}^m \times F_s^n / F_{s+1}^n \to F_{p+s}^{m+n} / F_{p+s+1}^{m+n}$ entspricht $d_\infty : E_\infty^{p,m-p} \times E_\infty^{s,n-s} \to E_\infty^{p+s,m+n-p-s}$.