Zusammenfassung Numerik von PDEs

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine DGL der Form

$$F(x, u, Du, \dots, D^k u) = 0$$

heißt **partielle DGL/PDE** der Ordnung $k \geq 1$, wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht ist.

Def (**Klassifikation von PDEs**).

- Die PDE heißt **linear**, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$
mit Funktionen $a_\alpha, f : \Omega \to \mathbb{R}$ besitzt.
- Die PDE heißt **semilinear**, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(x, u, D_u, \dots, D^{k-1}u) = 0$$
besitzt, wobei $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ und $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$ gegeben sind.
- Die PDE heißt **quasilinear**, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{k-1}u) D^\alpha u + a_0(x, u, D_u, \dots, D^{k-1}u) = 0$$
hat, wobei $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k}$ gegeben sind.
- Die PDE heißt **nichtlinear**, falls die Ableitungen der höchsten Ordnung nicht linear vorkommen.

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Eine PDE der Form

$$F(x, u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1}\partial_{x_1} u, \dots, \partial x_1 \partial_{x_n} u, \dots, \partial_{x_n}\partial_{x_n} u) = 0$$

heißt **PDE zweiter Ordnung**.

Notation. $p_i := \partial_{x_i} u$, $p_{ij} := \partial^2_{x_i x_j} u$

$$M(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_{11}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial p_{n1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{nn}} \end{pmatrix} = M(x)^T.$$

Def (**Typeneinteilung für PDEs der 2. Ordnung**). Obige PDE zweiter Ordnung heißt

- **elliptisch** in x, falls die Matrix $M(x)$ positiv o. definit ist.
- **parabolisch** in x, falls genau ein EW von $M(x)$ gleich null ist und alle anderen dasselbe Vorzeichen haben.
- **hyperbolisch** in x, falls genau ein EW ein anderes Vorzeichen als die anderen EWe hat.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt.

- $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ist der Raum aller auf $\overline{\Omega}$ stetigen Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) := \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} = \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} \|u(x)\|$. (Damit wird $(\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m), \|{-}\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)})$ zu einem Banach-Raum.)
- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N}$ ist der Raum aller auf Ω k-mal stetig diff'baren Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden können.
$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)}$$
- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid H_\alpha(u, \overline{\Omega}) := \sup\limits_{x,y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} < \infty\}$ heißt **Raum aller gleichmäßig Hölder-stetigen Funktionen zum Exponent** $\alpha \in [0, 1)$.

Bem.
- $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ heißt **Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen**,
- Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig
- $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid \forall\, |\gamma| = k : D^\gamma u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)\}$
$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} + \sum_{|\gamma|=k} H_\alpha(D^\gamma u, \overline{\Omega})$$
Damit wird $(\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m), \|{-}\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)})$ zu einem Banach-Raum.

Bsp. Betrachte $u(x) = |x|^\beta$ auf $(-1, 1) = \Omega$. Dann ist

$$\frac{|u(x) - u(0)|}{|x - 0|^\alpha} = |X|^{\beta - \alpha}$$

genau dann beschränkt, falls $\beta \geq \alpha$. In dem Fall ist u Hölder-stetig zum Exponent α.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Das Gebiet Ω gehört zur Klasse $\mathcal{C}^{k,\alpha}$, wenn in jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung in $\partial\Omega$ existiert, die sich in einem geeigneten Koordinatensystem als ein Graph einer Funktion aus $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ darstellen lässt und Ω liegt lokal immer auf einer Seite von $\partial\Omega$.

Satz (Gauß'scher Integralsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet und $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \div u \,\mathrm{d}x \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n u_i \nu_i \,\mathrm{d}\rho(x) = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu \,\mathrm{d}\rho(x),$$

wobei $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ der äußere Normalenvektoran an den RAnd von Ω ist.

$$\mathcal{L}u = f \text{in } \Omega \text{ (PDE)}$$
$$\mathcal{R}u = g \text{auf } \partial\Omega \text{ (Randbedingung)}$$

wobei $\mathcal{L}u = -\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$ (linearer Differentialoperator) mit $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j}$ symmetrisch.
Randbedingungen:

- **Dirichlet-Randbedingung**: $u = g$ auf $\partial\Omega$
- **Neumann-Randbedingung**: $(A(x)\nabla u) \cdot \nu = g$ auf $\partial\Omega$
- **Robin-Randbedingung**: $A(x)\nabla u \cdot \nu + \delta u = g$ auf $\partial\Omega$

Bem. Man kann auch auf verschiedenen Teilstücken des Randes verschiedene Bedingungen stellen.

Bem. Falls a_{ij} differenzierbar sind, kann $\mathcal{L}$ in Divergenzform geschrieben werden:

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = -\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right.\right.$$

Voraussetzungen:

- $\mathcal{L}$ ist **gleichmäßig elliptisch**, d. h.
$$\exists \lambda_0 > 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \Omega : \xi^T A(x) \xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2$$
Dabei heißt λ_0 **Elliptizitätskonstante** Bemerkung: $\mathcal{L} = f$ ist elliptisch auf $\Omega \iff A(x) > 0$ (spd) für alle $x \in \Omega$
- $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$

Def. Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ heißt **klassische Lsg** vom (RWP) mit $Ru := u$, wenn die beiden Gleichungen in (RWP) in jedem Punkt von Ω bzw. des Randes $\partial\Omega$ erfüllt sind.

Satz (**Maximumsprinzip**). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Sei $u \in \mathcal{C}^2(\omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ eine Lösung vom (RWP) und $f \leq 0$ in Ω und $c \equiv 0$. Dann nimmt u sein Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an, d. h.

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} g(x)$$

Kor. Sei $c \geq 0$ und $f \leq 0$. Dann gilt

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max\{\sup_{x \in \partial\Omega} u(x), 0\}.$$

Kor (**Vergleichsprinzip**). Für $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ und $c \geq 0$ gelte $\mathcal{L}u_1 \leq \mathcal{L}u_2$ in Ω und $u_1 \leq u_2$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $u_1 \leq u_2$ auf $\overline{\Omega}$.

Kor (Eindeutigkeit). Sei $c \geq 0$. Dann hat (RWP) höchstens eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Bsp. $-u'' - \lambda u = 0$ in $\Omega = (0, 1)$ mit $\lambda > 0$, $u(0) = u(1) = 0$. 1) $u \equiv 0$ ist eine Lösung
2) Für $\lambda = k^2\pi^2$ ist $u(x) = a\sin(k\pi x)$ auch eine Lösung

Satz. Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $c \geq 0$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann besitzt (RWP) genau eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Bspe.
- $-\Delta u = 0$ in $(0, 1) \times (0, 1)$, $u(0, x_2) = 0$, $u(1, x_2) = x_2$, $u(x_1, 0) = 0$, $u(x_1, 1) = x_1$ für $x_1, x_2 \in [0, 1]$. Lösung: $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$
- $-\Delta u = 0$ in $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $u(x_1, x_2) = x_1^2$. Nach Satz 2.5 existiert eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ aber $u \notin \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, denn
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 2 \neq 0$$
auf $\partial\Omega$.

Differenzenverfahren

3.1. Differenzenverfahren für die Poisson-Gleichung in $\Omega = (0, 1)$

Poisson-Problem:

$-\Delta u = f in \Omega = (0, 1)$
$u(0) = g_0, u(1) = g_1$

Algorithmus. 1. Diskretisierung: Sei $n \in \mathbb{N}$, $h := \frac{1}{n}$,
$\Omega_h := \{x_i := ih \,|\, i = 1, \ldots, n-1\}$ die Menge innerer Gitterpunkte,
$\partial\Omega_h = \{x_0 = 0, x_n = 1\}$ die Menge der Randpunkte

2. Approximation der Ableitungen durch Differenzenquotienten

$$u'(x_i) \approx \frac{1}{h}\left(u(x_i + h) - u(x_i)\right) u'(x_i) \approx \frac{1}{h}\left(u(x_i) - u(x_i - h)\right) u'(x_i) \approx \frac{1}{2h}\left(u(x_i + h) - u(x_i - h)\right)$$

heißen **Vorwärtsdifferenzenquotient** (VDQ), **Rückwärtsdifferenzenquotient** (RDQ) bzw. **zentraler Differenzenquotient** (ZDQ)

$$u''(x_i) = (u'(x_i)) \approx \frac{u'(x_i + h) - u'(x_i)}{h} \approx \frac{\frac{1}{h}\left(u(x_i + h) - x(x_i)\right) - \frac{1}{h}\left(u(x_i) - u(x_i - h)\right)}{h} = \frac{1}{h^2}\left(u(x_i + h) - 2 \cdot u(x_i) + u(x_i - h) =: \Delta_h u\right)$$

wobei $\Delta_h u$ der diskrete 1D-Laplace-Operator ist.
Das diskretisierte Randwertproblem ist $-\Delta_h u_h = f$ in Ω_h,
$u_h(0) = g_0$, $u_h(1) = g_1$

3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems $i = 1$
$-\frac{-u_h(x_0)}{h^2} + \frac{2}{h^2} u_h(x_1) - \frac{1}{h^2} u_h(x_2) = f(x_1)$, also
$\frac{2}{h^2} u_h(x_1) - \frac{1}{h^2} u_h(x_2) = f(x_1) - \frac{g_0}{h^2}$
$i = 2, \ldots, n-2$: $-\frac{1}{h^2} u_h(x_{i-1}) + \frac{2}{h^2} u_h(x_i) - \frac{1}{h^2} u_h(x_{i+1}) = f(x_i)$
$i = n-1$: $-\frac{1}{h^2} u_h(x_n - 2) + \frac{2}{h^2} u_h(x_{n-1}) - \frac{1}{h^2} u_h(x_n) = f(x_{n-1})$,
also $-\frac{1}{h^2} u_h(x_{n-2}) + \frac{2}{h^2} u_h(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) + \frac{g_1}{h^2}$.
Als lineares Gleichungssystem: $-\tilde{\Delta}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$ mit

$$-\tilde{\Delta}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_h = \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ \vdots \\ u_h(v_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{g_1}{h^2} \end{pmatrix}$$