

Kurzfassung Riemannsche Geometrie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Def. Eine **topologische Mannigfaltigkeit** (Mft) ist ein topologischer Raum M^m mit folgenden Eigenschaften:

- M^m ist **hausdorffsch**, d. h.

$$\forall x, y \in M^m : x \neq y \implies \exists U_x \subseteq M^m : \exists U_y \subseteq M^m : \\ x \in U_x \wedge y \in U_y \wedge U_x \cap U_y = \emptyset.$$

- M^m erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, d. h. es gibt eine abzählbare Menge $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$, sodass

$$\forall A \subseteq M^m : \exists K \subset \mathbb{N} : A = \bigcup_{k \in K} U_k.$$

- M^m ist **lokal euklidisch**, d. h. für alle $x \in M^m$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x und einen Homöomorphismus $\phi : U_x \rightarrow \mathcal{O}$ mit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Bemerkung. lokal euklidisch \nRightarrow hausdorffsch

Prop. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$M \text{ zusammenhängend} \iff M \text{ wegzusammenhängend.}$$

Def. • Sei M eine m -dim. topol. Mft. Ein **Atlas** ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j : U_j \rightarrow \mathcal{O}_j) \mid j \in J\}$ mit $U_j \subseteq M$ und $\mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^n$ offen und Homöomorphismen ϕ_j , für die gilt $\bigcup_{j \in J} U_j = M$.

- Die Paare (U_j, ϕ_j) werden **Karten** genannt.
- Für je zwei Karten (U_j, ϕ_j) und (U_k, ϕ_k) gibt es eine **Kartenwechselabbildung**

$$\phi_{kj} := \phi_k \circ \phi_j^{-1} \big|_{\phi_j(U_j \cap U_k)} : \phi_j(U_j \cap U_k) \rightarrow \phi_k(U_j \cap U_k).$$

- Ein Atlas heißt **differenzierbar**, wenn alle Kartenwechselabbildungen \mathcal{C}^∞ -Abbildungen sind.
- Ein Atlas \mathcal{A} heißt **differenzierbare Struktur** von M , wenn gilt: Ist $(\tilde{U}, \tilde{\phi}_j)$ eine Karte von M und $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \{(\tilde{U}, \tilde{\phi}_j)\}$ ein differenzierbarer Atlas, dann gilt $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}$.
- Eine topol. Mft versehen mit einer differenzierbaren Struktur heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

Notation. Seien ab jetzt M^m und N^n differenzierbare Mften der Dimensionen m und n

Def. • Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt in $x \in M$ **differenzierbar**, wenn es eine Karte $(U_x, \phi : U_x \rightarrow \mathcal{O}) \in \mathcal{A}_M$ und eine Karte $(\tilde{U}_{f(x)}, \tilde{\phi} : \tilde{U}_{f(x)} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}) \in \mathcal{A}_N$ gibt, sodass

$$\tilde{\phi} \circ f|_{U_x} \circ \phi^{-1} : \mathcal{O} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}} \quad \text{differenzierbar } (\mathcal{C}^\infty) \text{ ist.}$$

- Die Abbildung f heißt **differenzierbar**, falls sie in jedem Punkt $x \in M$ differenzierbar ist.

Notation. $\mathcal{C}^\infty(M, N) := \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$

Bemerkung. Die Definition ist unabhängig von Wahl der Karten um x und $f(x)$.

Def. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn f ein Homöo ist und f und f^{-1} differenzierbar sind.

Def. Sei $p \in M$. Zwei Funktionen $f : U_p \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : V_p \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U_p, V_p \subseteq M$ heißen äquivalent, falls es eine offene Umgebung $W \subset U_p \cap V_p$ mit $f|_W = g|_W$ gibt. Die Äquivalenzklasse $[f]$ bezüglich der so definierten Äq'relation heißt **Funktionskeim** in p .

Notation. $\mathcal{C}^\infty(M, p) := \{[f] \mid [f] \text{ Funktionskeim in } p\}$

Bemerkung. Die Menge der Funktionskeime ist eine \mathbb{R} -Algebra.

Def. Eine lineare Abb. $\delta : \mathcal{C}^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Derivation**, falls

$$\forall [f], [g] \in \mathcal{C}^\infty(M, p) : \delta[f \cdot g] = \delta[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta[g].$$

Def. Der gewöhnliche Tangentialraum des \mathbb{R}^n im Punkt p ist

$$\tilde{T}_p \mathbb{R}^n := \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

mit $(p, v) + (p, w) := (p, v + w)$ und $\lambda \cdot (p, v) := (p, \lambda \cdot v)$.

Def. Der **Tangentialraum** von M im Punkt $p \in M$ ist

$$T_p M := \{\partial : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ linear, derivativ}\}$$

Ein Element $v \in T_p M$ heißt **Tangentialvektor** an M in p .

Bemerkung. Wir erhalten eine Abbildung

$$T_p M \times \mathcal{C}^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, [f]) \mapsto v.f := v[f].$$

Bemerkung. $T_p M$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Satz. Die Vektorräume $T_p \mathbb{R}^n$ und $\tilde{T}_p \mathbb{R}^n$ sind isomorph. Insbesondere gilt $\dim(T_p \mathbb{R}^n) = n$.

Korollar. Für eine m -dimensionale diff'bare Mft M gilt: $\dim(T_p M) = m$.

Bemerkung. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve. Dann kann man $\dot{c}(0)$ auffassen als Tangentialvektor an M in $c(0)$ mittels

$$\dot{c}(0)[f] := \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (f \circ c).$$

Bemerkung. Sei (U, ϕ) eine Karte von M . Wir setzen

$$\frac{\partial^\phi}{\partial x_i} \big|_p [f] := (\phi^{-1} \circ \alpha_i)'(0)[f] = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (f \circ \phi^{-1} \circ \alpha_i) \\ \text{mit } \alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U, \quad t \mapsto \phi(p) + t e_i.$$

Wir erhalten $\frac{\partial^\phi}{\partial x_i} \big|_p \in T_p M$.

Def. Sei $f : M \rightarrow N$ diff'bar. Die **Ableitung** von f in $p \in M$ ist die Abbildung

$$T_p f = f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad v \mapsto f_{*p} v \\ \text{wobei } f_{*p}(v).[g] := v.[g \circ f].$$

Lemma. Sei M eine diff'bare Mft, $p \in M$. Dann gilt

- f_{*p} ist linear
- $(\text{id}_M)_{*p} = \text{id}_{T_p M}$
- Kettenregel: Seien N, P diff'bare Mften. Dann gilt $\forall p \in M : (f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}$.

Korollar. Wenn $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus ist, dann ist $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ein VR-Isomorphismus für alle $p \in M$.

Satz. Sei M eine m -dimensionale Mft, $p \in M$ und (U, ϕ) eine Karte.

- Es gilt $T_p M = \{\dot{c}(0) \mid c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ diff'bar}, c(0) = p\}$
- $\{\frac{\partial^\phi}{\partial x^i} \big|_p \mid i = 1, \dots, n\}$ ist eine Basis von $T_p M$.

Def. $TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$ heißt **Tangentialbündel** von M . Die

Fußpunktabbildung ist die Projektion

$$\pi : TM \rightarrow M, v \in T_p M \mapsto p.$$

Def. Ein **Vektorfeld** auf M ist eine Abbildung $X : M \rightarrow TM$, sodass $\pi \circ X = \text{id}_M$. Dies ist äquivalent zu $\forall p \in M : X(p) \in T_p(M)$.

Bemerkung. Sei $X : M \rightarrow TM$ ein Vektorfeld, (U, ϕ) eine Karte.

Dann gibt es Funktionen $\xi^j : U \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$ mit

$$X(p) = \sum_{j=1}^n \xi^j(p) \frac{\partial^\phi}{\partial x^j} \big|_p \quad \text{für alle } p \in M.$$

- Def.** • Ein Vektorfeld X auf M heißt in $p \in M$ **diff'bar** (\mathcal{C}^∞), wenn es eine Karte (U, ϕ) um p gibt, sodass die Funktionen ξ_1, \dots, ξ^m diff'bar (\mathcal{C}^∞) sind.
- X heißt **differenzierbar**, wenn X in allen $p \in M$ diff'bar ist.

Lemma. Wenn die Koordinatenfunktionen ξ^1, \dots, ξ^n für eine bestimmte Karte $(U, \phi : U \rightarrow \mathcal{O})$ differenzierbar sind, dann sind sie es für jede andere Karte $(\tilde{U}, \psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}})$ mit $\tilde{U} \subseteq U$.

Def. Sei M eine m -dimensionale diff'bare Mft mit diff'barer Struktur $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j) \mid j \in J\}$. Dann ist TM eine $2m$ -dimensionale Mft mit Atlas $\tilde{\mathcal{A}} := \{(\tilde{U}_j := \pi^{-1}(U_j), \tilde{\phi}_j) \mid j \in J\}$, wobei

$$\tilde{\phi}_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow \phi_j(U_j) \times \mathbb{R}^m, \quad \sum_{k=1}^m \xi^k(p) \frac{\partial^{\phi_j}}{\partial x^k} \big|_p \mapsto (\phi_j(p), \xi^1(p), \dots, \xi^n(p)).$$

Eine Menge $V \subseteq TM$ heißt offen, wenn $\tilde{\phi}_j(V \cap \pi^{-1}(U_j)) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ offen ist für alle $j \in J$.

Notation. $\chi(M) := \{\text{diff'bare Vektorfelder auf } M\}$

Bemerkung. $\chi(M)$ ist ein \mathbb{R} -VR und ein $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul.

Lemma. Jedes $X \in \chi(M)$ induziert eine Abbildung

$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \quad \phi \mapsto X(\phi) := p \mapsto X(p).[\phi].$$

Die Abbildung X ist linear und derivativ.

Lemma. Seien $X, Y \in \chi(M)$ mit $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) : X(f) = Y(f)$. Dann gilt $X = Y$.

Lemma. Seien $X, Y \in \chi(M)$. Dann definiert

$$Z : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \quad f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$$

ein Vektorfeld auf M .

Def. Dieses Vektorfeld $[X, Y] := Z$ wird als **Kommutator** oder **Lie-Klammer** von X und Y bezeichnet.

Def. Sei $X \in \chi(M)$. Eine diff'bare Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ heißt **Integralekurve** von X , falls

$$\forall t \in (-\epsilon, \epsilon) : \dot{c}(t) = X_{c(t)}.$$

Lemma. Sei $X \in \chi(M)$, $p \in M$ und $v \in T_p M$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{c}(t) = X_{c(t)}, \quad c(0) = p$$

eine eindeutige lokale Lösung $c = c_p^X : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$.

Def. Die Abbildung $\Phi_X : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, $(p, t) \mapsto c_p^X(t)$ heißt **Fluss** von X .

Def. Ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $[-, -] : V \times V \rightarrow V$, $(v, w) \mapsto [v, w]$ heißt **Lie-Algebra**, falls

- die Abb. antisymmetrisch ist, d. h. $\forall v, w \in V : [v, w] = -[w, v]$
- die **Jacobi-Identität** erfüllt ist, d. h.

$$\forall v, w, z \in V : [v, [w, z]] + [z, [v, w]] + [w, [z, v]] = 0.$$

Bspe. • $(\chi(M), [-, -])$ ist eine Lie-Algebra.

- $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Lie-Algebra mit $[A, B] := AB - BA$.

Def. Eine Gruppe G , welche ebenfalls eine diff'bare Mft ist, heißt **Lie-Gruppe**, wenn gilt:

- $\mu : G \times G \rightarrow G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ ist diff'bar.
- $\iota : G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ ist diff'bar.

Bsp. Die allgemeine lineare Gruppe $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n} \approx \mathbb{R}^{(n^2)}$ ist eine Lie-Gruppe. Die Differenzierbarkeit der Inversion folgt aus der Cramerschen Regel.

Def. Sei G eine Lie-Gruppe und $g \in G$. Dann sind

$$lg : G \rightarrow G, \quad x \mapsto g \cdot x = \mu(g, x)$$

$$rg : G \rightarrow G, \quad x \mapsto x \cdot g = \mu(x, g)$$

Diffeomorphismen mit Umkehrabbildung $l(g^{-1})$ bzw. $r(g^{-1})$.

Bsp. Abgeschlossene Untergruppen von $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ sind Lie-Gruppen, z. B.

- $\text{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \text{GL}(2n, \mathbb{R})$
- $O_n \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$
- $U_n \subset \text{GL}(2n, \mathbb{R})$

Def. Sei $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und $X \in \chi(M)$. Dann ist

$$f_* X : N \rightarrow TN, \quad x \mapsto f_{*f^{-1}(x)} X(f^{-1}(x))$$

Def. Ein Vektorfeld $X \in \chi(G)$ heißt **linksinvariant**, wenn gilt:

$$\forall g, h \in G : X(g \cdot h) = lg_* X(h).$$

Kürzer: $\forall g \in G : lg_* X = X$.

Notation. $\mathcal{L}(G) := \{X \in \chi(G) \mid X \text{ ist linksinvariant}\} \subset \chi(G)$

Bemerkung. Ein linksinvariantes VF $X \in \chi(G)$ ist eindeutig bestimmt durch $X(e)$. Andererseits: Ist $x \in T_e G$, dann gibt es ein linksinvariantes VF $X \in \chi(G)$ mit $X(e) = x$. Somit ist die Abbildung

$$i : \mathcal{L}(G) \rightarrow T_e G, \quad X \mapsto X(e)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus.

Lemma. Seien $X, Y \in \mathcal{L}(G)$. Dann ist $[X, Y] \in \mathcal{L}(G)$.

Korollar. $(\mathcal{L}(G), [-, -])$ ist eine $\dim(G)$ -dimensionale Unter-Lie-Algebra von $(\chi(G), [-, -])$.

Notation. $OJ := T_e G \cong \mathcal{L}(G)$

Def. Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Die davon induzierte Norm ist $\|v\| := \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$.

Def. Eine **Riemannsche Metrik** auf einer diff. Mft M ist eine Familie $g = (g_p)_{p \in M}$ von Skalarprodukten $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, die differenzierbar von p abhängt, d. h. für alle $X, Y \in \chi(M)$ ist $g(X, Y) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ differenzierbar (\mathcal{C}^∞). Das Tupel (M, g) heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

Bemerkung. Sei (U, ϕ) eine Karte von M . Setze

$$g_{ij}^\phi : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto g(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} | p, \frac{\partial \phi}{\partial x^j} | p).$$

Seien $X = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ und $Y = \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$ zwei VF in U . Dann gilt

$$g(X, Y)(p) = g_p(X(p), Y(p)) = \sum_{i,j=1}^n v^i(p) w^j(p) g_{ij}(p).$$

Def. Seien (M, g_M) , (N, g_N) Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt Isometrie, wenn gilt:

- f ist ein Diffeomorphismus
- f erhält Riemannsche Metriken, d. h. für alle $X, Y \in \chi(M)$ gilt:

$$g_M(X, Y) = g_N(f_* X, f_* Y) \circ f,$$

$$\text{also } \forall p \in M : \forall v, w \in T_p M : g_{M,p}(v, w) = g_{N,f(p)}(f_{*p}(v), f_{*p}(w)).$$

Def. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$I(M, g) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ Isometrie}\}$$

in kanonischer Weise eine Lie-Gruppe (Myers-Steenrod).

Satz. Jede diff'bare Mannigfaltigkeit hat eine Riemannsche Metrik.

Bsp. Das Oberer-Halbraum-Modell des hyperbolischen Raum ist

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, e_n \rangle_{\text{eukl}} > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

mit dem offensichtlichen Atlas und der Riemannschen Metrik

$$g_p^{\text{Hyp}}((p, \tilde{v}), (p, \tilde{w})) := \frac{\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\text{eukl}}}{\langle p, e_n \rangle^2}.$$

Def. Eine diffbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen diff'baren Mften heißt **Immersion**, falls $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ für alle $p \in M$ injektiv ist.

Def. Angenommen, N ist sogar eine Riemannsche Mft mit Metrik g_N . Dann erhalten wir eine Riemannsche Metrik auf M , die mit **f zurückgeholte Metrik**, durch

$$(f^* g_N)_p(v, w) := g_{N,f(p)}(f_{*p}(v), f_{*p}(w)).$$

Def. Eine Immersion $f : (M, g^M) \rightarrow (N, g^N)$ heißt **isometrisch**, falls $g^M = f^* g^N$.

Prop. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für alle Punkte $p, q \in M$ einen stückweise differenzierbaren Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$.

Def. Für $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ stückweise \mathcal{C}^1 heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \quad \text{Länge von } \gamma.$$

Def. Sei (M, g) eine Riemannsche Mft. Dann ist der **Riemannsche Abstand** gegeben durch die Metrik

$$d_g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto \inf \{ L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ stückweise } \mathcal{C}^1 \text{ mit } \gamma(a) = p \text{ und } \gamma(b) = q \}.$$

Bemerkung. Nach dem Satz von Hopf-Rinow stimmt die von d_g induzierte Topologie mit der von M überein.

Def. Ein **Zusammenhang** (kov. Ableitung) ist eine Abb.

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

sodass für $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt:

- $\nabla_{X_1 + f X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + f \nabla_{X_2} Y$
- $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- $\nabla_X (fY) = f(\nabla_X Y) + (X(f)) \cdot Y$ (Leibniz-Regel)

Def. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M . Dann heißt

$$T^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad \text{torsion von } \nabla.$$

Wenn $T^\nabla = 0$, dann heißt ∇ **torsionsfrei**.

Def. Ein Zusammenhang ∇ auf einer riemannschen Mft. (M, g) heißt **metrisch**, wenn gilt:

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y, Z)$$

Theorem. Auf jeder Riem. Mft. (M, g) gibt es genau einen torsionsfreien, metrischen Zusammenhang. Für diesen gilt:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X)$$

Def. Der eindeutige torsionsfreie und metrische Zusammenhang auf (M, g) heißt **Levi-Civita-Zusammenhang** auf (M, g) .

Bemerkung. Sei (M, g) eine riemannsche Mft., (U, ϕ) eine Karte von M . Dann gibt es diff'bare Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ für $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, sodass gilt

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \phi}{\partial x^k}.$$

Die Funktionen Γ_{ij}^k heißen **Christoffel-Symbole** von ∇ .

Lemma. $\left[\frac{\partial \phi}{\partial x^j}, \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right] = 0$

Satz. Für die Christoffel-Symbole gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^j} g_{il} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} g_{jl} - \frac{\partial \phi}{\partial x^l} g_{ij} \right),$$

wobei

$$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto g_p \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}(p), \frac{\partial \phi}{\partial x^j}(p) \right)$$

$$g^{kl} : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ definiert ist durch } \sum_{r=1}^n g^{jr} g_{rk} = \delta_k^j.$$

Def. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M . Dann heißt $X \in \chi(M)$ parallel, falls

$$\nabla X : \chi(M) \rightarrow \chi(M), \quad Y \mapsto \nabla_Y X$$

gleich Null ist.

Def. Ein **Tensorfeld** vom Typ (j, k) mit $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, 1\}$ ist eine Abbildung

$$T : \chi(M) \times \dots \times \chi(M) \rightarrow \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M), & \text{falls } j = 0, \\ \chi(M), & \text{falls } j = 1, \end{cases}$$

die in jedem Argument linear ist.

Bspe. • $T^\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ ist Tensor vom Typ $(1, 2)$.

- $\nabla Y : \chi(M) \rightarrow \chi(M), \quad X \mapsto \nabla_X Y$ ist Tensor vom Typ $(1, 1)$.
- Alternierende k -Formen auf \mathbb{R}^n sind Tensoren vom Typ $(0, k)$.
- Riemannsche Metriken sind Tensorfelder vom Typ $(0, 2)$.

Satz. Sei T ein Tensorfeld auf M vom Typ (j, k) . Sei $p \in M$. Seien $X_1, \dots, X_k \in \chi(M)$. Dann hängt $T(X_1, \dots, X_k)(p)$ nur von $X_1(p), \dots, X_k(p)$ ab.

Bemerkung. Sei (U, ϕ) eine Karte von M und T ein Tensorfeld vom Typ $(1, k)$ auf M . Dann gibt es Funktionen T_{i_1, \dots, i_k}^l , sodass

$$T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x^{i_k}} \right) = \sum_{l=1}^n T_{i_1, \dots, i_k}^l \frac{\partial \phi}{\partial x^l}.$$

Notation. $\nabla_v Y := (\nabla_X Y)(p)$ für $v \in T_p M$ und X ein VF mit $X_p = v$ (wohldefiniert).

Satz. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M . Sei $p \in M, v \in T_p M$ und $Y, \tilde{Y} \in \chi(M)$. Falls für eine diff'bare Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ gilt

$$c(0) = p, \quad \dot{c}(0) = v \quad \text{und} \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) : Y(c(t)) = \tilde{Y}(c(t)),$$

dann gilt $\nabla_v Y = \nabla_v \tilde{Y}$.

Def. Ein **VF längs einer Kurve** $c : I \rightarrow M$ ist eine Abbildung

$$X : I \rightarrow TM \quad \text{mit} \quad X(t) = X_t \in T_{c(t)} M,$$

welche diff'bar ist, d. h. für alle $t_0 \in I$ existiert eine Karte (U, ϕ) um $c(t_0)$, sodass man schreiben kann

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi^i(t) \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Big|_{c(t)} \quad \text{für alle } t \in c^{-1}(U)$$

mit diff'baren Funktionen $\xi^i : c^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung. X_t muss nicht Einschränkung eines VF auf M sein.

Notation. $\chi_c := \{ \text{Vektorfelder längs } c \}$

Bemerkung. χ_c ist ein Modul über $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Satz. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M , sei $c : I \rightarrow M$ eine diff'bare Kurve. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\frac{\nabla}{dt} = \frac{D}{dt} = \frac{D^\nabla}{dt} : \chi_c \rightarrow \chi_c,$$

sodass für $X, \tilde{X} \in \chi_c, Y \in \chi(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ gilt:

- $\frac{D}{dt}(X + \tilde{X}) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}\tilde{X},$
- $\frac{D}{dt}(f \cdot X) = f \cdot \frac{D}{dt}X + f'X,$
- $\frac{D(Y \circ c)}{dt} = \nabla_{\dot{c}} Y.$

Def. Die Abbildung $\frac{D}{dt}$ heißt von ∇ **induzierte kovariante Ableitung längs c**.

Satz. Sei (M, g) eine Riem. Mft, ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang und $c : I \rightarrow M$ diff'bar. Dann gilt

$$\forall X, Y \in \chi_c : g(X, Y)' = g\left(\frac{DX}{dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{DY}{dt}\right).$$

Def. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M . Dann heißt $X \in \chi_c$ **parallel (längs c)**, wenn $\frac{DX}{dt} = 0$.

Bemerkung. Sei (U, ϕ) eine Karte, $\tilde{I} \subset I$ mit $c(\tilde{I}) \subset U$. In lokalen Koordinaten lässt sich Parallelität ausdrücken durch

$$(\xi^k)' + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(t) \xi^j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n \text{ und alle } t \in \tilde{I}.$$

Für die Funktionen ξ^k ist das ein System linearer DGL mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}' = A(t) \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$$

Dieses System ist linear beschränkt, es folgt daher die Existenz von parallelen Vektorfeldern in Kartenumgebungen.

Satz. Sei $t_0 \in I = (a, b)$ und $v \in T_{c(t_0)} M$ vorgegeben. Dann gibt es genau ein VF $X \in \chi_X$ mit

$$\frac{DX}{dt} \equiv 0 \quad \text{und} \quad X(t_0) = v.$$

Def. Sei $[a, b] \rightarrow M$ diff'bar. Die Abbildung

$$P_c : T_{c(a)} M \rightarrow T_{c(b)} M, \quad v \mapsto X^v(b), \quad \text{wobei } \frac{DX^v}{dt} \equiv 0 \text{ und } X^v(a) = v,$$

heißt **Parallelverschiebung** längs c bzgl. ∇ .

Satz. P_c ist linear.

Satz. Ist (M, g) Riem. Mft und ∇ der LC-Zshg, dann gilt

$$g_{c(b)}(P_c(v), P_c(w)) = g_{c(a)}(v, w).$$

Mit anderen Worten: P_c ist eine lineare Isometrie.

Bemerkung. Wir können nun die Definition der Ableitung als Limes des Differenzenquotienten auf Mannigfaltigkeiten übertragen: Sei $v \in T_x M, X \in \chi(M)$ und $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = x$ und $\dot{c}(0) = v$. Dann ist

$$\nabla_v X = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{c(t)}^{-1}(X(c(t))) - X(c(0))}{t}$$

Bemerkung. Parallelverschiebung ist auch möglich und sinnvoll entlang stückweise glatter Kurven.

Def. Die **Holonomiegruppe** von M in $x \in M$ bzgl. ∇ ist

$$\text{Hol}_x^\nabla := \{P_c : T_x M \rightarrow T_x M \mid c \text{ stückweise glatt mit } c(0) = c(1) = x.\}$$

Dabei ist $P_c \circ P_{\tilde{c}} = P_{c \circ \tilde{c}}$ und $(P_c)^{-1} = P_{c^{-1}}$.

Bemerkung. Hol_x^∇ ist sogar eine Lie-Gruppe und eine Untergruppe von $O(T_x M, g_x)$.

Def. Eine glatte Kurve $c : I \rightarrow M$ heißt **Geodäte** bzgl. ∇ , falls

$$\frac{D^\nabla \dot{c}}{dt} \equiv 0, \quad \text{d. h. das Tangential-VF } \dot{c} \text{ ist parallel längs } c.$$

Bemerkung. Sei (U, ϕ) eine Karte, $\tilde{I} \subset I$ mit $c(\tilde{I}) \subset U$. In lokalen Koordinaten lässt sich diese Bedingung ausdrücken durch die **Geodätengleichung**

$$(\ddot{c}^k)'(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n \text{ und alle } t \in \tilde{I}.$$

Satz. Zu jedem $p \in M$ und $v \in T_p M$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und genau eine Geodäte $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$.

Satz. Seien $c_{1,2} : I_{1,2} \rightarrow M$ zwei Geodäten bzgl. ∇ mit $0 \in I_1 \cap I_2$. Falls $c_1(0) = c_2(0)$ und $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$, dann gilt $c_1|_{I_1 \cap I_2} \equiv c_2|_{I_1 \cap I_2}$.

Satz. Gegeben $p \in M$ und $v \in T_p M$, dann gibt es genau ein Intervall $I_v \ni \mathbb{R}$ mit $0 \in I_v$ und eine Geodäte

$$c_v : I_v \rightarrow M \quad \text{mit} \quad c(0) = p, \quad \dot{c}_v(0) = v,$$

die maximal im folgenden Sinn ist: Für jede Geodäte $c : I \rightarrow M$ mit $\dot{c}(0) = v$ gilt: $I \subseteq I_v$ und $c = c_v|_I$.

Notation. Für $v \in T_p M$ sei $c_v : I_v \rightarrow M$ die zugehörige maximale Geodäte.

Def. Ein Zusammenhang ∇ auf M heißt **vollständig**, wenn $I_v = \mathbb{R}$ für alle $v \in TM$.

Lemma (Spray-Eigenschaft). Ist $v \in T_p M$, $c_v : I_v \rightarrow M$ die maximale Geodäte mit $\dot{c}_v(0) = v$. Sei $\lambda \neq 0$, dann ist

$$c_{\lambda v} : I_{\lambda v} \rightarrow M, \quad t \mapsto c_v(\lambda t) \quad \text{wobei} \quad I_{\lambda v} := \frac{1}{\lambda} I_v$$

die maximale Geodäte mit $c_{\lambda v}'(0) = \lambda v$.

Def. Sei M eine Mft mit Zshg ∇ und $p \in M$. Dann heißt

$$\text{Exp}_p : \widetilde{T_p M} \rightarrow M, \quad v \mapsto c_v(1), \quad \widetilde{T_p M} := \{v \in T_p M \mid 1 \in I_v\}$$

Exponentialabbildung von ∇ in p .

Lemma. • $\widetilde{T_p M}$ ist sternförmig bzgl. 0

- $\forall v \in \widetilde{T_p M} : \forall t \in [0, 1] : \text{Exp}_p(tv) = c_v(t)$

Satz. • Es gibt eine offene Umgebung $\hat{U} \Subset T_p M$ mit $0 \in \hat{U} \subseteq \widetilde{T_p M}$, sodass $\text{Exp}_p|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow M$ eine C^∞ -Abbildung ist.

- Wir können \hat{U} so wählen, dass $\text{Exp}_p|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow \text{Exp}_p(\hat{U})$ ein Diffeomorphismus ist.

Bemerkung. Man kann zeigen:

- $\widetilde{T_p M} \Subset T_p M$
- $\text{Exp}_p : \widetilde{T_p M} \rightarrow M$ ist überall C^∞ , aber nicht überall ein lokaler Diffeomorphismus (Schnittpunkt-Phänomen)
- Ist (M, ∇) geodätisch vollständig, dann gilt $\widetilde{T_p M} = T_p M$.

Def. Eine Kurve $c : I \rightarrow M$ heißt **nach / proportional zur BL parametrisiert**, wenn gilt:

$$\|\dot{c}(t)\| \equiv 1 \quad / \quad \|\dot{c}(t)\| \equiv \text{konst.}$$

Bemerkung. • Jede Geodäte ist proportional zur BL parametrisiert.

- Eine Kurve ist genau dann prop. zur BL parametrisiert, wenn es $\alpha \geq 0$ gibt mit $L(c|_{[a,b]}) = \alpha \cdot (b - a)$.

Def. Eine **Variation** von $c : [a, b] \rightarrow M$ ist eine C^∞ -Abbildung

$$(-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M, \quad (s, t) \mapsto \alpha(s, t) \quad \text{mit} \quad \forall t \in [a, b] : \alpha(0, t) = c(t).$$

Sie heißt **Variation mit festen Endpunkten**, wenn zudem gilt:

$$\forall s \in (-\epsilon, \epsilon) : \alpha(s, a) = c(a) \wedge \alpha(s, b) = c(b)$$

Sprechweise. s heißt **Variationsparameter**

Def. Eine Variation einer stückweise glatten Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ (mit c glatt auf den Teilintervallen $[t_{i-1}, t_i]$) ist eine stetige Abb.

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M, \quad (s, t) \mapsto \alpha_s(t) \quad \text{mit} \quad \alpha|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_{i-1}, t_i]} \text{ ist } C^\infty.$$

Notation. • $\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s_0, t_0)$ ist der Tang.-Vektor an $s \mapsto \alpha(s, t_0)$ in s_0 .

- $\frac{\partial \alpha}{\partial t}(s_0, t_0)$ ist der Tangentialvektor an $s \mapsto \alpha(s_0, t)$ in t_0 .

Def. Eine Abbildung $X : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$ mit $X(s, t) \in T_{\alpha(s, t)} M$ heißt **Vektorfeld längs α** , wenn X differenzierbar (bzw. stückweise diff'bar) ist.

Notation. Sei X ein VF längs $\alpha(s, t)$. Dann

$$\frac{DX}{ds}(s_0, t_0) := \frac{D}{ds}|_{s=s_0}(s \mapsto X(s, t_0))$$

$$\frac{DX}{dt}(s_0, t_0) := \frac{D}{dt}|_{t=t_0}(s \mapsto X(s_0, t))$$

Lemma. $\frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s}$

Satz (1. Variationsformel). Sei $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ eine C^∞ -Variation von einer C^∞ -Kurve $c = \alpha_0 : [a, b] \rightarrow M$. Sei $\|\dot{c}(t)\| = \text{konst} \neq 0$. Dann gilt mit $X(t) := \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0, t)$

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} L(\alpha_s) = \frac{1}{\|\dot{c}\|} \left(g(X, \dot{c})|_a^b - \int_a^b g(X(\tau), \frac{D\dot{c}}{dt}) d\tau \right)$$

Sprechweise. $X(t) := \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0, t)$ heißt **Variationsvektorfeld**

Satz (1. Variationsformel für stückweise glattes c). Sei $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise glatte Variation, glatt auf $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$ mit $a = t_0 < \dots < t_k = b$. Dann ist

$$\frac{d\alpha_s}{ds}|_{s=0} = \frac{1}{\|\dot{c}\|} \left(g(X, \dot{c})|_a^b + \sum_{i=1}^{k-1} g(X(t_i), \nabla_i \dot{c}) - \int_a^b g(X, \frac{D\dot{c}}{dt}) dt \right)$$

mit $\nabla_i \dot{c} = \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+)$

Notation. $\dot{c}(t_i^+) = \lim_{t \downarrow t_i} \dot{c}(t), \quad \dot{c}(t_i^-) = \lim_{t \uparrow t_i} \dot{c}(t)$

Satz. Zu jedem (stückweise) glatten $X \in \chi_c$ gibt es eine (stückweise) glatte Variation α von c mit $X = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0, t)$. Wenn $X(a) = X(b) = 0$, so kann man α als Variation mit festen Endpunkten wählen.

Satz. Für eine stückweise glatte Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ mit $\|\dot{c}\| = \text{konst}$ sind äquivalent:

- c ist eine Geodäte
- $\frac{d}{ds}|_{s=0} L(\alpha_s) = 0$ für jede stückweise glatte Variation α von c mit festen Endpunkten.

Korollar. Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ stückweise glatt und kürzeste stückweise Verbindung ihrer Endpunkte (d. h. für alle $\tilde{c} : [a, b] \rightarrow M$ stückweise glatt mit $c(a) = \tilde{c}(a)$ und $c(b) = \tilde{c}(b)$ ist $L(c) \leq L(\tilde{c})$). Dann ist c eine glatte Geodäte.

Achtung. Geodäten sind nicht global kürzeste Verbindungen, die Umkehrung gilt also nicht!

Notation. $\Omega_{p,q} := \{c : [0, 1] \rightarrow M \mid c(0)=p, c(1)=q, c \text{ stückw. glatt}\}$

Bemerkung. Geodäten sind „kritische Punkte“ von $L : \Omega_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $\|\dot{c}\| = \text{konst}$. Ersetzt man das Längenfunktional durch die Energie, so ist diese NB unnötig.

Notation. $S_\rho(0) = \{x \in T_p M \mid \|x\| = \rho\}$

Satz (Gaußlemma). Sei (M, g) eine zshgde Riem. Mft, $\nabla = \nabla^{LC}$. Sei $p \in M$ und $\epsilon > 0$, sodass

$$\text{Exp}_p|_{B_\epsilon(0)} : B_\epsilon(0) \rightarrow \text{Exp}_p(B_\epsilon(0))$$

ein Diffeo ist. Dann schneiden die radialen Geodäten

$$t \mapsto \text{Exp}_p(tv) = v_v(t), \quad v \in T_p M \setminus \{0\},$$

die Hyperflächen $\text{Exp}_p(S_\rho(0))$, $\rho \in (0, \epsilon)$ orthogonal.

Satz. Seien $p \in M$, $\epsilon > 0$, $\rho \in [0, \epsilon)$ wie oben. Dann ist

$$c_v|_{[0, \delta]} : [0, \delta] \rightarrow M, \quad t \mapsto c_v(t) = \text{Exp}_p(tv) \quad (v \in T_p M, \|v\| = 1)$$

die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte, genauer: Es gilt $\delta = L(c_v|_{[0, \delta]}) \leq L(\gamma)$ für jedes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ stückweise glatt mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = c_v(\delta)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\gamma(t) = c_v(r(t))$ mit $r : [a, b] \rightarrow [0, \delta]$ monoton wachsend.

Def. $i(p) := \sup\{\epsilon > 0 \mid \text{Exp}_p|_{B_\epsilon(0)} \text{ ist Diffeo aufs Bild}\}$ heißt **Injektivitätsradius** von M in p .

Satz. Sei M eine zshgde Riem. Mft.

- Ist $p \in M$, $\epsilon \in (0, i(p))$, dann ist

$$\text{Exp}_p(B_\epsilon(p)) = B_\epsilon(p) := \{q \in M \mid d(p, q) < \epsilon\},$$

$$\text{Exp}_p(S_\epsilon(p)) = S_\epsilon(p) := \{q \in M \mid d(p, q) = \epsilon\}.$$

- $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Metrik.
- Die durch d induzierte Topologie stimmt mit der gegebenen überein.

Satz (Hopf-Rinow 1). Sei M eine zshgde Riem. Mft, $p \in M$. Angenommen, alle Geodäten γ auf M mit $\gamma(0) = p$ sind auf ganz \mathbb{R} definiert (m.a.W: Exp_p ist auf ganz $T_p M$ definiert). Dann gibt es für alle $q \in M$ eine kürzeste Geodäte von p nach q .

Satz (Hopf-Rinow 2). Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M sind äquivalent:

- M ist geodätisch vollständig.
- $\forall p \in M : \text{Exp}_p$ ist auf ganz $T_p M$ definiert.
- Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von M ist kompakt.
- M ist ein vollständiger metrischer Raum.

Korollar. Jede kompakte Riemannsche Mft ist geodätisch vollständig und zwei ihrer Punkte können durch eine kürzeste Geodäte verbunden werden.

Korollar. Unter-Mften des \mathbb{R}^n sind geodätisch vollständig.