Zusammenfassung Kommutative Algebra

(cc) (by) Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Ringe und Ideale

Def. Ein Ring ist ein Tupel $(A,+,\cdot,0,1)$ mit einer Menge A, Operationen $+,\cdot : A \times A \to A$ und Elementen $0,1 \in A$, sodass
- $(A,+,0)$ eine abelsche Gruppe ist,
- $(A,\cdot,1)$ ein Monoid ist und
- die Multiplikation distributiv über die Addition ist, d. h.

$$x(y+z) = xy + xz \text{ und } (y+z)x = yx + zx \quad \forall\, x,y,z \in A.$$

Bspe. • $\mathbb{Z}$, • $K[x_1,\dots,x_n]$, • **Nullring**: der Ring mit $0 = 1$

Def. Sei $(A,+,\cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $B \subseteq A$ heißt **Unterring**, falls $0,1 \in B$ und B unter $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist.

Bspe. • $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, • $K \subset K[X]$

Def. Ein **Ringhomomorphismus** $\phi : A \to B$ ist eine Abbildung, welche sowohl ein Gruppenhomomor. $(A,+_A,0_A) \to (B,+_B,0_B)$ als auch ein Ringhomomorphismus $(A,\cdot_A,1_A) \to (B,\cdot_B,1_B)$ ist.

Bem. Ringe und Ringhomomorphismen bilden eine Kategorie.

Lem. Ein Ringhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus (in dieser Kategorie), wenn er bijektiv ist.

Konvention. Seien A im Folgenden Ringe und $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

Def. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt (beidseitiges) **Ideal** von A, falls
- $\mathfrak{a} \subseteq A$ eine Untergruppe ist und
- für alle $a \in A$ und $x \in \mathfrak{a}$ gilt: $ax, xa \in \mathfrak{a}$.

Lem. Der Schnitt von (beliebig vielen) Idealen ist selbst ein Ideal.

Def. Sei $M \subseteq A$ eine Teilmenge. Das von M **erzeugte Ideal** ist der Schnitt aller Ideale von A, die M umfassen.

Notation. $(x_1,\dots,x_n) \subseteq A$ ist das von $\{x_1,\dots,x_n\}$ erzeugte Ideal.

Bem. • Das **Nullideal** (0) ist das kleinste Ideal, denn $(0) = \{0\}$.
• Das **Einsideal** (1) ist das größte Ideal, denn $(1) = A$.

Prop. • Sei $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal. Dann ist auch $\phi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$ ein Ideal.
• Sei $A' \subseteq A$ ein Unterring. Dann ist auch $\phi(A') \subseteq B$ ein Unterring.

Def. Das Ideal $\ker\phi := \phi^{-1}((0))$ heißt **Kern** von ϕ.

Bem. ϕ ist injektiv $\iff \ker\phi = 0$

Prop. Sei $\phi : A \to B$ surjektiv, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist auch das Bild $\phi(A) \subseteq B$ ein Ideal.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es einen Ring $A/\mathfrak{a}$ und einen Ringhomomor. $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ mit folgender universeller Eigenschaft:
Für jeden Ring B und Ringhomomor. $\psi : A \to B$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \ker\psi$ gibt es genau einen Ringhomomor. $\widetilde{\psi} : A/\mathfrak{a} \to B$ mit $\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi$.

Konstr. Sei durch $x \sim y \;:\iff\; x - y \in \mathfrak{a}$ eine Äq'relation $\sim$ auf A definiert. Setze $A/\mathfrak{a} := A/{\sim}$ und $\pi(x) := [x]$. Die Addition und Multiplikation auf A ind. die Addition bzw. Multiplikation auf $A/\mathfrak{a}$.

Def. $A/\mathfrak{a}$ heißt **Quotientenring** von A nach $\mathfrak{a}$.

Notation. Man lässt häufig die Äquivalenzklammern weg, man schreibt also „$x = y$ in $A/\mathfrak{a}$“ anstatt „$[x] = [y]$“.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Folgende Korresp. ist bij. und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{ Ideale } \mathfrak{b} \subseteq A \text{ mit } \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a} \} & \leftrightarrow & \{\text{ Ideale } \mathfrak{c} \subseteq A/\mathfrak{a} \} \\ \mathfrak{b} & \mapsto & \pi(\mathfrak{b}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{c}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{c} \end{array}$$

Prop (**Homomorphiesatz**). Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomor. Dann ist $\underline{\phi} : A/\ker(\phi) \to \operatorname{im}(\phi)$, $[x] \mapsto \phi(x)$ ein Ringisomorphismus.

Im Folgenden seien alle Ringe **kommutativ**, d. h. $xy = yx$ f. a. x, y.

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in A$ heißt
- **regulär**, falls $\forall\, y \in A \,:\, xy = 0 \implies y = 0$.
- **Nullteiler**, falls es nicht regulär ist, d. h. wenn ein $y \in A \setminus \{0\}$ mit $xy = 0$ existiert.

Def. Ein Ring A heißt **Integritätsbereich**, wenn $0 \in A$ der einzige Nullteiler in A ist.

Achtung. Die Null im Nullring ist regulär!

Bem. Ein Ring A ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn

$$0 \neq 1 \text{ in } A \qquad \text{und} \qquad \forall\, x,y \in \,:\, xy = 0 \implies x = 0 \lor y = 0.$$

Beob. Sei $\phi : A \to B$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Ist B ein Integritätsbereich, so auch A.

Def. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **Hauptideal**, falls $\mathfrak{a} = (a)$ für ein $a \in A$. Ein Ring A heißt **Hauptidealbereich**, falls jedes Ideal in A ein Hauptideal ist.

Bspe. • $\mathbb{Z}$, • $K[x]$

Gegenbsp. • $K[x_1,\dots,x_n]$ für $n \geq 2$

Def. Ein Element $x \in A$ heißt **nilpotent**, falls $\exists\, n \geq 0 \,:\, x^n = 0$.

Beob. Ist A ein Integritätsbereich, so ist $0 \in A$ das einzige nilpotente Element in A.

Def. Sei A ein Ring, nicht notwendigerweise kommutativ.
Ein Element $x \in A$ heißt **Einheit**, falls ein $y \in A$ mit $xy = yx = 1$ existiert. $A^\times := \{\text{ Einheiten in } A \}$ heißt **Einheitengruppe**.
Der Ring A heißt **Schiefkörper**, falls 0 die einzige Nicht-Einheit ist.
Falls zusätzlich A kommutativ ist, so heißt A ein **Körper**.

Beob. • $x \in A$ ist eine Einheit $\iff (x) = (1) \iff A/(x) = 0$
• Einheiten sind regulär.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring. Dann sind äquivalent:
- A ist ein Körper.
- A besitzt genau zwei Ideale (nämlich (0) und (1)).

- Ein Ringhomomorphismus $A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn B nicht der Nullring ist.

Def. • Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ heißt **Primideal**, falls $1 \not\in \mathfrak{p}$ und $\forall\, a,b \in A \,:\, ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p} \lor b \in \mathfrak{p}$.
• Ein Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ heißt **maximal**, falls für jedes Ideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq A$ *entweder* $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} = A$ (nicht beides!) gilt.

Bspe. • Jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ hat die Form (m) mit $m \in \mathbb{N}$. Das Ideal (m) ist genau dann prim, wenn $m = 0$ oder m eine Primzahl ist.
• Sei $f \in K[x_1,\dots,x_n]$ ein irred. Polynom. Dann ist (f) prim.

Lem.

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{p} \subseteq A \text{ ist prim} & \iff & A/\mathfrak{p} \text{ ist ein Integritätsbereich} \\ \mathfrak{m} \subseteq A \text{ ist maximal} & \iff & A/\mathfrak{m} \text{ ist ein Körper} \end{array}$$

Kor. Maximale Ideale sind prim.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Folgende Korresp. ist bij. und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{ Primideale } \mathfrak{p} \subseteq A \text{ mit } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \} & \leftrightarrow & \{\text{ Primideale } \mathfrak{q} \subseteq A/\mathfrak{a} \} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \pi(\mathfrak{p}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{q}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

Genauso bekommt man eine bijektive, monotone Korrespondenz

$$\{\text{ max. Ideale } \mathfrak{m} \subseteq A \text{ mit } \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a} \} \quad \leftrightarrow \quad \{\text{ max. Ideale } \mathfrak{n} \subseteq A/\mathfrak{a} \}$$

Prop. Ein Ring besitzt genau dann ein maximales Ideal, wenn er nicht der Nullring ist.

Kor. • Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es genau dann ein maximales Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} \neq (1)$.
• Ein Element $x \in A$ liegt genau dann in einem maximalen Ideal von A, wenn x keine Einheit ist.

Def. Ein **lokaler Ring** ist ein komm. Ring A mit genau einem max. Ideal $\mathfrak{m}$. Der Körper $F := A/\mathfrak{m}$ heißt **Restklassenkörper** von A.

Notation. Man schreibt „Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring.“

Def. Ein **halblokaler Ring** ist ein kommutativer Ring mit nur endlich vielen maximalen Idealen.

Lem. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein Ideal mit $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$. Dann ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.

Prop. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, sodass $1 + x$ für alle $x \in \mathfrak{m}$ eine Einheit ist. Dann ist $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$, also $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.

Prop. Die Menge $\mathfrak{n} := \{\text{ nilpotente Elemente }\} \subseteq A$ ist ein Ideal, das sogenannte **Nilradikal**.

Bem. Der Ring $A/\mathfrak{n}$ hat außer 0 keine nilpotenten Elemente.

Prop. Das Nilradikal eines kommutativen Ringes ist der Schnitt aller seiner Primideale.

Def. Das **Jacobsonsche Ideal** $\mathfrak{j} \subset A$ ist der Schnitt aller maximalen Ideale von A.

Prop. Ein Element $x \in A$ liegt genau dann im Jacobsonschen Ideal $\mathfrak{j}$, wenn $1 - xy$ für alle $y \in A$ eine Einheit ist.