Zusammenfassung Numerik von PDEs

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine DGL der Form

$$F(x, u, Du, \dots, D^k u) = 0$$

heißt **partielle DGL/PDE** der Ordnung $k \geq 1$, wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht ist.

Def (Klassifikation von PDEs).

- Die PDE heißt **linear**, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$
mit Funktionen $a_\alpha, f : \Omega \to \mathbb{R}$ besitzt.
- Die PDE heißt **semilinear**, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(x, u, D_u, \dots, D^{k-1}u) = 0$$
besitzt, wobei $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ und $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$ gegeben sind.
- Die PDE heißt **quasilinear**, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{k-1}u) D^\alpha u + a_0(x, u, D_u, \dots, D^{k-1}u) = 0$$
hat, wobei $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k}$ gegeben sind.
- Die PDE heißt **nichtlinear**, falls die Ableitungen der höchsten Ordnung nicht linear vorkommen.

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Eine PDE der Form

$$F(x, u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1}\partial_{x_1} u, \dots, \partial x_1 \partial_{x_n} u, \dots, \partial_{x_n}\partial_{x_n} u) = 0$$

heißt **PDE zweiter Ordnung**.

Notation. $p_i := \partial_{x_i} u$, $p_{ij} := \partial^2_{x_i x_j} u$

$$M(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_{11}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial p_{n1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{nn}} \end{pmatrix} = M(x)^T.$$

Def (Typeneinteilung für PDEs der 2. Ordnung). Obige PDE zweiter Ordnung heißt

- **elliptisch** in x, falls die Matrix $M(x)$ positiv o. definit ist.
- **parabolisch** in x, falls genau ein EW von $M(x)$ gleich null ist und alle anderen dasselbe Vorzeichen haben.
- **hyperbolisch** in x, falls genau ein EW ein anderes Vorzeichen als die anderen EWe hat.

Lösungstheorie elliptischer PDEs

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt.

- $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m \mid u \text{ stetig}\}$, $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) := \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, mit Norm
$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|u(x)\|. \qquad \text{(Supremumsnorm)}$$
- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N}$ ist der Raum aller auf Ω k-mal stetig diff'baren Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden können.
$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)}$$
- Sei $\alpha \in [0, 1)$. $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid H_\alpha(u, \overline{\Omega}) < \infty\}$ mit
$$H_\alpha(u, \overline{\Omega}) := \sup_{x, y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} \qquad \text{(Hölder-Koeffizient)}$$
heißt **Raum der glm. Hölder-stetigen Fktn** zum Exponent α. Der Hölder-Koeffizient ist dabei eine Seminorm auf $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$.
- $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid \forall |\gamma| = k : D^\gamma u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)\}$ heißt **Hölder-Raum**. Eine Norm ist gegeben durch
$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} + \sum_{|\gamma|=k} H_\alpha(D^\gamma u, \overline{\Omega}).$$

Bem.
- Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
- $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ heißt **Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen**.
- $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^k$ und $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ sind Banach-Räume mit den jeweiligen Normen.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Das Gebiet Ω gehört zur **Klasse $\mathcal{C}^{k,\alpha}$**, wenn in jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung in $\partial\Omega$ existiert, die sich in einem geeigneten Koordinatensystem als ein Graph einer Funktion aus $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ darstellen lässt und Ω lokal immer auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.

Satz (Gauß'scher Integralsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet und $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n u_i \nu_i \,\mathrm{d}\rho(x) = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu \,\mathrm{d}\rho(x),$$

wobei ν der äußere Normalenvektor an an den Rand von Ω ist.

Problem. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\text{(RWP)} \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega \quad \text{(PDE)} \\ \mathcal{R}u = g & \text{auf } \partial\Omega \quad \text{(Randbedingung)} \end{cases}$$

wobei $\mathcal{L}$ der lineare Differentialoperator

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

mit Fktn $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ist, sodass $A(x) := (a_{ij}(x))$ symmetrisch ist. Als Randbedingung (RB) verlangen wir:

$$\begin{aligned} &\textbf{Dirichlet-RB:} & u &= g & &\text{auf } \partial\Omega, \\ &\textbf{Neumann-RB:} & (A(x)\nabla u) \cdot \nu &= g & &\text{auf } \partial\Omega \text{ oder} \\ &\textbf{Robin-RB:} & (A(x)\nabla u) \cdot \nu + \delta u &= g & &\text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Bem. Man kann auch auf verschiedenen Teilstücken des Randes verschiedene Bedingungen stellen.

Bem. Falls die Funktionen a_{ij} differenzierbar sind, so kann $\mathcal{L}$ in **Divergenzform** geschrieben werden:

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x)\right) + b_i(x) \right)}_{\tilde{b}(x) :=} \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

$$= -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \tilde{b}(x) \cdot \nabla u + c(x)u$$

Voraussetzung. Wir nehmen im Folgenden an:

- $\mathcal{L}$ ist **gleichmäßig elliptisch**, d. h.
$$\exists \lambda_0 > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \Omega : \xi^T A(x) \xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2$$
Dabei heißt λ_0 **Elliptizitätskonstante**.
- $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$

Bem. $\mathcal{L} = f$ ist elliptisch auf $\Omega \iff A(x) > 0$ (spd) für alle $x \in \Omega$

Def. Eine Fkt $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ heißt **klassische Lsg** vom (RWP) mit $\mathcal{R}u := u$, wenn die beiden Gleichungen in (RWP) in jedem Punkt von Ω bzw. des Randes $\partial\Omega$ erfüllt sind.

Satz (Maximumsprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zshgd u. beschränkt. Sei $u \in \mathcal{C}^2(\omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ eine Lösung vom (RWP), $f \leq 0$ in Ω und $c \equiv 0$. Dann nimmt u sein Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an, d. h.

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} g(x)$$

Kor. Sei $c \geq 0$ und $f \leq 0$. Dann gilt $\sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max\{\sup\limits_{x \in \partial\Omega} u(x), 0\}$.

Kor (Vergleichsprinzip). Für $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ und $c \geq 0$ gelte $\mathcal{L}u_1 \leq \mathcal{L}u_2$ in Ω und $u_1 \leq u_2$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $u_1 \leq u_2$ auf $\overline{\Omega}$.

Kor (Eindeutigkeit). Sei $c \geq 0$. Dann hat (RWP) höchstens eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Satz. Sei Ω ein beschr. Lipschitz-Gebiet, $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $c \geq 0$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann besitzt (RWP) genau eine Lsg $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Achtung. Es muss aber nicht $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ gelten!

Differenzenverfahren

Verfahren (DV). Am Beispiel des Poisson-Problems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega = (0,1) \\ u(0) = g_0, u(1) = g_1 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Wir führen folgende Schritte durch:

1. Diskretisierung: Wähle $n \in \mathbb{N}$, setze $h \coloneqq \frac{1}{n}$ und
$$\Omega_h \coloneqq \{x_i \coloneqq ih \mid i = 1, \dots, n-1\} \qquad \text{(innere Gitterpunkte)}$$
$$\partial\Omega_h \coloneqq \{x_0 = 0, x_n = 1\} \qquad \text{(Randpunkte)}$$
2. Approx. der Ableitungen durch Differenzenquotienten (DQ)
$$u'(x_i) \approx \tfrac{1}{h}\left(u(x_i + h) - u(x_i)\right) \qquad \text{(\textbf{Vorwärts-DQ})}$$
$$u'(x_i) \approx \tfrac{1}{h}\left(u(x_i) - u(x_i - h)\right) \qquad \text{(\textbf{Rückwärts-DQ})}$$
$$u'(x_i) \approx \tfrac{1}{2h}\left(u(x_i + h) - u(x_i - h)\right) \qquad \text{(\textbf{zentraler DQ})}$$
Für die zweite Ableitung ergibt sich
$$\begin{aligned} u''(x_i) &= (u'(x_i))' \approx \tfrac{1}{h}\left(u'(x_i + h) - u'(x_i)\right) \approx \\ &\approx \tfrac{1}{h} \cdot \left(\tfrac{1}{h}\left(u(x_i + h) - u(x_i)\right) - \tfrac{1}{h}\left(u(x_i) - u(x_i - h)\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{h^2}\left(u(x_i + h) - 2 \cdot u(x_i) + u(x_i - h)\right) =: \Delta_h u \end{aligned}$$
Dabei heißt Δ_h der diskrete eindim. Laplace-Operator.
Das diskretisierte Randwertproblem ist nun
$$(\mathrm{RWP}_1)_\mathrm{h} \begin{cases} -\Delta_h u_h = f & \text{in } \Omega_h, \\ u_h(0) = g_0, u_h(1) = g_1 & \text{auf } \partial\Omega_h. \end{cases}$$
3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems
$$\tfrac{1}{h^2}\left(2u_h(x_1) - u_h(x_2)\right) = f(x_1) + \tfrac{g_0}{h^2} \qquad (i{=}1)$$
$$\tfrac{1}{h^2}\left(-u_h(x_{i-1}) + u_h(x_i) - u_h(x_{i+1})\right) = f(x_i) \qquad (i = 2, ..., n-2)$$
$$\tfrac{1}{h^2}\left(-u_h(x_{n-2}) + 2u_h(x_{n-1})\right) = f(x_{n-1}) + \tfrac{g_1}{h^2} \quad (i{=}n{-}1)$$
Als lineares Gleichungssystem: $-\tilde{\Delta}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$ mit
$$-\tilde{\Delta}_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$
$$\tilde{u}_h = \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ \vdots \\ u_h(x_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{g_1}{h^2} \end{pmatrix}$$

Ziel. Herausfinden, was die Lösung u_h von $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ (die man durch Lösen von (LGS) erhält) mit der Lösung u zum ursprünglichen Problem (RWP) zu tun hat. Ist etwa u_h die Einschränkung von u, oder zumindest annäherungsweise? Wenn ja, wie klein muss man h wählen, damit die Approximation gut wird?

$$(\mathrm{RWP}) \begin{cases} -\mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$
$$(\mathrm{RWP})_\mathrm{h} \begin{cases} -\mathcal{L}_h u = f_h & \text{in } \Omega_h, \\ u_h = g_h & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases}$$
$$(\mathrm{LGS}) \ \tilde{\mathcal{L}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$$

Notation. $U_h \coloneqq \{\Omega_h \to \mathbb{R}\}, \quad R_h : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \to U_h, \ u \mapsto u|_{\Omega_h}$

Def. Das Differenzenverfahren $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ heißt

- **konvergent** von der Ordnung p, falls $C > 0$, $h_0 > 0$ existieren, sodass für die Lösung u von (RWP) und die Lösung u_h von $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ gilt:
$$\|u_h - R_h u\|_h \le Ch^p \quad \text{für alle } 0 < h \le h_0,$$
wobei $\|{-}\|_h$ eine Norm zu U_h ist, wie z. B. $\|u_h\|_h \coloneqq \max_{x \in \Omega_h} |u_h(x)|$.
- **konsistent** von der Ordnung p, falls
$$\|\mathcal{L}_h R_h u - R_h \mathcal{L} u\|_h \le ch^p \|u\|_{\mathcal{C}^{p+2}(\overline{\Omega})} \quad \forall u \in \mathcal{C}^{p+2}(\overline{\Omega}).$$
- **stabil**, falls $\tilde{L}_h$ invertierbar ist und ein $h_0 > 0$ existiert mit
$$\sup_{0<h\le h_0} \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h < \infty, \quad \text{wobei } \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h \coloneqq \sup_{f \ne 0} \frac{\|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1} f\|_h}{\|f\|_h}.$$

Bem. Die ind. Matrixnorm ist $\|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h = \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |l_{ij}|$.

Satz. Ist das DV $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ konsistent und stabil, so auch konvergent. Genauer gilt: Ist $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ stabil und konsistent von der Ordnung p und $u \in \mathcal{C}^{p+2}(\overline{\Omega})$, dann ist $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ konvergent von der Ordnung p.

Beweis. Setze $w_h \coloneqq u_h - R_h u$. Für $x \in \partial\Omega_h$ gilt dann $w_h(x) = 0$ und für $x \in \Omega_h$ gilt
$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_h w_h(x) &= \mathcal{L}_h w_h(x) = \mathcal{L}_h u_h(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \\ &= f_h(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) = R_h f(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \\ &= R_h \mathcal{L} u(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \end{aligned}$$
Somit gilt $w_h = \tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\left(R_h \mathcal{L} u - \mathcal{L}_h R_h u\right)$ in Ω_h, also
$$\begin{aligned} \|w_h\|_h &= \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\left(R_h \mathcal{L} u - \mathcal{L}_h R_h u\right)\| \le \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h \cdot \|R_h \mathcal{L} u - \mathcal{L}_h R_h u\|_h \\ &\le c_1 \cdot c_2 \cdot h^p \cdot \|u\|_{\mathcal{C}^{p+2}(\overline{\Omega})} \le Ch^p \qquad \text{für } 0 < h \le h_0. \end{aligned}$$
∎

Lem. Das DV $(\mathrm{RWP}_1)_\mathrm{h}$ ist konsistent von der Ordnung 2. Es gilt
$$\|\Delta_h R_h u - R_h \Delta u\|_h \le \tfrac{1}{12}\|u\|_{\mathcal{C}^4(\overline{\Omega})} h^2 \quad \forall u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega}).$$

Bem. Um zu zeigen, dass $(\mathrm{RWP}_1)_\mathrm{h}$ konvergent ist, müssen wir noch zeigen, dass $\tilde{L}_h = -\tilde{\Delta}_h$ invertierbar ist und $\sup_{0<h\le h_0} \|\tilde{\Delta}_h\| < \infty$.

Def. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **M-Matrix**, falls

- $a_{ii} > 0$ für $i = 1, \dots, n$,
- $a_{ij} \le 0$ für $i \ne j$, $i, j = 1, \dots, n$,
- A invertierbar ist und
- für $A^{-1} =: B = (b_{ij})$ gilt $b_{ij} \ge 0$.

Bem. Es gilt folgende Monotonie-Eigenschaft für M-Matrizen:
$$x \le y \implies A^{-1}x \le A^{-1}y.$$

Def. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix.

- A heißt **schwach diagonaldominant**, falls
$$\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^n |a_{ij}| \le |a_{ii}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$
und ein i_0 existiert, sodass die Ungleichung strikt ist.
- A heißt **diagonaldominant**, falls
$$\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Bem. $-\tilde{\Delta}_h$ ist schwach diagonaldominant

Def. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **reduzibel** (oder zerlegbar), wenn es eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodass
$$PAP^T = \left(\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{smallmatrix}\right) \quad \text{mit } A_{11} \in R^{k\times k}, \ 0 < k < n.$$

Bem. $-\tilde{\Delta}_h$ ist irreduzibel