Kurzfassung Riemannsche Geometrie

 Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def. Eine **topologische Mannigfaltigkeit** (Mft) ist ein topologischer Raum M^m mit folgenden Eigenschaften:

- M^m ist **hausdorffsch**, d. h.
$$\forall\, x, y \in M^m : x \neq y \implies \exists\, U_x \Subset M^m : \exists\, U_y \Subset M^m : x \in U_x \wedge y \in U_y \wedge U_x \cap U_y = \emptyset.$$
- M^m erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, d. h. es gibt eine abzählbare Menge $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$, sodass
$$\forall\, A \Subset M^m : \exists\, K \subset \mathbb{N} : A = \bigcup_{k \in K} U_k.$$
- M^m ist **lokal euklidisch**, d. h. für alle $x \in M^m$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x und einen Homöomorphismus $\phi : U_x \to \mathcal{O}$ mit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Bemerkung. lokal euklidisch $\not\Rightarrow$ hausdorffsch

Prop. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt
$$M \text{ zusammenhängend} \iff M \text{ wegzusammenhängend}.$$

Def.
- Sei M eine m-dim. topol. Mft. Ein **Atlas** ist eine Menge $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j : U_j \to \mathcal{O}_j) \mid j \in J\}$ mit $U_j \Subset M$ und $\mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^n$ offen und Homöomorphismen ϕ_j, für die gilt $\bigcup_{j \in J} U_j = M$.
- Die Paare (U_j, ϕ_j) werden **Karten** genannt.
- Für je zwei Karten (U_j, ϕ_j) und (U_k, ϕ_k) gibt es eine **Kartenwechselabbildung**
$$\phi_{kj} := \phi_k \circ \phi_j^{-1}|_{\phi_j(U_j \cap U_k)} : \phi_j(U_j \cap U_k) \to \phi_k(U_j \cap U_k).$$
- Ein Atlas heißt **differenzierbar**, wenn alle Kartenwechselabbildungen $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen sind.
- Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt **differenzierbare Struktur** von M, wen gilt: Ist $(\tilde{U}, \tilde{\phi_j})$ eine Karte von M und $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \{(\tilde{U}, \tilde{\phi_j})\}$ ein differenzierbarer Atlas, dann gilt $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$.
- Eine topol. Mft versehen mit einer differenzierbaren Struktur heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

Notation. Seien ab jetzt M^m und N^n differenzierbare Mften der Dimensionen m und n

Def.
- Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt in $x \in M$ **differenzierbar**, wenn es eine Karte $(U_x, \phi : U_x \to \mathcal{O}) \in \mathcal{A}_M$ und eine Karte $(\tilde{U}_{f(x)}, \tilde{\phi} : \tilde{U}_{f(x)} \to \tilde{\mathcal{O}}) \in \mathcal{A}_N$ gibt, sodass
$$\tilde{\phi} \circ f|_{U_x} \circ \phi^{-1} : \mathcal{O} \to \tilde{\mathcal{O}} \quad \text{differenzierbar } (\mathcal{C}^\infty) \text{ ist.}$$
- Die Abbildung f heißt **differenzierbar**, falls sie in jedem Punkt $x \in M$ differenzierbar ist.

Notation. $\mathcal{C}^\infty(M, N) := \{f : M \to N \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$

Bemerkung. Die Definition ist unabhängig von Wahl der Karten um x und $f(x)$.

Def. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn f ein Homöo ist und f und f^{-1} differenzierbar sind.

Def. Sei $p \in M$. Zwei Funktionen $f : U_p \to \mathbb{R}$ und $g : V_p \to \mathbb{R}$ mit $U_p, V_p \Subset M$ heißen äquivalent, falls es eine offene Umgebung $W \subset U_p \cap V_p$ mit $f|_W = g|_W$ gibt. Die Äquivalenzklasse $[f]$ bezüglich der so definierten Äq'relation heißt **Funktionskeim** in p.

Notation. $\mathcal{C}^\infty(M, p) := \{[f] \mid [f] \text{ Funktionskeim in } p\}$

Bemerkung. Die Menge der Funktionskeime ist eine $\mathbb{R}$-Algebra.

Def. Eine lineare Abb. $\delta : \mathcal{C}^\infty(M, p) \to \mathbb{R}$ heißt **Derivation**, falls
$$\forall\, [f], [g] \in \mathcal{C}^\infty(M, p) : \delta[f \cdot g] = \delta[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta[g].$$

Def. Der gewöhnliche Tangentialraum des $\mathbb{R}^n$ im Punkt p ist
$$\tilde{T}_p\mathbb{R}^n := \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$
mit $(p, v) + (p, w) := (p, v + w)$ und $\lambda \cdot (p, v) := (p, \lambda \cdot v)$.

Def. Der **Tangentialraum** von M im Punkt $p \in M$ ist
$$T_pM := \{\partial : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, p) \to \mathbb{R} \mid \partial \text{ linear, derivativ}\}$$
Ein Element $v \in T_pM$ heißt **Tangentialvektor** an M in p.

Bemerkung. Wir erhalten eine Abbildung
$$T_pM \times \mathcal{C}^\infty(M, p) \to \mathbb{R}, \quad (v, [f]) \mapsto v.f := v[f].$$

Bemerkung. T_pM ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Satz. Die Vektorräume $T_p\mathbb{R}^n$ und $\tilde{T}_p\mathbb{R}^n$ sind isomorph. Insbesondere gilt $\dim(T_p\mathbb{R}^n) = n$.

Korollar. Für eine m-dimensionale diff'bare Mft M gilt: $\dim(T_pM) = m$.

Bemerkung. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine differenzierbare Kurve. Dann kann man $\dot{c}(0)$ auffassen als Tangentialvektor an M in $c(0)$ mittels
$$\dot{c}(0)[f] := \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}(f \circ c).$$

Bemerkung. Sei (U, ϕ) eine Karte von M. Wir setzen
$$\tfrac{\partial^\phi}{\partial x_i}|_p[f] := (\phi^{-1} \circ \alpha_i)^\cdot(0)[f] = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}(f \circ \phi^{-1} \circ \alpha_i)$$
$$\text{mit } \alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \to U, \;\; t \mapsto \phi(p) + te_i.$$
Wir erhalten $\frac{\partial^\phi}{\partial x_i}|_p \in T_pM$.

Def. Sei $f : M \to N$ diff'bar. Die **Ableitung** von f in $p \in M$ ist die Abbildung
$$T_pf = f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N, \;\; v \mapsto f_{*p}v$$
$$\text{wobei } f_{*p}(v).[g] := v.[g \circ f].$$

Lemma. Sei M eine diff'bare Mft, $p \in M$. Dann gilt
- f_{*p} ist linear
- $(\mathrm{id}_M)_{*p} = \mathrm{id}_{T_pM}$
- Kettenregel: Seien N, P diff'bare Mften. Dann gilt
$$\forall\, p \in M : (f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}.$$

Korollar. Wenn $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus ist, dann ist $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein VR-Isomorphismus für alle $p \in M$.

Satz. Sei M eine m-dimensionale Mft, $p \in M$ und (U, ϕ) eine Karte.
- Es gilt $T_pM = \{\dot{c}(0) \mid c : (-\epsilon, \epsilon) \to M \text{ diff'bar}, c(0) = p\}$
- $\{\frac{\partial^\phi}{\partial x^i}|_p \mid i = 1, ..., n\}$ ist eine Basis von T_pM.

Def. $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$ heißt **Tangentialbündel** von M. Die **Fußpunktabbildung** ist die Projektion
$$\pi : TM \to M, v \in T_pM \mapsto p.$$

Def. Ein **Vektorfeld** auf M ist eine Abbildung $X : M \to TM$, sodass $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. Dies ist äquivalent zu $\forall\, p \in M : X(p) \in T_p(M)$.

Bemerkung. Sei $X : M \to TM$ ein Vektorfeld, (U, ϕ) eine Karte. Dann gibt es Funktionen $\xi^j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n$ mit $X(p) = \sum_{j=1}^n \xi^j(p) \frac{\partial^\phi}{\partial x^j}|_p$ für alle $p \in M$.

Def.
- Ein Vektorfeld X auf M heißt in $p \in M$ **diff'bar** ($\mathcal{C}^\infty$), wenn es eine Karte (U, ϕ) um p gibt, sodass die Funktionen $\xi_1, ..., \xi^m$ diff'bar ($\mathcal{C}^\infty$) sind.
- X heißt **differenzierbar**, wenn X in allen $p \in M$ diff'bar ist.

Lemma. Wenn die Koordinatenfunktionen $\xi^1, ..., \xi^n$ für eine bestimmte Karte $(U, \phi : U \to \mathcal{O})$ differenzierbar sind, dann sind sie es für jede andere Karte $(\tilde{U}, \psi : \tilde{U} \to \tilde{\mathcal{O}})$ mit $\tilde{U} \subseteq U$.

Def. Sei M eine m-dimensionale diff'bare Mft mit diff'barer Struktur $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j) \mid j \in J\}$. Dann ist TM eine $2m$-dimensionale Mft mit Atlas $\tilde{\mathcal{A}} := \{(\tilde{U}_j := \pi^{-1}(U_j), \tilde{\Phi}_j) \mid j \in J\}$, wobei
$$\tilde{\Phi}_j : \pi^{-1}(U_j) \to \phi_j(U_j) \times \mathbb{R}^m, \quad \sum_{k=1}^m \xi^k(p) \tfrac{\partial^{\phi_j}}{\partial x^k}|_p \mapsto (\phi_j(p), \xi^1(p), ..., \xi^n(p)).$$
Eine Menge $V \subseteq TM$ heißt offen, wenn $\tilde{\Phi}_j(V \cap \pi^{-1}(U_j)) \Subset \mathbb{R}^{2n}$ offen ist für alle $j \in J$.

Notation. $\chi(M) := \{ \text{ diff'bare Vektorfelder auf } M \}$

Bemerkung. $\chi(M)$ ist ein $\mathbb{R}$-VR und ein $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul.

Lemma. Jedes $X \in \chi(M)$ induziert eine Abbildung
$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M), \quad \phi \mapsto X(\phi) := p \mapsto X(p).[\phi].$$
Die Abbildung X ist linear und derivativ.

Lemma. Seien $X, Y \in \chi(M)$ mit $\forall\, f \in \mathcal{C}^\infty(M) : X(f) = Y(f)$. Dann gilt $X = Y$.

Lemma. Seien $X, Y \in \chi(M)$. Dann definiert
$$Z : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M), \;\; f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$$
ein Vektorfeld auf M.

Def. Dieses Vektorfeld $[X, Y] := Z$ wird als **Kommutator** oder **Lie-Klammer** von X und Y bezeichnet.

Def. Sei $X \in \chi(M)$. Eine diff'bare Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ heißt **Integralkurve** von X, falls

$$\forall\, t \in (-\epsilon, \epsilon) \;:\; \dot{c}(t) = X_{c(t)}.$$

Lemma. Sei $X \in \chi(M)$, $p \in M$ und $v \in T_pM$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{c}(t) = X_{c(t)}, \quad c(0) = p$$

eine eindeutige lokale Lösung $c = c_p^X : (-\epsilon, \epsilon) \to M$.

Def. Die Abbildung $\Phi_X : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to M, \quad (p, t) \mapsto c_p^X(t)$ heißt **Fluss** von X.

Def. Ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $[-,-] : V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto [v, w]$ heißt **Lie-Algebra**, falls

- die Abb. antisymmetrisch ist, d. h. $\forall\, v, w \in V \;:\; [v, w] = -[w, v]$
- die **Jacobi-Identität** erfüllt ist, d. h.

$$\forall\, v, w, z \in V \;:\; [v, [w, z]] + [z, [v, w]] + [w, [z, v]] = 0.$$

Bspe. • $(\chi(M), [-,-])$ ist eine Lie-Algebra.
• $\mathbb{K}^{n \times n}$ ist eine Lie-Algebra mit $[A, B] \coloneqq AB - BA$.

Def. Eine Gruppe G, welche ebenfalls eine diff'bare Mft ist, heißt **Lie-Gruppe**, wenn gilt:

- $\mu : G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ ist diff'bar.
- $\iota : G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$ ist diff'bar.

Bsp. Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n} \approx \mathbb{R}^{(n^2)}$ ist eine Lie-Gruppe. Die Differenzierbarkeit der Inversion folgt aus der Cramerschen Regel.

Def. Sei G eine Lie-Gruppe und $g \in G$. Dann sind

$$lg : G \to G, \quad x \mapsto g \cdot x = \mu(g, x)$$
$$rg : G \to G, \quad x \mapsto x \cdot g = \mu(x, g)$$

Diffeomorphismen mit Umkehrabbildung $l(g^{-1})$ bzw. $r(g^{-1})$.

Bsp. Abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sind Lie-Gruppen, z. B.
• $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ • $O_n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ • $U_n \subset \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$

Def. Sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus und $X \in \chi(M)$. Dann ist

$$f_*X : N \to TN, \quad x \mapsto f_{*f^{-1}(x)} X(f^{-1}(x))$$

Def. Ein Vektorfeld $X \in \chi(G)$ heißt **linksinvariant**, wenn gilt:

$$\forall\, g, h \in G \;:\; X(g \cdot h) = lg_{*h} X(h).$$

Kürzer: $\forall\, g \in G \;:\; lg_* X = X$.

Notation. $\mathcal{L}(G) \coloneqq \{X \in \chi(G) \,|\, X \text{ ist linksinvariant}\} \subset \chi(G)$

Bemerkung. Ein linksinvariantes VF $X \in \chi(G)$ ist eindeutig bestimmt durch $X(e)$. Andererseits: Ist $x \in T_eG$, dann gibt es ein linksinvariantes VF $X \in \chi(G)$ mit $X(e) = x$. Somit ist die Abbildung

$$i : \mathcal{L}(G) \to T_eG, \quad X \mapsto X(e)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus.

Lemma. Seien $X, Y \in \mathcal{L}(G)$. Dann ist $[X, Y] \in \mathcal{L}(G)$.

Korollar. $(\mathcal{L}(G), [-,-])$ ist eine $\dim(G)$-dimensionale Unter-Lie-Algebra von $(\chi(G), [-,-])$.

Notation. $OJ \coloneqq T_eG \cong \mathcal{L}(G)$

Def. Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Die davon induzierte Norm ist $\|v\| \coloneqq \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$.

Def. Eine **Riemannsche Metrik** auf einer diff. Mft M ist eine Familie $g = (g_p)_{p \in M}$ von Skalarprodukten $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, die differenzierbar von p abhängt, d. h. für alle $X, Y \in \chi(M)$ ist $g(X, Y) : M \to \mathbb{R}, p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$ differenzierbar ($\mathcal{C}^\infty$).
Das Tupel (M, g) heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

Bemerkung. Sei (U, ϕ) eine Karte von M. Setze

$$g_{ij}^\phi : U \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto g(\tfrac{\partial \phi}{\partial x^i}|_p, \tfrac{\partial \phi}{\partial x^j}|_p).$$

Seien $X = \sum\limits_{i=1}^n v^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ und $Y = \sum\limits_{j=1}^n w^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$ zwei VF in U. Dann gilt

$$g(X, Y)(p) = g_p(X(p), Y(p)) = \sum_{i,j=1}^n v^i(p) w^j(p) g_{ij}(p).$$

Def. Seien (M, g_M), (N, g_N) Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt Isometrie, wenn gilt:

- f ist ein Diffeomorphismus
- f erhält Riemannsche Metriken, d. h. für alle $X, Y \in \chi(M)$ gilt:

$$g_M(X, Y) = g_N(f_*X, f_*Y) \circ f,$$
$$\text{also } \forall\, p{\in}M \;:\; \forall\, v, w{\in}T_pM \;:\; g_{M,p}(v, w) = g_{N,f(p)}(f_{*p}(v), f_{*p}(w)).$$

Def. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$I(M, g) \coloneqq \{f : M \to M \,|\, f \text{ Isometrie}\}$$

in kanonischer Weise eine Lie-Gruppe (Myers-Steenrod).

Satz. Jede diff'bare Mannigfaltigkeit hat eine Riemannsche Metrik.

Bsp. Das Oberer-Halbraum-Modell des hyperbolischen Raum ist

$$H^n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, e_n \rangle_{\text{eukl}} > 0\} \mathrel{\text{ⓒ}} \mathbb{R}^n$$

mit dem offensichtlichen Atlas und der Riemannschen Metrik

$$g_p^{\text{Hyp}}((p, \tilde{v}), (p, \tilde{w})) \coloneqq \frac{\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\text{eukl}}}{\langle p, e_n \rangle^2}.$$

Def. Eine diffbare Abbildung $f : M \to N$ zwischen diff'baren Mften heißt **Immersion**, falls $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ für alle $p \in M$ injektiv ist.

Def. Angenommen, N ist sogar eine Riemannsche Mft mit Metrik g_N. Dann erhalten wir eine Riemannsche Metrik auf M, die mit f **zurückgeholte Metrik**, durch

$$(f^* g_N)_p(v, w) \coloneqq g_{N,f(p)}(f_{*p}(v), f_{*p}(w)).$$

Def. Eine Immersion $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ heißt **isometrisch**, falls $g^M = f^* g^N$.

Prop. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für alle Punkte $p, q \in M$ einen stückweise differenzierbaren Weg $\gamma : [0, 1] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$.

Def. Für $\gamma : [a, b] \to M$ stückweise $\mathcal{C}^1$ heißt

$$L(\gamma) \coloneqq \int_a^b \|\dot{\gamma}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \quad \textbf{Länge} \text{ von } \gamma.$$

Def. Sei (M, g) eine Riemannsche Mft. Dann ist der **Riemannsche Abstand** gegeben durch die Metrik

$$d_g : M \times M \to \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto \inf\{\, L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \to M \text{ stückweise } \mathcal{C}^1 \text{ mit } \gamma(a) = p \text{ und } \gamma(b) = q \,\}.$$

Bemerkung. Nach dem Satz von Hopf-Rinow stimmt die von d_g induzierte Topologie mit der von M überein.

Def. Ein **Zusammenhang** (kov. Ableitung) ist eine Abb.

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

sodass für $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt:

- $\nabla_{X_1 + f X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + f \nabla_{X_2} Y$
- $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- $\nabla_X (fY) = f (\nabla_X Y) + (X(f)) \cdot Y$ (Leibniz-Regel)

Def. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M. Dann heißt

$$T^\nabla(X, Y) \coloneqq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \qquad \textbf{Torsion} \text{ von } \nabla.$$

Wenn $T^\nabla = 0$, dann heißt ∇ **torsionsfrei**.

Def. Ein Zusammenhang ∇ auf einer riemannschen Mft. (M, g) heißt **metrisch**, wenn gilt:

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y, Z)$$

Theorem. Auf jeder Riem. Mft. (M, g) gibt es genau einen torisionsfreien, metrischen Zusammenhang. Für diesen gilt:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) =& Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &+ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) \end{aligned}$$

Def. Der eindeutige torsionsfreie und metrische Zusammenhang auf (M, g) heißt **Levi-Civita-Zusammenhang** auf (M, g).

Bemerkung. Sei (M,g) eine riemannsche Mft., (U,ϕ) eine Karte von M. Dann gibt es diff'bare Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ für $i,j,k \in \{1,...,n\}$, sodass gilt

$$\nabla_{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\right)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial\phi}{\partial x^k}.$$

Die Funktionen Γ_{ij}^k heißen **Christoffel-Symbole** von ∇.

Lemma. $\left[\frac{\partial\phi}{\partial x^j}, \frac{\partial\phi}{\partial x^k}\right] = 0$

Satz. Für die Christoffel-Symbole gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^j}g_{il} + \frac{\partial\phi}{\partial x^i}g_{jl} - \frac{\partial\phi}{\partial x^l}g_{ij}\right),$$

wobei

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R},\ p \mapsto g_p\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^i}(p), \frac{\partial\phi}{\partial x^j}(p)\right)$$

$$g^{kl} : U \to \mathbb{R} \text{ definiert ist durch } \sum_{r=1}^n g^{jr}g_{rk} = \delta_k^j.$$

Def. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M. Dann heißt $X \in \chi(M)$ parallel, falls

$$\nabla X : \chi(M) \to \chi(M),\ Y \mapsto \nabla_Y X$$

gleich Null ist.

Def. Ein **Tensorfeld** vom Typ (j,k) mit $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0,1\}$ ist eine Abbildung

$$T : \chi(M) \times ... \times \chi(M) \to \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M), & \text{falls } j = 0, \\ \chi(M), & \text{falls } j = 1, \end{cases}$$

die in jedem Argument linear ist.

Bspe.
- $T^\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ ist Tensor vom Typ $(1,2)$.
- $\nabla Y : \chi(M) \to \chi(M),\ X \mapsto \nabla_X Y$ ist Tensor vom Typ $(1,1)$.
- Alternierende k-Formen auf $\mathbb{R}^n$ sind Tensoren vom Typ $(0,k)$.
- Riemannsche Metriken sind Tensorfelder vom Typ $(0,2)$.

Satz. Sei T ein Tensorfeld auf M vom Typ (j,k). Sei $p \in M$. Seien $X_1, ..., X_k \in \chi(M)$. Dann hängt $T(X_1, ..., X_k)(p)$ nur von $X_1(p)$, ..., $X_k(p)$ ab.

Bemerkung. Sei (U,ϕ) eine Karte von M und T ein Tensorfeld vom Typ $(1,k)$ auf M. Dann gibt es Funktionen $T_{i_1,...,i_k}^l$, sodass

$$T\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^{i_1}}, ..., \frac{\partial\phi}{\partial x^{i_k}}\right) = \sum_{l=1}^n T_{i_1,...,i_k}^l \frac{\partial\phi}{\partial x^l}.$$

Notation. $\nabla_v Y \coloneqq (\nabla_X Y)(p)$ für $v \in T_pM$ und X ein VF mit $X_p = v$ (wohldefiniert).

Satz. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M. Sei $p \in M$, $v \in T_pM$ und $Y, \tilde{Y} \in \chi(M)$. Falls für eine diff'bare Kurve $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ gilt

$$c(0) = p,\ \dot{c}(0) = 0 \text{ und } \forall t \in (-\epsilon,\epsilon) : Y(c(t)) = \tilde{Y}(c(t)),$$

dann gilt $\nabla_v Y = \nabla_v \tilde{Y}$.

Def. Ein **VF längs einer Kurve** $c : I \to M$ ist eine Abbildung

$$X : I \to TM \quad \text{mit} \quad X(t) = X_t \in T_{c(t)}M,$$

welche diff'bar ist, d. h. für alle $t_0 \in I$ existiert eine Karte (U,ϕ) um $c(t_0)$, sodass man schreiben kann

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi^i(t)\frac{\partial\phi}{\partial x^j}|_{c(t)} \quad \text{für alle } t \in c^{-1}(U)$$

mit diff'baren Funktionen $\xi^i : c^{-1}(U) \to \mathbb{R}$.

Bemerkung. X_t muss nicht Einschränkung eines VF auf M sein.

Notation. $\chi_c \coloneqq \{$ Vektorfelder längs c $\}$

Bemerkung. χ_c ist ein Modul über $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

Satz. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M, sei $c : I \to M$ eine diff'bare Kurve. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\frac{\nabla}{\mathrm{d}t} = \frac{D}{\mathrm{d}t} = \frac{D^\nabla}{\mathrm{d}t} : \chi_c \to \chi_c,$$

sodass für $X, \tilde{X} \in \chi_c$, $Y \in \chi(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ gilt:
- $\frac{D}{\mathrm{d}t}(X + \tilde{X}) = \frac{D}{\mathrm{d}t}X + \frac{D}{\mathrm{d}t}\tilde{X}$,
- $\frac{D}{\mathrm{d}t}(f \cdot X) = f \cdot \frac{D}{\mathrm{d}t}X + f'X$,
- $\frac{D(Y \circ c)}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\dot{c}} Y$.

Def. Die Abbildung $\frac{D}{\mathrm{d}t}$ heißt von ∇ **induzierte kovariante Ableitung längs c.**

Satz. Sei (M,g) eine Riem. Mft, ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang und $c : I \to M$ diff'bar. Dann gilt

$$\forall X, Y \in \chi_c : g(X,Y)' = g\left(\frac{DX}{\mathrm{d}t}, Y\right) + g\left(X, \frac{DY}{\mathrm{d}t}\right).$$

Def. Sei ∇ ein Zusammenhang auf M. Dann heißt $X \in \chi_C$ **parallel (längs c)**, wenn $\frac{DX}{\mathrm{d}t} = 0$.

Bemerkung. Sei (U,ϕ) eine Karte, $\tilde{I} \subset I$ mit $c(\tilde{I}) \subset U$. In lokalen Koordinaten lässt sich Parallelität ausdrücken durch

$$(\xi^k)' + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(t)\xi^j(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1, ..., n \text{ und alle } t \in \tilde{I}.$$

Für die Funktionen ξ^k ist das ein System linearer DGL mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}' = A(t) \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

Dieses System ist linear beschränkt, es folgt daher die Existenz von parallelen Vektorfeldern in Kartenumgebungen.

Satz. Sei $t_0 \in I = (a,b)$ und $v \in T_{c(t_0)}M$ vorgegeben. Dann gibt es genau ein VF $X \in \chi_X$ mit

$$\frac{DX}{\mathrm{d}t} \equiv 0 \quad \text{und} \quad X(t_0) = v.$$

Def. Sei : $[a,b] \to M$ diff'bar. Die Abbildung

$$P_c : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M,\ \ v \mapsto X^v(b), \ \text{ wobei } \frac{DX^v}{\mathrm{d}t} \equiv 0 \text{ und } X^v(a) = v,$$

heißt **Parallelverschiebung** längs c bzgl. ∇.

Satz. P_c ist linear.

Satz. Ist (M,g) Riem. Mft und ∇ der LC-Zshg, dann gilt

$$g_{c(b)}(P_c(v), P_c(w)) = g_{c(a)}(v,w).$$

Mit anderen Worten: P_c ist eine lineare Isometrie.

Bemerkung. Wir können nun die Definition der Ableitung als Limes des Differenzenquotienten auf Mannigfaltigkeiten übertragen: Sei $v \in T_xM$, $X \in \chi(M)$ und $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ mit $c(0) = x$ und $\dot{c}(0) = v$. Dann ist

$$\nabla_v X = \lim_{t \to 0} \frac{P_{c(t)}^{-1}(X(c(t))) - X(c(0))}{t}$$

Bemerkung. Parallelverschiebung ist auch möglich und sinnvoll entlang stückweise glatter Kurven.

Def. Die **Holonomiegruppe** von M in $x \in M$ bzgl. ∇ ist

$$\mathrm{Hol}_x^\nabla \coloneqq \{P_c : T_xM \to T_xM \,|\, c \text{ stückweise glatt mit } c(0) = c(1) = x.\}$$

Dabei ist $P_c \circ P_{\tilde{c}} = P_{c \circ \tilde{c}}$ und $(P_c)^{-1} = P_{c^{-1}}$.

Bemerkung. Hol_x^∇ ist sogar eine Lie-Gruppe und eine Untergruppe von $O(T_xM, g_x)$.

Def. Eine glatte Kurve $c : I \to M$ heißt **Geodäte** bzgl. ∇, falls

$$\frac{D^\nabla \dot{c}}{\mathrm{d}t} \equiv 0, \quad \text{d. h. das Tangential-VF } \dot{c} \text{ ist parallel längs } c.$$

Bemerkung. Sei (U,ϕ) eine Karte, $\tilde{I} \subset I$ mit $c(\tilde{I}) \subset U$. In lokalen Koordinaten lässt sich diese Bedingung ausdrücken durch die **Geodätengleichung**

$$(\dot{c}^k)'(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(t)\dot{c}^j(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1, ..., n \text{ und alle } t \in \tilde{I}.$$

Satz. Zu jedem $p \in M$ und $v \in T_pM$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und genau eine Geodäte $c : (-\epsilon,\epsilon) \to M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$.

Satz. Seien $c_{1,2} : I_{1,2} \to M$ zwei Geodäten bzgl ∇ mit $0 \in I_1 \cap I_2$. Falls $c_1(0) = c_2(0)$ und $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$, dann gilt $c_1|_{I_1 \cap I_2} \equiv c_1|_{I_1 \cap I_2}$.

Satz. Gegeben $p \in M$ und $v \in T_pM$, dann gibt es genau ein Intervall $I_v \Subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I_v$ und eine Geodäte

$$c_v : I_v \to M \quad \text{mit} \quad c(0) = p,\ \ \dot{c}_v(0) = v,$$

die maximal im folgenden Sinn ist: Für jede Geodäte $c : I \to M$ mit $\dot{c}(0) = v$ gilt: $I \subseteq I_v$ und $c = c_v|_I$.

Notation. Für $v \in T_pM$ sei $c_v : I_v \to M$ die zugehörige maximale Geodäte.

Def. Ein Zusammenhang ∇ auf M heißt **vollständig**, wenn $I_v = \mathbb{R}$ für alle $v \in TM$.

Lemma (Spray-Eigenschaft)**.** Ist $v \in T_pM$, $c_v : I_v \to M$ die maximale Geodäte mit $\dot{c_v}(0) = v$. Sei $\lambda \neq 0$, dann ist

$$c_{\lambda v} : I_{\lambda v} \to M, \quad t \mapsto c_v(\lambda t) \quad \text{wobei} \quad I_{\lambda v} := \tfrac{1}{\lambda} I_v$$

die maximale Geodäte mit $\dot{c_{\lambda v}}(0) = \lambda v$.

Def. Sei M eine Mft mit Zshg ∇ und $p \in M$. Dann heißt

$$\mathrm{Exp}_p : \widetilde{T_pM} \to M, \quad v \mapsto c_v(1), \quad \widetilde{T_pM} := \{v \in T_pM \,|\, 1 \in I_v\}$$

Exponentialabbildung von ∇ in p.

Lemma.
- $\widetilde{T_pM}$ ist sternförmig bzgl. 0
- $\forall\, v \in \widetilde{T_pM} \,:\, \forall\, t \in [0,1] \,:\, \mathrm{Exp}_p(tv) = c_v(t)$

Satz.
- Es gibt eine offene Umgebung $\hat{U} \Subset T_pM$ mit $0 \in \hat{U} \subseteq \widetilde{T_pM}$, sodass $\mathrm{Exp}_p|_{\hat{U}} : \hat{U} \to M$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung ist.
- Wir können $\hat{U}$ so wählen, dass $\mathrm{Exp}_p|_{\hat{U}} : \hat{U} \to \mathrm{Exp}_p(\hat{U})$ ein Diffeomorphismus ist.

Bemerkung. Man kann zeigen:
- $\widetilde{T_pM} \Subset T_pM$
- $\mathrm{Exp}_p : \widetilde{T_pM} \to M$ ist überall $\mathcal{C}^\infty$, aber nicht überall ein lokaler Diffeomorphismus (Schnittpunkt-Phänomen)
- Ist (M, ∇) geodätisch vollständig, dann gilt $\widetilde{T_pM} = T_pM$.

Def. Eine Kurve $c : I \to M$ heißt **nach** / **proportional zur BL parametrisiert**, wenn gilt:

$$\|\dot{c}(t)\| \equiv 1 \quad / \quad \|\dot{c}(t)\| \equiv \text{konst.}$$

Bemerkung.
- Jede Geodäte ist proportional zur BL parametrisiert.
- Eine Kurve ist genau dann prop. zur BL parametrisiert, wenn es $\alpha \geq 0$ gibt mit $L(c|_{[a,b]}) = \alpha \cdot (b - a)$.

Def. Eine **Variation** von $c : [a,b] \to M$ ist eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung

$$(-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M, \quad (s,t) \mapsto \alpha(s,t) \quad \text{mit } \forall\, t \in [a,b] \,:\, \alpha(0,t) = c(t).$$

Sie heißt **Variation mit festen Endpunkten**, wenn zudem gilt:

$$\forall\, s \in (-\epsilon, \epsilon) \,:\, \alpha(s,a) = c(a) \wedge \alpha(s,b) = c(b)$$

Sprechweise. s heißt **Variationsparameter**

Def. Eine Variation einer stückweise glatten Kurve $c : [a,b] \to M$ (mit c glatt auf den Teilintervallen $[t_{i-1}, t_i]$) ist eine stetige Abb.

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M, \quad (s,t) \mapsto \alpha_s(t) \quad \text{mit } \alpha|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[t_{i-1},t_i]} \text{ ist } \mathcal{C}^\infty.$$

Notation.
- $\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s_0, t_0)$ ist der Tang.-Vektor an $s \mapsto \alpha(s, t_0)$ in s_0.
- $\frac{\partial \alpha}{\partial t}(s_0, t_0)$ ist der Tangentialvektor an $s \mapsto \alpha(s_0, t)$ in t_0.

Def. Eine Abbildung $X : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to TM$ mit $X(s,t) \in T_{\alpha(s,t)}M$ heißt **Vektorfeld längs α**, wenn X differenzierbar (bzw. stückweise diff'bar) ist.

Notation. Sei X ein VF längs $\alpha(s,t)$. Dann

$$\tfrac{DX}{\partial s}(s_0, t_0) := \tfrac{D}{\mathrm{d}s}|_{s=s_0}(s \mapsto X(s, t_0))$$
$$\tfrac{DX}{\partial t}(s_0, t_0) := \tfrac{D}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0}(s \mapsto X(s_0, t))$$

Lemma. $\dfrac{D}{\partial s}\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = \dfrac{D}{\partial t}\dfrac{\partial \alpha}{\partial s}$

Satz (**1. Variationsformel**)**.** Sei $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Variation von einer $\mathcal{C}^\infty$-Kurve $c = \alpha_0 : [a,b] \to M$. Sei $\|\dot{c}(t)\| = \text{konst} \neq 0$. Dann gilt mit $X(t) := \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0} L(\alpha_s) = \frac{1}{\|\dot{c}\|}\left(g(X, \dot{c})|_a^b - \int_a^b g(X(\tau), \tfrac{D\dot{c}}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{d}\tau\right)$$

Sprechweise. $X(t) := \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t)$ heißt **Variationsvektorfeld**

Satz (1. Variationsformel für stückweise glattes c)**.** Sei $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to M$ eine stückweise glatte Variation, glatt auf $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$ mit $a = t_0 < \ldots < t_k = b$. Dann ist

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_s}{\mathrm{d}s}|_{s=0} = \frac{1}{\|\dot{c}\|}\left(g(X, \dot{c})|_a^b + \sum_{i=1}^{k-1} g(X(t_i), \nabla_i \dot{c}) - \int_a^b g(X, \frac{D\dot{c}}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{d}t\right)$$
$$\text{mit } \nabla_i \dot{c} = \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+)$$

Notation. $\dot{c}(t_i^+) = \lim\limits_{t \downarrow t_i} \dot{c}(t), \quad \dot{c}(t_i^-) = \lim\limits_{t \uparrow t_i} \dot{c}(t)$

Satz. Zu jedem (stückweise) glatten $X \in \chi_c$ gibt es eine (stückweise) glatte Variation α von c mit $X = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0,t)$. Wenn $X(a) = X(b) = 0$, so kann man α als Variation mit festen Endpunkten wählen.

Satz. Für eine stückweise glatte Kurve $c : [a,b] \to M$ mit $\|\dot{c}\| = \text{konst}$ sind äquivalent:
- c ist eine Geodäte
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0} L(\alpha_s) = 0$ für jede stückweise glatte Variation α von c mit festen Endpunkten.

Korollar. Sei $c : [a,b] \to M$ stückweise glatt und kürzeste stückweise Verbindung ihrer Endpunkte (d. h. für alle $\tilde{c} : [a,b] \to M$ stückweise glatt mit $c(a) = \tilde{c}(a)$ und $c(b) = \tilde{c}(b)$ ist $L(c) \leq L(\tilde{c})$). Dann ist c eine glatte Geodäte.

Achtung. Geodäten sind nicht global kürzeste Verbindungen, die Umkehrung gilt also nicht!

Notation. $\Omega_{p,q} := \{c : [0,1] \to M \,|\, c(0){=}p, c(1){=}q, c \text{ stückw. glatt}\,\}$

Bemerkung. Geodäten sind „kritische Punkte" von $L : \Omega_{p,q} \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $\|\dot{c}\| = \text{konst.}$ Ersetzt man das Längenfunktional durch die Energie, so ist diese NB unnötig.

Notation. $S_\rho(0) = \{x \in T_pM \,|\, \|x\| = \rho\}$

Satz (Gaußlemma)**.** Sei (M,g) eine zshgde Riem. Mft, $\nabla = \nabla^{LC}$. Sei $p \in M$ und $\epsilon > 0$, sodass

$$\mathrm{Exp}_p|_{B_\epsilon(0)} : B_\epsilon(0) \to \mathrm{Exp}_p(B_\epsilon(0))$$

ein Diffeo ist. Dann schneiden die radialen Geodäten

$$t \mapsto \mathrm{Exp}_p(tv) = v_v(t), \quad v \in T_pM \setminus \{0\},$$

die Hyperflächen $\mathrm{Exp}_p(S_\rho(0))$, $\rho \in (0, \epsilon)$ orthogonal.

Satz. Seien $p \in M$, $\epsilon > 0$, $\rho \in [0, \epsilon)$ wie eben. Dann ist

$$c_v|_{[0,\delta]} : [0,\delta] \to M, \quad t \mapsto c_v(t) = \mathrm{Exp}_p(tv) \qquad (v \in T_pM, \|v\| = 1)$$

die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte, genauer:
Es gitl $\delta = L(c_v|_{[0,\delta]}) \leq L(\gamma)$ für jedes $\gamma : [a,b] \to M$ stückweise glatt mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = c_v(\delta)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\gamma(t) = c_v(r(t))$ mit $r : [a,b] \to [0,\delta]$ monoton wachsend.

Def. $i(p) := \sup\{\epsilon > 0 \,|\, \mathrm{Exp}_p|B_\epsilon(0) \text{ ist Diffeo aufs Bild }\}$ heißt **Injektivitätsradius** von M in p.

Satz. Sei M eine zshgde Riem. Mft.
- Ist $p \in M$, $\epsilon \in (0, i(p))$, dann ist
$$\mathrm{Exp}_p(B_\epsilon(p)) = B_\epsilon(p) := \{q \in M \,|\, d(p,q) < \epsilon\},$$
$$\mathrm{Exp}_p(S_\epsilon(p)) = S_\epsilon(p) := \{q \in M \,|\, d(p,q) = \epsilon\}.$$
- $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Metrik.
- Die durch d induzierte Topologie stimmt mit der gegebenen überein.

Satz (Hopf-Rinow 1)**.** Sei M eine zshgde Riem. Mft, $p \in M$. Angenommen, alle Geodäten γ auf M mit $\gamma(0) = p$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert (m.a.W: Exp_p ist auf ganz T_pM definiert). Dann gibt es für alle $q \in M$ eine kürzeste Geodäte von p nach q.

Satz (Hopf-Rinow 2)**.** Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M sind äquivalent:
- M ist geodätisch vollständig.
- $\forall\, p \in M \,:\, Exp_p$ ist auf ganz T_pM definiert.
- Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von M ist kompakt.
- M ist eine vollständiger metrischer Raum.