Zusammenfassung Partielle DGLn

 Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

1. Einleitung

Def. Eine **partielle Differentialgleichung** (PDGL) hat die Form

$$E(x, u(x), Du(x), ..., D^k u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,} \qquad (\star)$$

wobei $E : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht ist. Die höchste Ableitungsordnung von u, die in E vorkommt, heißt **Ordnung** der PDGL.

Def. Eine PDGL von der Ordnung k heißt

- **linear**, falls sie folgende Form besitzt:
$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) = 0$$
- **semilinear**, falls sie linear in der höchsten Ableitungsordnung ist, man sie also schreiben kann als
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) = 0.$$
- **quasilinear**, falls sie sich schreiben lässt als
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) = 0.$$
- sonst **voll nichtlinear**.

Bemerkung. $\{$ lineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ semilineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ quasilineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ PDGLn $\}$

Def (Typeinteilung für lineare PDGLn 2. Ordnung)**.** Seien $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i, j \in \{1, ..., n\})$ vorgegebene Fktn. auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Die lineare PDGL
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **elliptisch**, falls die $(n \times n)$-Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.
- Die lineare PDGL
$$D_1 D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_j(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **hyperbolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.
- Die lineare PDGL
$$D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{2 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **parabolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

Def. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **klassische Lösung**, falls $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ und die Differentialgleichung $(\star)$ überall in Ω erfüllt ist.

Grundlagen

Notation. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibe

$$V \Subset \Omega \quad \text{für} \quad V \subset \mathbb{R}^n \text{ mit } \overline{V} \text{ kompakt und } \overline{V} \subset \Omega^\circ.$$

Notation. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $F = (F_1, ..., F_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann heißt

- $\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^n D_i F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **Divergenz** von F,
- $\operatorname{grad} f := \nabla f := (\partial_1 f, ..., \partial_n f)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **Gradient** von f,
- Δ mit $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^n D_i D_i f$ **Laplace-Operator**.

Satz (Transformationssatz)**.** Sei $T : \Omega \to T(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeo, dann gilt für $f : T(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f \in L^1(T(\Omega)) \iff (f \circ T) \circ |\det(DT)| \in L^1(\Omega) \quad \text{mit}$$

$$\int_{T(\Omega)} f \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (f \circ T) \cdot |\det(DT)| \, \mathrm{d}x.$$

Bsp (Polarkoordinaten)**.** Sei $f \in L^1(B_r(K))$. Dann ist f auf fast jeder Sphäre $\partial B_\rho(K)$ für $\rho \in [0, r]$ integrierbar und es gilt

$$\int_{B_r(x)} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x_0)} f \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}\rho$$

Satz (Gauß)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Ist $F \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} F \in L^1(\Omega)$, so gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (F \circ \nu) \, \mathrm{d}S,$$

wobei ν der äußere Einheitsnormalenvektor ist.

Korollar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Sind $f, g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, dann gilt die partielle Integrationsregel

$$\int_\Omega D_i f g \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega f D_i g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f g \nu^i \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

Sind $f, g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, dann gelten die Greenschen Formeln

$$\int_\Omega Df \cdot Dg \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega f \Delta g \, \mathrm{d}x + \int_\Omega f D_\nu g \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\int_\Omega (f \Delta g - g \Delta f) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (f D_\nu g - g D_\nu f) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

Prop (Diff. parameterabh. Integrale)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| < \infty$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$. Angenommen,

- $f(x, -) \in \mathcal{C}^1(I)$ für fast alle $x \in \Omega$,
- $f(-, t) \in L^1(\Omega) \frac{\partial f}{\partial t}(-, t) \in L^1(\Omega)$ für alle $t \in I$ und
- für alle $t \in I$ gibt es $\epsilon > 0$ sodass $(t - \epsilon, t + \epsilon) \subset I$ und
$$\sup_{s \in (t-\epsilon, t+\epsilon)} |\tfrac{\partial f}{\partial t}(-, s)| \in L^1(\Omega).$$

Dann ist die Abbildung

$$g : I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_\Omega f(x, t) \, \mathrm{d}x$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar mit

$$\tfrac{\partial g}{\partial t}(t) = \int_\Omega \tfrac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, \mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn Ω offen und beschränkt ist, $f(x, -) \in \mathcal{C}^1(I)$ für alle $x \in \Omega$ und $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times I)$.

Notation. Bezeichne mit $\mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$. Für messbare Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ schreibe $|A| := \mathcal{L}^n(A)$.

Bsp. Zwischen dem Volumen von Kugeln und Sphären im $\mathbb{R}^n$ bestehen folgende Zusammenhänge:

$$|B_r(0)| = r^n \cdot |B_1(0)| \quad \text{und} \quad |B_r(0)| = \tfrac{r}{n} \cdot \int_{\partial B_r(0)} 1 \, \mathrm{d}S$$

Notation. $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

Notation. Sei $f : \Omega/M \to \mathbb{R}$ integrierbar für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathcal{L}^k(\Omega) \in (0, \infty)$ bzw. $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $\int_M 1 \, \mathrm{d}S \in (0, \infty)$

$$⨍_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x := \tfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad ⨍_M f(x) \, \mathrm{d}x := \tfrac{1}{|M|} \int_M f(x) \, \mathrm{d}x$$

heißen **Mittelwerte** von f auf Ω bzw. M.

Funktionenräume

Def. Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt (lokal) **Hölder-stetig** in $x_0 \in S$ zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$ mit Hölderkonstante $C_{x_0} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, falls für alle $x \in S$ (bzw. $x \in K$ für ein $K \Subset S$) gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C_{x_0} |x - x_0|^\alpha$$

Def. Die **Hölder-Seminorm** von $f : S \to \mathbb{R}$ ist

$$[f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(S)} := \sup_{x, x_0 \in S} \frac{|f(x_0) - f(x)|}{|x - x_0|^\alpha}.$$

Def (**Hölder-Räume**)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha \in (0, 1]$.

- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \mid [f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)} < \infty \text{ für alle komp. } K \Subset S\}$
- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \mid [f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty\}$.
- $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega) \mid [D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)} < \infty$ für alle kompakten $K \Subset \Omega$ und Multiindizes β mit $|\beta| = k\}$
- $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{f \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \mid$ alle Ableitungen bis zur Ordnung k von f sind beschränkt und $[D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty$ für alle Multiindizes β mit $|\beta| = k\}$

Bemerkung. Es gelten die Inklusionen $\mathcal{C}(\Omega) \supsetneq \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \supsetneq \mathcal{C}^1(\Omega)$, aber i. A. $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \not\subset \mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega})$.

Bemerkung. Die Räume $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ und $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ sind Banachräume bzgl.

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} \coloneqq \sum_{0\leq|\beta|\leq k} \sup_{\overline{\Omega}} |D^\beta f|,$$
$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} \coloneqq \|f\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|=k} [D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Def. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $p \in [1,\infty]$. Für $f: A \to I$ messbar sei

$$\|f\|_{L^p(A)} \coloneqq \begin{cases} \left(\int_A |f|^p \,\mathrm{d}\right)^{1/p} & \text{falls } p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_A |f| & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Der **Lebesgue-Raum** $L^p(A)$ ist der Raum aller Äquivalenzklassen von fast-überall übereinstimmenden Funktionen, für die $\|{-}\|_{L^p(A)}$ endlich ist. Der Raum $L^p_{\text{loc}}(A)$ ist der Raum aller Funktionen $A \to \mathbb{R}^n$, die für alle offenen $O \Subset A$ zu $L^p(O)$ gehören.

Bemerkung. $L^p(A)$ ist ein Banachraum mit der Norm $\|{-}\|_{L^p(A)}$.

Glättungen

Def. Ein **Glättungskern** auf $\mathbb{R}^n$ ist eine nicht-negative, radialsymmetrische Funktion $\eta \in \mathcal{C}^\infty_0(B_1(0))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \,\mathrm{d}x = 1$.

Def. Der **Standardglättungskern** ist die Funktion

$$\eta(x) \coloneqq C \cdot \exp\left(\tfrac{1}{|x|^2-1}\right) \cdot \mathbb{1}_{B_1(0)}(x)$$

mit Normierungskonstante C. Für $\epsilon > 0$ ist der dazugehörige skalierte Glättungskern gegeben durch

$$\eta_\epsilon(x) \coloneqq \epsilon^{-n}\eta(x/\eta).$$

Alle Glättungskern-Eigenschaften bleiben bei Skalierung erhalten.

Notation. $\Omega_\epsilon \coloneqq \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$. Für $f \in L^1_{\text{loc}}$ heißt die Funktion

$$f_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \eta_\epsilon * f(x) \coloneqq \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y$$ **ϵ-Glättung** von f

Satz (Eigenschaften von Glättungen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$ und $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann gilt

- Regularität: $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\epsilon)$ mit $D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha \eta_\epsilon) * f$ für beliebige Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- Ist $D_i f$ stetig auf Ω, so gilt $D_i(f_\epsilon) = (D_i f)_\epsilon$ auf Ω_ϵ.
- Falls $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0,1]$, so gilt $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega_\epsilon)$ mit derselben Hölderkonstante.
- Falls $f \in L^p(\Omega)$ für $p \in [0,\infty]$, so gilt $\|f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$.
- $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} f$ fast-überall in Ω.
- Falls $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, so konvergiert f_ϵ gleichmäßig gegen f für $\epsilon \to 0$ auf kompakten Teilmengen von Ω,
- Falls $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ für $p \in [1,\infty)$, so gilt $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} f$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.
- Abschätzung der Approximationsgüte: Ist $Du \in L^p(\Omega)$, so gilt
$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \epsilon \cdot \|Df\|_{L^p\Omega}.$$

Hausdorff-Maß

Def. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $k \in [0,\infty)$, $\delta > 0$. Das **approximierende Maß** H^k_δ von A ist definiert als

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) \coloneqq \inf\{\sum_{i=1}^\infty \omega_k r_i^k \mid A \subset \bigcup_{i=1}^\infty \overline{B_{r_i}(x_i)}, r_i < \delta\}$$

Bemerkung. $\mathcal{H}^k_\delta(A)$ ist monoton fallend in δ.

Def. Das **k-dimensionale Hausdorff-Maß** $\mathcal{H}^k$ von A ist

$$\mathcal{H}^k(A) \coloneqq \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^k_\delta(A).$$

Prop.
- Für $\delta > 0$ ist $\mathcal{H}^k_\delta$ ein Maß auf $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{H}^k$ ist ein Maß auf $\mathbb{R}^n$
- Bewegungsinvarianz: $\mathcal{H}^k(x + T(A)) = \mathcal{H}^k(A)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $T \in O(n)$.
- Ist $f: A \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig mit Konstante L_f, so gilt
$$\mathcal{H}^k(f(A)) \leq L_f^k \mathcal{H}^k(A).$$
- Skalierungsverhalten: $\mathcal{H}^k(\lambda A) = \lambda^k \mathcal{H}^k(A)$
- Spezialfälle: $\mathcal{H}^0$ ist ein Zählmaß, $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ und $\mathcal{H}^k \equiv 0$.

Lemma. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \leq k < k' < \infty$.

- Ist $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, so gilt $\mathcal{H}^{k'}(A) = 0$.
- Ist $\mathcal{H}^{k'}(A) > 0$, so gilt $\mathcal{H}^k(A) = \infty$.

Def. Die **Hausdorff-Dimension** von $A \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned}\dim_H(A) &\coloneqq \inf\{k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \mathcal{H}^k(A) = 0\} \\ &= \sup\{k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \mathcal{H}^k(A) = \infty\}.\end{aligned}$$

Prop. Für die Cantor-Menge $C \subset \mathbb{R}$ gilt $\dim_H(C) = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

2. Laplace- und Poisson-Gleichung

Def. Die **Laplace-** bzw. **Poisson-Gleichung** ist die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = f \qquad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Man nennt u

- **harmonisch**, falls $\Delta u = 0$ in Ω gilt.
- **subharmonisch**, falls $\Delta u \geq 0$ in Ω gilt.
- **superharmonisch**, falls $\Delta u \leq 0$ in Ω gilt.

Bspe.
- Affine Funktionen sind harmonisch.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definiere $u(x) \coloneqq x \cdot Ax$. Dann gilt $\Delta u = \operatorname{spur} A$, also $\Delta u = 0 \iff \operatorname{spur} A = 0$.
- Real- und Imaginärteil von holomorphen Fktn. sind harmonisch.

Def. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(x) \coloneqq \begin{cases} -(2\pi)^{-1}\log|x|, & \text{wenn } n = 2 \\ (n(n-2)\,\omega_n)^{-1}|x|^{2-n}, & \text{wenn } n \geq 3 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung** der Laplacegleichung.

Bemerkung.
- Φ ist radialsymmetrisch, d. h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\|x_1\| = \|x_2\|$ gilt $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$.
- Φ, $|D\Phi| \in L^1(B_R(0))$ für alle $R > 0$ aber $|D^2\phi| \notin L^1(B_1(0))$.
- Die Konstanten wurden so gewählt, dass gilt:
$$-\int_{\partial B_r(0)} D\Phi \cdot \nu \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = 1 \quad \text{für alle } r > 0.$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_R(x_0) \subset \Omega$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Für

$$\phi : (0,R) \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r\to 0} \phi(r) = u(x_0)$
- $\phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B_r(x_0)} \Delta u(x) \,\mathrm{d}x$

Korollar (Mittelwertseigenschaft)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_r(x_0) \Subset \Omega$ und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$0 = \Delta u \implies u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{und} \quad u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

In diesen Gleichungen darf man $=$ durch $\leq$, $<$, $\geq$ oder $>$ ersetzen.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:

- u ist harmonisch, d. h. es gilt $\Delta u = 0$ in Ω.
- u erfüllt die sphärische Mittelwertseigenschaft, d. h. es gilt
$$u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$
- u erfüllt die Mittelwertseigenschaft auf Kugeln, d. h. es gilt
$$u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Bemerkung. Die Äquivalenz gilt auch unter den schwächeren Voraussetzungen $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ oder $u \in L^1(\Omega)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω, d. h. $\Delta u \geq 0$ in Ω. Dann gilt

- Das **schwache Maximumsprinzip**: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist Ω zusammenhängend und existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, so ist u konstant.

Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ harmonisch. Dann gilt

$$\min_{\partial\Omega} u < \max_{\partial\Omega} u \implies \min_{\partial\Omega} u < u < \max_{\partial\Omega} u \text{ auf } \Omega.$$

Korollar (Eindeutigkeit)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dann ist $u = v$, falls gilt:

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v & \text{in } \Omega \\ u = v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Bemerkung (Stetige Abhängigkeit von Randwerten). Gilt lediglich $\Delta u = \Delta v$ in Ω, aber nicht $u = v$ auf $\partial\Omega$, so gilt immerhin

$$\max_{\Omega}|u-v| = \max_{\partial\Omega}|u-v|.$$

Satz (Harnack-Ungleichung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \Subset \Omega$ offen, zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega, V)$, sodass

$$\sup_V u \le c \cdot \inf_V u \qquad \text{für alle harmonischen Fktn. } u : \Omega \to \mathbb{R}_{\ge 0}.$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und erfülle $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Sphären, d. h.

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Dann gilt $u(x) = u_\epsilon(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\epsilon < \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. Insbesondere ist $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und harmonisch.

Korollar. Obiger Satz gilt auch, wenn $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Kugeln erfüllt, d. h.

$$u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Def. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem topologischen Raum X **konvergiert lokal gleichmäßig** gegen $f : X \to \mathbb{R}$, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x von x gibt, sodass f_n auf U_x gleichmäßig gegen f konvergiert.

Korollar (Konvergenzsatz von Weierstraß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiert. Dann ist u harmonisch auf Ω.

Korollar (Harnackscher Konvergenzsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf Ω. Gibt es ein $x_0 \in \Omega$, sodass $(u_k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt (und damit konvergent) ist, so konvergiert (u_k) lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion auf Ω.

Satz (von Hermann Weyl). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega u \cdot \Delta\phi \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Dann gibt es eine harmonische Funktion $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \tilde{u}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Satz (Innere Abschätzung für Ableitungen harmonischer Fktn). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gilt für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$ und jede Kugel $B_r(x_0) \Subset \Omega$:

$$|D^\alpha u(x_0)| \le C(n,k) r^{-n-k} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \quad \text{mit } C(n,k) := \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n}.$$

Satz (Liouville). Sei $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch.

- Ist u beschränkt, so ist u konstant.
- Gilt $\limsup\limits_{|x|\to\infty} \frac{|u(x)|}{|x|^{k+1}} = 0$, so ist u ein Polynom, dessen Grad $\le k$ ist.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **analytisch** in $x \in \Omega$, falls f sich lokal durch ihre Taylorreihe darstellen lässt, also ein $r \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega))$ existiert mit

$$f(y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \tfrac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x)(y-x)^\alpha \qquad \text{für alle } y \in B_r(x).$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Wenn u harmonisch ist, dann auch analytisch.

Problem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, (beschränkt), regulär und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht ist $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$(2.1)\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \quad u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Satz (Greensche Darstellungsformel). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand und $h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ mit $\Delta h \in L^1(\Omega)$. Es gilt für $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} h(x) = &-\int_\Omega \Phi(x-y)\Delta h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \, \mathrm{d}S(y) \\ &- \int_{\partial\Omega} h(y) D_y\Phi(x-y) \cdot \nu \, \mathrm{d}S(y) \end{aligned}$$

Bemerkung. Für Randpunkte $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}h(x) = &-\int_\Omega \Phi(x-y)\Delta h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \, \mathrm{d}S(y) \\ &- \int_{\partial\Omega} h(y) D_y\Phi(x-y) \cdot \nu \, \mathrm{d}S(y) \end{aligned}$$

Korollar (Darstellungsformel für Lsgn in $\mathbb{R}^n$). Sei $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$, setze

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (\Phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dann gilt: $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. • Für $n = 2$ ist die Lösung potentiell unbeschränkt.

- Für $n \ge 3$ ist diese Lsg beschränkt und erfüllt $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Prop. Jede andere beschränkte Lösung von $-\Delta u = f$ auf $\mathbb{R}^n$ unterscheidet sich nur durch eine additive Konstante.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine **Greensche Funktion** für Ω ist eine Funktion $G : \{(x,y) \in \Omega \times \Omega \mid x \neq y\} \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \Omega$ gilt:

- Die **Korrektorfunktion** $y \mapsto G(x,y) - \Phi(x-y)$ ist von der Klasse $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ und ist harmonisch in Ω.
- Die Funktion $G(x, -)$ hat Nullrandwerte auf $\partial\Omega$, d. h. es gilt $\lim\limits_{y\to y_0} G(x,y) = 0$ für alle $y_0 \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$.

Bemerkung. • Ist Ω beschränkt, so ist die Greensche Funktion eindeutig.

- Die Funktion $G(x, -)$ ist in $\mathcal{C}^2(\Omega \setminus \{x\}) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$ und hat die gleiche Singularität wie $y \mapsto \Phi(x-y)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (2.1) und ist G die Greensche Funktion für Ω (falls existent), dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} g(y) \cdot D_y G(x,y) \cdot \nu \, \mathrm{d}S(y).$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, G die Greensche Funktion für Ω und $B_r(x) \Subset \Omega$. Für $f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ gilt dann:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial B_\epsilon(x)} (G(x,y) Df(y) - f(y) D_y G(x,y)) \cdot \nu(y) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) = f(x).$$

Satz. Ist G die Greensche Funktion zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, so gilt $G(x,y) = G(y,x)$ für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$.

Korollar. Sei G die Greensche Funktion zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, so ist die Funktion $x \mapsto G(x,y)$ harmonisch auf $\Omega \setminus \{y\}$.

Def. Sei $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a)$. Dann heißt

$$x^* := a + r^2 \frac{x-a}{\|x-a\|^2} \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a) \quad \textbf{Spiegelungspunkt} \text{ von } x.$$

Bemerkung. Es gilt: • $\|x-a\| \cdot \|x^* - a\| = r^2$ • $(x^*)^* = x$

- $\forall y \in \partial B_r(a) : \|x^* - y\|^2 = r^2 \|x-a\|^{-2} \|y-x\|^2$.

Notation. Für $B_r(a) \subset \mathbb{R}$ sei $g : B_r(a) \times B_r(a) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} -\Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y-x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ -\Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Prop. Für die Funktion g gilt:

- $g(x,y) - \Phi(x-y) = 0$ für alle $y \in \partial B_r(a)$ und $x \in B_r(a)$.
- $y \mapsto g(x,y)$ ist glatt und harmonisch in $B_r(a)$ für alle $x \in B_r(a)$.

Korollar. Die Greensche Funktion für $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ lautet

$$\begin{aligned} G_{B_r(a)}(x,y) &:= \Phi(x-y) + g(x,y) \\ &= \begin{cases} \Phi(x-y) - \Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y-x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ \Phi(a-y) - \Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases} \end{aligned}$$

Def. Der **Poisson-Kern für die Kugel** $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$K_{B_r(a)}(x,y) := \frac{1}{n\omega_n} \cdot \frac{r^2 - |x-a|^2}{r|x-y|^n}.$$

Satz (Poisson-Integralformel für Kugeln). Sei $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ und $g : \partial B_r(a)$ stetig.

- Für $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_r(a)})$ harmonisch mit $u = g$ auf $\partial B_r(a)$ gilt
$$u(x) = \int_{\partial B_r(a)} K_{B_r(a)}(x,y) g(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für alle } x \in B_r(a). \tag{2.8}$$
- Umgekehrt definiert (2.8) die eindeutige harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}^1(\overline{B_r(a)})$ mit $u = g$ auf $\partial B_r(a)$.

Notation. $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ heißt **Halbraum**.

Def. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt $\overline{x} := (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ **Spiegelpunkt** von x bzgl. $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Satz. Die Greensche Funktion für $\mathbb{R}^n_+$ lautet

$$G_{\mathbb{R}^n_+}(x,y) := \Phi(x-y) - \Phi(x^* - y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n_+ \text{ mit } x \neq y.$$

Def. Der **Poisson-Kern für den Halbraum** $\mathbb{R}^n_+$ ist definiert als

$$K_{\mathbb{R}^n_+}(x,y) := \frac{1}{n\omega_n}\cdot\frac{2x_n}{|x-y|^n} \quad \text{für } x\in\mathbb{R}^n_+ \text{ und } y\in\partial\mathbb{R}^n_+.$$

Satz (Poisson-Integralformel für den Halbraum)**.** Sei $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Dann definiert

$$u(x) := \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K_{\mathbb{R}^n_+}(x,y)g(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für } x\in\mathbb{R}^n_+$$

eine beschränkte, harmonische Funktion $u\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit $u=g$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Notation. Für $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ schreibe

- $\Omega^+ := \{(x_1,...,x_n)\in\Omega \,|\, x_n>0\} = \Omega\cap\mathbb{R}^n_+$
- $\Omega^0 := \{(x_1,...,x_n)\in\Omega \,|\, x_n=0\} = \Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+$
- $\Omega^- := \{(x_1,...,x_n)\in\Omega \,|\, x_n<0\} = \Omega\setminus\overline{\mathbb{R}^n_+}$

Satz. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und symmetrisch bzgl. $\partial\mathbb{R}^n_+$, d. h. für alle $x\in\mathbb{R}^n$ gilt $x\in\Omega \iff \overline{x}\in\Omega$.

- Ungerades Spiegelungsprinzip: Ist $u\in\mathcal{C}^2(\Omega^+)\cap\mathcal{C}(\Omega^+\cup\Omega^0)$ harmonisch auf Ω^+ mit $u=0$ auf Ω^0, so ist die ungerade Fortsetzung
$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x\in\Omega^+\cup\Omega^0, \\ -u(\overline{x}) = -u(x_1,...,-x_n) & \text{für } x\in\Omega^- \end{cases}$$
harmonisch auf Ω.
- Gerades Spiegelungsprinzip: Ist $u\in\mathcal{C}^2(\Omega^+)\cap\mathcal{C}^1(\Omega^+\cup\Omega^0)$ mit $D_n u=0$ auf Ω^0, so ist die gerade Fortsetzung
$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x\in\Omega^+\cup\Omega^0, \\ u(\overline{x}) = u(x_1,...,x_{n-1},-x_n) & \text{für } x\in\Omega^- \end{cases}$$
harmonisch auf Ω.

Bemerkung. Aus dem Spiegelungsprinzip und dem Satz von Liouville folgt die Eindeutigkeit beschränkter harmonischer Funktionen auf dem Halbraum mit vorgegebenen Randwerten.

Problem (Dirichlet-RWP)**.** Für $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ und $g\in\mathcal{C}(\partial\Omega)$ ist $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ gesucht mit

$$(2.9)\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u &=& 0 & \text{in } \Omega, \\ u &=& g & \text{in } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Def. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u\in\mathcal{C}(\Omega)$ heißt **$\mathcal{C}^0$-subharmonisch**, falls die MW-Ungleichung auf Sphären erfüllt ist, d. h.

$$u(x_0) \le \fint_{\partial B_r(x_0)} u\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle } x_0\in\Omega \text{ und } r\in(0,\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)).$$

Die Funktion heißt **$\mathcal{C}^0$-superharmonisch**, falls $-u$ $\mathcal{C}^0$-subharmonisch ist und **$\mathcal{C}^0$-harmonisch**, falls u sowohl subharmonisch als auch harmonisch ist.

Notation.
$$\begin{aligned} H^-(\Omega) &:= \{u\in\mathcal{C}(\Omega)\,|\, u \text{ ist subharmonisch auf } \Omega\} \\ H^+(\Omega) &:= \{u\in\mathcal{C}(\Omega)\,|\, u \text{ ist superharmonisch auf } \Omega\} \\ H^0(\Omega) &:= \{u\in\mathcal{C}(\Omega)\,|\, u \text{ ist harmonisch auf } \Omega\} \end{aligned}$$

Bemerkung. $\mathcal{C}^0$-harmonische Funktionen sind glatt und harmonisch.

Lemma. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Für $u\in\mathcal{C}(\Omega)$ sind äquivalent:

- u ist $\mathcal{C}^0$-subharmonisch auf Ω.
- u erfüllt die MW-Ungleichung auf Kugeln, d. h. für alle $x_0\in\Omega$ gilt
$$u(x_0) \le \fint_{B_r(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } r\in(0,\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)).$$
- u erfüllt die MW-Ungleichung auf kleinen Kugeln, d. h. für alle $x_0\in\Omega$ gibt es ein $R(x_0)\in(0,\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega))$ mit
$$u(x_0) \le \fint_{B_r(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } r\in(0,R(x_0)).$$
- Für alle Kugeln $B_r(x_0)\Subset\Omega$ gilt das Vergleichsprinzip mit harmonischen Funktionen, d. h. für jede harmonische Funktion $h\in\mathcal{C}(\overline{B_r(x_0)})$ gilt: $u\le h$ auf $\partial B_r(x_0) \implies u\le h$ in $B_r(x_0)$.

Def. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und $B_r(x_0)\Subset\Omega$. Der **Perron-Projektor** $P_{x_0,r}:\mathcal{C}(\Omega)\to\mathcal{C}(\Omega)$ ist definiert durch

$$(P_{x_0,r}u)(x) := \begin{cases} u(x), & x\in\Omega\setminus B_r(x_0) \\ \int_{\partial B_r(x_0)} K_{B_r(x_0)}(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y), & x\in B_r(x_0). \end{cases}$$

Bemerkung. Die Funktion $P_{x_0,r}(u)$ wird **harmonische Fortsetzung** von u auf $B_r(x_0)$ genannt.

Lemma. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:

- Sind $v\in H^-(\Omega)$ und $w\in H^+(\Omega)$, so gilt $v-w\in H^-(\Omega)$.
- Sind $v_1,v_2\in H^-(\Omega)$, $w_1,w_2\in H^+(\Omega)$ und $\lambda_1,\lambda_2\ge 0$, so ist
$$\{\max(v_1,v_2),\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2\}\subset H^-(\Omega),$$
$$\{\min(w_1,w_2),\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2\}\subset H^+(\Omega).$$
- Sind $v\in H^-(\Omega), w\in H^+(\Omega)$ und $B_r(x_0)\Subset\Omega$, so gelten
$$P_{x_0,r}v\ge v \text{ in } \Omega \quad\text{und}\quad P_{x_0,r}v\in H^-(\Omega),$$
$$P_{x_0,r}w\le w \text{ in } \Omega \quad\text{und}\quad P_{x_0,r}w\in H^+(\Omega).$$

Def. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $g\in\mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann heißt $u\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ **Sublösung** des Dirichletproblems (2.9), falls $u\le g$ auf $\partial\Omega$ gilt und **Superlösung** von (2.9), falls $u\ge g$ auf $\partial\Omega$ gilt.

Notation.
$$\begin{aligned} H_g^-(\Omega) &:= \{u\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})\cap H^-(\Omega)\,|\, u\le g \text{ auf } \partial\Omega\}, \\ H_g^+(\Omega) &:= \{u\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})\cap H^+(\Omega)\,|\, u\ge g \text{ auf } \partial\Omega\}, \\ u^-(x) &:= \sup\{v(x)\,|\, v\in H_g^-(\Omega)\}, \\ u^+(x) &:= \sup\{v(x)\,|\, v\in H_g^+(\Omega)\}. \end{aligned}$$

Methode (Perron)**.** Zeige zunächst, das u^- und u^+ harmonisch sind. Zeige dann unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an Ω, dass $u^-=u^+$ gilt und die vorgegebenen Randwerte annimmt.

Lemma. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $g\in\mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann sind u^- und u^+ wohldefiniert und es gilt

$$\inf_{\partial\Omega} g \le u^- \le u^+ \le \sup_{\partial\Omega} g.$$

Bemerkung. Falls eine Lösung u des Dirichlet-Problems existiert, so gilt $u=u^-=u^+$.

Satz. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $g\in\mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann sind u^- und u^+ harmonisch in Ω.

Def. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $x_0\in\partial\Omega$. Eine Funktion $b:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^+_0$ heißt (obere) **Barriere** zu Ω in x_0, falls

- $b\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})\cap H^+(\Omega)$
- $b(x_0)=0$ und $b(x)>0$ für alle $x\in\overline{\Omega}\setminus\{x_0\}$

Falls eine solche Barriere existiert, so heißt x_0 **regulärer Randpunkt**.

Bemerkung. Eine Funktion $b:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^-_0$ heißt untere Barriere, falls $(-b):\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^+_0$ eine obere Barriere ist.

Def. Eine **lokale Barriere** zu Ω in $x_0\in\partial\Omega$ ist eine Barriere $\tilde{b}:B_r(x_0)\cap\Omega\to\mathbb{R}^+_0$ zu $B_r(x_0)\cap\Omega$ in x_0.

Bemerkung. Aus jeder lokalen Barriere lässt sich eine globale Barriere konstruieren.

Lemma. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Falls das Dirichlet-Problem (2.9) für jede Funktion $g\in\mathcal{C}(\partial\Omega)$ eine Lösung $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ besitzt, so sind alle Randpunkte $x_0\in\partial\Omega$ regulär.

Lemma. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $x_0\in\partial\Omega$. Ist x_0 regulär, dann gilt für jede stetige Funktion $g\in\mathcal{C}(\partial\Omega)$:

$$\lim_{\Omega\ni x\to x_0} u^-(x) = g(x_0) = \lim_{\Omega\ni x\to x_0} u^+(x).$$

Satz (Perron)**.** Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann sind äquivalent:

- Der Rand $\partial\Omega$ ist regulär.
- Das Dirichlet-Problem (2.9) besitzt eine eindeutige Lösung $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ für alle $g\in\mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Def. Eine offene Menge $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ erfüllt die **äußere Kugelbedingung** in $x_0\in\partial\Omega$ an Ω, falls ein Ball $B_r(a)\subset\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ mit $\overline{\Omega}\cap\overline{B_r(a)}=\{x_0\}$ existiert.

Lemma. Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen. Erfüllt Ω die äußere Kugelbedingung in $x_0\in\partial\Omega$ an Ω, dann ist x_0 ein regulärer Randpunkt.

Bemerkung. Beschränkte Gebiete mit $\mathcal{C}^2$-Rand und strikt konvexe Gebiete erfüllen die äußere Kugelbedingung.

Problem. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht ist eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ der Poisson-Gleichung

$$(2.10)\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prop. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und $\partial\Omega$ regulär. Sind $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, so besitzt (2.10) eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Bemerkung. Die Behauptung folgt leicht aus den vorherigen Sätzen, aber die Voraussetzung $f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$ ist zu stark.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Das **Newton-Potential** $N_f : \Omega \to \mathbb{R}$ einer Funktion $f \in L^\infty(\Omega)$ ist die Faltung

$$N_f(x) := \int_\Omega \Phi(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Bemerkung. Die Fktn f wird außerhalb von Ω durch 0 fortgesetzt.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $f \in L^\infty(\Omega)$. Dann gilt $N_f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ mit $DN_f(x) = \int_\Omega D_x\Phi(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$ für alle $x \in \Omega$.

Korollar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $f \in L^\infty(\Omega)$. Dann gilt $N_f \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$ für alle $\alpha \in (0,1)$.

Satz (Hölder). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. und $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für ein bel. $\alpha \in (0,1)$. Dann gilt $N_f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ mit $-\Delta N_f = f$ in Ω und für jede Kugel B mit $\Omega \Subset B$ gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} D_iD_jN_f(x) = &\int_B D_{x_i}D_{x_j}\Phi(x-y)(f(y)-f(x))\,\mathrm{d}y \\ &- f(x)\cdot \int_{\partial B} D_{x_j}\Phi(x-y)\nu_i(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y). \end{aligned}$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial\Omega$ regulär. Sind $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, so besitzt (2.10) eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Bemerkung. Für das Newtonpotential überträgt sich die Regularität von f wie folgt: Ist $\alpha \in (0,1)$ und $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{B_{2R}})$, so ist $N_f \in \mathcal{C}^{k+2,\alpha}(\overline{B_R})$ für alle $R > 0$. Im Allgemeinen gilt:

$$f \in L^\infty \not\Rightarrow N_f \in \mathcal{C}^2, \quad f \in \mathcal{C}^k \not\Rightarrow N_f \in \mathcal{C}^{k+2}, \quad f \in \mathcal{C}^{k,1} \not\Rightarrow N_f \in \mathcal{C}^{k+2,1}$$

Problem. Gesucht sind Lösungen des Eigenwertproblems mit Dirichlet-Randwert 0 für den Laplaceoperator, also Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenfunktionen $u_\lambda \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ mit

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda &= \lambda u_\lambda \quad \text{in } \Omega \\ u_\lambda &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bemerkungen.
- Es sind nur nichtnegative EWe möglich.
- Es gibt höchstens abzählbar viele EWe.
- Die zugehörigen Eigenräume sind endlich-dimensional.
- Eigenfunktionen zu unterschiedlichen EWen sind orthogonal bzgl.

$$\langle u, v\rangle_{L^2} := \int_\Omega u \cdot v\,\mathrm{d}x.$$

- Eigenfunktionen sind glatt.

3. Wärmeleitungsgleichung

Notation. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wir suchen $u : I \times \Omega \to \mathbb{R}, (t,x) \mapsto u(t,x)$ und schreiben $u_t := \frac{\partial u}{\partial t}$ für die Zeitableitung, $Du(t,x) := D_xu(t,x)$ für die Ortsableitung und $\Delta u(t,x) := \Delta_x u(t,x)$.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $T > 0$.
- Der **parabolische Zylinder** ist $\Omega_T := (0,T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
- Der **parabolische Rand** von Ω_T ist

$$\partial_p\Omega_T := (\{0\} \times \Omega) \cup ([0,T] \times \partial\Omega) \subset \partial\Omega_T.$$

Notation. Wir benötigen untersch. Regularitäten in Ort und Zeit:

$$\mathcal{C}_1^2(\Omega_T) := \{f \in \mathcal{C}^1(\Omega_T) \mid f \text{ ist zweimal stetig nach } x \text{ ableitbar}\}$$

Problem. Wärmeleitungsgleichung (WLG): $u_t - \Delta u = 0$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T > 0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T)$. Dann heißt u

$$\left.\begin{matrix}\text{subkalorisch}\\ \textbf{kalorisch}\\ \text{superkalorisch}\end{matrix}\right\} \text{ falls } \left\{\begin{matrix} u_t - \Delta u \le 0 \\ u_t - \Delta u = 0 \\ u_t - \Delta u \ge 0 \end{matrix}\right\} \text{ in } \Omega_T \text{ gilt.}$$

Bemerkung (Invarianzen der Lösungseigenschaft). Wenn $u \in \mathcal{C}_t^2(\Omega_T)$ kalorisch, dann auch (auf geeigneten Zylindern):

$$\begin{aligned} u_{0,x_0}(t,x) &:= u(t, x - x_0) && \text{für } x_0 \in \mathbb{R}^n \\ u_{\mathcal{T},0}(t,x) &:= u(t - \mathcal{T}, x) && \text{für } \mathcal{T} \in \mathbb{R} \\ u_R(t,x) &:= u(t, Rx) && \text{für } R \in SO(n) \\ u_\lambda(t,x) &:= \lambda^n u(\lambda^2 t, \lambda x) && \text{für } \lambda > 0 \end{aligned}$$

Es gilt $\int_{\mathbb{R}^n} u_\lambda(t,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} u(\lambda^2 t, y)\,\mathrm{d}y$.

Bspe.
- Sei v harmonisch auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $(t,x) \mapsto v(x)$ kalorisch auf Ω_T.
- Für $n = 1$ und $c_1, c_2, a \in \mathbb{R}$ sind kalorisch:

$$\begin{aligned} &(t,x) \mapsto \exp(a^2t)\cdot(c_1\sinh(ax) + c_2\cosh(ax)) \\ &(t,x) \mapsto \exp(-a^2t)\cdot(c_1\sin(ax) + c_2\cos(ax)) \\ &(t,x) \mapsto c_1x + c_2 \end{aligned}$$

Def. Die **Fundamentallösung der WLG** ist die Funktion

$$\Psi : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Bemerkungen.
- $\Psi_t(t,x) - \Delta_x\Psi(t,x) = 0$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
- $\Psi(t,0) \xrightarrow{t\to 0} \infty$,
- $\Psi(t,x) \xrightarrow{t\to 0} 0$ bei $x \neq 0$ fest.
- Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t,x)\,\mathrm{d}x = 1$.
- Raum- und Zeitableitungen lassen sich explizit berechnen.
- $\|\Psi(t,-)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t\to\infty} 0$,
- $\|D\Psi(t,-)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\Psi_t(t,-)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t\to\infty} 0$,
- $\Psi(t,-) * \Psi(s,-) = \Psi(t+s,-)$

Bemerkung. Für die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung gilt:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \;:\; B_1(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x_0 - x) > \Phi(re_1)\}$$

Def. Die **Wärmeleitungskugel** um $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $r > 0$ ist

$$\begin{aligned} W_r(t_0,x_0) &:= \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t < t_0 \text{ und } \Psi(t_0 - t, x_0 - x) > r^{-n}\} \\ &\subseteq (-\infty, t_0) \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Notation. $W_r := W_r(0,0)$

Notation. Für $r > 0$ setze

$$b_r : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto \tfrac{|x|^2}{4t} + n\log r - \tfrac{n}{2}\log(-4\pi t).$$

Bemerkungen.
- Monotonie: Für $r \le \tilde{r}$ gilt $W_r(x_0) \subseteq W_{\tilde{r}}(x_0)$
- Translationsinvarianz: $W_r(t_0,x_0) = (t_0,x_0) + W_r(0,0)$
- Parabolische Reskalierung: $(t,x) \in W_r \iff (r^{-2}t, r^{-1}x) \in W_1$
- Explizite Darstellung: Für $r > 0$ gilt

$$\begin{aligned} W_r(0,0) &= \{(t,x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \mid b_r(t,x) > 0\} \\ \partial W_r(0,0) &= \{(0,0)\} \cup \{(t,x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \mid b_r(t,x) = 0\} \\ W_r(0,0) &= \{(t,x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \mid -\tfrac{r^2}{4\pi} < t < 0 \text{ und} \\ &\qquad |x|^2 < 4t(-n\log r + \tfrac{n}{2}\log(-4\pi t))\} \end{aligned}$$

- Es gilt $\int_{W_r} \frac{|x|^2}{t^2}\,\mathrm{d}(t,x) = 4r^n$

Lemma. Sei $R > 0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(W_R)$. Für

$$\phi : (0,R) \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto \frac{1}{4r^n}\int_{W_r} u(t,x)\frac{|x|^2}{t^2}\,\mathrm{d}(t,x) \qquad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r\to 0}\phi(r) = u(0,0)$
- $\phi'(r) = \frac{n}{r^{n+1}}\int_{W_r}(-u_t(t,x) + \Delta u(t,x))\cdot b_r(t,x)\,\mathrm{d}(t,x)$

Satz (MWE). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T > 0$, $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T)$ und $W_r(t_0,x_0) \Subset \Omega_T$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega_T \\ \Longrightarrow\; &u(t_0,x_0) = \frac{1}{4r^n}\int_{W_r(t_0,x_0)} u(t,x)\cdot\frac{|x-x_0|^2}{(t-t_0)^2}\,\mathrm{d}(t,x) \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen darf man $=$ durch $\le, <, \ge$ oder $>$ ersetzen.

Korollar. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T>0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T)$ sind äquivalent:
- u ist kalorisch
- u erfüllt die MWE auf WL-Kugeln, d. h. f. a. $W_r(t_0,x_0) \Subset \Omega_T$ gilt

$$u(t_0,x_0) = \frac{1}{4r^n}\int_{W_r(t_0,x_0)} u(t,x)\cdot\frac{|x-x_0|^2}{(t-t_0)^2}\,\mathrm{d}(t,x)$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, $T > 0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_T})$ subkalorisch. Dann gilt:

- Das **schwache Maximumsprinzip**: $\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist Ω zshgd und gibt es $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ mit $u(t_0, x_0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u$, so ist u konstant auf Ω_{t_0}.

Bemerkung. Es gelten auch entsprechende Minimumsprinzipien für superkalorische Funktionen.

Bemerkung („unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit“). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend, $T > 0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_T})$ eine kalorische Funktion, die auf $[0, T] \times \partial\Omega$ verschwindet. Dann gilt

$$\min_{\{0\}\times\partial\Omega} u < \max_{\{0\}\times\partial\Omega} u \implies \min_{\partial\{0\}\times\Omega} u < u < \max_{\{0\}\times\partial\Omega} u \text{ in } \Omega_T.$$

Korollar (Eindeutigkeit)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $T > 0$, $u, v \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_T})$ mit

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v_t - \Delta v & \text{in } \Omega_T \\ u = v & \text{auf } \partial_p \Omega_T \end{cases}$$

Dann gilt $u \equiv v$ in Ω_T.

Prop. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit regulären Rand- punkten und $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0, 1)$ und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann gilt für jede Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega \times (0, \infty)) \cap \mathcal{C}(\Omega \times [0, \infty))$ von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } (0, \infty) \times \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial_p \Omega_T \end{cases}$$

mit beliebigen Anfangswerten auf $\{0\} \times \Omega$:

$$\lim_{t\to\infty} u(t, -) = v,$$

wobei $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ die eindeutige Lösung der folgender Poisson-Gleichung ist:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Satz. Sei $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, \infty]$. Dann ist die Funktion $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t, x) := (\Psi(t, -) * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t, x - y) \cdot g(y)\, dy$$

in $\mathcal{C}^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllt

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u &= g & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Satz. Für die Funktion u aus dem vorherigen Satz gilt:

- Ist $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so konvergiert
  $$u(t, x) \xrightarrow{t\to 0, x \to x_0} g(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$
  Die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Mengen.
- Ist $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, \infty]$, so ist $\|u(t, -)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ für alle $t > 0$. Ist $p < \infty$, so gilt
  $$\|u(t, -) - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Prop. Es gilt außerdem

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \quad \text{für alle } t > 0.$$

Satz. Sei $f \in \mathcal{C}_1^2([0, \infty] \times \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \Subset [0, \infty] \times \mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t, x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t - s, x - y) \cdot f(s, y)\, dy\, ds$$

in $\mathcal{C}_1^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllt die inhomogene WLG

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u &= 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Satz (Allgemeine Lösungsformel)**.** Sei $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{C}_1^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \Subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t, x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t, x - y) \cdot g(y)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t - s, x - y) \cdot f(s, y)\, dy\, ds$$

in $\mathcal{C}_1^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllt

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u &= g & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

4. Wellengleichung

Notation. $u_{tt} := \partial_t^2 u$

Problem. Seien $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Gesucht ist eine Lösung der homogenen **Wellengleichung** (WG)

$$(4.1) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Satz. Seien $b \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{g} \in \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$. Dann besitzt das AWP für die Transportgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u + b \cdot Du &= \tilde{f} & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u &= \tilde{g} & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^1((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, die gegeben ist durch

$$u(t, x) := \tilde{g}(x - tb) + \int_0^t \tilde{f}(s, x + (s - t)b)\, ds.$$

Satz. Seien $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ und

$$u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (t, x) \mapsto \tfrac{1}{2} (g(x + t) + g(x - t)) + \tfrac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(s)\, ds.$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ die eindt. Lsg von (4.1) auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Bemerkung.
- Es gibt keinen Regularisierungseffekt, d. h. im Allgemeinen ist u nur in $\mathcal{C}^2$, nicht besser.
- „Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit“: Ist $\operatorname{supp}(g) \cup \operatorname{supp}(f) \subset [x_0 - r, x_0 + r]$ für $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, so gilt $\operatorname{supp}(t, -) \subset [x_0 - (t + r), x_0 + t + r]$.

Korollar. Seien $g \in \mathcal{C}^2([0, \infty))$ mit $\lim_{x\to 0} g''(x) = g(0) = 0$ und $h \in \mathcal{C}([0, \infty))$ mit $h(0) = 0$. Dann ist die Funktion $u : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$u(t, x) := \begin{cases} \frac{1}{2} (g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(s)\, ds & \text{für } x \ge t \ge 0, \\ \frac{1}{2} (g(x + t) - g(t - x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(s)\, ds & \text{für } t \ge x \ge 0 \end{cases}$$

die $\mathcal{C}^2$-Lösung des AWP der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \{0\} \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } (0, \infty) \times \{0\}. \end{cases}$$

Notation. Für $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiere

$$U_x(t, r) := \fint_{\partial B_r(x)} u(t, y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

$$G_x(r) := \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y), \qquad H_x(r) := \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

Lemma (Euler-Lagrange-Darboux-Gleichung)**.** Sei $u \in \mathcal{C}^m([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ mit $m \ge 2$ eine Lsg von (4.1). Dann gilt $U_x \in \mathcal{C}^m([0, \infty) \times [0, \infty))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und U_x erfüllt das AWP

$$\begin{cases} \partial_t^2 U_x - \partial_r^2 U_x - \frac{n-1}{r} \partial_r U_x = 0 & \text{in } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ U_x = G_x, \partial_t U_x = H_x & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Notation. $\widetilde{U}_x(t, r) := rU_x(t, r)$, $\widetilde{G}_x(r) := rG_x(r)$, $\widetilde{H}_x(r) := rH_x(r)$

Lemma. Sei $u \in \mathcal{C}^m([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ für $m \ge 3$ eine Lösung der Wellengleichung (4.1). Dann gilt

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widetilde{U}_x - \partial_r^2 \widetilde{U}_x = 0 & \text{in } (0, \infty) \times (0, \infty) \\ \widetilde{U}_x(0, r) = \widetilde{G}_x(r), \partial_t \widetilde{U}_x(0, r) = \widetilde{H}_x(r) & \text{in } \{0\} \times (0, \infty) \\ \widetilde{U}_x(t, 0) = 0 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Bemerkung. Mit der Darstellungsformel für $\widetilde{U}_x : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ folgt die **Kirchhoffsche Formel** für $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \lim_{r\to 0} U_x(t, r) = \lim_{r\to 0} \frac{\widetilde{U}_x(t, r)}{r} \\ &= \partial_t \left(t \fint_{\partial B_t(x)} g(y)\, dS(y) \right) + t \fint_{\partial B_t(x)} h(y)\, dS(y) \\ &= \fint_{\partial B_t(x)} (g(y) + Dg(y) \cdot (y - x) + th(y))\, dS(y) \end{aligned}$$

Satz. Seien $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ und $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch die Kirchhoffsche Formel. Es gilt

- $u \in \mathcal{C}^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$
- u ist die eindeutige Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung mit Anfangswerten wie in (4.1)

Bemerkungen.
- Regularitätsverlust: u nur in $\mathcal{C}^2$, obwohl $g \in \mathcal{C}^3$
- $u(t, x)$ hängt nur von den Werten von g und h auf $\partial B_t(x)$ ab.

- Somit gilt das **Huygensche Prinzip**: Störungen der Anfangsdaten in der Umgebung eines Punktes ändern für große Zeiten die Lösung in dieser Umgebung nicht.
- Für ungerade Dimensionen n funktioniert die Strategie der Transformation auf eine Lösung der eindim. Wellengleichung mit
$$\widetilde{U}_x(t,r) := (r^{-1}\partial_r)^{(n-3)/2}(r^{n-2}U_x(t,r)).$$

Satz. Sei $n \geq 3$ ungerade, $g \in \mathcal{C}^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}$ und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := \left(\prod_{k=1}^{(n-1)/2}(2k-1)\right)^{-1}\left[\partial_t\,(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B_t(x)} g\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}\right)\right.$$
$$\left. + \,(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B_t(x)} h\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}\right)\right]$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty)) \times \mathbb{R}^n$ und die eindeutige Lösung der homogenen WG auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ mit $u = g$ und $\partial_t u = h$ auf $\{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Bemerkung. (Zusammenhang von WG und WLG) Sei $\Psi_{(n=1)}$ die Fundamentallösung der WLG in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^1$. Sei u eine glatte, beschränkte Lsg der Wellengleichung (4.1) mit $h \equiv 0$. Sei

$$v(t,x) := \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{(n=1)}(t,s) \cdot \overline{u}(s,x)\,\mathrm{d}s \quad \text{mit } \overline{u}(s,x) := u(|s|,x).$$

Dann erfüllt v die homogene WLG

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ \quad\quad u &= g \quad \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Bemerkung. Für ungerade Dimensionen n können wir Lsgen der WG herleiten. Sei nun $u : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (4.1) mit n gerade. Dann definiert

$$\overline{u} : [0,\infty) \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad (t,(x,\_)) \mapsto u(t,x)$$

eine Lsg der homogenen WG mit Startwerten $\overline{u} = \overline{g}$, $\partial_t \overline{u} = \overline{h}$ auf $\{0\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ (wobei $\overline{g}$ und $\overline{h}$ analog definiert zu $\overline{u}$ sind). Mit der Darstellung von $\overline{u}$ und passenden Transformationen ergibt sich eine Formel für u. Speziell für $n = 2$:

Satz. Seien $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$, $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := \tfrac{1}{2}\partial_t\left(t^2 \fint_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,\mathrm{d}y\right) + \tfrac{1}{2}t^2 \fint_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,\mathrm{d}y$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^2)$ die eindt. Lsg von (4.1) auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}^2$.

Bemerkung. Bei geraden Dimensionen hängt $u(t,x)$ von allen Anfangsdaten in $B_t(x)$ ab, d. h. es gilt kein Huygensches Prinzip.

Satz. Sei n gerade, $g \in \mathcal{C}^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{C}^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$ und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t,x) := \left(\prod_{k=1}^{n/2} 2k\right)^{-1}\left[\partial_t\,(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n \fint_{B_t(x)} \frac{g(y)}{(t^2-|x-y|^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}y\right)\right.$$
$$\left. + \,(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n \fint_{B_t(x)} \frac{h(y)}{(t^2-|x-y|^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}y\right)\right]$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty)) \times \mathbb{R}^n$ und die eindeutige Lösung der homogenen WG auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ mit $u = g$ und $\partial_t u = h$ auf $\{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Satz. Sei $f \in \mathcal{C}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$. Sei $v_s : (s,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $s \in (0,\infty)$ die Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t^2 v_s - \Delta v_s = 0 & \text{in } (s,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ v_s = g,\ \partial_t v_s = f & \text{auf } \{s\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Setze $u(t,x) := \int_0^t v_s(t,x)\,\mathrm{d}s$. Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ und u löst die inhomogene Wellengleichung mit Nullanfangsdaten

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u = 0, \partial_t u = 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Bemerkung. Aus den Darstellungsformeln für $n = 1,3$ ergibt sich:

$$u_{n=1}(t,x) = \tfrac{1}{2}\int_0^t \int_{x-\tilde{s}}^{x+\tilde{s}} f(t-\tilde{s},y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tilde{s}$$
$$u_{n=3}(t,x) = \tfrac{1}{4\pi}\int_{\partial B_t(x)} \frac{f(t-|y-x|,y)}{|y-x|}\,\mathrm{d}y$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, $T > 0$ und $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in Ω_T mit $u = 0$ auf $[0,T] \times \partial\Omega$. Sei

$$e(t) := \tfrac{1}{2}\int_\Omega (\partial_t u(t,x))^2 + |Du(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{für } t \in [0,T]\,.$$

Dann ist e konstant auf $[0,T]$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, $T > 0$, $g \in \mathcal{C}^2(\partial_p\Omega_T)$, $h \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ und $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Seien u, v Lösungen von

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T, \\ u = g & \text{auf } \partial_p\Omega_T, \\ \partial_t u = h & \text{auf } \{0\} \times \Omega. \end{cases}$$

Dann gilt $u \equiv v$.

Def. Sei $(t_0,x_0) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$C(t_0,x_0) := \{(t,x) \in (0,t_0) \times \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < t_0 - t\}$$

Vergangenheitskegel mit Spitze (t_0,x_0).

Satz. Sei $(t_0,x_0) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ und löse $u \in \mathcal{C}^2(\overline{C(t_0,x_0)})$ die homogene Wellengleichung in $C(t_0,x_0)$ mit Anfangsbedingung $u = 0$, $\partial_t u = 0$ auf $\{0\} \times B_{t_0}(x_0)$. Dann gilt $u \equiv 0$ in $C(t_0,x_0)$.