

Zusammenfassung Partielle DGLn

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

1. Einleitung

Def. Eine **partielle Differentialgleichung** (PDGL) hat die Form

$$E(x, u(x), Du(x), \dots, D^k u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \quad (*)$$

wobei $E : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist. Die höchste Ableitungsordnung von u , die in E vorkommt, heißt **Ordnung** der PDGL.

Def. Eine PDGL von der Ordnung k heißt

- **linear**, falls sie folgende Form besitzt:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) = 0$$

- **semilinear**, falls sie linear in der höchsten Ableitungsordnung ist, man sie also schreiben kann als

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) = 0.$$

- **quasilinear**, falls sie sich schreiben lässt als

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) = 0.$$

- sonst **voll nichtlinear**.

Bemerkung. $\{\text{lineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{semilineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{quasilineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{PDGLn}\}$

Def (Typeinteilung für lineare PDGLn 2. Ordnung). Seien $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) vorgegebene Fktn. auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Die lineare PDGL

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **elliptisch**, falls die $(n \times n)$ -Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

- Die lineare PDGL

$$D_1 D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **hyperbolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

- Die lineare PDGL

$$D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{2 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **parabolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

Def. Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **klassische Lösung**, falls $u \in C^k(\Omega)$ und die Differentialgleichung $(*)$ überall in Ω erfüllt ist.

2. Laplace- und Poisson-Gleichung

Notation. Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $F = (F_1, \dots, F_n)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann heißt

- $\text{div} F := \sum_{i=1}^n D_i F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **Divergenz** von F ,
- $\text{grad} f := \nabla f := (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ **Gradient** von f ,
- Δ mit $\Delta f = \text{div}(\text{grad} f) = \sum_{i=1}^n D_i D_i f$ **Laplace-Operator**.

Notation. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibe

$$V \in \Omega \quad \text{für} \quad V \subset \mathbb{R}^n \text{ mit } \bar{V} \text{ kompakt und } \bar{V} \subset \Omega^\circ.$$

Def. Die **Laplace-** bzw. **Poisson-Gleichung** ist die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Satz (Transformationssatz). Sei $T : \Omega \rightarrow T(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Diffeo, dann gilt für $f : T(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \in L^1(T(\Omega)) \iff (f \circ T) \circ |\det(DT)| \in L^1(\Omega) \quad \text{mit}$$

$$\int_{T(\Omega)} f \, dx = \int_{\Omega} (f \circ T) \cdot |\det(DT)| \, dx.$$

Bsp (Polarkoordinaten). Sei $f \in L^1(B_r(K))$. Dann ist f auf fast jeder Sphäre $\partial B_\rho(K)$ für $\rho \in [0, r]$ integrierbar und es gilt

$$\int_{B_r(x)} f(x) \, dx = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x_0)} f \, dS \, d\rho$$

Satz (Gauß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit C^1 -Rand $\partial\Omega$. Ist $F \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\text{div} F \in L^1(\Omega)$, so gilt

$$\int_{\Omega} \text{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} (F \circ \nu) \, dS,$$

wobei ν der äußere Einheitsnormalenvektor ist.

Korollar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit C^1 -Rand $\partial\Omega$. Sind $f, g \in C^1(\bar{\Omega})$, dann gilt die partielle Integrationsregel

$$\int_{\Omega} D_i f g \, dx = - \int_{\Omega} f D_i g \, dx + \int_{\partial\Omega} f g \nu^i \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Sind $f, g \in C^2(\bar{\Omega})$, dann gelten die Greenschen Formeln

$$\int_{\Omega} D f \cdot D g \, dx = - \int_{\Omega} f \Delta g \, dx + \int_{\Omega} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dx = \int_{\partial\Omega} (f D_\nu g - g D_\nu f) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Proposition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| < \infty$, $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ und $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Angenommen,

- $f(x, -) \in C^1(I)$ für fast alle $x \in \Omega$,
- $f(-, t) \in L^1(\Omega) \frac{\partial f}{\partial t}(-, t) \in L^1(\Omega)$ für alle $t \in I$ und

- für alle $t \in I$ gibt es $\epsilon > 0$ sodass $]t - \epsilon, t + \epsilon[\subset I$ und

$$\sup_{s \in]t - \epsilon, t + \epsilon[} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(-, s) \right| \in L^1(\Omega).$$

Dann ist die Abbildung

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{\Omega} f(x, t) \, dx$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx.$$

Bemerkung. Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn Ω offen und beschränkt ist, $f(x, -) \in C^1(I)$ für alle $x \in \Omega$ und $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in C(\bar{\Omega} \times I)$.

Notation. Bezeichne mit \mathcal{L}^n das Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^n . Für messbare Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ schreibe $|A| := \mathcal{L}^n(A)$.

Bsp. Zwischen dem Volumen von Kugeln und Sphären im \mathbb{R}^n bestehen folgende Zusammenhänge:

$$|B_r(0)| = r^n \cdot |B_1(0)| \quad \text{und} \quad |B_r(0)| = \frac{r}{n} \cdot \int_{\partial B_r(0)} 1 \, dS$$

Notation. $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

Notation. Sei $f : \Omega/M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathcal{L}^k(\Omega) \in]0, \infty[$ bzw. $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale

Untermannigfaltigkeit mit $\int_M 1 \, dS \in]0, \infty[$

$$\int_{\Omega} f f(x) \, dx := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_M f f(x) \, dx := \frac{1}{|M|} \int_M f(x) \, dx$$

heißt **Mittelwerte** von f auf Ω bzw. M .

Def. Ein **Glättungskern** auf \mathbb{R}^n ist eine nicht-negative, radialsymmetrische Funktion $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$.

Def. Der **Standardglättungskern** ist die Funktion

$$\eta(x) := C \cdot \exp\left(-\frac{1}{|x|^{2-1}}\right) \cdot \mathbb{1}_{B_1(0)}(x)$$

mit Normierungskonstante C . Für $\epsilon > 0$ ist der dazugehörige skalierte Glättungskern gegeben durch

$$\eta_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \eta(x/\epsilon).$$

Alle Glättungskern-Eigenschaften bleiben bei Skalierung erhalten.

Notation. $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$. Für $f \in L^1_{\text{loc}}$ heißt die Funktion

$$f_\epsilon : \Omega_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \eta_\epsilon * f(x) := \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) f(y) \, dy \quad \text{e-Glättung von } f$$

Satz (Eigenschaften von Glättungen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$ und $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann gilt

- Regularität: $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ mit $D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha \eta_\epsilon) * f$ für beliebige Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- Ist $D_i f$ stetig auf Ω , so gilt $D_i(f_\epsilon) = (D_i f)_\epsilon$ auf Ω_ϵ .

- Falls $f \in C^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in]0, 1]$, so gilt $f_\epsilon \in C^\alpha(\Omega_\epsilon)$ mit derselben Hölderkonstante.
- Falls $f \in L^p(\Omega)$ für $p \in [0, \infty]$, so gilt $\|f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$.
- $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$ fast-überall in Ω .
- Falls $f \in C(\Omega)$, so konvergiert f_ϵ gleichmäßig gegen f für $\epsilon \rightarrow 0$ auf kompakten Teilmengen von Ω ,
- Falls $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ für $p \in [1, \infty[$, so gilt $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.
- Abschätzung der Approximationsgüte: Ist $Du \in L^p(\Omega)$, so gilt

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \epsilon \cdot \|Df\|_{L^p\Omega}.$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Man nennt u

- **harmonisch**, falls $\Delta u = 0$ in Ω gilt.
- **subharmonisch**, falls $\Delta u \geq 0$ in Ω gilt.
- **superharmonisch**, falls $\Delta u \leq 0$ in Ω gilt.

Bspe. • Affine Funktionen sind harmonisch.

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definiere $u(x) := x \cdot Ax$. Dann gilt $\Delta u = \text{spur} A$, also $\Delta u = 0 \iff \text{spur} A = 0$.
- Real- und Imaginärteil von holomorphen Fktn. sind harmonisch.

Def. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} -(2\pi)^{-1} \log|x|, & \text{wenn } n = 2 \\ (n(n-2)\omega_n)^{-1}|x|^{2-n}, & \text{wenn } n \geq 3 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung** der Laplacegleichung.

Bemerkung. • Φ ist radialsymmetrisch, d. h. für alle

- $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\|x_1\| = \|x_2\|$ gilt $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$.
- $\Phi, |D\Phi| \in L^1(B_R(0))$ für alle $R > 0$ aber $|D^2\Phi| \notin L^1(B_1(0))$.
- Die Konstanten wurden so gewählt, dass gilt:

$$-\int_{\partial B_r(0)} D\Phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = 1 \quad \text{für alle } r > 0.$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_R(x_0) \subset \Omega$, $u \in C^2(\Omega)$. Für

$$\phi :]0, R[\rightarrow \mathbb{R}, \quad r \mapsto \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = u(x_0)$
- $\phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{\partial B_r(x_0)} \Delta u(x) \, dx$

Korollar (Mittelwertseigenschaft). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_r(x_0) \Subset \Omega$ und $u \in C^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$0 = \Delta u \implies u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{und} \quad u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

In diesen Gleichungen darf man $=$ durch $\leq, <, \geq$ oder $>$ ersetzen.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:

- u ist harmonisch, d. h. es gilt $\Delta u = 0$ in Ω .

- u erfüllt die sphärische Mittelwertseigenschaft, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

- u erfüllt die Mittelwertseigenschaft auf Kugeln, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Bemerkung. Die Äquivalenz gilt auch unter den schwächeren Voraussetzungen $u \in C(\Omega)$ oder $u \in L^1(\Omega)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω , d. h. $\Delta u \geq 0$ in Ω . Dann gilt

- Das **schwache Maximumsprinzip**: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist Ω zusammenhängend und existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, so ist u konstant.

Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch. Dann gilt

$$\min_{\partial\Omega} u < \max_{\partial\Omega} u \implies \min_{\partial\Omega} u < u < \max_{\partial\Omega} u \text{ auf } \Omega.$$

Korollar (Eindeutigkeit). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann ist $u = v$, falls gilt:

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v & \text{in } \Omega \\ u = v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Bemerkung (Stetige Abhängigkeit von Randwerten). Gilt lediglich $\Delta u = \Delta v$ in Ω , aber nicht $u = v$ auf $\partial\Omega$, so gilt immerhin

$$\max_{\overline{\Omega}} |u - v| = \max_{\partial\Omega} |u - v|.$$

Satz (Harnack-Ungleichung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \Subset \Omega$ offen, zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega, V)$, sodass

$$\sup_V u \leq c \cdot \inf_V u \quad \text{für alle harmonischen Fktn. } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und erfülle $u \in C(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Sphären, d. h.

$$u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Dann gilt $u(x) = u_\epsilon(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Insbesondere ist $u \in C^\infty(\Omega)$ und harmonisch.

Korollar. Obiger Satz gilt auch, wenn $u \in C(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Kugeln erfüllt, d. h.

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Def. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf einem topologischen Raum X **konvergiert lokal gleichmäßig** gegen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x von x gibt, sodass f_n auf U_x gleichmäßig gegen f konvergiert.

Korollar (Konvergenzsatz von Weierstraß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiert. Dann ist u harmonisch auf Ω .

Korollar (Harnackscher Konvergenzsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf Ω . Gibt es ein $x_0 \in \Omega$, sodass $(u_k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt (und damit konvergent) ist, so konvergiert (u_k) lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion auf Ω .

Satz (von Hermann Weyl). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} u \cdot \Delta \phi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann gibt es eine harmonische Funktion $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = \tilde{u}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Satz (Innere Abschätzung für Ableitungen harmonischer Fktn). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gilt für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$ und jede Kugel $B_r(x_0) \Subset \Omega$:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq C(n, k) r^{-n-k} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \quad \text{mit } C(n, k) := \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\omega_n}.$$

Satz (Liouville). Sei $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch.

- Ist u beschränkt, so ist u konstant.
- Gilt $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|u(x)|}{|x|^{k+1}} = 0$, so ist u ein Polynom, dessen Grad $\leq k$ ist.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **analytisch** in $x \in \Omega$, falls f sich lokal durch ihre Taylorreihe darstellen lässt, also ein $r \in]0, \text{dist}(x, \partial\Omega)[$ existiert mit

$$f(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) (y - x)^\alpha \quad \text{für alle } y \in B_r(x).$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$. Wenn u harmonisch ist, dann auch analytisch.

Problem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, (beschränkt), regulär und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gesucht ist $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(2.1) \begin{cases} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Satz (Greensche Darstellungsformel). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit C^1 -Rand und $h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $\Delta h \in L^1(\Omega)$. Es gilt für $x \in \Omega$:

$$h(x) = - \int_{\Omega} \Phi(x-y) \Delta h(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \, dS(y)$$

$$- \int_{\partial\Omega} h(y) D_y \Phi(x-y) \cdot \nu \, dS(y)$$

Bemerkung. Für Randpunkte $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\frac{1}{2} h(x) = - \int_{\Omega} \Phi(x-y) \Delta h(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \, dS(y)$$

$$- \int_{\partial\Omega} h(y) D_y \Phi(x-y) \cdot \nu \, dS(y)$$

Korollar (Darstellungsformel für Lsgn in \mathbb{R}^n). Sei $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, setze

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\Phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, dy.$$

Dann gilt: $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n .

Bemerkung. • Für $n = 2$ ist die Lösung potentiell unbeschränkt.

- Für $n \geq 3$ ist diese Lsg beschränkt und erfüllt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$.

Proposition. Jede andere beschränkte Lösung von $-\Delta u = f$ auf \mathbb{R}^n unterscheidet sich nur durch eine additive Konstante.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine **Greensche Funktion** für Ω ist eine Funktion $G : \{(x, y) \in \Omega \times \Omega \mid x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \Omega$ gilt:

- Die **Korrekturfunktion** $y \mapsto G(x, y) - \Phi(x - y)$ ist von der Klasse $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ und ist harmonisch in Ω .
- Die Funktion $G(x, -)$ hat Nullrandwerte auf $\partial\Omega$, d. h. es gilt $\lim_{y \rightarrow y_0} G(x, y) = 0$ für alle $y_0 \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$.

Bemerkung. Die Funktion $G(x, -)$ ist in $\mathcal{C}^2(\Omega \setminus \{x\}) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$ und hat die gleiche Singularität wie $y \mapsto \Phi(x - y)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, mit \mathcal{C}^1 -Rand $\partial\Omega$. Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (2.1) und ist G die Greensche Funktion für Ω (falls existent), dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \cdot D_y G(x, y) \cdot \nu dS(y).$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, G die Greensche Funktion für Ω und $B_r(x) \Subset \Omega$. Für $f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ gilt dann:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} (G(x, y) Df(y) - f(y) D_y G(x, y)) \cdot \nu(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = f(x).$$

Satz. Ist G die Greensche Funktion zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit \mathcal{C}^1 -Rand $\partial\Omega$, so gilt $G(x, y) = G(y, x)$ für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$.

Korollar. Sei G die Greensche Funktion zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit \mathcal{C}^1 -Rand $\partial\Omega$, so ist die Funktion $x \mapsto G(x, y)$ harmonisch auf $\Omega \setminus \{y\}$.

Def. Sei $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a)$. Dann heißt

$$x^* := a + r^2 \frac{x - a}{\|x - a\|^2} \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a) \quad \text{Spiegelungspunkt von } x.$$

Bemerkung. Es gilt: • $\|x - a\| \cdot \|x^* - a\| = r^2$ • $(x^*)^* = x$

- $\forall y \in \partial B_r(a) : \|x^* - y\|^2 = r^2 \|x - a\|^{-2} \|y - x\|^2$.

Notation. Für $B_r(a) \subset \mathbb{R}$ sei $g : B_r(a) \times B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x, y) := \begin{cases} -\Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y - x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ -\Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Proposition. Für die Funktion g gilt:

- $g(x, y) - \Phi(x - y) = 0$ für alle $y \in \partial B_r(a)$ und $x \in B_r(a)$.
- $y \mapsto g(x, y)$ ist glatt und harmonisch in $B_r(a)$ für alle $x \in B_r(a)$.

Korollar. Die Greensche Funktion für $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ lautet

$$G_{B_r(a)}(x, y) := \Phi(x - y) + g(x, y) = \begin{cases} \Phi(x - y) - \Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y - x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ \Phi(a - y) - \Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Def. Der **Poisson-Kern für die Kugel** $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$K_{B_r(a)}(x, y) := \frac{1}{n\omega_n} \cdot \frac{r^2 - |x-a|^2}{r|x-y|^n}.$$

Satz (Poisson-Integralformel für Kugeln). Sei $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ und $g : \partial B_r(a)$ stetig.

- Für $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_r(a)})$ harmonisch mit $u=g$ auf $\partial B_r(a)$ gilt

$$u(x) = \int_{\partial B_r(a)} K_{B_r(a)}(x, y) g(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für alle } x \in B_r(a). \quad (2.8)$$

- Umgekehrt definiert (2.8) die eindeutige harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}^1(\overline{B_r(a)})$ mit $u = g$ auf $\partial B_r(a)$.

Notation. $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ heißt **Halbraum**.

Def. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt $\bar{x} := (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ **Spiegelpunkt** von x bzgl. $\partial\mathbb{R}_+^n$.

Satz. Die Greensche Funktion für \mathbb{R}_+^n lautet

$$G_{\mathbb{R}_+^n}(x, y) := \Phi(x - y) - \Phi(x^* - y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}_+^n \text{ mit } x \neq y.$$

Def. Der **Poisson-Kern für den Halbraum** \mathbb{R}_+^n ist definiert als

$$K_{\mathbb{R}_+^n}(x, y) := \frac{1}{n\omega_n} \cdot \frac{2x_n}{|x-y|^n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n \text{ und } y \in \partial\mathbb{R}_+^n.$$

Satz (Poisson-Integralformel für den Halbraum). Sei $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Dann definiert

$$u(x) := \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K_{\mathbb{R}_+^n}(x, y) g(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n$$

eine beschränkte, harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ mit $u = g$ auf $\partial\mathbb{R}_+^n$.

Notation. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibe

- $\Omega^+ := \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_n > 0\} = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$
- $\Omega^0 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_n = 0\} = \Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^n$
- $\Omega^- := \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_n < 0\} = \Omega \setminus \overline{\mathbb{R}_+^n}$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und symmetrisch bzgl. $\partial\mathbb{R}_+^n$, d. h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x \in \Omega \iff \bar{x} \in \Omega$.

- Ungerades Spiegelungsprinzip: Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^+) \cap \mathcal{C}(\Omega^+ \cup \Omega^0)$ harmonisch auf Ω^+ mit $u = 0$ auf Ω^0 , so ist die ungerade Fortsetzung

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega^+ \cup \Omega^0, \\ -u(\bar{x}) = -u(x_1, \dots, -x_n) & \text{für } x \in \Omega^- \end{cases}$$

harmonisch auf Ω .

- Gerades Spiegelungsprinzip: Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^+) \cap \mathcal{C}^1(\Omega^+ \cup \Omega^0)$ mit $D_n u = 0$ auf Ω^0 , so ist die gerade Fortsetzung

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega^+ \cup \Omega^0, \\ u(\bar{x}) = u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{für } x \in \Omega^- \end{cases}$$

harmonisch auf Ω .