

# Zusammenfassung Algebr. Topologie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Def.** Ein **affines  $n$ -Simplex** ist die konvexe Hülle von  $n+1$  affin unabhängigen Punkten  $p_0, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{R}^N$ . Die konvexe Hülle von einer Teilmenge dieser Eckpunkte wird **Seite** genannt. Das **Standard- $n$ -Simplex**  $\Delta_n$  ist das von den  $n+1$  Standard-Basisvektoren im  $\mathbb{R}^{n+1}$  aufgespannte Simplex.

**Def.** Ein (endlicher) **geometrischer Simplicialkomplex** ist eine (endliche) Menge  $\mathcal{S}$  endlich vieler affiner Simplizes im  $\mathbb{R}^N$ , sodass:

- Ist  $K \in \mathcal{S}$  und  $T \subset K$  eine Seite von  $K$ , dann ist auch  $T \in \mathcal{S}$ .
- Für alle  $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$  ist  $K_1 \cap K_2$  entweder eine Seite von  $K_1$  und  $K_2$  oder leer.

**Def.** Jeder Simplicialkomplex  $\mathcal{S}$  ist eine **Triangulierung** seines **Polyeders**, dem topologischen Raum  $|\mathcal{S}| := \bigcup_{K \in \mathcal{S}} K$ .

**Def.** Ein geometrischer Simplicialkomplex mit einer Totalordnung auf der Menge der Eckpunkte heißt **geordnet**.

**Notation.** Ein  $n$ -Simplex mit Eckpunkten  $v_0, \dots, v_n$  in einem geordneten geom. Simplicialkomplex wird mit  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$  bezeichnet, falls  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$ .

**Notation.**  $\mathcal{S}_n := \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma \text{ ist geordneter } n\text{-Simplex}\}$

**Def.** Eine **simpliciale  $n$ -Kette** in einem geordneten geom. Simplicialkomplex ist eine endliche formale Linearkombination

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma,$$

wobei  $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}$ . Die Menge solcher Linearkombinationen ist  $C_n(\mathcal{S})$ . Sie ist die freie abelsche Gruppen über der Menge der Simplizes.

**Bem.**  $C_n(\mathcal{S})$  ist eine Gruppe.

**Def.** Der Rand eines orientierten  $n$ -Simplex  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle \in \mathcal{S}$  ist

$$\partial \langle v_0, \dots, v_n \rangle := \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle.$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Gruppenhomo  $\partial_n : C_n(\mathcal{S}) \rightarrow C_{n-1}(\mathcal{S})$ .

**Def.** Ein **Kettenkomplex**  $C_\bullet$  ist eine Folge  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen  $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  mit der Eigenschaft  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ .

**Def.** Sei  $C_\bullet$  ein Kettenkomplex.

- $C_n(C_\bullet)$  heißt Gruppe der  **$n$ -Ketten**,
- $Z_n(C_\bullet) := \ker \partial_n \subset C_n(C_\bullet)$  heißt Gruppe der  **$n$ -Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) := \text{im } \partial_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet)$  heißt Gruppe der  **$n$ -Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet) / B_n(C_\bullet)$  heißt  **$n$ -te Homologiegruppe**.

**Prop.** Für  $n \geq 1$  gilt  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ . Die simplicialen  $n$ -Ketten bilden also einen Kettenkomplex.

**Def.** Ein **singuläres  $n$ -Simplex** in einem topologischen Raum  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . Wir bezeichnen mit  $\Delta_n(X)$  die Menge der singulären  $n$ -Simplizes in  $X$  und mit  $C_n(X)$  die freie abelsche Gruppe über  $\Delta_n(X)$ . Wir definieren

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X), \quad \sigma \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n)}.$$

Analog zu oben gilt  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ , man erhält also einen Komplex  $C_\bullet(X)$  der singulären Ketten in  $X$ . Dessen Homologiegruppen heißen **singuläre Homologiegruppen**  $H_n(X)$ .

**Def.** Eine **Kettenabbildung** zwischen Kettenkomplexen  $C_\bullet$  und  $D_\bullet$  ist eine Familie  $(f_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Gruppenhomomorphismen, welche mit dem Differential verträglich sind, d. h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \partial_n^{(D)} \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n^{(C)}.$$

Aus einer solchen Abbildung erhält man wiederum eine Abbildung  $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit definiert  $H_n$  einen Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen.

**Def.** Für eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  von topologischen Räumen erhalten wir eine Abbildung  $f_* : C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$  definiert durch  $f_*(\sigma) := f \circ \sigma$  für ein  $n$ -Simplex  $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ . Die Zuordnung  $f \mapsto f_*$  erfüllt die Funktorialitätsaxiome. Somit definiert  $H_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  einen Funktor **Top**  $\rightarrow$  **AbGrp**.

**Korollar.** Homöomorphe Räume besitzen isomorphe singuläre Homologiegruppen.

**Prop.** Sei  $\pi_0(X)$  die Menge der Wegekompenten von  $X$ . Die Inklusionen  $A \hookrightarrow X$  (für  $A \in \pi_0(X)$ ) induzieren einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{A \in \pi_0(X)} H_*(A) \cong H_*(X).$$

**Prop.** Sei  $X \neq \emptyset$  wegzusammenhängend. Dann ist  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

**Def.** Eine **Kettenhomotopie** zw. Kettenabb.  $\phi_*, \psi_* : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  ist eine Folge von Homomorphismen  $P_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$  mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n = \phi_n - \psi_n.$$

**Prop.** Seien  $\phi_*, \psi_* : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  kettenhomotop. Dann gilt

$$H_*(\phi_*) = H_*(\psi_*) : H(C_\bullet) \rightarrow H(D_\bullet).$$

**Satz.** Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  homotope Abbildungen. Dann sind  $f_*, g_* : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$  kettenhomotop.

**Korollar.** • Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  homotope Abbildungen. Dann gilt

$$f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y).$$

- Homotopieäquivalente Räume besitzen isomorphe Homologiegruppen.

**Def.** Ein **Unterkomplex**  $D_\bullet$  von  $C_\bullet$  ist eine Folge von Untergruppen  $D_n \subset C_n$ , sodass gilt:  $\partial D_n \subset D_{n-1}$  für alle  $n \geq 1$ .

**Def.** Ist  $D_\bullet \subset C_\bullet$  ein Unterkomplex, so ist der **Quotientenkomplex**  $C_\bullet / D_\bullet$  definiert durch

$$(C_\bullet / D_\bullet)_n := C_n / D_n, \quad \partial_n^{C/D}[c] := [\partial_n^C(c)].$$

**Def.** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard. Der **relative singuläre Kettenkomplex**  $C_\bullet(X, A)$  ist definiert als Quotientenkomplex  $X_\bullet / A_\bullet$ . Dessen Homologiegruppen heißen **relative singuläre Homologiegruppen**  $H_n(X, A)$ .

**Bem.**  $H_n$  ist ein Funktor **Top**(2)  $\rightarrow$  **AbGrp**.

**Def.** Eine Homotopie zwischen Abbildungen von Raumpaaren  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist eine Homotopie  $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  zwischen  $f$  und  $g$  mit  $H([0, 1] \times A) \subset Y$ .

**Prop.** Homotope Abbildungen von Raumpaaren induzieren dieselbe Abbildung in relativer Homologie.

**Def.** Ein Kettenkomplex heißt **exakt** (oder **azyklisch**), falls seine Homologiegruppen alle Null sind, d. h.  $\forall n \in \mathbb{N} : \text{im } \partial_{n+1} = \ker \partial_n$ .

**Def.** Eine **kurze exakte Sequenz** (k. e. S.) ist ein exakter Kettenkomplex der Gestalt

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0.$$

**Def.** Eine **kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen** ist ein Diagramm der Form

$$0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0,$$

in jedem Grad eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow 0.$$

**Bem.** Ist  $(X, A)$  ein Raumpaard, so erhält man eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow C_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X, A) \rightarrow 0.$$

Für ein Raumtripel  $(X, A, U)$  erhält man eine k. e. S.

$$0 \rightarrow C_\bullet(A, U) \rightarrow C_\bullet(X, U) \rightarrow C_\bullet(X, A) \rightarrow 0.$$

**Prop.** Die ex. Sequenz  $0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$  induziert in jedem Grad einen sogenannten **verbindenden Homomorphismus**  $\partial_n : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ , sodass die Sequenz

$$\dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(B) \rightarrow H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \rightarrow H_{n-1}(B) \rightarrow \dots$$

exakt ist. Diese Sequenz wird **lange exakte Sequenz** genannt.

**Korollar.** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard. Dann gibt es Homomorphismen  $\partial_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ , sodass die Sequenz

$$\dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots \quad \text{exakt ist.}$$

Für ein Raumtripel  $(X, A, U)$  erhält man eine l. e. S.

$$\dots \rightarrow H_n(A, U) \rightarrow H_n(X, U) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, U) \rightarrow \dots$$

**Def.** Die **reduzierte Homologie**  $\tilde{H}_*(X)$  eines topologischen Raumes  $X$  ist die Homologie des Kettenkomplexes

$$\dots \rightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

wobei  $\epsilon$  der sogenannte **Augmentierungshomomorphismus** ist:

$$\epsilon : \sum_{\sigma \in \Delta_0(X)} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma} \lambda_\sigma \in \mathbb{Z}.$$

**Prop.** •  $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$  für  $n \geq 1$

- Ist  $X = \emptyset$ , so ist  $\tilde{H}_n(X) = 0$  für  $n \geq 0$  und  $\tilde{H}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ .
- Ist  $X \neq \emptyset$ , so ist  $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus \mathbb{Z}$ , jedoch nicht kanonisch.
- Ist  $X$  kontrahierbar, so gilt  $\tilde{H}_n(X) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- Ist  $(X, A)$  ein Raumpaard, so gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_0(A) \rightarrow \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(X, A) \rightarrow \tilde{H}_{-1}(A) \rightarrow \tilde{H}_{-1}(X) \rightarrow 0$$

**Satz.** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard,  $U \subset A$  mit  $\bar{U} \subset \text{int } A$ . Dann induziert die Inklusion  $(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen

$$H_n(X - U, A - U) \rightarrow H_n(X, A) \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

*Bem.* Eine äquivalente Aussage zum Ausschneidungssatz ist: Seien  $A, B \subset X$  mit  $X = \text{int } A \cup \text{int } B$ . Dann induziert die Inklusion  $(B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$  Isomorphismen in Homologie.

**Def (Eilenberg-Steenrod-Axiome).** Eine **Homologietheorie** ist eine Folge von Funktoren

$$H_n : \mathbf{Top}(2) \rightarrow \mathbf{AbGrp},$$

und natürlichen Transformationen

$$\delta_n : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, \emptyset)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- **Homotopieinvarianz:** Seien  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotop als Abbildungen von Raumpaaren. Dann gilt  $f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ .
- **Lange exakte Sequenz:** Die Inklusionen  $A \hookrightarrow X$  und  $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$  induzieren eine l.e.S.

$$\dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

- **Ausschneidung:** Ist  $U \subset A$  mit  $\bar{A} \subset \text{int}(A)$ , dann induziert die Inklusion  $(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen

$$H_n(X - U, A - U) \rightarrow H_n(X, A).$$

**Def.** Die **Koeffizienten** einer Homologietheorie sind die Homologiegruppen  $H_n(pt)$  des einpunktigen Raums. Eine Homologietheorie heißt **gewöhnlich**, falls  $H_n(pt) = 0$  für  $n > 0$ .

*Bem.* Manchmal fordert man auch das Summenaxiom: Für eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von topologischen Räumen induzieren die Inklusionen  $X_i \hookrightarrow X$  in die disjunkte Summe  $X$  aller  $X_i$  einen Iso

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) \xrightarrow{\cong} H_n(X).$$

*Bem.* Die singuläre Homologie ist eine gewöhnliche Homologietheorie, die das Summenaxiom erfüllt.

**Def.** Ein Raumpaard  $(X, A)$  heißt **gut**, falls  $A$  nicht leer, abgeschlossen und starker Deformationsretrakt einer offenen Umgebung ist.

**Prop.** Sei  $(X, A)$  ein gutes Raumpaard. Dann induziert  $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$  Isomorphismen

$$H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) = \tilde{H}_n(X/A) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Satz.** Für  $n \geq 0$  ist  $S^n$  kein Retrakt von  $D^{n+1}$ .

**Korollar (Brouwerscher Fixpunktsatz).** Jede stetige Abbildung  $f : D^n \rightarrow D^n$  hat einen Fixpunkt.

**Satz** (Topologische Invarianz der Dimension). Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  homöomorph. Dann gilt  $n = m$ .

**Def.** Sei  $f : S^n \rightarrow S^n$  stetig. In Homologie induziert  $f$  eine Abbildung  $H_n(f) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , die durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben ist. Diese Zahl heißt **Abbildungsgrad**  $\deg f$  von  $f$ .

**Lemma.** •  $\deg(f \circ g) = (\deg f) \cdot (\deg g)$ .  
•  $H_n(f)$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $\deg(f) = \pm 1$ .

**Prop.** Sei  $f : S^n \rightarrow S^n$  die Spiegelung an einer Hyperebene  $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann gilt  $\deg f = -1$ .

**Def.** Ein **Vektorfeld** über  $S^n$  ist eine stetige Abbildung  $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , sodass  $v(x) \perp x$  für alle  $x \in S^n$ .

**Satz.** Die Sphäre  $S^n$ ,  $n \geq 1$  hat genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn  $n$  ungerade ist.

**Satz.** Sei  $n$  gerade und wirke eine Gruppe  $G$  frei auf  $S^n$ . Dann ist entweder  $G = \{e\}$  oder  $G \cong \mathbb{Z}_2$ .

**Def.** Sei  $f : S^n \rightarrow S^n$  stetig,  $x \in S^n$ , sodass eine Umgebung  $U$  von  $x$  existiert mit  $U \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ . Mit Ausschneidung und der l.e.S. erhält man Isomorphismen

$$H_k(U, U - \{x\}) \cong H_k(S^n, S^n - \{x\}) \cong \tilde{H}_k(S^n) \cong \mathbb{Z}.$$

Die induzierte Abb.  $f_* : H_n(U, U - \{x\}) \rightarrow H_n(S^n, S^n - \{f(x)\})$  ist gegeben durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl. Diese heißt **lokaler Abbildungsgrad**  $(\deg f|_x)$  von  $f$  bei  $x$ .

**Prop.** Sei  $f : S^n \rightarrow S^n$  stetig und  $y \in S^n$  mit  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Dann ist  $\deg f|_{x_i}$  definiert für  $i = 1, \dots, n$  und es gilt

$$\deg f = \sum_{i=1}^n \deg f|_{x_i}.$$

**Prop.** Sei  $f : S^n \rightarrow S^n$  stetig. Dann gilt

$$\deg f = \deg(\Sigma f : \Sigma S^n \rightarrow \Sigma S^n).$$

**Prop.** Seien  $A, B \subset X$  mit  $X = A \cup B$ . Angenommen, es gibt Umgebungen  $U$  von  $A$  und  $V$  von  $B$ , sodass die Inklusionen  $A \hookrightarrow U$ ,  $B \hookrightarrow V$  und  $A \cap B \hookrightarrow U \cap V$  Homotopieäquivalenzen sind. Dann existiert die **Mayer-Vietoris-Sequenz**

$$\dots \rightarrow H_*(A \cap B) \rightarrow H_*(A) \oplus H_*(B) \rightarrow H_*(X, A \cap B) \rightarrow H_{*-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

**Prop** (Verallg. Jordanscher Kurvensatz). Sei  $S \subset S^n$  ein Teilraum, der zu einer Sphäre  $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$  homöomorph ist. Dann ist  $k \leq n$  und

$$\tilde{H}_i(S^n - S) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n - k - 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Korollar** (Jordanscher Kurvensatz). Sei  $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige Einbettung. Dann besteht  $\mathbb{R}^2 - \phi(S^1)$  aus zwei Komponenten, von denen genau eine beschränkt ist.

**Satz** (Invarianz des Gebietes). Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und ein Homöomorphismus auf das Bild. Dann ist  $\phi(U)$  offen.

**Def.** Ein  $\Delta$ -Komplex ist ein topologischer Raum  $X$  zusammen mit einer Familie  $(\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \rightarrow X)_{\alpha \in I}$  von stetigen Abbildungen (genannt **charakteristische Abbildungen**), sodass:

- Die Restriktionen  $\sigma_\alpha|_{\text{int}(\Delta^{n(\alpha)})} : \text{int}(\Delta^{n(\alpha)}) \rightarrow X$  sind injektiv und jeder Punkt  $x \in X$  liegt im Bild (genannt **offenes Simplex**) von genau einer solchen Restriktion.
- Ist  $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \rightarrow X$  eine char. Abb. und  $\tau \subset \Delta^{n(\alpha)}$  eine  $(n(\alpha) - 1)$ -dimensionale Seite, dann ist  $\sigma_\alpha|_\tau : \Delta^{n(\alpha)-1} \rightarrow X$  wieder eine charakteristische Abbildung.
- $A \subset X$  ist offen  $\iff$  alle  $\sigma_\alpha^{-1}(A)$  sind offen in  $\Delta^{n(\alpha)}$ .

*Bem.* Jeder endliche geordnete Simplicialkomplex trägt die Struktur eines  $\Delta$ -Komplexes.

*Bem.* Alternativ ist ein  $\Delta$ -Komplex ein kontravarianter Funktor von der Kategorie  $\Delta$  der endlichen total geordneten Mengen mit streng monotonen Abbildungen in die Kategorie der Mengen.

**Def.** Für einen  $\Delta$ -Komplex  $X$  sei  $C_n^\Delta(X)$ , die freie abelsche Gruppe erzeugt von den Abbildungen  $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \rightarrow X$  mit  $n(\alpha) = n$ . Diese Gruppen bilden einen Simplicialkomplex. Die Homologiegruppen dieses Komplexes heißen **simpliziale Homologiegruppen**  $H_*^\Delta(X)$ .

**Def.** Ein **Teilkomplex** eines  $\Delta$ -Komplexes ist eine Teilmenge der charakteristischen Abbildungen (zusammen mit der Vereinigung der Bilder dieser Abbildungen als topologischer Raum), die selbst die Axiome für einen Delta-Komplex erfüllt.

**Def.** Das **k-Skelett** eines  $\Delta$ -Komplexes ist der Teilkomplex, der aus den Bildern aller  $i$ -Simplizes besteht, wobei  $i \leq k$ .

**Def.** Die **relative Homologie**  $H_n^\Delta(X, A)$  des  $\Delta$ -Komplexes  $X$  bezüglich eines Teilkomplexes  $A$  ist die Homologie des Quotientenkomplexes  $C_n^\Delta(X)/C_n^\Delta(A)$ .

**Satz.** Sei  $X$  ein  $\Delta$ -Komplex und  $A \subset X$  ein Unterkomplex. Dann induziert die Inklusion  $C_*^\Delta(X, A) \hookrightarrow C_*(X, A)$  Isomorphismen von Homologiegruppen.

**Lemma.** Für  $n \geq 0$  gilt

$$H_i^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong H_i(\Delta^n, \partial\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{für } i = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Homologieklassse von  $\text{id} : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  erzeugt sowohl  $H_n^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n)$  als auch  $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$

**Lemma (Fünferlemma).** Sei folgendes kommutatives Diagramm von  $R$ -Modulen mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \epsilon \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Angenommen,  $\alpha, \beta, \delta$  und  $\epsilon$  sind Isomorphismen. Dann ist auch  $\gamma$  ein Isomorphismus.

**Def.** Ein **CW-Komplex** ist ein topologischer Raum  $X$  mit einer Folge von abgeschlossenen Unterräumen

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots \subset X, \quad \bigcup_{i \geq 0} X^i = X,$$

genannt  **$i$ -Skelette**  $X^i$ , sodass gilt:

- $X^0$  ist eine diskrete Menge von Punkten.
- Für alle  $n \geq 1$  gibt es eine Familie von **Anheftungsabb'en**  $(\phi_\alpha : \partial D_\alpha^n \rightarrow X^{n-1})_{\alpha \in I(n)}$  (dabei ist  $D_\alpha^n$  eine Kopie von  $D^n$ ), sodass

$$X^n = X^{n-1} \cup_{(\phi_\alpha)_{\alpha \in I(n)}} \coprod_{\alpha \in I(n)} D_\alpha^n.$$

- $X$  trägt die Finaltopologie bzgl. obiger Filtrierung, d. h.  $A \subset X$  ist abgeschlossen  $\iff$  alle  $A \cap X^i$  sind abgeschlossen.

**Def.** Ein CW-Komplex heißt **endlich-dimensional**, falls  $X^i = X$  für ein  $i \in \mathbb{N}$ . Er heißt **endlich**, falls er insgesamt nur endlich viele Anheftungsabb'en besitzt (dann ist er insbesondere endlich-dim).

**Prop.** CW-Komplexe sind normal (und damit Hausdorffsch).

**Def.** Die Anheftungsabb'en  $\phi_\alpha : \partial D_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}$  lassen sich kanonisch fortsetzen zu **charakteristischen Abb'en**  $\Phi_\alpha : D_\alpha^n \rightarrow X^n \subset X$ .

Die Bilder dieser Abb'en werden **abgeschlossene Zellen** genannt. Die Bilder der Einschränkungen  $\Phi_\alpha|_{\text{int}(D_\alpha^n)}$  heißen **Zellen** von  $X$  und werden mit  $e_\alpha^n$  bezeichnet.

**Prop.** •  $\Phi_\alpha|_{\text{int}(D_\alpha^n)} : \text{int}(D_\alpha^n) \rightarrow X^n$  ist eine topologische Einbettung (d. h. ein Homöo auf das Bild).

- Jeder Punkt aus  $X$  liegt in genau einer Zelle.
- Der Abschluss einer Zelle ist eine abgeschlossene Zelle.
- Jede abgeschlossene Zelle trifft nur endlich viele Zellen.

**Def.** Ein **Unterkomplex** eines CW-Komplexes ist eine Teilmenge  $A \subset X$ , die selbst ein CW-Komplex ist, und zwar so, dass alle anheftenden Abb'en von  $A$  auch anheftende Abb'en von  $X$  sind.

**Def.** Ein **CW-Paar** ist ein Raumpaard  $(X, A)$ , wobei  $X$  ein CW-Komplex und  $A$  ein Unterkomplex von  $X$  ist.

**Prop.** •  $X^n$  ist ein Unterkomplex von  $X$  und von  $X^m$  für  $m \geq n$ .

- CW-Raumpaare sind gute Raumpaare.
- Jede Zelle eines CW-Komplexes ist in einem endlichen Unterkomplex enthalten.

**Def.** Die **Einpunktvereinigung** einer Familie  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  von punktierten Räumen ist

$$\bigvee_{i \in I} X_i := \left( \bigsqcup_{i \in I} X_i \right) / \{x_i \mid i \in I\}.$$

Man erhält Projektionen  $q_j : \bigvee_i X_i \rightarrow X_j$  durch Abbilden aller Punkte aus  $X_i, i \neq j$ . auf den Basispunkt  $x_j$ .

**Prop.** Sei  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  eine Familie von punktierten Räumen, sodass alle Raumpaare  $(X_i, \{x_i\})$  gut sind. Dann induzieren die Inklusionen  $X_i \hookrightarrow \bigvee_i X_i$  einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \tilde{H}_n(X_i) \cong \tilde{H}_n(\bigvee_i X_i) \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

**Lemma.** Sei  $X$  ein CW-Komplex. Dann gilt

$$X^n / X^{n-1} \approx \bigvee_{i \in I(n)} S^n.$$

**Korollar.**  $H_i(X^n / X^{n-1}) = \begin{cases} \bigoplus_{i \in I(n)} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

**Prop.** •  $H^k(X^n) = 0$  für  $k > n$ .

- Für  $k < n$  induziert die Inklusion  $X^n \hookrightarrow X$  Isomorphismen  $H_k(X^n) \cong H_k(X)$ .

**Def.** Der **zelluläre Kettenkomplex** eines CW-Komplexes  $X$  ist definiert durch

$$C_n^{\text{cell}}(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$$

mit dem verbindenden Homomorphismus

$$\partial_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

aus der l. e. S. des Raumtripels  $(X^n, X^{n-1}, X^{n-2})$  als Randabb. Dabei setzt man  $X^{n-2} := \emptyset$  und  $\partial_0 = 0$ .

Die Homologiegruppen dieses Komplexes werden mit  $H_*^{\text{cell}}(X)$  bezeichnet.

**Prop.** Für jeden CW-Komplex  $X$  gilt  $H_*^{\text{cell}}(X) \cong H_*(X)$ .

**Korollar.** Hat der CW-Komplex  $X$  keine  $n$ -Zellen so ist  $H_n(X) = 0$ . Wenn  $X$   $k$ -viele  $n$ -Zellen besitzt, dann wird  $H_n(X)$  von höchstens  $k$  Elementen erzeugt.

*Bem.* Wir wählen Erzeuger  $t_n$  von  $H_n(D^n, \partial D^n)$  und  $s_n$  von  $\tilde{H}_n(S^n)$  wie folgt: Für  $n = 0$  wählen wir einen beliebigen Erzeuger von  $H_0(S^0)$ . Angenommen, wir haben einen Erzeuger von  $s_i \in H_i(S^i)$  bereits definiert. Der verbindende Homomorphismus  $\partial_i : H_{i+1}(D^{i+1}, S^i) \rightarrow H_i(S^i)$  aus der l. e. S. des Raumpaars  $(D^{i+1}, S^i)$  ist ein Isomorphismus. Sei der Erzeuger  $t_{i+1}$  von  $H_{i+1}(S^{i+1})$  das Urbild von  $s_i$  unter  $\partial_i$ . Wir wählen  $s_{i+1}$  als das Bild von  $t_{i+1}$  unter dem Isomorphismus

$$H_{i+1}(D^{i+1}, S^i) \cong H_{i+1}(D^{i+1}/S^i) \cong H_{i+1}(S^{i+1})$$

Dabei seien die Homöomorphismen  $D^{i+1}/S^i \approx S^{i+1}$  fest gewählt. Wir erhalten Isomorphismen

$$C_n^{\text{cell}}(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \bigoplus_{I(n)} H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \bigoplus_{I(n)} \mathbb{Z}.$$

Sei nun  $e_\alpha^n$  eine  $n$ -Zelle mit anheftender Abb.  $\phi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  und  $e_\beta^{n-1}$  eine  $(n-1)$ -Zelle von  $X$ . Sei  $d_{\alpha\beta}$  der Abbildungsgrad von

$$S^{n-1} \xrightarrow{\phi_\alpha} X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2} \cong \bigvee_{i \in I(n)} S^{n-1} \xrightarrow{q_\beta} S^{n-1}.$$

Wir bezeichnen den  $\alpha$ -ten Erzeuger von  $C_n^{\text{cell}}(X)$  (mit  $\alpha \in I(n)$ ) mit  $e_\alpha^n$ . Dann haben wir:

**Prop.** Der zelluläre Randoperator ist gegeben durch

$$\partial_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in I(n-1)} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}.$$

Die Summe ist dabei endlich.

**Def.** Der singuläre Kettenkomplex mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $G$  eines topologischen Raumes  $X$  ist def. durch

$$C_n(X; G) := \{ \text{formale endl. Linearkomb. } \sum_{\sigma \in \Delta_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \text{ mit } \lambda_\sigma \in G \}$$

Die Randabbildung ist ganz wie beim gewöhnlichen Kettenkomplex ( $G = \mathbb{Z}$ ) definiert. Die Homologie dieses Komplexes heißt **singuläre Homologie mit Koeffizienten in  $G$** . Sie ist eine gewöhnliche Homologietheorie im Sinne von Eilenberg und Steenrod. Man erhält **reduzierte Homologie mit Koeffizienten in  $G$** , indem man die Komplex von dem mit dem Augmentierungshomomorphismus

$$\epsilon : C_0(X; G) \rightarrow G, \quad \sum_{\sigma \in \Delta_0(X)} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in \Delta_0(X)} \lambda_\sigma$$

erweiterten Kettenkomplex mit Koeffizienten in  $G$  nimmt.

**Prop.** Ist  $f : S^n \rightarrow S^n$  stetig vom Grad  $n$ , so ist

$$f_* : \tilde{H}_n(S^n; G) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n; G)$$

durch Multiplikation mit  $n$  gegeben.

**Def.** Ist  $X$  ein CW-Komplex, so ist der zelluläre Kettenkomplex mit Koeffizienten in  $G$  definiert durch

$$C_n^{\text{cell}}(X) := H_n(X^n, X^{n-1}; G).$$

Die Randabbildung  $\partial_n^{\text{cell}}$  ist der verbindende Homomorphismus in der l. e. S. zum Raumtripel  $(X^n, X^{n-1}, X^{n-2})$  mit Koeffizienten in  $G$ . Es gilt nach Wahl von passenden Erzeugern:

$$\partial_n^{\text{cell}}(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}.$$

**Def.** Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine endliche Überlagerung mit Blätterzahl  $k$ . Sei  $\tau_n: C_n(X) \rightarrow C_n(\tilde{X})$  die Abbildung, die jedes  $n$ -Simplex auf die Summe seiner  $k$  möglichen Lifte abbildet. Dann bildet  $\tau_*$  eine Kettenabbildung und  $p_* \circ \tau_*: C_*(X) \rightarrow C_*(\tilde{X})$  ist durch Multiplikation mit  $k$  gegeben. Die von  $\tau$  induzierte Abbildung  $\tau_*: H_n(X) \rightarrow H_n(\tilde{X})$  heißt **Transferhomomorphismus**.

**Def.** Ist nun  $k = 2$  so gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow C_*(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} C_*(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0.$$

Die davon induzierte lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_*(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_*(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{*-1}(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots$$

heißt **Transfersequenz**.

**Def.** Eine Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  heißt **ungerade**, falls

$$\forall x \in S^n : f(-x) = -f(x).$$

**Prop.** Jede ungerade Abbildung hat ungeraden Abbildungsgrad.

**Satz (Borsuk-Ulam).** Sei  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann gibt es  $x \in S^n$  mit  $f(x) = f(-x)$ .

**Satz (Ham-Sandwich-Theorem).** Seien  $K_1, \dots, K_n \subset \mathbb{R}^n$  Lebesguemessbar und beschränkt. Dann gibt es eine Hyperebene  $H \subset \mathbb{R}^n$ , die jeden Teilraum genau halbiert.

**Def.** Die  $n$ -te **Bettizahl**  $b_n(X)$  eines topologischen Raumes  $X$  ist der Rang von  $H_n(X)$  (falls dieser endlich ist).

**Def.** Sei  $X$  ein CW-Komplex. Für  $n \geq 0$  sei  $c_n$  die Anzahl der  $n$ -Zellen in  $X$ . Dann heißt

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \quad \text{Eulercharakteristik von } X.$$

**Satz.** Es gilt  $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n(X)$ .

**Bsp.** Die **orientierte Fläche vom Geschlecht  $g$** ,  $\Sigma_g$ , entsteht durch Verkleben der Randsegmente

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$$

eines  $4g$ -Eckes. Es gilt  $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ .

**Korollar** (Eulersche Polyederformel). Sei  $P \subset \mathbb{R}^3$  ein konvexes Polyeder. Sei  $e$  die Anzahl der Ecken,  $k$  die Anzahl der Kanten und  $f$  die Anzahl der Flächen. Dann ist  $e - k + f = 2$ .

*Bem.* Sind  $X$  und  $Y$  endlich-dim. CW-Komplexe. Dann ist auch  $X \times Y$  ein endlich-dimensionaler CW-Komplex. Ist  $X$  oder  $Y$   $\infty$ -dimensional, so gibt es auch einen Produktkomplex, doch dieser trägt eine i. A. feinere Topologie als der Produktraum  $X \times Y$ .

**Prop.** Seien  $X$  und  $Y$  endliche CW-Komplexe. Dann gilt

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

**Def.** Sei  $X$  ein endlicher Simplicialkomplex und  $f: X \rightarrow X$  stetig. Wir erhalten für alle  $n \geq 0$  eine induzierte Abbildung

$$f_n: H_n(X)/\text{Torsion} \rightarrow H_n(X)/\text{Torsion}.$$

Die **Lefschetzzahl** von  $f$  ist definiert als Summe

$$L(f) := \sum (-1)^n \text{tr } f_n.$$

**Bsp.**  $L(\text{id}_X) = \chi(X)$

**Satz (Lefschetzer Fixpunktsatz).**

Wenn  $L(f) \neq 0$ , dann hat  $f$  einen Fixpunkt.

**Def.** Eine  $n$ -dimensionale topologische **Mannigfaltigkeit** ist ein Hausdorffraum  $M$ , sodass jeder Punkt in  $M$  eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist.

*Bem.* Man fordert oft zusätzlich, dass  $M$  das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

**Def.** Eine kompakte (randlose) Mft heißt **geschlossen**.

**Def.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann heißt

$$H_n(X|A) := H_n(X, X - A)$$

**lokale Homologie** von  $X$  bei  $A$ .

**Def.** Sei  $M$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit. Eine **lokale Orientierung** von  $M$  bei  $x \in M$  ist gegeben durch Wahl eines Erzeugers

$$\mu_x \in H_n(M|x) \cong \mathbb{Z}.$$

**Lemma.** Eine Wahl einer lokalen Orientierung bei  $x \in \mathbb{R}^n$  legt eindeutig eine lokale Orientierung für alle  $y \in \mathbb{R}^n$  fest.

**Def.** Sei  $M$  eine Mft. Eine **Orientierung** von  $M$  ist eine Abbildung

$$x \in M \mapsto \mu_x \in H_n(M|x),$$

sodass für alle  $x \in M$  eine offene Kugel  $U$  um  $x$  und ein Erzeuger  $\mu_U \in H_n(X|U)$  existiert, sodass für alle  $y \in U$  die lokale Orientierung  $\mu_y$  durch Einschränkung von  $\mu_U$  gegeben ist.

**Def.** Falls eine Orientierung von  $M$  existiert, so heißt  $M$  **orientierbar**.

**Prop.** Sei  $M$  eine zshgde orientierbare Mft. Dann existieren genau zwei Orientierungen von  $M$ .

**Def.** Sei  $M$  eine  $n$ -Mft. Setze

$$\tilde{M} := \{\mu_x \mid x \in M \text{ und } \mu_x \in H_n(M|x) \text{ ist lokale Orientierung an } x.\}$$

Die Topologie auf  $M$  wird erzeugt von folgenden Mengen: Sei  $U \subset M$  offen,  $\mu_U \in H_n(M|U)$ . Dann ist die Menge

$$\{\mu_U|_y \mid y \in U\} \subset \tilde{M}$$

offen. Dies definiert eine zweiblättrige Überlagerung  $\tilde{M}$  von  $M$ .

**Prop.**  $\tilde{M}$  ist orientierbar.

**Prop.** Sei  $M$  eine Mft. Dann ist  $M$  genau dann orientierbar, wenn  $\tilde{M} \rightarrow M$  eine triviale Überlagerung ist.

**Korollar.** Ist  $M$  eine zshgde Mft und besitzt  $\pi_1(M)$  keine Untergruppe vom Index 2, so ist  $M$  orientierbar.

**Prop.** Sei  $M$  eine kompakte zshgde  $n$ -Mft.

- Falls  $M$  orientierbar ist, dann ist für alle  $x \in M$  die kanonische Abbildung  $H_n(M) \rightarrow H_n(M|x)$  ein Isomorphismus. Insbesondere gilt  $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ .
- Falls  $M$  nicht orientierbar ist, gilt  $H_n(M) = 0$ .
- $H_n(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  unabhängig von Orientierbarkeit.
- $H_i(M) = 0$  für  $i > n$ .

**Def.** Sei  $M$  ein  $n$ -Mft und  $G$  eine abelsche Gruppe. Eine **verallgemeinerte  $G$ -Orientierung** ist eine Zuordnung

$$x \in M \mapsto \mu_x \in H_n(M|x; G),$$

sodass für alle  $x \in M$  eine offene Kugel  $U$  um  $x$  und ein Element  $\mu_U \in H_n(X|U)$  existiert, sodass für alle  $y \in U$  die lokale Orientierung  $\mu_y$  durch Einschränkung von  $\mu_U$  gegeben ist.

**Prop.** Sei  $M$  eine zshgde  $n$ -Mft. Dann ist  $M$  genau dann orientierbar, wenn es eine verallgemeinerte  $\mathbb{Z}$ -Orientierung von  $M$  gibt, die an einem Punkt von 0 verschieden ist.

**Lemma.** Sei  $M$  eine  $n$ -Mft,  $G$  eine ab. Gruppe und  $A \subset M$  kompakt.

- Ist  $x \mapsto \mu_x$  eine verallgemeinerte  $G$ -Orientierung von  $M$ , so gibt es genau eine Klasse  $\alpha_A \in H_n(M|A; G)$ , deren Bild in  $H_n(M|x; G)$  für alle  $x \in M$  mit  $\mu_x$  übereinstimmt.
- $H_i(M|A; G) = 0$  für  $i > n$ .

**Korollar.** Sei  $M$  eine zshgde kompakte  $n$ -Mft. Dann ist  $M$  genau dann orientierbar, wenn  $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ . Dann entspricht jeder Erzeuger von  $H_n(M)$  einer Orientierung von  $M$ . Andernfalls gilt  $H_n(M) = 0$ .

**Prop.** Sei  $M$  eine zshgde nichtkompakte  $n$ -Mft. Dann ist  $H_{\geq n}(M; G) = 0$  für beliebige Koeffizienten  $G$ .

**Satz.** Sei  $M$  eine kompakte  $n$ -Mft. Dann ist  $H_*(M; \mathbb{Z})$  in allen Graden endlich erzeugt und  $H_{>n}(M; \mathbb{Z}) = 0$ .

**Def.** Die **Eulercharakteristik** einer kompakten  $n$ -Mft ist

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^n \text{rk } H_i(M; \mathbb{Z}) = \sum_{i=0}^n b_i.$$

**Def.** Ein topol. Raum  $X$  heißt **lokal zusammenziehbar**, falls für jede Umgebung  $U \subset X$  eines beliebigen Punktes  $x \in U$  eine weitere Umgebung  $V \subset U$  von  $x$  existiert, sodass die Inklusion  $V \hookrightarrow U$  homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

**Lemma.** Mannigfaltigkeiten sind lokal zusammenziehbar.



**Satz.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  lokal zusammenziehbar und abgeschlossen. Dann gibt es eine Umgebung  $U \supset K$  von  $K$ , sodass die Inklusion  $K \hookrightarrow U$  ein Retrakt ist.

**Def.** Ein topol. Raum  $X$  ist ein **Euklidischer Umgebungsretrakt**, falls eine topol. Einbettung  $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  existiert und für jede solche Einbettung das Bild Retrakt einer offenen Umgebung ist.

**Korollar.** Kompakte topologische Mfden sind Euklidische Umgebungsretrakte.

**Prop.** Sei  $X$  ein CW-Komplex und  $Y$  ein topologischer Raum. Sei  $f : X^{n-1} \rightarrow Y$  stetig. Dann sind äquivalent:

- $f$  lässt sich zu einer stetigen Abbildung  $X^n \rightarrow Y$  fortsetzen.
- Alle Kompositionen  $f \circ \phi_\alpha : \partial D_\alpha^n \rightarrow Y$  sind homotop zu konstanten Abbildungen. Hierbei sind  $\phi_\alpha : \partial D_\alpha \rightarrow X^{n-1}$  die anklebenden Abbildung der  $n$ -Zellen.

**Prop.** Es gibt einen kanonischen Morphismus  $h : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ . Wenn  $X$  wegzusammenhängend ist, so ist  $X$  surjektiv und der Kern von  $h$  ist die Kommutator-Untergruppe  $K(\pi_1(X, x_0))$ . Wir erhalten dann einen Iso  $\pi_1(X)_{\text{ab}} \rightarrow H_1(X)$ .

**Def.** Ein **Kokettenkomplex**  $C^*$  ist eine Folge  $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$  von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen  $\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$  mit der Eigenschaft  $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ . Analog zu Kettenkomplexen sind **Kozykel**, **Koränder** und **Kohomologiegruppen**  $H^n(C^*) := \ker \delta_n / \text{im } \delta_{n-1}$  des Kokettenkomplex definiert.

**Def.** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard und  $G$  eine abelsche Gruppe. Dann heißt  $(C^*(X, A; G), \delta^*)$  mit

$$C^n(X, A; G) := \text{Hom}(C_n(X, A), G), \quad \delta^n := \text{Hom}(\partial_{n+1}, G)$$

**singulärer (rel.) Kokettenkomplex** von  $X$  mit Koeffizienten in  $G$ . Die  $n$ -te **singuläre Kohomologie** mit Koeffizienten in  $G$  ist

$$H^n(X, A; G) := H^n(C^*(X, A; G)).$$

**Notation.** •  $H^n(X; G) := H^n(X, \emptyset; G)$

- $H^n(X, A) := H^n(X, A; \mathbb{Z})$

*Bem.*  $H^n(-; G)$  ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Raumpaare in die Kategorie der abelschen Gruppen.

**Lemma.** Für jede abelsche Gruppe  $G$  ist  $\text{Hom}(-, G)$  linksexakt: Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine k. e. S. von abelschen Gruppen. Dann ist

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, G) \rightarrow \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(A, G) \quad \text{exakt.}$$

**Def.** Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine k. e. S. in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$ . Die Sequenz heißt **spaltend**, falls sie isomorph zur k. e. S.  $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus C \rightarrow C$  ist.

**Prop.** Für eine Sequenz  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  sind äquivalent:

- Die Sequenz spaltet.
- Es existiert eine Retraktion  $r : B \rightarrow A$  mit  $r \circ f = \text{id}_A$ .
- Es existiert ein Schnitt  $s : C \rightarrow B$  mit  $g \circ s = \text{id}_C$ .

**Prop.** Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  abelsche Kategorien,  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein additiver Funktor und  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine spaltende k. e. S. in  $\mathcal{A}$ . Dann ist auch  $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$  spaltend exakt.

*Bem.* Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard. Man erhält aus der k. e. Sequenz

$$0 \rightarrow C^n(A) \rightarrow C^n(X) \rightarrow C^n(X, A) \rightarrow 0$$

durch Anwenden von  $\text{Hom}(-, G)$  eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow C^n(X, A; G) \rightarrow C^n(X; G) \rightarrow C^n(A; G) \rightarrow 0.$$

Daraus erhält man wiederum eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H^*(X, A; G) \rightarrow H^*(X; G) \rightarrow H^*(A; G) \rightarrow H^{*+1}(X, A; G) \rightarrow \dots$$

**Prop.** Seien  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotope Abbildungen von Raumpaaren. Dann gilt  $f^* = g^* : H^*(Y, B; G) \rightarrow H^*(X, A; G)$ .

**Satz.** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard,  $U \subset A$  mit  $\bar{U} \subset \text{int } A$ . Dann induziert die Inklusion  $(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$  Isomorphismen

$$H^n(X, A; G) \rightarrow H^n(X - U, A - U; G) \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

*Bem.* Die kontravarianten Funktoren  $H^n(-; G) : \mathbf{Top}(2) \rightarrow \mathbf{AbGrp}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  definieren eine **Kohomologietheorie** im Sinne von Eilenberg und Steenrod.

**Def.** Die **reduzierte Kohomologie**  $\tilde{H}^n(X; G)$  mit Koeff. in  $G$  eines topol. Raumes  $X$  ist die Homologie des Kokettenkomplexes, der durch Anwenden von  $\text{Hom}(-, G)$  aus dem augmentierten Komplex

$$\dots \rightarrow C_2(X) \rightarrow C_1(X) \rightarrow C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad \text{entsteht.}$$

**Prop.** Sei  $X = \cup_{i \in I} U_i$  die Zerlegung von  $X$  in Wegzshgskmpnnten. Dann induzieren die Inklusionen  $U_i \hookrightarrow X$  einen kanonischen Iso

$$G^*(X; G) \cong \prod_{i \in I} H^*(X; G).$$

**Satz.** Seien  $A, B \subset X$  mit  $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) = X$ . Dann gibt es in Kohomologie eine Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\dots \rightarrow H^*(X; G) \rightarrow H^*(A; G) \oplus H^*(B; G) \rightarrow H^*(A \cap B; G) \rightarrow H^{*+1}(X; G) \rightarrow \dots$$

**Def.** Sei  $X$  ein  $\Delta$ -Komplex und  $A \subset X$  ein Unterkomplex. Dann ist  $(C_\Delta^*(X, A; G), \delta^*)$  der Unterkomplex von  $C^*(X, A; G)$  mit

$$C_\Delta^n(X, A; G) := \text{Hom}(C_\Delta^n(X, A), G).$$

Die Homologie dieses Komplexes wird mit  $H_\Delta^*(X, A; G)$  bezeichnet.

**Prop.** Die Inklusion  $C_\Delta^*(X, A) \hookrightarrow C_*(X, A)$  induziert einen Iso

$$H^*(X, A; G) \rightarrow H_\Delta^*(X, A; G).$$

**Def.** Sei  $X$  ein CW-Komplex. Der **zelluläre Kokettenkomplex**  $(C_{\text{cell}}^*(X; G), \delta_{\text{cell}})$  ist definiert durch

$$C_{\text{cell}}^n(X, G) := H^n(X^n, X^{n-1}; G)$$

mit  $\delta_n$  dem verbindenden Homomorphismus in der l. e. Kohomologiesequenz des Raumtripels  $(X^{n+1}, X^n, X^{n-1})$ .

**Prop.**  $H^*(C_{\text{cell}}^*(X; G)) \cong H^*(X; G)$

*Bem.*  $C_n(X; G) \cong C_n(X) \otimes G$

**Prop.** Für jede ab. Gruppe  $G$  ist der Funktor  $-\otimes G$  rechtsexakt: Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine k. e. S. abelscher Gruppen. Dann ist

$$A \otimes G \rightarrow B \otimes G \rightarrow C \otimes G \rightarrow 0 \quad \text{exakt.}$$

**Def.** Sei  $H$  eine ab. Gruppe. Eine **freie Auflösung** von  $H$  ist ein azyklischer Kettenkomplex

$$\dots \rightarrow F_3 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_1 \rightarrow H \rightarrow 0 \quad (\text{kurz: } F_* \rightarrow H),$$

bestehend aus freien abelschen Gruppen  $F_i$ ,  $i \geq 0$ .

**Prop.** Seien  $F_* \rightarrow J$  und  $G_* \rightarrow K$  freie Auflösungen. Dann existiert zu jedem Homomorphismus  $\alpha : J \rightarrow K$  eine Kettenabbildung  $\alpha_* : F_* \rightarrow K_*$ , sodass  $(F_0 \rightarrow K \xrightarrow{\alpha} J) = (F_0 \xrightarrow{\alpha_0} G_0 \rightarrow K)$ . Die Kettenabbildung  $\alpha_*$  ist eindeutig bis auf Kettenhomotopie.

**Def.** Seien  $G$  und  $H$  ab. Gruppen und  $F_* \rightarrow H$  eine freie Auflösung.

$$\mathbf{Tor}_n(H, G) := H_n(F_* \otimes G), \quad \mathbf{Ext}^n(H, G) := H^n(\text{Hom}(F_*, G)).$$

**Prop.** Die Definition von  $\text{Tor}_n$  und  $\text{Ext}^n$  hängt nicht von der Wahl der Auflösung ab (bis auf Isomorphie).

**Prop.**  $\text{Tor}_n$  und  $\text{Ext}^n$  definieren Funktoren

$$\begin{aligned} \text{Tor}_n : \mathbf{AbGrp} \times \mathbf{AbGrp} &\rightarrow \mathbf{AbGrp}, \\ \text{Ext}^n : \mathbf{AbGrp}^{\text{op}} \times \mathbf{AbGrp} &\rightarrow \mathbf{AbGrp}. \end{aligned}$$

**Prop.** Jede abelsche Gruppe besitzt eine Auflösung der Länge  $\leq 2$ .

**Korollar.**  $\text{Tor}_{\geq 2}(G, H) = 0 = \text{Ext}_{\geq 2}^{\geq 2}(G, H)$  für ab. Gruppen  $G, H$

**Notation.**  $\text{Tor}(G, H) := \text{Tor}_1(G, H)$ ,  $\text{Ext}(G, H) := \text{Ext}^1(G, H)$

**Prop** (Ext-Rechenregeln). •  $\text{Ext}^0(G, H) \cong \text{Hom}(G, H)$

- $\text{Ext}(\oplus_i H_i, G) \cong \prod_i \text{Ext}(H_i, G)$  •  $\text{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) = G/nG$
- Ist  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine k. e. S. ab. Gruppen und  $H$  eine ab. Gruppe, so erhalten wir eine induzierte exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(H, A) \rightarrow \text{Hom}(H, B) \rightarrow \text{Hom}(H, C) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}(H, A) \rightarrow \text{Ext}(H, B) \rightarrow \text{Ext}(H, C) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Prop** (Tor-Rechenregeln). •  $\text{Tor}_0(A, B) \cong A \otimes B$

- $\text{Tor}_0(A, B) \cong A \otimes B$  •  $\text{Tor}(A, B) \cong \text{Tor}(B, A)$
- $\text{Tor}(\oplus_i A_i, B) \cong \oplus_i \text{Tor}(A_i, B)$
- $\text{Tor}(A, B) \cong \text{Tor}(T(A), B)$  mit  $T(A) < A$  Torsionsuntergruppe

- $\text{Tor}(A, B) = 0$ , falls  $A$  torsionsfrei •  $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n) \cong \ker(A \xrightarrow{n} A)$
- Ist  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine k. e. S. ab. Gruppen und  $H$  eine ab. Gruppe, so erhalten wir eine induzierte exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Tor}(A, D) \rightarrow \text{Tor}(B, D) \rightarrow \text{Tor}(C, D) \rightarrow \\ \rightarrow A \otimes D \rightarrow B \otimes D \rightarrow C \otimes D \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Satz (Universelles Koeffiziententheorem für Homologie).** Für jeden Raum  $X$  und für jede ab. Gruppe  $G$  existiert eine k. e. S.

$$0 \rightarrow H_n(X) \otimes G \rightarrow H_n(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X), G) \rightarrow 0.$$

Diese ist natürlich in  $X$  und  $G$ . Die Sequenz spaltet, der Spalt ist allerdings nur natürlich in  $G$ , nicht in  $X$ .

**Satz (Universelles Koeffiziententheorem für Kohomologie).** Für jeden Raum  $X$  und für jede ab. Gruppe  $G$  existiert eine k. e. S.

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X), G) \rightarrow H^n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), G) \rightarrow 0.$$

Diese ist natürlich in  $X$  und  $G$ . Die Sequenz spaltet, der Spalt ist allerdings nur natürlich in  $G$ , nicht in  $X$ .

**Korollar.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, die in Homologie mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten in jedem Grad Isomorphismen induziert. Dann gilt Gleiches für Homologie und Kohomologie mit beliebigen Koeffizienten  $G$ .

**Satz.** Für jeden Raum  $X$  und für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe  $G$  existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^n(X; \mathbb{Z}) \otimes G \rightarrow H^n(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H^{n+1}(X; \mathbb{Z}), G) \rightarrow 0.$$

**Def.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $X$  ein topol. Raum. Das **Cup-Produkt**  $\phi \cup \psi \in H^{k+l}(X; R)$  von Koketten  $\phi \in H^k(X; R)$  und  $\psi \in H^l(X; R)$  ist definiert durch

$$(\phi \cup \psi)(\sigma) := \phi(\sigma|_{\langle v_0, \dots, v_k \rangle}) \cdot \psi(\sigma|_{\langle v_{k+1}, \dots, v_{k+l} \rangle}).$$

**Lemma.** •  $\partial(\phi \cup \psi) = (\partial\phi) \cup \psi + (-1)^k \phi \cup \partial\psi$

- Assoziativität:  $(\phi \cup \psi) \cup \omega = \phi \cup (\psi \cup \omega)$
- Natürlichkeit:  $f^*(\phi \cup \psi) = f^*(\phi) \cup f^*(\psi)$  für  $f : X \rightarrow Y$  stetig
- Das Tensorprodukt induziert eine  $R$ -bilineare Abbildung

$$C^k(X; R) \times C^l(X; R) \rightarrow C^{k+l}(X; R)$$

und somit eine Kettenabbildung ausgehend von dem Tensorproduktkomplex  $C^*(X; R) \otimes_R C^*(X; R) \rightarrow C^*(X; R)$ .

**Korollar.** Das Cup-Produkt induziert eine bilineare Abbildung

$$\cup : H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R).$$

Diese macht  $H^*(X; R)$  zu einer graduierten, assoziativen  $R$ -Algebra mit Einselement  $[\sum \sigma \lambda_\sigma \sigma \mapsto \sum \sigma \lambda_\sigma] \in H^0(X; R)$

*Bem.* Seien  $A, B \subset X$  offene Teilmengen oder Unterkomplexe. Dann gibt es ein **relatives Cup-Produkt**

$$C^k(X, A; R) \times C^l(X, B; R) \rightarrow C^{k+l}(X, A+B; R).$$

**Satz.** Sei  $R$  kommutativ. Dann ist  $H^*(X; R)$  graduiert kommutativ, d. h.  $\forall \alpha \in H^k(X; R) : \forall \beta \in H^l(X; R) : \alpha \cup \beta = (-1)^{kl} \beta \cup \alpha$ .

**Def.** Seien  $X$  und  $Y$  topol. Räume. Das **Kreuzprodukt** (auch: externes Cup-Produkt) ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \times : H^k(X; R) \times H^l(Y; R) &\rightarrow H^{k+l}(X \times Y; R), \\ ([c], [d]) &\mapsto [p_X^*(c) \cup p_Y^*(d)]. \end{aligned}$$

Für offene Teilmengen oder Unterkomplexe  $A \subset X$  und  $B \subset X$  gibt es ein relatives Kreuzprodukt

$$\times : H^k(X, A; R) \times H^l(Y, B; R) \rightarrow H^{k+l}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R).$$

**Satz.** Seien  $k, l \geq 0$ ,  $I^n := [0, 1]^n$  der  $n$ -dimensionale Würfel. Seien  $c^k \in H^k(I^k, \partial I^k; R) \cong R$  und  $c^l \in H^l(I^l, \partial I^l; R) \cong R$  Erzeuger (als  $R$ -Modul). Dann bildet das Kreuzprodukt

$$\times : H^k(I^k, \partial I^k; R) \times H^l(I^l, \partial I^l; R) \rightarrow H^{k+l}(I^{k+l}, \partial I^{k+l}; R)$$

das Element  $(c^k, c^l)$  auf einen Erzeuger ab.

**Satz.** Seien  $c \in H^k(\mathbb{R}^k | 0; R)$  und  $d \in H^l(\mathbb{R}^l | 0; R)$  Erzeuger. Dann ist  $c \times d$  ein Erzeuger von  $H^{k+l}(\mathbb{R}^{k+l} | 0; R)$ .

**Satz.** Sei  $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$  (bzw.  $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ ) ein Erzeuger. Da  $H^{n+1}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = 0$  (bzw.  $H^{2n+2}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) = 0$ ), erhalten wir eine induzierte Abbildung

$$\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \quad / \quad \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \rightarrow H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}).$$

Diese ist ein Isomorphismus von graduierten Ringen.

**Def.** Sei  $X$  ein topol. Raum und  $R$  ein kommutativer Ring. Für  $k \geq l$  ist das **Cap-Produkt** die  $R$ -bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \cap : C_k(X; R) \times C^l(X; R) &\rightarrow C_{k-l}(X; R) \\ (\sigma, \phi) &\mapsto \phi(\sigma|_{\langle v_0, \dots, v_l \rangle}) \cdot \sigma|_{\langle v_{l+1}, \dots, v_{k+l} \rangle}. \end{aligned}$$

Diese induziert in (Ko-)Homologie eine Abbildung

$$\cap : H_k(X; R) \otimes H^l(X; R) \rightarrow H_k(X; R).$$

Relative Version: Seien  $A, B \subset X$  offen, dann gibt es

$$\cap : H_k(X, A \cup B; R) \times H^l(X, A; R) \rightarrow H_{k-l}(X, B; R).$$

**Def.** Das Tensorprodukt zweier Kettenkomplexe  $(C_*, \partial_*^C)$  und  $(D_*, \partial_*^D)$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} (C \otimes D)_n &:= \bigoplus_{k+l=n} C_k \otimes D_l \\ \delta_n^{C \otimes C'} &:= \bigoplus_{k+l=n} (\partial_k^C \otimes \text{id}_{D_l} + (-1)^k \text{id}_{C_k} \otimes \partial_l^{D'}) \end{aligned}$$

**Satz** (Eilenberg-Zilber). Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Es existiert eine natürliche (in  $X$  und  $Y$ ) Kettenhomotopieäquivalenz

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \xrightleftharpoons[\theta]{} C_*(X \times Y).$$

Die Abbildungen  $\times$  und  $\theta$  sind im Grad 0 die kanonischen Abb.

**Def.** Seien  $A$  und  $B$  graduierte kommutative  $R$ -Algebren,  $R$  ein kommutativer Ring. Dann ist die graduiert kommutative Tensoralgebra  $A \otimes_R B$  definiert durch

$$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{k+l=n} A_k \otimes B_l, \quad (a \otimes b)(c \otimes d) := (-1)^{|b||c|} ac \otimes bd.$$

**Satz** (Künneth-Thm für Homologie). Es gibt eine natürliche k. e. S.

$$0 \rightarrow (H_*(X) \otimes H_*(Y))_n \rightarrow H_n(X \times Y) \rightarrow \text{Tor}(H_*(X), H_*(Y))_{n-1} \rightarrow 0$$

Die zweite Abbildung wird durch das Kreuzprodukt induziert. Die Sequenz spaltet, aber nicht natürlich.

**Satz** (Künneth-Thm für Kohomologie). Sei  $R$  ein kommutativer Hauptidealring mit 1. Falls  $H_*(X; R)$  oder  $H_*(Y; R)$  in jedem Grad ein endlich erzeugter  $R$ -Modul ist, so gibt es eine natürliche k. e. S.

$$0 \rightarrow (H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R))^n \rightarrow H^n(X \times Y; R) \rightarrow \text{Tor}(H^*(X; R), H^*(Y; R))^{n-1}$$

Dabei ist die zweite Abbildung das kohomologische Kreuzprodukt.

**Def.** Die **Kohomologie mit kompakten Träger**  $H_c^*(X)$  mit Koeffizienten  $R$  eines topologischen Raumes  $X$  ist die Kohomologie des Kokettenkomplexes  $(C_c^*, \delta_c^*)$  mit

$$C_c^i(X) := \varinjlim_{K \subset X} C^i(X, X - K; R),$$

$$\delta_c^i := \varinjlim_{K \subset X} (\delta^i : C^i(X, X - K; R) \rightarrow C^{i+1}(X, X - K; R))$$

Der direkte Limes läuft dabei über alle kompakten Teilmengen  $K$ .

**Satz (Poincaré-Dualität).** Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $M$  eine geschlossene orientierte  $n$ -Mft mit Orientierungsklasse  $[M] \in H_n(M; R)$ . Dann ist die Abbildung

$$D : H^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R), \quad \alpha \mapsto [M] \cap \alpha$$

ein Isomorphismus für alle  $k$ .

**Satz** (Poincaré-Dualität, allg.). Sei  $R$  ein komm. Ring mit 1 und  $M$  eine orientierte  $n$ -Mft. Dann gibt es für alle kompakten Teilmengen  $K \subset X$  einen Erzeuger  $\mu_K \in H_n(M, M - K; R)$  der lokal zur gewählten Orientierung einschränkt. Die Abbildungen

$$H^k(M, M - K; R) \rightarrow H_{n-k}(M, M; R), \quad x \mapsto \mu_K \cap x$$

induzieren im direkten Limes eine Dualitäts-Abbildung

$$D_M : H_c^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R).$$

Diese ist ein Isomorphismus für alle  $k$ .

**Bsp** (Homologie von wichtigen Räumen).

$$\tilde{H}_i(S^n) = \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; R) = \begin{cases} R, & \text{wenn } i = 0, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{wenn } i < n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{wenn } i \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i \leq 2n \text{ und } i \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(T^n) = H_i(S^{n-1}) = \mathbb{Z} \binom{n}{i}$$

$$\tilde{H}_i(\text{Kleinsche Flasche}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{wenn } i = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$