

Zusammenfassung Numerik von PDEs

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine DGL der Form

$$F(x, u, Du, \dots, D^k u) = 0$$

heißt **partielle DGL/PDE** der Ordnung $k \geq 1$, wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist.

Def (Klassifikation von PDEs).

- Die PDE heißt **linear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

mit Funktionen $a_\alpha, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt.

- Die PDE heißt **semilinear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u) = 0$$

besitzt, wobei $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind.

- Die PDE heißt **quasilinear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u) D^\alpha u + a_0(x, u, Du, \dots, D^{k-1} u) = 0$$

hat, wobei $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k}$ gegeben sind.

- Die PDE heißt **nichtlinear**, falls die Ableitungen der höchsten Ordnung nicht linear vorkommen.

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Eine PDE der Form

$$F(x, u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1} \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_1} \partial_{x_n} u, \dots, \partial_{x_n} \partial_{x_n} u) = 0$$

heißt **PDE zweiter Ordnung**.

Notation. $p_i := \partial_{x_i} u$, $p_{ij} := \partial_{x_i x_j}^2 u$

$$M(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_{11}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial p_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial p_{n1}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial p_{nn}} \end{pmatrix} = M(x)^T.$$

Def (Typeneinteilung für PDEs der 2. Ordnung).

Obige PDE zweiter Ordnung heißt

- elliptisch** in x , falls die Matrix $M(x)$ positiv o. definit ist.
- parabolisch** in x , falls genau ein EW von $M(x)$ gleich null ist und alle anderen dasselbe Vorzeichen haben.
- hyperbolisch** in x , falls genau ein EW ein anderes Vorzeichen als die anderen EWe hat.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt.

- $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ ist der Raum aller auf $\overline{\Omega}$ stetigen Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) := \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|u(x)\|$. (Damit wird $(\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)})$ zu einem Banach-Raum.)
- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N}$ ist der Raum aller auf $\overline{\Omega}$ k -mal stetig diff'baren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden können.

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)}$$

- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid H_\alpha(u, \overline{\Omega}) = \sup_{x,y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} < \infty\}$ heißt **Raum aller gleichmäßig Hölder-stetigen Funktionen zum Exponent $\alpha \in [0, 1]$** .

Bem. • $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ heißt **Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen**,

- Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig
- $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid \forall |\gamma| = k : D^\gamma u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)\}$

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} := \|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)} + \sum_{|\gamma|=k} H_\alpha(D^\gamma u, \overline{\Omega})$$

Damit wird $(\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)})$ zu einem Banach-Raum.

Bsp. Betrachte $u(x) = |x|^\beta$ auf $(-1, 1) = \Omega$. Dann ist

$$\frac{|u(x) - u(0)|}{|x - 0|^\alpha} = |x|^{\beta-\alpha}$$

genau dann beschränkt, falls $\beta \geq \alpha$. In dem Fall ist u Hölder-stetig zum Exponent α .

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Das Gebiet Ω gehört zur Klasse $\mathcal{C}^{k,\alpha}$, wenn in jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung in $\partial\Omega$ existiert, die sich in einem geeigneten Koordinatensystem als ein Graph einer Funktion aus $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ darstellen lässt und Ω liegt lokal immer auf einer Seite von $\partial\Omega$.

Satz (Gauß'scher Integralsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet und $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n u_i \nu_i \, d\rho(x) = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu \, d\rho(x),$$

wobei $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ der äußere Normalenvektor an den Rand von Ω ist.

$$\mathcal{L}u = f \text{ in } \Omega \text{ (PDE)}$$

$$\mathcal{R}u = g \text{ auf } \partial\Omega \text{ (Randbedingung)}$$

wobei $\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$ (linearer Differentialoperator) mit $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j}$ symmetrisch. Randbedingungen:

- Dirichlet-Randbedingung:** $u = g$ auf $\partial\Omega$
- Neumann-Randbedingung:** $(A(x)\nabla u) \cdot \nu = g$ auf $\partial\Omega$
- Robin-Randbedingung:** $A(x)\nabla u \cdot \nu + \delta u = g$ auf $\partial\Omega$

Bem. Man kann auch auf verschiedenen Teilstücken des Randes verschiedene Bedingungen stellen.

Bem. Falls a_{ij} differenzierbar sind, kann \mathcal{L} in Divergenzform geschrieben werden:

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = - \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right)$$

Voraussetzungen:

- \mathcal{L} ist **gleichmäßig elliptisch**, d. h.

$$\exists \lambda_0 > 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \Omega : \xi^T A(x) \xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2$$

Dabei heißt λ_0 **Elliptizitätskonstante** Bemerkung: $\mathcal{L} = f$ ist elliptisch auf $\Omega \iff A(x) > 0$ (spd) für alle $x \in \Omega$

- $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$

Def. Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ heißt **klassische Lsg** vom (RWP) mit $Ru := u$, wenn die beiden Gleichungen in (RWP) in jedem Punkt von Ω bzw. des Randes $\partial\Omega$ erfüllt sind.

Satz (Maximumsprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Sei $u \in \mathcal{C}^2(\omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ eine Lösung vom (RWP) und $f \leq 0$ in Ω und $c \equiv 0$. Dann nimmt u sein Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an, d. h.

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} g(x)$$