Zusammenfassung Homologische Algebra

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Dies ist eine übersetzte, korrigierte Zusammenfassung des Buches „Methods of Homological Algebra“ von S. I. Gelfand und Y. I. Manin.

Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie.

Konvention. Man übersetzt ein Diagramm folgendermaßen in eine Proposition: Es wird über Objekte und über Morphismen, die als durchgezogener Pfeil dargestellt werden, allquantifiziert, sofern das Obj. oder der Morph. noch nicht eingeführt wurde. Die Behauptung ist dann die Existenz der gestrichelten Morphismen, die das Diagramm kommutativ machen. Wenn der Morphismus mit einem Ausrufezeichen markiert ist, so wird eindeutige Existenz gefordert.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **lokal klein**, wenn $\mathrm{Hom}(X,Y)$ für alle $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge (keine echte Klasse) ist. Sie heißt **klein**, wenn auch die Klasse ihrer Objekte eine Menge ist. Sie heißt **endlich**, wenn Objekt- und Hom-Mengen sogar nur endlich sind.

Def. Sei **Cat** die Kategorie mit kleinen Kategorien als Objekten und Funktoren als Morphismen.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{D}$ heißt **Unterkategorie** einer Kategorie $\mathcal{C}$ (notiert $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$), wenn für alle geeigneten X, Y, f, g gilt:

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \quad \text{und} \quad f \circ_{\mathcal{D}} g = f \circ_{\mathcal{C}} g.$$

Def. Eine Unterkategorie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **voll**, wenn

$$\forall\, X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \,:\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt …

- … **treu**, wenn für alle $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ die Abbildung $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ injektiv ist.
- … **voll**, wenn diese Abb. für alle $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ surjektiv ist.

Bem. Die Einbettung einer (vollen) Unterkategorie ist ein (voll-)treuer Funktor.

Def.
- Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **initiales Objekt**, falls für alle $Y \in \mathrm{Ob}(Y)$ genau ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ existiert.
- Ein Objekt $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **terminales Objekt**, falls für alle $Y \in \mathrm{Ob}(Y)$ genau ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ existiert.

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein **Kategorienäquivalenz**, falls es einen Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ mit $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ und $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt. Die Funktoren F und G heißen dann zueinander **quasiinvers** und die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ äquivalent.

Prop. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist genau dann eine Kategorienäquivalenz, wenn:
- F ist volltreu,
- $\forall\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \,:\, \exists\, X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \,:\, Y \cong F(X)$

Bsp. Sei B ein lokal wegzshgder, semi-lokal einfach zshgder topol. Raum. Dann ist die Kategorie $\mathrm{Cov}(B)$ der Überlagerungen von B äquivalent zur Kategorie $[\pi(B), \mathbf{Set}]$ der mengenwertigen Funktoren auf dem Fundamentalgruppoid von B. Dabei ist

$$F : \mathrm{Cov}(B) \to [\pi(B), \mathbf{Set}], \quad F(p : \tilde{B} \to B) \coloneqq G_{\tilde{B},p},$$
$$G_{\tilde{B},p}(b \in B) \coloneqq p^{-1}(b), \quad G_{\tilde{B},p}(\gamma : [0,1] \to B)(\tilde{b} \in p^{-1}(\gamma(0))) \coloneqq \tilde{\gamma}(1),$$
$$\text{mit } \tilde{\gamma} \text{ Liftung von } \gamma \text{ mit } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{b}.$$

Def. Zwei Ringe A und B heißen **Morita-äquivalent**, wenn ihre Kategorien der (Links/Rechts)-Moduln äquivalent sind.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Der **kontravariante Hom-Funktor** $h_X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ist definiert durch

$$h_X(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}(Y,X), \quad h_X(h : Y' \to Y)(g : Y \to X) \coloneqq g \circ h.$$

Allgemeiner gibt es den Funktor $\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ mit

$$\mathrm{Hom}(h : Y' \to Y, f : X \to X')(g : Y \to X) \coloneqq f \circ g \circ h.$$

Notation. $\hat{\mathcal{C}} \coloneqq [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$

Def. Ein Element $x \in X(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}(Y,X)$ heißt **Y-Element** von X.

Def. Ein Funktor $F \in \mathrm{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$ wird **dargestellt** durch $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, falls $F \cong h_X$. Er heißt **darstellbar**, falls ein solches X existiert.

Def. Die **Yoneda-Einbettung** ist der Funktor

$$Y : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}, \quad X \mapsto h_X, \quad \phi \mapsto (\phi \circ - : X(Y) \to X'(Y))_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}.$$

Lem (**Yoneda**). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Es gibt eine nat. Bij.

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \cong F(X) \quad \text{für alle } X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ F \in \hat{\mathcal{C}}.$$

Kor. Die Yoneda-Einbettung ist volltreu und liefert eine Kat.-Äquivalenz von $\mathcal{C}$ und der vollen Unterkat. der darstellb. Funkt. in $\hat{\mathcal{C}}$.

Kor. Ein darstellbarer Funktor wird von genau einem Objekt dargestellt (bis auf Isomorphie).

Def. Das **Produkt** von $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist ein Obj. $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, das $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, $U \mapsto X(U) \times Y(U)$, $\phi \mapsto ((- \circ \phi) \times (- \circ \phi))$ darstellt.

Bem. Diese Definition ist äquivalent zur folgenden:
Das Produkt von X,Y ist ein Objekt $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $p_X : Z \to X$ und $p_Y : Z \to Y$, falls

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, dashed, "!"] & \\ X & Z \arrow[l, "p_X"] \arrow[r, "p_Y"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Def. Seien $\phi : X \to S$ und $\psi : Y \to S$ Abb. von Mengen. Das Faserprodukt von X und Y über S ist

$$X \times_S Y \coloneqq \{(x,y) \in X \times Y \mid \phi(x) = \psi(y)\}.$$

Def. Sei $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,S)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,S)$.
Das **Faserprodukt** von X und Y über S ist ein Obj. in $\mathcal{C}$, das den Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, $U \mapsto X(U) \times_{S(U)} Y(U)$ darstellt.

Bem. Das Faserprodukt von X und Y über S ist das Produkt von $X \xrightarrow{\phi} S$ und $Y \xrightarrow{\psi} S$ in der Scheibenkategorie $\mathcal{C}/S$.

Def. Eine **Gruppenstruktur** auf einem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist gegeben durch Gruppenstrukturen auf $\mathrm{Hom}(Y,X)$ für alle $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Gruppenmorphismen $\mathrm{Hom}(Y,X) \to \mathrm{Hom}(Y',X)$ für jeden Morphismus $\phi : Y' \to Y$ (die die offensichtlichen Axiome erfüllen).

Bem. Falls $\mathcal{C}$ ein term. Obj. 1 und die Produkte $X \times X$ und $X \times X \times X$ besitzt, dann ist eine Gruppenstr. auf X geg. durch Morphismen

$$m : X \times X \to X \text{ (Mult.)}, \quad i : X \to X \text{ (Inv.)}, \quad e : 1 \to X \text{ (Einheit)},$$

die die offensichtlichen Axiome erfüllen.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt
- **Monomorphismus** ($f : X \hookrightarrow Y$), wenn f linkskürzbar ist, d. h.
$$\forall\, X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \,:\, \forall\, g,h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',X) \,:\, f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$
- **Epimorphismus** ($f : Y \twoheadrightarrow Y$), wenn f rechtskürzbar ist, d. h.
$$\forall\, Y' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \,:\, \forall\, g,h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y') \,:\, g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Def. Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt. Auf der Klasse der Monomorphismen $(i : U \to X) \in \mathcal{C}$ von einem Objekt $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ nach X ist durch

$$(U,i) \leq (U',i') \quad :\iff \quad \exists\, f : U' \to U \,:\, i' = i \circ f$$

eine Präordnung definiert. Ein **Unterobjekt** von X ist eine Äquivalenzklasse dieser Präordnung, also von der Äq'relation

$$x \sim y \quad :\iff \quad x \leq y \wedge y \leq x.$$

Def. Eine Kategorie heißt **well-powered**, wenn die Präordnung der Unterobjekte von jedem Obj. eine Menge (nicht nur eine Klasse) ist.

(Ko-)Limiten

Def. Seien $\mathcal{J}$, $\mathcal{C}$ Kat'en. Der **Diagonal-Funktor** $\Delta : \mathcal{C} \to [\mathcal{J}, \mathcal{C}]$ ist

$$(\Delta X)(J \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})) \coloneqq X, \quad (\Delta X)(\phi) \coloneqq \mathrm{id}_X, \quad (\Delta f)_{J \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} \coloneqq f.$$

Def. Seien $\mathcal{J}$, $\mathcal{C}$ Kategorien, $\mathcal{J}$ klein. Der **Limes** eines Funktors $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, das den Funktor

$$G \in \hat{\mathcal{C}}, \quad G(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}_{[\mathcal{J},\mathcal{C}]}(\Delta Y, F), \quad G(f)(\eta) \coloneqq \eta \circ \Delta f$$

darstellt. Man notiert $X = \lim F$.

Def. Ein **Kegel** o. **Möchtegern-Limes** eines Funktors $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mit Projektionsabb. $f_J : X \to F(J)$ für alle $J \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, sodass $\forall\, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(J,I) \,:\, f_I = F(h) \circ f_J$.
Ein Kokegel von F ist ein Kegel von $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Bem. Der Limes X ist durch folgende **universelle Eigenschaft** charakterisiert: Er ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Kegel über F, d. h. er ist ein Kegel und für jeden weiteren Kegel X' gibt es genau ein $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',X)$ mit $\forall\, J \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J}) \,:\, f'_J = f_J \circ g$.

Bem. Die univ. Eigenschaft zeigt: Der Limes ist funktoriell, d. h. wenn in $\mathcal{C}$ alle $\mathcal{J}$-Limiten (d. h. Limiten von Funktoren $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$) existieren, dann gibt es einen Funktor $\lim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \to \mathcal{C}$.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **filtriert**, falls für alle Funktoren $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ mit endl. Quellkat. $\mathcal{I}$ ein Kokegel von F existiert.
Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **kofiltriert**, falls $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ filtriert ist.

Def. Eine **(ko-)gerichtete Menge** ist eine Menge mit einer Präordnung, deren Präordnungskategorie (ko-)filtriert ist.

Def. Der Limes eines Funktors $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt

- **projektiver** oder **inverser Limes**, wenn $\mathcal{C}$ die Präordnungskategorie einer kogerichteten Menge ist. Man notiert $\varprojlim F$.
- **filtriert**, wenn $\mathcal{C}$ kofiltriert ist.

Bem. Folgende Konzepte lassen sich als Spezialfall des Limes über eine spezielle Indexkategorie $\mathcal{J}$ auffassen:

Konzept	Indexkategorie $\mathcal{J}$
Terminales Objekt	$\emptyset$ (leere Kategorie)
Produkt	$\mathbf{2} := \{0,1\}$ (kein nichttrivialer Morphismus)
Faserprodukt	$1 \to 0 \leftarrow 2$ (zwei nichttriviale Morphismen)
Differenzkern	$0 \rightrightarrows 1$ (zwei nichttriviale Morphismen)

Def. Sei $\mathcal{J}$ klein. Der **Kolimes** eines Funktors $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, das den Funktor

$$G \in \hat{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} = [\mathcal{C}, \mathbf{Set}], \quad G(Y) := \mathrm{Hom}_{[\mathcal{J},\mathcal{C}]}(F, \Delta Y), \quad G(f)(\eta) := \Delta f \circ \eta$$

darstellt. Man notiert $X = \mathrm{colim}\, F$.

Bem. Der Kolimes von $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ist der Limes von $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Bem. Wenn in $\mathcal{C}$ alle $\mathcal{J}$-Kolimiten existieren, dann gibt es einen Funktor $\mathrm{colim} : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \to \mathcal{C}$.

Bem. Folgende Konzepte sind ein Spezialfall des Kolimes:

Konzept	Indexkategorie $\mathcal{J}$
Initiales Objekt	$\emptyset$ (leere Kategorie)
Koprodukt	$\mathbf{2} := \{0,1\}$ (kein nichttrivialer Morphismus)
Kofaserprodukt	$1 \to 0 \leftarrow 2$ (zwei nichttriviale Morphismen)
Kodifferenzkern	$0 \rightrightarrows 1$ (zwei nichttriviale Morphismen)

Def. Der Kolimes eines Funktors $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt

- **induktiver** oder **direkter Limes**, wenn $\mathcal{C}$ die Präordnungskategorie einer gerichteten Menge ist. Man notiert $\varinjlim F$.
- **filtrierter Kolimes**, wenn $\mathcal{C}$ filtriert ist.

Satz. Angenommen, eine Kategorie $\mathcal{C}$ enthält ein term. Objekt, den Differenzkern von allen parallelen Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und das Produkt $X \times Y$ von allen Paaren von Objekten. Dann existieren alle endlichen Limiten in $\mathcal{C}$, d. h. der Limes von jedem Funktor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, wobei $\mathcal{J}$ endlich ist. Duales gilt für endl. Kolimiten mit initialem Obj., Kodifferenzkern und Koprodukten.

Kor. In **Set** existieren alle endlichen Limiten und Kolimiten.

Bem. Angenommen, in $\mathcal{C}$ existieren alle $\mathcal{J}$-Limiten. Sei $\mathcal{I}$ eine bel. Kategorie. Dann ex. alle $\mathcal{J}$-Limiten in $[\mathcal{I}, \mathcal{C}]$ und die Limiten werden objektweise berechnet: Sei $F : \mathcal{J} \to [\mathcal{I}, \mathcal{C}]$ ein Funktor, dann ist

$$(\lim F)(I) = \lim(F(-)(I)), \quad (\lim F)(f) = \lim(F(-)(f)).$$

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt **stetig**, wenn er **Limiten bewahrt**, d. h. für alle Funktoren $D : \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ (mit $\mathcal{J}$ klein) mit $\lim D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ex. auch der Limes von $F \circ G$ in $\mathcal{D}$ und es gilt

$$\lim(F \circ D) \cong F(\lim D).$$

Ein Funktor F heißt **kostetig**, wenn er **Kolimiten bewahrt**.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **(ko-)vollständig**, wenn alle kleinen (Ko-)Limiten (d. h. (Ko-)Limiten von Funktoren $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ mit einer kleinen Kategorie $\mathcal{J}$) in $\mathcal{C}$ existieren.

Bspe. Vollständig sind: • **Set**, • **Grp**, • **Ab**, • **Top**, • k-**Vect**.

Adjunktionen

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt **linksadjungiert** zum Funktor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, wenn es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))$$

gibt (dabei sind beide Seiten Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$). Dann heißt G auch **rechtsadjungiert** zu F. Man notiert $F \dashv G$ oder sagt, es bestehe eine Adjunktion $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$.

Bem. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann besitzt F genau dann einen Rechtsadjungierten $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, wenn für alle $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ der Funktor

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y), \quad f \mapsto (- \circ F(f))$$

darstellbar ist, d. h. es existiert $GY \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Isomorphismen

$$a_X^Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

mit $\forall\, \phi \in \mathrm{Hom}(X', X) : a_{X'}^Y(- \circ F(\phi)) = a_X^Y(-) \circ \phi$.
Dann ist G auf Morphismen definiert durch

$$G(f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')) := a_{GY}^{Y'}\left(f \circ \left(a_{GY}^{Y}\right)^{-1}(\mathrm{id}_{GY})\right).$$

Bem. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Setze

$$\eta_X := a_X^{FX}(\mathrm{id}_{FX}) : X \to GFX,$$
$$\epsilon_Y := (a_{GY}^Y)^{-1}(\mathrm{id}_{GY}) : FGY \to Y.$$

Dann sind $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ (genannt **Einheit**) und $\epsilon : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ (genannt **Koeinheit**) natürliche Transformationen und es gilt

$$(G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G) = \mathrm{id}_G, \quad (F \xrightarrow{\epsilon F} FGF \xrightarrow{F\eta} F) = \mathrm{id}_F.$$

Umgekehrt definieren zwei solche nat. Transf. η und ϵ, die diese Gleichungen erfüllen, eine Adj. zwischen F und G. Dabei ist η_X univ. unter den Morphismen von $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ zu einem Obj. der Form GY: Für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, GY)$ gibt es genau ein $h \in \mathrm{Hom}(FX, Y)$ mit $f = G(h) \circ \eta_X$, und zwar $h = (a_X^Y)^{-1}(f)$. Duales gilt für ϵ_Y.

Lem (Verknüpfung von Adjunktionen)**.**
Sei $F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zu $G_1 : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und $F_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ zu $G_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ linksadj. Dann ist $F_2 \circ F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ zu $G_1 \circ G_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ linksadjungiert.

Lem (Eindeutigkeit des adjungierten Funktors)**.**

- Gelte $F \dashv G_1$ und $F \dashv G_2$. Dann sind G_1 und G_2 nat. isomorph.
- Gelte $F_1 \dashv G$ und $F_2 \dashv G$. Dann sind F_1 und F_2 nat. isomorph.

Bem. Sei $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ eine Adjunktion und $\mathcal{J}$ klein. Dann gibt es eine ind. Adjunktion $(F \circ -) : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \rightleftarrows [\mathcal{J}, \mathcal{D}] : (G \circ -)$.

Bspe.

- Angenommen, in $\mathcal{C}$ existieren $\mathcal{J}$-Limiten bzw. $\mathcal{J}$-Kolimiten. Dann gibt es eine Adj. $\Delta \dashv \lim$ bzw. $\mathrm{colim} \dashv \Delta$.
- Sei $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ der Funktor, der die freie Gruppe über einer Menge bastelt und $V : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ der Vergiss- funktor. Dann gilt $F \dashv V$. Gleiches gilt für viele weitere „freie" Konstruktionen.
- Sei **KHaus** die Kat. der kompakten Hausdorffräume und $K : \mathbf{Top} \to \mathbf{KHaus}$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung und $I : \mathbf{KHaus} \to \mathbf{Top}$ die Inklusion. Dann gilt $K \dashv I$.

Def. Im Spezialfall, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Präordnungskategorien sind, wird ein Paar von adjungierten Funktoren (d. h. monotonen Abbildungen) zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ auch **Galoisverbindung** genannt.

Bspe.

- $(\lceil - \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}) \dashv (i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}) \dashv (\lfloor - \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z})$
- Sei $L \supset K$ eine endl. Körpererweiterung. Für eine Zwischenerw. $L \supseteq M \supseteq K$ sei $\mathrm{Gal}(L, M) := \{f \in \mathrm{Aut}(L) \,|\, f|_M = \mathrm{id}_M\}$ die Galoisgruppe von L über M. Dann ist
$$\{\,\text{Untergruppen von } \mathrm{Gal}(L,K)\,\} \leftrightarrow \{\,\text{Zwischenerw. } L \supseteq M \supseteq K\,\}$$
$$G \mapsto \{x \in L \,|\, \forall\, \sigma \in G : \sigma(x) = x\}$$
$$\mathrm{Gal}(L, M) \leftarrow M$$
eine Galoisverbindung (dabei sind Untergruppen durch Inklusion und Zwischenerweiterungen umgekehrt durch Inklusion geordnet).

Lem. Sei $F \dashv G$ eine Adjunktion. Dann gilt:

- F bewahrt Kolimiten (**LAPC**, left-adjoints preserve colimits).
- G bewahrt Limiten (**RAPL**, right-adjoints preserve limits).

Beweis (RAPL)**.** Sei $\mathcal{J}$ eine kleine Indexkategorie. Es gilt:

$$(F \circ -) \circ (\Delta : \mathcal{C} \to [\mathcal{J}, \mathcal{C}]) \dashv (\lim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \to \mathcal{C}) \circ (G \circ -),$$
$$(\Delta : \mathcal{D} \to [\mathcal{J}, \mathcal{D}]) \circ F \dashv G \circ (\lim : [\mathcal{J}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}).$$

Da $(F \circ -) \circ \Delta \equiv \Delta \circ F$, folgt aus der Eindeutigkeit des Rechtsadjungierten $\lim(G \circ D) \cong G(\lim D)$ natürlich in D.

Bem. Sei umgekehrt $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein stetiger Funktor. Unter gewissen Bedingungen an die Größe der Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besitzt dann G einen Linksadjungierten:

Def.

- Ein **Koerzeuger** einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, für das der Funktor $h_S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ treu ist.
- Eine **koerzeugende Menge** von $\mathcal{C}$ ist eine Teil*menge* $\mathcal{S}$ von $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, für die der Funktor $h_{\mathcal{S}} := \prod_{S \in \mathcal{S}} h_S$ treu ist.

Lem. Ein stetiger Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ hat einen Linksadj, wenn:

- General Adjoint Functor Theorem: $\mathcal{D}$ ist vollständig und lokal klein und G erfüllt die Lösungsmengen-Bedingung:
$$\forall\, X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) : \exists\, I \text{ Menge} : \exists\, (f_i : X \to G(Y_i))_{i \in I} :$$
$$\forall\, (g : X \to Z) \in \mathcal{C} : \exists\, i \in I,\ h : G(Y_i) \to Z : g = h \circ f_i.$$
- Special Adjoint Functor Theorem (**SAFT**): $\mathcal{D}$ ist vollständig, well-powered (damit automatisch lokal klein), besitzt eine kleine koerzeugende Menge und $\mathcal{C}$ ist lokal klein.

Def. Eine **monoidale Kategorie** $\mathcal{C}$ besitzt einen Funktor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (genannt Tensorprodukt), ein Objekt $1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und natürliche Isomorphismen (die zwei Kohärenzbedingungen erfüllen)

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \cong X \otimes (Y \otimes Z), \quad \lambda_X : 1 \otimes X \cong X, \quad \rho_X : X \otimes 1 \cong X.$$

Def. Sei $(\mathcal{C}, \otimes)$ eine monoidale Kategorie. Ein **interner Hom-Funktor** ist ein Funktor $[-,-] : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, für den gilt: für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ der Funktor $- \otimes X$ linksadjungiert zu $[X, -]$ ist, d. h.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes X, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, [X, Z]).$$

Notation. $[X, Y] =: Y^X$ heißt auch **Exponentialobjekt**.

Def. Eine monoidale Kategorie heißt **kartesisch abgeschlossen**, wenn sie einen internen Hom-Funktor besitzt.

Bspe. **Set**, **Ab**, k-**Vect** und **Cat** sind kartesisch abgeschl.

Verklebedaten und simpliziale Mengen

Def. **Verklebedaten** sind gegeben durch einen Funktor

$$X : \Delta_{\text{strikt}}^{\text{op}} \to \textbf{Set}.$$

Dabei ist Δ_{strikt} die Kategorie mit den Mengen $[n] := \{0, 1, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und streng monotonen Abbildungen.

Notation. $X_{(n)} := X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes.

Def. Das **Standard-n-Simplex** $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die von den $(n{+}1)$ Standardbasisvektoren aufgespannte affinlineare Hülle. Eine streng monotone Abb $f : [n] \to [m]$ induziert durch Abbilden des i-ten Basisvektors auf den $f(i)$-ten eine Inklusion $\Delta_f : \Delta_n \to \Delta_m$,

Def. Die **geometrische Realisierung** von Verklebedaten X ist der topologische Raum

$$|X| := \left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R$$

Dabei ist $X_{(n)}$ diskret. Die Äquivalenzrelation R wird erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\ x \in X_{(n)},\ f : [m] \to [n] \text{ s.m.s.}$$

Def. Das **k-Skelett** $\operatorname{sk}_k X$ von Verklebedaten X ist definiert durch

$$(\operatorname{sk}_k X)_{(n)} := \{x \in X_{(n)} \mid n \le k\},\ \ (\operatorname{sk}_k X)(f) := X(f) \text{ sofern möglich}$$

Def. Der **Kegel** CX über Verklebedaten X ist definiert durch

$$(CX)_{(0)} := X_{(0)} \amalg \{\star\}, \quad (CX)_{(n)} := X_{(n)} \amalg (X_{(n-1)} \times \{\star\}),$$
$$(CX)(f)(x) := X(f)(x),$$
$$(CX)(f)(x,*) := \begin{cases} X(i \mapsto f(i) - 1)(x), & \text{wenn } f(0) > 0, \\ (X(i \mapsto f(i{+}1) - 1)(x), *), & \text{wenn } f(0) = 0. \end{cases}$$

Def. Eine **simpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \to \textbf{Set}.$$

Dabei ist Δ die Kategorie mit den Mengen $[n] := \{0, 1, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und monotonen Abbildungen.

Notation. $X_n := X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes.

Def. Eine **simpliziale Abbildung** zw. simpl. Mengen X und Y ist eine nat. Transformation zwischen den Funktoren $X, Y : \Delta^{\text{op}} \to \textbf{Set}$.

Def. Die Kategorie der simplizialen Mengen ist $\textbf{sSet} := [\Delta^{\text{op}}, \textbf{Set}]$.

Def. Die **geometrische Realisierung** einer simplizialen Menge X ist der topologische Raum

$$|X| := \left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n) \right) / R$$

Die Äquivalenzrelation R wird dabei erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\ x \in X_n \text{ u. } f \in \operatorname{Hom}_\Delta([m], [n]).$$

Def. Ein topologischer Raum heißt **trianguliert**, wenn er die Realisierung von Verklebedaten ist.

Def. Der **Nerv** einer Überdeckung $X = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ eines topologischen Raumes ist die simpliziale Menge

$$X_n := \{(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in A^{n+1} \mid U_{\alpha_0} \cap ... \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\}$$
$$X(f)(\alpha_0, ..., \alpha_n) := (\alpha_{f(0)}, ..., \alpha_{f(m)}) \quad \text{für } f : [m] \to [n].$$

Bem. Falls die Überdeckung lokal endlich ist und alle nichtleeren, endlichen Schnitte $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$ zusammenziehbar sind, so ist die geom. Realisierung des Nerves der Überdeckung homotopieäq. zu X.

Def. Sei Y ein topologischer Raum. Die simpliziale Menge X der **singulären Simplizes** in Y ist

$$X_n := \{\text{stetige Abb. } \sigma : \Delta_n \to Y\}, \quad X_n(f)(\sigma) := \sigma \circ \Delta_f.$$

Bem. Diese Konstruktion stiftet eine Funktor $\operatorname{Sing} : \textbf{Top} \to \textbf{sSet}$. Es besteht die Adjunktion $|{-}| : \textbf{sSet} \rightleftarrows \textbf{Top} : \operatorname{Sing}$.

Def. $\Delta[p]_n := \{g : [n] \to [p] \text{ monoton steigend}\}$, $\Delta[p](f)(g) := g \circ f$

Def. Der **klassifizierende Raum** einer Gruppe G ist gegeben durch die Realisierung der simpl. Menge BG mit $(BG)_n := G^n$ und

$$BG(f : [m] \to [n])(g_1, \ldots, g_n) := (h_1, \ldots, h_m), \quad h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j.$$

Def. Ein n-Simplex $x \in X_n$ heißt **degeneriert**, falls eine monotone surjektive Abbildung $f : [n] \to [m]$, $n > m$ und ein Element $y \in X_m$ existiert mit $x = X(f)(y)$.

Def. Seien X Verklebedaten. Wir konstruieren eine dazugehörende simpliziale Menge $\tilde{X}$ wie folgt:

$$\tilde{X}_n := \{(x, g) \mid x \in X_{(k)}, g : [n] \to [k] \text{ monoton und surjektiv}\},$$

Für eine monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ und $(x, g) \in \tilde{X}_n$ schreiben wir zunächst $g \circ f = f_1 \circ f_2$ mit einer Injektion f_1 und einer Surjektion f_2 und setzen $\tilde{X}(f)(x, g) := (X(f)(x), f_2)$.

Prop. Eine simpliziale Menge $\tilde{X}$ kann genau dann aus (dann eindeutigen) Verklebedaten gewonnen werden, falls für alle nicht-degenerierten Simplizes $x \in \tilde{X}_n$ und streng monotonen Abbildungen $f : [m] \to [n]$ auch $\tilde{X}(f)(x) \in \tilde{X}_m$ nicht degeneriert ist.

Prop. Seien X Verklebedaten, $\tilde{X}$ die entsprechende simpliziale Menge. Dann gilt $|X| \approx |\tilde{X}|$.

Def. Das **k-Skelett** $\operatorname{sk}_k X$ einer simplizialen Menge X ist geg. durch

$$(\operatorname{sk}_k X)_n := \{X(f)(x) \mid p \le k, f : [n] \to [p] \text{ monoton}, x \in X_p\}.$$

Def. Eine simpliziale Menge X hat **Dimension** n, falls $X = \operatorname{sk}_n X$.

Prop. Geom. Realisierung ist ein Funktor $|{-}| : \textbf{sSet} \to \textbf{Top}$.

Bspe.
- Eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eines topologischen Raumes ist Verfeinerung von $(V_\beta)_{\beta\in B}$, wenn es eine Abbildung $\psi : A \to B$ gibt, sodass $U_\alpha \subset V_{\psi(\alpha)}$ für alle $\alpha \in A$. Dies induziert eine simpliziale Abb. zwischen den Nerven der Überdeckungen durch
$$F_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) := (\psi(\alpha_0), \ldots, \psi(\alpha_n)).$$
- Ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$ stiftet eine Abbildung $BG \to BH$ zwischen den klassifizierenden Räumen durch
$$F(g_1, \ldots, g_n) := (\phi(g_1), \ldots, \phi(g_n)).$$

Def. Ein **simplizialer topologischer Raum** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \to \textbf{Top}.$$

Bem. Die geometrische Realisierung eines simplizialen topol. Raumes ist definiert wie die einer simplizialen Menge mit dem Unterschied, dass X_n im Allg. nicht die diskrete Topologie trägt.

Def. Eine **bisimpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}} \to \textbf{Set}.$$

Notation. $X_{nm} := X([n], [m])$

Bsp. Das **direkte Produkt** von simplizialen Mengen X und Y ist die bisimpliziale Menge

$$(X \times Y)_n := X_n \times Y_n, \quad (X \times Y)(f, g)(x, y) := (f(x), g(y)).$$

Def. Die **Diagonale** DX einer bisimplizialen Menge X ist die simpliziale Menge mit $(DX)_n := X_{nn}$ und $DX(f) := X(f, f)$.

Def. Sei X eine bisimpliziale Menge.
- Setze $|X|^D := |DX|$.
- Definiere einen simplizialen topologischen Raum X^I durch
$$X^I_n := |X_{\bullet n}|, \quad X^I(g) := |X(\mathrm{id}, g)|.$$
Setze $|X|^{I,II} := |II, I|$.
- Definiere analog $|X|^{II,I}$.

Satz (**Eilenberg-Zilber**). $|X|^D \cong |X|^{I,II} \cong |X|^{II,I}$ kanonisch.

Def. Der **Nerv** $\mathcal{NC}$ einer kleinen Kategorie $\mathcal{C}$ ist die simpl. Menge

$$\mathcal{NC}_n := \left\{ \text{Diagramme } X_0 \xrightarrow{\varphi_1} X_1 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_n} X_n \text{ in } \mathcal{C} \right\}$$
$$\mathcal{NC}(f : [m] \to [n])(X_0 \xrightarrow{\varphi_1} \ldots \xrightarrow{\varphi_n} X_n) := (Y_0 \xrightarrow{\psi_1} \ldots \xrightarrow{\psi_m} Y_m)$$
$$\text{mit } Y_i := X_{f(i)}, \quad \psi_i := \varphi_{f(i)} \circ \ldots \circ \varphi_{f(i-1)+1}$$

Bsp. $\Delta[n] = \mathcal{NC}(\text{Präordnungskategorie mit Objekten } \{0, \ldots, n\})$

Bem.
- Der Nerv ist volltreuer Funktor $\mathcal{NC} : \textbf{Cat} \to \textbf{sSet}$.
- Jede kleine Kat. kann aus ihrem Nerv zurückgewonnen werden.
- $\mathcal{N}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = D(\mathcal{NC} \times \mathcal{ND})$

Bem. Mit $X * Y := D(X \times Y)$ ist **sSet** eine monoidale Kategorie.

Prop. **sSet** ist kartesisch abgeschlossen. Dabei ist

$$[X, Y]_n = (Y^X)_n := \operatorname{Hom}_{\textbf{sSet}}(\Delta[n] * X, Y).$$

Prop. Der Nervfunktor ist verträglich mit dem internen Hom: Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kleine Kategorien. Dann ist

$$\mathcal{N}([\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\textbf{Cat}}) \cong [\mathcal{NC}, \mathcal{ND}]_{\textbf{sSet}}.$$

Garben

Def. • Eine mengenwertige **Prägarbe** $\mathcal{F}$ auf einem topol. Raum X ist ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Dabei ist $\mathbf{Ouv}(X)$ die Präordnungs-Kat. der off. Teilmengen von X geordnet durch $\subseteq$.

- Allgemeiner ist eine $\mathcal{C}$-wertige Prägarbe ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ (z. B. $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}, \mathbf{R\text{-}Mod}, \mathbf{Top}$).
- Ein Morphismus zwischen Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf demselben topol. Raum ist eine natürliche Transformation zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Notation. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe

- $\Gamma(U, \mathcal{F}) \coloneqq \mathcal{F}(U)$ heißt Menge der **Schnitte** von $\mathcal{F}$ über U.
- $r_{UV} \coloneqq \mathcal{F}(V \subseteq U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ heißt **Restriktionsabb.**
- $x|_V \coloneqq r_{UV}(x)$ für $V \subseteq U$ und $x \in \mathcal{F}(U)$ heißt **Einschränkung** von x auf V.

Def. Eine **Garbe** auf einem topol. Raum X ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$, für die gilt: Für alle Familien $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen und Schnitten $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$, die miteinander kompatibel sind, d. h.

$$\forall\, i, j \in I \;:\; s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j},$$

gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(\cup_{i \in I} U_i)$ mit $\forall\, i \in I \;:\; s_i = s|_{U_i}$.
Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismen zw. den Prägarben.

Def. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topol. Raum X heißt **separiert**, wenn zwei Schnitte $s, t \in \mathcal{F}(U)$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$ genau dann übereinstimmen, wenn sie lokal übereinstimmen, d. h.

$$s = t \iff \forall\, x \in U : \exists\, V_x \subset U \text{ offene Umgebung von } x : s|_{V_x} = t|_{V_x}.$$

Bem. Das entspricht dem Eindeutigkeitsteil im Garbenaxiom.

Bem. Sei $\mathcal{F}$ eine (Prä-)Garbe auf X und $U \subseteq X$ offen. Dann definiert $(\mathcal{F}|U)(V) \coloneqq \mathcal{F}(U \cap V)$ eine (Prä-)Garbe auf U.

Notation. Die Kategorien der Prägarben von Mengen bzw. von abelschen Gruppen auf einem topol. Raum X werden bezeichnet mit

$$\mathbf{PSh}(X) \coloneqq [\mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{PAb}(X) \coloneqq [\mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}].$$

Die volle Unterkategorie der Garben ist

$$\mathbf{Sh}(X) \subset \mathbf{PSh}(X) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Ab}(X) \subset \mathbf{PAb}(X).$$

Def. Eine Sequenz $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ von (Prä-)Garben abelscher Gruppen auf X heißt **exakt** bei $\mathcal{G}$, falls für alle offenen $U \subset X$ die Sequenz $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ exakt bei $\mathcal{G}(U)$ ist.

Def. Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben auf X. Definiere Prägarben $\mathcal{K}$ und $\mathcal{C}$ auf X durch

$$\mathcal{K}(U) \coloneqq \ker(f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)), \quad \mathcal{C}(U) \coloneqq \mathcal{G}(U) / \operatorname{im}(f_U).$$

Prop. Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sogar ein Morphismus von Garben.
Dann ist auch $\mathcal{K}$ eine Garbe.

Achtung. Aber $\mathcal{C}$ ist im Allgemeinen keine Garbe!

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Der **Halm** von $\mathcal{F}$ in $x \in X$ ist

$$\mathcal{F}_y \coloneqq \{(U, s) \,|\, U \subseteq X \text{offen}, x \in U, s \in \mathcal{F}(U)\} / {\sim},$$
$$(U, s) \sim (V, t) \quad :\iff \exists\, W \subset U \cap V \text{ offen}, y \in W \;:\; s|_W = t|_W.$$

Notation. $s_x \coloneqq [(U, s)]$ für $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $x \in U$.

Sprechweise. Elemente $[t] \in \mathcal{F}_x$ heißen **Keime** in x.

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $Z \subseteq X$ beliebig. Definiere

$$\Gamma(Z, \mathcal{F}) \coloneqq \operatorname{colim} \Gamma(U, \mathcal{F}),$$

wobei der Limes über alle offenen $U \subset X$ mit $Z \subseteq U$ läuft.

Beob. $\mathcal{F}_x = \Gamma(\{x\}, \mathcal{F})$

Def. Der **Totalraum** F einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X ist

$$F \coloneqq \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

mit der Topologie erzeugt durch die Mengen

$$\{s_x \,|\, x \in U\} \quad \text{für } U \subseteq X \text{ offen}, \; s \in \mathcal{F}(U).$$

Bem. Mit dieser Topologie ist die Projektion $\pi : F \to X$ stetig und ein lokaler Homöomorphismus.

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf Y. Die **Garbifizierung** $\mathcal{F}^+$ von $\mathcal{F}$ ist die Garbe der stetigen Schnitte von $\pi : F \to X$, also

$$\mathcal{F}^+(U) \coloneqq \{f : U \to F \,|\, \pi \circ f = (i : U \hookrightarrow X)\}.$$

Bem. Garbifizierung ist ein Funktor $s : \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$.

Prop. Es ex. ein kanonischer Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ def. durch

$$s \in \mathcal{F}(U) \quad \mapsto \quad (x \mapsto s_x : U \to F).$$

Wenn $\mathcal{F}$ schon eine Garbe ist, dann ist f ein Isomorphismus.

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X.
Eine Familie $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$ von Schnitten auf offenen Teilmengen von X heißt **lokal kompatibel**, falls für alle $i, j \in I$ und $x \in U_i \cap U_j$ eine Umgebung $V \subset U_i \cap U_j$ von x mit $s_i|_V = s_j|_V$ existiert.

Def. Der **Garbifizierungsfunktor** $s : \mathbf{PAb}(X) \to \mathbf{Ab}(X)$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$ ist def. auf Prägarben abelscher Gruppen $\mathcal{F}$ und $U \subset X$ offen durch

$$s(\mathcal{F})(U) \coloneqq \{\, \text{Familien } (s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I} \text{ von lokal kompatiblen Schnitten auf offenen Teilmengen mit } U = \textstyle\bigcup_{i \in I} U_i \,\} / {\sim}$$

$$(s_i)_{i \in I} \sim (t_j)_{j \in J} \;:\iff \exists \text{offene Überdeckung } (W_k)_{k \in K} \text{ von U} \;:\; \forall\, i, j, k : s_i|(U_i \cap V_j \cap W_k) = t_j|(U_i \cap V_j \cap W_k).$$

Thm. Es besteht die Adjunktion $\;s : \mathbf{PAb}(X) \rightleftarrows \mathbf{Ab}(X) : i$.
Die Koeinheit $\epsilon : s \circ i \to \mathrm{Id}_{\mathbf{Ab}(X)}$ ist ein Isomorphismus.

Bem (Universelle Eigenschaft der Garbifizierung). Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Sei $\mathcal{G}$ sogar eine Garbe. Dann gibt es einen einen eindeutigen Morphismus $\alpha^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ mit $\alpha = \alpha^+ \circ \eta_{\mathcal{F}}$.

Def. Sei A eine Menge (oder ab. Gruppe, ...), X ein topol. Raum.

- Die **konstante Prägarbe** $\mathbf{A}$ mit Faser A auf X ist def. durch
$$\mathbf{A}(U) \coloneqq A, \quad r_{UV} \coloneqq \mathrm{id}_A \quad \text{für alle } V \subseteq U \subseteq X.$$
- Die **konstante Garbe** mit Faser A ist die Garbifizierung $\underline{A} \coloneqq A_X \coloneqq \mathbf{A}^+$ von $\mathbf{A}$.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X heißt **lokal konstant**, falls jeder Punkt in X eine offene Umgebung U besitzt, sodass $F|U$ isomorph zu einer konstanten Garbe ist.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt ...

- ... **welk** (flabby, flasque), wenn die Einschränkungsabbildungen
$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$$
für alle *offenenen* $U \subseteq X$ surjektiv sind.
- ... **weich** (soft, mou), wenn die Einschränkungsabbildungen
$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(A, \mathcal{F})$$
für alle *abgeschlossenen* $A \subseteq X$ surjektiv sind.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ ab. Gruppen auf einem topol. Raum X heißt **fein** (fine, fin), wenn für je zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ existiert, sodass α auf einer offenen Umgebung von A_1 Null und auf einer offenen Umgebung von A_2 die Identität ist.

(Lokal) geringte Räume

Def. Eine topol. / glatte **Mannigfaltigkeit** ist ein Paar $(M, \mathcal{O}_M)$, wobei M ein Hausdorffraum und $\mathcal{O}_M$ eine Garbe auf M ist, sodass jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, sodass $\mathcal{O}_M|U$ isomorph zu einer Garbe von stetigen / glatten Funktionen auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Def. Ein Morphismus $\Phi : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ zwischen topol. / glatten Mften. ist geg. durch eine stetige Abb. $\phi : M \to N$, sodass

$$\forall\, U \subseteq N \text{ offen} \;:\; \forall\, f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_N) \;:\; f \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_M).$$

Bem. Diese Definitionen sind äquivalent zu den üblichen Alte-Römer-Definitionen von Mannigfaltigkeiten über Atlanten.

Def. Ein **geringter Raum** ist ein Paar $(M, \mathcal{O}_M)$, wobei M ein topol. Raum und $\mathcal{O}_M$ eine Ringgarbe auf M ist.
Ein Morphismus $\Phi : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ zwischen geringten Räumen ist ein Paar (φ, θ), wobei $\varphi : M \to N$ stetig und

$$\theta = (\theta_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_N) \to \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_M))_{U \Subset N \text{ offen}}$$

eine Familie von Ringhomomorphismen ist, sodass

$$\forall\, V \Subset U \Subset N \;:\; \theta_U(-)|_{\varphi^{-1}(V)} = \theta_V(-|_V).$$

Sprechweise. $\mathcal{O}_M$ heißt **Strukturgarbe**.

Bem. Man kann θ als Garbenmorph. $\theta : \mathcal{O}_N \to \varphi_\bullet(\mathcal{O}_M)$ auffassen.

Bsp. Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ eine glatte Mft. Sei $\mathcal{D}_M$ die Garbe der linearen, derivativen Operatoren, also

$$\mathcal{D}_M(U) \coloneqq \{\, P : \mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U),\; P = \textstyle\sum f_I(z) \frac{\partial^I}{\partial z^I} \text{ in lok. Koord.} \,\}.$$

Dann ist $(M, \mathcal{D}_M)$ ein geringter Raum.

Def. Sei A ein komm. Ring. Das **Spektrum** von A ist

$$\mathrm{Spec}(A) := \{\,\text{Primideale } \mathfrak{p} \subsetneq A\,\}$$

mit der sogenannten **Zariski-Topologie** mit offenen Mengen

$$\mathcal{T} := \{D(S) \mid S \subseteq A\} \subset \mathcal{P}(\mathrm{Spec}(A)), \quad D(S) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid S \not\subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Die abgeschlossenen Mengen sind von der Form $V(S)$ für $S \subseteq A$ mit

$$V(S) := \mathrm{Spec}(A) \setminus D(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid S \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Für $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ offen sei $\Delta(U)$ das Komplement der Vereinigung der Ideale in U. Da $\Delta(U)$ multiplikativ abgeschlossen ist und $V \subseteq U \implies \Delta(V) \subseteq \Delta(U)$ gilt, können wir eine Prägarbe komm. Ringe $\mathcal{O}'$ auf $\mathrm{Spec}(A)$ wie folgt definieren:

$$\mathcal{O}'(U) := (\Delta(U))^{-1}A, \quad r_{UV}([\tfrac{s}{t}]) := [\tfrac{s}{t}].$$

Sei $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} := (\mathcal{O}')^+$ die Garbifizierung von $\mathcal{O}'$.
Der geringte Raum $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ heißt **affines Schema** von A.

Bem. Sei A ein Integritätsbereich. Dann ist das Nullideal $(0) \in \mathrm{Spec}(A)$ ein generischer Punkt, d. h. der topologische Abschluss von (0) ist ganz $\mathrm{Spec}(A)$.

Lem. $(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p} := \Delta(\mathfrak{p})^{-1}A$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$

Def. Ein Ring R heißt **lokal**, wenn er eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- Er besitzt genau ein maximales Linksideal.
- Er besitzt genau ein maximales Rechtsideal.
- Wenn eine endliche (evtl. leere) Summe von Ringelementen eine Einheit ist, dann auch einer der Summanden (insb. gilt $0 \neq 1$).
- $\mathrm{Spec}(R)$ hat genau einen abgeschl. Punkt (das maximale Ideal).

Bem. In lok. Ringen stimmen max. Links- und Rechtsideal überein.

Def. Seien R und S lokale Ringe mit max. Idealen $\mathfrak{m} \subset R$ und $\mathfrak{n} \subset S$. Ein **lokaler Ringhomomorphismus** zwischen R und S ist ein Ringhomomorphismus $f : R \to S$ mit $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$.

Def. Ein geringter Raum $(M, \mathcal{O}_M)$ heißt **lokal geringt**, wenn die Fasern $\mathcal{O}_{M,x}$ für alle $x \in M$ lokale Ringe sind.
Ein Morphismus $\Phi = (\varphi, \theta) : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ heißt **Morph. von lokal geringten Räumen**, wenn für alle $x \in M$ die ind. Abb.

$$\theta_x : \mathcal{O}_{N,y} \to \mathcal{O}_{M,x}$$

ein lokaler Homomorphismus von lokalen Ringen ist.

Bspe. Affine Schemata und Mften sind lokal geringte Räume.

Def. Ein **Schema** ist ein lokal geringter Raum $(S, \mathcal{O}_S)$, der lokal isomorph zum affinen Spektrum eines Ringes ist, d. h. jedes $x \in S$ besitzt eine offene Umgebung U, sodass $(U, \mathcal{O}_S|U)$ als lokal geringter Raum isomorph zum affinen Schema eines komm. Ringes ist.

Garben auf Siten

Def. Sei $\mathcal{S}$ eine Kategorie. Ein **Sieb** auf $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ ist eine Menge $\Phi = \{\varphi_i \in \mathrm{Hom}_\mathcal{S}(U_i, U) \mid i \in I\}$ von Morphismen nach U, sodass gilt:

$$\forall\, V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}),\, i \in I,\, \psi \in \mathrm{Hom}_\mathcal{S}(V, U_i) \;:\; \varphi_i \circ \psi \in \Phi.$$

Bem. Sei Φ ein Sieb auf U, $f \in \mathrm{Hom}(V, U)$. Dann ist

$$f^*(\Phi) := \{\varphi \in \mathrm{Hom}_\mathcal{S}(W, V) \mid W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}), f \circ \varphi \in \Phi\}$$

ein Sieb auf V, die **Einschränkung** von Φ auf V (über f).

Def. Eine **Grothendieck-Topologie** auf einer Kategorie $\mathcal{S}$ ist gegeben durch eine Menge $C(U)$ von Sieben auf U für jedes $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ (den sogenannten **überdeckenden Sieben**), sodass gilt:

- Für alle $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ ist das Sieb aller Abb. nach U in $C(U)$.
- Die Einschränkung $f^*(\Phi)$ eines Siebes $\Phi \in C(U)$ über $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{S}(V, U)$ ist in $C(U)$.
- Die Überdeckungseigenschaft lässt sich lokal testen:
  Für Ψ ein bel. Sieb auf U und $\Phi \in C(U)$ überdeckend. Angenommen, für alle $(\varphi_i : U_i \to U) \in \Phi$ ist die Einschränkung von Ψ über φ_i überdeckend, also $\varphi_i^*(\Psi) \in C(U_i)$. Dann ist auch $\Psi \in C(U)$.

Def. Ein **Situs** ist eine Kategorie $\mathcal{S}$ mit Grothendieck-Topologie.

Def. Sei X ein topol. Raum. Dann ist $\mathbf{Ouv}(X)$ ein Situs mit

$$C(U) := \{\,\text{von offenen Überdeckungen von } U \text{ erzeugte Siebe}\,\}.$$

Def.
- Eine $\mathcal{C}$-wertige Prägarbe ist ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ (z. B. $\mathcal{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, \mathbf{R\text{-}Mod}, \mathbf{Top}$).
- Ein Morphismus zwischen Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf demselben Situs ist eine natürliche Transformation zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Def. Eine **Garbe** auf einem Situs $\mathcal{S}$ ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$, für die gilt: Für alle überdeckenden Siebe $\Phi \in C(U)$ und Familien von Schnitten $(s_\varphi \in \mathcal{F}(V))_{(\varphi : V \to U) \in \Phi}$, die miteinander vertr. sind, d. h.

$$\forall\, (\varphi : V \to U) \in \Phi \;:\; \forall\, \psi : W \to V \;:\; s_{\varphi \circ \psi} = s_\varphi|_W := \mathcal{F}(\psi)(s_\varphi),$$

gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$\forall\, (\varphi : V \to U) \in \Phi \;:\; s_\varphi = s|_V := \mathcal{F}(\varphi)(s).$$

Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismus zw. den Prägarben.

Bem. Die Notationen und Sprechw. für (Prä-)Garben auf topol. Räumen werden auch für Garben auf Siten verwendet. Man notiert auch $s|_V := \mathcal{G}(f)(s)$ für die Einschränkung eines Schnittes $s \in \mathcal{G}(U)$ über $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{S}(V, U)$, wohlwissend, dass sie auch von f abhängt.

Bsp. Sei G eine Gruppe und $\mathcal{S}_G$ die Kategorie der Mengen mit G-Wirkung und äquivarianten Abbildungen. Man nennt ein Sieb Φ über $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}_G)$ überdeckend, wenn $U = \cup_{(\varphi : V \to U) \in \Phi}\, \varphi(V)$.
Sei $\mathbf{Sh}_G$ die Kategorie der Garben von Mengen auf dem Situs $\mathcal{S}_G$.
Sei $G_l := G \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}_G)$ mit der Linkswirkung $g.h := gh$.
Es gibt einen Funktor $\alpha : \mathbf{Sh}_G \to \mathcal{S}_G$ mit $\alpha(F) := F(G_l) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}_G)$, wobei G auf $F(G_l)$ durch $g.x := F(h \mapsto hg)(x)$ für $x \in F(G_l)$ wirkt.

Prop. $\alpha : \mathbf{Sh}_G \to \mathcal{S}_G$ ist eine Kategorienäquivalenz.

Komplexe und (Ko-)Homologie

Def.
- Ein **Kettenkomplex** $C_\bullet$ ist eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ mit der Eigenschaft $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.
- Ein **Kokettenkomplex** $C^\bullet$ ist eine Folge $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ mit der Eigenschaft $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Def. Sei $C_\bullet$ ein Kettenkomplex.

- C_n heißt Gruppe der **n-Ketten**,
- $\partial : C_n \to C_{n-1}$ heißt **Randabbildung**,
- $Z_n(C_\bullet) := \ker \partial_n \subset C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) := \mathrm{im}\, \partial_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$ heißt **n-te Homologiegruppe**.

Analog nennt man für einen Kokettenkomplex $C^\bullet$

- δ^n **Korandabbildung**,
- C^n **n-Koketten**,
- $Z^n := \ker \delta^n$ **n-Kozykel**,
- $B^n := \mathrm{im}\, \delta^{n-1}$ **n-Koränder**,
- $H^n(C^\bullet) := Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet)$ n-te **Kohomologiegruppe**.

Def. Eine Morphismus $f : C_\bullet \to D_\bullet$ (bzw. $f : C^\bullet \to D^\bullet$) zwischen (Ko-)Kettenkomplexen ist eine Familie von Abbildungen

$$(f_n : C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\text{bzw. } (f^n : C^n \to D^n)_{n\in\mathbb{N}}),$$

die mit den Randabbildungen verträglich sind, d. h.

$$f_{n-1} \circ \partial_n^C = \partial_n^D \circ f_n \quad (\text{bzw. } f^{n+1} \circ \delta_C^n = \delta_D^n \circ f^n) \quad \text{für alle } n.$$

Prop. H_n (bzw. H^n) ist ein Funktor von der Kategorie der (Ko-)Kettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Def. Sei X eine simpl. Menge. Sei $C_n(X)$ die von den n-Simplizes X_n erzeugte abelsche Gruppe (d. h. die Gruppe der endl. formalen Linearkombinationen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). Sei $\delta_n^i : [n-1] \to [n]$ diejenige streng monotone Abb. mit $i \notin \mathrm{im}\, \delta_n^i$. Definiere

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X), \quad \sum_{\sigma\in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma\in X_n} \lambda_\sigma \sum_{i=0}^n (-1)^i X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Prop. $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ ist ein Kettenkomplex (d. h. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$)

Def. Sei X eine simpl. Menge und A eine ab. Gruppe. Dann ist ...

- ... der **Kettenkomplex** $(C_\bullet(X; A), \partial_\bullet)$ von X **mit Koeffizienten** in A definiert durch
  $$C_n(X; A) := C_n(X) \otimes_\mathbb{Z} A, \quad \partial_n := \partial_n \otimes \mathrm{id} : C_n(X; A) \to C_{n-1}(X; A).$$
- ... der **Kokettenkomplex** $(C^\bullet(X; A), \delta^\bullet)$ von X mit **Koeffizienten** in A definiert durch
  $$C^n(X; A) := \mathrm{Hom}(C^n(X), A),$$
  $$\delta^n : C^n(X; A) \to C^{n+1}(X; A), \quad f \mapsto f \circ \delta_{n+1}.$$

Def. Für Verklebedaten X ist der zugeh. (Ko-)Kettenkomplex (mit Koeffizienten) genauso definiert wie für simpliziale Mengen.

Beob. $C_n(X; \mathbb{Z}) = C_n(X)$

Notation. Sei X eine simpliziale Menge. Setze

- $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$,
- $H^n(X) := H^n(C^\bullet(X; \mathbb{Z}))$,
- $H_n(X; A) := H_n(C_\bullet(X; A))$,
- $H^n(X; A) := H^n(C^\bullet(X; A))$.

Prop. Für jede simpl. Menge X ex. ein kanonischer Isomorphismus

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \text{freie ab. Gr. erzeugt von Zshgskomponenten von } |X|.$$

Prop. Sei CX der Kegel über Verklebedaten X. Es gilt

$$H_0(CX) = \mathbb{Z}, \ \ H_{>0}(CX) = 0.$$

Def. Sei X eine simpliziale Menge.

- Ein **homol. Koeffizientensystem** $\mathcal{A}$ auf X ist ein Funktor
$$\mathcal{A} : (1 \downarrow X) \to \mathbf{Ab}.$$
Dabei ist $1 : \mathbf{1} \to \mathbf{Set}$ der Funktor, der konstant $\{\star\}$ ist (und $\mathbf{1}$ die Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismus).
Expliziter besteht ein Koeffizientensystem aus einer abelschen Gruppe $\mathcal{A}_\sigma$ für jedes n-Simplex $\sigma \in X_n$ und Abbildungen $\mathcal{A}(f,\sigma) : \mathcal{A}_\sigma \to \mathcal{A}_{X(f)(\sigma)}$ für alle $\sigma \in X_n$, $f \in \mathrm{Hom}_\Delta([m],[n])$ mit
$$\mathcal{A}(\mathrm{id},\sigma) = \mathrm{id}, \quad \mathcal{A}(f \circ g, \sigma) = \mathcal{A}(g, X(f)(\sigma)) \circ \mathcal{A}(f,\sigma).$$
- Ein **kohomol. Koeffizientensystem** $\mathcal{B}$ auf X ist ein Funktor
$$\mathcal{B} : (1 \downarrow X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}.$$
- Ein Morphismus zw. (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf derselben simpl. Menge ist eine natürliche Transformation.

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung und X deren Nerv. Dann definiert

$$\mathcal{F}_{\alpha_0,\dots,\alpha_n} := \{U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\},$$
$$\mathcal{F}(f,(\alpha_0,\dots,\alpha_n))(\phi) := \text{passende Einschränkung von } \phi.$$

ein kohomologisches Koeffizientensystem auf X.

Def. Sei $\mathcal{A}$ ein homologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X. Wir setzen

$$C_n(X;\mathcal{A}) := \{ \text{ formale endl. Linearkomb. } \sum_{\sigma\in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \text{ mit } \lambda_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma \}$$

und definieren $\partial_n : C_n(X;\mathcal{A}) \to C_{n-1}(X;\mathcal{A})$ durch

$$\sum_{\sigma\in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \ \ \mapsto \ \sum_{\sigma \in X_n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathcal{A}(\partial_n^i,\sigma)(\lambda_\sigma) \cdot X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Die Homologiegruppen des so def. Kettenkomplexes $C_\bullet(X;\mathcal{A})$ heißen **Homologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in** $\mathcal{A}$.

Def. Sei $\mathcal{B}$ ein kohomologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X. Wir setzen

$$C^n(X;\mathcal{B}) := \{ \text{ Funktionen } f : (\sigma \in X_n) \to \mathcal{B}_\sigma \}$$

und definieren $\delta_n : C^n(X;\mathcal{B}) \to C_{n+1}(X;\mathcal{B})$ durch

$$\delta^n(f)(\sigma) := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \mathcal{B}(\partial_{n+1}^i,\sigma)(f(X(\partial_{n+1}^i)(\sigma))).$$

Die Kohomologiegruppen des so def. Kokettenkomplexes $C^\bullet(X;\mathcal{B})$ heißen **Kohomologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in** $\mathcal{B}$.

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $U = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$, X und $\mathcal{F}$ wie im letzten Beispiel. Die Homologiegruppen $H^n(X,\mathcal{F})$ werden Čech-Kohomologiegruppen der Garbe der stetigen Funktionen auf Y bzgl. der Überdeckung U genannt.

Def. Eine (lange) **exakte Sequenz** ab. Gruppen ist ein (Ko-)Kettenkomplex mit verschwindenden Homologiegruppen, d. h.

$$\mathrm{im}\, \partial_n = \ker \partial_{n-1} \quad \text{für alle } n.$$

Def. Eine **kurze ex. Sequenz** (k. e. S.) ist eine ex. Seq. der Form

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Def. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Die Sequenz heißt **spaltend**, falls sie isomorph zur k. e. S. $0 \to A \to A \oplus C \to C$ ist.

Prop. Für eine Sequenz $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ sind äquivalent:

- Die Sequenz spaltet.
- Es existiert eine Retraktion $r : B \to A$ mit $r \circ f = \mathrm{id}_A$.
- Es existiert ein Schnitt $s : C \to B$ mit $g \circ s = \mathrm{id}_C$.

Def. Eine Sequenz $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ von Komplexen heißt **exakt**, wenn für alle n die Seq. $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ exakt ist.

Prop. Eine kurze exakte Sequenz $0 \to A^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C^\bullet \to 0$ von Kokettenkomplexen induziert eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^\bullet)} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{H^n(p^\bullet)} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A^\bullet) \to \ldots$$

Lem. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann sind ebenfalls exakt:

$$0 \to C_\bullet(X;A) \to C_\bullet(X;B) \to C_\bullet(X;C) \to 0,$$
$$0 \to C^\bullet(X;A) \to C^\bullet(X;B) \to C^\bullet(X;C) \to 0.$$

Kor. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann existieren lange exakte Sequenzen

$$\ldots \to H_n(X;A) \to H_n(X;B) \to H_n(C) \to H_{n-1}(X;A) \to \ldots$$
$$\ldots \to H^n(X;A) \to H^n(X;B) \to H^n(C) \to H^{n+1}(X;A) \to \ldots$$

Def. Eine Sequenz $0 \to \mathcal{B}' \to \mathcal{B} \to \mathcal{B}'' \to 0$ von (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf einer simpl. Menge X heißt **exakt**, falls

$$0 \to \mathcal{B}'_\sigma \to \mathcal{B}_\sigma \to \mathcal{B}''_\sigma \to 0 \qquad \text{für alle } \sigma \in X_n \text{ exakt ist.}$$

Lem. Eine kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{B}' \to \mathcal{B} \to \mathcal{B}'' \to 0$ von (ko-)homologischen Koeff'systemen induziert kurze ex. Sequenzen

$$0 \to C_\bullet(X;\mathcal{B}') \to C_\bullet(X;\mathcal{B}) \to C_\bullet(X;\mathcal{B}'') \to 0,$$
$$0 \to C^\bullet(X;\mathcal{B}') \to C^\bullet(X;\mathcal{B}) \to C^\bullet(X;\mathcal{B}'') \to 0$$

und damit auch entsprechende lange exakte Sequenzen.

Def. Eine **simpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$.

Def. Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe.
Dann ist $(A_\bullet, \partial)$ ein Kettenkomplex mit

$$\partial_n : A_n \to A_{n-1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A(\partial_n^i)(a).$$

Def. Eine **kosimpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A : \Delta \to \mathbf{Ab}$.

Def. Sei A eine kosimpliziale abelsche Gruppe.
Dann ist $(A^\bullet, \delta)$ ein Kokettenkomplex mit

$$\delta^n : A^n \to A^{n+1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A(\partial_{n+1}^i)(a).$$

Def. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine (nicht unbedingt offene) Überdeckung von Y und $\mathcal{F}$ eine Garbe ab. Gruppen auf Y. Die kosimpliziale abelsche Gruppe $\check{C}(U,\mathcal{F})$ der **Čech-Koketten** ist

$$\check{C}^m(U,\mathcal{F}) := \prod_{\alpha_0,\dots,\alpha_m \in A} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}),$$

$$\check{C}(U,\mathcal{F})(f : [m] \to [n])((f_{\alpha_0,\dots,\alpha_m})_{\alpha_0,\dots,\alpha_m}) :=$$
$$(f_{g(0),\dots,g(m)}|U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n})_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}.$$

Bem. Die Randabb. im zugeh. Kokettenkomplex ist gegeben durch

$$(\delta^n \phi)_{\alpha_0,\dots,\alpha_{n+1}} := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \phi_{\alpha_0,\dots,\hat{\alpha_i},\dots,\alpha_{n+1}}.$$

Def. Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes heißen **Čech-Homologiegruppen** von $\mathcal{F}$ bzgl. der Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Bem. $\check{H}(U,\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F})$ hängt nicht von der Überdeckung ab.

Def. Sei Y ein topol. Raum und X dessen simpl. Menge der singulären Simplizes. Die Homologiegruppen von $C_\bullet(X;A)$ heißen **singuläre Homologiegruppen** $H_n(Y;A)$ von Y mit Koeff. A.

Def. Sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mft, $\Omega^k(M)$ das $C^\infty(M)$-Modul der k-Formen auf M. Die **äußere Ableitung** $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ ist in lokalen Koordinaten $(x^1,\dots,x^n)$ definiert durch

$$\mathrm{d}\left(\sum_{|I|=k} f_I \mathrm{d}x^I\right) = \sum_{|I|=k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^I.$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Komplexes $\Omega^\bullet(M)$ heißen **De-Rham-Kohomologiegruppen**.

Def. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und A ein $\mathfrak{g}$-Modul. Setze $C^k(\mathfrak{g},A) := L(\wedge^k \mathfrak{g}, A)$ und definiere $\mathrm{d} : C^k(\mathfrak{g},A) \to C^{k+1}(\mathfrak{g},A)$ durch eine allgemeine Cartan-Formel

$$(\mathrm{d}c)(g_1,\dots,g_{k+1}) := \sum_{1\le j<l\le k+1} (-1)^{j+l-1} c([g_j,g_l], g_1, \dots, \hat{g_j}, \dots, \hat{g_l}, \dots, g_{k+1})$$
$$+ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j g_j c(g_1,\dots,\hat{g_j},\dots,g_{k+1}).$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Kokettenkomplexes werden mit $H^\bullet(\mathfrak{g},A)$ bezeichnet.

Def. Eine **Kettenhomotopie** zw. Morphismen $f,g : C_\bullet \to D_\bullet$ von Kettenkomplexen ist eine Folge von Homomorphismen $k_n : C_n \to D_{n+1}$ mit $\forall\, n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1}^D \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n^C = f_n - g_n$.

Lem. Seien $f,g : C_\bullet \to D_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt

$$H_n(f) = H_n(g) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Prop.
- Seien $\phi,\psi : X \to Y$ homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Dann sind die induzierten Abbildungen $\phi_*,\psi_* : C_\bullet(X;A) \to C_\bullet(Y;A)$ kettenhomotop.
- Seien $\phi,\psi : M \to N$ zwei glatt homotope Abbildungen von $\mathcal{C}^\infty$-Mften. Dann sind $\phi^*,\psi^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$.

Kor. Homotopieäquivalente Räume besitzen isomorphe singuläre Homologiegruppen.

Abelsche und additive Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A1**, wenn sie über **Ab** angereichtert ist, d. h. die Morphismenmengen sind ab. Gruppen und die Verknüpfung

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)\times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

ist für alle $X,Y,Z\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ bilinear.

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A2**, wenn es ein **Nullobjekt** $0\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt mit

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,0)=\text{Nullgruppe}=\{\mathrm{id}_0\}.$$

Bem. Dann ist auch $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,0)=\mathrm{Hom}(0,X)=0$ für alle $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A3**, wenn es für alle $X,Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt $X\oplus Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (genannt **direkte Summe**) und Morphismen

$$X \underset{i_x}{\overset{p_X}{\leftrightarrows}} X\oplus Y \underset{i_Y}{\overset{p_Y}{\rightleftarrows}} Y$$

gibt mit • $p_X\circ i_X=\mathrm{id}_X$, • $p_Y\circ i_Y=\mathrm{id}_Y$, • $p_Y\circ i_X=0$,
• $p_X\circ i_Y=0$, • $(i_X\circ p_X)+(i_Y\circ p_Y)=\mathrm{id}_{X\oplus Y}$.

Bem. $X\oplus Y$ ist sowohl Produkt als auch Koprodukt von X und Y.

Def. Der **Kern** $\ker\varphi$ eines Morphismus $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ist ein Paar $(K\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),k\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K,X))$ mit sodass $\varphi\circ k=0$, sodass es für alle $k'\in\mathrm{Hom}(K',X)$ mit $\varphi\circ k'$ einen eindeutigen Morphismus $h\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K',K)$ mit $k'=k\circ h$ gibt.

Bem. Die Definition des Kerns ist äquivalent zur folgenden:
Der Kern von φ ist das darstellende Obj. $K\in\mathrm{Ob}(\mathbf{Ab})$ des Funktors

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Ab},\quad Z\mapsto\ker(\varphi\circ - : X(Z)\to Y(Z)),\quad f\mapsto(-\circ f).$$

Def. Der **Kokern** $\operatorname{coker}\varphi$ eines Morphismus $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ist ein Paar $(C\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),c\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,C))$ mit $c\circ\varphi=0$, sodass es für alle $c'\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,C')$ mit $c'\circ\varphi=0$ einen eindeutigen Morphismus $h\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,C')$ mit $c'=h\circ c$ gibt.

Bem. Die Definition des Kokerns ist äquivalent zur folgenden:
Der Kern von φ ist ein Morphismus $c\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,C)$, sodass

$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,Z)\xrightarrow{c\circ-}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)\xrightarrow{\varphi\circ-}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)\to 0$$

für alle $Z\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ exakt ist.

Achtung. Der Kokern ist *nicht* das darstellende Obj. des Funktors

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Ab},\quad Z\mapsto\operatorname{coker}(\varphi\circ - : X(Z)\to Y(Z)),\quad f\mapsto(-\circ f).$$

Bem. Kern und Kokern sind eindeutig bis auf Isomorphismus.

Def. Sei $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Dann heißt
- $\operatorname{im}\varphi:=\ker(\operatorname{coker}\varphi)$ **Bild** von φ,
- $\operatorname{coim}\varphi:=\operatorname{coker}(\ker\varphi)$ **Kobild** von φ.

Lem. Kerne sind monomorph, Kokerne epimorph.

Lem. • Sei (K,k) der Kern von φ. Dann gilt

$$\varphi\text{ ist ein Monomorphismus}\iff K\cong 0.$$

- Sei (C,c) der Kokern von φ. Dann gilt

$$\varphi\text{ ist ein Epimorphismus}\iff C\cong 0.$$

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A4**, wenn für alle $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ eine Sequenz

$$K\xrightarrow{k}X\xrightarrow{i}I\xrightarrow{j}Y\xrightarrow{c}C$$

existiert mit folgenden Eigenschaften: • $\varphi=j\circ i$
- (K,k) ist der Kern, (C,c) der Kokern von φ,
- (I,i) ist der Kokern von k, (I,j) der Kern von c.

Diese Sequenz heißt **kanonische Zerlegung** von φ.

Bem. Die kanonische Zerlegung ist eindeutig bis auf eindeutigen Iso.

Bem. Angenommen, $\mathcal{C}$ besitzt Kerne und Kokerne.
Dann gibt es für alle $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ die Diagramme

$$\ker\varphi\xrightarrow{k}X\xrightarrow{i}\operatorname{coim}\varphi,\qquad\operatorname{im}\varphi\xrightarrow{j}Y\xrightarrow{c}\operatorname{coker}\varphi.$$

Aus den univ. Eigenschaften von Kern u. Kokern folgt die Existenz eines Morphismus $l\in\mathrm{Hom}(\operatorname{coim}\varphi,\operatorname{im}\varphi)$ mit $j\circ l\circ i=\varphi$.
Das Ax. **A4** gilt genau dann, wenn l für alle φ ein Isomorphismus ist.

Def. • Eine **präadditive** Kategorie erfüllt das Axiom **A1**.
- Eine **additive** Kategorie erfüllt die Axiome **A1-A3**.
- Eine **präab.** Kategorie ist additiv und besitzt Kerne und Kokerne.
- Eine **abelsche** Kategorie erfüllt die Axiome **A1-A4**.

Bem. Die Axiome **A1-A4** sind selbstdual, d. h. eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist genau dann (prä-)additiv / (prä-)abelsch, wenn $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ es auch ist.

Bspe. Ab. Kategorien sind: • **Ab**, • R-**Mod**, • **PAb**(X).

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **balanciert**, falls $\forall\,(f:X\to Y)\in\mathcal{C}$ gilt:

$$f\text{ ist epi und mono}\iff f\text{ ist ein Isomorphismus}.$$

Prop. Abelsche Kategorien sind balanciert.

Def. • Ein Mono- / Epimorphismus heißt **normal** / **konormal**, wenn er Kern / Kokern eines Morphismus ist.
- Eine präadd. Kategorie $\mathcal{A}$ heißt normal / konormal wenn jeder Mono- / Epimorphismus in $\mathcal{A}$ normal / konormal ist.

Lem. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.
- Sei $X\xrightarrow{\varphi}Y\in\mathcal{A}$ ein Monomorphismus und (C,c) dessen Kokern. Dann ist (X,φ) der Kern von c.
- Sei $X\xrightarrow{\varphi}Y\in\mathcal{A}$ ein Epimorphismus und (K,k) dessen Kern. Dann ist (Y,φ) der Kokern von k.

Kor. Ab. Kategorien sind binormal, d. h. normal u. konormal.

Lem. Jede k. e. S. $0\to X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\to 0$ in einer abelschen Kategorie ist kanonisch isomorph zur Sequenz

$$0\to\ker g\to Y\to\operatorname{coker}f\to 0.$$

Lem (Viererlemmata)**.** Sei folgendes kommutatives Diagramm in einer abelschen Kategorie mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[d, hook, "\delta"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D'
\end{tikzcd}$$

Sei α epimorph und δ monomorph.
• Ist γ epimorph, so auch β. • Ist β monomorph, so auch γ.

Bem. Die Aussagen der beiden Viererlemmata sind zueinander dual.

Kor (**Fünferlemma**)**.** Sei folgendes kommutatives Diagramm in einer abelschen Kategorie mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

Sind α, β, δ und ϵ Isomorphismen, dann auch γ.

Lem (**Schlangenlemma**)**.** Sei folgendes kommutatives Diagramm in einer abelschen Kategorie mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' &
\end{tikzcd}$$

Dann gibt es einen Verbindungshomomorphismus $\delta:\ker\gamma\to\operatorname{coker}\alpha$, mit dem folgende Sequenz exakt ist:

$$\ker\alpha\to\ker\beta\to\ker\gamma\xrightarrow{\delta}\operatorname{coker}\alpha\to\operatorname{coker}\beta\to\operatorname{coker}\gamma.$$

Lem. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\in\mathcal{A}$ mit $g\circ f=0$. Sei (K,k) der Kern von g und (C,c) der Kokern von f. Deren univ. Eigenschaften induzieren Morphismen a, b wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dr, "b"] & \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "a"'] & Y \arrow[u, "c"'] \arrow[r, "g"] & Z \\
 & K \arrow[u, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Es gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\operatorname{coker}a\cong\ker b$.

Def. • Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie. Indem man abelsche Gruppen durch Objekte aus A und Gruppenmorphismen durch Morphismen in $\mathcal{A}$ ersetzt, kann man verallgemeinern: **(Ko-)Kettenkomplex**, **Morphismus von (Ko-)Komplexen**
- Sei $\mathcal{A}$ sogar abelsch. Die n**-te Homologie** $H_n(C_\bullet)$ eines Kettenkomplexes $C_\bullet$ aus $\mathcal{A}$ ist der Kokern der Abb. $a_n:C_n\to\ker\partial_{n-1}$, die durch die universelle Eigenschaft des Kerns induziert wird.
- Ein Kettenkomplex heißt **exakt** oder **azyklisch**, wenn

$$\forall\,n\in\mathbb{Z}\;:\;H_n(C_\bullet)\cong 0.$$

Bem. Das letzte Lemma besagt, dass $H_n(C_\bullet)$ isomorph zum Kern der Abbildung $b_n:\operatorname{coker}\partial_n\to C_{n-1}$, die durch die universelle Eigenschaft des Kokerns induziert wird, ist.

Exakte Sequenzen von Garben

Lem. Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben, (K, k) dessen Kern und (C, c) dessen Kokern. Dann ist (sK, sk) der Kern und (sC, sc) der Kokern von $s\varphi : s\mathcal{F} \to s\mathcal{G}$.

Prop. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben über einem topologischen Raum X, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben und

$$\mathcal{H} \xrightarrow{k} i\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{H} \xrightarrow{j} i\mathcal{G} \xrightarrow{c} \mathcal{H}$$

dessen kanonische Zerlegung von $i\varphi$ in $\mathbf{PAb}(X)$. Dann ist

$$s\mathcal{H} \xrightarrow{s(k)} si\mathcal{F} \cong \mathcal{F} \xrightarrow{s(i)} s\mathcal{H} \xrightarrow{s(j)} \mathcal{G} \cong si\mathcal{G} \xrightarrow{s(c)} s\mathcal{H}$$

eine kanonische Zerlegung von $si\varphi \cong \varphi$.

Kor. $\mathbf{Ab}(X)$ ist eine abelsche Kategorie.

Bem. Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ eine Sequenz von Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X.

- Die Sequenz ist eine exakte Sequenz von Prägarben, wenn für alle offenen $U \subseteq X$ gilt: $\operatorname{im} f_U = \ker g_U$.
- Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sogar Garben. Dann ist die Seq. eine ex. Seq. von Garben, wenn für alle offenen $U \subseteq X$ gilt, dass $\operatorname{im} f_U \subseteq \ker g_U$ und jeder Schnitt $t \in \ker g_U$ lokal Urbilder besitzt, d. h. es existiert eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und eine Familie von Schnitten $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$ mit $\forall\, i \in I \,:\, f_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$.

Lem.
- Eine Sequenz $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ von Garben ab. Gruppen ist genau dann exakt, wenn sie halmweise exakt ist, d. h. für alle $x \in X$ ist die induzierte Sequenz $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ exakt.
- Wenn eine Sequenz von Garben aufgefasst als Sequenz von Prägarben exakt ist, dann ist sie es auch als Sequenz von Garben.
- Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine *k. e. S.* von Prägarben auf einem topol. Raum und $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ sogar Garben. Dann ist auch $\mathcal{G}$ eine Garbe.

Funktoren zwischen abelschen Kategorien

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zw. additiven Kategorien heißt **additiv**, falls für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ die Abb. $F : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(FX, FY)$ ein Morphismus von abelschen Gruppen ist.

Def. Ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zw. ab. Kategorien heißt a) **exakt**, b) **links-exakt**, c) **rechts-exakt**, falls für alle k. e. S. $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ aus $\mathcal{A}$ auch folgende Seq. in $\mathcal{B}$ exakt ist:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ 0 \to FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \to 0 \\ &\text{b)}\ \ 0 \to FX \longrightarrow FY \longrightarrow FZ \\ &\text{c)}\ \ \phantom{0 \to{}} FX \longrightarrow FY \longrightarrow FZ \to 0. \end{aligned}$$

Def. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ eine zerfallende k. e. S. in $\mathcal{A}$. Dann ist auch $0 \to FX \to FY \to FZ \to 0$ eine zerfallende k. e. S.

Prop. Sei X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen. Der Funktor

$$\mathbf{Ab}(X) \to \mathbf{Ab}, \ \ \mathcal{F} \mapsto \Gamma(U, \mathcal{F})$$

ist links-exakt.

Bem. Die Prop gilt auch für Garben abelscher Gruppen auf Siten.

Prop. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Dann sind die Funktoren

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}, && Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) && (X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \text{ fest}), \\ &\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}, && X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) && (Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \text{ fest}) \end{aligned}$$

beide links-exakt.

Def. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt
- $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ heißt **projektiv**, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ exakt ist.
- $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ heißt **injektiv**, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ exakt ist.

Prop. Sei A ein Ring, A-**Mod** und **Mod**-A die Kategorien der A-Links- bzw. A-Rechtsmoduln. Dann sind die Funktoren

$$\begin{aligned} &A\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}, \ Y \mapsto X \otimes_A Y && (X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}\text{-}A) \text{ fest}), \\ &\mathbf{Mod}\text{-}A \to \mathbf{Ab}, \ X \mapsto X \otimes_A Y && (Y \in \mathrm{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \text{ fest}) \end{aligned}$$

beide rechts-exakt.

Def. Sei A ein Ring. Ein Modul $X \in \mathrm{Ob}\, \mathbf{Mod}\text{-}A$ / $Y \in \mathrm{Ob}\, A\text{-}\mathbf{Mod}$ heißt **flach**, falls der Funktor $Y \mapsto X \otimes_A Y$ / $X \mapsto X \otimes_A Y$ exakt ist.

Konvention. Falls in einem Diagramm in einer Zeile das Nullobjekt vorkommt, so wird diese Zeile als exakt angenommen.

Bem. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ bzw. $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ist genau dann projektiv bzw. injektiv, wenn

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & & \\ Y \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{tikzcd} Y & & \\ X \arrow[u, dashed, "\psi"] & X' \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[ul, "\varphi"'] & 0. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(Projektivitätsdiagramm) (Injektivitätsdiagramm)

Lem. Ein A-Modul X ist genau dann projektiv, wenn er ein direkter Summand eines freien A-Moduls ist, d. h. wenn ein A-Modul Y existiert, sodass $X \oplus Y$ frei ist.

Lem (Baer-Kriterium)**.** Ein A-Linksmodul X ist genau dann injektiv, wenn für alle A-Linksideale $I \subset X$ und Modul-Morphismen $q : I \to Q$ eine Fortsetzung $\tilde{q} : Q \to Q$ mit $q = \tilde{q}|_I$ existiert.

Lem. Eine ab. Gruppe X ist genau dann als $\mathbb{Z}$-Modul injektiv, wenn man in A durch ganze Zahlen teilen kann, d. h.

$$\forall\, a \in X, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \,:\, \exists\, b \in X \,:\, nb = a.$$

Bspe. Es sind injektive abelsche Gruppen: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_{(p)}/\mathbb{Z}$

Def. Sei X ein A-Rechtsmodul. Eine **Relation in A** von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in X$ ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ mit $\sum x_i a_i = 0 \in X$. Allgemeiner ist eine **Relation in einem A-Linksmodul Y** von $x_1, ..., x_n \in X$ ein Tupel $(y_1, ..., y_n) \in Y^n$ mit $\sum x_i \otimes y_i = 0 \in X \otimes Y$.

Bem. Sei X ein A-Rechts-, Y ein A-Linksmodul und $x_1, ..., x_n \in X$. Für $j = 1, \ldots, m$ sei $y^{(j)} \in Y$ beliebig und $(a_1^{(j)}, ..., a_n^{(j)}) \in A^n$ eine Relation von den x_i in A. Dann ist $(y_1, ..., y_n) \in Y^n$ mit $y_i := \sum a_i^{(j)} y^{(j)}$ eine Relation von den x_i in Y.

Lem. Für einen A-Linksmodul Y sind äquivalent:
- Y ist flach (d. h. $X \mapsto X \otimes_A Y$ ist exakt).
- Alle Relationen von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in X$ in einem A-Rechtsmodul X erhält man durch die eben beschriebene Konstruktion.
- Y ist filtrierter Kolimes von freien Moduln (Lazards Kriterium).

Lem.
- Freie Moduln sind flach.
- Direkte Summanden von flachen Moduln sind flach.
- Induktive Limiten von flachen Moduln sind flach.