

# Zusammenfassung Modellkategorien

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Bem.** Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

## Die Ordinalzahlen

**Def.** Eine **Wohlordnung** auf einer Menge  $S$  ist eine Totalordnung auf  $S$  bezüglich der jede nichtleere Teilmenge  $A \subseteq S$  ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel  $(S, \leq)$  bestehend aus einer Menge  $S$  und einer Wohlordnung  $\leq$  auf  $S$ .

**Bem.** Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in  $S$  keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen  $\dots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \dots$ .

**Bem.** Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

**Axiom** (Wohlordnungssatz). Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

**Def.** Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

**Def.** Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

**Bem.** Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit  $\mathcal{O}_n$  bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leq_S)] \leq [(T, \leq_T)] : \iff \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leq_S) \rightarrow (T, \leq_T).$$

**Notation.** •  $0 := [\emptyset]$ , •  $n := [\{1, \dots, n\}]$  für  $n \in \mathbb{N}$ , •  $\omega := [\mathbb{N}]$  mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

**Bem.** Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega^\omega, \dots$$

**Prinzip** (**Transfinite Induktion**).

Sei  $P : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbf{Prop}$  eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

**Def.** Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert: Für  $\alpha = [(S, \leq_S)]$  und  $\beta = [(T, \leq_T)] \in \mathcal{O}_n$  ist

•  $\alpha + \beta := [(S \sqcup T, \leq_{S \sqcup T})]$ , wobei gilt:

$$\leq_{S \sqcup T} \upharpoonright_{S \times S} := \leq_S, \quad \leq_{S \sqcup T} \upharpoonright_{T \times T} := \leq_T, \quad S <_{S \sqcup T} T.$$

•  $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leq_{S \times T})]$  mit der lexikogr. Ordnung

$$(s_1, t_1) \leq_{S \times T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leq_S s_2)$$

•  $\alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \rightarrow T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leq)]$  mit

$$f < g : \iff \exists t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

**Bem.** Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null  $0 := [(\emptyset, \leq)] \in \mathcal{O}_n$ .

b) Die Nachfolgerzahl  $\alpha + 1$  einer Zahl  $\alpha \in \mathcal{O}_n$ .

c) Die Limeszahl  $\lim A := \sup A$  einer Teilmenge  $A \subset \mathcal{O}_n$ .

**Bem.** Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \alpha + 0 := \alpha & \text{b)} & \alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1 & \text{c)} & \alpha + \lim A := \lim \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in A\} \\ \alpha \cdot 0 := 0 & \alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha & \alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\} \\ \alpha^0 := 1 & \alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha & \alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\} \end{array}$$

**Def.** Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel  $(S, +, \cdot, 0)$ , sodass  $(S, +, 0)$  ein Monoid und  $(S, \cdot)$  eine Halbgruppe ist mit

$$\bullet a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \bullet a \cdot 0 = 0.$$

**Lem** (Rechenregeln in  $\mathcal{O}_n$ ). •  $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$  •  $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$   
•  $\alpha^0 = 1$  •  $0^\alpha = 0$  für  $\alpha > 0$  •  $1^\alpha = 1$  •  $\alpha^1 = \alpha$   
•  $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$  •  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

•  $\mathcal{O}_n$  ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)

• Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht!*

• Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.

• Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.

• Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:

$$\forall \beta < \gamma : \quad \alpha + \beta < \alpha + \gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \quad (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \quad (\alpha > 1).$$

**Lem.** Jedes  $\alpha \in \mathcal{O}_n$  kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \dots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$  und  $\beta_1 > \dots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$ .

## Kategorientheorie

**Def.** Eine (**schwache**) **2-Kategorie**  $\mathcal{C}$  besteht aus

- einer Ansammlung  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  von Objekten,
- für jedes Paar  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  von Objekten einer Kategorie

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ A \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{array} B \right\},$$

- für jedes Tripel  $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$  von Objekten einem Funktor

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

- für jedes Objekt  $\mathcal{C} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  einem Objekt  $\text{Id}_{\mathcal{C}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ ,
- für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  einem natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} : - \circ (- \circ -) \implies (- \circ -) \circ -,$$

wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \text{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$

- und für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  natürlichen Isomorphismen

$$\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \implies \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (- \circ \text{Id}_{\mathcal{C}}) \implies \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle  $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} K(H(GF)) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}}} & (KH)(GF) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{G}}} ((KH)G)H \\ \downarrow K\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} & & \alpha_{\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}} F \uparrow \\ K((HG)F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{G}}} & (K(HG))F \end{array}$$

- Für alle  $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathcal{C}$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{D}, \mathcal{E}}} & (G \circ \text{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \\ & \searrow G\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} & \swarrow \rho_{\mathcal{D}, \mathcal{E}} F \\ & G \circ F & \end{array}$$

**Bspe.** • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.

- Jede Kategorie  $\mathcal{C}$  ist natürlich eine 2-Kategorie.

- Die Kategorie der Ringe  $\mathbb{R}$  mit  $\text{Ob}(\mathbb{R}) := \{\text{Ringe mit Eins}\}$  und  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) := \text{Kat. der } B\text{-}A\text{-Bimoduln mit } N \circ M := N \otimes_B M$  für  $M \in \text{Hom}(A, B)$  und  $N \in \text{Hom}(B, C)$ . Dabei ist  $\text{Id}_A := A$ .

**Def.** Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann  $\otimes$  anstelle von  $\circ$  geschrieben.

**Def.** Sei  $S : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Ein **Ende**  $E \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  von  $S$  ist eine Familie  $\alpha_c : E \rightarrow S(c, c)$ ,  $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  von Morphismen in  $\mathcal{A}$ , sodass für alle  $(f : c \rightarrow c') \in \mathcal{C}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & S(c, c) & & \\ & \nearrow \alpha_c & & \searrow S(\text{id}_c, f) & \\ E & & & & S(c, c') \\ & \searrow \alpha_{c'} & & \nearrow S(f, \text{id}_{c'}) & \\ & & S(c', c') & & \end{array}$$

kommutiert, und  $E$  universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler **S-Keil**.

**Notation.**  $E = \int_c S(c, c)$ .

**Bem.** Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden:  $\lim F = \int_c F(c)$ ; der Integrand ist  $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ .

**Bem.** Das duale Konzept ist das eines ~~Anfangs~~ Koendes  $\int_c^{\text{c}} S(c, c)$ .

**Bsp.** Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_c \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \cong \text{Nat}(F, G).$$

**Satz** (Fubini). Sei  $S : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d, c)} S(d, d, c, c) \cong \iint_{dc} S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und  $\int_c S(d, d', c, c)$  für alle  $d, d' \in \mathcal{D}$  existieren.

**Bsp.** Sei  $R$  ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt  $*$ . Ein additiver Funktor  $R^{(\text{op})} \rightarrow \mathbf{Ab}$  ist nichts anderes als ein  $R$ -Linksmodul (bzw.  $R$ -Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

**Bsp** (Ninja-Yoneda-Lemma). Für jede Prägarbe  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  gilt

$$F \cong \int^c F(c) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine 2-Kategorie. Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{C}$ . Eine **Adjunktion** von  $F \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  und  $G \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  ist geg. durch Morphismen  $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$  (genannt **Eins**) und  $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  (**Koeins**) mit  $G\epsilon \circ \eta G = \text{Id}_G$  und  $\epsilon F \circ F\eta = \text{Id}_F$ . Man notiert  $F \dashv G$ .

**Lem.** R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

*Bem.* Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren. Dann gilt  $F \dashv G$  genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\text{Hom}(F \circ -, -) \cong \text{Hom}(-, G \circ -)$$

**Bsp.**  $\exists f \dashv f^* \dashv \forall f$

**Bsp.** Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein  $B$ - $A$ -Modul  $M$  ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn  $M$  als Rechts- $A$ -Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

*Bem.* Sind  $\eta$  und  $\epsilon$  in  $F \dashv G$  sogar Isomorphismen, so heißt  $F \dashv G$  auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von  $F$  und  $G$  sowie einem der Morphismen  $\epsilon, \eta$ ) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

## Kan-Erweiterungen

**Def.** Sei  $A \xleftarrow{T} M \xrightarrow{K} C$  ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE)  $(R, \epsilon)$  von  $T$  längs  $K$  besteht aus

- einem Morphismus  $R : C \rightarrow A$
- einem 2-Morphismus  $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$ ,

sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE  $(\tilde{R} : C \rightarrow A, \epsilon : \tilde{R} \circ K \Rightarrow T)$  gibt es genau ein  $\sigma : \tilde{R} \Rightarrow R$  mit  $\epsilon \circ \sigma K = \tilde{\epsilon}$ . Notation:  $R = \text{Ran}_K(T)$

*Bem.*  $(R, \epsilon)$  ist RKE von  $T$  längs  $K \iff \text{Hom}(\tilde{R}, R) \rightarrow \text{Hom}(\tilde{R} \circ K, T)$  ist bijektiv für alle  $\tilde{R} : C \rightarrow A$ .

**Prop.** RKE sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

**Bsp.** Die RKE eines bel. Morphismus  $T : M \rightarrow A$  längs  $\text{Id}_M$  existiert stets und ist gegeben durch  $(T, T \circ \text{Id}_M \Rightarrow T)$ .

**Bsp.** In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\text{Ran}_K(T) = (\text{Hom}_M(K, T), \text{ev} : \text{Hom}_M(K, T) \otimes_C K \Rightarrow T).$$

**Bsp.** Sei  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{1}$  der eindeutig best. Funktor. Sei  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von  $T$  längs  $K$  dasselbe wie ein Limes von  $T$ .

**Thm.** Seien  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  und  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  Funktoren. Existiere für alle Objekte  $c \in \mathcal{C}$  der Limes

$$R(c) := \lim_{f:c \rightarrow Km} T(m).$$

Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ausdehnen und zwar zu einer RKE von  $T$  längs  $K$ .

*Bem.* Ist  $\mathcal{M}$  klein und  $\mathcal{C}$  lokal klein und ist  $\mathcal{A}$  vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktwise RKE**.

**Lem.** Eine RKE ist genau dann punktwise, wenn sie für alle  $a \in \mathcal{A}$  unter dem Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$  erhalten bleibt.

**Thm.** Sei  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Betrachte  $K^* : [C, A] \rightarrow [M, A]$ .

- Wenn ein Funktor  $\text{Ran}_K : [M, A] \rightarrow [C, A]$  mit  $K^* \dashv \text{Ran}_K$  existiert, so ist für alle  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$   $\text{Ran}_K(T)$  eine RKE von  $T$  längs  $K$ .
- Existiere für alle  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  eine RKE  $\text{Ran}_K(T)$ . Dann kann man die Zuordnung  $T \mapsto \text{Ran}_K(T)$  zu einem Rechtsadjungierten von  $K^*$  ausdehnen.

**Thm.** Sei  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$  in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- $G$  besitzt einen Linksadjungierten.
- $\text{Ran}_G(\text{Id}_A)$  existiert und bleibt von  $G$  erhalten, d. h.  $G \circ \text{Ran}_G(\text{Id}_A) = \text{Ran}_G(G \circ \text{Id}_A)$ .

In diesem Fall gilt  $\text{Ran}_G(\text{Id}_A) \dashv G$  und  $\text{Ran}_G(\text{Id}_A)$  wird sogar von allen Morphismen  $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Y}$  bewahrt.

**Thm.** Rechtsadjungierte bewahren RKE.

**Kor.** Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

**Bsp.** Sei  $G : \mathbf{Field} \rightarrow \mathbf{Ring}$  der Vergissfunktor. Dann ist

$$(\text{Ran}_G(G))(R) = \prod_{\mathfrak{p} \in R} \text{Quot}(R/\mathfrak{p}).$$

## Algebraische Strukturen in Kategorien

**Def.** Eine **Retrakt** ist ein Morphismus  $r : Y \rightarrow X$ , sodass ein Morphismus  $i : X \rightarrow Y$  mit  $r \circ i = \text{id}_X$  existiert. Sprechweise:  $X$  ist ein Retrakt von  $Y$  (vermöge  $i$ ).

**Bsp.** Ein Modul  $U$  ist genau dann Retrakt von einem Modul  $M$ , wenn  $U$  ein direkter Summand von  $M$  ist.

**Prop.** „ $-$  ist Retrakt von  $-$ “ ist eine reflexive und trans. Relation.

**Def.** Ein **Retrakt eines Morphismus**  $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}$  ist ein Morph.  $g : X \rightarrow Y$ , sodass es ein komm. Diagramm folgender Form gibt:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & A \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{s} & B \end{array}$$

*Bem.* Ein Retrakt von  $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$  ist ein Retrakt von  $f \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\rightarrow})$ .

**Prop.** • Retrakte von Isomorphismen sind Isomorphismen.

- Sei  $f \circ g = \text{id}$ . Dann ist  $f$  ein Retrakt von  $g \circ f$ .

**Prop.** Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor. Dann ist die Klasse  $\{f \in \mathcal{C}^{\rightarrow} \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$  abgeschlossen unter Retrakten.

**Def.** Sei  $i : A \rightarrow X$  und  $p : E \rightarrow B$ . Dann werden als äq. definiert:

- $p$  ist **i-injektiv** •  $i$  ist **p-projektiv** •  $i \boxtimes p$
- $i$  hat die Linkshochhebungseigenschaft (LHHE) bzgl.  $p$
- Für alle  $f, g$  wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales  $\lambda$ , sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow i & \exists \lambda \nearrow & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

**Bsp.** Wegeliftung aus der Topologie:  $i : \{0\} \rightarrow [0, 1]$  erfüllt die LHHE bezüglich allen Überlagerungen  $\pi : E \rightarrow B$ .

**Bsp.** Sei  $P$  ein Objekt einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$ . Dann ist  $P$  genau dann **projektiv**, wenn  $(0 \rightarrow P)$  die LHHE bzgl. aller Epimorphismen in  $\mathcal{A}$  hat. Dual ist  $I$  injektiv, wenn alle Monos in  $\mathcal{A}$  die LHHE bzgl.  $(I \rightarrow 0)$  besitzen.

**Bsp.** In der Kategorie der Mengen gilt: Alle Injektionen haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

**Lem** (**Retrakt-Argument**). Sei  $f = q \circ j$ . Ist  $f$   $q$ -projektiv ( $f \boxtimes q$ ), so ist  $f$  ein Retrakt von  $j$ .

Zellenkomplexe

**Def.** Sei  $\lambda$  eine Ordinalzahl. Eine  **$\lambda$ -Sequenz** in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein kolimesbewahrender Funktor  $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$  (wobei man  $\lambda$  als Präordnungskategorie aller  $\beta < \lambda$  auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus  $X_0 \rightarrow \operatorname{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$ .

*Bem.* Kolimesbewahrung bedeutet:  $\operatorname{colim}_{\alpha < \beta} X_\alpha = X_\beta$  für alle  $\beta < \lambda$ .

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine kovollständige Kategorie,  $I \subset \operatorname{Mor}(\mathcal{C})$  eine Menge.

- Ein **relativer  $I$ -Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer  $\lambda$ -Sequenz  $Z$ , sodass  $\forall \alpha \in \mathcal{O}_n$  mit  $\alpha + 1 < \lambda$  ein Pushoutdiagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & Z_\alpha \\ \downarrow f & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & Z_{\alpha+1} \end{array}$$

$\leftarrow$  **Anklebeabbildung**

$\leftarrow$  **Zelle**

mit  $f \in I$  existiert. Sprechweise:  
„ $Z_{\alpha+1}$  entsteht aus  $Z_\alpha$ , indem wir  $B$  längs  $C$  ankleben“

- Ein Objekt  $A \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$  heißt  **$I$ -Zellenkomplex**, wenn der Morph.  $0 \rightarrow A$  aus dem initialen Obj. ein relativer  $I$ -Zellenkomplex ist.

**Bsp.** CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind  $I$ -Zellenkomplexe mit  $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geq 0\}$  (und  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ ).

**Bspe.** • Identitäten  $A \rightarrow A$  sind relative  $I$ -Zellenkomplexe.

- Das initiale Objekt ist ein absoluter  $I$ -Zellenkomplex.

**Lem.** Sei  $Z : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$  eine  $\lambda$ -Sequenz. Sei jeder Morphismus  $Z_\beta \rightarrow Z_{\beta+1}$  ( $\beta + 1 < \lambda$ ) ein Pushout eines Morphismus aus  $I$ . Dann ist die transfinite Komposition von  $Z$  ein  $I$ -Zellenkomplex.

**Thm.** Die Klasse der relativen  $I$ -Zellenkomplex ist abgeschl. unter:

- transfinite Kompositionen
- Isomorphismen
- Koprodukt