

# Zusammenfassung Stochastik I

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

## Der abstrakte Maß- und Wkts-Begriff

**Def.** Eine **Ereignisalgebra** oder **Boolesche Algebra** ist eine Menge  $\mathfrak{A}$  mit zweistelligen Verknüpfungen  $\wedge$  („und“) und  $\vee$  („oder“), einer einstelligen Verknüpfung  $\neg$  (Komplement) und ausgezeichneten Elementen  $U \in \mathfrak{A}$  (unmögliches Ereignis) und  $S \in \mathfrak{A}$  (sicheres Ereignis), sodass für alle  $A, B, C \in \mathfrak{A}$  gilt:

- $A \wedge A = A$
- $A \wedge B = B \wedge A$
- $A \wedge S = A$
- $A \wedge U = U$
- $A \wedge \overline{A} = U$
- $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
- $A \vee A = A$
- $A \vee B = B \vee A$
- $A \vee S = S$
- $A \vee U = A$
- $A \vee \overline{A} = S$
- $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

**Def.** Sei  $\mathfrak{A}$  eine Ereignisalgebra und  $A, B$  Ereignisse.

- Durch  $A \leq B : \iff A \wedge B = B$  (gesprochen  $A$  **impliziert**  $B$ ) ist auf  $\mathfrak{A}$  eine Partialordnung definiert.
- $A$  und  $B$  heißen **äquivalent**, falls  $A \leq B$  und  $B \leq A$ .
- $A$  und  $B$  heißen **unvereinbar**, falls  $A \wedge B = U$ .

**Korollar.** In einer Ereignisalgebra  $\mathfrak{A}$  gilt mit  $A, B \in \mathfrak{A}$ :

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \leq B \iff \overline{B} \leq \overline{A}$  (Kontraposition)
- $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
- $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$  (De Morgansche Regeln)

**Korollar.** Durch Induktion folgt aus den De Morganschen Regeln:

$$\left( \bigvee_{i=1}^n A_i \right) = \bigwedge_{i=1}^n \overline{A_i} \quad \text{und} \quad \left( \bigwedge_{i=1}^n A_i \right) = \bigvee_{i=1}^n \overline{A_i} \quad \text{für } A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}.$$

**Def.** Eine **Algebra** (Mengenalgebra) über  $\Omega$  ist ein System von Teilmengen  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  mit  $\Omega \in \mathfrak{A}$ , das unter endl. Vereinigungen und Komplementen stabil ist, d. h. für alle  $A, B \in \mathfrak{A}$  gilt:

- $\Omega \in \mathfrak{A}$
- $A \cup B \in \mathfrak{A}$
- $A^c := \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$

**Bemerkung.** Aus den De Morganschen Regeln folgt, dass Mengenalgebren auch unter endlichen Schnitten stabil sind.

**Satz** (Isomorphiesatz von Stone). Zu jeder Ereignisalgebra  $\mathfrak{A}$  gibt es eine Menge  $\Omega$ , sodass  $\mathfrak{A}$  isomorph zu einer Mengenalgebra über  $\Omega$  ist.

**Notation.**  $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  heißt **symm. Differenz**.

**Def.** Eine  **$\sigma$ -Algebra** über  $\Omega$  ist eine Algebra  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  über  $\Omega$ , die auch unter abzählbaren Vereinigungen stabil ist, d. h.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle Folgen } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{A}.$$

**Bemerkung.** Jede  $\sigma$ -Algebra ist auch unter abzählb. Schnitten stabil.

**Def.** Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ . Setze

$$\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \in \mathfrak{A}, \quad \liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \in \mathfrak{A}.$$

**Bemerkung.** In einer  $\sigma$ -Algebra, in der die Mengen mögliche Ereignisse beschreiben, ist der Limes Superior das Ereignis, das eintritt, wenn unendlich viele Ereignisse der Folge  $A_n$  eintreten. Der Limes Inferior tritt genau dann ein, wenn alle bis auf endlich viele Ereignisse der Folge  $A_n$  eintreten.

**Def.** Eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  **konvergiert** gegen  $A \in \mathfrak{A}$ , notiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ , falls  $A = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

**Satz.** Für isotone / antitone Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{A}$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

**Def.** Ein **Ring** (Mengenring) über  $\Omega$  ist ein System von Teilmengen  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  mit  $\emptyset \in \mathfrak{R}$ , das unter endlichen Vereinigungen und Differenzen stabil ist, d. h. für alle  $A, B \in \mathfrak{R}$  gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{R}$
- $A \cup B \in \mathfrak{R}$
- $A \setminus B \in \mathfrak{R}$

**Bemerkung.** Ein Ring ist auch unter Schnitten stabil, da

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B).$$

**Def.** Ein  **$\sigma$ -Ring** über  $\Omega$  ist ein Ring  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  über  $\Omega$ , der auch unter abzählbaren Vereinigungen stabil ist, d. h.

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle Folgen } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{A}.$$

**Bemerkung.** Jeder  $\sigma$ -Ring ist auch unter abzählb. Schnitten stabil.

**Satz.**  $\mathfrak{A}$  ist  $(\sigma$ -) Algebra  $\iff \mathfrak{A}$  ist  $(\sigma$ -) Ring mit  $\Omega \in \mathfrak{A}$ .

**Satz.** Sei  $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$  Familie von  $(\sigma$ -) Ringen /  $(\sigma$ -) Algebren über  $\Omega$ . Dann ist der Schnitt  $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$  ein  $(\sigma$ -) Ring / eine  $(\sigma$ -) Algebra über  $\Omega$ .

**Def.** Sei  $E \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . Setze

$$\mathcal{R}(E) := \{ \mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \in \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \text{ } \sigma\text{-Ring} \} \quad \text{und} \\ \mathcal{A}(E) := \{ \mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \in \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra} \}.$$

Dann heißen  $\rho(E) := \bigcap_{\mathfrak{R} \in \mathcal{R}(E)} \mathfrak{R}$ ,  $\sigma(E) := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(E)} \mathfrak{A}$  von  $E$  **erzeugter Ring** bzw. von  $E$  **erzeugte  $\sigma$ -Algebra**.

**Def.** Die **Borel-Mengen** in  $\mathbb{R}^1$  sind  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1) := \sigma(\mathcal{E})$ , wobei wir  $\mathcal{E}$  aus folgenden äquivalenten Optionen wählen dürfen:

- $\{(a, b] \mid a \leq b\}$
- $\{(a, b) \mid a \leq b\}$
- $\{G \subset \mathbb{R}^1 \mid G \text{ abgeschl.}\}$
- $\{[a, b] \mid a \leq b\}$
- $\{[a, b) \mid a \leq b\}$
- $\{F \subset \mathbb{R}^1 \mid F \text{ offen}\}$

**Notation.**  $\overline{\mathbb{R}^1} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, \infty]$

**Def.** Funktionen mit Wertebereich  $\overline{\mathbb{R}^1}$  heißen **numerisch**.

**Def.** Sei  $\mathfrak{R}$  ein Ring über  $\Omega$ . Eine Fkt.  $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$  heißt

- **Inhalt** auf  $\mathfrak{R}$ , falls  $\mu(\emptyset) = 0$  und  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  für alle  $A, B \in \mathfrak{R}$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gilt.

- **Prämaß** auf  $\mathfrak{R}$ , wenn  $\mu$  ein Inhalt ist und für alle Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{R}$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$  gilt:

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

- **Maß**, wenn  $\mu$  Prämaß und  $\mathfrak{R}$  in Wahrheit sogar eine  $\sigma$ -Algebra ist. Dann ist die letzte Voraussetzung in Punkt 2 immer erfüllt.

**Def.** Ein Inhalt/Maß  $\mu$  auf einem Ring / einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$

- heißt **endlich**, falls  $\mu(\Omega) < \infty$ ,
- heißt  **$\sigma$ -endlich**, falls eine Folge  $A_n$  in  $\mathfrak{A}$  existiert, sodass  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  und  $\forall i \in \mathbb{N} : \mu(A_i) < \infty$ .

**Notation.** Sei  $\Omega$  eine Menge,  $A \subset \Omega$ . Dann heißt

$$\chi_A = \mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto |\{\star \mid \omega \in A\}| = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

**Indikatorfunktion** von  $A$ .

**Bsp.** Sei  $\mathfrak{R}$  ein Ring über  $\Omega$  und  $\omega \in \Omega$ . Die Abbildung

$$\delta_\omega : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \mathbb{1}_A(\omega)$$

ist dann ein Prämaß auf  $\mathfrak{R}$ , genannt **Dirac-(Prä-)Maß**.

**Lemma.** Sei  $\mu$  ein Inhalt auf einem Ring  $\mathfrak{R}$ . Seien  $A, B \in \mathfrak{R}$  und  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $\mathfrak{R}$  mit  $\mu(A) < \infty$  und  $\forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) < \infty$ . Dann:

- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
- $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$  (Isotonie)
- $A \subset B \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- $\mu \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$  (Subadditivität)

**Satz.** Sei  $\mathfrak{R}$  ein Ring und  $\mu$  ein Inhalt. Es gelten für  $n \in \mathbb{N}$  und  $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{R}$  die Ein- und Ausschlussformeln

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}), \\ \mu(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}).$$

**Satz.** Sei  $\mu$  ein Inhalt auf  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . Wir betrachten die Aussagen:

- $\mu$  ist ein Prämaß auf  $\mathfrak{R}$ .
- Stetigkeit von unten: Für jede monoton wachsende Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{R}$  mit  $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ .
- Stetigkeit von oben: Für jede monoton fallende Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{R}$  mit  $\mu(A_0) < \infty$  und  $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ .
- Für jede monoton fallende Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{R}$  mit  $\mu(A_0) < \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ .

Dann gilt (i)  $\iff$  (ii)  $\implies$  (iii)  $\iff$  (iv). Falls  $\mu$  endlich ist, so gilt auch (iii)  $\implies$  (ii).

**Def.** Seien  $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ . Wir schreiben  $a \leq b$ , falls  $a_i \leq b_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$  gilt. Dann heißt

$$(a, b] := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid a_i < x_i \leq b_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, d\}\}$$

von  $a$  und  $b$  aufgespannter **Elementarquader** in  $\mathbb{R}^d$ .

**Def.** Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^1$  eine Funktion,  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  und  $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d$ . Dann heißt

$$(\Delta f)((x, x+h]) := \sum_{\delta_1, \dots, \delta_d \in \{0,1\}} (-1)^{d-(\delta_1+\dots+\delta_d)} f(x_1 + \delta_1 h_1, \dots, x_d + \delta_d h_d)$$

**Zuwachs** von  $f$  im Elementarquader  $(x, x+h]$ .

**Def.**  $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **maßerzeugende Funktion**, falls

- $G$  ist nicht-fallend in jedem Argument, d. h. für alle  $k \in \{1, \dots, d\}$  und  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$  ist  $f(x_1, \dots, x_{k-1}, -, x_{k+1}, \dots, x_d)$  nicht-fallend.
- $G$  ist rechtsseitig stetig in jedem Argument, d. h. für alle  $k \in \{1, \dots, d\}$  und  $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{h \downarrow 0} f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, x_d).$$

- Für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d$  ist der Zuwachs  $(\Delta G)((x, x+h]) \geq 0$ .

**Def.** Eine maßerzeugende Funktion  $F$  heißt **Verteilungsfunktion** (VF) in  $\mathbb{R}^d$ , falls zusätzlich gilt:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_d) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_d) = 0$$

für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$  und  $x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_d \in \mathbb{R}$  fest.

**Bemerkung.** Sei  $G_i : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^1$  für  $i \in \{1, \dots, d\}$  maßerzeugende Funktion im  $\mathbb{R}^1$ , dann ist

$$G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^1, \quad (x_1, \dots, x_d) \mapsto G_1(x_1) \cdot \dots \cdot G_d(x_d)$$

eine maßerzeugende Funktion in  $\mathbb{R}^d$  und es gilt für jeden Elementarquader  $(a, b] \subset \mathbb{R}^d$  mit  $a = (a_1, \dots, a_d)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_d)$ :

$$(\Delta G)((a, b]) = \prod_{i=1}^d (G_i(b_i) - G_i(a_i)).$$

**Satz.** Der Ring aller Elementarquader im  $\mathbb{R}^d$  ist

$$\mathfrak{R} := \left\{ \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i] \mid m \in \mathbb{N} \text{ und } (a_1, b_1], \dots, (a_m, b_m] \text{ disjunkte Elementarquader im } \mathbb{R}^d \right\}$$

und für jede maßerzeugende Funktion  $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^1$  definiert

$$\mu_G : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty), \quad \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i] \mapsto \sum_{i=1}^m (\Delta G)((a_i, b_i])$$

einen Inhalt auf  $\mathfrak{R}$ , der sogar ein Prämaß ist.

**Def.** Eine numerische Funktion  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt **äußeres Maß** auf  $\Omega$ , wenn gilt:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  (Monotonie)

- Für eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{P}(\Omega)$  gilt  $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$ .

**Bemerkung.** Wegen  $\mu^*(\emptyset) = 0$  und der Monotonie nimmt ein äußeres Maß nur Werte in  $[0, \infty]$  an.

**Def.** Eine Teilmenge  $A \subset \Omega$  heißt  **$\mu^*$ -messbar**, falls

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \quad \text{für alle } Q \subset \Omega.$$

**Satz** (Carathéodory). Für ein äußeres Maß  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  ist

- $\mathfrak{A}^* := \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$  eine  $\sigma$ -Algebra und
- $\mu^*|_{\mathfrak{A}^*}$  ein Maß auf  $\mathfrak{A}^*$ .

**Satz (1. Fortsetzungssatz).** • Sei  $\mu$  ein Prämaß auf einem Ring  $\mathfrak{R}$  über  $\Omega$ . Dann existiert eine Fortsetzung  $\tilde{\mu}$  von  $\mu$  zu einem Maß auf der von  $\mathfrak{R}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A} := \sigma(\mathfrak{R})$ , sodass  $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{R}} = \mu$ .  
• Falls  $\mu$   $\sigma$ -endlich ist, so ist die Fortsetzung eindeutig.

**Bemerkung.** Im Beweis wird ein äußeres Maß  $\mu^*$  auf  $\Omega$  so definiert:

$$\mathfrak{U}(Q) := \left\{ (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid Q \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \text{ und } A_n \text{ Folge in } \mathfrak{R} \right\},$$

$$\mu^*(Q) := \inf \left( \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{U}(Q) \right\} \cup \{\infty\} \right).$$

Das äußere Maß  $\mu^*$  eingeschränkt auf  $\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$  ist ein Maß.

**Def.** Sei  $\Omega$  eine Menge und  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , sowie ggf.  $\mu$  ein Maß auf  $\mathfrak{A}$ . Dann heißt

- das Tupel  $(\Omega, \mathfrak{A})$  **messbarer Raum**,
- das Tripel  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  **Maßraum**.

**Satz.** Unter den Bedingungen des 1. Fortsetzungssatzes ist  $\mathfrak{A}^*$  die größte  $\sigma$ -Algebra  $\overline{\mathfrak{A}}$  mit  $\mathfrak{A} \subset \overline{\mathfrak{A}}$ , sodass  $\mu^*|_{\overline{\mathfrak{A}}}$  ein Maß ist.

**Def.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum. Eine Menge  $N \subset \Omega$  heißt **Nullmenge**, falls es ein  $A \in \mathfrak{A}$  gibt, sodass  $N \subset A$  und  $\mu(A) = 0$ .

**Def.** Ein Maßraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  heißt **vollständig**, falls jede Nullmenge  $N \subset \Omega$  ein Element von  $\mathfrak{A}$  ist.

**Satz.**  $(\Omega, \mathfrak{A}^*, \mu^*|_{\mathfrak{A}^*})$  ist vollständig für jedes bel. äußere Maß  $\mu^*$ .

**Satz.** Jeder Maßraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  kann zu einem vollständigen Maßraum  $(\Omega, \mathfrak{A}_c, \mu_c)$  erweitert werden mit

$$\mathfrak{A}_c := \{A \cup N \mid A \in \mathfrak{A}, N \text{ } \mu\text{-Nullmenge}\}, \quad \mu_c(A \cup N) := \mu(A).$$

**Satz.** Sei  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Prämaß auf dem Ring  $\mathfrak{R}$  über  $\Omega$  sowie  $\overline{\mathfrak{A}} := \sigma(\mathfrak{R})$ . Dann gilt  $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_c$  und  $\mu^*|_{\mathfrak{A}^*} = \tilde{\mu}_c$ , wobei  $\tilde{\mu}$  das eindeutig fortgesetzte Maß ist.

**Sprechweise.** Eine Eigenschaft oder Aussage gilt für **fast alle**  $\omega \in \Omega$  oder  **$\mu$ -fast-überall**, wenn es eine Nullmenge  $N_0 \subset \Omega$  gibt, sodass die Aussage oder Eigenschaft für alle  $\omega \in N_0^c$  gilt.

**Def.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum.

- Dann heißt  $\mu$  **diffus** (atomlos), falls  $\mu(\{\omega\}) = 0$  für alle  $\omega \in \Omega$ .

- Sei  $\eta$  ein weiteres Maß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ . Dann heißt  $\mu$  **absolut stetig** bezüglich  $\eta$  (notiert  $\mu \ll \eta$ ), falls

$$\eta(A) = 0 \implies \mu(A) = 0 \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}.$$

**Def.** Die von den Elementarquadern im  $\mathbb{R}^d$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra heißt **Borel- $\sigma$ -Algebra**  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ . Das von der maßerzeugenden Funktion

$$G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_1 \cdot \dots \cdot x_d$$

erzeugte Prämaß auf dem von den Elementarquadern erzeugten Ring  $\mu_G$ , das zu einem Maß  $\tilde{\mu}_G$  auf  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  fortgesetzt wird, heißt **Lebesgue-Borel-Maß**. Die durch Hinzunahme aller Nullmengen vervollständigte  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)_c$  heißt **Lebesgue- $\sigma$ -Algebra** und das fortgesetzte Maß  $\lambda_d := \mu_G^*$  **Lebesgue-Maß**.

**Satz.** Das Lebesgue-Maß auf dem  $\mathbb{R}^d$  ist bewegungsinvariant, d. h.

$$\forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d), O \in \text{SO}_d, x \in \mathbb{R}^d : \lambda_d(O \cdot A + x) = \lambda_d(A).$$

Das Lebesgue-Maß ist bis auf einen multiplikativen Faktor das einzige verschiebungsinvariante Maß auf  $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ .

**Sprechweise.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein messbarer Raum. Wir nennen  $\Omega$  abstrakte Grundmenge und die Elemente von  $\Omega$  Elementarereignisse. Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  enthält zufällige Ereignisse, unter anderem das sichere Ereignis  $\Omega$  und das unmögliche Ereignis  $\emptyset$ .

**Def.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein Maßraum mit  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ . Dann heißt  $\mathbb{P}$  **Wahrscheinlichkeitsmaß** (W-Maß) und das Tripel  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  **Wahrscheinlichkeitsraum** (W-Raum).

**Sprechweise.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein W-Raum und  $A, B \in \mathfrak{A}$ . Wir sagen:

- $A$  ist **fast sicher**, wenn  $\mathbb{P}(A) = 1$ .
- $A$  ist **fast unmöglich**, wenn  $\mathbb{P}(A) = 0$ .
- $A$  und  $B$  sind **äquivalent**, wenn  $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$ .

**Bemerkung.** Sei  $\mu$  ein W-Maß auf  $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^1)$ . Dann definiert  $x \mapsto F_\mu(x) := \mu((-\infty, x])$  eine VF. Für eine VF  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definiert umgekehrt  $\mu_F((a, b]) := F(b) - F(a)$  ein W-Maß auf  $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^1)$ . Analog funktioniert dies auf dem  $\mathbb{R}^d$ .

**Def** (Wichtige Verteilungsfunktionen).

- **Exponentialverteilung** mit Parameter  $\lambda > 0$ :

$$F_\lambda(x) = \max(0, 1 - \exp(-\lambda x)) \quad \text{Exp}(\lambda)$$

- **Poisson-Verteilung** mit Parameter  $\lambda > 0$ :

$$F_\lambda(x) = \sum_{0 \leq n \leq x} \frac{\lambda^n}{n!} \exp(-\lambda) \quad \text{Poi}(\lambda)$$

- **Gleichverteilung** auf  $(a, b]$ :  $F(x) = \min(1, \max(0, \frac{x-a}{b-a}))$
- **Normalverteilung** (Gaußverteilung) mit EW  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ :

$$F_{\mu\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt \quad \text{N}(\mu, \sigma^2)$$

besitzt die Dichte  $F'_{\mu\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$  und die Symmetrie  $F_{\mu\sigma^2}(\mu-x) = 1 - F_{\mu\sigma^2}(\mu+x)$ .

- $d$ -dimensionale **Normalverteilung** mit Erwartungswertvektor  $m \in \mathbb{R}^d$  positiv definiter Kovarianzmatrix  $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det C}} \int_{(-\infty, x]} \exp(-\frac{1}{2}(y-m)^T C^{-1}(y-m)) dy$$

- **2-dimensionale Exponentialverteilung** mit  $\lambda, \mu > 0, \nu \geq 0$ :

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \text{ oder } y < 0, \text{ ansonsten:} \\ 1 - e^{-(\lambda+\nu)x} - e^{-(\mu+\nu)y} + e^{-(\lambda x + \mu y + \nu \max(x, y))} \end{cases}$$

# Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

**Def.** Ein Ereignis  $A \in \mathfrak{A}$  trete bei  $n$  Versuchen genau  $h_n(A) \in \mathbb{N}$  mal auf. Dann heißt

- $h_n(A)$  **absolute Häufigkeit** von  $A$ ,
- $H_n(A) := \frac{h_n(A)}{n}$  **relative Häufigkeit** von  $A$ .

*Bemerkung.* Unmittelbar klar:

- $H_n(A) \in [0, 1]$  •  $H_n(A) \leq H_n(B)$  für  $A \subset B$
- $H_n(A \sqcup B) = H_n(A) + H_n(B)$  für  $A \cap B = \emptyset$

*Bemerkung.* Bei wachsendem  $n$  stabilisiert sich normalerweise der Wert  $H_n(A)$ . Dieser Grenzwert ist die Wahrscheinlichkeit von  $A$ .

**Def.** Seien  $A, B \in \mathfrak{A}$  Ereignisse,  $n \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Versuche. Dann heißt

$$H_n(A \mid B) := \frac{H_n(A \cap B)}{H_n(B)} = \frac{h_n(A \cap B)}{h_n(B)}$$

die **relative Wahrscheinlichkeit** von  $A$  unter der Bedingung  $B$ .

*Bemerkung.* Offenbar gilt:

- $H_n(A \mid B) \in [0, 1]$  •  $H_n(A_1 \mid B) \leq H_n(A_2 \mid B)$  für  $A_1 \subset A_2$
- $H_n(A_1 \sqcup A_2 \mid B) = H_n(A_1 \mid B) + H_n(A_2 \mid B)$  für  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

**Def.** Sei  $\Omega \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^d)$  mit  $\lambda_d(\Omega) > 0$ . Dann heißt das W-Maß

$$\mathbb{P} : \mathfrak{L}(\Omega) \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \frac{\lambda_d(A)}{\lambda_d(\Omega)} \quad \textbf{Gleichverteilung.}$$

**Def.** Sei  $\Omega$  eine endliche Menge. Dann definiert

$$\mathbb{P} : \mathcal{P} \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\# \text{ günstige Fälle}}{\# \text{ mögliche Fälle}}$$

ein W-Maß auf  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ , genannt **Laplace'sche Wkt.**

*Bemerkung.* Damit sind Berechnungen von Wkten mit kombinatorischen Überlegungen möglich.

**Lemma** (Fundamentalprinzip des Zählens). Seien  $A_1, \dots, A_n$  endliche Mengen. Dann gilt  $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$ .

**Lemma.** Sei  $A$  eine endliche Menge,  $r \leq n := |A| < \infty$ . Dann ist die Anzahl der  $r$ -Tupel mit Elementen aus  $A$  gleich

	Mit Wdh.	Ohne Wdh.
Mit Ordnung	$n^r$	$\frac{n!}{(n-r)!}$
Ohne Ordnung	$\frac{(n+r-1)!}{r!}$	$\binom{n}{r} := \frac{n!}{r!(n-r)!}$

**Lemma.** Sei  $A$  eine endliche Menge,  $n := |A| < \infty$ . Dann ist die Anzahl der möglichen Zerlegungen von  $A$  in disjunkte Mengen  $B_1, \dots, B_k$  mit  $|B_i| = n_i$  und  $n_1 + \dots + n_k = n$  gleich

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} := \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}. \quad \textbf{(Multinomialkoeffizient)}$$

**Modell.** Eine Urne enthalte  $N$  Kugeln, darunter  $M \leq N$  schwarze. Dann ist ist die Wkt für das Ereignis  $A_m^n$ , dass sich unter  $n$  gezogenen Kugeln genau  $m \leq \min(n, M)$  schwarze Kugeln befinden,

$$\mathbb{P}(A_m^n) = \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}. \quad \textbf{(hypergeometrische Verteilung)}$$

*Bemerkung.* Für Maximum-Likelihood-Schätzungen:

- Der Ausdruck  $\binom{N-M}{n-m} / \binom{N}{n}$  wird maximal bei  $N := \lfloor \frac{n-M}{m} \rfloor$ .
- Der Ausdruck  $\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}$  wird maximal bei  $M := \lfloor \frac{m(N-1)}{n} \rfloor$ .

**Modell.** Eine Urne enthalte  $N$  Kugeln in  $k \leq N$  verschiedenen Farben, darunter  $N_1$  in der ersten Farbe, ...,  $N_k$  in der  $k$ -ten Farbe,  $N_1 + \dots + N_k = N$ . Dann ist ist die Wkt für das Ereignis  $A_{n_1, \dots, n_k}^n$ , dass sich unter  $n$  gezogenen Kugeln genau  $n_1 \leq N_1$  Kugeln der ersten Farbe, ..., und  $n_k \leq N_k$  Kugeln der  $k$ -ten Farbe befinden,  $n_1 + \dots + n_k = n$ , gleich

$$\mathbb{P}(A_{n_1, \dots, n_k}^n) = \frac{\binom{N_1}{n_1} \cdot \dots \cdot \binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}.$$

Diese W-Verteilung heißt **polyhypergeometrische Verteilung**.

**Def.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein W-Raum und  $A, B \in \mathfrak{A}$ . Dann heißt

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, & \text{falls } \mathbb{P}(B) > 0 \\ 0, & \text{falls } \mathbb{P}(B) = 0 \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeit von  $A$  unter der Bedingung  $B$ .

*Bemerkung.* Falls  $\mathbb{P}(B) > 0$  gilt, so ist  $\mathbb{P}(- \mid B)$  ein W-Maß über  $B$  auf der Spur- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}|_B$ .

**Lemma.** Seien  $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{A}$ , dann gilt die Pfadregel:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \prod_{i=2}^k \mathbb{P}(A_i \mid A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}).$$

**Satz.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein W-Raum und  $A_1, \dots \in \mathfrak{A}$  ein vollständiges Ereignissystem, d. h. paarweise disjunkt mit

$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Dann gilt für jedes  $B \in \mathfrak{A}$  mit  $\mathbb{P}(B) > 0$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i) \quad \textbf{(Formel der totalen Wkt)}$$

$$\mathbb{P}(A_n \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)} \quad \textbf{(Bayessche Formel)}$$

**Sprechweise.** In der Bayesischen Statistik heißt

- $\mathbb{P}(A_i)$  **A-priori-Wahrscheinlichkeit**,
- $\mathbb{P}(A_i \mid B)$  **A-posteriori-Wahrscheinlichkeit**.

**Def.** Zwei Ereignisse  $A, B \in \mathfrak{A}$  heißen **( $\mathbb{P}$ -)unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

*Bemerkung.* •  $A \in \mathfrak{A}$  mit  $\mathbb{P}(A) = 0$  ist unabhängig zu jedem  $B \in \mathfrak{A}$ .

- Wenn  $A, B \in \mathfrak{A}$  unabhängig, dann sind auch unabhängig:

$$(A^c, B), \quad (A, B^c), \quad (A^c, B^c)$$

**Satz.**  $A, B \in \mathfrak{A}$  unabhängig  $\iff \mathbb{P}B \mid A = \mathbb{P}(B)$ .

**Def.** Sei  $(A_i)_{i \in I}$  ( $I$  bel.) eine Familie von Ereignissen in  $\mathfrak{A}$ .

- **vollständig unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_m})$$

für alle  $i_1, \dots, i_n \in I$  mit  $2 \leq n < \infty$  und

- **paarweise unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j) \quad \text{für alle } i, j \in I, i \neq j.$$

**Achtung.** Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt nicht vollständige Unabhängigkeit (Gegenbeispiel: Bernsteins Tetraeder).

**Def.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein W-Raum und  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$  Ereignissysteme. Dann heißen  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  **unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \quad \text{für alle } A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2.$$

**Satz.** Seien  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$  unabhängige Ereignissysteme, die Algebren sind. Dann sind auch die  $\sigma$ -Algebren  $\sigma(\mathfrak{A}_1)$  und  $\sigma(\mathfrak{A}_2)$  unabhängig.

**Satz.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein W-Raum,  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  Folge von unabhängigen Ereignissen mit gleicher Erfolgswkt  $\mathbb{P}(A_i) = p$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Für  $k \leq n, k, n \in \mathbb{N}$  ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass genau  $k$  Stück der Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  eintreten, genau

$$B(k, n, p) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Die zugehörige VF  $x \mapsto \sum_{0 \leq k \leq x} B(k, n, p)$  heißt **Binomialverteilung**.

**Lemma.** Voraussetzung wir im vorherigen Satz. Sei  $r, k \in \mathbb{N}, 1 \leq r$ , dann ist die Wkt für das Ereignis  $A_k^{(r)}$ , dass beim Versuch  $A_{k+r}$  der  $r$ -te Erfolg eintritt, gleich

$$\mathbb{P}(A_k^{(r)}) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k.$$

Im Spezialfall  $r = 1$  ist  $\mathbb{P}(A_k^{(1)}) = p(1-p)^k$ .

**Satz.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein W-Raum,  $A_1, \dots, A_r \in \mathfrak{A}$  mit  $p_i := \mathbb{P}(A_i)$  für  $i = 1, \dots, k$  und  $p_1 + \dots + p_r = 1$ . Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei  $n \in \mathbb{N}$  Versuchen  $A_1$  genau  $n_1$ -mal,  $A_2$  genau  $n_2$ -mal, ...,  $A_r$  genau  $n_r$ -mal auftritt ( $n_1 + \dots + n_r = n$ ), genau

$$B(n_1, \dots, n_r, n, p_1, \dots, p_r) := \binom{n}{n_1, \dots, n_r} p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}.$$

Diese W-Verteilung heißt **Multinomialverteilung**.

**Satz.** Für  $0 \leq m \leq n, p \in [0, 1]$  gilt

$$\frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \xrightarrow{M, N \rightarrow \infty} \frac{M, N \rightarrow \infty}{M/N \rightarrow p} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

**Satz** (GWS von Poisson). Für  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt

$$\binom{n}{m} p_n^m (1-p_n)^{n-m} \xrightarrow[n p_n \rightarrow \lambda]{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda).$$

**Def.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein messbarer Raum mit zwei W-Maßen  $\mathbb{P}_1$  und  $\mathbb{P}_2$ . Dann heißt

$$d_\infty(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) := \sup_{A \in \mathfrak{A}} |\mathbb{P}_1(A) - \mathbb{P}_2(A)|$$

**Totalvariation** des signierten Maßes  $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2$ .

**Satz.** Seien  $\mathbb{P}_1$  und  $\mathbb{P}_2$  zwei W-Maße auf  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ,  $\mathbb{P}_1(\{i\}) = p_i$ ,  $\mathbb{P}_2(\{i\}) = q_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$d_\infty(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} |p_i - q_i|.$$

**Lemma.** Für  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $p \in [0, 1]$  und  $\mathbb{P}_1$  und  $\mathbb{P}_2$  wie eben definiert durch  $p_i := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $q_i := \frac{(np)^k}{k!} \exp(-np)$  gilt

$$d_\infty(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) \leq 2np^2.$$

**Lemma** (Borel-Cantelli). Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Ereignissen über  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . Dann gilt für  $A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(A) = 0.$$

Falls die Ereignisse  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängig sind, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}(A) = 1,$$

also zusammengefasst  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ .

**Def.** Sei  $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge von  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$ . Dann ist

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \quad \text{mit} \quad \mathcal{T}_n := \sigma \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} \mathfrak{A}_k \right)$$

die **terminale  $\sigma$ -Algebra** von  $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Satz** (Null-Eins-Gesetz von Kolmogorow). Sei  $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen Unter- $\sigma$ -Algebren in einem W-Raum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . Dann gilt  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$  für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{T}_\infty$  der terminalen  $\sigma$ -Algebra.

## Integrationstheorie

**Def.** Seien  $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$  und  $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$  messbare Räume. Dann heißt  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$   **$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ -messbar**, falls

$$f^{-1}(A_2) \in \mathfrak{A}_1 \quad \text{für alle } A_2 \in \mathfrak{A}_2.$$

**Notation.** Für solches  $f$  schreiben wir  $f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ .

**Beobachtung.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  messbarer Raum,  $A \subset \Omega$ , dann gilt

$$\mathbb{1}_A \text{ } (\mathfrak{A}, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))\text{-messbar} \iff A \in \mathfrak{A}.$$

**Lemma.** Die Verkettung messbarer Abbildungen ist messbar, d. h. für  $f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$  und  $g : (\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \rightarrow (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$  gilt  $g \circ f : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \rightarrow (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ .

**Lemma.** Sei  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  eine Abb. und  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ , dann ist

$$\mathfrak{A}(f^{-1}(\mathcal{E}')) = f^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}')).$$

**Lemma.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein messbarer Raum und  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  eine Abbildung, sowie  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega')$ . Dann gilt

$$f \text{ ist } (\mathfrak{A}, \sigma(\mathcal{E}))\text{-messbar} \iff f^{-1}(E) \in \mathfrak{A} \text{ für alle } E \in \mathcal{E}.$$

**Notation.** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}$  zwei numerische Funktionen. Setze

$$\{f \leq g\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\} \subset \Omega$$

und definiere analog  $\{f < g\}$ ,  $\{f \geq g\}$ ,  $\{f > g\}$ ,  $\{f = g\}$ ,  $\{f \neq g\}$ .

**Satz.** Für eine Funktion  $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \overline{\mathfrak{B}})$  sind äquivalent:

- $f$  ist messbar
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \geq a\} = f^{-1}([a, \infty]) \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f > a\} \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \leq a\} \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathfrak{A}$

**Def.** • Sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein messbarer Raum,  $f : \Omega' \rightarrow \Omega$  eine Abbildung, dann heißt

$$\sigma(f) := f^{-1}(\mathfrak{A}) := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathfrak{A}\}$$

die **von  $f$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra**.

• Sei  $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)_{i \in I}$  eine Familie von messbaren Räumen,  $f_i : \Omega' \rightarrow \Omega_i$  für alle  $i \in I$  eine Abbildung. Dann heißt

$$\sigma((f_i)_{i \in I}) := \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(f_i)\right) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)\right)$$

die **von der Familie  $(f_i)_{i \in I}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra**.

**Def.** Sei  $(\Omega', \mathfrak{A}', \mu')$  ein Maßraum,  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein messbarer Raum,  $f : (\Omega', \mathfrak{A}') \rightarrow (\Omega, \mathfrak{A})$ . Dann ist durch

$$\mu'_f := \mu' \circ f^{-1} : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \mu'(f^{-1}(A))$$

ein Maß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ , das sog. **Bildmaß** von  $\mu'$  unter  $f$ , definiert.

**Satz.** Für zwei numerische Funktionen  $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \overline{\mathfrak{B}})$  gilt:

- $\{f < g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f > g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f = g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \leq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \geq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \neq g\} \in \mathfrak{A}$

**Satz.** Seien  $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \overline{\mathfrak{B}})$  messbare numerische Funktionen und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann auch messbar ( $\dagger$ : falls  $0 \notin \text{Bild}(f)$ ):

- $\lambda \cdot f$
- $f + \mu \cdot g$
- $f \cdot g$
- $\frac{1}{f}$  ( $\dagger$ )
- $\frac{g}{f}$  ( $\dagger$ )

**Satz.** Seien  $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \overline{\mathfrak{B}})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  messbare numerische Funktionen, dann auch messbar:

- $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$
- $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$
- $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$
- $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$

Dabei werden Infimum, Supremum, usw. punktweise gebildet.

**Def.** Für  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}$  heißen die Funktionen

- $|f| := \max(f, -f) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  **Betrag** von  $f$
- $f^+ := \max(f, 0) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  **Positivteil** von  $f$

•  $f^- := -\min(f, 0) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  **Negativteil** von  $f$

**Satz.** Falls  $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \overline{\mathfrak{B}})$  messbar, dann auch  $|f|$ ,  $f^+$  und  $f^-$ .

**Satz.** • Sei  $(\Omega, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann ist  $f$   $(\sigma(\mathcal{O}), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ -messbar.

•  $\sigma(\mathcal{O})$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra, bezüglich der alle stetigen Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  Borel-messbar sind.

**Satz** (von Lusin). Sei  $M \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\lambda_n(M) < \infty$  und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f$  genau dann Borel-messbar, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists K_\epsilon \subset M \text{ kompakt} : \lambda_n(M \setminus K_\epsilon) < \epsilon \text{ und } f|_{K_\epsilon} \text{ stetig.}$$

**Def.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Càdlàg-Funktion** (continue à droite, limite à gauche), falls für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\lim_{y \uparrow x} f(y) \text{ existiert} \quad \text{und} \quad \lim_{y \downarrow x} f(y) = f(x).$$

**Beobachtung.** Jede kumulierte VF ist eine Càdlàg-Funktion.

**Def.** Die **Variation** von  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl. einer Zerlegung  $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$  von  $[a, b]$  ist die nicht-negative Zahl

$$V(g, Z) := \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})|.$$

Die **Totalvariation** von  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$V_a^b(g) := \sup \{V(g, Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Falls  $V_a^b(g) < \infty$ , so heißt  $g$  **von beschränkter Variation**.

**Satz.** Es sind messbar:

- Monotone Funktionen
- Càdlàg-Funktionen
- Funktionen von beschränkter Variation

**Def.** Eine  $\mathfrak{A}$ -messbare numerische Funktion  $X$  über einem W-Raum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  heißt **Zufallsgröße** (ZG) oder **Zufallsvariable**.

*Bemerkung.* Häufig fordert man zusätzlich  $\mathbb{P}(\{X = \pm\infty\}) = 0$ .

**Notation.** Für eine ZG  $X$  und eine Fkt.  $g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}$  schreiben wir

$$f(X) := f \circ X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}.$$

**Def.** Das durch die ZG  $X$  induzierte Bildmaß

$$P_X : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1) \rightarrow [0, 1], \quad B \mapsto \mathbb{P}(\{X \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$

heißt **Verteilungsgesetz** der ZG  $X$  und

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto P_X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{X \leq x\})$$

heißt **Verteilungsfunktion** (VF) der ZG  $X$ .

**Satz.** Sei  $F$  eine VF auf  $\mathbb{R}^1$ . Dann existiert ein W-Raum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  und eine ZG  $X$  auf  $\Omega$  derart, dass  $F_X = F$ .

**Beweis.** 1. Möglichkeit: Wähle  $\Omega := \mathbb{R}^1$ ,  $\mathfrak{A} := \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1)$  und  $\mathbb{P} := \mu_F$  als das von  $F$  erzeugte Maß und setze  $X := \text{id}$ .

2. Möglichkeit: Wähle  $\Omega := [0, 1]$ ,  $\mathfrak{A} := \mathcal{L}([0, 1])$ ,  $\mathbb{P} := \lambda_1$ . Setze

$$X(w) := F^-(w) := \inf\{F \geq w\} \quad \text{für } w > 0, \quad X(0) := \lim_{w \downarrow 0} F^-(w)$$



**Def.** Sei  $X_1, \dots, X_n$  eine endliche Familie von ZGn über  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . Diese Familie heißt **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i \in B_i\}) \quad \text{für alle } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1).$$

**Satz.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige ZGn über  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  und  $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-messbar. Setze  $Y_i := g_i(X_i) := g_i \circ X_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , dann sind auch  $Y_1, \dots, Y_n$  unabhängige ZGn.

**Def.** Eine Funktion  $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  heißt **einfache Funktion** oder **Elementarfunktion** auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ , wenn gilt:

- $f$  ist messbar
  - $f(\Omega) \subset [0, \infty)$
  - $f(\Omega)$  ist endlich
- Die Menge aller elementaren Funktionen auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ist  $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ .

**Notation.**  $a \wedge b := \min\{a, b\}$  und  $a \vee b := \max\{a, b\}$

**Satz.** Seien  $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  und  $a \geq 0$ . Dann auch in  $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ :

- $f + g$
- $f \cdot g$
- $f \vee g$
- $f \wedge g$
- $a \cdot f$

**Def.** Sei  $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  und  $\Omega = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$  eine disjunkte Vereinigung von Mengen mit  $A_j \in \mathfrak{A}$  für alle  $j = 1, \dots, k$ , sodass  $f(A_j) = \{y_j\}$ , dann heißt die Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^k y_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{kanonische Darstellung.}$$

**Def.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  elementar. Dann heißt

die (von der Darstellung  $f = \sum_{j=1}^k y_j \cdot \mathbb{1}_{A_j}$  unabh.) Zahl

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{j=1}^k y_j \mu(A_j) \quad \text{\textbf{\textit{\mu-Integral}}} \text{ von } f.$$

**Satz.** Es gilt für  $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ ,  $a, b \geq 0$ :

- $\int_{\Omega} \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$
- $f \leq g \implies \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu$
- $\int_{\Omega} a \cdot f + b \cdot g \, d\mu = a \cdot \int_{\Omega} f \, d\mu + b \cdot \int_{\Omega} g \, d\mu$

**Satz.** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine isotone (= monotone) Folge elementarer Funktionen über  $(\Omega, \mathfrak{A})$ . Dann gilt für jede elementare Funktion  $f$  mit  $f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  die Ungleichung  $\int_{\Omega} f \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu$ .

**Korollar.** Seien  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  isotone Folgen elementarer Funktionen mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$ . Dann ist  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n \, d\mu$ .

**Satz.** Sei  $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$  nichtnegativ. Dann gibt es eine isotone Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elementarer Funktionen mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$ .

**Def.** Sei  $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$  nichtnegativ und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge elementarer Funktionen mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$ . Dann heißt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu \quad \text{\textbf{\textit{\mu-Integral}}} \text{ von } f.$$

**Def.** Eine  $\mathfrak{A}$ -messbare, numerische Fkt.  $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$  heißt  **$\mu$ -integrierbar**, falls

$$\int_{\Omega} f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} f^- \, d\mu < \infty.$$

In diesem Fall definieren wir das **Lebesgue-Integral** von  $f$  als

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \int_{\Omega} f^+ \, d\mu - \int_{\Omega} f^- \, d\mu.$$

**Satz.** Sei  $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$  messbar. Dann sind äquivalent:

- $f$  ist  $\mu$ -integrierbar
- $f^+$  und  $f^-$  sind  $\mu$ -integrierbar
- $|f|$  ist  $\mu$ -integrierbar
- $\exists \mu$ -integrierbare Funktion  $g$  mit  $|f| \leq g$

**Satz.** Seien  $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$   $\mu$ -integrierbar und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch  $\mu$ -integrierbar:

- $f \pm g$
- $f \vee g$
- $f \wedge g$
- $\alpha \cdot f$

Es gilt:  $\int_{\Omega} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) \, d\mu = \alpha \int_{\Omega} f \, d\mu + \beta \int_{\Omega} g \, d\mu$  (Linearität)

- $|\int_{\Omega} f \, d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu$
- $f \leq g \implies \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu$  (Monotonie)

**Achtung.** Das Produkt  $(f \cdot g)$  ist i. A. nicht  $\mu$ -integrierbar!

**Def.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$ . Für  $p \in [1, \infty)$  heißt  $f$   **$p$ -integrierbar**, falls  $|f|^p$   $\mu$ -integrierbar ist.

$$L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1} \mid f \text{ } p\text{-integrierbar, also } \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu < \infty\},$$

$$L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1} \mid \exists C > 0 : |f| \leq C \text{ fast überall}\}$$

ist dann ein VR, genannt **Lebesgue-Raum** ( $L^p$ -Raum), mit Norm

$$\|f\|_p := \left( \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| := \inf \{C \in \mathbb{R} \mid |f| \leq C \text{ fast-überall}\}$$

Wir betrachten in  $L^p$  zwei Funktionen als gleich, wenn sie bis auf einer Nullmenge übereinstimmen. Die  $\Delta$ -Ungleichung in  $L^p$  wird auch **Minkowski-Ungleichung** genannt.

**Satz.** Der  $L^p(\mu)$  ist ein vollständiger normierter Raum, d. h. jede Cauchy-Folge bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_p$  ist auch konvergent.

**Satz.** Sei  $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ,  $g \in L^q(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann ist  $fg \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  und es gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \text{\textbf{\textit{(Hölder-Ungleichung)}}}.$$

*Bemerkung.* Für  $p = 2$  ist  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  der Hilbertraum der quadratisch integrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} (f \cdot g) \, d\mu.$$

Mit  $q = 2$  folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$|\langle f, g \rangle| = \|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \quad \text{\textbf{\textit{(Cauchy-Schwarz-Ungl.)}}}$$

**Satz.** Sei  $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$  nichtnegativ. Dann gilt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = 0 \quad \iff \quad f \stackrel{\text{f.ü.}}{=} 0.$$

**Satz** (von der monotonen Konvergenz). Sei für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$  nicht negativ und  $\mathfrak{A}$ -messbar, sodass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine isotone Folge ist. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

**Korollar** (Beppo Levi). Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge nicht negativer,  $\mathfrak{A}$ -messbarer, numerischer Funktionen auf  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

**Satz.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}^1}))$  nichtnegativ und  $\mu$ -integrierbar. Dann definiert

$$\nu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \int_A f \, d\mu = \int_{\Omega} f \cdot \chi_A \, d\mu$$

ein zu  $\mu$  absolut stetiges, endliches Maß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ .

**Lemma** (Fatou). Sei für  $n \in \mathbb{N}$  die Fkt.  $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathcal{L}(\mathbb{R}^1))$  nicht negativ und  $\mathfrak{A}$ -messbar. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Falls  $\int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu < \infty$ , gilt zusätzlich

$$\int_{\Omega} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

**Def.** Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\mathfrak{A}$ -messbarer, numerischer Fktn. über  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  **konvergiert  $\mu$ -fast-überall** gegen  $f : \Omega \rightarrow \mathfrak{A}$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad \text{für } \mu\text{-fast-alles } \omega \in \Omega \text{ gilt.}$$

**Satz** (Riesz). Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ,  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.ü.}} f$  mit  $f \in L^p(\mu)$ . Dann gilt

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p(\mu)} f \quad \iff \quad \int_{\Omega} |f_n|^p \, d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu.$$

**Satz** (von der majorisierten Konvergenz). Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge  $\mathfrak{A}$ -messbarer numerischer Funktionen auf  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  und  $g \in L^1(\mu)$  nicht negativ, sodass  $|f_n| \leq g$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei desweiteren  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}$  messbar mit  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu\text{-f.ü.}} f$ . Dann ist

$$f \in L^1(\mu) \quad \text{mit} \quad \int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

**Satz.** Sei  $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\Omega', \mathfrak{A}')$  und  $\mu' := \mu \circ f^{-1}$  das Bildmaß von  $\mu$  unter  $f$ . Sei  $g : (\Omega', \mathfrak{A}') \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1))$  nicht negativ. Dann gilt

$$\int_{\Omega'} g \, d\mu' = \int_{\Omega} (g \circ f) \, d\mu.$$

**Satz** (Transformationssatz). Sei  $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d$  und sei  $\phi: U \rightarrow \tilde{U}$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion  $f: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^1$  genau dann auf  $\tilde{U}$  Lebesgue-Borel-integrierbar, wenn  $(f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)|: U \rightarrow \mathbb{R}^1$  auf  $U$  Lebesgue-Borel-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_U (f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| d\lambda_d = \int_{\phi(U)} f d\lambda_d = \int_{\tilde{U}} f d\lambda_d.$$

Obige Gleichung ist auch erfüllt, wenn lediglich  $f \geq 0$  gilt.

**Def.** Für eine ZG  $X: (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}^1}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}^1}))$  heißt die Zahl

$$\mathbb{E}X := \int_{\Omega} X d\mathbb{P} \quad \text{Erwartungswert (EW) von } X.$$

**Bemerkung.** Für eine konstante ZGe  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , also  $\forall \omega \in \Omega: X(\omega) = x$ , gilt  $\mathbb{E}X = x$ .

**Satz.** Der Erwartungswert ist linear, d. h. für ZGn  $X$  und  $Y$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ .

**Satz.**  $\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}^1} \text{id} dP_X$ , wobei  $P_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ .

**Korollar.** Sei  $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  messbar und  $P_X$ -integrierbar. Dann gilt

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}^1} g dP_X = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dP_X(x),$$

wobei rechts ein uneigentliches Riemann-Stieltjes-Integral steht.

**Def.** Für Zufallsvektoren  $X = (X_1, \dots, X_k)$  mit Werten in  $\mathbb{R}^k$  definieren wir  $\mathbb{E}X := (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_k)$ .

**Bemerkung.** Sei  $X = (X_1, \dots, X_k)$  ein Zufallsvektor und  $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  Borel-messbar und  $P_X$ -integrierbar. Dann ist

$$\mathbb{E}g(X_1, \dots, X_k) = \int_{\mathbb{R}^k} g dP_X.$$

**Satz.** Sei  $F_X$  VF einer ZG  $X: (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ . Dann existiert für Lebesgue-fast-alles  $x \in \mathbb{R}^1$  die Ableitung  $F'_X(x)$ .

**Def.** Sei  $F_X$  VF einer ZG  $X: (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ .

- $F_X$  heißt **diskret**, falls  $F_X$  höchstens abzählbar viele Sprungstellen  $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$  besitzt mit

$$\forall j \in J \subset \mathbb{N}: p_j := F_X(x_j) - \lim_{x \uparrow x_j} F_X(x) > 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1.$$

Dann ist  $F_X$  zwischen den Sprüngen konstant.

- $F_X$  heißt **stetig** (diffus, atomlos), wenn  $F_X$  in jedem Punkt stetig ist. Dann gilt  $P_X(\{X = x\}) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Für stetige Verteilungen ergibt sich eine weitere Unterteilung:

- $F_X$  heißt **absolutstetig** (totalstetig), wenn es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass für höchstens abzählbar viele, disjunkte Intervalle  $I_k = (a_k, b_k]$  mit  $k \in J \subset \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k \in J} (b_k - a_k) < \delta \implies \sum_{k \in J} (F_X(b_k) - F_X(a_k)) < \epsilon.$$

- $F_X$  heißt **singulärstetig** (stetig, aber nicht absolutstetig), wenn die Wachstumspunkte von  $F_X$  eine Nullmenge bilden, also

$$\lambda_1(\{x \in \mathbb{R}^1 \mid \forall \epsilon > 0: F(x + \epsilon) - F(x - \epsilon) > 0\}) = 0$$

oder äquivalent dazu die Ableitung fast-überall verschwindet, also

$$\lambda_1(\{x \in \mathbb{R}^1 \mid F'_X(x) = 0\}) = 1.$$

**Satz.** Jede VF  $F$  auf  $\mathbb{R}^1$  besitzt eine eindeutige Zerlegung (Lebesgue-Zerlegung) als konvexe Linearkombination einer diskreten, einer singulär-stetigen und einer absolut-stetigen VF

$$F = \alpha_d F_d + \alpha_s F_s + \alpha_a F_a \quad \text{mit} \quad \alpha_d, \alpha_s, \alpha_a \geq 0, \alpha_d + \alpha_s + \alpha_a = 1.$$

**Def.** Falls  $F_X$  absolut-stetig, dann heißt die nicht negative, Lebesgue-messbare Funktion

$$f = f_X = F'_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \begin{cases} F'_X(x), & \text{falls Ableitung ex.} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(**Wahrscheinlichkeits-)**Dichte (WD) von  $F_X$  bzw. von  $X$ .

**Bemerkung.** Dann gilt für alle  $y \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{-\infty}^y f_X(x) dx = F_X(y), \quad \text{also insbesondere} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

**Bemerkung.**  $F_X$  ist als VF genau dann absolut stetig, wenn das Maß  $P_X$  bezüglich  $\lambda_1$  absolut stetig ist (also  $P_Y \ll \lambda_1$  gilt).

**Satz.**  $\mathbb{E}X = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^1} x \cdot f_X(x) dx, & \text{falls } F_X \text{ absolutstetig mit WD } f_X \\ \sum_{j \in J} x_j \cdot p_j, & \text{falls } F_X \text{ diskret mit Sprüngen } p_j \text{ bei } x_j, j \in J \subset \mathbb{N} \end{cases}$

**Satz** (Erwartungswerte bekannter Zufallsverteilungen).

- Für  $X \sim \text{Poi}(\lambda): \mathbb{E}X = \lambda$
- Für  $N \sim N(\mu, \sigma^2): \mathbb{E}X = \mu$
- Für  $X \sim \text{Exp}(\lambda): \mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$
- Für  $N \sim N(0, 1): \mathbb{E}|X| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

**Bemerkung.** Die Cauchy-Verteilung hat die VF bzw. die W-Dichte

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Eine Cauchy-verteilte ZG  $X$  hat keinen EW, da  $\int_{\mathbb{R}^1} |x| \cdot f(x) dx = \infty$ .

**Def.** Seien  $X_1, \dots, X_d: (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1))$  ZGn,

$$F = F_{(X_1, \dots, X_d)}: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1], \quad (x_1, \dots, x_d) \mapsto \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k)$$

die dazugehörige VF und  $P = P_{(X_1, \dots, X_d)}$  das von der VF induzierte Maß auf  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ .

- $F$  heißt **diskret**, falls es eine höchstens abzählbare Menge  $\{y_i \in \mathbb{R}^d \mid i \in I\}$  mit  $I \subset \mathbb{N}$  gibt, sodass

$$\forall i \in I: P(\{y_i\}) > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i \in I} P(\{y_i\}) = 0.$$

- $F$  heißt **stetig**, wenn  $P(\{y\}) = 0$  für alle  $y \in \mathbb{R}^1$ .

- $F$  heißt **absolut stetig**, falls das Maß  $P$  absolut stetig bzgl. dem Lebesgue-Maß ist, also  $P \ll \lambda_d$  gilt. Dazu äquivalent: Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass für höchstens abzählbar viele, disjunkte Elementarquader  $Q_j = (a_j, b_j]$  mit  $j \in J \subset \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{j \in J} \lambda_d(Q_j) \leq \delta \implies \sum_{j \in J} P(Q_j) = \sum_{j \in J} (\Delta F) Q_j \leq \epsilon.$$

- $F$  heißt **singulär stetig**, wenn  $F$  stetig ist und eine Lebesgue-Menge  $S$  mit  $\lambda_d(S) = 0$  und  $P(S) = 1$  existiert.

**Bemerkung.** Falls  $F$  absolut stetig, ex. die W-Dichte, die f. ü. durch

$$f = f_{(X_1, \dots, X_d)}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x_1, \dots, x_d) \mapsto \frac{\partial^d}{\partial x_1 \dots \partial x_d} F(x_1, \dots, x_d)$$

gegeben ist und  $\int_{(-\infty, x]} f(y) dy = F(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  erfüllt.

**Satz.** Sei  $X$  eine ZG und  $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  messbar. Dann gilt

$$\mathbb{E}g(X) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^1} g(x) \cdot f_X(x) dx, & \text{falls } F_X \text{ absolutstetig mit WD } f_X \\ \sum_{j \in J} g(x_j) \cdot p_j, & \text{falls } F_X \text{ diskret mit Sprüngen } p_j \text{ bei } x_j, j \in J \subset \mathbb{N} \text{ (und wohldefiniert)} \end{cases}$$

**Def.** Eine **Zerlegung** eines Intervalls  $[a, b]$  ist eine geordnete endliche Menge  $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\} \subset [a, b]$ . Eine weitere Zerlegung  $\tilde{Z}$  desselben Intervalls heißt **Verfeinerung** von  $Z$ , falls  $\tilde{Z} \supset Z$ .

**Notation.** Die Menge aller Zerlegungen von  $[a, b]$  ist  $\mathcal{Z}([a, b])$ .

**Def.** Eine Menge von Stützstellen bzgl. einer Zerlegung  $\{x_0 < \dots < x_k\}$  von  $[a, b]$  ist eine Menge  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  mit  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$  für  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Def.** Für zwei Funktionen  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , eine Zerlegung  $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$  von  $[a, b]$  und Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  bzgl.  $Z$  heißt die Summe

$$S(f, dg, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

**Riemann-Stieltjes-Summe** von  $f$  bzgl.  $g$  und der Zerlegung  $Z$  mit Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

**Def.** Seien  $f, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  heißt **Riemann-Stieltjes-integrierbar** (RS-integrierbar) bzgl. der **Gewichtsfunktion**  $G$ , wenn gilt: Es gibt ein  $\iota \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z_\epsilon$  von  $[a, b]$  existiert, sodass für alle Verfeinerungen  $Z \supset Z_\epsilon$  und Wahlen von Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  gilt:

$$|\iota - S(f, dG, Z, \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq \epsilon.$$

Dieses (eindeutig bestimmte)  $\iota$  heißt **Riemann-Stieltjes-Integral** (RS-Integral) von  $f$  bzgl.  $G$ , geschrieben

$$\int_a^b f(x) dG(x) := \iota.$$

**Bemerkung.** Mit  $G := \text{id}$  erhalten wir aus dem RS-Integral das gewöhnliche Riemann-Integral.

**Satz.** Das RS-Integral ist sowohl in der integrierten Funktion als auch der Gewichtsfunktion linear.

**Satz.** Für  $f$  bzgl.  $G$  auf  $[a, b]$  RS-int'bar und  $G$  stetig diff'bar gilt

$$\int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^b f(x) \cdot G'(x) dx.$$

**Satz** (Partielle Integration). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl.  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  RS-integrierbar. Dann ist auch  $G$  bzgl.  $f$  RS-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) dG(x) = [G(x) \cdot f(x)]_a^b - \int_a^b G(x) df(x).$$

*Bemerkung.* Wir können uneigentliche RS-Integrale analog zu uneigentlichen Riemann-Integralen definieren.

**Satz.** Sei  $\mathbb{E}|X| = \int_0^\infty 1 - F_X(x) + F_X(-x) dx < \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot F_X(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (1 - F_X(x)) = 0$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty 1 - F_X(x) - F_X(-x) dx.$$

**Satz.**  $\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}^1} \text{id} dP_X = \int_{-\infty}^\infty x dF_X(x)$

**Def.** Sei  $X$  eine ZG über  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann heißt

- $\mathbb{E}X^k$   **$k$ -tes Moment**,
- $\mathbb{E}|X|^k$   **$k$ -tes absolutes Moment**,
- $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^k$   **$k$ -tes zentriertes Moment**,
- $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^k$   **$k$ -tes zentriertes absolutes Moment**,
- $\text{Var}(X) := \mathbb{D}^2 X := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$  **Varianz** (Dispersion, Streuung),
- $\sqrt{\text{Var}(X)}$  **Standardabweichung** von  $X$ .

**Lemma.** Es gilt  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \geq 0$ .

**Korollar.**  $(\mathbb{E}X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$

**Lemma.**  $\mathbb{E}X^k = \int_{\Omega} X^k d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^1} \text{id}^k dP_X = \int_{-\infty}^\infty x^k dF_X =$

$$= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^1} x^k \cdot f_X(x) dx, & \text{falls } F_X \text{ absolutstetig mit WD } f_X \\ \sum_{j \in J} x_j^k \cdot p_j, & \text{falls } F_X \text{ diskret mit Sprüngen } p_j \\ & \text{bei } x_j, j \in J \subset \mathbb{N} \end{cases}$$

*Bemerkung.* Falls  $\mathbb{E}|X|^k < \infty$ , dann existiert auch  $\mathbb{E}X^k$ .

**Lemma.** Es gilt für eine ZG  $X$  und  $a, b, c \in \mathbb{R}^1$ :

- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$  •  $\text{Var}(X) \leq \mathbb{E}(X - c)^2$
- $\text{Var}(X) = 0 \iff \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X) = 0 \iff X \equiv \text{const } \mathbb{P}$ -fast-sicher

**Satz** (Verallgemeinerte Tschebyschow-Ungleichung). Sei  $X$  sei eine ZG und  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  nicht fallend. Dann gilt für alle  $\epsilon > 0$ :

$$\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}g(|X|)}{g(\epsilon)}$$

**Korollar.** • **Markow-Ungleichung:**  $\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{\epsilon}$ .

• **Tschebyschow-Ungleichung:**  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}$ .

• Für alle  $a > 0$  gilt  $\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E} \exp(a|X|)}{\exp(a\epsilon)}$ .

**Def.** Die Abbildung  $t \mapsto \mathbb{E} \exp(tX) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}X^n$  heißt momenterzeugende Funktion der ZG  $X$  oder VF  $F_X$ .

**Bsp.** Für  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  gilt  $\mathbb{E} \exp(zX) = \exp\left(z\mu + \frac{\sigma^2}{2} z^2\right)$ .

**Satz.** Für  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und ZGen  $X, Y$  gilt

$$|\mathbb{E}XY| \leq \mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}|Y|^q)^{\frac{1}{q}} \quad \textbf{(Hölder-Ungl.)}.$$

**Korollar.** **Cauchy-Schwarz-Ungl:**  $|\mathbb{E}XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(Y^2)}$

**Def.** Eine Funktion  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konvex**, falls gilt:

$$\forall x, y \in J : \forall t \in [0, 1] : g(ta + (1-t)b) \leq tg(a) + (1-t)g(b)$$

**Satz.** Sei  $g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  konvex auf einem Intervall  $J$  und  $X$  eine ZG mit  $\mathbb{P}(X \in J) = 1$  und  $\mathbb{P}|X| < \infty$ . Dann gilt für  $x, y \in I, t \in [0, 1]$ :

$$g(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}g(X) \quad \textbf{(Jensen-Ungleichung)}.$$

**Korollar.** **Ljapunow-Ungleichung:**  $|\mathbb{E}X|^{\frac{n}{m}} \leq \mathbb{E}|X|^{\frac{n}{m}}$

**Frage** (Momentenproblem (MP)). Unter welchen Bedingungen ist eine Folge  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Momentenfolge einer ZG  $X$  d. h.  $c_i = \mathbb{E}X^i$ ?

**Antwort.** Genau dann, wenn

$$\forall n \in \mathbb{N} : \det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{pmatrix} \geq 0.$$

**Frage.** Wann ist die zugehörige VF  $F_X$  eindeutig festgelegt?

*Bemerkung.* Dabei unterscheiden wir folgende Momentenprobleme:

- Stieltjes:  $c_n = \int_0^\infty x^n dF_X(x)$  • Hamburger:  $c_n = \int_{-\infty}^\infty x^n dF_X(x)$

**Antwort.** Hinreichende Bedingung für Bestimmtheit (Carleman):

- Stieltjes:  $\sum_{n=1}^\infty c_n^{-\frac{1}{2n}} = \infty$  • Hamburger:  $\sum_{n=1}^\infty c_{2n}^{-\frac{1}{2n}} = \infty$

*Bemerkung.* Sei  $X = (X_1, \dots, X_k)$  eine  $k$ -dimensionale ZG über  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . Die ZG  $X_1, \dots, X_k$  heißen **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}\{X_i \in B_i\}$$

für alle  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_k \leq x_k)$$

für alle  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ . Falls  $F_X$  absolut stetig ist, also die W-Dichte  $f_X(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial F(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \dots \partial x_k}$  existiert, ist dies äquivalent zu

$$\forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R} : f_X(x_1, \dots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_k}(x_k).$$

Für diskrete Verteilungen ist dies äquivalent zu

$$\forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X_1=x_1, \dots, X_k=x_k) = \mathbb{P}(X_1=x_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_k=x_k).$$

**Def.** Für eine  $k$ -dimensionale ZV  $X = (X_1, \dots, X_k)$  heißt

$$F_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_l})}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}) = \lim_{j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}} F_X(x_1, \dots, x_k)$$

mit  $l \in \{1, \dots, k-1\}$  und  $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k$   **$l$ -dimensionale Rand-(Marginal-)verteilungsfunktion.**

*Bemerkung.* Falls  $f_X(x_1, \dots, x_k)$  ex., so existieren alle Randdichten

$$f_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_l})}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}) = \int_{\mathbb{R}^{k-l}} f_X(x_1, \dots, x_k) dx_{i_1} \dots dx_{i_l}.$$

Für  $k=2$  und ZV diskret mit Masseschwerpunkten  $x_m = (x_m^1, x_m^2)$ :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_m^1) = \sum_{x_m^2} \mathbb{P}(X_1 = x_m^1, X_2 = x_m^2)$$

*Bemerkung.* Im Allgemeinen bestimmen die Randverteilungen nicht die gemeinsame Verteilung des Vektors.

**Def.**  $(X, Y)$  sei eine zweidimensionale ZV über  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  mit  $\mathbb{E}X^2 < \infty$  und  $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ . Dann heißen

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y))$$

$$\text{Cor}(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

**Kovarianz** bzw. **Korrelation** von  $X$  und  $Y$ .

**Satz.** • Falls  $X, Y$  unabhängig, so gilt  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cor}(X, Y) = 0$   
•  $|\text{Cor}(X, Y)| \leq 1$  •  $\text{Cor}(X, Y) = 1 \iff \exists a, b \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$

**Def.** Falls  $\text{Cor}(X, Y) = 0$ , so heißen  $X, Y$  **unkorreliert**.

**Sprechweise.** •  $\text{Cor}(X, Y) \approx 1$ : positive Korrelation

•  $\text{Cor}(X, Y) \approx -1$ : negative Korrelation

**Achtung.** Aus Unkorreliertheit folgt i. A. nicht Unabhängigkeit!

**Bsp.** Sei  $X$  eine ZG mit der symmetrischen Dichte

$$f_X(x) = f_X(-x) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^\infty |x|^3 f_X(x) dx < \infty,$$

dann ist  $\text{Cov}(X, X^2) = 0$ , aber  $X$  und  $X^2$  nicht unabhängig.

*Bemerkung.* Falls  $(X, Y)$  eine zweidimensionale Normalverteilung besitzt, so folgt aus  $\text{Cor}(X, Y) = 0$  die Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$ .

**Satz.**  $X_1, \dots, X_n$  seien paarweise unkorrelierte ZGn mit  $\mathbb{E}X_i^2 < \infty$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

*Bemerkung.* Seien  $X$  und  $Y$  ZGen. Gesucht:  $\mathbb{E}(X \cdot Y)$

- Angenommen, es existiert eine gemeinsame WD  $f_{(X,Y)}$ . Dann:

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{(X,Y)}(x,y) \, d(x,y)$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \, dy \right) dx$$

- Angenommen,  $(X,Y)$  hat Werte in einer höchstens abzählbaren Menge  $(x_i, y_j)_{(i,j) \in IJ}$  mit  $IJ \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , die mit Wahrscheinlichkeit  $p_{ij} > 0$  angenommen werden. Dann gilt

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j) \in IJ} x_i y_j p_{ij}$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{i \in \pi_1(IJ)} x_i \cdot \mathbb{P}(X=x_i) = \sum_{(i,j) \in IJ} x_i p_{ij}$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \sum_{(i,j) \in IJ} x_i y_j (p_{ij} - \mathbb{P}(X=x_i) \cdot \mathbb{P}(Y=y_j))$$

- Angenommen,  $(X,Y)$  ist singulär-stetig verteilt oder besitzt eine singulärstetige Komponente. Dann gilt:

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \, dF(x,y)$$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x, Y > y) \, dx \, dy \quad \text{für } X, Y \geq 0.$$

**Satz.** Sei  $Y := g(X)$ , wobei  $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  mb und  $X$  eine ZG. Dann:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \in g^{-1}((-\infty, y])).$$

**Satz.**  $X$  sei absolut stetig mit Dichte  $f_X$  und  $\mathbb{P}(X \in D) = 1$  für  $D \subset \mathbb{R}^1$  offen und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^1$  eine  $C^1$ -Funktion mit  $g'(x) > 0$  für alle  $x \in D$ . Dann ist  $Y := g(X)$  absolut-stetig mit der Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{für } y \in \mathbb{R}^1 \setminus g(D) \\ \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} & \text{für } y \in g(D) \end{cases}$$

*Bemerkung.* Falls die Ableitung  $g': D \rightarrow \mathbb{R}^1$  wechselndes Vorzeichen besitzt, so muss in Monotoniebereiche unterteilt werden.

**Satz.** Sei  $X = (X_1, \dots, X_k)$  ein  $k$ -dimensionaler Zufallsvektor mit WD  $f_X$ ,  $G, H \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $g = (g_1, \dots, g_k): G \rightarrow H$  ein  $C^1$ -Diffeo. Dann findet man Funktionen  $h_i: H \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $i = 1, \dots, k$  mit  $h(y_1, \dots, y_k) = (h_1(y_1, \dots, y_k), \dots, h_k(y_1, \dots, y_k))$  für  $(y_1, \dots, y_k) \in H$ , sodass für die Dichte von  $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$  gilt:

$$f_Y(y_1, \dots, y_k) = \begin{cases} 0, & \text{für } (y_1, \dots, y_k) \notin H, \text{ ansonsten} \\ \frac{f_X(h_1(y_1, \dots, y_k), \dots, h_k(y_1, \dots, y_k))}{|\det Dg(h_1(y_1, \dots, y_k), \dots, h_k(y_1, \dots, y_k))|} \end{cases}$$

**Satz.**  $(X,Y)$  besitze eine gemeinsame Dichte  $f_{(X,Y)}$ . Dann gilt für die Dichten von  $Z_1 := X + Y$ ,  $Z_2 := X \cdot Y$ ,  $Z_3 := \frac{X}{Y}$ :

$$f_{Z_1}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(z-y, y) \, dy \stackrel{\text{Unabh.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y) \, dy$$

$$f_{Z_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}\left(\frac{z}{y}, y\right) \cdot \frac{1}{|y|} \, dy \stackrel{\text{Unabh.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{z}{y}\right) \cdot f_Y(y) \cdot \frac{1}{|y|} \, dy$$

$$f_{Z_3}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(xy, y) \cdot |y| \, dy \stackrel{\text{Unabh.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z y) \cdot f_Y(y) \cdot |y| \, dy$$

**Bsp.** Seien  $X, Y$  unabhängig,  $N(0,1)$ -verteilt,  $Z := \frac{X}{Y}$ . Dann:

$$f_Z(z) = \dots = \frac{1}{\pi(1+z^2)} \quad (\text{Cauchy-verteilt}).$$

**Def.** Seien  $X$  und  $Y$  unabhängige ZGen. Dann gilt für  $z \in \mathbb{R}$ :

$$F_{X+Y}(z) = \mathbb{P}(X+Y \leq z) = \int_{\mathbb{R}^1} F_X(z-y) \, dF_Y(y) =: (F_X * F_Y)(z).$$

Dabei heißt  $(F_X * F_Y)$  **Faltung** von  $F_X$  und  $F_Y$ .

**Proposition.** •  $F_X * F_Y = F_Y * F_X$  (Kommutativität)

•  $F_{X+Y} = F_X * F_Y$ , wenn  $X$  und  $Y$  unabhängig

• Falls  $X$  oder  $Y$  eine Dichte besitzen, so auch  $X+Y$  bei Unabh.:

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) \, dF_Y(y) \stackrel{\text{oder}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) \, dF_X(x) \\ &\stackrel{\text{oder}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) \, df_X(x)y \end{aligned}$$

**Satz.** • Seien  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig und  $(X_1+X_2)$  normalverteilt (also  $X_1 + X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$ ). Dann sind  $X_1$  und  $X_2$  normalverteilt.

• Seien  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig und  $(X_1+X_2)$  Poisson-verteilt (also  $X_1 + X_2 \sim \text{Poi}(\lambda)$ ). Dann sind auch  $X_1$  und  $X_2$  Poisson-verteilt.

**Satz.** Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig. Dann gilt:

- $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}\text{-f.ü.}} \mathbb{E}X_1$ , falls  $X_1, \dots, X_n$  identisch verteilt.
- $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) - \mathbb{E}X_1\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(0, \text{Var}(X_1))$ , falls  $\text{Var}(X_1) < \infty$

## Produkt-Maße und der Satz von Fubini-Tonelli

**Voraussetzung.** Seien  $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  messbare Räume und  $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$  das kartesische Produkt der Mengen.

**Notation.**  $\pi_i: \Omega \rightarrow \Omega_i$ ,  $(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \omega_i$  (Projektionsabbildung)

**Def.** Die **Produkt- $\sigma$ -Algebra** von  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$  ist definiert durch

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{A}_n := \sigma\left(\pi_1^{-1}(\mathfrak{A}_1) \cup \dots \cup \pi_n^{-1}(\mathfrak{A}_n)\right).$$

**Satz.**  $\mathfrak{A} = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_1 \in \mathfrak{A}_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}_n\})$

**Lemma.** Sei  $\mathcal{E}_i$  mit  $\sigma(E_i) = \mathfrak{A}_i$  und es existieren Folgen  $(E_i^k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{E}_i$  mit  $E_i^k \uparrow \Omega_i$ . Dann gilt:

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{A}_n = \sigma(\{E_1 \times \dots \times E_n \mid E_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}_n\})$$

*Bemerkung.* Auf die Zusatzvoraussetzung der monoton aufsteigenden Mengenfolge können wir nicht verzichten.

**Satz.**  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^1) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$

**Lemma.**  $(\tilde{\Omega}', \tilde{\mathfrak{A}})$  sei ein messbarer Raum. Dann gilt:

$f: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$  genau dann  $(\tilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A})$ -messbar, wenn für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Abbildung  $f_i := \pi_i \circ f: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega_i$   $(\tilde{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}_i)$ -messbar ist.

**Satz.** Sei  $\mu_1$  auf  $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$  und  $\mu_2$  auf  $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maße. Dann ex. genau ein Maß  $\mu := \mu_1 \times \mu_2$  auf  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$  mit

$$\forall A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2: (\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2).$$

Das Maß  $\mu$  ist dann auch  $\sigma$ -endlich auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ .

**Korollar.** Das Produkt-W-Maß  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$  ist das einzige W-Maß auf  $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$  mit der Eigenschaft:

- $\mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2) = \mathbb{P}_1(A_1)$  und  $\mathbb{P}(\Omega_1 \times A_2) = \mathbb{P}_2(A_2)$
- $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2)$  für  $B_1 = A_1 \times \Omega_2$ ,  $B_2 = \Omega_1 \times A_2$

**Korollar.** Für  $k, l \in \mathbb{N}_{>0}$  mit  $k+l = n$  gilt  $\lambda_n = \lambda_k \times \lambda_l$

**Def.** Sei  $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $\omega_1 \in \Omega_1$ ,  $\omega_2 \in \Omega_2$ ,  $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Dann heißen

$$A_{\omega_1} := \{\omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A\} = \pi_2(A \cap \pi_1^{-1}(\omega_1)) \quad \text{\textcolor{blue}{ $\omega_1$ -Schnitt}} \text{ von } A,$$

$$A_{\omega_2} := \{\omega_1 \mid (\omega_1, \omega_2) \in A\} = \pi_1(A \cap \pi_2^{-1}(\omega_2)) \quad \text{\textcolor{blue}{ $\omega_2$ -Schnitt}} \text{ von } A,$$

$$f_{\omega_1}: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad \omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2) \quad \text{\textcolor{blue}{ $\omega_1$ -Schnitt von } } f,$$

$$f_{\omega_2}: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad \omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2) \quad \text{\textcolor{blue}{ $\omega_2$ -Schnitt von } } f.$$

**Satz.** Sei  $A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$  und  $f$  sei  $(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ -messbar. Dann gilt

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1: A_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2 \quad \text{und} \quad \forall \omega_2 \in \Omega_2: A_{\omega_2} \in \mathfrak{A}_1$$

$\forall \omega_1 \in \Omega_1: f_{\omega_1}$  ist  $\mathfrak{A}_2$ -messbar \quad \text{und} \quad \forall \omega\_2 \in \Omega\_2: f\_{\omega\_2} \text{ ist } \mathfrak{A}\_1\text{-messbar}

**Lemma.** Sei  $\mu_i$  ein  $\sigma$ -endliches Maß auf  $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$  für  $i = 1, 2$ . Dann sind für  $A \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$  die Funktionen  $f_1(\omega_1) = \mu_2(A_{\omega_1})$  bzw.  $f_2(\omega_2) = \mu_1(A_{\omega_2})$  nichtnegative  $\mathfrak{A}_1$ - bzw.  $\mathfrak{A}_2$ -messbare Funktionen auf  $\Omega_1$  bzw.  $\Omega_2$  und es gilt

$$\int_{\Omega_1} f_1 \, d\mu_1 = \mu(A) = \int_{\Omega_2} f_2 \, d\mu_2,$$

wobei  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$  das Produktmaß auf  $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$  ist.

**Satz** (Fubini, Tonelli). Seien  $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$  und  $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und sei

$$f: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}$$

eine nichtnegative, numerische  $(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ -messbare Funktion. Dann sind

$$\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_2 \quad \text{und} \quad \omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f_{\omega_2} \, d\mu_1$$

$\mathfrak{A}_1$ - bzw.  $\mathfrak{A}_2$ -messbare Funktionen und es gilt

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f_{\omega_2} \, d\mu_1 \right) d\mu_2$$

*Bemerkung.* Falls  $f$   $(\Omega_1 \otimes \Omega_2)$ -messbar mit Vorzeichenwechsel, so muss  $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| \, d(\mu_1 \times \mu_2)$  vorausgesetzt werden.