Zusammenfassung Modellkategorien

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel $(S, \leq)$ bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung $\leq$ auf S.

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\ldots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \ldots$

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz)**.** Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leq_S)] \leq [(T, \leq_T)] \quad :\iff \exists \text{inj. monotone Abb. } (S, \leq_S) \to (T, \leq_T).$$

Notation. • $0 \coloneqq [\emptyset]$, • $n \coloneqq [\{1, \ldots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega \coloneqq [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

Prinzip (**Transfinite Induktion**)**.**
Sei $P : \mathcal{O}_n \to \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n \,:\, (\forall \gamma < \beta \,:\, P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n \,:\, P(\alpha)$$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert: Für $\alpha = [(S, \leq_S)]$ und $\beta = [(T, \leq_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

- $\alpha + \beta \coloneqq [(S \amalg T, \leq_{S \amalg T})]$, wobei gilt:
  $$\leq_{S\amalg T}|_{S \times S} \coloneqq \leq_S, \quad \leq_{S\amalg T}|_{T \times T} \coloneqq \leq_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$
- $\alpha \cdot \beta \coloneqq [(S \times T, \leq_{S \times T})]$ mit der lexikogr. Ordnung
  $$(s_1, t_1) \leq_{S \times T} (s_2, t_2) \coloneqq t_1 < t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leq_S s_2)$$
- $\alpha^\beta \coloneqq [(\{\text{Abb. } f : S \to T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leq)]$ mit
  $$f < g \quad :\iff \exists t \in T \,:\, f(t) < g(t) \wedge (\forall t_2 >_T t \,:\, f(t_2) = g(t_2))$$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 \coloneqq [(\emptyset, \leq)] \in \mathcal{O}_n$.
b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.
c) Die Limeszahl $\lim A \coloneqq \sup A$ einer Teil*menge* $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

a)	b)	c)
$\alpha + 0 \coloneqq \alpha$	$\alpha + (\beta + 1) \coloneqq (\alpha + \beta) + 1$	$\alpha + \lim A \coloneqq \lim \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha \cdot 0 \coloneqq 0$	$\alpha \cdot (\beta + 1) \coloneqq (\alpha \cdot \beta) + \alpha$	$\alpha \cdot \lim A \coloneqq \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha^0 \coloneqq 1$	$\alpha^{\beta + 1} \coloneqq \alpha^\beta \cdot \alpha$	$\alpha^{\lim A} \coloneqq \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe ist mit
• $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, • $a \cdot 0 = 0$.

Lem (Rechenregeln in $\mathcal{O}_n$)**.** • $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
• $\alpha^0 = 1$ • $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^\alpha = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$
• $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta + \gamma}$ • $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

- $\mathcal{O}_n$ ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht*!
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:
  $$\forall \beta < \gamma : \quad \alpha + \beta < \alpha + \gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \ (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \ (\alpha > 1).$$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \ldots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.

Kategorientheorie

Def. Eine **(schwache) 2-Kategorie** $\mathbb{C}$ besteht aus

- einer Ansammlung $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie
  $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & B \end{tikzcd} \right\},$$
- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor
  $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$
- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem Objekt $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem natürlichen Isomorphismus
  $$\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}} : \ - \circ (- \circ -) \implies (- \circ -) \circ -,$$
  wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ
  $$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$
- und für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten natürlichen Isomorphismen $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{D}} : (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}\,\mathcal{C},\mathcal{D}}$ und $\lambda_{\mathcal{E},\mathcal{D}} : (- \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}\,\mathcal{C},\mathcal{D}}$

sodass gilt

- für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$ kommutiert
  $$\begin{tikzcd} K \circ (H \circ (G \circ F)) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}}"] \arrow[d, "K \circ \alpha_{\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] & (K \circ H) \circ (G \circ F) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{G}}"] & ((K \circ H) \circ G) \circ H \\ K \circ ((H \circ G) \circ F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] & & (K \circ (H \circ G)) \circ F \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}} \circ F"'] \end{tikzcd}$$
- TODO: Diagramm einfügen! Verträglichkeit Identität und Assoziativität

Bspe. • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.
- Jede Kategorie $\mathcal{C}$ ist natürlich eine 2-Kategorie.
- Die Kategorie der Ringe $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathbb{R}) \coloneqq \{\text{Ringe mit Eins}\}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) \coloneqq$ Kat. der B-A-Bimoduln mit $N \circ M \coloneqq N \otimes_B M$ für $M \in \mathrm{Hom}(A, B)$ und $N \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\mathrm{Id}_A \coloneqq A$.

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorien mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann $\otimes$ anstelle von $\circ$ geschrieben.

Satz. Sei $F \in \hat{\mathcal{C}}$, $Y \in \mathcal{C}$. Ist dann $s \in F(Y)$, so existiert höchstens eine nat. Transformation $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \to F$ mit $\eta(Y)(\mathrm{id}_Y) = s$. Ist η ein Isomorphismus, stellt also Y den Funktor F vermöge η dar, so heißt s die **universelle Familie**.

Prop. Stellen Y und Y' beide den Funktor F dar (mittels natürlichen Transformationen α, β), so existiert genau ein Isomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(Y, Y')$, sodass $\alpha = \beta \circ \mathrm{Hom}(-, \varphi)$.

Bsp. Sei k ein Körper. Für jede k-Algebra A ist dann

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], A), A), \quad \varphi \mapsto \varphi(X)$$

eine in A natürliche Bijektion. Somit stellt $k[X] \in \mathrm{Ob}(k\text{-}\mathbf{Alg})$ den Vergissfunktor $V : k\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$ (ko-)dar.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **punktiert**, falls initiales und terminales Objekt in $\mathcal{C}$ existieren und zusammenfallen.

Bspe. **Ab** und die Kat. der punktierten top. Räume sind punktiert.

Satz. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist genau dann vollständig, wenn sie Produkte und Differenzkerne besitzt.

Satz. Sei $F : I \times J \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Dann existiert ein nat. Isomorphismus $\lim\limits_i \lim\limits_j F(i, j) = \lim\limits_j \lim\limits_i F(i, j) = \lim\limits_{i,j} F(i, j)$, wenn die Limiten existieren.

Def. Sei $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $\int_c S(c, c) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ von S ist eine Familie $\alpha_d : \int_c S(c, c) \to S(c, c)$, $d \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ von Morphismen in $\mathcal{A}$, sodass für alle $(c \xrightarrow{f} c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm
TODO: Diagramm einfügen!
kommutiert und $\int_c S(c, c)$ universell mit dieser Eigenschaft ist.

Bem. Enden sind spezielle Limiten.

Bem. Das duale Konzept ist das eines Koendes $\int^c S(c, c)$.

Bsp. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(-), G(-)) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor mit Ende $\int_c \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) = \mathrm{Nat}(F, G)$.

Satz (Fubini)**.** Sei $S : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d,c)} S(d,d,c,c) \cong \int_d \int_c S(d,d,c,c),$$

falls die rechte Seite und $\int_c S(d,d',c,c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

Bsp. Sei R ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt. Ein additiver Funktor $R^{(\mathrm{op})} \to \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein R-Linksmodul (bzw. R-Rechtsmodul). Dann ist $\int^{*\in R} A \otimes_Z B \cong A \otimes_R B$.

Def. Sei $\mathbb{C}$ eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{D}, \mathcal{C}$ ist ein nat. Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(F \circ -, -) \cong \mathrm{Hom}(-, G \circ -),$$

d. h. Morphismen $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, sodass $G\epsilon \circ \eta G = \mathrm{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \mathrm{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.