

# Zusammenfassung Modellkategorien

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

## Kategorientheorie

*Bem.* Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

**Def.** Eine (**schwache**) **2-Kategorie**  $\mathbb{C}$  besteht aus

- einer Ansammlung  $\text{Ob}(\mathbb{C})$  von Objekten,
- für jedes Paar  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  von Objekten einer Kategorie

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ A \begin{array}{c} \xrightarrow{F} B \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{G} B \end{array} \right\},$$

- für jedes Tripel  $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$  von Objekten einem Funktor

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

- für jedes Objekt  $\mathcal{C} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$  einem Objekt  $\text{Id}_{\mathcal{C}} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ ,
- für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$  einem natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} : - \circ (- \circ -) \Rightarrow (- \circ -) \circ -,$$

wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \text{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$

- und für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{Ob}(\mathbb{C})$  natürlichen Isomorphismen

$$\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (- \circ \text{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle  $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathbb{C}$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} K(H(GF)) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, G}} & (KH)(GF) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, G}} ((KH)G)H \\ \downarrow K\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} & & \alpha_{\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, G} \uparrow \\ K((HG)F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}, G}} & (K(HG))F \end{array}$$

- Für alle  $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathbb{C}$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{D}, \mathcal{E}}} & (G \circ \text{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \\ & \searrow G\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} & \swarrow \rho_{\mathcal{D}, \mathcal{E}} F \\ & G \circ F & \end{array}$$

**Bspe.** • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.

- Jede Kategorie  $\mathcal{C}$  ist natürlich eine 2-Kategorie.
- Die Kategorie der Ringe  $\mathbb{R}$  mit  $\text{Ob}(\mathbb{R}) := \{\text{Ringe mit Eins}\}$  und  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) := \text{Kat. der } B\text{-}A\text{-Bimoduln mit } N \circ M := N \otimes_B M$  für  $M \in \text{Hom}(A, B)$  und  $N \in \text{Hom}(B, C)$ . Dabei ist  $\text{Id}_A := A$ .

**Def.** Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann  $\otimes$  anstelle von  $\circ$  geschrieben.

**Def.** Sei  $S : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Ein **Ende**  $E \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  von  $S$  ist eine Familie  $\alpha_c : E \rightarrow S(c, c)$ ,  $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  von Morphismen in  $\mathcal{A}$ , sodass für alle  $(f : c \rightarrow c') \in \mathcal{C}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & S(c, c) & & \\ & \nearrow \alpha_c & & \searrow S(\text{id}_c, f) & \\ E & & & & S(c, c') \\ & \searrow \alpha_{c'} & & \nearrow S(f, \text{id}_{c'}) & \\ & & S(c', c') & & \end{array}$$

kommutiert, und  $E$  universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler **S-Keil**.

**Notation.**  $E = \int_{\mathcal{C}} S(c, c)$ .

*Bem.* Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden:  $\lim F = \int_{\mathcal{C}} F(c)$ ; der Integrand ist  $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$ .

*Bem.* Das duale Konzept ist das eines **Anfangs** Koendes  $\int_{\mathcal{C}} S(c, c)$ .

**Bsp.** Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_{\mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \cong \text{Nat}(F, G).$$

**Satz** (Fubini). Sei  $S : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d, c)} S(d, d, c, c) \cong \iint_{d, c} S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und  $\int_{\mathcal{C}} S(d, d', c, c)$  für alle  $d, d' \in \mathcal{D}$  existieren.

**Bsp.** Sei  $R$  ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt  $*$ . Ein additiver Funktor  $R^{(\text{op})} \rightarrow \mathbf{Ab}$  ist nichts anderes als ein  $R$ -Linksmodul (bzw.  $R$ -Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int_{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

**Lem** (Ninja-Yoneda-Lemma). Für jede Prägarbe  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  gilt

$$F \cong \int_{\mathcal{C}} F(c) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

**Def.** Sei  $\mathbb{C}$  eine 2-Kategorie. Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$ . Eine **Adjunktion** von  $F \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  und  $G \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$  ist geg. durch Morphismen  $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$  (genannt **Eins**) und  $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  (**Koeins**) mit  $G\epsilon \circ \eta G = \text{Id}_G$  und  $\epsilon F \circ F\eta = \text{Id}_F$ . Man notiert  $F \dashv G$ .

**Lem.** R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

*Bem.* Seien  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren. Dann gilt  $F \dashv G$  genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\text{Hom}(F \circ -, -) \cong \text{Hom}(-, G \circ -)$$

**Bsp.**  $\exists f \dashv f^* \dashv \forall f$

**Bsp.** Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein  $B$ - $A$ -Modul  $M$  ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn  $M$  als Rechts- $A$ -Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

*Bem.* Sind  $\eta$  und  $\epsilon$  in  $F \dashv G$  sogar Isomorphismen, so heißt  $F \dashv G$  auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von  $F$  und  $G$  sowie einem der Morphismen  $\epsilon, \eta$ ) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

## Kan-Erweiterungen

**Def.** Sei  $\mathcal{A} \xleftarrow{T} \mathcal{M} \xrightarrow{K} \mathcal{C}$  ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE)  $(R, \epsilon)$  von  $T$  längs  $K$  besteht aus

- einem Morph.  $R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$
  - einem 2-Morph.  $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$ ,
- sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE  $(S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}, \eta : S \circ K \Rightarrow T)$  gibt es genau ein  $\sigma : S \Rightarrow R$  mit  $\epsilon \circ \sigma K = \eta$ . Notation:  $R = \text{Ran}_K(T)$

*Bem.* Es sind äquivalent: •  $(R, \epsilon)$  ist RKE von  $T$  längs  $K$   
•  $\eta \mapsto \epsilon \circ \eta K : \text{Nat}(S, R) \rightarrow \text{Nat}(S \circ K, T)$  ist bij.  $\forall S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$

*Bem.* Es gilt  $R = \text{Ran}_K(T)$  genau dann, wenn es in  $S \in [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$  natürliche Isomorphismen  $\text{Nat}(S, R) \cong \text{Nat}(S \circ K, T)$  gibt.

**Prop.** RKEs sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

**Bspe.** • Die RKE eines bel. Morphismus  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  längs  $\text{Id}_{\mathcal{M}}$  existiert stets und ist gegeben durch  $(T, T \circ \text{Id}_{\mathcal{M}} \Rightarrow T)$ .

- In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\text{Ran}_K(T) = (\text{Hom}_{\mathcal{M}}(K, T), \quad \text{ev} : \text{Hom}_{\mathcal{M}}(K, T) \otimes_{\mathcal{C}} K \Rightarrow T).$$

**Bsp.** Sei  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{1}$ ,  $*$   $\mapsto 1$  und  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von  $T$  längs  $K$  dasselbe wie ein Limes von  $T$ .

**Thm.** Seien  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  und  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  Funktoren. Existiere für alle  $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  der Limes  $R(c) := \lim((f : c \rightarrow Km) \mapsto Tm)$ . Dabei ist die Indexkategorie des Limes die Kommakat.  $\Delta(c) \downarrow K$ . Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  ausdehnen und zwar zu einer RKE von  $T$  längs  $K$ .

*Bem.* Ist  $\mathcal{M}$  klein und  $\mathcal{C}$  lokal klein und ist  $\mathcal{A}$  vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktweise RKE**.

**Lem.** Eine RKE ist genau dann punktweise, wenn sie für alle  $a \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  unter dem Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$  erhalten bleibt.

**Thm.** Sei  $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor. Betrachte  $K^* : [\mathcal{C}, \mathcal{A}] \rightarrow [\mathcal{M}, \mathcal{A}]$ .

- Wenn ein Funktor  $\text{Ran}_K : [\mathcal{M}, \mathcal{A}] \rightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$  mit  $K^* \dashv \text{Ran}_K$  ex., so ist  $\text{Ran}_K(T)$  für alle  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  eine RKE von  $T$  längs  $K$ .
- Existiere für alle  $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  eine RKE  $\text{Ran}_K(T)$ . Dann kann man die Zuordnung  $T \mapsto \text{Ran}_K(T)$  zu einem Rechtsadjungierten von  $K^*$  ausdehnen.

**Thm.** Sei  $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$  in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- $G$  besitzt einen Linksadjungierten.
- $\text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}})$  existiert und  $G \circ \text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}}) = \text{Ran}_G(G \circ \text{Id}_{\mathcal{A}})$ .

In diesem Fall gilt  $\text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}}) \dashv G$  und  $\text{Ran}_G(\text{Id}_{\mathcal{A}})$  wird sogar von allen Morphismen  $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Y}$  bewahrt.

**Thm.** Rechtsadjungierte bewahren RKE.

**Kor.** Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

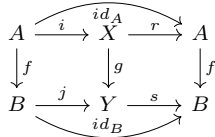
## Algebraische Strukturen in Kategorien

**Def.** Eine **Retrakt** ist ein Morphismus  $r : Y \rightarrow X$ , sodass ein Morphismus  $i : X \rightarrow Y$  mit  $r \circ i = \text{id}_X$  existiert.  
Sprechweise:  $X$  ist ein Retrakt von  $Y$  (vermöge  $i$ ).

**Bsp.** Ein Modul  $U$  ist genau dann Retrakt von einem Modul  $M$ , wenn  $U$  ein direkter Summand von  $M$  ist.

**Prop.** „ $-$  ist Retrakt von  $-$ “ ist eine reflexive und trans. Relation.

**Def.** Ein **Retrakt eines Morphismus**  $(X \xrightarrow{g} Y) \in \mathcal{C}$  ist ein Mor.  $f : A \rightarrow B$ , sodass es ein komm. Diagramm folgender Form gibt:



**Bem.** Ein Retrakt von  $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$  ist ein Retrakt von  $f \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\rightarrow})$ .

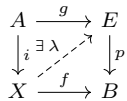
**Prop.** • Retrakte von Isomorphismen sind Isomorphismen.

• Sei  $f \circ g = \text{id}$ . Dann ist  $f$  ein Retrakt von  $g \circ f$ .

**Prop.** Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor. Dann ist die Klasse  $\{f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$  abgeschlossen unter Retrakten.

**Def.** Sei  $i : A \rightarrow X$  und  $p : E \rightarrow B$ . Dann werden als äq. definiert:

- $p$  ist  **$i$ -injektiv** •  $i$  ist  **$p$ -projektiv** •  $i \sqsubseteq p$
- $i$  hat die Linkshochhebungseigenschaft (LHHE) bzgl.  $p$
- $p$  hat die Rechtshochhebungseigenschaft (RHHE) bzgl.  $i$
- Für alle  $f, g$  wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales  $\lambda$ , sodass die Dreiecke kommutieren:



**Bsp.** Wegeliftung aus der Topologie:  $i : \{0\} \rightarrow [0, 1]$  erfüllt die LHHE bezüglich allen Überlagerungen  $\pi : E \rightarrow B$ .

**Bsp.** Ein Objekt  $P$  einer ab. Kat.  $\mathcal{A}$  ist genau dann **projektiv**, wenn  $(0 \rightarrow P)$  die LHHE bzgl. aller Epis in  $\mathcal{A}$  hat. Dual ist  $I \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  injektiv g.d.w. alle Monos in  $\mathcal{A}$  die LHHE bzgl.  $(I \rightarrow 0)$  besitzen.

**Bsp.** In **Set** gilt: Alle Inj. haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

**Lem (Retrakt-Argument).** Sei  $f = q \circ j$ .

- Ist  $f$   $q$ -projektiv ( $f \sqsubseteq q$ ), so ist  $f$  ein Retrakt von  $j$ .
- Ist  $f$   $j$ -injektiv ( $j \sqsubseteq f$ ), so ist  $f$  ein Retrakt von  $q$ .

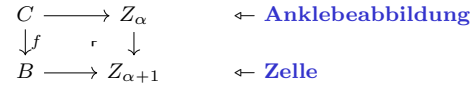
## Zellenkomplexe

**Def.** Sei  $\lambda$  eine Ordinalzahl. Eine  **$\lambda$ -Sequenz** in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein kolimesbewahrender Funktor  $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$  (wobei man  $\lambda$  als Präordnungskategorie aller  $\beta < \lambda$  auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus  $X_0 \rightarrow \text{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$ .

**Bem.** Kolimesbewahrung bedeutet:  $\text{colim}_{\alpha < \beta} X_\alpha = X_\beta$  für alle  $\beta < \lambda$ .

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine kovollständige Kategorie,  $I \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$  eine Menge.

- Ein **relativer  $I$ -Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer  $\lambda$ -Sequenz  $Z$ , sodass  $\forall \alpha \in \mathcal{O}_n$  mit  $\alpha + 1 < \lambda$  ein Pushoutdiagramm



mit  $f \in I$  existiert. Sprechweise:  
„ $Z_{\alpha+1}$  entsteht aus  $Z_\alpha$ , indem wir  $B$  längs  $C$  ankleben“

- Ein Objekt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  heißt  **$I$ -Zellenkomplex**, wenn der Morph.  $0 \rightarrow A$  aus dem initialen Obj. ein relativer  $I$ -Zellenkomplex ist.

**Bsp.** CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind  $I$ -Zellenkomplexe mit  $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geq 0\}$  (und  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ ).

**Bspe.** • Identitäten  $A \rightarrow A$  sind relative  $I$ -Zellenkomplexe.

- Das initiale Objekt ist ein absoluter  $I$ -Zellenkomplex.

**Lem.** Sei  $Z : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$  eine  $\lambda$ -Sequenz. Sei jeder Morphismus  $Z_\beta \rightarrow Z_{\beta+1}$  ( $\beta + 1 < \lambda$ ) ein Pushout eines Morphismus aus  $I$ . Dann ist die transfinite Komposition von  $Z$  ein  $I$ -Zellenkomplex.

**Thm.** Die Klasse der relativen  $I$ -Zellenkomplex ist abgeschl. unter:  
• transfiniten Kompositionen • Isomorphismen • Koprodukten

## Faktorisierungssysteme

**Def.** Eine Unterkat.  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$  heißt **links-saturiert**, falls  $\mathcal{L}$  abgeschl. ist unter Pushouts, transfiniten Kompositionen und Retrakten.

**Lem.** Sei  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$  links-saturiert. Dann ist  $\mathcal{L}$  unter Koprodukten abgeschlossen und enthält alle Isomorphismen.

**Bsp.** Sei  $R \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ . Dann ist die Unterkategorie  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$  mit  $\text{Mor}(\mathcal{L}) := \square R := \{i \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid \forall r \in R : i \sqsubseteq r\}$  links-saturiert.

**Def.** •  $L \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$  heißt **proj. abgeschlossen**, falls  $L \supseteq \square(L^\square)$ .

- $R \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$  heißt **injektiv abgeschlossen**, falls  $R \supseteq (\square L)^\square$ .

**Prop.** •  $\square(L^\square)$  ist die projektive Hülle von  $L$ , d. h. die kleinste Klasse von Morphismen, die projektiv abgeschl. ist und  $L$  umfasst.

- Die projektive Hülle von  $L$  ist links-saturiert. Ist  $L$  schon projektiv abgeschlossen, so ist  $L$  insbesondere links-saturiert.

**Def.** • Ein Paar  $(L, R)$  von Klassen von Morphismen von  $\mathcal{C}$  **faktorisiert**  $\mathcal{C}$ , falls  $\forall f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) : \exists i \in L, p \in R : f = p \circ i$ .

- Ein faktorisierendes Paar  $(L, R)$  heißt **schwaches Faktorisierungssystem** (SFS), falls  $L = \square R$  und  $R = L^\square$ .
- Ein SFS  $(L, R)$  heißt **orth. Faktorisierungssystem**, falls jedes  $i \in L$  die eindeutige LHHE bzgl. allen  $p \in R$  erfüllt.

**Prop.** Sei  $(L, R)$  faktorisierend. Dann ist  $(L, R)$  genau dann ein SFS, wenn  $L \sqsubseteq R$  und  $L$  und  $R$  unter Retrakten abgeschlossen sind.

**Bsp.** ( $\{\text{Surjektionen}\}, \{\text{Injektionen}\}$ ) ist ein (S)FS in **Set**

## Modellkategorien

**Motto.** Modellkat. sind ein Werkzeug, math. Theorien zu studieren.

**Def.** Eine Klasse  $W \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$  von Morphismen erfüllt die **2-aus-3-Eigenschaft**, falls für jede Komposition  $h = g \circ f$  in  $\mathcal{C}$  gilt: Liegen zwei der drei Morphismen  $f, g, h$  in  $W$ , so auch der dritte.

**Def.**  $W \subseteq \mathcal{C}$  wie eben heißt **Unterkat. schwacher Äquivalenzen**, falls  $W$  die 2-aus-3-Eig. erfüllt und abgeschl. unter Retrakten ist.

**Bsp.** Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor. Dann ist  $\mathcal{W} := F^{-1}(\{\text{Isos in } \mathcal{D}\})$  eine Unterkategorie schwacher Äquivalenzen.

**Def.** Ein Tripel  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  von Unterkategorien einer Kategorie  $\mathcal{M}$  heißt **Modellstruktur** auf  $\mathcal{M}$ , falls sowohl  $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  als auch  $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$  schwache Faktorisierungssysteme sind und  $\mathcal{W}$  die 2-aus-3-Eigenschaft erfüllt.

**Def.** Eine bivollständige Kategorie  $\mathcal{M}$  zusammen mit einer Modellstruktur  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  heißt eine **Modellkategorie**.

**Sprechweise.** Man verwendet folgende Bezeichnungen und Pfeile:

$\mathcal{W}$	$\xrightarrow{\sim}$	<b>schwache Äquivalenz</b>
$\mathcal{C}$	$\hookrightarrow$	<b>Kofaserung</b>
$\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$	$\xrightarrow{\sim}$	<b>azyklische Kofaserung</b>
$\mathcal{F}$	$\rightarrow$	<b>Faserung</b>
$\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$	$\xrightarrow{\sim}$	<b>azyklische Faserung</b>

**Bem.** Ist  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  eine Modellstruktur auf  $\mathcal{M}$ , so ist  $(\mathcal{W}^{\text{op}}, \mathcal{F}^{\text{op}}, \mathcal{C}^{\text{op}})$  eine Modellstruktur auf  $\mathcal{M}^{\text{op}}$ .

**Bem.** Wegen  $\mathcal{C} = \square(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  bzw.  $\mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^\square$  ist das Datum  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  überbestimmt.

**Bsp.** Sei  $\mathcal{M}$  bivollständig. Sei  $\mathcal{W} := \mathcal{C} := \{\text{Isos in } \mathcal{M}\}$ . Dann wird  $\mathcal{M}$  mit  $\mathcal{F} := \mathcal{M}$  eine Modellkategorie.

**Prop.** In einer Modellkategorie sind  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$  links-saturiert.

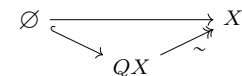
**Lem.**  $\mathcal{W}$  enthält alle Isomorphismen und ist unter Retrakten abgeschlossen, bildet also eine Unterkat. schwacher Äquivalenzen.

**Notation.** Das initiale Objekt von  $\mathcal{M}$  wird mit  $\emptyset$ , das terminale Objekt mit  $*$  bezeichnet.

**Def.** • Ein Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  heißt **kofasernd**, falls  $\emptyset \rightarrow X$  eine Kofaserung ist. Eine azyklische Faserung  $q : QX \xrightarrow{\sim} X$  mit  $QX$  kofasernd heißt **kofasernder Ersatz** (oder Approx.) von  $X$ .

- Dual heißt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  **fasernd**, falls  $X$  in  $\mathcal{M}^{\text{op}}$  kofasernd ist und  $X \xrightarrow{\sim} RX$  mit  $RX$  fasernd heißt **fasernder Ersatz** von  $X$ .

**Bsp.** Sei  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  beliebig. Dann faktorisiere  $\emptyset \rightarrow X$  wie folgt:



Man erhält also immer einen kofasernden Ersatz  $QX$  für  $X$ .  
Dual gibt es immer einen fasernden Ersatz  $RX$  für  $X$ .

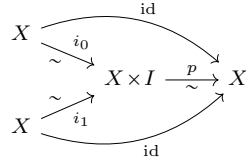
**Prop.** Seien  $q : QX \xrightarrow{\sim} X$  und  $q' : Q'X \xrightarrow{\sim} X$  zwei kofasernde Approximationen von  $X$ . Dann existiert eine schwache Äquivalenz  $\xi : QX \xrightarrow{\sim} Q'X$  mit  $q' \circ \xi = q$ .

**Def.** Ein Obj.  $X$  heißt **bifasernd**, falls es fasernd und kofasernd ist.

**Prop.** Für alle  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  sind  $RQX$  und  $QRX$  schwach äquivalent und beide bifasernd.

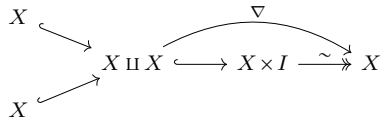
**Lem** (Ken Brown). Sei  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Funktor,  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie,  $\mathcal{N}$  besitze eine Unterkat.  $\mathcal{W}'$  schwacher Äquivalenzen. Wenn  $F$  azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten nach  $\mathcal{W}'$  abbildet, so bildet  $F$  alle schwachen Äquivalenzen zwischen kofasernden Objekten nach  $\mathcal{W}'$  ab.

**Def.** Sei  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie. Ein **Zylinderobjekt**  $X \amalg I$  zu einem  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$  ist ein Obj. zusammen mit Morphismen wie folgt:



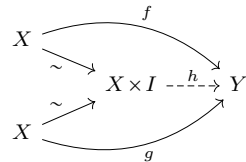
Der Zylinder  $X \times I$  heißt **gut**, falls  $X \amalg X \rightarrow X \times I$  eine Kofaserung ist. Ein guter Zylinder heißt **sehr gut**, falls  $p : X \times I \rightarrow X$  eine azyklische Faserung ist.

**Bem.** Sei die Kodiagonale  $\nabla : X \amalg X \rightarrow X$  wie folgt faktorisiert:



Dann erhalten wir ein Zylinderobjekt  $X \times I$  für  $X$ .

**Def.** Zwei Morphismen  $f, g : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{M}$  heißen **links-homotop** (notiert  $f \sim^l g$ ), falls ein Zylinder  $X \times I$  und ein Diagramm der Form



existiert. Wir definieren  $\pi^l(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y) / \langle \sim^l \rangle$ , wobei  $\langle \sim^l \rangle$  die von der symmetrischen, refl. Relation  $\sim^l$  erzeugte Äq'-relation ist. Die Homotopie heißt (sehr) gut, wenn der Zylinder  $X \times I$  es ist.

**Beob.** Sei  $X \amalg X \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} X$  irgendein Zylinderobjekt. Faktorisiere  $i = q \circ i'$  in Kofaserung und azyklische Faserung. Dann ist auch

$$X \amalg X \xrightarrow{i'} X' \xrightarrow{pq} X$$

ein Zylinderobjekt, sogar ein gutes. Ebenso kann man  $p$  faktorisieren und ein anderes Zylinderobjekt erhalten.

**Lem.** Sei  $X$  kofasernd,  $X \amalg X \rightarrow X \times I \rightarrow X$  ein gutes Zylinderobj. Dann sind  $i_{0,1} : X \rightarrow X \amalg X \rightarrow X \times I$  azyklische Kofaserungen.

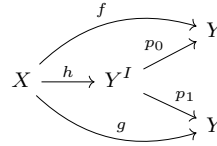
**Lem.** Sei  $h : f \simeq^l g$ . Dann:  $f \in \mathcal{W} \iff g \in \mathcal{W}$ .

**Def.** Ein **Pfadobjekt**  $X^I$  ist eine Faktorisierung

$$X \xrightarrow[\sim]{i} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

des Diagonalmorph.  $\Delta : X \rightarrow X \times X$ . Das Pfadobjekt  $X^I$  heißt gut, wenn  $p$  eine Faserung und sehr gut, wenn zus.  $i$  eine Kofaserung ist.

**Def.** Eine Rechtshomotopie  $h : f \simeq^r g$  ist ein Diagramm der Form



**Bem.** Ein Pfadobj. in  $\mathcal{M}$  ist dasselbe wie ein Zylinderobj. in  $\mathcal{M}^{\text{op}}$ .

**Lem.** Seien  $f, g : X \rightarrow Y$  und  $e : W \rightarrow X, d : Y \rightarrow Z$ .

- $\exists h : f \simeq^l g \iff \exists h' : f \simeq^{l, \text{gut}} g$ .
- Sei  $Y$  fasernd. Dann:  $\exists h : f \simeq^{l, \text{gut}} g \iff \exists h' : f \simeq^{l, \text{sehr gut}} g$
- $\exists h : f \simeq^l g \implies \exists h' : d \circ f \simeq^l d \circ g$
- $\exists h : f \simeq^{l, \text{sehr gut}} g \implies \exists h' : f \circ e \simeq^{l, \text{sehr gut}} g \circ e$
- Sei  $X$  kofasernd. Dann ist  $\simeq^l$  eine Äq'-relation auf  $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$ .

**Kor.** Sei  $Y$  fasernd. Dann induziert Komposition eine Abbildung

$$\pi^l(X, Y) \times \pi^l(W, X) \rightarrow \pi^l(W, Y), \quad ([g], [f]) \mapsto [g \circ f].$$

**Prop.** Seien  $f, g : X \rightarrow Y$ .

- Sei  $X$  kofasernd. Dann:  $f \simeq^l g \implies f \simeq^r g$
- Sei  $Y$  fasernd. Dann:  $f \simeq^l g \iff f \simeq^r g$

**Notation.** Wenn  $X$  kofasernd und  $Y$  fasernd ist, schreibt man

$$\pi(X, Y) := \pi^l(X, Y) = \pi^r(X, Y).$$

**Thm.** Sei  $X$  kofasernd. Sei  $p : Z \xrightarrow{\sim} Y$  eine azyklische Faserung. Dann ist  $p_* : \pi^l(X, Z) \rightarrow \pi^l(X, Y), [f] \mapsto [p \circ f]$  eine Bijektion.

**Thm** (Whitehead).

Für einen Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  zw. bifasernden Objekten gilt

$$f \in \mathcal{W} \iff f \text{ ist eine Homotopieäquivalenz} \\ \iff \exists g : Y \rightarrow X : g \circ f \simeq \text{id}_X \wedge f \circ g \simeq \text{id}_Y.$$

**Lem.** Sei  $f : X \rightarrow Y$ . Seien  $RX$  und  $RY$  fixierte fasernde Approx. an  $X$  bzw.  $Y$ . Dann hängt  $Rf : RX \rightarrow RY$  bis auf Rechts- und auch Linkshomotopie nur von der Rechtshomotopieklasse von  $r \circ f$  ab.

**Achtung.** I. A. ist  $f \mapsto R(f)$  nicht funktoriell.

## Die Homotopiekategorie einer Modellkategorie

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $S \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$  eine Klasse von Morphismen. Die **Lokalisierung**  $\mathcal{C}[S^{-1}]$  von  $\mathcal{C}$  ist eine Kategorie, die folgende 2-universelle Eigenschaft erfüllt:

- $\gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$  schickt Morphismen aus  $S$  aus Isos.
- Für jede Kategorie  $\mathcal{D}$  ist  $\gamma^* : [\mathcal{C}[S^{-1}], \mathcal{D}] \rightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{S \rightarrow \text{Isos}}$  eine Kategorienäquivalenz.

**Bem.** Die Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt Lokalisierung von Kategorien.

**Def.** Die **Homotopiekategorie**  $\text{Ho } \mathcal{M}$  einer Modellkategorie  $\mathcal{M}$  ist die Lokalisierung von  $\mathcal{M}$  an der Klasse der schwachen Äquivalenzen.

**Konstruktion.** Ganz explizit:

$$\text{Ob}(\text{Ho } \mathcal{M}) := \text{Ob}(\mathcal{M}) \\ \text{Hom}_{\text{Ho } \mathcal{M}}(X, Y) := \pi(RQX, RQY)$$

Nach einem früheren Lemma ist die Komposition  $([f], [g]) \mapsto [f \circ g]$  wohldefiniert. Der Funktor  $\gamma : \mathcal{M} \rightarrow \text{Ho } \mathcal{M}$  ist gegeben durch

$$X \mapsto X, \quad f \mapsto [RQf].$$

**Lem.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{M}$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{W} \iff Qf \in \mathcal{W} \iff RQf \in \mathcal{W}$ .

**Lem.**  $\gamma$  wie definiert ist ein Funktor.

**Lem.**  $f \in \mathcal{W} \iff \gamma(f)$  ist ein Iso.

**Lem.** Sei  $X$  kofasernd und  $Y$  fasernd. Dann ist die Abbildung

$$\pi(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ho } \mathcal{M}}(X, Y), \quad [f] \mapsto [RQf]$$

eine Bijektion.

**Lem.** Ist  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor, der schwache Äq. auf Isos schickt, dann identifiziert  $F$  links- bzw. rechtshomotope Morphismen.

**Lem.** Jeder Morphismus in  $\text{Ho } \mathcal{M}$  ist Komposition von Morphismen der Form  $\gamma(f)$ ,  $f \in \text{Mor}(\mathcal{M})$  und der Form  $\gamma(f)^{-1}$ ,  $f \in \mathcal{W}$ .

**Lem.** Obige Konstruktion erfüllt die geforderte univ. Eigenschaft.

**Lem.** Sei  $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$  die volle Unterkategorie der kofasernden Objekte und  $F : \mathcal{M}_c \rightarrow \mathcal{C}$  ein Funktor, der azyklische Kofaserungen auf Isos schickt. Dann identifiziert  $F$  rechtshomotope Morphismen.

**Thm.** Ein Morphismus  $p : Z \rightarrow Y$  zw. fasernden Objekten ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn  $p_* : \pi(X, Z) \rightarrow \pi(X, Y)$  bijektiv ist für alle kofasernden Objekte  $X \in \mathcal{M}$ .

# Klassen von Modellkategorien

## Lokal präsentierbare Kategorien

**Motto.** Eine lokal präsentierbare Kategorie ist eine große Kategorie, welche erzeugt wird von kleinen Objekten unter kleinen Kolimiten.

**Def.** Eine  $\infty$ -große Kardinalzahl  $\kappa$  heißt **regulär**, wenn die Vereinigung von weniger als  $\kappa$  vielen Mengen, die alle weniger als  $\kappa$ -viele Elem. enthalten, selbst weniger als  $\kappa$ -viele Elemente enthält.

*Bem.* Zu jeder Kardinalzahl  $\lambda$  existiert ein reguläres  $\kappa$  mit  $\lambda \leq \kappa$ .

**Def.** Sei  $\kappa$  eine Kardinalzahl. Eine Kategorie heißt  **$\kappa$ -klein**, falls sie nur  $\kappa$ -viele Morphismen besitzt.

*Bem.* Sei  $\kappa$  regulär. Dann ist eine Kat. bereits dann  $\kappa$ -klein, falls sie nur  $\kappa$ -viele Objekte besitzt und alle Hom-Mengen  $\kappa$ -klein sind.

**Def.** Eine Kategorie heißt  **$\kappa$ -filtriert**, wobei  $\kappa$  eine reguläre Kardinalzahl ist, wenn jedes  $\alpha$ -kleine Diagramm in der Kategorie einen Kokegel besitzt, wobei  $\alpha < \kappa$ .

**Def.** Eine teilweise geordnete Menge  $(I, \leq)$  heißt  **$\alpha$ -gerichtet**, falls die zugehörige Kategorie  $\alpha$ -filtriert ist, d. h. jeweils weniger als  $\alpha$ -viele Elemente haben eine obere Schranke.

*Bem.* Sei  $\lambda \geq \kappa$ . Dann ist jede  $\lambda$ -filtrierte Kategorie auch  $\kappa$ -filtriert.

**Def.** Ein Objekt  $X$  einer Kat.  $\mathcal{C}$  heißt  **$\kappa$ -kompakt** oder  **$\alpha$ -klein**, wenn  $\text{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  mit  $\kappa$ -filtrierten Kolimiten vertauscht:

$$\text{colim}_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T_i) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \text{colim}_i T_i)$$

für alle  $\kappa$ -filtrierte Diagramme  $(T_i)_{i \in I}$ .

**Def.** Ein Objekt heißt genau dann **klein**, wenn es  $\kappa$ -kompakt ist für irgendeine reguläre Kardinalzahl  $\kappa$ .

- Bspe.**
- Jede endliche Menge ist  $\aleph_0$ -kompakt in **Set**.
  - Jeder endlich-dim. VR ist  $\aleph_0$ -kompakt in **Vect**( $\mathbb{R}$ ).
  - Jeder endlich-präsentierte Modul ist  $\aleph_0$ -kompakt in **Mod**( $R$ ).
  - Unendliche Mengen sind nicht  $\aleph_0$ -kompakt in **Set**.
  - Jeder nicht diskrete topologische Raum ist nicht  $\aleph_0$ -kompakt.
  - **Set** ist lokal  $\aleph_0$ -präsentierbar mit  $S = \{\heartsuit\}$ .
  - **Mod**( $R$ ) ist lokal  $\aleph_0$ -präsentierbar mit  $S = \{R^n / \text{im}(A) \mid n \geq 0, A \in R^{n \times m}, m \geq 0\}$

**Def.** Eine **lokal  $\kappa$ -präsentierbare Kategorie** ist eine lokal kleine und kovollständige Kategorie, sodass eine Menge  $S \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$  von  $\kappa$ -kompakten Objekten existiert, sodass jedes Objekt aus  $\mathcal{C}$  kleiner Kolimes von Objekten aus  $S$  ist.

**Def.** Eine Kategorie heißt genau dann **lokal präsentierbar**, wenn sie lokal  $\kappa$ -präsentierbar für eine reguläre Kardinalzahl  $\kappa$  ist.

- Bspe.**
- **sSet** ist lokal präsentierbar.
  - Sei  $\mathcal{C}$  klein. Dann ist **PSh**( $\mathcal{C}$ ) =  $[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$  lokal präsentierbar.
  - **FinSet** ist nicht lokal präsentierbar (weil nicht kovollständig)

**Fun Fact.** Sei  $\mathcal{C}$  lokal präsentierbar. Wenn auch  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  lokal präsentierbar ist, dann ist  $\mathcal{C}$  die zu einer Quasiordnung gehörige Kategorie!

**Lem.** Sei  $X : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{Set}$  ein Funktor, wobei  $\mathcal{I}$   $\alpha$ -filtriert und  $\mathcal{J}$   $\alpha$ -klein. Dann ist der kanonische Isomorphismus  $\text{colim}_i \lim_j X(i, j) \rightarrow \lim_j \text{colim}_i X(i, j)$  eine Bijektion.

**Bsp.**  $\alpha$ -kleine Kolimiten  $\alpha$ -kompakter Obj. sind wieder  $\alpha$ -kompakt.

## Kombinatorische Modellkategorien

**Lem (Kleines-Objekt-Argument).**  
Sei  $\mathcal{C}$  lokal präsentierbar,  $\mathcal{I} \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$  eine Menge,  $\text{Cell}(\mathcal{I})$  die Unterkat. der relativen  $\mathcal{I}$ -Zellenkomplexe und  $\text{Cof}(\mathcal{I})$  die Unterkat. der Retrakte von  $\text{Cell}(\mathcal{I})$ . Dann ist  $(\text{Cof}(\mathcal{I}), \mathcal{I}^\square)$  ein SFS.

- Def.**
- Eine Modellkategorie  $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  heißt **kofasernd erzeugt**, wenn Mengen  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \text{Mor}(\mathcal{M})$  mit  $\mathcal{C} = \text{Cof}(\mathcal{I})$  und  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \text{Cof}(\mathcal{J})$  existieren.
  - Lokal präsentierbare und kofasernd erzeugte Modellkategorien heißen **kombinatorisch**.

**Sprechweise.** Die Kof. in  $\mathcal{I}$  heißen **erzeugende Kofaserungen**, die in  $\mathcal{J}$  **azyklische erzeugende Kofaserungen**.

**Satz.** Sei  $\mathcal{M}$  eine lokal präsentierbare Kategorie. Sei  $\mathcal{W} \subseteq \text{Mor}(\mathcal{M})$  eine Unterkat. schw. Äquivalenzen. Seien  $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \text{Mor}(\mathcal{M})$  Mengen. Dann sind  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{J}$  genau dann erzeugende (azyklische) Kofaserungen einer Modellstruktur auf  $\mathcal{M}$ , falls

- $\text{Cell}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{W}$  (Azyklizität)
- $\mathcal{I}^\square = \mathcal{J}^\square \cap \mathcal{W}$  (Kompatibilität)

## Eigentliche Modellkategorien

**Def.** Eine Modellkategorie  $\mathcal{M}$  heißt **linkseigentlich**, falls für alle Pushouts der Form

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sim} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{r} \\ \text{r} \end{array}$$

auch der Morphismus  $g : X \rightarrow Y$  eine schwache Äquivalenz ist.  $\mathcal{M}$  heißt **rechtseigentlich**, falls  $\mathcal{M}^{\text{op}}$  linkseigentlich ist, d. h. Pullbacks schwacher Äquivalenzen längs Faserungen wieder schwache Äquivalenzen sind.

**Bsp.** Eine Modellkategorie, in der jedes Objekt kofasernd ist, ist linkseigentlich.

**Def.**  $\mathcal{M}$  heißt **eigentlich**, falls  $\mathcal{M}$  links- und rechtseigentlich ist.

**Prop.** In jeder Modellkategorie ist der Pushout einer schwachen Äquivalenz zwischen kofasernden Objekten längs Kofaserungen wieder eine schwache Äquivalenz.

*Bem.* Gute Homotopien kann man längs Kofaserungen erweitern:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{H} & Y^I \\ \downarrow i & \nearrow \bar{h} & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

**Prop.** Eine Modellkategorie  $\mathcal{M}$  ist genau dann links-eigentlich, wenn für alle Diagramme der Form

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{i} & C & \xrightarrow{k} & B \\ \sim \downarrow f & & \sim \downarrow g & & \sim \downarrow h \\ A & \xleftarrow{j} & C & \xrightarrow{l} & B \end{array}$$

auch der ind. Mor.  $A \cup_C B \rightarrow A' \cup_{C'} B'$  eine schwache Äq. ist.



## Quillen-Adjunktionen

**Motto.** Wir wollen Modellstrukturen und -kategorien vergleichen.

**Def.** Sei  $\mathcal{M}$  eine Modellkategorie,  $\mathcal{H}$  eine beliebige Kategorie. Ein Funktor  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  heißt **homotopisch**, falls  $F$  die schwachen Äquivalenzen in  $\mathcal{M}$  auf Isomorphismen in  $\mathcal{H}$  abbildet.

*Bem.* Homotopische Funktoren faktorisieren über  $\mathcal{M}[\mathcal{W}^{-1}]$ .

**Bsp.** Sei  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Funktor zw. Modellkategorien, der schwache Äquivalenzen erhält. Dann ist  $\delta \circ F : \mathcal{M} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{N})$  homotopisch, wobei  $\delta : \mathcal{N} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{N})$  die Lokalisierung ist.

*Bem.* Solch ein Funktor  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  induziert einen Funktor  $\text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{N})$ .

**Def.** Ein **linksabgeleiteter Funktor** eines Funktors  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  ist ein Funktor  $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{H}$  zusammen mit einer natürlichen Transformation  $\mu : \mathbb{L}F \circ \gamma \Rightarrow F$ , sodass für alle weiteren Funktoren  $G : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{H}$  und nat. Transformationen  $\xi : G \circ \gamma \Rightarrow F$  genau eine natürliche Transformation  $\nu : G \Rightarrow \mathbb{L}F$  existiert mit  $\xi = \mu \circ \nu$ , d. h.  $\text{Nat}(G, \mathbb{L}F) \cong \text{Nat}(G \circ \gamma, F)$  ist für alle  $G$  eine Bijektion, d. h. eine Linksableitung von  $F$  ist nichts anderes als eine Rechts-Kan-Erweiterung von  $F$  längs  $\gamma$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{F} & \mathcal{H} \\ \downarrow \gamma & \nearrow \mathbb{L}F & \\ \text{Ho}(\mathcal{M}) & & \end{array}$$

Analog ist eine **Rechtsableitung**  $\mathbb{R}F$  von  $F$  eine Linkskanerweiterung von  $F$  längs  $\gamma : \mathcal{M} \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{M})$ .

**Satz.** Sei  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}$  ein Funktor, der azyklische Kofaserungen zwischen kof. Obj. auf Isomorphismen abbildet. Dann existiert  $\mathbb{L}F$  und  $\mu_X : \mathbb{L}F(X) \rightarrow F(X)$  ist ein Iso für alle kofasernden  $X$ .

*Konstruktion.* Sei  $h\mathcal{M}_c$  die volle Unterkategorie der kof. Objekte von  $\mathcal{M}$  modulo Rechts-Homotopie. Betrachte die Komposition

$$\mathcal{M} \xrightarrow{Q} h\mathcal{M}_c \xrightarrow{F_*} \mathcal{H}.$$

Dabei ist  $Q$  der kofasernde Ersatz und  $F_*$  wird induziert von  $F$ , da  $F$  homotope Morphismen identifiziert. Nach Ken Brown bildet die Komposition schwache Äquivalenzen auf Isos ab und induziert daher den gesuchten Funktor  $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{H}$  mit  $\mathbb{L}F \circ \gamma = F_* \circ Q$ . Definiere  $\mu : \mathbb{L}F \circ \gamma \rightarrow F$  durch  $\mu_X := F(q : QX \rightarrow X)$  für  $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ . Falls  $X$  selbst kofasernd ist, so ist  $q$  eine schwache Äquivalenz zw. kofasernden Objekten und somit  $\mu_X = F(q)$  ein Isomorphismus.

**Def.** Sei  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein Funktor zwischen Modellkategorien. Eine **totale Linksableitung**  $\mathbb{L}F$  ist ein Funktor  $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{N})$ , sodass  $\mathbb{L}F$  die Linksableitung von  $\delta \circ F$  ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{F} & \mathcal{N} \\ \downarrow \gamma & \nearrow \mathbb{L}F & \downarrow \delta \\ \text{Ho}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\mathbb{L}F} & \text{Ho}(\mathcal{N}) \end{array}$$

Ein Funktor  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  bilde azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten auf schwache Äquivalenzen ab. Dann existiert seine totale Linksableitung  $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Ho}(\mathcal{N})$ .

**Def.** Eine Adjunktion  $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$  von Modellkategorien heißt **Quillen-Adjunktion**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- $F$  erhält Kofaserungen und  $U$  erhält Faserungen,
- $F$  erhält Kofaserungen und azyklische Kofaserungen,
- $U$  erhält Faserungen und azyklische Faserungen,
- $F$  erhält azyklische Kofaserungen und  $U$  azyklische Faserungen.

*Bem.* Die Äquivalenz folgt aus  $Fi \sqcap p \iff i \sqcap Up$ .

**Def.** Eine Quillen-Adj.  $(F, U)$  heißt **Quillen-Äquivalenz**, falls

$$\forall X \in \mathcal{M}_c, Y \in \mathcal{N}_f : (FX \rightarrow Y) \in \mathcal{W} \iff (X \rightarrow UY) \in \mathcal{W}.$$

**Satz.** Sei  $(F, U)$  eine Quillenadjunktion. Dann existieren  $\mathbb{L}F, \mathbb{R}U$  und bilden eine Adjunktion  $\mathbb{L}F : \text{Ho}(\mathcal{M}) \rightleftarrows \text{Ho}(\mathcal{N}) : \mathbb{R}U$ . Ist  $(F, U)$  sogar eine Quillenäquivalenz, so ist  $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U)$  eine Adjunktion aus Äquivalenzen.

**Kor.** Quillenäq. Modellkat'n haben äquivalente Homotopiekat'n.

**Prop.** Für eine Quillenadjunktion  $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$  sind äquivalent:

- $(F, U)$  ist eine Quillenäquivalenz
- $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U)$  ist eine Adjunktion von Äquivalenzen
- $F$  reflektiert schw. Äq'n zw. kof. Objekten und die Komposition  $FQY \xrightarrow{F(qUY)} FUY \xrightarrow{\epsilon} Y$  ist eine schw. Äq. für alle fas.  $Y$ .
- $U$  reflektiert schw. Äq'n zw. fas. Objekten und die Komposition  $X \xrightarrow{\eta} UFX \xrightarrow{U(r_{FX})} URFX$  ist eine schw. Äq. für alle kof.  $X$ .

Falls  $U$  schw. Äq'n in  $\mathcal{N}$  erzeugt, dann ist auch äquivalent:

- $\eta : X \rightarrow UFX$  ist eine schwache Äq. für alle kofasernden  $X$ .

Falls  $F$  schw. Äq'n in  $\mathcal{M}$  erzeugt, dann ist auch äquivalent:

- $\eta : X \rightarrow UFX$  ist eine schwache Äq. für alle kofasernden  $X$ .

**Def.** Sei  $f : A \rightarrow B$  ein Mor. in der Modellkat.  $\mathcal{M}$ . Dieser induziert Funktoren  $f^* : B/\mathcal{M} \rightarrow A/\mathcal{M}$  und  $f_* : \mathcal{M}/A \rightarrow \mathcal{M}/B$ . Der Funktor  $f^*$  besitzt einen Linksadj.  $f_! : A/\mathcal{M} \rightarrow B/\mathcal{M}$ , der durch Pushout entlang  $f$  geg. ist, und  $f_*$  besitzt einen Rechtsadj.  $f^! : \mathcal{M}/B \rightarrow \mathcal{M}/A$ .

**Prop.**  $\mathcal{M}$  ist genau dann linkseigentlich, wenn  $(f_!, f^*)$  eine Quillenadjunktion ist und genau dann rechteigentlich, wenn  $(f_*, f^!)$  eine Quillenadjunktion ist für alle schwachen Äquivalenzen  $f$ .

**Satz.** Sei  $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$  eine Adj. von einer komb. Modellkat.  $\mathcal{M}$  mit erz. Kofaserungen  $I$  und erz. azyklischen Kofaserungen  $J$  und einer lokal präsentierbaren Kategorie  $\mathcal{N}$ . Der Funktor  $U$  erzeuge schwache Äquivalenzen in  $\mathcal{N}$  (d. h. wir nennen  $f \in \text{Mor}(\mathcal{N})$  eine schwache Äquivalenz, falls  $U(f)$  eine schwache Äquivalenz ist). Dann wird  $\mathcal{N}$  eine Modellkategorie mit erzeugenden Kofaserungen  $FI$  und erzeugenden azyklischen Kofaserungen  $FJ$ , falls gilt: Jeder relative  $FJ$ -Zellenkomplex ist eine schwache Äquivalenz (d. h.  $U(\text{Cell}(FJ)) \subset \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$ ). Bezüglich dieser Modellstruktur auf  $\mathcal{N}$  wird  $(F, U)$  zu einer Quillenadjunktion.

## Monoidale Modellkategorien

**Def.** Eine **monoidale Kategorie** ist eine Kategorie  $\mathcal{C}$  zusammen mit einem Bifunktor  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , einem Objekt  $\mathbb{1} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , natürlichen Isomorphismen  $\alpha : (- \otimes -) \circ - \Rightarrow - \otimes (- \circ -)$ ,  $\lambda : \mathbb{1} \otimes - \Rightarrow -$  und  $\rho : - \otimes \mathbb{1} \Rightarrow -$ , sodass die Kohärenzdiagramme aus der Definition einer schwachen 2-Kategorie kommutieren.

*Bem.* Eine monoidale Kategorie ist das gleiche wie eine 2-Kategorie mit nur einem Objekt.

**Bspe.** Monoidale Kategorien sind: • **(Set,  $\times, \{\heartsuit\}$ )**  
• **( $R\text{-Mod-}R, \otimes_R, R$ )** wobei  $R$  ein Ring mit Eins ist

**Def.** Eine **symm. monoidale Kategorie** ist eine monoidale Kat. zusammen mit einem nat. Isomorphismus  $\gamma : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ , sodass die geeigneten Kohärenzdiagramme kommutieren. Es reicht aus, zu zeigen, dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccccc} (Y \otimes X) \otimes Z & \xleftarrow{\gamma \otimes \text{id}_Z} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{\alpha} & X \otimes (Y \otimes Z) \\ \downarrow \alpha & & & & \downarrow \gamma \\ Y \otimes (X \otimes Z) & \xrightarrow{\text{id}_Y \otimes \gamma} & Y \otimes (Z \otimes X) & \xleftarrow{\alpha} & (Y \otimes Z) \otimes X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} \otimes X & \xrightarrow{\gamma} & X \otimes \mathbb{1} \\ & \searrow \lambda & \swarrow \rho \\ & X & \end{array}$$

**Def.** Ein **monoidaler Funktor** zwischen (symm.) monoidalen Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  ist ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zusammen mit natürlichen Isomorphismen  $F(- \otimes_{\mathcal{D}} -) \Rightarrow F(- \otimes_{\mathcal{C}} -)$  und  $F\mathbb{1}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ , welche verträglich mit  $\alpha, \lambda, \rho$  (und eventuell  $\gamma$ ) sind.

**Bsp. Set**  $\rightarrow R\text{-Mod}$ ,  $X \mapsto$  freier  $R$ -Modul mit Basis  $X$

**Def.** Seien  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  monoidale Funktoren. Eine natürliche Transformation  $\eta : F \Rightarrow G$  heißt **monoidal**, wenn folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} FX \otimes FY & \longrightarrow & F(X \otimes Y) \\ \downarrow \eta_X \otimes \eta_Y & & \downarrow \eta_{X \otimes Y} \\ GX \otimes GY & \longrightarrow & G(X \otimes Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \mathbb{1} & \\ & \swarrow \eta_1 & \searrow \eta_1 \\ F(\mathbb{1}) & \xrightarrow{\quad} & G(\mathbb{1}) \end{array}$$

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine monoidale Kategorie. Ein **Rechts- $\mathcal{C}$ -Modul** ist eine Kategorie  $\mathcal{D}$  mit einem Funktor  $\otimes : \mathcal{D} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und ...

**Bsp.** Die Kat.  $\mathcal{D}$  besitze kleine Koprodukte. Dann wird  $\mathcal{D}$  zu einem **Set-Modul** durch  $\times = \otimes : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $(X, I) \mapsto \coprod_{i \in I} X$

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  monoidale Kategorie. Ein Funktor  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  zwischen  $\mathcal{C}$ -Rechts-Moduln  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{D}'$  heißt  **$\mathcal{C}$ -Modulfunktor**, falls  $F(X) \otimes I$  und  $F(X \otimes I)$  natürlich isomorph sind.

**Def.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  monoidale Kat'en und  $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein monoidaler Funktor. Dann heißt  $(\mathcal{D}, i)$  eine  **$\mathcal{C}$ -Algebra**. Morphismen von  $\mathcal{C}$ -Algebren sind kommutative Quadrate von monoidalen Funktoren.

**Def.** Eine  $\mathcal{C}$ -Algebra  $\mathcal{D}$  heißt **zentral**, falls  $i(A) \otimes_{\mathcal{D}} B \cong B \otimes_{\mathcal{D}} i(A)$  natürlich für alle  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C}), B \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ .

*Bem.* Ist die  $\mathcal{C}$ -Algebra  $\mathcal{D}$  symmetrisch, so auch zentral.

**Def.** Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$  Kategorien. Eine **Adjunktion in 2 Variablen** oder **Biadjunktion** besteht aus Funktoren

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}, \quad \text{Hom}_r : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}, \text{Hom}_l : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$$

und natürlichen Isomorphismen

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \text{Hom}_l(C, E)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(C \otimes D, E) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \text{Hom}_r(D, E)).$$

**Notation.**  ${}^C E := \text{Hom}_l(C, E), E^D := \text{Hom}_r(D, E)$

*Bem.*  $k \otimes i \sqsubseteq p \iff k \sqsubseteq \text{Hom}_r(i, p) \iff i \sqsubseteq \text{Hom}_l(k, p)$

**Bsp.** Seien  $R, S, T$  drei Ringe,  $\mathcal{C} := R\text{-Mod-}S, \mathcal{D} := S\text{-Mod-}T, \mathcal{E} := R\text{-Mod-}T$ . Eine Biadjunktion ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{E}, & (M, N) &\mapsto M \otimes_S N, \\ \text{Hom}_r : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{C}, & (N, P) &\mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Mod-}T}(N, P), \\ \text{Hom}_l : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{D}, & (M, P) &\mapsto \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, P). \end{aligned}$$

**Def.** Eine monoidale Kategorie  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$  heißt **monoidal abgeschlossen**, wenn  $\otimes$  Teil einer Biadjunktion ist.

**Bspe.** • **( $R\text{-Mod-}R, \otimes_R, R$ )** • **(Set,  $\times, \{\heartsuit\}$ )**

**Def.** Sei  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  Teil einer Biadjunktion,  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  und  $\mathcal{E}$  Modellkategorien. Dann heißt  $\otimes$  **Quillen-Biadjunktion**, falls für alle Kof'en  $(f : U \hookrightarrow V) \in \mathcal{C}, (g : W \hookrightarrow X) \in \mathcal{D}$  der Morphismus

$$f \square g : P(f, g) := V \otimes W \cup_{U \otimes W} U \otimes X \rightarrow V \otimes X$$

eine Kofaserung in  $\mathcal{E}$  ist, welche azyklisch ist, wenn  $f$  oder  $g$  azyklisch ist.

**Lem.** Die Bedingung ist äquivalent zu: Für alle Kofaserungen  $(g : W \hookrightarrow X) \in \mathcal{D}$  und Faserungen  $(p : Y \twoheadrightarrow Z) \in \mathcal{E}$  ist

$$\text{Hom}_{r, \square} : \text{Hom}_r(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_r(X, Z) \times_{\text{Hom}_r(W, Z)} \text{Hom}_r(W, Y)$$

eine Faserung und azyklisch, wenn  $g$  oder  $p$  es ist. Analog für  $\text{Hom}_l$ .

**Prop.** Sei  $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  ein Quillenbifunktor. Ist  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  kofasernd, so ist  $C \otimes - : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  ein Quillenfunktor mit Rechtsadj.  $\text{Hom}_l(C, -)$ .

*Bem.* Analog: Sei  $E$  fasernd. Dann ist  $\text{Hom}_r(-, E) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$  ein Quillen-Links-Adjungierter zu  $\text{Hom}_l(-, E) : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ .

**Lem.** Sei  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  eine Biadj.,  $I \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C}), J \subseteq \text{Mor}(\mathcal{D})$  Mengen. Dann gilt:  $\text{Cof}(I) \square \text{Cof}(J) \subseteq \text{Cof}(I \square J)$  mit  $\text{Cof}(K) := \square(K \square)$ .

**Satz.** Seien  $(\mathcal{C}, I, J), (\mathcal{D}, I', J')$  kombinatorische Modellkategorien. Dann ist  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  genau dann ein Quillenbifunktor, wenn  $I \square I'$  Kofaserungen in  $\mathcal{E}$  und  $I \square J', J \square I'$  jeweils azyklische Kofaserungen in  $\mathcal{E}$  sind.

**Def.** Eine **monoidale Modellkategorie** ist eine Modellkategorie  $\mathcal{M}$  mit monoidal abgeschlossener Struktur  $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbb{1})$ , sodass

•  $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ein Quillenbifunktor und

•  $Q\mathbb{1} \otimes X \rightarrow \mathbb{1} \otimes X \cong X$  und  $X \otimes Q\mathbb{1} \rightarrow X \otimes \mathbb{1} \cong X$  für alle kofasernden  $X$  jeweils schwache Äquivalenzen sind.

*Bem.* Die zweite Bedingung ist äquivalent zu:

$$X \cong \text{Hom}_r(\mathbb{1}, X) \rightarrow \text{Hom}_r(Q\mathbb{1}, X), \quad X \cong \text{Hom}_l(\mathbb{1}, X) \rightarrow \text{Hom}_l(Q\mathbb{1}, X)$$

sind schwache Äquivalenzen für alle fasernden  $X$ .

**Beob.** Sei  $\mathcal{M}$  eine mon. Modellkat,  $(A \xrightarrow{i} X), (E \xrightarrow{p} B) \in \mathcal{M}$ . Es gilt

$$i \sqsubseteq p \iff (\text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, E) \rightarrow P(i, p)) \text{ ist surjektiv.}$$

# Anhang: Die Ordinalzahlen

**Def.** Eine **Wohlordnung** auf einer Menge  $S$  ist eine Totalordnung auf  $S$  bezüglich der jede nichtleere Teilmenge  $A \subseteq S$  ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel  $(S, \leq)$  bestehend aus einer Menge  $S$  und einer Wohlordnung  $\leq$  auf  $S$ .

*Bem.* Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in  $S$  keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen  $\dots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \dots$

*Bem.* Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

**Axiom** (Wohlordnungssatz). Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

**Def.** Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

**Def.** Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

*Bem.* Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit  $\mathcal{O}_n$  bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leq_S)] \leq [(T, \leq_T)] \iff \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leq_S) \rightarrow (T, \leq_T).$$

**Notation.** •  $0 := [\emptyset]$ , •  $n := [\{1, \dots, n\}]$  für  $n \in \mathbb{N}$ , •  $\omega := [\mathbb{N}]$  mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

*Bem.* Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega^\omega, \dots$$

**Prinzip** (**Transfinite Induktion**).

Sei  $P : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbf{Prop}$  eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

**Def.** Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert:

Für  $\alpha = [(S, \leq_S)]$  und  $\beta = [(T, \leq_T)] \in \mathcal{O}_n$  ist

- $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leq_{S \amalg T})]$ , wobei gilt:

$$\leq_{S \amalg T} \upharpoonright_{S \times S} := \leq_S, \quad \leq_{S \amalg T} \upharpoonright_{T \times T} := \leq_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$

- $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leq_{S \times T})]$  mit der lexikogr. Ordnung

$$(s_1, t_1) \leq_{S \times T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leq_S s_2)$$

- $\alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \rightarrow T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leq)]$  mit

$$f < g \iff \exists t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

*Bem.* Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

- a) Die Null  $0 := [(\emptyset, \leq)] \in \mathcal{O}_n$ .
- b) Die Nachfolgerzahl  $\alpha + 1$  einer Zahl  $\alpha \in \mathcal{O}_n$ .
- c) Die Limeszahl  $\lim A := \sup A$  einer Teilmenge  $A \subset \mathcal{O}_n$ .

*Bem.* Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

a)	b)	c)
$\alpha + 0 := \alpha$	$\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$	$\alpha + \lim A := \lim \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha \cdot 0 := 0$	$\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$	$\alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha^0 := 1$	$\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$	$\alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$

**Def.** Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel  $(S, +, \cdot, 0)$ , sodass  $(S, +, 0)$  ein Monoid und  $(S, \cdot)$  eine Halbgruppe ist mit

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ , •  $a \cdot 0 = 0$ .

**Lem** (Rechenregeln in  $\mathcal{O}_n$ ). •  $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$  •  $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$

- $\alpha^0 = 1$  •  $0^\alpha = 0$  für  $\alpha > 0$  •  $1^\alpha = 1$  •  $\alpha^1 = \alpha$

- $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$  •  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

- $\mathcal{O}_n$  ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht*!
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:

$$\forall \beta < \gamma : \quad \alpha + \beta < \alpha + \gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \quad (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \quad (\alpha > 1).$$

**Lem.** Jedes  $\alpha \in \mathcal{O}_n$  kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \dots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$  und  $\beta_1 > \dots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$ .