Zusammenfassung Partielle DGLn

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

1. Einleitung

Def. Eine **partielle Differentialgleichung** (PDGL) hat die Form

$$E(x, u(x), Du(x), ..., D^k u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \qquad (\star)$$

wobei $E : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht ist. Die höchste Ableitungsordnung von u, die in E vorkommt, heißt **Ordnung** der PDGL.

Def. Eine PDGL von der Ordnung k heißt

- **linear**, falls sie folgende Form besitzt:
$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) = 0$$
- **semilinear**, falls sie linear in der höchsten Ableitungsordnung ist, man sie also schreiben kann als
$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1} u(x)) = 0.$$
- **quasilinear**, falls sie sich schreiben lässt als
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1} u(x)) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1} u(x)) = 0.$$
- sonst **voll nichtlinear**.

Bemerkung. $\{$ lineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ semilineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ quasilineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ PDGLn $\}$

Def (Typeinteilung für lineare PDGLn 2. Ordnung)**.** Seien $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i, j \in \{1, ..., n\})$ vorgegebene Fktn. auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Die lineare PDGL
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$
heißt **elliptisch**, falls die $(n \times n)$-Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.
- Die lineare PDGL
$$D_1 D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_j(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$
heißt **hyperbolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.
- Die lineare PDGL
$$D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{2 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$
heißt **parabolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

Def. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **klassische Lösung**, falls $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ und die Differentialgleichung $(\star)$ überall in Ω erfüllt ist.

2. Laplace- und Poisson-Gleichung

Notation. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $F = (F_1, ..., F_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann heißt

- $\mathrm{div} F := \sum_{i=1}^n D_i F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **Divergenz** von F,
- $\mathrm{grad} f := \nabla f := (\partial_1 f, ..., \partial_n f)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **Gradient** von f,
- Δ mit $\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \sum_{i=1}^n D_i D_i f$ **Laplace-Operator**.

Notation. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibe

$$V \Subset \Omega \quad \text{für} \quad V \subset \mathbb{R}^n \text{ mit } \overline{V} \text{ kompakt und } \overline{V} \subset \Omega^\circ.$$

Def. Die **Laplace-** bzw. **Poisson-Gleichung** ist die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = f \qquad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Satz (Transformationssatz)**.** Sei $T : \Omega \to T(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeo, dann gilt für $f : T(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f \in L^1(T(\Omega)) \iff (f \circ T) \circ |\det(DT)| \in L^1(\Omega) \quad \text{mit}$$

$$\int_{T(\Omega)} f \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (f \circ T) \cdot |\det(DT)| \, \mathrm{d}x.$$

Bsp (Polarkoordinaten)**.** Sei $f \in L^1(B_r(K))$. Dann ist f auf fast jeder Sphäre $\partial B_\rho(K)$ für $\rho \in [0, r]$ integrierbar und es gilt

$$\int_{B_r(x)} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x_0)} f \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}\rho$$

Satz (Gauß)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Ist $F \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{div} F \in L^1(\Omega)$, so gilt

$$\int_\Omega \mathrm{div} F \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (F \circ \nu) \, \mathrm{d}S,$$

wobei ν der äußere Einheitsnormalenvektor ist.

Korollar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Sind $f, g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, dann gilt die partielle Integrationsregel

$$\int_\Omega D_i f g \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega f D_i g \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f g \nu^i \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

Sind $f, g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, dann gelten die Greenschen Formeln

$$\int_\Omega Df \cdot Dg \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega f \Delta g \, \mathrm{d}x + \int_\Omega f D_\nu g \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\int_\Omega (f \Delta g - g \Delta f) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (f D_\nu g - g D_\nu f) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

Proposition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| < \infty$, $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ und $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$. Angenommen,

- $f(x, -) \in \mathcal{C}^1(I)$ für fast alle $x \in \Omega$,
- $f(-, t) \in L^1(\Omega) \frac{\partial f}{\partial t}(-, t) \in L^1(\Omega)$ für alle $t \in I$ und
- für alle $t \in I$ gibt es $\epsilon > 0$ sodass $]t - \epsilon, t + \epsilon[\subset I$ und
$$\sup_{s \in]t-\epsilon, t+\epsilon[} |\tfrac{\partial f}{\partial t}(-, s)| \in L^1(\Omega).$$

Dann ist die Abbildung

$$g : I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_\Omega f(x, t) \, \mathrm{d}x$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar mit

$$\tfrac{\partial g}{\partial t}(t) = \int_\Omega \tfrac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, \mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn Ω offen und beschränkt ist, $f(x, -) \in \mathcal{C}^1(I)$ für alle $x \in \Omega$ und $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times I)$.

Notation. Bezeichne mit $\mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$. Für messbare Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ schreibe $|A| := \mathcal{L}^n(A)$.

Bsp. Zwischen dem Volumen von Kugeln und Sphären im $\mathbb{R}^n$ bestehen folgende Zusammenhänge:

$$|B_r(0)| = r^n \cdot |B_1(0)| \quad \text{und} \quad |B_r(0)| = \tfrac{r}{n} \cdot \int_{\partial B_r(0)} 1 \, \mathrm{d}S$$

Notation. $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

Notation. Sei $f : \Omega / M \to \mathbb{R}$ integrierbar für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathcal{L}^k(\Omega) \in]0, \infty[$ bzw. $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $\int_M 1 \, \mathrm{d}S \in]0, \infty[$

$$\fint_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x := \tfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad \fint_M f(x) \, \mathrm{d}x := \tfrac{1}{|M|} \int_M f(x) \, \mathrm{d}x$$

heißen **Mittelwerte** von f auf Ω bzw. M.

Def. Ein **Glättungskern** auf $\mathbb{R}^n$ ist eine nicht-negative, radialsymmetrische Funktion $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(B_1(0))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, \mathrm{d}x = 1$.

Def. Der **Standardglättungskern** ist die Funktion

$$\eta(x) := C \cdot \exp\left(\tfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) \cdot \mathbb{1}_{B_1(0)}(x)$$

mit Normierungskonstante C. Für $\epsilon > 0$ ist der dazugehörige skalierte Glättungskern gegeben durch

$$\eta_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \eta(x/\eta).$$

Alle Glättungskern-Eigenschaften bleiben bei Skalierung erhalten.

Notation. $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$. Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ heißt die Funktion

$$f_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \eta_\epsilon * f(x) := \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x - y) f(y) \, \mathrm{d}y \quad \textbf{\epsilon-Glättung} \text{ von } f$$

Satz (Eigenschaften von Glättungen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$ und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann gilt

- Regularität: $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\epsilon)$ mit $D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha \eta_\epsilon) * f$ für beliebige Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- Ist $D_i f$ stetig auf Ω, so gilt $D_i(f_\epsilon) = (D_i f)_\epsilon$ auf Ω_ϵ.

- Falls $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in]0,1]$, so gilt $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega_\epsilon)$ mit derselben Hölderkonstante.
- Falls $f \in L^p(\Omega)$ für $p \in [0,\infty]$, so gilt $\|f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$.
- $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} f$ fast-überall in Ω.
- Falls $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, so konvergiert f_ϵ gleichmäßig gegen f für $\epsilon \to 0$ auf kompakten Teilmengen von Ω,
- Falls $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ für $p \in [1,\infty[$, so gilt $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} f$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.
- Abschätzung der Approximationsgüte: Ist $Du \in L^p(\Omega)$, so gilt

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \epsilon \cdot \|Df\|_{L^p\Omega}.$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Man nennt u

- **harmonisch**, falls $\Delta u = 0$ in Ω gilt.
- **subharmonisch**, falls $\Delta u \geq 0$ in Ω gilt.
- **superharmonisch**, falls $\Delta u \leq 0$ in Ω gilt.

Bspe. • Affine Funktionen sind harmonisch.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definiere $u(x) := x \cdot Ax$. Dann gilt $\Delta u = \operatorname{spur} A$, also $\Delta u = 0 \iff \operatorname{spur} A = 0$.
- Real- und Imaginärteil von holomorphen Fktn. sind harmonisch.

Def. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} -(2\pi)^{-1}\log|x|, & \text{wenn } n = 2 \\ (n(n-2)\,\omega_n)^{-1}|x|^{2-n}, & \text{wenn } n \geq 3 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung** der Laplacegleichung.

Bemerkung. • Φ ist radialsymmetrisch, d. h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\|x_1\| = \|x_2\|$ gilt $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$.
- Φ, $|D\Phi| \in L^1(B_R(0))$ für alle $R > 0$ aber $|D^2\phi| \notin L^1(B_1(0))$.
- Die Konstanten wurden so gewählt, dass gilt:

$$-\int_{\partial B_r(0)} D\Phi \cdot \nu \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = 1 \quad \text{für alle } r > 0.$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_R(x_0) \subset \Omega$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Für

$$\phi :]0,R[\to \mathbb{R}, \quad r \mapsto ⨍_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r\to 0}\phi(r) = u(x_0)$ • $\phi'(r) = \frac{r}{n} ⨍_{B_r(x_0)} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x$

Korollar (Mittelwertseigenschaft)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_r(x_0) \Subset \Omega$ und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$0 = \Delta u \implies u(x_0) = ⨍_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{und} \quad u(x_0) = ⨍_{B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

In diesen Gleichungen darf man $=$ durch $\leq, <, \geq$ oder $>$ ersetzen.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:

- u ist harmonisch, d. h. es gilt $\Delta u = 0$ in Ω.
- u erfüllt die sphärische Mittelwertseigenschaft, d. h. es gilt

$$u(x_0) = ⨍_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

- u erfüllt die Mittelwertseigenschaft auf Kugeln, d. h. es gilt

$$u(x_0) = ⨍_{B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Bemerkung. Die Äquivalenz gilt auch unter den schwächeren Voraussetzungen $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ oder $u \in L^1(\Omega)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω, d. h. $\Delta u \geq 0$ in Ω. Dann gilt

- Das **schwache Maximumsprinzip**: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist Ω zusammenhängend und existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, so ist u konstant.

Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ harmonisch. Dann gilt

$$\min_{\partial\Omega} u < \max_{\partial\Omega} u \implies \min_{\partial\Omega} u < u < \max_{\partial\Omega} u \text{ auf } \Omega.$$

Korollar (Eindeutigkeit)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dann ist $u = v$, falls gilt:

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v & \text{in } \Omega \\ u = v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Bemerkung (Stetige Abhängigkeit von Randwerten)**.** Gilt lediglich $\Delta u = \Delta v$ in Ω, aber nicht $u = v$ auf $\partial\Omega$, so gilt immerhin

$$\max_{\overline{\Omega}}|u - v| = \max_{\partial\Omega}|u - v|.$$

Satz (Harnack-Ungleichung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \Subset \Omega$ offen, zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega, V)$, sodass

$$\sup_V u \leq c \cdot \inf_V u \qquad \text{für alle harmonischen Fktn. } u : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und erfülle $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Sphären, d. h.

$$u(x_0) = ⨍_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Dann gilt $u(x) = u_\epsilon(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\epsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Insbesondere ist $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und harmonisch.

Korollar. Obiger Satz gilt auch, wenn $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Kugeln erfüllt, d. h.

$$u(x_0) = ⨍_{B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Def. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem topologischen Raum X **konvergiert lokal gleichmäßig** gegen $f : X \to \mathbb{R}$, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x von x gibt, sodass f_n auf U_x gleichmäßig gegen f konvergiert.

Korollar (Konvergenzsatz von Weierstraß)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiert. Dann ist u harmonisch auf Ω.

Korollar (Harnackscher Konvergenzsatz)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf Ω. Gibt es ein $x_0 \in \Omega$, sodass $(u_k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt (und damit konvergent) ist, so konvergiert (u_k) lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion auf Ω.

Satz (von Hermann Weyl)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega u \cdot \Delta\phi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Dann gibt es eine harmonische Funktion $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \tilde{u}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Satz (Innere Abschätzung für Ableitungen harmonischer Fktn)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gilt für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$ und jede Kugel $B_r(x_0) \Subset \Omega$:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq C(n,k) r^{-n-k}\|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \quad \text{mit } C(n,k) := \tfrac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n}.$$

Satz (Liouville)**.** Sei $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch.

- Ist u beschränkt, so ist u konstant.
- Gilt $\limsup_{|x|\to\infty} \frac{|u(x)|}{|x|^{k+1}}$, so ist u ein Polynom, dessen Grad $\leq k$ ist.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **analytisch** in $x \in \Omega$, falls f sich lokal durch ihre Taylorreihe darstellen lässt, also ein $r \in]0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)[$ existiert mit

$$f(y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \tfrac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x)(y-x)^\alpha \qquad \text{für alle } y \in B_r(x).$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Wenn u harmonisch ist, dann auch analytisch.

Problem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, (beschränkt), regulär und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht ist $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$(2.1) \begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Satz (Greensche Darstellungsformel)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand und $h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ mit $\Delta h \in L^1(\Omega)$. Es gilt für $x \in \Omega$:

$$h(x) = -\int_\Omega \Phi(x-y)\Delta h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y) - \int_{\partial\Omega} h(y) D_y\Phi(x-y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y)$$

Bemerkung. Für Randpunkte $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\tfrac{1}{2}h(x) = -\int_\Omega \Phi(x-y)\Delta h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y) - \int_{\partial\Omega} h(y) D_y\Phi(x-y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y)$$

Korollar (Darstellungsformel für Lsgn in $\mathbb{R}^n$)**.** Sei $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$, setze

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (\Phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dann gilt: $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. • Für $n = 2$ ist die Lösung potentiell unbeschränkt.

• Für $n \geq 3$ ist diese Lsg beschränkt und erfüllt $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Proposition. Jede andere beschränkte Lösung von $-\Delta u = f$ auf $\mathbb{R}^n$ unterscheidet sich nur durch eine additive Konstante.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine **Greensche Funktion** für Ω ist eine Funktion $G : \{(x, y) \in \Omega \times \Omega \mid x \neq y\} \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \Omega$ gilt:

- Die **Korrektorfunktion** $y \mapsto G(x, y) - \Phi(x - y)$ ist von der Klasse $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ und ist harmonisch in Ω.
- Die Funktion $G(x, -)$ hat Nullrandwerte auf $\partial\Omega$, d. h. es gilt $\lim\limits_{y\to y_0} G(x, y) = 0$ für alle $y_0 \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$.

Bemerkung. Die Funktion $G(x, -)$ ist in $\mathcal{C}^2(\Omega \setminus \{x\}) \cap \mathcal{C}^{(}\overline{\Omega} \setminus \{x\})$ und hat die gleiche Singularität wie $y \mapsto \Phi(x - y)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (2.1) und ist G die Greensche Funktion für Ω (falls existent), dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{\partial\Omega} g(y) \cdot D_y G(x, y) \cdot \nu\,\mathrm{d}S(y).$$