Zusammenfassung Algebr. Topologie

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def. Ein **affines n-Simplex** ist die konvexe Hülle von $n+1$ affin unabhängigen Punkten $p_0, ..., p_{n+1} \in \mathbb{R}^N$. Die konvexe Hülle von einer Teilmenge dieser Eckpunkte wird **Seite** genannt.
Das **Standard-n-Simplex** Δ_n ist das von den $n+1$ Standard-Basisvektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$ aufgespannte Simplex.

Def. Ein (endlicher) **geometrischer Simplizialkomplex** ist eine (endliche) Menge $\mathcal{S}$ endlich vieler affiner Simplizes im $\mathbb{R}^N$, sodass:

- Ist $K \in \mathcal{S}$ und $T \subset K$ eine Seite von K, dann ist auch $T \in \mathcal{S}$.
- Für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$ ist $K_1 \cap K_2$ entweder eine Seite von K_1 und K_2 oder leer.

Def. Jeder Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ ist eine **Triangulierung** seines **Polyeders**, dem topologischen Raum $|\mathcal{S}| \coloneqq \bigcup\limits_{K \in \mathcal{S}} K$.

Def. Ein geometrischer Simplizialkomplex mit einer Totalordnung auf der Menge der Eckpunkte heißt **geordnet**.

Notation. Ein n-Simplex mit Eckpunkten $v_0, ..., v_n$ in einem geordneten geom. Simplizialkomplex wird mit $\langle v_0, ..., v_n \rangle$ bezeichnet, falls $v_0 < v_1 < ... < v_n$.

Notation. $\mathcal{S}_n \coloneqq \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma \text{ ist geordneter } n\text{-Simplex}\}$

Def. Eine **simpliziale n-Kette** in einem geordneten geom. Simplizialkomplex ist eine endliche formale Linearkombination

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma,$$

wobei $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}$. Die Menge solcher Linearkombinationen ist $C_n(\mathcal{S})$. Sie ist die freie abelsche Gruppen über der Menge der Simplizes.

Bemerkung. $C_n(\mathcal{S})$ ist eine Gruppe.

Def. Der Rand eines orientierten n-Simplex $\langle v_0, ..., v_n \rangle \in \mathcal{S}$ ist

$$\delta \langle v_0, ..., v_n \rangle \coloneqq \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_0, ..., \hat{v_i}, ..., v_n \rangle.$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Gruppenhomo $\partial_n : C_n(\mathcal{S}) \to C_{n-1}(\mathcal{S})$.

Def. Ein **Kettenkomplex** $C_\bullet$ ist eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Gruppenhomomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ mit der Eigenschaft $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Def. Sei $C_\bullet$ ein Kettenkomplex.

- $Z_n(C_\bullet) \coloneqq \ker \partial_n \subset C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) \coloneqq \operatorname{im} \partial_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) \coloneqq Z_n(C_\bullet) / B_n(C_\bullet)$ heißt **n-te Homologiegruppe**.

Prop. Für $n \geq 1$ gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Die simplizialen n-Ketten bilden also einen Kettenkomplex.

Def. Ein **singuläres n-Simplex** in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta^n \to X$. Wir bezeichnen mit $\Delta_n(X)$ die Menge der singulären n-Simplizes in X und mit $C_n(X)$ die freie abelsche Gruppe über $\Delta_n(X)$. Wir definieren

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X), \quad \sigma \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{\langle e_0, ..., \hat{e_i}, ..., e_n \rangle}.$$

Analog zu oben gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, man erhält also einen Komplex $C_\bullet(X)$ der singulären Ketten in X. Dessen Homologiegruppen heißen **singuläre Homologiegruppen** $H_n(X)$.

Def. Eine **Kettenabbildung** zwischen Kettenkomplexen $C_\bullet$ und $D_\bullet$ ist eine Familie $(f_n : C_n \to D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Gruppenhomomorphismen, welche mit dem Differential verträglich sind, d. h.

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \partial_n^{(D)} \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n^{(C)}.$$

Aus einer solchen Abbildung erhält man wiederum eine Abbildung $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \to H_n(C_\bullet)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit definiert H_n einen Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Def. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen erhalten wir eine Abbildung $f_* : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ definiert durch $f_*(\sigma) \coloneqq f \circ \sigma$ für ein n-Simplex $\sigma : \Delta_n \to X$. Die Zuordnung $f \mapsto f_*$ erfüllt die Funktiorialitätsaxiome. Somit definiert H_n für alle $n \in \mathbb{N}$ einen Funktor $\mathbf{Top} \to \mathbf{AbGrp}$.

Korollar. Homöomorphe Räume haben isomorphe singuläre Homologiegruppen.

Prop. Sei $\pi_0(X)$ die Menge der Wegekomponenten von X. Die Inklusionen $A \hookrightarrow X$ (für $A \in \pi_0(X)$) induzieren einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{A \in \pi_0(X)} H_*(A) \cong H_*(X).$$

Prop. Sei $X \neq \emptyset$ wegzusammenhängend. Dann ist $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Def. Eine **Kettenhomotopie** zw. Kettenabb. $\phi_*, \psi_* : C_\bullet \to D_\bullet$ ist eine Folge von Homomorphismen $P_n : C_n \to D_{n+1}$ mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n = \phi_n - \psi_n.$$

Prop. Seien $\phi_*, \psi_* : C_\bullet \to D_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt

$$H_*(\phi_*) = H_*(\psi_*) : H(C_\bullet) \to H(D_\bullet).$$

Satz. Seien $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen. Dann sind $f_*, g_* : X_\bullet \to Y_\bullet$ kettenhomotop.

Korollar.
- Seien $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen. Dann gilt
$$f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y).$$
- Homotopieäquivalente Räume haben isomorphe Homologiegruppen.

Def. Ein **Unterkomplex** $D_\bullet$ von $C_\bullet$ ist eine Folge von Untergruppen $D_n \subset C_n$, sodass gilt: $\partial D_n \subset D_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

Def. Ist $D_\bullet \subset C_\bullet$ ein Unterkomplex, so ist der **Quotientenkomplex** $C_\bullet / D_\bullet$ definiert durch

$$(C_\bullet / D_\bullet)_n \coloneqq C_n / D_n, \quad \partial_n^{C/D}[c] \coloneqq [\partial_n^C(c)].$$

Def. Sei (X, A) ein Raumpaar. Der **relative singuläre Kettenkomplex** $C_\bullet(X, A)$ ist definiert als Quotientenkomplex $X_\bullet / A_\bullet$. Dessen Homologiegruppen heißen **relative singuläre Homologiegruppen** $H_n(X, A)$.

Bemerkung. H_n ist ein Funktor $\mathbf{Top}(2) \to \mathbf{AbGrp}$.

Def. Eine Homotopie zwischen Abbildungen von Raumpaaren $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ ist eine Homotopie $H : [0,1] \times X \to Y$ zwischen f und g mit $H([0,1] \times A) \subset Y$.

Prop. Homotope Abbildungen von Raumpaaren induzieren dieselbe Abbildung in relativer Homologie.

Def. Ein Kettenkomplex heißt **exakt** (oder **azyklisch**), falls seine Homologiegruppen alle Null sind, d. h. $\forall\, n \in \mathbb{N} : \operatorname{im} \partial_{n+1} = \ker \partial_n$.

Def. Eine **kurze exakte Sequenz** (keS) ist ein exakter Kettenkomplex der Gestalt

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Def. Eine **kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen** ist ein Diagramm der Form

$$0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0,$$

in jedem Grad eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0.$$

Bemerkung. Ist (X, A) ein Raumpaar, so erhält man eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to C_\bullet(A) \to C_\bullet(X) \to C_\bullet(X, A) \to 0.$$

Für ein Raumtripel (X, A, U) erhält man eine k. e. S.

$$0 \to C_\bullet(A, U) \to C_\bullet(X, U) \to C_\bullet(X, A) \to 0.$$

Prop (Schlangenlemma)**.** Die ex. Sequenz $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$ induziert in jedem Grad einen sogenannten **verbindenden Homomorphismus** $\partial_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$, sodass die Sequenz

$$... \to H_n(A) \to H_n(B) \to H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(B) \to ...$$

exakt ist. Diese Sequenz wird **lange exakte Sequenz** genannt.

Korollar. Sei (X, A) ein Raumpaar. Dann gibt es Homomorphismen $\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$, sodass die Sequenz

$$... \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \to ... \quad \text{exakt ist.}$$

Für ein Raumtripel (X, A, U) erhält man eine l. e. S.

$$... \to H_n(A, U) \to H_n(X, U) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, U) \to ...$$

Def. Die **reduzierte Homologie** $\tilde{H}_*(X)$ eines topologischen Raumes X ist die Homologie des Kettenkomplexes

$$... \to C_2(X) \xrightarrow{\partial_n} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

wobei ϵ der sogenannte **Augmentierungshomomorphismus** ist:

$$\epsilon : \sum_{\sigma \in \Delta_0(X)} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_\sigma \lambda_\sigma \in \mathbb{Z}.$$

Prop.
- $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ für $n \geq 1$
- Ist $X = \emptyset$, so ist $\tilde{H}_n(X) = 0$ für $n \geq 0$ und $\tilde{H}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$.
- Ist $X \neq \emptyset$, so ist $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus \mathbb{Z}$, jedoch nicht kanonisch.
- Ist X kontrahierbar, so gilt $\tilde{H}_n(X) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Ist (X, A) ein Raumpaar, so gibt es eine lange exakte Sequenz

$$... \to \tilde{H}_0(A) \to \tilde{H}_0(X) \to \tilde{H}_0(X, A) \to \tilde{H}_{-1}(A) \to \tilde{H}_{-1}(X) \to 0$$

Satz. Sei (X, R) ein Raumpaar, $U \subset R$ mit $\overline{U} \subset \operatorname{int} R$. Dann induziert die Inklusion $(X - U, R - U) \hookrightarrow (X, R)$ Isomorphismen

$$H_n(X - U, R - U) \to H_n(X, R) \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Bemerkung. Eine äquivalente Aussage zum Ausschneidungssatz ist: Seien $A, B \subset X$ mit $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$. Dann induziert die Inklusion $(B, A \cap B) \to (X, A)$ Isomorphismen in Homologie.

Def (**Eilenberg-Steenrod-Axiome**)**.** Eine **Homologietheorie** ist eine Folge von Funktoren

$$H_n : \mathbf{Top}(2) \to \mathbf{AbGrp},$$

und natürlichen Transformationen

$$\delta_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, \emptyset)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- **Homotopieinvarianz**: Seien $f, g : (X, A) \to (B, Y)$ homotop als Abbildungen von Raumpaaren. Dann gilt $f_* = g_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.
- **Lange exakte Sequenz**: Die Inklusionen $A \hookrightarrow X$ und $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ induzieren eine l.e.S.

$$... \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \to ...$$

- **Ausschneidung**: Ist $U \subset A$ mit $\overline{A} \subset \operatorname{int}(A)$, dann induziert die Inklusion $(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen

$$H_n(X - U, A - U) \to H_n(X, A).$$

Def. Die **Koeffizienten** einer Homologietheorie sind die Homologiegruppen $H_n(pt)$ des einpunktigen Raums. Eine Homologietheorie heißt **gewöhnlich**, falls $H_n(pt) = 0$ für $n > 0$.

Bemerkung. Manchmal fordert man auch das Summenaxiom: Für eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von topologischen Räumen induzieren die Inklusionen $X_i \hookrightarrow X$ in die disjunkte Summe X aller X_i einen Iso

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) \xrightarrow{\cong} H_n(X).$$

Bemerkung. Die singuläre Homologie ist eine gewöhnliche Homologietheorie, die das Summenaxiom erfüllt.

Def. Ein Raumpaar (X, A) heißt **gut**, falls A nicht leer, abgeschlossen und starker Deformationsretrakt einer offenen Umgebung ist.

Prop. Sei (X, A) ein gutes Raumpaar. Dann induziert $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ Isomorphismen

$$H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) = \tilde{H}_n(X/A) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Satz. Für $n \geq 0$ ist S^n kein Retrakt von D^{n+1}.

Korollar (**Brouwerscher Fixpunktsatz**)**.**
Jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ hat einen Fixpunkt.

Satz (Topologische Invarianz der Dimension)**.**
Seien $U \Subset R^n$ und $V \Subset \mathbb{R}^m$ homöomorph. Dann gilt $n = m$.

Def. Sei $f : S^n \to S^n$ stetig. In Homologie induziert f eine Abbildung $H_n(f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben ist. Diese Zahl heißt **Abbildungsgrad** $\deg f$ von f.

Lemma.
- $\deg(f \circ g) = (\deg f) \cdot (\deg g)$.
- $H_n(f)$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\deg(f) = \pm 1$.

Prop. Sei $f : S^n \to S^n$ die Spiegelung an einer Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt $\deg f = -1$.

Def. Ein **Vektorfeld** über S^n ist eine stetige Abbildung $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, sodass $v(x) \perp x$ für alle $x \in S^n$.

Satz. Die Sphäre S^n, $n \geq 1$ hat genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.

Satz. Sei n gerade und wirke eine Gruppe G frei auf S^n. Dann ist entweder $G = \{e\}$ oder $G \cong \mathbb{Z}_2$.

Def. Sei $f : S^n \to S^n$ stetig, $x \in S^n$, sodass eine Umgebung U von x existiert mit $U \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Mit Ausschneidung und der l.e.S. erhält man Isomorphismen

$$H_k(U, U - \{x\}) \cong H_k(S^n, S^n - \{x\}) \cong \tilde{H}_k(S^n) \cong \mathbb{Z}.$$

Die induzierte Abb. $f_* : H_n(U, U - \{x\}) \to H_n(S^n, S^n - \{f(x)\})$ ist gegeben durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl. Diese heißt **lokaler Abbildungsgrad** $(\deg f|x)$ von f bei x.

Prop. Sei $f : S^n \to S^n$ stetig und $y \in S^n$ mit $f^{-1}(y) = \{x_1, ..., x_n\}$. Dann ist $\deg f|x_i$ definiert für $i = 1, ..., n$ und es gilt

$$\deg f = \sum_{i=1}^n \deg f|x_i.$$

Prop. Sei $f : S^n \to S^n$ stetig. Dann gilt

$$\deg f = \deg(\Sigma f : \Sigma S^n \to \Sigma S^n).$$

Prop. Seien $A, B \subset X$ mit $X = A \cup B$. Angenommen, es gibt Umgebungen U von A und V von B, sodass die Inklusionen $A \hookrightarrow U$, $B \hookrightarrow V$ und $A \cap B \hookrightarrow U \cap V$ Homotopieäquivalenzen sind. Dann existiert die **Mayer-Vietoris-Sequenz**

$$... \to H_*(A \cap B) \to H_*(A) \oplus H_*(B) \to H_*(X, A \cap B) \to H_{*-1}(A \cap B) \to ...$$

Prop (Verallg. Jordanscher Kurvensatz)**.** Sei $S \subset S^n$ ein Teilraum, der zu einer Sphäre $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ homöomorph ist. Dann ist $k \leq n$ und

$$\tilde{H}_i(S^n - S) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n - k - 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Korollar (Jordanscher Kurvensatz)**.** Sei $\phi : S^1 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Einbettung. Dann besteht $\mathbb{R}^2 - \phi(S^1)$ aus zwei Komponenten, von denen genau eine beschränkt ist.

Satz (Invarianz des Gebietes)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und ein Homöomorphismus auf das Bild. Dann ist $\phi(U)$ offen.

Def. Ein Δ-Komplex ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Familie $(\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \to X)_{\alpha \in I}$ von stetigen Abbildungen (genannt **charakteristische Abbildungen**), sodass:

- Die Restriktionen $\sigma_\alpha|\operatorname{int}(\Delta^{n(\alpha)}) : \operatorname{int}(\Delta^{n(\alpha)}) \to X$ sind injektiv und jeder Punkt $x \in X$ liegt im Bild (genannt **offenes Simplex**) von genau einer solchen Restriktion.
- Ist $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \to X$ eine char. Abb. und $\tau \subset \Delta^{n(\alpha)}$ eine $(n(\alpha) - 1)$-dimensionale Seite, dann ist $\sigma_\alpha|\tau : \Delta^{n(\alpha)-1} \to X$ wieder eine charakteristische Abbildung.
- $A \subset X$ ist offen $\iff$ alle $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ sind offen in $\Delta^{n(\alpha)}$.

Bemerkung. Jeder endliche geordnete Simplizialkomplex trägt die Struktur eines Δ-Komplexes.

Bemerkung. Alternativ ist ein Δ-Komplex ein kontravarianter Funktor von der Kategorie Δ der endlichen total geordneten Mengen mit streng monotonen Abbildungen in die Kategorie der Mengen.

Def. Für einen Δ-Komplex X sei $C_n^\Delta(X)$, die freie abelsche Gruppe erzeugt von den Abbildungen $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \to X$ mit $n(\alpha) = n$. Diese Gruppen bilden einen Simplizialkomplex. Die Homologiegruppen dieses Komplexes heißen **simpliziale Homologiegruppen** $H_*^\Delta(X)$.

Def. Ein **Teilkomplex** eines Δ-Komplexes ist eine Teilmenge der charakteristischen Abbildungen (zusammen mit der Vereinigung der Bilder dieser Abbildungen als topologischer Raum), die selbst die Axiome für einen Delta-Komplex erfüllt.

Def. Das **k-Skelett** eine Δ-Komplexes ist der Teilkomplex, der aus den Bildern aller i-Simplizes besteht, wobei $i \leq k$.

Def. Die **relative singuläre Homologie** $H_n^\Delta(X, A)$ des Δ-Komplexes X bzgl. eines Teilkomplexes A ist die Homologie des Quotientenkomplexes $C_n^\Delta(X)/C_n^\Delta(A)$.

Satz. Sei X ein Δ-Komplex und $A \subset X$ ein Unterkomplex. Dann induziert die Inklusion $C_*^\Delta(X) \hookrightarrow C_*(X)$ Isomorphismen von Homologiegruppen.

Lemma. Für $n \geq 0$ gilt

$$H_i^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong H_i(\Delta^n, \partial\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{für } i = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Homologieklasse von $\mathrm{id} : \Delta^n \to \Delta^n$ erzeugt sowohl $H_n^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ als auch $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$

Lemma (**Fünferlemma**)**.** Sei folgendes kommutatives Diagramm von R-Modulen mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

Angenommen, α, β, δ und ϵ sind Isomorphismen. Dann ist auch γ ein Isomorphismus.

Def. Ein **CW-Komplex** ist ein topologischer Raum X mit einer Folge von abgeschlossenen Unterräumen

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots \subset X, \quad \bigcup_{i \geq 0} X^i = X,$$

genannt **i-Skelette** X^i, sodass gilt:

- X^0 ist eine diskrete Menge von Punkten.
- Für alle $n \geq 1$ gibt es eine Familie von **Anheftungsabb'en** $(\phi_\alpha : \partial D_\alpha^n \to X^{n-1})_{\alpha \in I(n)}$ (dabei ist D_α^n eine Kopie von D^n), sodass
$$X^n = X^{n-1} \cup_{(\phi_\alpha)_{\alpha \in I(n)}} \coprod_{\alpha \in I(n)} D_\alpha^n.$$
- X trägt die Finaltopologie bzgl. obiger Filtrierung, d. h. $A \subset X$ ist abgeschlossen $\iff$ alle $A \cap X^i$ sind abgeschlossen.

Def. Ein CW-Komplex heißt **endlich-dimensional**, falls $X^i = X$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Er heißt **endlich**, falls er insgesamt nur endlich viele Anheftungsabb'en besitzt (dann ist er insbesondere endlich-dim).

Prop. CW-Komplexe sind normal (und damit Hausdorffsch).

Def. Die Anheftungsabb'en $\phi_\alpha : \partial D_\alpha^n \to X^{n-1}$ lassen sich kanonisch fortsetzen zu **charakteristischen Abb'en** $\Phi_\alpha : D_\alpha^n \to X^n \subset X$.
Die Bilder dieser Abb'en werden **abgeschlossene Zellen** genannt. Die Bilder der Einschränkungen $\Phi_\alpha | \operatorname{int}(D_\alpha^n)$ heißen **Zellen** von X und werden mit e_α^n bezeichnet.

Prop.
- $\Phi_\alpha | \operatorname{int}(D_\alpha^n) : \operatorname{int}(D_\alpha^n) \to X^n$ ist eine topologische Einbettung (d. h. ein Homöo auf das Bild).
- Jeder Punkt aus X liegt in genau einer Zelle.
- Der Abschluss einer Zelle ist eine abgeschlossene Zelle.
- Jede abgeschlossene Zelle trifft nur endlich viele Zellen.

Def. Ein **Unterkomplex** eines CW-Komplexes ist eine Teilmenge $A \subset X$, die selbst ein CW-Komplex ist, und zwar so, dass alle anheftenden Abb'en von A auch anheftende Abb'en von X sind.

Def. Ein **CW-Paar** ist ein Raumpaar (X, A), wobei X ein CW-Komplex und A ein Unterkomplex von X ist.

Prop.
- X^n ist ein Unterkomplex von X und von X^m für $m \geq n$.
- CW-Raumpaare sind gute Raumpaare.
- Jede Zelle eines CW-Komplexes ist in einem endlichen Unterkomplex enthalten.

Def. Die **Einpunktvereinigung** einer Familie $(X_i, x_i)_{i \in I}$ von punktierten Räumen ist

$$\bigvee_{i \in I} X_i \coloneqq \left(\coprod_{i \in I} X_i \right) / \{x_i \,|\, i \in I\}.$$

Man erhält Projektionen $q_j : \vee_i X_i \to X_j$ durch Abbilden aller Punkte aus X_i, $i \neq j$. auf den Basispunkt x_j.

Prop. Sei $(X_i, x_i)_{i \in I}$ eine Familie von punktierten Räumen, sodass alle Raumpaare $(X_i, \{x_i\})$ gut sind. Dann induzieren die Inklusionen $X_i \hookrightarrow \vee_i X_i$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \tilde{H}_n(X_i) \cong \tilde{H}_n(\vee_i X_i) \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Lemma. Sei X ein CW-Komplex. Dann gilt

$$X^n / X^{n-1} \approx \vee_{i \in I(n)} S^n.$$

Korollar. $H_i(X^n / X^{n-1}) = \begin{cases} \oplus_{i \in I(n)} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Prop.
- $H^k(X^n) = 0$ für $k > n$.
- Für $k < n$ induziert die Inklusion $X^n \hookrightarrow X$ Isomorphismen $H_k(X^n) \cong H_k(X)$.

Def. Der **zelluläre Kettenkomplex** eines CW-Komplexes X ist definiert durch

$$C_n^{\mathrm{cell}}(X) \coloneqq H_n(X^n, X^{n-1})$$

mit dem verbindenden Homomorphismus

$$\partial_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

aus der l. e. S. des Raumtripels (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) als Randabb.
Dabei setzt man $X^{n-2} \coloneqq \emptyset$ und $\partial_0 = 0$.
Die Homologiegruppen dieses Komplexes werden mit $H_*^{\mathrm{cell}}(X)$ bezeichnet.

Prop. Für jeden CW-Komplex X gilt $H_*^{\mathrm{cell}}(X) \cong H_*(X)$.

Korollar. Hat der CW-Komplex X keine n-Zellen so ist $H_n(X) = 0$. Wenn X k-viele n-Zellen besitzt, dann wird $H_n(X)$ von höchstens k Elementen erzeugt.

Bemerkung. Wir wählen Erzeuger t_n von $H_n(D^n, \partial D^n)$ und s_n von $\tilde{H}_n(S^n)$ wie folgt: Für $n = 0$ wählen wir einen beliebigen Erzeuger von $H_0(S^0)$. Angenommen, wir haben einen Erzeuger von $s_i \in H_i(S^i)$ bereits definiert. Der verbindende Homomorphismus $\partial_i : H_{i+1}(D^{i+1}, S^i) \to H_i(S^i)$ aus der l. e. S. des Raumpaares (D^{i+1}, S^i) ist ein Isomorphismus. Sei der Erzeuger t_{i+1} von $H_{i+1}(S^{i+1})$ das Urbild von s_i unter ∂_i. Wir wählen s_{i+1} als das Bild von t_{i+1} unter dem Isomorphismus

$$H_{i+1}(D^{i+1}, S^i) \cong H_{i+1}(D^{i+1}/S^i) \cong H_{i+1}(S^{i+1})$$

Dabei seien die Homöomorphismen $D^{i+1}/S^i \approx S^{i+1}$ fest gewählt.
Wir erhalten Isomorphismen

$$C_n^{\mathrm{cell}}(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \bigoplus_{I(n)} H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \bigoplus_{I(n)} \mathbb{Z}.$$

Sei nun e_α^n eine n-Zelle mit anheftender Abb. $\phi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$ und e_β^{n-1} eine $(n{-}1)$-Zelle von X. Sei $d_{\alpha\beta}$ der Abbildungsgrad von

$$S^{n-1} \xrightarrow{\phi_\alpha} X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-2} \cong \vee_{i \in I(n)} S^{n-1} \xrightarrow{q_\beta} S^{n-1}.$$

Wir bezeichnen den α-ten Erzeuger von $C_n^{\mathrm{cell}}(X)$ (mit $\alpha \in I(n)$) mit e_α^n. Dann haben wir:

Prop. Der zelluläre Randoperator ist gegeben durch

$$\partial_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta \in I(n-1)} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}.$$

Die Summe ist dabei endlich.

Def. Der singuläre Kettenkomplex mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe G eines topologischen Raumes X ist def. durch

$$C_n(X) \coloneqq \{ \text{ formale endl. Linearkomb. } \sum_{\sigma \in \Delta_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \text{ mit } \lambda_\sigma \in G \}$$

Die Randabbildung ist ganz wie beim gewöhnlichen Kettenkomplex $(G = \mathbb{Z})$ definiert. Die Homologie dieses Komplexes heißt **singuläre Homologie mit Koeffizienten in G**. Sie ist eine gewöhnliche Homologietheorie im Sinne von Eilenberg und Steenrod. Man erhält **reduzierte Homologie mit Koeffizienten in G**, indem man die Komplex von dem mit dem Augmentierungshomomorphismus

$$\epsilon : C_0(X; G) \to G, \qquad \sum_{\sigma \in \Delta_0(X)} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in \Delta_0(X)} \lambda_\sigma$$

erweiterten Kettenkomplex mit Koeffizienten in G nimmt.

Prop. Ist $f : S^n \to S^n$ stetig vom Grad n, so ist

$$f_* : \tilde{H}_n(S^n; G) \to \tilde{H}_n(S^n; G)$$

durch Multiplikation mit n gegeben.

Def. Ist X ein CW-Komplex, so ist der zelluläre Kettenkomplex mit Koeffizienten in G definiert durch

$$C_n^{\text{cell}}(X) := H_n(X^n, X^{n-1}; G).$$

Die Randabbildung ∂_n^{cell} ist der verbindende Homomorphismus in der l. e. S. zum Raumtripel (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) mit Koeffizienten in G. Es gilt nach Wahl von passenden Erzeugern:

$$\partial_n^{\text{cell}}(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}.$$

Def. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine endliche Überlagerung mit Blätterzahl k. Sei $\tau_n : C_n(X) \to C_n(\tilde{X})$ die Abbildung, die jedes n-Simplex auf die Summe seiner k möglichen Lifte abbildet. Dann bildet τ_* eine Kettenabbildung und $p_* \circ \tau_* : C_*(X) \to C_*(X)$ ist durch Multiplikation mit k gegeben. Die von τ induzierte Abbildung $\tau_* : H_n(X) \to H_n(\tilde{X})$ heißt **Transferhomomorphismus**.

Def. Ist nun $k = 2$ so gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to C_*(X; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\tau_*} C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_*} C_*(X, \mathbb{Z}/2) \to 0.$$

Die davon induzierte lange exakte Sequenz

$$... \to H_*(X; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\tau_*} H_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{p_*} H_*(X, \mathbb{Z}/2) \to H_{*-1}(X; \mathbb{Z}/2) \to ...$$

heißt **Transfersequenz**.

Def. Eine Abbildung $f : S^n \to S^n$ heißt **ungerade**, falls

$$\forall\, x \in S^n \,:\, f(-x) = -f(x).$$

Prop. Jede ungerade Abbildung hat ungeraden Abbildungsgrad.

Satz (**Borsuk-Ulam**)**.** Sei $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gibt es $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Satz (Ham-Sandwich-Theorem)**.** Seien $K_1, ..., K_n \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und beschränkt. Dann gibt es eine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$, die jeden Teilraum genau halbiert.

Bsp (Homologie von wichtigen Räumen)**.**

$$\tilde{H}_i(S^n) = \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}; R) = \begin{cases} R, & \text{wenn } i = 0, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = 0 \\ \mathbb{Z}/2, & \text{wenn } i < n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & \text{wenn } i \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i \leq 2n \text{ und } i \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(T^n) = H_i(S^{n-1}) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{i}}$$