Zusammenfassung Kommutative Algebra

Ringe und Ideale

Def. Ein Ring ist ein Tupel $(A, +, \cdot, 0, 1)$ mit einer Menge A, Operationen $+, \cdot : A \times A \to A$ und Elementen $0, 1 \in A$, sodass

- $(A, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist,
- $(A, \cdot, 1)$ ein Monoid ist und
- die Multiplikation distributiv über die Addition ist, d. h.

$$x(y+z) = xy + xz \quad \text{und} \quad (y+z)x = yx + zx \quad \forall\, x, y, z \in A.$$

Bspe. • $\mathbb{Z}$, • $K[x_1, \ldots, x_n]$, • **Nullring**: der Ring mit $0 = 1$

Def. Sei $(A, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $B \subseteq A$ heißt **Unterring**, falls $0, 1 \in B$ und B unter $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist.

Bspe. • $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, • $K \subset K[X]$

Def. Ein **Ringhomomorphismus** $\phi : A \to B$ ist eine Abbildung, welche sowohl ein Gruppenhomomor. $(A, +_A, 0_A) \to (B, +_B, 0_B)$ als auch ein Ringhomomorphismus $(A, \cdot_A, 1_A) \to (B, \cdot_B, 1_B)$ ist.

Bem. Ringe und Ringhomomorphismen bilden eine Kategorie **Ring**.

Lem. Ein Ringhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus (in dieser Kategorie), wenn er bijektiv ist.

Konvention. Seien A im Folgenden Ringe und $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

Def. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt (beidseitiges) **Ideal** von A, falls

- $\mathfrak{a} \subseteq A$ eine Untergruppe ist und
- für alle $a \in A$ und $x \in \mathfrak{a}$ gilt: $ax, xa \in \mathfrak{a}$.

Lem. Der Schnitt von (beliebig vielen) Idealen ist selbst ein Ideal.

Def. Sei $M \subseteq A$ eine Teilmenge. Das von M **erzeugte Ideal** ist der Schnitt aller Ideale von A, die M umfassen.

Bem. Falls A kommutativ ist, so gilt

$$\text{von } M \text{ erzeugtes Ideal} = \{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \,|\, n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in A, x_k \in M \}.$$

Notation. $(x_1, \ldots, x_n) \subseteq A$ ist das von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ erzeugte Ideal.

Bem. • Das **Nullideal** (0) ist das kleinste Ideal, denn $(0) = \{0\}$.
• Das **Einsideal** (1) ist das größte Ideal, denn $(1) = A$.

Prop. • Sei $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal. Dann ist auch $\phi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$ ein Ideal.
• Sei $A' \subseteq A$ ein Unterring. Dann ist auch $\phi(A') \subseteq B$ ein Unterring.

Def. Das Ideal $\ker \phi := \phi^{-1}((0))$ heißt **Kern** von ϕ.

Bem. ϕ ist injektiv $\iff \ker \phi = 0$

Prop. Sei $\phi : A \to B$ surjektiv, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist auch das Bild $\phi(A) \subseteq B$ ein Ideal.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es einen Ring $A/\mathfrak{a}$ und einen Ringhomomor. $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ mit folgender universeller Eigenschaft:
Für jeden Ring B und Ringhomomor. $\psi : A \to B$ mit $\mathfrak{a} \subsetneq \ker \psi$ gibt es genau einen Ringhomomor. $\widetilde{\psi} : A/\mathfrak{a} \to B$ mit $\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi$.

Konstr. Sei durch $x \sim y \;:\iff\; x - y \in \mathfrak{a}$ eine Äq'relation $\sim$ auf A definiert. Setze $A/\mathfrak{a} := A/\!\sim$ und $\pi(x) := [x]$. Die Addition und Multiplikation auf A ind. die Addition bzw. Multiplikation auf $A/\mathfrak{a}$.

Def. $A/\mathfrak{a}$ heißt **Quotientenring** von A nach $\mathfrak{a}$.

Notation. Man lässt häufig die Äquivalenzklammern weg, man schreibt also „$x = y$ in $A/\mathfrak{a}$" anstatt „$[x] = [y]$".

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Folgende Korresp. ist bij. und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{Ideale } \mathfrak{b} \subseteq A \text{ mit } \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a} \} & \leftrightarrow & \{ \text{Ideale } \mathfrak{c} \subseteq A/\mathfrak{a} \} \\ \mathfrak{b} & \mapsto & \pi(\mathfrak{b}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{c}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{c} \end{array}$$

Prop (**Homomorphiesatz**). Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomor. Dann ist $\underline{\phi} : A/\ker(\phi) \to \operatorname{im}(\phi)$, $[x] \mapsto \phi(x)$ ein Ringisomorphismus.

Im Folgenden seien alle Ringe **kommutativ**, d. h. $xy = yx$ f. a. x, y.

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in A$ heißt

- **regulär**, falls $\forall\, y \in A : xy = 0 \implies y = 0$.
- **Nullteiler**, falls es nicht regulär ist, d. h. wenn ein $y \in A \setminus \{0\}$ mit $xy = 0$ existiert.

Def. Ein Ring A heißt **Integritätsbereich**, wenn $0 \in A$ der einzige Nullteiler in A ist.

Achtung. Die Null im Nullring ist regulär!

Bem. Ein Ring A ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn

$$0 \neq 1 \text{ in } A \qquad \text{und} \qquad \forall\, x, y \in : xy = 0 \implies x = 0 \lor y = 0.$$

Beob. Sei $\phi : A \to B$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Ist B ein Integritätsbereich, so auch A.

Def. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **Hauptideal**, falls $\mathfrak{a} = (a)$ für ein $a \in A$. Ein Ring A heißt **Hauptidealbereich**, falls jedes Ideal in A ein Hauptideal ist.

Bspe. • $\mathbb{Z}$, • $K[x]$

Gegenbsp. • $K[x_1, \ldots, x_n]$ für $n \geq 2$

Def. Ein Element $x \in A$ heißt **nilpotent**, falls $\exists\, n \geq 0 : x^n = 0$.

Beob. Ist A ein Integritätsbereich, so ist $0 \in A$ das einzige nilpotente Element in A.

Def. Sei A ein Ring, nicht notwendigerweise kommutativ. Ein Element $x \in A$ heißt **Einheit**, falls ein $y \in A$ mit $xy = yx = 1$ existiert. $A^\times := \{ \text{Einheiten in } A \}$ heißt **Einheitengruppe**. Der Ring A heißt **Schiefkörper**, falls 0 die einzige Nicht-Einheit ist. Falls zusätzlich A kommutativ ist, so heißt A ein **Körper**.

Beob. • $x \in A$ ist eine Einheit $\iff (x) = (1) \iff A/(x) = 0$
• Einheiten sind regulär.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring. Dann sind äquivalent:

- A ist ein Körper.
- A besitzt genau zwei Ideale (nämlich (0) und (1)).
- Ein Ringhomomorphismus $A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn B nicht der Nullring ist.

Def. • Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ heißt **Primideal**, falls $1 \notin \mathfrak{p}$ und $\forall\, a, b \in A : ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p} \lor b \in \mathfrak{p}$.
• Ein Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ heißt **maximal**, falls für jedes Ideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq A$ *entweder* $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} = A$ (nicht beides!) gilt.

Bspe. • Jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ hat die Form (m) mit $m \in \mathbb{N}$. Das Ideal (m) ist genau dann prim, wenn $m = 0$ oder m eine Primzahl ist.
• Sei $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ ein irred. Polynom. Dann ist (f) prim.

Lem.
$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{p} \subseteq A \text{ ist prim} & \iff & A/\mathfrak{p} \text{ ist ein Integritätsbereich} \\ \mathfrak{m} \subseteq A \text{ ist maximal} & \iff & A/\mathfrak{m} \text{ ist ein Körper} \end{array}$$

Kor. Maximale Ideale sind prim.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Folgende Korresp. ist bij. und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \} & \leftrightarrow & \{ \text{Primideale } \mathfrak{q} \subset A/\mathfrak{a} \} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \pi(\mathfrak{p}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{q}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

Genauso bekommt man eine bijektive, monotone Korrespondenz

$$\{ \text{max. Ideale } \mathfrak{m} \subset A \text{ mit } \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a} \} \quad \leftrightarrow \quad \{ \text{max. Ideale } \mathfrak{n} \subset A/\mathfrak{a} \}$$

Prop. Ein Ring besitzt genau dann ein maximales Ideal, wenn er nicht der Nullring ist.

Kor. • Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es genau dann ein maximales Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} \neq (1)$.
• Ein Element $x \in A$ liegt genau dann in einem maximalen Ideal von A, wenn x keine Einheit ist.

Def. Ein **lokaler Ring** ist ein komm. Ring A mit genau einem max. Ideal $\mathfrak{m}$. Der Körper $F := A/\mathfrak{m}$ heißt **Restklassenkörper** von A.

Notation. Man schreibt „Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring."

Def. Ein **halblokaler Ring** ist ein kommutativer Ring mit nur endlich vielen maximalen Idealen.

Lem. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein Ideal mit $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$. Dann ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.

Prop. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, sodass $1 + x$ für alle $x \in \mathfrak{m}$ eine Einheit ist. Dann ist $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$, also $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.

Prop. Die Menge $\mathfrak{n} := \{ \text{nilpotente Elemente} \} \subseteq A$ ist ein Ideal, das sogenannte **Nilradikal**.

Bem. Der Ring $A/\mathfrak{n}$ hat außer 0 keine nilpotenten Elemente.

Prop. Das Nilradikal eines kommutativen Ringes ist der Schnitt aller seiner Primideale.

Def. Das **Jacobsonsche Ideal** $\mathfrak{j} \subset A$ ist der Schnitt aller maximalen Ideale von A.

Prop. Ein Element $x \in A$ liegt genau dann im Jacobsonschen Ideal $\mathfrak{j}$, wenn $1 - xy$ für alle $y \in A$ eine Einheit ist.

Def. Die **Summe von Idealen** $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ von A ist das Ideal

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i := \{ \sum_{k=1}^n x_k \,|\, k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathfrak{a}_{i_k}, i_k \in I \}.$$

Bem. $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ ist das kleinste Ideal, das alle $\mathfrak{a}_i$ umfasst.

Beob. $(x_1) + \ldots + (x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$

Bem. Ideale eines Ringes A bilden mit Schnitt und Summe einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusionsordnung.

Def. Das **Produkt zweier Ideale** $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ ist

$$\mathfrak{ab} := \text{von } \{ab \,|\, a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\} \text{ erzeugtes Ideal.}$$

Beob. • $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, • $(x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n) = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$

Bsp. In $A = \mathbb{Z}$ gilt für $m, n \in \mathbb{N}$
• $(m) + (n) = (m, n) = (\mathrm{ggT}(m, n))$, • $(m) \cap (n) = (\mathrm{kgV}(m, n))$.

Beob. • Summe, Schnitt und Produkt von Idealen sind assoziativ.
- Summe und Schnitt sind kommutativ. Das Produkt von Idealen ist kommutativ, wenn der Ring kommutativ ist.
- Distributivgesetz: $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{ab} + \mathfrak{ac}$
- Modularitätsgesetz: Ist $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{c}$, so folgt

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}).$$

Def. Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ heißen **koprim**, falls $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$.

Bsp. In $A = \mathbb{Z}$ gilt: (m), (n) sind koprim $\iff$ $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$

Prop. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n \subseteq A$ paarweise koprime Ideale. Dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i.$$

Def. Das **direkte Produkt** einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Ringen ist der Ring $\prod_{i \in I} A_i := \{(a_i \in A_i)_{i \in I}\}$ mit kmpnntnwsr Verknüpfung.

Bem. Das direkte Produkt ist das kategorienth. Produkt in **Ring**.

Prop. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale. Dann ist

$$\phi : A \to \prod_{i=1}^n (A/\mathfrak{a}_i), \quad x \mapsto ([x], \ldots, [x])$$

genau dann surjektiv, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_i$ paarweise koprim sind.

Bem. Der Ringhomomor. ϕ ist genau dann injektiv, wenn $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = 0$.

Prop. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \subset A$ Primideale und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Gilt $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, so gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$.

Prop. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Gilt $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$, so gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_j$.

Def. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ zwei Ideale. Der **Idealquotient** von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ ist das Ideal $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) := \{x \in A \,|\, x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$.

Notation. • $(x : \mathfrak{b}) := ((x) : \mathfrak{b})$, • $(\mathfrak{a} : y) := (\mathfrak{a} : (y))$

Def. Der **Annulator** eines Ideals $\mathfrak{b} \subseteq A$ ist $\mathrm{ann}(\mathfrak{b}) := (0 : \mathfrak{b})$.

Lem. • $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ • $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ • $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{bc})$
• $(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) = \bigcap_{i \in I} (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$ • $(\mathfrak{a} : \sum_{i \in I} \mathfrak{b}) = \bigcap_{i \in I} (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$

Def. Das **Wurzelideal** eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist das Ideal

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in A \,|\, \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in \mathfrak{a}\}.$$

Bem. Das Nilradikal ist $\sqrt{(0)}$, das Wurzelideal des Nullideals. Es gilt $\sqrt{\mathfrak{a}} = \pi^{-1}(\sqrt{(0)})$ mit $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$, $x \mapsto [x]$.

Lem. • $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \mathfrak{a}$ • $\sqrt{\mathfrak{a}^n} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ für $n \geq 1$ • $\sqrt{\mathfrak{a}} = (1) \iff \mathfrak{a} = (1)$
• $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ • $\sqrt{\mathfrak{ab}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$ • $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$

Def. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **Wurzelideal**, falls $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Prop. Das Wurzelideal von $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ist der Schnitt aller Primideale von A, die $\mathfrak{a}$ enthalten.

Prop. $\{$ Nullteiler von A $\} = \bigcup_{x \in A \setminus \{0\}} \sqrt{\mathrm{ann}(x)}$

Lem. $\sqrt{\mathfrak{a}}$ und $\sqrt{\mathfrak{b}}$ koprim $\implies$ $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ koprim

Def. Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus komm. Ringe. Die **Kontraktion** von $\mathfrak{b} \subseteq B$ (bzgl. ϕ) ist das Ideal $A \cap \mathfrak{b} := \phi^{-1}(\mathfrak{b})$.

Bem. Es wird also ϕ in der Notation unterdrückt. Falls ϕ die Inklusion eines Unterrings ist, so ist $A \cap \mathfrak{b}$ wörtlich zu verstehen.

Beob. $A \cap \mathfrak{b} = \ker(A \to B \to B/\mathfrak{b})$

Lem. Ist $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal, so auch $A \cap \mathfrak{q} \subset A$.

Achtung. Die Kontraktion max. Ideale ist i. A. nicht maximal!

Def. Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus komm. Ringe. Die **Erweiterung** von $\mathfrak{a} \subseteq A$ (bzgl. ϕ) ist das Ideal $B\mathfrak{a} := (\phi(\mathfrak{a}))$, das von $\phi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal.

Bem. Ist ϕ die Inklusion eines Unterrings, so ist $B\mathfrak{a}$ tatsächlich die Menge der B-Linearkombinationen von Elementen in $\mathfrak{a}$.

Bem. Die Erweiterung eines Primideals ist i. A. nicht mehr prim.

Prop. Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus komm. Ringe. Die Erweiterung und Kontraktion von Idealen (bzgl. ϕ) bilden eine Galois-Verbindung, d. h. für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ und $\mathfrak{b} \subseteq B$ gilt

$$B\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \iff \mathfrak{a} \subseteq A \cap \mathfrak{b}.$$

Äquivalent dazu sind Erw. und Kontraktion monoton und es gelten

$$\mathfrak{a} \subseteq A \cap (B\mathfrak{a}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} \supseteq B(A \cap \mathfrak{b}).$$

Außerdem folgt aus den Eigenschaften einer Galois-Verbindung, dass

$$B\mathfrak{a} = B(A \cap (B\mathfrak{a})) \quad \text{und} \quad A \cap \mathfrak{b} = A \cap (B(A \cap \mathfrak{b})).$$

Damit induzieren Erweiterung und Kontraktion eine bijektive ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den kontrahierten Idealen von A und den erweiterten Idealen von B.

Lem. Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subseteq A$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subseteq B$ gilt

- $B\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{B\mathfrak{a}}$
- $B(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = B\mathfrak{a}_1 + B\mathfrak{a}_2$
- $B(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subseteq B\mathfrak{a}_1 \cap B\mathfrak{a}_2$
- $B(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = (B\mathfrak{a}_1)(B\mathfrak{a}_2)$
- $B(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2) \subseteq (B\mathfrak{a}_1 : B\mathfrak{a}_2)$
- $A \cap \sqrt{\mathfrak{b}} = \sqrt{A \cap \mathfrak{b}}$
- $A \cap (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) \supseteq A \cap \mathfrak{b}_1 + A \cap \mathfrak{b}_2$
- $A \cap (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) = (A \cap \mathfrak{b}_1) \cap (A \cap \mathfrak{b}_2)$
- $A \cap (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) \supseteq (A \cap \mathfrak{b}_1)(A \cap \mathfrak{b}_2)$
- $A \cap (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2) \subseteq (A \cap \mathfrak{b}_1 : A \cap \mathfrak{b}_2)$

Moduln

Def. Sei A ein Ring. Ein **A-(Links-)Modul** ist eine abelsche Gruppe $(M,+,0)$ zusammen mit einer Abb. $\cdot : A \times M \to M$, sodass

- die Multiplikation eine Operation von $(A,\cdot,1)$ auf M ist, d. h. $(ab)x = a(bx)$ und $1 \cdot x = x$ für alle $a, b \in A$ und $x \in M$.
- die Multiplikation distributiv über die Addition ist, d. h. $a(x+y) = ax + ay$ und $(a+b)x = ax + bx$ f. a. $a, b \in A$, $x, y \in M$.

Achtung. Es heißt *der* Modul, nicht *das* Modul!

Bspe.
- Der Ring A ist selbst ein A-Modul.
- Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist (durch Einschränkung der Multiplikation) ein A-Modul.
- Ein K-Modul (K ein Körper) ist dasselbe wie ein K-VR.
- Ein $\mathbb{Z}$-Modul ist dasselbe wie eine abelsche Gruppe.
- Ein $K[x]$-Modul ist dasselbe wie ein K-Vektorraum V zusammen mit einem Endomorphismus $V \to V$.
- Sei G eine endliche Gruppe und
$$A := K[G] := \{ \textstyle\sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid g \in G, a_g \in K \}$$
die **Gruppenalgebra** von G über K. Ein A-Modul ist dasselbe wie ein K-VR V mit einer linearen Darstellung $G \to \mathrm{End}_K(V)$.

Def. Ein A-Modulhomomorphismus ist eine Abbildung $\phi : M \to N$ zwischen A-Moduln M und N, welche ein Gruppenhomomorphismus $(M, +_M, 0_M) \to (N, +_N, 0_N)$ und verträglich mit der Wirkung des multiplikativen Monoids von M und N ist, d. h. $\phi(ax) = a\phi(x)$ für alle $a \in A$ und $x \in M$.

Bem. A-Moduln und A-Modulhomomor. bilden eine Kat. A-**Mod**.

Lem. Ein A-Modulhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus (in dieser Kategorie), wenn er bijektiv ist.

Def. Sei M ein A-Modul. Eine Teilmenge $M' \subseteq M$ heißt **Untermodul** von M, falls
- M' eine Untergruppe von $(M,+,0)$ ist und
- M' abgeschlossen unter Multiplikation mit Elementen aus A ist, d. h. $ax \in M'$ für alle $a \in A$ und $x \in M'$.

Bsp. Sei A kommutativ. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist genau dann ein Ideal von A, wenn $\mathfrak{a}$ ein Untermodul von A ist.

Def. Sei $\phi : M \to N$ eine A-Modulhomomorphismus.
Der **Kern** v. ϕ ist der Untermodul $\ker \phi := \{x \in M \mid \phi(x) = 0\} \subseteq M$.
Das **Bild** von ϕ ist der Untermodul $\operatorname{im} \phi := \phi(M) \subseteq N$.

Prop. Sei M ein A-Modul und $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Dann gibt es ein A-Modul M/M' und einen Ringhomomor. $\pi : M \to M/M'$ mit folgender universeller Eigenschaft:
Für jeden A-Modul N und A-Modulhomomor. $\psi : M \to N$ mit $M' \subseteq \ker \psi$ gibt es genau einen A-Modulhomomor. $\widetilde{\psi} : M/M' \to N$ mit $\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi$.

Konstr. $M/M' := M/\!\sim$ mit $x \sim y \;:\!\iff x - y \in M'$

Def. Der Modul M/M' heißt **Quotientenmodul** von M nach M'.

Prop. Sei M ein A-Modul und $M' \subseteq M$ ein Untermodul.
Folgende Korrespondenz ist bijektiv und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{Untermoduln } M' \subseteq N \subseteq M \} & \leftrightarrow & \{ \text{Untermoduln } \overline{N} \subseteq M/M' \} \\ N & \mapsto & \pi(N) \\ \pi^{-1}(\overline{N}) & \leftarrow\!\shortmid & \overline{N} \end{array}$$

Def. Der **Kokern** eines A-Modulhomomorphismus $\phi : M \to N$ ist
$$\operatorname{coker} \phi := N / \operatorname{im}(\phi).$$

Bem. • ϕ injektiv $\iff \ker \phi = 0$ • ϕ surjektiv $\iff \operatorname{coker} \phi = 0$

Prop (Homomorphiesatz). Sei $\phi : M \to N$ ein A-Modulhomom. Dann ist $\underline{\phi} : M/\ker(\phi) \to \operatorname{im}(\phi)$, $[x] \mapsto \phi(x)$ ein A-Modulisomor.

Def. Sei M ein A-Modul. Die **Summe** einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Untermoduln von M ist
$$\sum_{i \in I} M_i := \{ \textstyle\sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in M_i \}$$
(Dabei ist $\sum_{i \in I} x_i$ endlich, d. h. $x_i = 0$ für alle bis auf endl. viele $i \in I$.)

Prop. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Dann ist auch der Schnitt $\bigcap_{i \in I} M_i$ ein Untermodul von M.

Bem. Untermoduln eines Moduls M bilden mit Schnitt und Summe einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusionsordnung.

Prop (Isomorphiesätze). Sei A ein Ring.
1. Sei M ein A-Modul und $M_1, M_2 \subseteq M$ zwei Untermoduln. Dann existiert ein kanonischer A-Modulisomorphismus
$$(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2).$$
2. Sei L ein A-Modul und $N \subseteq M \subseteq L$ Untermoduln. Dann existiert ein kanonischer A-Modulisomorphismus
$$(L/N)/(M/N) \cong L/M.$$

Def. Sei A kommutativ, M ein A-Modul und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal.
Das **Produkt** von $\mathfrak{a}$ und M ist $\mathfrak{a}M := \{ax \mid a \in \mathfrak{a}, x \in M\}$.

Notation. $aM := (a)M = \{ax \mid x \in M\}$ für $a \in A$

Def. Sei A komm. und N, P Untermoduln eines A-Moduls M. Das Ideal $(N\!:\!P) := \{a \!\in\! A \mid aP \subseteq N\} \!\subseteq\! A$ heißt **Quotient** von N nach P.

Def. Das Ideal $\operatorname{ann} M := (0 : M)$ heißt **Annulator** von M.

Bem. Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{ann} M$, so können wir M auch als $A/\mathfrak{a}$-Modul auffassen.

Def. Der A-Modul M heißt **treu**, falls $\operatorname{ann} M = 0$.

Lem. Sei A kommutativ, $N, P \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt
- $\operatorname{ann}(N + P) = \operatorname{ann}(N) + \operatorname{ann}(P)$
- $(N : P) = \operatorname{ann}((N + P)/N)$

Def. Sei M ein A-Modul, $X \subset M$ eine Teilmenge.
Der von X **erzeugte Untermodul** ist
$$L(X) := \sum_{x \in X} Ax = \sum_{x \in X} \{ax \mid a \in A\} = \{ \textstyle\sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \in A\}.$$

Def. Eine Teilmenge $X \subset M$ heißt **Erzeugendensystem**, falls $L(X) = M$. Ein A-Modul M heißt **endlich erzeugt**, falls ein endliches Erzeugendensystem von M existiert.

Bem. Ein A-Modul M ist ganau dann endlich erzeugt, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und ein surj. A-Modulhomomorphismus $\phi : A^n \to M$ existiert.

Def. Das **direkte Produkt** einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von A-Moduln ist das A-Modul $\prod_{i \in I} M_i := \{(x_i \in M_i)_{i \in I}\}$ mit kmpnntnwsr Verkn.

Bem. Das direkte Produkt ist das kategorienth. Produkt in A-**Mod**.

Def. Die **direkte Summe** einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von A-Moduln ist
$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{(x_i \in M_i)_{i \in I} \mid x_i = 0 \text{ für alle bis auf endl. viele } i \in I\} \subseteq \prod_{i \in I} M_i.$$

Bem. Die dir. Summe ist das kategorienth. Koprodukt in A-**Mod**.
Ist I endlich, so gilt $\bigoplus_{i \in I} M_i \cong \prod_{i \in I} M_i$.

Bsp (Direkte Summenzerlegung)**.** Sei $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ ein endl. direktes Produkt komm. Ringe. Dann gilt $A \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$ als A-Modul mit
$$\mathfrak{a}_i := \{(x_i)_{i=1}^n \mid x_j = 0 \text{ für } j \neq i\}.$$

Def. Ein **A-Modul** M heißt frei, falls eine Menge I existiert, sodass $M \cong \bigoplus_{i \in I}$ als A-Modul.

Bem. Ein endlicher freier Modul ist ein Modul, der zu $A^n := A \oplus \ldots \oplus A$ für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph ist.

Prop. Sei A ein Ring. Ein A-Modul M ist genau dann endl. erzeugt, wenn M der Quotient eines A-Moduls der Form A^n für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

Prop. Sei A ein komm. Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Sei $\phi \in \mathrm{End}_A(M)$ mit $\operatorname{im} \phi \subseteq \mathfrak{a}M$. Dann erfüllt ϕ eine Gleichung der Form $\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$.

Kor. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $x \in A$ mit $x = 1$ modulo $\mathfrak{a}$ und $xM = 0$.

Lem (Nakayama). Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A, welches im Jacobsonschen Radikal $\mathfrak{j}$ von A enthalten ist. Dann folgt aus $\mathfrak{a}M = M$ schon $M = 0$.

Kor. Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, welches im Jacobsonschen Ideal $\mathfrak{j}$ enthalten ist. Dann folgt aus $M = \mathfrak{a}M + N$ schon $M = N$.

Def. Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring. Sei M ein endlich erz. A-Modul. Setze $M(\mathfrak{m}) := M/\mathfrak{m}M$. Wegen $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{ann}(M(\mathfrak{m}))$ ist $M(\mathfrak{m})$ in natürl. Art ein (endlich-dim.) F-Vektorraum, die **spezielle Faser** von M. Das Bild eines Elements $x \in M$ in $M(\mathfrak{m})$ wird **Wert des Schnittes** x in der speziellen Faser genannt.

Prop. Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring, M ein endlich erz. A-Modul. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Schnitte von M, deren Werte in $M(\mathfrak{m})$ eine Basis bilden. Dann erzeugen $x_1, \ldots, x_n$ den A-Modul M.

Exakte Sequenzen

Def. Sei A ein Ring. Eine Sequenz

$$\ldots \to M^{i-1} \xrightarrow{\phi^{i-1}} M^i \xrightarrow{\phi^i} M^{i+1} \to \ldots$$

von A-Moduln und A-Modulhomomorphismen heißt **exakt** bei M^i, falls $\operatorname{im}\phi^{i-1} = \ker\phi^i$. Die Sequenz heißt **exakt**, falls sie exakt bei jedem M^i ist.

Bsp. Sei $\phi : M \to N$ ein A-Modulhomomorphismus. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi \text{ ist injektiv} \quad &\iff \quad 0 \to M \xrightarrow{\phi} N \text{ ist exakt} \\ \phi \text{ ist surjektiv} \quad &\iff \quad M \xrightarrow{\phi} N \to 0 \text{ ist exakt} \end{aligned}$$

Def. Eine **kurze exakte Sequenz** k. e. S. von A-Moduln ist eine exakte Sequenz der Form $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$.

Bem. Jede lange exakte Sequenz $\ldots \to M^{i-1} \to M^i \to M^{i+1} \to \ldots$ zerfällt in kurze exakte Sequenzen: Mit $N^i = \operatorname{im}\phi^{i-1} = \ker\phi^i$ haben wir kurze exakte Sequenzen $0 \to N^i \to M^i \to N^{i+1} \to 0$.
Andersherum kann man solche kurzen exakten Sequenzen zu einer langen exakten Sequenz zusammenkleben.

Lem. Sei A ein komm. Ring. Eine Seq. $E : M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ ist genau dann exakt, wenn für alle A-Moduln N die Sequenz

$$\operatorname{Hom}(E, N) : 0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}(M', N).$$

exakt ist.

Lem. Sei A ein kommutativer Ring.

- Eine Sequenz $E : M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ ist genau dann exakt, wenn für alle A-Moduln N folgende induzierte Sequenz exakt ist:

$$\operatorname{Hom}(E, N) : 0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}(M', N).$$

- Eine Sequenz $F : 0 \to N' \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} N''$ ist genau dann exakt, wenn für alle A-Moduln M folgende induzierte Sequenz exakt ist:

$$\operatorname{Hom}(M, F) : \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\phi_*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\psi_*} \operatorname{Hom}(M, N'') \to 0.$$

Lem (**Schlangenlemma**). Sei A ein Ring. Sei folgendes komm. Diagramm von A-Moduln mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' & \end{tikzcd}$$

Dann gibt es einen Verbindungshomomorphismus $\delta : \ker\phi'' \to \operatorname{coker}\phi'$, mit dem folgende Sequenz exakt ist:

$$\ker\phi' \to \ker\phi \to \ker\phi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\phi' \to \operatorname{coker}\phi \to \operatorname{coker}\phi''.$$

Def. Sei A ein Ring und $\mathfrak{C}$ eine Klasse von A-Moduln.
Eine Abb. $\lambda : \mathfrak{C} \to G$ in eine ab. Gruppe heißt **additive Funktion**, falls für alle kurzen exakten Seq. $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ von Moduln aus $\mathfrak{C}$ gilt, dass $\lambda(C) = \lambda(C') + \lambda(C'')$.

Bsp. Sei K ein Körper und $\mathfrak{C}$ die Klasse der endlich-dim. VR über K. Dann ist $\dim : \mathfrak{C} \to \mathbb{Z}$ eine additive Funktion.

Prop. Sei A ein Ring, $\mathfrak{C}$ eine Klasse von A-Moduln und $\lambda : \mathfrak{C} \to G$ eine additive Funktion. Sei

$$0 \to M^0 \xrightarrow{\phi^0} M^1 \to \ldots \to M^{n-1} \xrightarrow{\phi^{n-1}} M^n \to 0$$

eine exakte Sequenz von Moduln in $\mathfrak{C}$, sodass auch die Kerne der ϕ^i in $\mathfrak{C}$ liegen. Dann gilt $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M^i) = 0$.

Tensorprodukt

Def. Seien M, N und P drei A-Moduln. Eine Abbildung $\beta : M \times N \to P$ heißt **A-bilinear**, falls für alle $x \in M$ die Abbildung $\beta(x, -)$ und für alle $y \in N$ die Abbildung $\beta(-, y)$ ein A-Modulhomomorphismus ist.

Bsp. Die Multiplikation $\cdot : A \times A \to A$ ist A-bilinear.

Prop. Seien M und N zwei A-Moduln. Dann existiert ein A-Modul $M \otimes_A N$ und eine bilineare Abbildung $\gamma : M \times N \to M \otimes_A N$ mit folgender universellen Eigenschaft:
Für jeden A-Modul P und für jede bilineare Abbildung $\beta : M \times N \to P$ gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus $\underline{\beta} : M \otimes_A N \to P$ mit $\beta = \underline{\beta} \circ \gamma$.

Def. $M \otimes_A N$ heißt **Tensorprodukt** von M und N über A.

Konstr.
- Sei C der freie A-Modul A^I mit $I := M \times N$. Elemente von C haben die Form $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i, y_i)$ mit $\lambda_i \in A$, $x_i \in M$, $y_i \in N$.
- Sei $D \subset C$ der von allen Elementen der Form

$$\begin{aligned} &(x + x', y) - (x, y) - (x', y), \qquad &&(ax, y) - a(x, y), \\ &(x, y + y') - (x, y) - (x, y'), \qquad &&(x, ay) - a(x, y) \end{aligned}$$

mit $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ und $a \in A$ erzeugte Untermodul.
- Setze $M \otimes_A N := C/D$.

Notation. $x \otimes y := \gamma(x, y)$

Bem. Jedes Element in $M \otimes_A N$ lässt sich als $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ mit $x_i \in M$, $y_i \in N$ schreiben. In $M \otimes_A N$ gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} &x \otimes (ay) = a(x \otimes y) = (ax) \otimes y \\ &(x + x') \otimes (y + y') = x \otimes y + x' \otimes y + x \otimes y' + x' \otimes y' \end{aligned}$$

Lem. Das Tensorprodukt induziert einen Bifunktor

$$\otimes_A : A\textbf{-Mod} \times A\textbf{-Mod} \to A\textbf{-Mod}.$$

Lem. Sei A ein komm. Ring, M und N zwei A-Moduln, $x_i \in M$ und $y_i \in N$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ in $M \otimes_A N$. Dann gibt es endlich erzeugte Untermoduln $M_0 \subseteq M$ und $N_0 \subseteq N$ mit $x_1, \ldots, x_n \in M_0$, $y_1, \ldots, y_n \in N_0$ und $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ in $M_0 \otimes_A N_0$

Def. Sei A ein komm. Ring, $M_1, \ldots, M_r$ und P A-Moduln.
Eine Abbildung $\mu : M_1 \times \ldots \times M_r \to P$ heißt **A-multilinear**, falls sie linear in jedem Argument ist.

Prop. Sei A ein komm. Ring, $M_1, \ldots, M_r$ A-Moduln. Es existiert ein A-Modul $M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r$ und eine multilineare Abbildung $\gamma : M_1 \times \ldots \times M_r \to M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r$ mit der univ. Eigenschaft
Für jeden A-Modul P und für jede multilineare Abbildung $\mu : M_1 \times \ldots \times M_r \to P$ gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus $\underline{\mu} : M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r \to P$ mit $\mu = \underline{\mu} \circ \gamma$.

Konstr. $M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r := M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A (\ldots \otimes_A M_r))$

Prop. Sei A ein komm. Ring und M, N und P drei A-Moduln. Es existieren kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} &M \otimes_A N \cong N \otimes_A M, \qquad &&(M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A (N \otimes_A P), \\ &(M \oplus N) \otimes_A P \cong (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P), \qquad &&A \otimes_A M \cong M. \end{aligned}$$

Def. Seien A und B zwei komm. Ringe. Ein (A, B)-Bimodul ist eine abelsche Gruppe, welche sowohl ein A- als auch ein B-Modul ist, sodass die Modulstrukturen miteinander verträglich sind, d. h. für alle $a \in A$, $b \in B$ und $x \in N$ gilt $a(bx) = b(ax)$.

Lem. Sei M ein A-Modul, P ein B-Modul und N ein (A, B)-Bimodul. Dann gibt es einen kanon. Isomorphismus abelscher Gruppen

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

Def. Sei $\phi : A \to B$ ein Morphismus kommutativer Ringe.

- Die **Skalareinschränkung** eines B-Moduls N (vermöge ϕ) ist der A-Modul N^A, der als Menge und ab. Gruppe N ist und dessen Skalarmult. durch $a \cdot x := \phi(a) \cdot x$ definiert ist.
- Die **Skalarerweiterung** eines A-Moduls M (vermöge ϕ) ist der B-Modul $M_B := B^A \otimes_A M$ mit der Skalarmultiplikation definiert durch $b(b' \otimes x) := (bb') \otimes x$.

Prop. Sei $\phi : A \to B$ ein Morphismus kommutativer Ringe.

- Sei N ein B-Modul. Ist B^A als A-Modul endlich erzeugt und N als B-Modul endlich erzeugt, so ist N^A als A-Modul endlich erzeugt.
- Sei M ein A-Modul. Ist m als A-Modul endlich erzeugt, so ist M_B als B-Modul endlich erzeugt.

Lem. Sei M ein A-Modul und N ein B-Modul. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $N \otimes_B M_B \cong N^A \otimes_A M$ von B-Moduln.

Prop. Sei A ein komm. Ring und M, N und P drei A-Moduln. Dann ist folgende Abbildung ein A-Modulisomorphismus:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(M \otimes_A N, P) &\to \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, P)), \\ \beta &\mapsto (x \mapsto (y \mapsto \beta(x \otimes y))). \end{aligned}$$

Bem. Mit anderen Worten: Es ex. eine Adj. $- \otimes_A N \dashv \operatorname{Hom}_A(N, -)$

Prop. Sei A ein komm. Ring. Das Tensorprodukt ist rechtsexakt, d. h. ist $E : M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln und N ein weiterer A-Modul, so ist auch die induzierte Sequenz

$$E \otimes_A N : M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0 \quad \text{exakt.}$$

Bem. Dies folgt daraus, dass das Tensorprodukt als Linksadjungierter Kolimiten erhält.

Achtung. Das Tensorprodukt ist i. A. nicht exakt. Insbesondere erhält es keine injektiven Abbildungen.

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Ein A-Modul M heißt flach, falls $(- \otimes_A M)$ exakt ist, d. h. falls für jede (lange) exakte Sequenz E auch $E \otimes_A M$ exakt ist.

Prop. Sei A komm. und M ein A-Modul. Es sind äquivalent:

- Der A-Modul M ist flach.
- Für jede kurze exakte Sequenz $E : 0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ ist die tensorierte Sequenz $E \otimes_A M$ exakt.
- Für jede injektive A-lineare Abbildung $\phi : N \to N'$ ist auch $\phi \otimes \mathrm{id}_M : N \otimes_A M \to N' \otimes_A M$ injektiv.
- Für jede inj. A-lineare Abb. $\phi : N \to N'$ zw. endl. erzeugten A-Moduln ist auch $\phi \otimes \mathrm{id}_M : N \otimes_A M \to N' \otimes_A M$ injektiv.

Prop. Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Ist M ein flacher A-Modul, so ist M_B ein flacher B-Modul.

Algebren

Def. Eine kommutative **A-Algebra** B ist ein kommutativer Ring B zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$, dem *Strukturmorphismus* der Algebra.

Bem. Ist $a \in A$ und $b \in B$, so definieren wir $ab := \phi(a)b$ (wie bei der Skalareinschränkung).

Bspe.
- Sei K ein Körper. Eine nichttriviale K-Algebra ist dasselbe wie ein Ring, der K als Unterring enthält.
- Jeder Ring ist auf genau eine Weise eine $\mathbb{Z}$-Algebra.

Def. Ein *Homomorphismus* von A-Algebren B und C ist ein Ringhomomorphismus $\chi : B \to C$, welcher einen Homomorphismus $\chi : B^A \to C^A$ von A-Moduln induziert.

Bem. Ein Ringhomomorphismus $\chi : B \to C$ ist also genau dann ein A-Algebrenhomomor., wenn $\chi(ab) = a\chi(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bem. A-Algebren und ihre Homomor. bilden eine Kategorie A-**Alg**.

Def. Sei A ein komm. Ring. Eine komm. A-Algebra B heißt eine ...

- ...**endliche A-Algebra**, falls B^A als A-Modul endlich erzeugt ist, d. h. falls endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_n \in B$ existieren, sodass jedes Element aus B als A-Linearkombination der b_i geschrieben werden kann.
- ...**endlich erzeugte A-Algebra** oder A-Algebra **endlichen Typs**, falls endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_n \in B$ existieren, sodass jedes andere Element von B als Polynom in den b_i mit Koeffizienten aus A geschrieben werden kann.

Def. Ein kommutativer Ring heißt **endlich erzeugt**, falls er eine $\mathbb{Z}$-Algebra endlichen Typs ist.

Def. Sei A ein kommutativer Ring. Seien $\phi : A \to B$ und $\psi : A \to C$ die Strukturabbildungen zweier A-Algebren B und C. Dann ist auf $D := B^A \otimes_A C^A$ eine Multiplikation durch

$$\mu : D \times D \to D, \quad (b \otimes c, b' \otimes c') \mapsto (bb') \otimes (cc')$$

definiert. Der Ring D wird mit der Strukturabbildung

$$\rho : A \to D, \quad a \mapsto \phi(a) \otimes 1 = 1 \otimes \psi(A)$$

zu einer A-Algebra. Diese heißt **Tensorprodukt** $B \otimes_A C$ der kommutativen Algebren B und C.

Gerichtete Limiten

Def. Eine **gerichtete Menge** ist eine nichtleere teilweise geordnete Menge $(I, \leq)$, sodass $\forall i, j \in I : \exists k \in I : i \leq k \wedge j \leq k$.

Bem. Eine teilweise geordnete Menge $(I, \leq)$ ist genau dann gerichtet, wenn in I, aufgefasst als Präordnungskategorie, jedes endliche Diagramm einen Kokegel besitzt.

Def. Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge und A ein Ring.
Ein **gerichtetes System** $M_\bullet$ von A-Moduln über I ist ein Funktor

$$M_\bullet : I \to A\text{-}\mathbf{Mod}, \quad i \mapsto M_i, \quad (i \leq j) \mapsto \mu^i_j : M_i \to M_j,$$

wobei wir I als Präordnungskategorie auffassen.

Prop. Sei $M_\bullet$ ein gerichtetes System von A-Moduln. Dann existiert der Kolimes $\varinjlim_{i \in I} M_i$ von $M_\bullet$.

Def. Dieser Kolimes wird **gerichteter Limes** von $M_\bullet$ genannt.

Konstr.
- Sei $C := \bigoplus_{i \in I} M_i$.
- Sei $D \subseteq C$ der Untermodul, der von allen Elementen der Form $x_i - \mu^i_j(x_i)$ mit $i \leq j$ und $x_i \in M_i$ erzeugt wird.
- Dann erfüllt $M := C/D$ die geforderte universelle Eigenschaft.

Bem.
- Jedes $x \in \varinjlim_{i \in I} M_i$ wird durch ein $x_i \in M_i$ repräsentiert.
- Ein Element $x_i \in M_i$ repräsentiert dabei genau dann das Nullelement, falls ein $j \in I$ mit $i \leq j$ existiert, sodass $\mu^i_j(x_i) = 0$.

Lem. Jeder A-Modul ist der gerichtete Limes seiner endlich erzeugten Untermoduln.

Def. Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge. Ein *Homomorphismus* von gerichteten Systemen $M_\bullet$ und $N_\bullet$ von A-Moduln über I ist eine natürliche Transformation $\phi_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$.

Bem. Damit bilden gerichtete Systeme von A-Moduln über I zusammen mit ihren Homomorphismen eine Kategorie $[I, A\text{-}\mathbf{Mod}]$.

Prop. Sei $\phi_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ ein Morphismus zwischen gerichtete Systeme von A-Moduln über I, $M := \varinjlim_{i \in I} M_i$ und $N := \varinjlim_{i \in I} N_i$.
Dann gibt es genau einen Morphismus $\phi := \varinjlim_{i \in I} \phi_i : M \to N$ mit

$$(M_i \to M \xrightarrow{\phi} N) = (M_i \xrightarrow{\phi_i} N_i \to N) \quad \text{für alle } i \in I.$$

Bem. Damit ist der gerichtete Limes ein Funktor

$$\varinjlim_{i \in I} : [I, A\text{-}\mathbf{Mod}] \to A\text{-}\mathbf{Mod}.$$

Def. Eine Sequenz $M_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet$ von gerichteten Systemen von A-Moduln über I heißt **exakt**, falls für alle $i \in I$ die Sequenz $M_i \xrightarrow{\phi_i} N_i \xrightarrow{\psi_i} P_i$ exakt ist.

Prop. Der Gerichteter-Limes-Funktor ist exakt:
Sei $M_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet$ eine exakte Sequenz gerichteter Systeme von A-Moduln über I. Dann ist die induzierte Sequenz

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \xrightarrow{\varinjlim \phi_i} \varinjlim_{i \in I} N_i \xrightarrow{\varinjlim \psi_i} \varinjlim_{i \in I} P_i \qquad \text{auch exakt.}$$

Prop. Sei $M_\bullet$ ein gerichtes System von A-Moduln über I und N ein A-Modul. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\varinjlim_{i \in I} (M_i \otimes_A N) \cong (\varinjlim_{i \in I} M_i) \otimes_A N.$$

Prop. Sei $A_\bullet$ ein gerichtetes System von Ringen und Ringhomomorphismen. Fasse $A_\bullet$ als gerichtetes System von ab. Gruppen (d. h. $\mathbb{Z}$-Moduln) auf. Dann gibt es $A := \varinjlim_{i \in I} A_i$ eine Multiplikation, sodass A ein Ring ist und die Gruppenhomomorphismen $A_i \to A$ sogar Ringhomomorphismen sind.

Prop. Ist $\varinjlim_{i \in I} A_i = 0$, so gibt es ein $i \in I$ mit $A_i = 0$.

Def. Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie kommutativer A-Algebren.
Für eine endliche Teilmenge $J \subset I$ setzen wir $B_J := \bigotimes_{i \in J} B_i$.
Dann ist $B_\bullet$ ein gerichtetes System über $(\mathcal{P}(I)_{\text{fin}}, \subseteq)$. Der Limes $\bigotimes_{i \in I} B_i := \varinjlim_{J \subseteq I} B_J$ heißt **Tensorprodukt** über die Familie $(B_i)_{i \in I}$.

Lokalisierung

Def. Sei A ein Ring. Eine **multiplikativ abgeschl. Teilmenge** von A ist eine Teilmenge $S \subseteq A$ mit $1 \in S$ und $xy \in S$ für alle $x, y \in S$.

Bspe.
- Ein Ring A ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn $A \setminus \{0\}$ multiplikativ abgeschlossen ist.
- Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist $1 + \mathfrak{a}$ mult. abgeschlossen.

Prop. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Dann gibt es einen komm. Ring $S^{-1}A$ und einen Ringhomomor. $\iota : A \to S^{-1}A$ mit folgender universeller Eigenschaft:

Für jeden Ring B und Ringhomomor. $\phi : A \to B$ mit $\phi(S) \subseteq B^\times$ gibt es genau einen Ringhomomor. $\psi : S^{-1}A \to B$ mit $\phi = \psi \circ \iota$.

Konstr.
- Führe auf der Menge der Paare $(a, s) \in A \times S$ eine Äquivalenzrelation ein durch
$$(a, s) \sim (b, t) \quad :\iff \exists\, u \in S : u(at - bs) = 0.$$
- Setze $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$.
- Wir schreiben $\frac{a}{s}$ für die Äquivalenzklasse von (a, s) in $S^{-1}A$.
- Auf $S^{-1}A$ sind Addition und Mult. (wohl!) definiert durch
$$\tfrac{a}{s} + \tfrac{b}{t} := \tfrac{at+bs}{st}, \quad \tfrac{a}{s} \cdot \tfrac{b}{t} := \tfrac{ab}{st}.$$
- Der Ringhomomorphismus ist gegeben durch $\iota(a) := \frac{a}{1}$.

Def. Der kommutative Ring $S^{-1}A$ heißt **Lokalisierung** von A nach S und $\iota : A \to S^{-1}A$ ihr *Strukturhomomorphismus*.

Prop. Sei A komm. und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Dann gilt:
- Für alle $s \in S$ ist $\iota(s)$ eine Einheit in $S^{-1}A$.
- Ist $a \in A$ mit $\iota(a) = 0$, so gibt es ein $s \in S$ mit $as = 0$ in A.
- Jedes Element in $S^{-1}A$ hat die Form $\iota(a)\iota(s)^{-1}$ für ein $a \in A$ und ein $s \in S$.

Bem. Diese drei Eigenschaften charakterisieren die Lokalisierung eindeutig: Ist $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, der die drei Eigenschaften von ι aus der letzten Prop. erfüllt, so gilt $B \cong S^{-1}A$.

Def. Sei A ein komm. Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist $A \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen. Der komm. Ring $A_\mathfrak{p} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$ heißt **Lokalisierung** von A bei $\mathfrak{p}$ oder **Halm** von A an $\mathfrak{p}$.

Bem. $A_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal
$$\mathfrak{m} := A_\mathfrak{p}\mathfrak{p} = \{ \tfrac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{p}, s \in A \setminus \mathfrak{p} \}.$$

Def. Sei A ein Integritätsbereich. Dann ist $S := A \setminus \{0\}$ mult. abgeschlossen. Die Lokal. $S^{-1}A$ heißt **Quotientenkörper** von A.

Bem. Der Strukturhomomorphismus $A \to S^{-1}A$ ist in diesem Fall injektiv, wir können daher A als Unterring von $S^{-1}A$ ansehen. Der Körper $S^{-1}A$ ist der kleinste Körper, der A als Unterring enthält.

Bsp. $\mathbb{Q}$ ist der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$

Bsp. $S^{-1}A = 0 \iff 0 \in S$

Def. Sei A ein komm. Ring, $f \in A$. Dann ist $S := \{f^n \mid n \geq 0\}$ mult. abgeschlossen. Die Lokalisierung $A[f^{-1}] := S^{-1}A$ heißt **Lokalisierung** von A **außerhalb** von f.

Konstr. Sei A ein kommutativer Ring, $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen und M ein A-Modul.
- Wir definieren auf der Menge der Paare $M \times S$ eine Äquivalenzrelation durch
$$(m, s) \sim (m', s') \quad :\iff \exists\, u \in S : u(ms' - m's) = 0.$$
- Wir schreiben $\frac{m}{s}$ für die Äquivalenzklasse von (m, s).
- Vermöge der Addition und der Skalarmultiplikation
$$\tfrac{m}{s} + \tfrac{n}{t} := \tfrac{mt+ns}{st} \qquad \text{bzw.} \qquad \tfrac{a}{s} \cdot \tfrac{m}{t} := \tfrac{am}{st}$$
wird $S^{-1}M := (M \times S)/\sim$ zu einem $S^{-1}A$-Modul.

Def. Der $S^{-1}A$-Modul $S^{-1}M$ heißt **Lokalisierung** von M nach S und $\iota : M \to (S^{-1}M)^A$, $m \mapsto \frac{m}{1}$ sein *Strukturhomomorphismus.*

Def. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Der $A_\mathfrak{p}$-Modul $M_\mathfrak{p} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}M$ heißt *Lokalisierung* von M bei $\mathfrak{p}$ oder *Halm* von M an $\mathfrak{p}$.
Das Bild von $m \in M$ in $M_\mathfrak{p}$ heißt **Keim** von m an $\mathfrak{p}$.

Def. Sei $f \in A$. Dann heißt $M[f^{-1}] := \{f^n \mid n \geq 0\}^{-1}M$ die *Lokalisierung* von M außerhalb von f. Das Bild von $m \in M$ in $M[f^{-1}]$ heißt *Einschränkung* von m außerhalb von f.

Bem. Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Die Lokalisierung von A-Moduln nach S stiftet einen Funktor A-**Mod** $\to (S^{-1}A)$-**Mod**: Für einen Morphismus $\phi : M \to N$ ist
$$S^{-1}\phi : S^{-1}M \to S^{-1}N, \quad \tfrac{m}{s} \mapsto \tfrac{\phi(m)}{s}.$$

Prop. Die Lokalisierung ist exakt: Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Ist $M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M''$ exakt, so ist auch $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}\phi} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}M''$ exakt.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Sei M ein A-Modul und $P, N \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:
- $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P \subseteq S^{-1}M$
- $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$ als $S^{-1}A$-Moduln
- $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P \subseteq S^{-1}M$

Prop. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Sei M ein A-Modul. Dann ist folgende Abb. ein Iso von $S^{-1}A$-Moduln:
$$\phi : S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M, \quad \tfrac{a}{s} \otimes m \mapsto \tfrac{am}{s}$$

Kor. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}A$ eine flache A-Algebra.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Seien M und N zwei A-Moduln. Dann ist folgende Abbildung ein Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln:
$$\phi : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes N), \quad \tfrac{m}{s} \otimes \tfrac{n}{t} \mapsto \tfrac{m \otimes n}{st}$$

Bsp. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \cong (M \otimes_A N)_\mathfrak{p}$.

Lokale Eigenschaften

Sprechweise. Eine Eigenschaft kommutativer Ringe (oder Moduln über einem solchen) heißt **lokal**, falls gilt:
Ein Ring A (bzw. Modul M) besitzt die Eigenschaft genau dann, wenn all seine Halme $A_\mathfrak{p}$ (bzw. $M_\mathfrak{p}$) die Eigenschaft besitzen.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring und M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:
- $M = 0$
- $M_\mathfrak{p} = 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$
- $M_\mathfrak{m} = 0$ für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$

Mit der Exaktheit der Lokalisierung folgt:

Kor. Sei A ein kommutativer Ring und $\phi : M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln.
- Es sind äquivalent:
  - $\phi : M \to N$ ist injektiv.
  - $\phi_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ ist injektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$.
  - $\phi_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ ist injektiv für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.
- Es sind äquivalent:
  - $\phi : M \to N$ ist surjektiv.
  - $\phi_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ ist surjektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$.
  - $\phi_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ ist surjektiv für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring und M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:
- M ist ein flacher A-Modul.
- $M_\mathfrak{p}$ ist ein flacher $A_\mathfrak{p}$-Modul für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$.
- $M_\mathfrak{p}$ ist ein flacher $A_\mathfrak{m}$-Modul für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.

Ideale in Lokalisierungen

Notation. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ schreiben wir $S^{-1}\mathfrak{a} := (S^{-1}A)\mathfrak{a}$.

Bem. Dies ist gerechtfertigt, denn jedes Element in $(S^{-1}A)\mathfrak{a}$ hat die Form $\sum_i \frac{a_i}{s_i}$ und diese Terme können wir auf einen gemeinsamen Nenner bringen.

Prop. Alle Ideale in $S^{-1}A$ sind erweiterte Ideale, d. h. von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$.

Prop. $A \cap (S^{-1}\mathfrak{a}) = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$

Bsp. $S^{-1}\mathfrak{a} = (1) \iff \mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$

Prop. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ist genau dann ein kontrahiertes Ideal bezüglich $A \to S^{-1}A$, wenn kein Element von S ein Nullteiler in $A/\mathfrak{a}$ ist.

Prop. Sei A ein komm. Ring. Die Lokalisierung nach einer mult. abg. Teilmenge $S \subseteq A$ vertauscht mit folgenden Ideal-Operationen: endl. Summen, endl. Produkte, endl. Schnitte und Wurzeln. Das heißt, für zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ gilt:

- $S^{-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} + S^{-1}\mathfrak{b}$
- $S^{-1}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cdot S^{-1}\mathfrak{b}$
- $S^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cap S^{-1}\mathfrak{b}$
- $S^{-1}\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{S^{-1}\mathfrak{a}}$

Kor. $\sqrt{(0)} = S^{-1}\sqrt{(0)} \subseteq S^{-1}A$

Prop. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Folgende Korrespondenz ist bijektiv und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{ Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \} & \leftrightarrow & \{ \text{ Primideale } \mathfrak{q} \subset S^{-1}A \} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{p} = (S^{-1}A)\mathfrak{p} \\ A \cap \mathfrak{q} & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

Kor. Für ein Primideal $\mathfrak{r} \subset A$ liefert dies eine Korrespondenz

$$\{ \text{ Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r} \} \;\leftrightarrow\; \{ \text{ Primideale } \mathfrak{q} \subset A_{\mathfrak{r}} \}$$

Bem. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal und $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ ein weiteres Primideal. Lokalisieren bei $\mathfrak{p}$ schneidet alle Primideale heraus, die nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten sind. Der Wechsel nach $A/\mathfrak{q}$ schneidet alle Primideale heraus außer denen, die $\mathfrak{q}$ enthalten. Somit enthält $A_\mathfrak{p}/(A_\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = (A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}$ nur Primideale zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$.

Def. Sei A ein komm. Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Der Körper $A(\mathfrak{p}) := A_\mathfrak{p}/(A_\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = (A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}$ heißt **Restklassenkörper** von A an $\mathfrak{p}$.

Prop. Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Dann ist ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ genau dann eine Kontraktion eines Primideals in B, falls $A \cap (B\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

Prop. Sei A ein komm. Ring, $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist $S^{-1}\operatorname{ann}(M) = \operatorname{ann}(S^{-1}M)$.

Kor. Sei A ein komm. Ring, $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen, M ein A-Modul und $N, P \subseteq M$ zwei Untermoduln. Ist P endlich erzeugt, so gilt $S^{-1}(N : P) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$.

Primärzerlegung

Def. Ein Ideal $\mathfrak{q} \subset A$ heißt **primär**, falls $1 \notin \mathfrak{q}$ und falls aus $xy \in \mathfrak{q}$ schon $x \in \mathfrak{q}$ oder $\exists\, n \in \mathbb{N} : y^n \in \mathfrak{q}$ folgt.

Lem. $\mathfrak{q} \subsetneq A$ ist primär $\iff$ $\{ \text{ Nullteiler } \} = \sqrt{(0)}$ in $A/\mathfrak{q}$

Bspe.

- Primideale sind primär.
- Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Ist $\mathfrak{b} \subset B$ primär, so auch $A \cap \mathfrak{b} \subset A$.

Lem. Sei $\mathfrak{q}$ primär. Dann ist $\sqrt{\mathfrak{q}}$ das kleinste Primideal mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$.

Def. Sei $\mathfrak{q} \subset A$ ein primäres Ideal und $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$. Dann heißt $\mathfrak{q}$ ein **$\mathfrak{p}$-primäres** Ideal.

Bem.

Primzahlen	$\widehat{=}$	Primideale
Primzahlpotenzen	$\widehat{=}$	primäre Ideale

Bsp. Die primären Ideale in $\mathbb{Z}$ sind die Ideale der Form (0) und (p^n) für eine Primzahl p.

Achtung. Im Allgemeinen ist ein primäres Ideal keine Potenz eines Primideals! Andersherum ist die Potenz eines Primideals auch nicht notwendigerweise primär. Analoges gilt aber für max. Ideale:

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Ist $\mathfrak{m} := \sqrt{\mathfrak{a}}$ ein maximales Ideal, so ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal.

Kor. Ist $\mathfrak{m}$ ein max. Ideal, so sind $\mathfrak{m}^n$ mit $n \geq 1$ alle $\mathfrak{m}$-primär.

Def. Sei A ein komm. Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ als Schnitt $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ endlich vieler primärer Ideale $\mathfrak{q}_i$ heißt **Primärzerlegung** von $\mathfrak{a}$. Sind die $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ paarweise verschieden und gilt $\mathfrak{q}_i \not\supset \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_j$ für alle i, so heißt die Primärzerlegung **minimal**.

Def. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **zerlegbar**, wenn es eine Primärzerlegung besitzt.

Lem. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal und $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ alle $\mathfrak{p}$-primär. Dann ist auch $(\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n)$ wieder $\mathfrak{p}$-primär.

Kor. Man kann eine Primärzerlegung eines Ideals zu einer minimalen Primärzerlegung reduzieren.

Lem. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ prim, $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal und $x \in A$. Dann gilt:

- Ist $x \in \mathfrak{q}$, so gilt $(\mathfrak{q} : x) = (1)$.
- Ist $x \notin \mathfrak{q}$, so ist $(\mathfrak{q} : x)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal.
- Ist $x \notin \mathfrak{p}$, so ist $(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{q}$.

Satz (erster Eindeutigkeitssatz)**.** Sei A ein komm. Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Dann sind die Ideale $\mathfrak{p}_i$ genau die Ideale, die von der Form $\sqrt{(\mathfrak{a} : x)}$ mit $x \in A$ sind.

Bem. Insb. sind die Ideale $\mathfrak{p}_i$ unabh. von der Primärzerlegung.

Def. Die Ideale $\mathfrak{p}_i$ heißen die zu $\mathfrak{a}$ **assozierten Primideale**.

Lem. Sei $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ assoziiertes Primideal. Dann gibt es ein $x \in A$, sodass $(\mathfrak{a} : x)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal ist.

Def. Sei A ein komm. Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Die minimalen Elemente der Menge der zu $\mathfrak{a}$ assoz. Primideale heißen **isolierte Primideale**, alle anderen zu $\mathfrak{a}$ assoz. Primideale **eingebettete Primideale**. Ein primäres Ideal $\mathfrak{q}_i$ heißt isolierte / eingebettete **Primärkomponente** von $\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{p}_i$ isoliert / eingebettet ist.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein zerlegbares Primideal. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ enthält ein assoziiertes (und damit auch ein isoliertes) Primideal zu $\mathfrak{a}$.

Kor. Die isolierten Primideale zu $\mathfrak{a}$ sind genau die min. Elemente von $\{ \text{ Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \} \cong \{ \text{ Primideale in } A/\mathfrak{a} \}$.

Prop. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit min. Primärzerl. $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Dann gilt $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i = \{ x \in A \mid (a : x) \neq \mathfrak{a} \}$.

Prop. Sei A ein komm. Ring, in dem (0) zerlegbar ist. Dann gilt:

- Die Menge D der Nullteiler in A ist die Vereinigung der zu (0) assoziierten Primideale.
- Die Menge der nilpotenten Elemente ist der Schnitt aller (isolierten) Primideale, die zu (0) assoziiert sind.

Prop. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:

- Ist $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, so folgt $S^{-1}\mathfrak{q} = (1)$.
- Ist $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, so ist $S^{-1}\mathfrak{q}$ ein $S^{-1}\mathfrak{p}$-primäres Ideal und es gilt $A \cap S^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$.

Kor. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist folgende Korrespondenz bijektiv und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \mathfrak{q} \subset A \text{ primär mit } \sqrt{\mathfrak{q}} \cap S = \emptyset \} & \leftrightarrow & \{ \mathfrak{r} \subset S^{-1}A \text{ primär } \} \\ \mathfrak{q} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{q} \\ A \cap \mathfrak{r} & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{r} \end{array}$$

Def. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Die **Sättigung** eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq A$ bzgl. S ist das Ideal $S(\mathfrak{a}) := A \cap S^{-1}\mathfrak{a}$.

Prop. Sei A ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Seien die $\mathfrak{q}_i$ so sortiert, dass ein m existiert mit $S \cap \mathfrak{p}_i = \emptyset \iff i \leq m$. Dann sind $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap S^{-1}\mathfrak{q}_m$ und $S(\mathfrak{a}) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ minimale Primärzerlegungen.

Def. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring. Eine Menge $\mathfrak{S}$ von zu $\mathfrak{a}$ assoz. Primidealen heißt **isoliert**, falls gilt:

$$\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p} \in \mathfrak{S} \implies \mathfrak{p}' \in \mathfrak{S} \quad \text{für zu } \mathfrak{a} \text{ assoz. Ideale } \mathfrak{p}, \mathfrak{p}'.$$

Prop. Sei $\mathfrak{S}$ eine isolierte Menge von zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primidealen. Dann ist $S := A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen und für jedes an $\mathfrak{a}$ assoziierte Primideal $\mathfrak{p}'$ gilt: $\mathfrak{p}' \in \mathfrak{S} \iff \mathfrak{p}' \cap S = \emptyset$.

Satz (zweiter Eindeutigkeitssatz). Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Ist $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$ eine isolierte Menge von zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primidealen, so ist $\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_m$ unabhängig von der Zerlegung.

Für $m = 1$ folgt:

Kor. Die isolierten Primärkomp. von $\mathfrak{a}$ sind eindeutig bestimmt.

Ganzheit

Def. Sei B ein komm. Ring und $A \subseteq B$ ein Unterring. Ein Element $x \in B$ heißt **ganz** über A, falls x eine Gleichung der Form $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ mit $a_i \in A$ erfüllt.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine Erw. komm. Ringe. Es sind äquivalent:

- x ist ganz über A.
- $A[x] \subseteq B$ ist als A-Modul endlich erzeugt.
- Es existiert ein Unterring $C \subseteq B$ mit $C \supseteq A[x]$, der als A-Modul endlich erzeugt ist.
- Es ex. ein treuer $A[x]$-Modul M, der als A-Modul endl. erz. ist.

Kor. Sei $A \subseteq B$ eine Erw. komm. Ringe.

- Seien $x_1, \ldots, x_n \in B$ jeweils ganz über A. Dann ist $A[x_1, \ldots, x_n]$ ein endlich erzeugter A-Modul.
- Die Menge $C := \{$ über A ganze Elemente $x \in B\} \subseteq B$ ist ein Unterring von B mit $C \supseteq A$.

Def. Die Menge $C \subseteq B$ heißt **ganzer Abschluss** von A in B.
Ist $C = A$, so heißt A **ganz abgeschlossen** in B.
Ist $C = B$, so heißt B **ganz über** A.

Bsp. $\mathbb{Z}$ ist in $\mathbb{Q}$ ganz abgeschlossen.

Def. Sei $\phi : A \to B$ ein Mor. komm. Ringe. (Dadurch wird B zu einer A-Algebra.) Dann heißt ϕ ganz und B eine **ganze A-Algebra**, falls B ganz über $\phi(A) \subseteq B$ ist.

Lem. Für eine A-Algebra B gilt:

$$B \text{ endlich} \iff B \text{ endlich erz.} \wedge B \text{ ganz} \quad (\text{jeweils als } A\text{-Algebra}).$$

Kor. Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Erweiterungen kommutativer Ringe. Ist B ganz über A und C ganz über B, so ist auch C ganz über A.

Kor. Der ganze Abschluss von A in B ist in B ganz abgeschlossen.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung komm. Ringe. Dann gilt:

- Für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ ist $B/\mathfrak{b}$ ganz über $A/(A \cap \mathfrak{b})$.
- Für jede mult. abg. Teilmenge $S \subseteq A$ ist $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$.

Prop (**Noethernormalisierung**). Sei K ein Körper und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $A := K[x_1, \ldots, x_n]$. Dann gibt es algebraisch unabhängige Elemente $y_1, \ldots, y_n \in A$, sodass A ganz über $B := K[y_1, \ldots, y_n]$ ist, und ein $0 \leq r \leq n$ mit $B \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \ldots, y_n)$.

Beweis. Per Ind. über n. Der Fall $n = 0$ ist trivial. Sei nun $n > 0$.

- Falls $\mathfrak{a} = (0)$, so setze $y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$ und $r := n$.
- Ansonsten wähle ein Polynom $f = \sum_{\alpha \in M} \lambda_\alpha x^\alpha \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$, wobei $M \subset \mathbb{N}^n$ endlich ist mit $\lambda_\alpha \in K^\times$ für alle $\alpha \in M$.
- Wähle $w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{N}$ und $w_n := 1$, sodass die Abbildung
$$w : M \to \mathbb{N}, \quad \alpha \mapsto \alpha \cdot w := \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$$
injektiv ist. (Dies kann man etwa erreichen, indem man die Tupel in M als Zahlen in einem Stellenwertsystem mit genügend großer Basis $b := 1 + \max_{\alpha \in M} \max_{i=1,\ldots,n} \alpha_i$ ansieht und $w_i := b^{n-i}$ setzt.)
- Setze $z_i = x_i - x_n^{w_i}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $A' := K[z_1, \ldots, z_{n-1}]$.
- Dann kann man f im Polynomring $K[z_1, \ldots, z_{n-1}, x_n] = A'[x_n]$,
$$f = \sum_{\alpha \in M} \lambda_\alpha (z_1 + x_n^{w_1})^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z_{n-1} + x_{n-1}^{w_{n-1}})^{\alpha_{n-1}} \cdot x_n^{\alpha_n},$$
auch schreiben als $f = \lambda_\beta \cdot x_n^m + \mu_1 \cdot x_n^{m-1} + \ldots + \mu_m$, wobei $\beta := \arg\max_{\alpha \in M} w(\alpha)$, $m := w(\beta)$ und $\mu_i \in K[z_1, \ldots, z_{n-1}]$.
Somit sind x_n und alle weiteren x_i, also A, ganz über $A'[f]$.
- Setze $y_n := f$. Die IH, angewendet auf $A' := K[z_1, \ldots, z_{n-1}]$, liefert algebraisch unabhängige $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A' \subset A$ mit A' ganz über $B' := K[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ und $0 \leq r \leq n-1$ mit $B' \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \ldots, y_{n-1})$. Dann sind $B = B'[y_n] \subseteq A'[y_n] \subseteq A$ ganze Körpererweiterungen und $B \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \ldots, y_n)$. □

Bem. Insbesondere ist $K[y_1, \ldots, y_r] \to A/\mathfrak{a}$ ein endlicher injektiver Homomorphismus von K-Algebren.

Die Cohen-Seidenbergsche Sätze

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen. Dann ist B genau dann ein Körper, wenn A ein Körper ist.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung komm. Ringe. Dann gilt:

- Ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ ist maximal $\iff$ $A \cap \mathfrak{q} \subset A$ ist maximal.
- Für Primideale $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}' \subseteq B$ gilt $A \cap \mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}' \iff \mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.
- Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ex. ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Satz („**Going up**“). Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erw. komm. Ringe. Sei $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Kette von Primidealen in A und $\mathfrak{q}_1 \subset B$ ein Primideal mit $A \cap \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1$. Dann gibt es eine Kette $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ von Primidealen in B mit $A \cap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung komm. Ringe, C der ganze Abschluss von A in B und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}C$ der ganze Abschluss von $S^{-1}A$ in $S^{-1}C$.

Def. Ein Integritätsbereich heißt **ganz abgeschlossen**, falls er in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist.

Bspe. $\mathbb{Z}$ und $K[x_1, \ldots, x_n]$ sind ganz abgeschlossen

Prop. Sei A ein Integritätsbereich. Dann sind äquivalent:

- A ist ganz abgeschlossen.
- Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ist $A_\mathfrak{p}$ ganz abgeschlossen.
- Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ ist $A_\mathfrak{m}$ ganz abgeschlossen.

Def. Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung komm. Ringe und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal.

- Ein Element $x \in B$ heißt **ganz** über $\mathfrak{a}$, falls x eine Gleichung der Form $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ erfüllt.
- Der **ganze Abschluss** von $\mathfrak{a}$ in B ist $\{x \in B \mid x \text{ ist ganz über } \mathfrak{a}\}$.

Lem. Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und C der ganze Abschluss von A in B. Dann ist $\sqrt{C\mathfrak{a}}$ der ganze Abschluss von $\mathfrak{a}$ in B.

Def. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Ein Element $x \in L$ heißt **algebraisch**, wenn es ganz über K ist.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei A ganz abgeschlossen mit Quotientenkörper K. Sei $x \in B$ ganz über einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Dann ist x algebraisch über K und für sein Minimalpolynom $f \in K[t]$ gilt $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}[t]$.

Satz („**Going down**“). Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erw. von Integritätsbereichen und A ganz abgeschlossen. Sei $\mathfrak{p}_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Kette von Primidealen in A und $\mathfrak{q}_1 \subset B$ ein Primideal mit $A \cap \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1$. Dann gibt es eine Kette $\mathfrak{q}_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{q}_n$ von Primidealen in B mit $A \cap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Prop. Sei A ein ganz abgeschl. Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei $L \supseteq K$ eine endliche, separable Körpererweiterung und B der ganze Abschluss von A in L. Dann ex. eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von L über K, sodass $B \subseteq Av_1 + \ldots + Av_n$.

Bewertungsringe

Def. Ein Integritätsbereich B mit Quotientenkörper K heißt **Bewertungsbereich** für K, falls gilt: $\forall\, x \in K^\times : x \in B \vee x^{-1} \in B$.

Prop. Sei B ein Bewertungsring. Dann gilt:

- B ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} := B \setminus B^\times$.
- B ist ganz abgeschlossen.

Satz. Sei K ein Körper, $L \supset K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $B \subseteq K$ ein Unterring. Sei $\phi : B \to L$ ein nicht in K fortsetzbarer Ringhomomorphismus, d. h. ist $\hat{\phi} : B' \to L$ ein Ringhomomorphismus definiert auf einem Unterring $B' \subseteq K$ mit $B' \supseteq B$ mit $\hat{\phi}|_B = \phi$, so gilt $B = B'$. Dann gilt:

- B ist ein lokaler Ring mit max. Ideal $\mathfrak{m} = \ker \phi$.
- Sei $x \in K^\times$. Dann gilt $\mathfrak{m}[x] \neq B[x]$ oder $\mathfrak{m}[x^{-1}] \neq B[x^{-1}]$.
- B ist ein Bewertungsring für K.

Kor. Sei $A \subseteq K$ ein Unterring eines Körpers. Dann ist der ganze Abschluss $\overline{A}$ von A in K der Schnitt aller Bewertungsringe B von K mit $B \supseteq A$.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine endlich erzeugte Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei $v \in B \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $u \in A \setminus \{0\}$ mit folgender Eigenschaft: Jeder Homomorphismus $\phi : A \to L$ in einen algebraisch abgeschlossenen Körper L mit $\phi(u) \neq 0$ kann zu einem Homomorphismus $\psi : B \to L$ mit $\psi(v) \neq 0$ fortgesetzt werden.

Kor. Ist eine endlich erzeugte K-Algebra B ein Körper, so ist B eine endliche algebraische Erweiterung von K.

Kor (Schwacher Hilbertscher Nullstellensatz). Ist $\mathfrak{m}$ ein max. Ideal einer endl. erz. K-Algebra A, so ist $A/\mathfrak{m}$ eine endl. alg. Erweiterung von K. Insb. ist $A/\mathfrak{m} \cong K$, falls K algebraisch abgeschlossen ist.

Kettenbedingungen

Prop. Sei X eine teilweise geordnete Menge. Dann sind äquivalent:

- Jede aufsteigende Folge $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ in X ist **stationär**, d. h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x_N$ für alle $n \geq N$.
- Jede nicht leere Teilmenge $A \subseteq X$ besitzt ein maximales Element, d. h. $\exists\, a \in A : \forall\, b \in A : a \leq b \implies a = b$.

Def. Sei A ein Ring und M ein A-Modul.

- Ist jede bzgl. der Inklusion aufsteigende Folge $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ von Untermoduln von N stationär, so heißt M **noethersch**.
- Ist jede bzgl. der Inklusion absteigende Folge $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ von Untermoduln von N stationär, so heißt M **artinsch**.

Bspe.

A	M	noethersch?	artinsch?
$\mathbb{Z}$	irgendeine endl. Gruppe	✓	✓
$\mathbb{Z}$	$\{x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid \mathrm{ord}(x) = p^n\}$ mit p prim	✗	✓
$\mathbb{Z}$	$\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ gekürzt} \mid b = p^n\}$	✗	✗

Prop. Sei A ein Ring. Ein A-Modul M ist genau dann noethersch, wenn alle seine Untermodule endlich erzeugt sind.

Prop. Sei A ein Ring und $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Dann gilt:

- M noethersch $\iff$ M', M'' noethersch
- M artinsch $\iff$ M', M'' artinsch

Kor. Die endliche direkte Summe von noetherschen/artinschen A-Moduln ist noethersch/artinsch.

Def. Ein Ring A heißt **noethersch**/**artinsch**, falls er als Modul über sich selbst noethersch/artinsch ist.

Bem. Ein Ring ist genau dann noethersch/artinsch, wenn die Menge seiner Ideale die aufsteigende/absteigende Kettenbedingung erfüllt. Ein Ring ist genau dann noethersch, wenn all seine Ideale endlich erzeugt sind.

Bspe.

A	noethersch?	artinsch?
$\mathbb{Z}$	✓	✗
ein endl. Ring	✓	✓
ein bel. HIR	✓	?
$K[x]$	✓	✗
$K[x_1, x_2, \ldots]$	✗	✗

Achtung. Unterringe von noetherschen Ringen sind nicht unbedingt noethersch.

Prop. Ist A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul, so ist M noethersch.

Def. Sei A ein Ring und M ein A-Modul.

- Eine **Untermodulkette** von M der Länge n ist eine Kette von Untermoduln der Form $M_\bullet : M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots \supsetneq M_n = 0$.
- M heißt **einfach**, falls M nur 0 und M als Untermoduln besitzt.
- Eine Untermodulkette heißt **Kompositionsreihe**, wenn die Quotienten M_i/M_{i+1} jeweils einfach sind.
- Die **Länge** $\ell(M) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ von M ist das Infimum aller Längen von Kompositionsreihen von M.

Prop. Sei A ein Ring und M ein A-Modul der Länge $n := \ell(M) < \infty$. Dann gilt:

- Für jeden echten Untermodul $N \subsetneq M$ gilt $\ell(N) < \ell(M)$.
- Die Länge jeder Untermodulkette in M ist $\leq \ell(M)$.
- Jede Kompositionsreihe von M hat die Länge n.
- Jede Untermodulkette von M lässt sich zu einer Kompositionsreihe erweitern.

Prop. Sei A ein kommutativer Ring. Ein A-Modul M besitzt genau dann eine Kompositionsreihe, wenn M noethersch und artinsch ist.

Def. Ein A-Modul M heißt **von endlicher Länge**, wenn M noethersch und artinsch ist.

Prop. Sei A ein Ring. Die Länge ist eine additive Funktion auf $\mathfrak{C} := \{\, A\text{-Moduln endlicher Länge} \,\}$.

Satz (Jordan-Hölder)**.** Sind $M_\bullet$ und $M'_\bullet$ zwei Kompositionsreihen eines A-Moduls M endlicher Länge n, so existiert eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $M_{i-1}/M_i \cong M'_{\sigma(i-1)}/M'_{\sigma(i)}$.

Prop. Für einen VR V über einem Körper K sind äquivalent:

- V ist endlich-dimensional.
- V ist von endlicher Länge.
- V ist noethersch.
- V ist artinsch.

Kor. Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ maximale Ideale in einem kommutativen Ring mit $(0) = \mathfrak{m}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}_n$. Dann ist A genau dann noethersch, wenn A artinsch ist.

Noethersche Ringe

Prop. Der Quotient $A/\mathfrak{a}$ eines noetherschen Rings A ist noethersch.

Kor. Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomo. Ist A noethersch, so auch $\phi(A)$.

Prop. Sei $A \subseteq B$ eine endliche Erweiterung kommutativer Ringe. Ist A noethersch, so auch B.

Bsp. $\mathbb{Z}[i]$ ist noethersch als endl. Erw. von $\mathbb{Z}$

Prop. Sei A ein kommutativer noetherscher Ring und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}A$ noethersch.

Kor. Die Halme $A_\mathfrak{p}$ eines komm. noeth. Rings A sind noethersch.

Satz (**Hilbertscher Basissatz**)**.** Ist A ein noetherscher kommutativer Ring, so ist auch der Polynomring $A[x]$ noethersch.

Kor. Ist A ein noetherscher kommutativer Ring, so ist auch der Polynomring $A[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch. Allgemeiner ist jede endlich erzeugte A-Algebra noethersch.

Prop. Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Erweiterungen von kommutativen Ringen. Sei A noethersch. Sei C endlich erzeugt als A-Algebra und endlich als B-Algebra. Dann ist B endlich erzeugt als A-Algebra.

Def. Sei A ein komm. Ring. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **irreduzibel**, falls für je zwei Ideale $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subseteq A$ gilt: Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$, so gilt $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$.

Prop. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Dann gilt:

- Jedes Ideal von A ist Schnitt von endlich vielen irred. Idealen.
- Jedes irreduzible Ideal von A ist ein Primärideal.
- Folglich ist in A jedes Ideal zerlegbar.
- Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ enthält eine Potenz $(\sqrt{\mathfrak{a}})^n$ seines Wurzelideals.
- Insbesondere ist $\sqrt{(0)} \subseteq A$ nilpotent.
- Für ein max. Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ und ein Ideal $\mathfrak{q} \subseteq A$ sind äquivalent:
  – $\mathfrak{q}$ ist ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal. – $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ – $\exists\, n \in \mathbb{N} : \mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$
- Die zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ assoziierten Ideale sind genau die Primideale von A der Form $(\mathfrak{a} : x)$ mit $x \in A$.

Artinsche Ringe

Prop. Sei A ein artinscher kommutativer Ring. Dann gilt:

- Jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ist ein maximales Ideal.
- Das Nilradikal ist gleich dem Jacobsonschen Ideal.
- A besitzt nur endlich viele maximale Ideale (d. h. A ist halblokal).
- Das Nilradikal von A ist nilpotent.

Def. Sei A ein komm. Ring. Eine **Primidealkette** der Länge n in A ist eine Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ von Primidealen in A.

Def. Die **Dimension** $\dim A \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}$ eines komm. Ringes A ist das Supremum über die Längen aller Primidealketten in A.

Bspe. • $\dim A \geq 0 \iff A \neq 0$ • $\dim K = 0$ • $\dim \mathbb{Z} = 1$

Satz. Für einen kommutativen Ring $A \neq 0$ gilt:

$$A \text{ ist artinsch} \iff A \text{ ist noethersch und } \dim A = 0$$

Bem. Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein artinscher lokaler Ring, so ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal von A und damit $\sqrt{(0)} = \mathfrak{m}$. Insbesondere ist $\mathfrak{m}$ nilpotent und jedes Element von A entweder nilpotent oder eine Einheit.

Prop. Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring.
Dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{m}^n \supsetneq m^{n+1}$.
- Es ist $\mathfrak{m}^n = (0)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und A ist artinsch.

Satz (**Struktursatz** für artinsche kommutative Ringe)**.**
Jeder artinsche kommutative Ring ist eindeutig (bis auf Isomorphie der Faktoren) ein direktes Produkt artinscher lokaler Ringe.

Def. Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring. Dann heißt der F-Vektorraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ **Zariskischer Kotangentialraum** von A.

Bem. $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist die spezielle Faser von $\mathfrak{m}$ als A-Modul. Ist $\mathfrak{m}$ als A-Modul endlich erzeugt, so auch $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ als F-Vektorraum.

Prop. Für einen artinschen lokalen Ring $(A, \mathfrak{m}, F)$ sind äquivalent:

- Jedes Ideal in A ist ein Hauptideal (also A ein HIB).
- Das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.
- Es gilt $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$.

Bspe. Artinsche lokale Ringe sind:
- $\mathbb{Z}/(p^n)$, wobei p prim ist • $K[x]/(f^n)$, wobei f irreduzibel ist

Diskrete Bewertungsringe

Prop. Sei A ein eindimensionaler noetherscher Integritätsbereich. Dann kann jedes Ideal $0 \subsetneq \mathfrak{a} \subseteq A$ eindeutig als Produkt von primären Idealen mit paarweise verschiedenen Wurzelidealen geschrieben werden.

Def. Eine **diskrete Bewertung** auf einem Körper K ist eine surjektive Abbildung $\nu : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cap \{\infty\}$, für die gilt:

$$\nu^{-1}(\infty) = \{0\}, \quad \nu(xy) = \nu(x) + \nu(y), \quad \nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y)).$$

Lem. • $\nu(1) = 0$ • $\nu(x^{-1}) = -\nu(x)$

Def. Der **Bewertungsring** von K (zu ν) ist der Unterring

$$\{x \in K \,|\, \nu(x) \geq 0\} \subset K.$$

Lem. Der Bewertungsring von K zu ν ist in der Tat ein solcher.

Def. Ein Integritätsbereich A heißt **diskreter Bewertungsring**, falls A der Bewertungsring einer diskreten Bewertung auf dem Quotientenkörper K von A ist.

Prop. Sei A ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung $\nu : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Dann gilt:
- $x \in A^\times \iff \nu(x) = 0$ • $\nu(x) = \nu(y) \iff (x) = (y)$
- A ist ein lokaler Ring mit max. Ideal $\mathfrak{m} := \{x \in A \,|\, \nu(x) > 0\}$.
- Jedes Ideal in A hat die Form $\mathfrak{m}_k = \nu^{-1}([k, \infty])$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- A ist noethersch. • A ist eindimensional.
- Jedes nichtverschwindende Ideal in A ist eine Potenz von $\mathfrak{m}$.

Bspe.
- Sei p eine Primzahl. Jedes $y \in \mathbb{Q}^\times$ kann man als $y = p^n \frac{s}{t}$ mit $p \nmid s$, $p \nmid t$ schreiben. Dabei ist $n = n_y \in \mathbb{Z}$ eindeutig festgelegt. Setze $\nu(x) := n_y$ und $\nu(0) := \infty$. Dann ist ν eine Bewertung auf $\mathbb{Q}$ mit Bewertungsring $\mathbb{Z}_{(p)}$.
- Sei F ein Körper und $F(x) := \{\frac{h}{g} \,|\, h, g \in F[x], g \neq 0\}$ der Körper der rationalen Fktn über F in x. Sei $f \in F[x]$ irreduzibel. Jedes $y \in F(x)^\times$ kann man als $y = f^n \frac{h}{g}$ mit $p \nmid h$, $p \nmid g$ schreiben. Dabei ist $n = n_y \in \mathbb{Z}$ eind. festgelegt. Setze $\nu(x) := n_y$ und $\nu(0) := \infty$. Dann ist ν eine Bewertung auf $F(x)$ mit Bewertungsring $F[x]_{(f)}$.

Prop. Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein eindimensionaler noetherscher lokaler Integritätsbereich. Dann sind äquivalent:
- A ist ein diskreter Bewertungsring. • $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.
- A ist ganz abgeschlossen. • $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$
- Jedes (nicht verschwindende) Ideal von A ist eine Potenz von $\mathfrak{m}$.
- $\exists x \in A : \forall \text{Ideal } \mathfrak{a} \subseteq A : \exists n \in \mathbb{N} : \mathfrak{a} = (x^n)$

Dedekindsche Bereiche

Lem/Def. Ein eindim. noetherscher Integritätsbereich A heißt **Dedekindscher Bereich**, wenn er die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- A ist ganz abgeschlossen.
- Jedes Primärideal in A ist Potenz eines Primideals.
- Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ ist $A_\mathfrak{p}$ ein diskr. Bewertungsbereich.

Kor. In einem Dedekindschen Bereich lässt sich jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ als eindeutiges Produkt von Primidealen schreiben.

Bsp. Jeder HIB ist ein Dedekindscher Bereich.

Satz. Sei K ein Zahlkörper, also eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Dann ist der Ring der ganzen Zahlen in K, d. h. der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$, ein Dedekindscher Bereich.

Gebrochene und invertierbare Ideale

Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K.

Def. Ein A-Untermodul $\mathfrak{r} \subseteq K$ heißt **gebrochenes Ideal** von A, falls ein $x \in A$ mit $x\mathfrak{r} \subseteq A$ existiert.

Bspe. • Jedes gewöhnliche Ideal ist auch ein gebrochenes Ideal.
• Jedes $u = \frac{s}{t} \in K$ erz. ein gebr. Ideal $(u) \coloneqq Au \subseteq K$, da $t(u) \subset A$.

Sprechweise. Zur Unterscheidung von gebrochenen Idealen werden gewöhnliche Ideale auch **ganze Ideale** genannt.

Prop. • Ist $\mathfrak{r}$ ein endlich erzeugtes Untermodul von K, so ist $\mathfrak{r}$ ein gebrochenes Ideal.
• Ist A noethersch, so ist jedes gebrochene Ideal $\mathfrak{r}$ als A-Modul endlich erzeugt.

Def. Ein A-Untermodul $\mathfrak{r} \subseteq K$ heißt **invertierbares Ideal**, falls ein A-Untermodul $\mathfrak{s} \subseteq K$ mit $\mathfrak{r}\mathfrak{s} = A$ existiert.

Notation. Für ein A-Untermodul $\mathfrak{r} \subseteq K$ schreiben wir $(1 : \mathfrak{r}) \coloneqq \{x \in K \mid x\mathfrak{r} \subseteq A\}$. Dies ist ein A-Untermodul von K.

Prop. Ist $\mathfrak{r} \subseteq K$ ein invertierbares Ideal, so ist $\mathfrak{s} = (1 : \mathfrak{r})$ das einzige A-Untermodul $\mathfrak{s} \subseteq K$ mit $\mathfrak{r}\mathfrak{s} = A$.

Notation. In diesem Fall: $\mathfrak{r}^{-1} \coloneqq (1 : \mathfrak{r})$

Prop. Jedes invertierbare Ideal von A ist endlich erzeugt als A-Modul und damit insbesondere ein gebrochenes Ideal.

Bsp. Für $u \in K^\times$ ist $(u) \subseteq K$ invertierbar mit $(u)^{-1} = (u^{-1})$.

Bem. Bezüglich der Multiplikation von Idealen bilden die invertierbaren Ideale von A eine Gruppe mit $e = (1)$.

Prop. Für ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{r}$ von A sind äquivalent:
- $\mathfrak{r}$ ist invertierbar
- $\mathfrak{r}$ ist endlich erzeugt und für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$ ist $\mathfrak{r}_\mathfrak{p}$ ein invertierbares Ideal von $A_\mathfrak{p}$.
- $\mathfrak{r}$ ist endlich erzeugt und für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset A$ ist $\mathfrak{r}_\mathfrak{m}$ ein invertierbares Ideal von $A_\mathfrak{m}$.

Prop. Ein lokaler Integritätsbereich, der kein Körper ist, ist genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn jedes nicht verschwindende gebrochene Ideal invertierbar ist.

Satz. Ein Integritätsbereich, der kein Körper ist, ist genau dann ein Dedekindscher Bereich, wenn jedes nicht verschwindende gebrochene Ideal invertierbar ist.

Kor. In einem Dedekindschen Bereich A bilden die nicht verschwindenden gebrochenen Ideale eine abelsche Gruppe bzgl. der Multiplikation, die **Idealgruppe** $I(A)$ von A.

Bem. Der Satz über die eindeutige Faktorisierbarkeit eines Ideals in Primideale in einem Dedekindschen Bereich A impliziert, dass $I(A)$ von den Primidealen von A frei abelsch erzeugt wird.

Def. Sei A ein Dedekindscher Bereich mit Quotientenkörper K.

Bem. Es gibt einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi : K^\times \to I(A), \quad x \mapsto (x),$$

dessen Bild die gebrochenen Hauptideale sind. Dessen Kern ist

$$\ker \phi = \{u \in K^\times \mid (u) = 1\} = A^\times.$$

Def. $C(A) \coloneqq I(A)/\operatorname{im}(\phi)$ heißt **Idealklassengruppe** von A.

Bem. Es gibt eine exakte Sequenz

$$1 \to A^\times = \ker(\phi) \to K^\times \xrightarrow{\phi} I(A) \to C(A) \to 1$$

von (multiplikativ notierten) abelschen Gruppen.

Bem. Sei K ein Zahlkörper und A sein Ring ganzer Zahlen. Man kann dann zeigen:

- $C(A)$ ist endlich. Die Gruppenordnung $\operatorname{ord} C(A)$ heißt *Klassenzahl* von K.
- $\operatorname{ord} C(A) = 1 \iff$ jedes invertierbare Ideal ist ein gebrochenes Hauptideal $\iff$ A ist ein faktorieller Ring.
- $A^\times$ ist eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Die Elemente endlicher Ordnung sind genau die Einheitswurzeln $\mu(K)$ von K. Der Rang der freien abelschen Gruppe $A^\times/\mu(K)$ ist $r_1 + r_2 - 1$, wobei r_1 die Anzahl der reellen und $2r_2$ die Anzahl der echt komplexen Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ ist.

Bspe. • $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ besitzt genau zwei echt komplexe Einbettungen, keine reellen. Für dessen Ring der ganzen Zahlen, $A = \mathbb{Z}[i]$, gilt damit $\operatorname{ord}(A^\times/\mu(K)) = 0$, also $A^\times = \mu(K) = \{\pm 1, \pm i\}$.
• $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ besitzt genau zwei reelle Einbettungen, keine echt komplexen. Für $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ gilt damit $\operatorname{ord}(A^\times/\mu(K)) = 1$. Es ist $\mu(K) = \{\pm 1\}$ und $A^\times = \{\pm(1+\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Vervollständigungen

Def. Eine **topologische Gruppe** ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie der topol. Räume, d. h. eine Gruppe G, deren zugrundeliegende Menge eine Topologie trägt, sodass die Gruppenoperationen $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$ und $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ stetig sind.

Bem. • Jede gewöhnliche Gruppe ist eine topologische mit der diskreten Topologie.
- Sei G eine topologische Gruppe und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Dann ist G/H mit der Quotiententopologie eine topol. Gruppe.
- Für jedes $a \in G$ ist die Verschiebung $\tau_a : G \to G$, $x \mapsto ax$ ein Homöomorphismus und induziert daher eine Bijektion der Umgebungen um $e \in G$ und um a. Die Umgebungen um e definieren damit die Topologie von G.

Lem. Sei G eine topologische Gruppe und H der Schnitt aller (offenen) Umgebungen U von 0. Dann gilt:
- $H = \overline{\{e\}}$
- $H \subseteq G$ ist ein Normalteiler in G.
- G/H ist hausdorffsch.
- G ist hausdorfsch $\iff$ $H = \{e\}$

Voraussetzung. Sei G eine topologische Gruppe, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, d. h. es gibt eine Folge $U_0 \supset U_1 \supset \ldots$ von Umgebungen von $e \in G$, sodass für jede Umgebung U von e ein $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \subseteq U$ existiert.

Def. Eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in G heißt **Cauchy-Folge**, falls für alle Umgebungen U von e gilt: $\exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n, m \geq N : g_n g_m^{-1} \in U$.
Zwei Cauchy-Folgen (g_n) und (h_n) heißen äquivalent, falls

$$(g_n) \sim (h_n) \quad :\iff \quad g_n h_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Konstr. Sei $\hat{G} \coloneqq \{$ Cauchy-Folgen auf G $\}/\sim$ ist eine Gruppe mit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq (h_n \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}^{-1} \coloneqq (g_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Für eine offene Umgebung $U \ni e \in G$ sei

$$\hat{U} \coloneqq \{\text{Cauchy-Folgen } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : g_n \in U\}.$$

TODO: Topologie auf $\hat{G}$ konstruieren!

Def. $\hat{G}$ heißt **Vervollständigung** von G.

Bem. Die Abbildung $\phi : G \to \hat{G}$, $g \mapsto (g)_{n\in\mathbb{N}}$ ist stetig und $\operatorname{im}(\phi)$ liegt dicht in $\hat{G}$.

Lem. $\ker(\phi) = \overline{\{e\}}$

Kor. ϕ injektiv $\iff$ G ist hausdorffsch

Bem. Sei $\rho : G \to H$ ein stetiger Homomor. topol. Gruppen. Dann ist

$$\hat{\rho} : \hat{G} \to \hat{H}, \quad [(g_n)_{n\in\mathbb{N}}] \mapsto [(\rho(g_n))_{n\in\mathbb{N}}]$$

ein wohldefinierter, stetiger Homomor. zw. den Vervollständigungen. Auf diese Weise wird Vervollständigung zu einem Funktor

$$\hat{\ } : \mathbf{TopGrp} \to \mathbf{TopGrp}_{\text{compl}}.$$

Inverse Limiten

Def. Eine Seqenz von Gruppen und Gruppenhomomor. der Form

$$A_\bullet : \ldots \xrightarrow{\theta_3} A_2 \xrightarrow{\theta_2} A_1 \xrightarrow{\theta_1} A_0$$

heißt ein **inverses System** von Gruppen.

Bem. Ein inverses System ist ein Funktor $\mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Grp}$. Ein Morphismus inverser Systeme ist eine natürliche Transformation.

Def. Sei $A_\bullet$ ein inverses System von Gruppen. Eine Folge $(\xi_n \in A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **kohärent** in $A_\bullet$, falls $\theta_n(\xi_n) = \xi_{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Prop. Sei $A_\bullet$ ein inverses System von Gruppen. Dann existiert der Limes $\varprojlim\limits_n A_n$ von $A_\bullet$.

Def. Dieser Limes heißt **inverser Limes** von $A_\bullet$.

Konstr. Sei C die Menge der kohärenten Folgen in $A_\bullet$. Dann ist C eine Gruppe vermöge

$$(\xi_n \in A_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\eta_n \in A_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\xi_n \cdot \eta_n \in A_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

und C erfüllt die geforderte universelle Eigenschaft.

Bem. Ist $A_\bullet$ ein System topologischer Gruppen, d. h. ein Funktor $\mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{TopGrp}$, so kann man genauso den Limes $\varprojlim_n A_n$ in **TopGrp** genauso konstruieren. Die Topologie ist dabei die Teilraumtopologie von $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Bem. Der inverse Limes $\varprojlim_n$ ist ein Funktor

$$[\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Grp}] \to \mathbf{Grp} \quad \text{bzw.} \quad [\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, \mathbf{TopGrp}] \to \mathbf{TopGrp}.$$

Achtung. Wir fassen ein inverses System $A_\bullet$ von Gruppen als System von topol. Gruppen auf, indem wir jedem A_n die diskrete Topol. geben. I. A. trägt dann $\varprojlim\limits_n A_n$ nicht die diskrete Topologie!

Prop. Sei G eine topol. Gruppe. Sei $G_0 \supset G_1 \supset \ldots$ eine Umgebungsbasis von e von Normalteilern. Dann sind die G_n sowohl offen als auch abgeschlossen in G.

Bem. Sei G eine Gruppe und $G \supset G_0 \supset G_1 \supset \ldots$ eine Folge von Normalteilern. Dann gibt es genau eine Topol. auf G, sodass G eine topol. Gruppe wird und die G_i's eine Umgebungsbasis von e bilden.

Def. Ein inverses System $A_\bullet : \ldots \to A_1 \to A_0$ von Gruppen heißt **surjektives System**, falls die Gruppenhomomor. $A_n \to A_{n-1}$ alle surjektiv sind.

Def. Eine Sequenz $\ldots \to A^{i-1}_\bullet \xrightarrow{\phi^{i-1}_\bullet} A^i_\bullet \xrightarrow{\phi^i_\bullet} A^{i+1}_\bullet \to \ldots$ inverser Systeme abelscher Gruppen $A^i_\bullet$ heißt exakt bei $A^i_\bullet$, falls

$$\ldots \to A^{i-1}_n \xrightarrow{\phi^{i-1}_n} A^i_n \xrightarrow{\phi^i_n} A^{i+1}_n \to \ldots$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ bei A^i_n exakt ist.

Prop. Sei $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$ eine exakte Sequenz inverser Systeme abelscher Gruppen.

- Der Inverse-Limes-Funktor ist linksexakt, d. h. dann ist auch
  $$0 \to \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n \to \varprojlim_n C_n \qquad \text{exakt.}$$
- Ist $A_\bullet : \ldots \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0$ dabei ein surjektives System, so ist
  $$0 \to \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n \to \varprojlim_n C_n \to 0 \qquad \text{exakt.}$$

Bem. Genauer ist die Sequenz

$$0 \to \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n \to \varprojlim_n C_n \to \varprojlim_n{}^1 A_n$$

exakt, wobei $\varprojlim\limits_n{}^1 A_n := \operatorname{coker} d^A$ mit $A := \prod\limits_n A_n$ und

$$d_A : A \to A, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_n - \alpha_{n+1}(a_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Der Beweis benutzt das Schlangenlemma und $\ker d_A = \varprojlim_n A_n$.

Bem. Die Linksexaktheit von $\varprojlim_n$ folgt daher, dass der Inverse-Limes-Funktor rechtsadjungiert zu $\Delta : \mathbf{Grp} \to [\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Grp}]$ ist.

Vollständige topologische Gruppen

Konstr. Sei G eine topologische Gruppe mit einer Umgebungsbasis $G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ von e aus Normalteilern.

- Setze $A_n := G/G_n$. Dann ist $A_\bullet$ mit den kanon. Abbildungen $A_n = G/G_n \twoheadrightarrow G/G_{n-1} = A_{n-1}$ ein inv. System topol. Gruppen.
- Für jede Cauchyfolge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in G und $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N_k \in \mathbb{N}$, sodass $\xi_N = \xi_{N+1} = \xi_{N+2} = \ldots (\operatorname{mod} G_k)$.
- Die Abbildung
  $$\hat{G} \to \varprojlim_n A_n, \quad [(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}] \mapsto (\xi_{N_k} \in A_k)_{k\in\mathbb{N}}$$
  ist dann ein wohldefinierter Homomorphismus topol. Gruppen.

Prop. $\hat{G} \to \varprojlim\limits_n A_n$ ist ein Isomorphismus topol. Gruppen

Satz. Sei $0 \to G' \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G'' \to 0$ eine exakte Sequenz abelscher Gruppen und eine Topologie auf G definiert durch eine Folge $G_0 \supset G_1 \supset \ldots$ von Untergruppen. Seien die Topologie auf G' und G'' durch $\iota^{-1}G_0 \supset \iota^{-1}G_1 \supset \ldots$ bzw. $\pi(G_0) \supset \pi(G_1) \supset \ldots$ erzeugt. Dann ist die induzierte Sequenz $0 \to \hat{G}' \to \hat{G} \to \hat{G}'' \to 0$ exakt.

Kor. Sei G eine abelsche topologische Gruppe und $G_0 \supset G_1 \supset \ldots$ eine Umgebungsbasis von 0 aus Untergruppen. Für jedes n induziert dann $\phi : G \to \hat{G}$ einen Isomorphismus $G/\hat{G}_n \to \hat{G}/\hat{G}_n$.

Def. Eine topologische Gruppe G heißt **vollständig**, falls $\phi : G \to \hat{G}$ ein Isomorphismus ist.

Prop. Sei G eine abelsche topol. Gruppe und $G_0 \supset G_1 \supset \ldots$ eine Umgebungsbasis von 0 aus Untergruppen. Dann ist $\hat{G}$ vollständig.

Topologische Ringe und Moduln

Def. Ein **topologischer Ring** ist ein Ring $(A, +, \cdot, 0, 1)$, sodass $(A, +, 0)$ eine topologische Gruppe ist und die Multiplikation $A \times A \to A,\ (x, y) \mapsto xy$ stetig ist.

Bem. Sei A ein topol. Ring. Dann ist $\hat{A}$ wieder ein Ring und $\phi : A \to \hat{A}$ ein Ringhomomorphismus.

Konstr. Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Trage die additive Gruppe A die durch die Umgebungsbasen $(1) \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}^2 \supset \ldots$ von 0 definierte Topologie, die **$\mathfrak{a}$-adische Topologie**. Die Multiplikation ist bzgl. dieser Topologie stetig, also A ein topologischer Ring. Dieser ist genau dann hausdorffsch, wenn $\bigcap\limits_n \mathfrak{a}^n = (0)$.

Def. Die Vervollständigung $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$ von A bzgl. der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie heißt **$\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung** von A.

Def. Sei A ein topol. Ring. Ein **topol. A-Modul** ist ein A-Modul M, dessen additive Gruppe eine topologische Gruppe ist, sodass die Multiplikation $A \times M \to M,\ (a, x) \mapsto ax$ stetig ist.

Bem. Die Vervollständigung $\hat{M}$ eines A-Moduls M ist in kanon. Art ein $\hat{A}$-Modul. Außerdem ist $M \to \hat{M}$ eine stetiger Homomorphismus $M \to \hat{M}^A$ von A-Moduln.

Konstr. Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Trage M die durch die Folge $M \supset \mathfrak{a}M \supset \mathfrak{a}^2M \supset \ldots$ von Untermoduln def. Topologie, die $\mathfrak{a}$-*adische Topologie*. Damit wird M zu einem topologischen A-Modul, wenn A auch die $\mathfrak{a}$-adische Topologie trägt.

Def. Die Vervollständigung $\hat{M}_{\mathfrak{a}}$ von M bzgl. der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie ist ein $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$-Modul und heißt **$\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung** von M.

Bem. Jeder Homomorphismus $\phi : M \to N$ von A-Moduln ist stetig bzgl. der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie auf beiden Moduln und induziert damit einen Homomorphismus $\hat{\phi}_{\mathfrak{a}} : \hat{M}_{\mathfrak{a}} \to \hat{N}_{\mathfrak{a}}$ von $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$-Moduln. Damit ist $\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung ein Funktor

$$\widehat{(-)}_{\mathfrak{a}} : A\text{-}\mathbf{Mod} \to \hat{A}_{\mathfrak{a}}\text{-}\mathbf{TopMod}.$$

Bspe.
- Sei K ein Körper. Dann ist $\widehat{K[x]}_{(x)} = K[\![x]\!]$.
- Sei p eine Primzahl. Dann heißt $\mathbb{Z}_p := \hat{\mathbb{Z}}_{(p)}$ **Ring der p-adischen Zahlen**. Elemente aus $\mathbb{Z}_p$ kann man als Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ mit $0 \le a_n < p$ schreiben. Es gilt dabei $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0$.