

# Zusammenfassung Numerik von PDEs

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Def.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Eine DGL der Form

$$F(x, u, Du, \dots, D^k u) = 0$$

heißt **partielle DGL/PDE** der Ordnung  $k \geq 1$ , wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gesucht ist.

**Def (Klassifikation von PDEs).**

- Die PDE heißt **linear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

mit Funktionen  $a_\alpha, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt.

- Die PDE heißt **semilinear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(x, u, Du, \dots, D^{k-1}u) = 0$$

besitzt, wobei  $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben sind.

- Die PDE heißt **quasilinear**, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u, Du, \dots, D^{k-1}u) D^\alpha u + a_0(x, u, Du, \dots, D^{k-1}u) = 0$$

hat, wobei  $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k}$  gegeben sind.

- Die PDE heißt **nichtlinear**, falls die Ableitungen der höchsten Ordnung nicht linear vorkommen.

**Def.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Funktion. Eine PDE der Form

$$F(x, u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1} \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_1} \partial_{x_n} u, \dots, \partial_{x_n} \partial_{x_n} u) = 0$$

heißt **PDE zweiter Ordnung**.

**Notation.**  $p_i := \partial_{x_i} u$ ,  $p_{ij} := \partial_{x_i x_j}^2 u$

$$M(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_{11}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial p_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial p_{n1}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial p_{nn}} \end{pmatrix} = M(x)^T.$$

**Def (Typeneinteilung für PDEs der 2. Ordnung).**

Obige PDE zweiter Ordnung heißt

- elliptisch** in  $x$ , falls die Matrix  $M(x)$  positiv o. definit ist.
- parabolisch** in  $x$ , falls genau ein EW von  $M(x)$  gleich null ist und alle anderen dasselbe Vorzeichen haben.
- hyperbolisch** in  $x$ , falls genau ein EW ein anderes Vorzeichen als die anderen EWe hat.