

Zusammenfassung Analysis III

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Maßtheorie

Problem (Schwachtes Maßproblem). Gesucht: Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [\mathbb{R}, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

- Normierung: $\mu([0, 1]^n) = 1$
- Endliche Additivität: Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkt, so gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- Bewegungsinvarianz: Für eine euklidische Bewegung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(f(A)) = \mu(A)$.

Satz (Hausdorff). Das schwache Maßproblem ist für $n \geq 3$ nicht lösbar.

Satz (Banach). Das schwache Maßproblem ist für $n = 1, 2$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Problem (Starkes Maßproblem). Gesucht ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ wie im schwachen Maßproblem, die anstelle der endlichen Additivität die Eigenschaft der σ -Additivität besitzt:

- Für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pw. disjunkter Teilmengen des \mathbb{R}^n ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Satz. Das starke Maßproblem besitzt keine Lösung.

Notation. Sei im Folgenden Ω eine Menge.

Definition. $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Ring**, wenn für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter Differenzen: $A \setminus B \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen: $A \cup B \in \mathfrak{R}$

Definition. $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Algebra**, wenn für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter Komplementen: $A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen: $A \cup B \in \mathfrak{A}$

Definition. Eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **σ -Algebra**, wenn \mathfrak{A} unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, d. h. für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{A} gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

Bemerkung. • Jede Algebra ist auch ein Ring.

- Ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist auch unter endlichen Schnitten abgeschlossen, da $A \cap B = A \setminus (B \setminus A) \in \mathfrak{R}$
- Ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann eine Algebra, wenn $\Omega \in \mathfrak{R}$
- Eine σ -Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist auch unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathfrak{A} , dann gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^c \right)^c \in \mathfrak{A}$$

Notation. Sei im Folgenden $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring.

Satz. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Ringen / Algebren / σ -Algebren über Ω . Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ ein Ring / eine Algebra / eine σ -Algebra über Ω .

Definition. Sei $E \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Setze

$$\mathcal{R}(E) := \{\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \subset \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \text{ Ring}\} \text{ und}$$

$$\mathcal{A}(E) := \{\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \subset \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra}\}.$$

Dann heißen $\mathfrak{R}(E) := \bigcap_{\mathfrak{R} \in \mathcal{R}(E)} \mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}(E) := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(E)} \mathfrak{A}$ von E **erzeugter Ring** bzw. von E **erzeugte σ -Algebra**.

Definition. Ist (Ω, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, dann heißt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Omega, \mathcal{O}) := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ **Borelsche σ -Algebra** von (Ω, \mathcal{O}) .

Bemerkung. Die Borelsche σ -Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ wird auch erzeugt von $\{I \subset \mathbb{R} \mid I \text{ Intervall}\}$. Dabei spielt es keine Rolle, ob man nur geschlossene, nur offene, nur nach einer Seite halboffene Intervalle oder gar nur Intervalle obiger Art mit Endpunkten in \mathbb{Q} zulässt.

Definition. Eine Funktion $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Inhalt** auf \mathfrak{R} , falls

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathfrak{R}$.

Definition. Ein Inhalt $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf \mathfrak{R} , wenn μ σ -additiv ist, d. h. wenn für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Elemente von \mathfrak{R} mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definition. Ein **Maß** ist ein Prämaß auf einer σ -Algebra.

Satz. Für einen Inhalt μ auf \mathfrak{R} gilt für alle $A, B \in \mathfrak{R}$:

- $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
- $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)
- Aus $A \subset B$ und $\mu(B) < \infty$ folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- Für $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{R}$ ist $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ (Subadditivität)
- Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Elemente aus \mathfrak{R} , sodass

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}, \text{ so gilt } \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definition. Ein Inhalt / Maß auf einem Ring \mathfrak{R} / einer σ -Algebra \mathfrak{A} heißt **endlich**, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ bzw. $A \in \mathfrak{A}$.

Satz. Ein Maß auf einer σ -Algebra \mathfrak{A} ist σ -subadditiv, d. h. es gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{für alle Folgen } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{A}.$$

Definition. Sei $A \subset \Omega$. Dann heißt die Abbildung

$$\chi_A = \mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto |\{\star \mid \omega \in A\}| = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Indikatorfunktion oder **charakteristische Funktion** von A .

Definition. Eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen $A \subset \Omega$, notiert $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, wenn $(\mathbb{1}_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen $\mathbb{1}_A$ konvergiert.

Definition. Für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ heißen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in unendlich vielen } A_n\}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in allen bis auf endlich vielen } A_n\}$$

Limes Superior bzw. **Limes Inferior** der Folge A_n . Es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n.$$

Satz. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \iff \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

Definition. Eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt

- **monoton wachsend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \subset A_{n+1}$,
- **monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \supset A_{n+1}$.

Satz. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Ist (A_n) monoton wachsend, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
- Ist (A_n) monoton fallend, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Satz. Sei μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Wir betrachten die Aussagen:

- μ ist ein Prämaß auf \mathfrak{R} .
- Stetigkeit von unten: Für jede monoton wachsende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{R} mit $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
- Stetigkeit von oben: Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{R} mit $\mu(A_0) < \infty$ und $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
- Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{R} mit $\mu(A_0) < \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

Dann gilt (i) \iff (ii) \implies (iii) \iff (iv). Falls μ endlich ist, so gilt auch (iii) \implies (ii).

Satz. Sei μ ein Maß auf einer σ -Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt:

- Für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{A} gilt $\mu\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_n))$.
- Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathfrak{A} , sodass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) < \infty$, dann gilt $\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
- Sei μ endlich und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathfrak{A} , dann gilt $\mu\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$.
- Sei μ endlich und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen A konvergente Folge in \mathfrak{A} , dann gilt $A \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Definition. Ein Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **σ -endlich**, wenn gilt: Es gibt eine Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{R} , sodass

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \quad \text{und} \quad \mu(S_n) < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wird **numerische Funktion** genannt.

Definition. Eine numerische Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt **äußeres Maß** auf Ω , wenn gilt:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie)
- Für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ gilt $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Bemerkung. Wegen $\mu^*(\emptyset) = 0$ und der Monotonie nimmt ein äußeres Maß nur Werte in $[0, \infty]$ an.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt **μ^* -messbar**, falls

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \quad \text{für alle } Q \subset \Omega.$$

Satz (Carathéodory). Für ein äußeres Maß $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ ist

- $\mathfrak{A}^* := \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$ eine σ -Algebra und
- $\mu^*|_{\mathfrak{A}^*}$ ist ein Maß auf \mathfrak{A}^* .

Satz (Fortsetzungssatz). Sei μ ein Prämaß auf einem Ring \mathfrak{R} , dann gibt es ein Maß $\tilde{\mu}$ auf der von \mathfrak{R} erzeugten σ -Algebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ mit $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{R}} = \mu$. Falls μ σ -endlich, so ist $\tilde{\mu}$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Im Beweis wird ein äußeres Maß auf Ω so definiert:

$$\mathfrak{U}(Q) := \left\{ (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \left| Q \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \text{ und } A_n \text{ Folge in } \mathfrak{R} \right. \right\},$$

$$\mu^*(Q) := \inf \left(\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_n) \left| (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{U}(Q) \right. \right\} \cup \{\infty\} \right).$$

Das äußere Maß μ^* eingeschränkt auf $\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ ist ein Maß.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum und \mathcal{E} ein Erzeuger von \mathfrak{A} , der unter Schnitten abgeschlossen ist. Es gebe eine Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist μ durch die Werte auf \mathcal{E} eindeutig festgelegt.

Das Lebesgue-Borel-Maß

Notation. Für $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ schreibe

- $a \triangleleft b$, falls $a_j < b_j$ für alle $j = 1, \dots, n$.
- $a \leq b$, falls $a_j \leq b_j$ für alle $j = 1, \dots, n$.

Definition. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \triangleleft x \triangleleft b\}, \quad \mu([a, b]) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

Elementarquader und **Elementarinhalt**. Sei im Folgenden \mathcal{E} die Menge aller Elementarquader.

Satz. Für alle $A \in \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ gibt es paarweise disjunkte Elementarquader $Q_1, \dots, Q_p \in \mathcal{E}$ sodass $A = Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_p$.

Definition. Für $A \in \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ setze $\mu(A) := \sum_{i=1}^p \mu(Q_i)$, wenn $A = Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_p$ für paarweise disjunkte Q_1, \dots, Q_p .

Satz. μ definiert ein Prämaß auf $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$, genannt das **Lebesgue-Borel-Prämaß** auf \mathbb{R}^n .

Definition. Die eindeutige (da μ σ -endlich) Fortsetzung $\tilde{\mu}$ von μ auf $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ wird **Lebesgue-Borel-Maß** genannt.

Bemerkung. Nur das Lebesgue-Borel-Maß ist ein Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, welches jedem Elementarquader seinen Elementarinhalt zuordnet.

Definition. Sei μ ein Maß auf einer σ -Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Eine Menge $N \subset \Omega$ heißt **(μ) -Nullmenge**, wenn es $A \in \mathfrak{A}$ gibt mit $N \subset A$ und $\mu(A) = 0$. Die Menge aller Nullmengen ist $\mathfrak{N}_\mu \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Definition. Sei μ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt die von $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ und den entsprechenden Nullmengen erzeugte σ -Algebra \mathfrak{A}_μ **Lebesguesche σ -Algebra**, notiert $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, und das fortgesetzte Maß **Lebesgue-Maß**.

Definition. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra auf Ω , sowie ggf. μ ein Maß auf \mathfrak{A} . Dann heißt

- das Tupel (Ω, \mathfrak{A}) **messbarer Raum**,
- das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ **Maßraum**.

Definition. Seien (Ω, \mathfrak{A}) und (Ω', \mathfrak{A}') zwei messbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt **messbar** oder genauer $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ -messbar, wenn für alle $A' \in \mathfrak{A}'$ gilt $f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}$ oder, kürzer, $f^{-1}(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{A}$.

Bemerkung. Die messbaren Räume bilden eine Kategorie mit messbaren Abbildungen als Morphismen, d. h. die Identitätsabbildung von einem messbaren Raum zu sich selbst ist messbar und die Verkettung zweier messbarer Abbildungen ist messbar.

- Satz.**
- Seien (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum, Ω' eine Menge und $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung. Die größte σ -Algebra auf Ω' , sodass f messbar ist, ist dann $\mathfrak{A}' := \{A' \subset \Omega' \mid f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\}$.
 - Ist Ω eine Menge und (Ω', \mathfrak{A}') ein messbarer Raum sowie $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung. Dann ist $f^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ -Algebra.
 - Seien I eine Indexmenge, Ω eine Menge, $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i), i \in I$ messbare Räume und $f_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$ Abbildungen, dann ist

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{A} \left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \right)$$

die kleinste σ -Algebra auf Ω , sodass alle Abbildungen $f_i, i \in I$, messbar sind. Diese σ -Algebra wird die von der Familie $\{f_i \mid i \in I\}$ **erzeugte σ -Algebra** genannt.

Satz. Sei $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$, dann ist

$$\mathfrak{A}(f^{-1}(\mathcal{E}')) = f^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}')).$$

Satz. Sei (Ω, \mathfrak{A}) ein messbarer Raum und $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung, sowie $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$. Dann gilt:

$$f \text{ ist } (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}(\mathcal{E}'))\text{-messbar} \iff f^{-1}(\mathcal{E}') \subset \mathfrak{A}$$

Satz. Seien (Ω, \mathcal{O}) und (Ω', \mathcal{O}') zwei topologische Räume und $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ bzw. $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ die dazugehörigen Borelschen σ -Algebren. Dann ist jede stetige Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ -messbar.

Satz (Projektionssatz). Seien I eine Indexmenge, $(\Omega_0, \mathfrak{A}_0)$ sowie $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i), i \in I$ messbare Räume und Ω eine Menge. Seien $g_i : \Omega \rightarrow \Omega_i, i \in I$ und $f : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ Abbildungen. Wir setzen $\mathfrak{A} := \mathfrak{A} \left(\bigcup_{i \in I} g_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \right)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- f ist $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A})$ -messbar.
- Für alle $i \in I$ sind die Abbildungen $g_i \circ f : (\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_i)$ -messbar.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und (Ω', \mathfrak{A}') ein messbarer Raum und $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine messbare Abbildung, dann ist

$$\mu' = f_*(\mu) = \mu \circ f^{-1} : \mathfrak{A}' \rightarrow [0, \infty], \quad A' \mapsto \mu(f^{-1}(A'))$$

ein Maß auf (Ω', \mathfrak{A}') , genannt das **Bildmaß** von f .

Bemerkung. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, (Ω', \mathfrak{A}') und $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ messbare Räume und $f : \Omega' \rightarrow \Omega'', g : \Omega \rightarrow \Omega'$ messbare Abbildungen, dann gilt $(f \circ g)_*\mu = f_*(g_*\mu)$.

Definition. Die σ -Algebra der Borelmengen auf $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{\pm\infty\} \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}.$$

Satz. $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathfrak{A}(\{[a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\})$

Notation. Seien $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zwei numerische Funktionen. Setze

$$\{f \leq g\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\} \subset \Omega$$

und definiere analog $\{f < g\}, \{f \geq g\}, \{f > g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\}$.

Satz. Für eine numerische Fkt. $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$ sind äquivalent:

- f ist messbar
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \geq a\} = f^{-1}([a, \infty]) \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f > a\} \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f \leq a\} \in \mathfrak{A}$
- $\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathfrak{A}$

Satz. Für zwei numerische Funktionen $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$ gilt:

- $\{f < g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f > g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f = g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \leq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \geq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \neq g\} \in \mathfrak{A}$

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$ messbare numerische Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann auch messbar (\dagger : falls $0 \notin \text{Bild}(f)$):

$$\bullet \lambda \cdot f \quad \bullet f + \mu \cdot g \quad \bullet f \cdot g \quad \bullet \frac{1}{f} (\dagger) \quad \bullet \frac{g}{f} (\dagger)$$

Satz. Seien $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}), n \in \mathbb{N}$ messbare numerische Funktionen, dann auch messbar:

$$\bullet \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \bullet \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \bullet \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \bullet \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

Dabei werden Infimum, Supremum, usw. punktweise gebildet.

Satz. Seien $f_1, \dots, f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$ messbare numerische Fktn., dann sind auch $\max(f_1, \dots, f_n)$ und $\min(f_1, \dots, f_n)$ messbar.

Definition. Für $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißen die Funktionen

- $|f| := \max(f, -f) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ **Betrag** von f
- $f^+ := \max(f, 0) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ **Positivteil** von f
- $f^- := -\min(f, 0) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ **Negativteil** von f

Bemerkung. $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$

Satz. Falls $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$ messbar, dann auch $|f|, f^+$ und f^- .

Das Lebesguesche Integral

Definition. Eine Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ heißt **einfache Funktion** oder **Elementarfunktion** auf (Ω, \mathfrak{A}) , wenn gilt:

- f ist messbar
 - $f(\Omega) \subset [0, \infty[$
 - $f(\Omega)$ ist endlich
- Die Menge aller einfachen Funktionen auf (Ω, \mathfrak{A}) ist $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Definition. Sei $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\Omega = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen mit $A_j \in \mathfrak{A}$ für alle $j = 1, \dots, k$, sodass $f(A_j) = \{y_j\}$, dann heißt die Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^k y_j \cdot \mathbb{1}_{A_j} \quad \text{kanonische Darstellung.}$$

Bemerkung. Die kanonische Darstellung ist nicht eindeutig.

Satz. Seien $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $a \geq 0$. Dann auch in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$:

- $f + g$
- $f \cdot g$
- $\max(f, g)$
- $\min(f, g)$
- $a \cdot f$

Definition. Sei $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $f = \sum_{j=1}^k y_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine kanonische

Darstellung von f . Sei ferner μ ein Maß auf \mathfrak{A} . Dann heißt die Größe

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{j=1}^k y_j \mu(A_j) \quad \text{Lebesgue-Integral von } f \text{ bzgl. } \mu.$$

Bemerkung. Obige Größe ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der kanonischen Darstellung.

Satz. Seien $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$, μ ein Maß auf \mathfrak{A} und $\alpha \geq 0$, dann gilt

$$\bullet \int_{\Omega} (\alpha \cdot f + g) \, d\mu = \alpha \cdot \int_{\Omega} f \, d\mu + \int_{\Omega} g \, d\mu \quad (\text{Linearität})$$

$$\bullet \text{ Falls } g \leq f, \text{ dann } \int_{\Omega} g \, d\mu \leq \int_{\Omega} f \, d\mu \quad (\text{Monotonie})$$

Satz. Angenommen, die Funktionen $f_n \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$ bilden eine monoton wachsende Funktionenfolge und für $g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ gilt $g \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, dann gilt $\int_{\Omega} g \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu$.

Korollar. Seien $f_n, g_n \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$, $n \in \mathbb{N}$ und die Funktionenfolgen f_n und g_n monoton wachsend mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$. Dann gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n \, d\mu.$$

Definition. Sei $\overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller Funktionen $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die Grenzfunktionen (pktw. Konvergenz) monoton wachsender Funktionenfolgen in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sind.

Definition. Für eine Funktion $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ (d. h. es existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$) und ein Maß μ auf \mathfrak{A} heißt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n \, d\mu \quad \text{Lebesgue-Integral von } f \text{ bzgl. } \mu.$$

Satz. $\overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}) = \{f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}) \mid f \text{ messbar und } f \geq 0\}$

Satz. Die Eigenschaften des Integrals für einfache Funktionen (Linearität, Monotonie) übertragen sich auf das Lebesgue-Integral.

Satz (Satz von der monotonen Konvergenz). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen in $\overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$, dann gilt für $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ und jedes Maß μ auf \mathfrak{A} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$$

Bemerkung. Die Aussage ist für monoton fallende Fktn. i. A. falsch.

Definition. Eine messbare Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ heißt **integrierbar** bzw. μ -integrierbar (im Sinne von Lebesgue), falls

$$\int_{\Omega} f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} f^- \, d\mu < \infty.$$

In diesem Fall definieren wir das **Lebesgue-Integral** von f als

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \int_{\Omega} f^+ \, d\mu - \int_{\Omega} f^- \, d\mu.$$

Notation. $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(\mu)$ bezeichnet die Menge der μ -integrierbaren Funktionen auf Ω .

Satz. Für eine messbare Fkt. $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ sind äquivalent:

- $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.
- $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.
- $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $|f| \leq g$.
- Es gibt nicht negative $u, v \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $f = u - v$.

Im letzten Fall gilt $\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} u \, d\mu - \int_{\Omega} v \, d\mu$.

Satz. • $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ist ein \mathbb{R} -VR und die Abbildung

$$\int : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{\Omega} f \, d\mu \quad \text{ist linear.}$$

- $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \implies \max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), f \leq g \implies \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu \quad (\text{Monotonie})$

- $|\int_{\Omega} f \, d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \quad (\Delta\text{-Ungleichung})$

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$ und $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ oder $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Dann ist das **μ -Integral von f über A**

$$\int_A f \, d\mu = \int_{\Omega} (\mathbb{1}_A \cdot f) \, d\mu.$$

Definition. Ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt **vollständig**, wenn jede Nullmenge $N \subset \Omega$ in \mathfrak{A} liegt.

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Setze

$$\tilde{\mathfrak{N}}_{\mu} := \{N \subset \Omega \mid N \text{ ist } \mu\text{-Nullmenge}\},$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{\mu} := \{A \cup N \mid A \in \mathfrak{A}, N \in \tilde{\mathfrak{N}}_{\mu}\}.$$

Dann ist $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mu}$ eine σ -Algebra und mit $\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ ist $(\Omega, \tilde{\mathfrak{A}}_{\mu}, \tilde{\mu})$ ein Maßraum, genannt **Vervollständigung** von $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E(\omega)$ eine Aussage für alle $\omega \in \Omega$. Man sagt, E ist **(μ) -fast-überall wahr**, wenn $\{\omega \in \Omega \mid \neg E(\omega)\}$ eine Nullmenge ist.

Zwei Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow X$ heißen **(μ) -fast-überall gleich**, notiert $f \stackrel{\text{f.ü.}}{=} g$, wenn $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}$ eine Nullmenge ist. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt **(μ) -fast-überall endlich**, wenn $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = \infty\}$ eine Nullmenge ist.

Bemerkung. Das Cantorsche Diskontinuum ist eine Menge $C \subset [0, 1]$, $C \in \mathfrak{B}$, welche die bemerkenswerte Eigenschaft hat, dass sie gleichzeitig überabzählbar ist und Maß 0 besitzt. Da außerdem $\mathfrak{B} \cong \mathbb{R}$ gilt, folgt $\mathcal{P}(C) \cong \mathcal{P}(\mathbb{R}) \not\cong \mathbb{R} \cong \mathfrak{B}$. Somit gibt es eine Nullmenge $N \subset C$, die nicht in \mathfrak{B} liegt. Es folgt:

Satz. Der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu)$ ist nicht vollständig.

Definition. Sei $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}^n, \lambda)$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n, \mu)$, dann heißt $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ die **Lebesguesche σ -Algebra** und λ das **Lebesgue-Maß** auf \mathbb{R}^n (analog: $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}}, \lambda)$).

Satz. Sei $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, dann gilt $\int_{\Omega} f \, d\mu = 0 \iff f \stackrel{\text{f.ü.}}{=} 0$.

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbar mit $f \stackrel{\text{f.ü.}}{=} g$, dann gilt:

- Wenn $f, g \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$, dann $\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} g \, d\mu$.

- Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, dann $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} g \, d\mu$.

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ eine messbare Fkt. und

$g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), g \geq 0$. Wenn $f \stackrel{\text{f.ü.}}{\leq} g$, dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Satz (Lemma von Fatou). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit f_n μ -integrierbar und $f_n \stackrel{\text{f.ü.}}{\geq} 0$. Dann $\int_{\Omega} (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu$.

Satz. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge messbarer Fkt. $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ und $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), g \geq 0$, sodass $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \stackrel{\text{f.ü.}}{\leq} g$. Dann:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \, d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu \leq \int_{\Omega} (\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n) \, d\mu. \end{aligned}$$

Satz (von der majorisierten Konvergenz). Sei $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), g \geq 0$.

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge messbarer Fkt. $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ mit

$|f_n| \stackrel{\text{f.ü.}}{\leq} g$ (Majorisierung). Sei ferner $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\infty, -\infty\}$ $(\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}})$ -messbar mit $f_n \stackrel{\text{f.ü.}}{\rightarrow} f$, d. h. $\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) \neq f(\omega)\}$ ist Nullmenge.

Dann ist f integrierbar mit $\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu$.

Satz. Sei $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ bzw. $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathfrak{A} ,

$A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann:

$$\int_A f \, d\mu := \int_{\Omega} f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f \, d\mu \right).$$

Satz. Seien $f, f_j : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}), j \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen, $g : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ integrierbar, sodass $\left| \sum_{j=1}^n f_j \right| \leq g \forall n \in \mathbb{N}$ und $f \stackrel{\text{f.ü.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_j$. Dann sind f, f_j integrierbar mit $\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_j d\mu$.

Satz (Ableiten unter Integral). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f :]a, b[\times \Omega \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine Funktion, sodass:

- Für alle $t \in]a, b[$ ist die Abbildung $f(t, -) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μ -integrierbar.
- Für alle $\omega \in \Omega$ ist die Abbildung $f(-, \omega) :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar.
- Es gibt eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $g \geq 0$, sodass für alle $t \in]a, b[$ und fast alle $\omega \in \Omega$ gilt: $|f(-, \omega)'(t)| \leq g(\omega)$.

Dann ist die Funktion $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_{\Omega} f_t d\mu$ differenzierbar mit $F'(t) = \int_{\Omega} h_t d\mu$, wobei $h_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto f(-, \omega)'(t)$.

Satz. Sei $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Dann ist die Abbildung

$$f\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \int_A f d\mu$$

ein Maß, genannt **Maß mit der Dichte f bzgl. μ** oder **Stieltjes-Maß** zu f .

Zusammenhang mit dem Riemann-Integral

Definition. Eine **Zerlegung** eines Intervalls $[a, b]$ ist eine geordnete endliche Teilmenge $\{a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b\} \subset [a, b]$.

Notation. Die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$ ist $\mathcal{Z}([a, b])$.

Definition. Die **Feinheit** einer Zerlegung $\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{Z}([a, b])$ ist $|Z| := \max\{x_j - x_{j-1} \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$.

Definition. Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z = \{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{Z}([a, b])$ bezeichnen

$$O(f, Z) := \sum_{j=1}^n (\sup\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1}),$$

$$U(f, Z) := \sum_{j=1}^n (\inf\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1})$$

die (**Darbouxschen**) **Ober- und Untersummen** von f bzgl. Z .

Notation. $O_*(f) := \inf\{O(f, Z) \mid Z \in \mathcal{Z}([a, b])\}$
 $U^*(f) := \sup\{U(f, Z) \mid Z \in \mathcal{Z}([a, b])\}$

Definition. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, wenn $O_*(f) = U^*(f)$. In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x) dx := O_*(f) = U^*(f) \quad \text{Riemann-Integral von } f.$$

Notation. Sei $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{Z}([a, b])$ mit $Z_k = \{a_0^k, a_1^k, \dots, a_{n_k}^k\}$. Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir $f^k, f_k, f^*, f_* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f^k = \sup f([a, a_1^k]) \cdot \mathbb{1}_{[a, a_1^k]} + \sum_{j=2}^{n_k} \sup f([a_{j-1}^k, a_j^k]) \cdot \mathbb{1}_{[a_{j-1}^k, a_j^k]},$$

$$f_k = \inf f([a, a_1^k]) \cdot \mathbb{1}_{[a, a_1^k]} + \sum_{j=2}^{n_k} \inf f([a_{j-1}^k, a_j^k]) \cdot \mathbb{1}_{[a_{j-1}^k, a_j^k]}$$

$$f^*(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y) = \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \{f(y) \mid y \in [x - \epsilon, x + \epsilon] \cap [a, b]\}$$

$$f_*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y) = \limsup_{\epsilon \downarrow 0} \{f(y) \mid y \in [x - \epsilon, x + \epsilon] \cap [a, b]\}$$

Bemerkung. Es gilt: $f_* \leq f \leq f^*$ und $f_*(x_0) = f(x_0) = f^*(x_0)$ für $x_0 \in [a, b]$ genau dann, wenn f in x_0 stetig ist.

Satz. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{Z}([a, b])$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |Z_k| = 0$. Dann gilt:

- Sei $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n_k} \{a_j^k\}$ die Vereinigung aller Zerlegungen $Z_k, k \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in [a, b] \setminus R$ gilt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = f^*(x) \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f_*(x).$$

- Die Funktionen f^* und f_* sind Borel-messbar und integrierbar bzgl. des Borel-Maßes μ mit

$$\int_{[a, b]} f^* d\mu = O_*(f) \quad \text{und} \quad \int_{[a, b]} f_* d\mu = O^*(f).$$

Satz. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

- f ist Riemann-integrierbar.
- f ist fast-überall stetig (im Sinne des Lebesgue-Borel-Maßes).

Satz. Ist eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist sie auch auf $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar bzgl. dem Lebesgue-Maß λ und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda.$$

Satz. Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ über jedem kompakten Teilintervall von I Riemann-integrierbar. Dann sind äquivalent:

- $|f|$ ist auf I uneigentlich Riemann-integrierbar.
- f ist auf I Lebesgue-integrierbar.

Falls eine der Bedingungen erfüllt ist, so stimmt das Riemann-Integral von f auf I mit dem Lebesgue-Integral von f auf I überein.

Miscellanea

Satz. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Dann ist

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_{[a, t]} f d\lambda \text{ stetig.}$$

Satz. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Wenn $\forall t \in [a, b]$ gilt: $\int_{[a, t]} f d\lambda = F(t) = 0$, dann $f \stackrel{\text{f.ü.}}{=} 0$.

Notation. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, dann setzen wir $C(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ stetig in } x\}$ und $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ unstetig in } x\} = \mathbb{R} \setminus C(f)$.

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}$, A heißt

- **G_δ -Menge**, wenn gilt: $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n, O_n \subseteq \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$
- **F_σ -Menge**, wenn gilt: $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, F_n \subseteq \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$

Bemerkung. A ist G_δ -Menge $\iff A^C$ ist F_σ -Menge.

Satz (Young). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Dann ist $C(f)$ eine G_δ -Menge (und somit $D(f)$ eine F_σ -Menge).

Korollar. Es gibt keine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definition. Ein Maß μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ heißt **translationsinvariant**, wenn für jedes $v \in \mathbb{R}^d$ gilt $(T_v)_* \mu = \mu$, wobei $T_v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, x \mapsto x + v$ die Translation um den Vektor v bezeichnet.

Notation. Bezeichne mit μ_{LB} das Borel-Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^d .

Notation. Der Einheitswürfel im \mathbb{R}^d ist $W_1 :=](0, \dots, 0), (1, \dots, 1)[$.

Satz. Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\alpha := \mu(W_1) < \infty$, dann gilt $\mu = \alpha \cdot \mu_{LB}$.

Satz. Sei $A \in \text{GL}_d(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid \det A \neq 0\}$, dann gilt

$$A_* \mu_{LB} = \frac{1}{|\det(A)|} \cdot \mu_{LB}.$$

Satz. Das Lebesgue-Borel-Maß μ_{LB} ist invariant unter Transformationen in $\text{SL}_n(\mathbb{R})$. Ferner ist μ_{LB} invariant unter Euklidischen Bewegungen.

Satz (Kurt Hensel). Sei $\Phi : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gibt es einen Gruppenautomorphismus $\phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, sodass $\Phi = \phi \circ \det$.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $h \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$. Eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann $h\mu$ -integrierbar, wenn $(f \cdot h)$ μ -integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\Omega} f d(h\mu) = \int_{\Omega} f \cdot h d\mu.$$

Obige Gleichung ist auch erfüllt, wenn lediglich $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ gilt.

Bemerkung. Somit ist $g(h\mu) = (g \cdot h)\mu$.

Satz. Sei $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d, \phi : U \rightarrow \tilde{U}$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus, dann gilt:

$$\phi_*^{-1} \mu_{LB}|_{\tilde{U}} = \underbrace{|\det(D\phi)|}_{U \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ stetig}} \mu_{LB}|_U$$

Satz. Sei $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d, \phi : U \rightarrow \tilde{U}$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus und $Q =]a, b[\subset U$ Elementarquader mit $a \triangleleft b$, dann gilt

$$\mu_{LB}(Q) \cdot \inf_{q \in Q} |\det D\phi(q)| \leq \mu_{LB}(\phi(Q)) \leq \mu_{LB}(Q) \cdot \sup_{q \in Q} |\det(D(\phi(q)))|.$$

Satz (Transformationssatz). Sei $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ und sei $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann auf \tilde{U} Lebesgue-Borel-integrierbar, wenn $(f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf U Lebesgue-Borel-interiorierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_U (f \circ \phi) \cdot |\det(D\phi)| \, d\mu_{LB} = \int_{\phi(U)} f \, d\mu_{LB} = \int_{\tilde{U}} f \, d\mu_{LB}.$$

Obige Gleichung ist auch erfüllt, wenn lediglich $f \in \mathbb{E}(\tilde{U}, \mathfrak{B}(\tilde{U}))$ gilt.

Bemerkung. Im Transformationssatz kann man „Lebesgue-Borel“ durch „Lebesgue“ ersetzen.

Definition. Seien $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)$ Maßräume für $j = 1, \dots, n$. Die kleinste σ -Algebra \mathfrak{A} auf σ , sodass alle $\Pi_j, j = 1, \dots, n$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_j)$ -messbar sind, heißt **Produkt** der σ -Algebren $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$, notiert $\mathfrak{A} =: \mathfrak{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{A}_n$.

Satz. Sei \mathcal{E}_j Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}_j, j = 1, \dots, n$, d. h. $\mathfrak{A}(\mathcal{E}_j) = \mathfrak{A}_j$. Annahme: Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt es eine monoton gegen Ω_j wachsende Folge $(E_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E}_j . Dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{A}_n &= \mathfrak{A}(\mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_n) \text{ mit} \\ \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_n &= \{E_1 \times \dots \times E_n \mid E_j \in \mathcal{E}_j, j = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Satz. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})}_{n\text{-mal}}$.

Satz (Eindeutigkeit von Produktmaßen). Seien $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)$ Maßräume und E_j ein Erzeugendensystem von \mathfrak{A}_j für $j = 1, \dots, n$. Angenommen, E_j ist stabil unter Schnitten und $\exists (E_k^{(j)})_{k \in \mathbb{N}} \uparrow \Omega_j$ mit $\mu_j(E_k^{(j)}) < \infty$ für alle j . Dann gibt es höchstens ein Maß $\nu : \mathfrak{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{A}_n \rightarrow [0, \infty]$, sodass für alle $E_j \in \mathcal{E}_j, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\nu(E_1 \times \dots \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(E_n).$$

Definition. Sei Ω eine Menge. Eine Teilmenge $\mathfrak{D} \subset \Omega$ heißt **Dynkin-System**, wenn gilt:

- $\Omega \in \mathfrak{D}$ • $D \in \mathfrak{D} \implies D^C = \Omega \setminus D \in \mathfrak{D}$
- $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge pw. disjunkter Mengen in \mathfrak{D} , dann: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathfrak{D}$

Notation. Seien Ω_1, Ω_2 Mengen, $\Omega \subset \Omega_1 \otimes \Omega_2, \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$

$$Q_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in Q\} = \pi_2(\pi_1^{-1}(\{\omega_1\}) \cap Q)$$

$$Q_{\omega_2} := \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid (\omega_1, \omega_2) \in Q\} = \pi_1(\pi_2^{-1}(\{\omega_2\}) \cap Q)$$

Satz. $Q \subset \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2 \implies Q_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2, Q_{\omega_2} \in \mathfrak{A}_1$.

Satz. (Cavalieri 1) Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume, $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dann:

- $h_Q^1 : \Omega_1 \rightarrow [0, \infty], \omega_1 \mapsto \mu_2(Q_{\omega_1})$ ist $(\mathfrak{A}_1, \overline{\mathfrak{B}})$ -messbar.
- $h_Q^2 : \Omega_2 \rightarrow [0, \infty], \omega_2 \mapsto \mu_1(Q_{\omega_2})$ ist $(\mathfrak{A}_2, \overline{\mathfrak{B}})$ -messbar.

Satz (Existenz von Produktmaßen). Die Abbildungen

$$\nu_1 : \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \rightarrow [0, \infty], \quad Q \mapsto \int_{\Omega_1} \mu_2(Q_{\omega_1}) \, d\mu_1$$

$$\nu_2 : \mathfrak{A}_2 \otimes \mathfrak{A}_1 \rightarrow [0, \infty], \quad Q \mapsto \int_{\Omega_2} \mu_1(Q_{\omega_2}) \, d\mu_2$$

sind Maße und es gilt für alle $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$

$$\nu_1(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) = \nu_2(A_1 \times A_2)$$

und somit $\nu_1 = \nu_2$. Dieses Maß $\mu_1 \otimes \mu_2 := \nu_1 = \nu_2$ heißt **Produktmaß** von μ_1 und μ_2 .

Notation. Für $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$ schreibe

$$f_{\omega_1} : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, \omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2), \quad f_{\omega_2} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \omega_1 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$$

Lemma. Angenommen, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist $(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \overline{\mathfrak{B}})$ -messbar. Dann ist auch für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ die Abbildung $f_{\omega_1} : \mathfrak{A}_2$ -messbar und für alle $\omega_2 \in \Omega_2$ die Abbildung $f_{\omega_2} : \mathfrak{A}_1$ -messbar.

Satz (Tonelli). Sei $f \in \mathbb{E}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$, dann:

- $\Omega_2 \rightarrow [0, \infty], \omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f_{\omega_2} \, d\mu_1$ ist $(\mathfrak{A}_2, \overline{\mathfrak{B}})$ -messbar,
- $\Omega_1 \rightarrow [0, \infty], \omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_2$ ist $(\mathfrak{A}_1, \overline{\mathfrak{B}})$ -messbar,
- $\int_{\Omega_1 \otimes \Omega_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} (\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_2) \, d\mu_1 = \int_{\Omega_2} (\int_{\Omega_1} f_{\omega_2} \, d\mu_1) \, d\mu_2$.

Satz (Fubini). Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ -integrierbar. Dann ist für μ_1 -fast-alles $\omega_1 \in \Omega_1$ der Schnitt $f_{\omega_1} : \mu_2$ -integrierbar, und die μ_1 -fast-überall definierte Funktion $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_2$ ist μ_1 -integrierbar. Analoges gilt mit 1 und 2 vertauscht. Es gilt:

$$\int_{\Omega_1 \otimes \Omega_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} (\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_2) \, d\mu_1 = \int_{\Omega_2} (\int_{\Omega_1} f_{\omega_2} \, d\mu_1) \, d\mu_2.$$

Differentialformen

Notation. Sei im Folgenden V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum.

Alternierende Multilinearformen

Definition. Eine **alternierende k -Form** auf V ist eine Abb.

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-fach}} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit}$$

- ω ist **multilinear**, d. h. linear in jedem Argument, d. h. für alle $l \in \{1, \dots, k\}$ und $v_1, \dots, v_{l-1}, v_{l+1}, \dots, v_k \in V$ ist
- $$\omega(v_1, \dots, v_{l-1}, -, v_{l+1}, \dots, v_k) \in \text{Hom}(V, \mathbb{R}).$$
- Falls $v_j = v_l$ für $j < l$, dann ist $\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_l, \dots, v_k) = 0$.

Beispiel. Die Determinante ist eine alternierende n -Form auf \mathbb{R}^n .

Notation. $\Lambda^k V^* := \{k\text{-Formen auf } V\}$ für $k \in \mathbb{N}^*$

Bemerkung. $\Lambda^1 V^* = V^*, \Lambda^0 V^* := \mathbb{K} = \mathbb{R}$

Lemma. Sei $\omega \in \Lambda V^*, \sigma \in S_k$, dann gilt:

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_1, \dots, v_k).$$

Definition. Für $\phi_1, \dots, \phi_k \in \Lambda^1 V^* = V^*$ ist das **Dachprodukt** $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k \in \Lambda^k V^*$ definiert durch

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \det \begin{pmatrix} \phi_1(v_1) & \phi_1(v_2) & \dots & \phi_1(v_k) \\ \phi_2(v_1) & \phi_2(v_2) & \dots & \phi_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_k(v_1) & \phi_k(v_2) & \dots & \phi_k(v_k) \end{pmatrix}$$

Eigenschaften. • Das Dachprodukt von Elementen aus V^* ist in jedem Argument linear.

- Für $\sigma \in S_k$ gilt $\phi_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \phi_{\sigma(k)} = \text{sgn}(\sigma) \cdot (\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k)$.

Proposition. • Ist $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ eine Basis von V^* , dann ist $\{\phi_{j_1} \wedge \dots \wedge \phi_{j_k} \mid 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n\}$ eine Basis von $\Lambda^k V^*$.

- $\dim(\Lambda^k V^*) = \binom{n}{k}$ • $\Lambda^k V^* = \{0\}$ für $k > n$

Proposition. Seien $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$ und $A = (a_{jl}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ gegeben.

Dann gilt für $\varphi_j := \sum_{l=1}^k a_{jl} \phi_l \in V^*, j = 1, \dots, k$:

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k = \det(A) \cdot (\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k).$$

Satz. Seien $k, l, m \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:

- Es gibt eine eindeutig bestimmte bilineare Abbildung

$$(\Lambda^k V^*) \times (\Lambda^l V^*) \rightarrow \Lambda^{k+l} V^*, \quad (\omega, \tilde{\omega}) \mapsto \omega \wedge \tilde{\omega},$$

sodass für $\omega = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k$ und $\tilde{\omega} = \tilde{\phi}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\phi}_l$ ($\phi_j, \tilde{\phi}_i \in V^*$) gilt:

$$(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k) \wedge (\tilde{\phi}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\phi}_l) = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k \wedge \tilde{\phi}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{\phi}_l.$$

- Sei $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ eine Basis von V^* , dann gilt für $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} (\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k})$ und $\tilde{\omega} = \sum_{j_1 < \dots < j_l} \tilde{a}_{j_1 \dots j_l} (\phi_{j_1} \wedge \dots \wedge \phi_{j_l})$:
- $$\omega \wedge \tilde{\omega} = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} (a_{i_1 \dots i_k} \cdot \tilde{a}_{j_1 \dots j_l}) \cdot (\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_k} \wedge \phi_{j_1} \wedge \dots \wedge \phi_{j_l})$$

Differentialformen

Notation. Sei im Folgenden $u \in U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Setze $T_u U := \{u\} \times \mathbb{R}^n = \{(u, V) \mid V \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n$

Bemerkung. $T_u U$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum mit

- $(u, V) + (u, W) = (u, V + W),$ • $\lambda(u, V) = (u, \lambda V).$

Bemerkung. Für $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n, u \in U_1 \cap U_2$ gilt $T_u U_1 = T_u U_2$.

Definition. • **Tangentialbündel** an $U \subseteq \mathbb{R}^n$: $TU = \bigsqcup_{u \in U} T_u U$

- **Dualraum** von $T_u U$: $T_u^* = \{\alpha : T_u U \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ linear}\}$

- **Kotangentialbündel** an U : $T^*U = \bigsqcup_{u \in U} T_u^*U$

- **Einsform** (Differentialform von Grad 1, Pfaffsche Form) auf U :

$$\omega : U \rightarrow T^*U \quad \text{mit} \quad \omega(u) \in T_u^*U$$

Beispiel. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ total diff'bar, dann heißt die Einsform

$$df : U \rightarrow T^*U, \quad u \mapsto (u, V) \mapsto D_u f(V) \quad \text{totales Differential.}$$

Notation. $x_j : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u_1, \dots, u_n) \mapsto u_j$

Bemerkung. $dx_j(v_1, \dots, v_n) = v_j$

Definition. Eine **k -Form** auf U , $k \in \mathbb{N}^*$, ist eine Abbildung

$$\omega : U \rightarrow \bigsqcup_{u \in U} \Lambda^k T_u^* U \quad \text{mit} \quad \omega(u) \in \Lambda^k T_u^* U \text{ für alle } u \in U.$$

Eine **0-Form** ist eine Abbildung $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Beobachtung. Sei ω eine k -Form auf U , dann gibt es $\binom{n}{k}$ Funktionen $f_{j_1 \dots j_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, sodass

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} f_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Definition. Die k -Form ω auf U heißt stetig/diff'bar/ \mathcal{C}^k , wenn alle $\binom{n}{k}$ Abbildungen $f_{j_1 \dots j_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig/total diff'bar/ \mathcal{C}^k sind.

Beobachtung. • $\{k\text{-Form auf } U\}$ ist Modul über $\{f : U \rightarrow \mathbb{R}\}$

- Für eine k -Form ω und eine l -Form η ist $\omega \wedge \eta$ definiert durch $(\omega \wedge \eta)(u) := \omega(u) \wedge \eta(u)$ für $u \in U$ eine $(k+l)$ -Form auf U .

Definition. Sei $\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} f_{j_1 \dots j_k} (dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})$ eine diff'bare k -Form auf U , dann heißt die $(k+1)$ -Form

$$d\omega := \sum_{j_1 < \dots < j_k} df_{j_1 \dots j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \quad \text{äußere Ableitung.}$$

Bemerkung. • Für eine diff'bare Einsform $\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ auf U gilt

$$d\omega = \sum_{j < l} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_l} \right) dx_j \wedge dx_l.$$

- Eine diff'bare $(n-1)$ -Form ω auf U können wir schreiben als

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

mit total diff'baren Funktionen $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Satz. • $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$

- $d(\lambda\omega_1 + \omega_2) = \lambda d\omega_1 + d\omega_2$ • $d(d\omega) = 0$, falls $\omega \in \mathcal{C}^2$ ist

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ total diff'bar und ω eine k -Form auf U . Die k -Form $\phi^* \omega$ auf \tilde{U} , welche durch

$$(\phi^* \omega(\tilde{u}))(X_1, \dots, X_k) = (\omega(\phi(\tilde{u}))) (D_{\tilde{u}} \phi(X_1), \dots, D_{\tilde{u}} \phi(X_k))$$

für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$, $X_1, \dots, X_k \in T_{\tilde{u}} \tilde{U}$ definiert ist, heißt **Rücktransport** von ω über ϕ .

Anmerkung. Sei $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ total diff'bar. Sei $\tilde{u} \in \tilde{U}$, dann ist

$$D_{\tilde{u}} \phi : T_{\tilde{u}} \tilde{U} \rightarrow T_{\phi(\tilde{u})} U \quad \text{linear.}$$

Satz. Sei $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ und $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ total diff'bar. Seien $\omega, \omega_1, \omega_2$ k -Formen auf U , η ein l -Form auf U und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- $\phi^*(\lambda\omega_1 + \omega_2) = \lambda\phi^*(\omega_1) + \phi^*(\omega_2)$ (Linearität)
- $\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^* \omega) \wedge (\phi^* \eta)$ (Verträglichkeit mit \wedge)
- $\psi^*(\phi^* \omega) = (\phi \circ \psi)^* \omega$ (Funktorialität)
- $d(\phi^* \omega) = \phi^*(d\omega)$, falls ω diff'bar und ϕ eine \mathcal{C}^2 -Abb. ist
- Wenn $\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} f_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\phi^* \omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} (f_{j_1 \dots j_k} \circ \phi) d\phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{j_k}$$

Definition. • Für $k \geq 1$ heißt eine k -Form auf U **exakt**, wenn es eine diff'bare $(k-1)$ -Form η auf U gibt, sodass $\omega = d\eta$.

- Eine diff'bare k -Form ω auf U heißt **geschlossen**, wenn $d\omega = 0$.

Beobachtung. Jede diff'bare exakte k -Form auf U ist geschlossen.

Definition. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, falls es einen Punkt $u_0 \in U$ gibt, sodass für alle anderen Punkte $u \in U$ die Verbindungsstrecke von u_0 nach u in U liegt.

Lemma (Poincaré). Ist U sternförmig, dann ist jede stetig diff'bare k -Form mit $k \geq 1$ auch exakt.

Bemerkung. Statt Sternförmigkeit kann man auch nur Zusammenziehbarkeit fordern.

Lemma. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sodass der Zylinder $[0, 1] \times U$ in V liegt. Sei σ eine geschlossene stetig diff'bare k -Form auf V mit $k \geq 1$ und sei $\varphi_r : U \rightarrow V$, $u \mapsto (r, u)$ für $r \in [0, 1]$. Dann gibt es eine stetig diff'bare $(k-1)$ -Form η auf U mit $\varphi_1^* \sigma - \varphi_0^* \sigma = d\eta$.

Divergenz von F $\text{div} F : U \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(u)$

Rotation von F $\text{rot} F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $u \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(u) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(u) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(u) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(u) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(u) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(u) \end{pmatrix}$

Physiker-Notation:

$$\text{Nabla-Operator } \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\text{grad} f = \nabla f$
 $\text{div} F = \nabla \cdot F$ „Skalarprodukt-Analogon“
in \mathbb{R}^3 : $\text{rot} F = \nabla \times F$ „Vektorprodukt-Analogon“
Vektoranalysis im \mathbb{R}^3 mit Physiker-Notation

$$ds = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

$$dS = \begin{pmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \\ dx_1 \wedge dx_2 \end{pmatrix}$$

$$dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

In Analogum zum Skalarprodukt in $U \subseteq \mathbb{R}^3$

0-Form auf U : $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

1-Form auf U : $\omega = \sum_{j=1}^3 f_j dx_j = F \cdot ds$, $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

2-Form auf U :

$$\omega = g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 + g_3 dx_1 \wedge dx_2 =: G \cdot dS, \quad G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

3-Form auf U : $\omega = g \cdot dV$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$

Annahme: f, g, F, G seien \mathcal{C}^1 , dann gilt:

$$\bullet \quad df = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = \text{grad}(f) \cdot ds$$

$$\bullet \quad d(F \cdot ds) = d\left(\sum_{j=1}^3 f_j dx_j\right) = \sum_{j=1}^3 d(f_j dx_j) =$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_j = \dots = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

$$\bullet \quad d(G \cdot dS) = d(G_1 dx_2 \wedge dx_3 + G_2 dx_3 \wedge dx_1 + G_3 dx_1 \wedge dx_2) = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial G_j}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\text{div} G) dV$$

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein \mathcal{C}^2 -Vektorfeld, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ \mathcal{C}^2 , dann gilt:
 $\text{rot}(\text{grad} f) = 0$, $\text{div}(\text{rot} F) = 0$

Sei U sternförmig (oder allgemeiner zusammenziehbar). Zu zeigen:

- Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld mit $\text{rot} F = 0$, dann gibt es $f : U \rightarrow \mathbb{R} (\mathcal{C}^1)$ mit $F = \text{grad} f$.
- Ist $G : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld mit $\text{div} G = 0$, dann gibt es $\widehat{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3 (\mathcal{C}^1)$ mit $G = \text{rot} \widehat{F}$.

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ eine n -Form, wobei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Sei $C \subset U$ eine Borel-Menge, dann

$$\int_C \omega \cdot d := \int_C f d\lambda_n \in \mathbb{R}$$

$\phi : \widetilde{U} \rightarrow U$ sei \mathcal{C}^1 -Abbildung, $U, \widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, dann
 $\phi^* \omega = ((f \circ \phi) \cdot \det(D\phi)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

Transformationsregel für Integrale von n -Formen

Sei $\phi : \widetilde{U} \rightarrow U, \widetilde{U}, U \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ eine n -Form auf U . Dann gilt für ein Kompaktum $C \subset \widetilde{U}$:

$$\int_C \phi^* \omega \, d = \int_C (f \circ \phi) \cdot \det(D\phi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \, d = \int_C (f \circ \phi) \det(D\phi) \, d\lambda_n.$$

Wenn $\det(D\phi(\widetilde{u})) > 0$ für alle $\widetilde{u} \in U$ (also ϕ orientierungserhaltend):

$$\int_C \phi^* \omega \, d = \int_C (f \circ \phi) \cdot |\det D\phi| \, d = \int_{\phi(C)} f \, d\lambda_n = \int_{\phi(C)} \omega \, d$$

Wenn $\det(D\phi(\widetilde{u})) < 0$ für alle $\widetilde{u} \in U$ (also ϕ orientierungsumkehrend):

$$\int_C \phi^* \omega \, d = - \int_{\phi(C)} \omega \, d$$

Teilung der Eins:

$$\text{Hutfunktion: } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{1}{t^2 - 1}), & |x| < 0 \\ 0, |x| \geq 1 \end{cases} \text{ ist } \mathcal{C}^2$$

$$\text{Hutsummen: } G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k)$$

$$\text{normalisierter Hut für } k \in \mathbb{Z}: h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{g(x - k)}{G(x)} \text{ ist } \mathcal{C}^\infty,$$

$$\text{dann } \text{supp}(h_k) = [k - 1, k + 1]$$

Tolle Eigenschaft:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(x - k)}{G(x)} = \frac{1}{G(x)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Also $\{h_k\}$ bilden **Teilung der Eins**

In \mathbb{R}^n : Sei $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n, \epsilon > 0$

$$d\alpha_{q,\epsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{j=1}^n h_{q_j} \cdot (\frac{x_j}{\epsilon})$$

Es gilt:

- $d\alpha_{q,\epsilon}$ ist \mathcal{C}^∞
- $\text{supp} \alpha_{q,\epsilon} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_j - \epsilon q_j| \leq \epsilon \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\}\}$
- $\sum_{q \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{q,\epsilon} = 1$ (Übung)