Zusammenfassung Homologische Algebra

Def. **Verklebedaten** sind gegeben durch einen Funktor

$$X : \Delta_{\text{strikt}}^{\text{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ_{strikt} die Kategorie mit den Mengen $[n] \coloneqq \{0, 1, ..., n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und streng monotonen Abbildungen.

Notation. $X_{(n)} \coloneqq X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes.

Def. Das **Standard-n-Simplex** $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die von den $(n+1)$ Standardbasisvektoren aufgespannte lineare Hülle. Eine streng monotone Abb $f : [n] \to [m]$ induziert durch Abbilden des i-ten Basisvektors auf den $f(i)$-ten eine Inklusion $\Delta_f : \Delta_n \to \Delta_m$,

Def. Die **geometrische Realisierung** von Verklebedaten X ist der topologische Raum

$$|X| \coloneqq \left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R$$

Dabei ist $X_{(n)}$ diskret. Die Äquivalenzrelation R wird erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\ x \in X_{(n)},\ f : [m] \to [n] \text{ s.m.s.}$$

Def. Das **k-Skelett** $\operatorname{sk}_k X$ von Verklebedaten X ist definiert durch

$$(\operatorname{sk}_k X)_{(n)} \coloneqq \{x \in X_{(n)} \mid n \le k\},\ \ (\operatorname{sk}_k X)(f) \coloneqq X(f) \text{ sofern möglich}$$

Def. Eine **simpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ die Kategorie mit den Mengen $[n] \coloneqq \{0, 1, ..., n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und monotonen Abbildungen.

Notation. $X_n \coloneqq X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes.

Def. Die **geometrische Realisierung** einer simplizialen Menge X ist der topologische Raum

$$|X| \coloneqq \left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n) \right) / R$$

Die Äquivalenzrelation R wird dabei erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\ x \in X_n \text{ und } f : [m] \to [n] \text{ monot.}$$

Def. Ein topologischer Raum heißt **trianguliert**, wenn er die Realisierung von Verklebedaten ist.

Def. Der **Nerv** einer Überdeckung $X = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ eines topologischen Raumes ist die simpliziale Menge

$$X_n \coloneqq \{(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in A^{n+1} \mid U_{\alpha_0} \cap ... \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\}$$
$$X(f)(\alpha_0, ..., \alpha_n) \coloneqq (\alpha_{f(0)}, ..., \alpha_{f(m)}) \quad \text{für } f : [m] \to [n].$$

Bem. Falls die Überdeckung lokal endlich ist und alle nichtleeren, endlichen Schnitte $U_{\alpha_1} \cap ... \cap U_{\alpha_n}$ zusammenziehbar sind, so ist die geom. Realisierung des Nerves der Überdeckung homotopieäq. zu X.

Def. $\Delta[p]_n \coloneqq \{\, g : [n] \to [p] \text{ monoton steigend} \,\}$, $\Delta[p](f)(g) \coloneqq g \circ f$

Def. Der **klassifizierende Raum** einer Gruppe G ist gegeben durch die Realisierung der simpl. Menge BG mit $(BG)_n \coloneqq G^n$ und

$$BG(f : [m] \to [n])(g_1, ..., g_n) \coloneqq (h_1, ..., h_m), \quad h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j$$

Def. Ein n-Simplex $x \in X_n$ heißt **degeneriert**, falls eine monotone surjektive Abbildung $f : [n] \to [m]$, $n > m$ und ein Element $y \in X_m$ existiert mit $x = X(f)(y)$.

Def. Seien X Verklebedaten. Wir konstruieren eine dazugehörende simpliziale Menge $\tilde{X}$ wie folgt:

$$\tilde{X}_n \coloneqq \{(x, g) \mid x \in X_{(k)}, g : [n] \to [k] \text{ monoton und surjektiv}\},$$

Für eine monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ und $(x, g) \in \tilde{X}_n$ schreiben wir zunächst $g \circ f = f_1 \circ f_2$ mit einer Injektion f_1 und einer Surjektion f_2 und setzen $\tilde{X}(f)(x, g) \coloneqq (X(f)(x), f_2)$.

Prop. Eine simpliziale Menge $\tilde{X}$ kann genau dann aus (eindeutigen) Verklebedaten gewonnen werden, falls für alle nicht-degenerierten Simplizes $x \in \tilde{X}_n$ und streng monotonen Abbildungen $f : [m] \to [n]$ auch $\tilde{X}(f)(x) \in \tilde{X}_m$ nicht degeneriert ist.

Prop. Seien X Verklebedaten, $\tilde{X}$ die entsprechende simpliziale Menge. Dann gilt $|X| \approx |\tilde{X}|$.

Def. Das **k-Skelett** $\operatorname{sk}_k X$ einer simplizialen Menge X ist geg. durch

$$(\operatorname{sk}_k X)_n \coloneqq \{X(f)(x) \mid p \le k, f : [n] \to [p] \text{ monoton}, x \in X_p\}.$$

Def. Eine simpliziale Menge X hat **Dimension** n, falls $X = \operatorname{sk}_n X$.

Def. Eine **simpliziale Abbildung** zwischen simplizialen Mengen X und Y ist eine natürliche Transformation zwischen den beiden Funktoren $\Delta^{\text{op}} \to \mathbf{Set}$.

Def. Die Kategorie der simplizialen Mengen ist die Funktorkategorie $[\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$.

Prop. Geom. Realisierung ist ein Funktor $|{-}| : [\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Top}$.

Bspe.
- Eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eines topologischen Raumes ist Verfeinerung von $(V_\beta)_{\beta\in B}$, wenn es eine Abbildung $\psi : A \to B$ gibt, sodass $U_\alpha \subset V_{\psi(\alpha)}$ für alle $\alpha \in A$. Dies induziert eine simpliziale Abb. zwischen den Nerven der Überdeckungen durch
$$F_n(\alpha_0, ..., \alpha_n) \coloneqq (\psi(\alpha_0), ..., \psi(\alpha_n)).$$
- Ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$ stiftet eine Abbildung $BG \to BH$ zwischen den klassifizierenden Räumen durch
$$F(g_1, ..., g_n) \coloneqq (\phi(g_1), ..., \phi(g_n)).$$

Def. Ein **simplizialer topologischer Raum** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \to \mathbf{Top}.$$

Die geometrische Realisierung eines simplizialen topologischen Raumes definiert wie bei simplizialen Mengen mit dem Unterschied, dass X_n im Allgemeinen nicht die diskrete Topologie trägt.

Def. Eine **bisimpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Notation. $X_{nm} \coloneqq X([n], [m])$

Bsp. Das **direkte Produkt** von simplizialen Mengen X und Y ist die bisimpliziale Menge

$$(X \times Y)_n \coloneqq X_n \times Y_n, \quad (X \times Y)(f, g)(x, y) \coloneqq (f(x), g(y)).$$

Def. Die **Diagonale** DX einer bisimplizialen Menge X ist die simpliziale Menge mit $(DX)_n \coloneqq X_{nn}$ und $DX(f) \coloneqq X(f, f)$.

Def. Sei X eine bisimpliziale Menge.
- Setze $|X|^D \coloneqq |DX|$.
- Definiere einen simplizialen topologischen Raum X^I durch
$$X_n^I \coloneqq |X_{\bullet n}|, \quad X^I(g) \coloneqq |X(\text{id}, g)|.$$
Setze $|X|^{I,II} \coloneqq |II, I|$.
- Definiere analog $|X|^{II,I}$.

Satz (**Eilenberg-Zilber**). $|X|^D \cong |X|^{I,II} \cong |X|^{II,I}$ kanonisch.

Def.
- Ein **Kettenkomplex** $C_\bullet$ ist eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ mit der Eigenschaft $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.
- Ein **Kokettenkomplex** $C^\bullet$ ist eine Folge $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ mit der Eigenschaft $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Def. Sei $C_\bullet$ ein Kettenkomplex.
- C_n heißt Gruppe der **n-Ketten**,
- $\partial : C_n \to C_{n-1}$ heißt **Randabbildung**,
- $Z_n(C_\bullet) \coloneqq \ker \partial_n \subset C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) \coloneqq \operatorname{im} \partial_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) \coloneqq Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$ heißt **n-te Homologiegruppe**.

Analog nennt man für einen Kokettenkomplex $C^\bullet$
- δ^n **Korandabbildung**,
- C^n **n-Koketten**,
- $Z^n \coloneqq \ker \delta^n$ **n-Kozykel**,
- $B^n \coloneqq \operatorname{im} \delta^{n-1}$ **n-Koränder**,
- $H^n(C^\bullet) \coloneqq Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet)$ n-te **Kohomologiegruppe**.

Def. Sei X eine simpl. Menge. Sei $C_n(X)$ die von den n-Simplizes X_n erzeugte abelsche Gruppe (d. h. die Gruppe der endl. formalen Linearkombinationen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). Sei $\delta_n^i : [n-1] \to [n]$ diejenige streng monotone Abb. mit $i \notin \operatorname{im} \delta_n^i$. Definiere

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X), \quad \sum_{\sigma\in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \ \mapsto \sum_{\sigma\in X_n} \lambda_\sigma \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Prop. $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ ist ein Kettenkomplex (d. h. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$)

Def. Sei X eine simpl. Menge und A eine ab. Gruppe. Dann ist ...
- ... der **Kettenkomplex** $(C_\bullet(X; A), \partial_\bullet)$ von X **mit Koeffizienten** in A definiert durch
$$C_n(X; A) \coloneqq C_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad \partial_n \coloneqq \partial_n \otimes \text{id} : C_n(X; A) \to C_{n-1}(X; A).$$

- ... der **Kokettenkomplex** $(C^\bullet(X;A),\delta^\bullet)$ von X mit **Koeffizienten** in A definiert durch

$$C^n(X;A) \coloneqq \mathrm{Hom}(C^n(X),A),$$
$$\delta^n : C^n(X;A)\to C^{n+1}(X;A),\ \ f\mapsto f\circ\delta_{n+1}.$$

Beobachtung. $C_n(X;\mathbb{Z}) = C_n(X)$

Notation. Sei X eine simpliziale Menge. Setze

- $H_n(X) \coloneqq H_n(C_\bullet(X))$,
- $H^n(X) \coloneqq H^n(C^\bullet(X;\mathbb{Z}))$,
- $H_n(X;A) \coloneqq H_n(C_\bullet(X;A))$,
- $H^n(X;A) \coloneqq H^n(C^\bullet(X;A))$.

Prop. Für jede simpl. Menge X ex. ein kanonischer Isomorphismus

$$H_0(X,\mathbb{Z}) \cong \text{freie ab. Gr. erzeugt von Zshgskomponenten von } |X|.$$

Def. Der **Kegel** CX über Verklebedaten X ist definiert durch

$$(CX)_{(0)} \coloneqq X_{(0)} \amalg \{\star\},\quad (CX)_{(n)} \coloneqq X_{(n)} \amalg (X_{(n-1)}\times\{\star\})$$
$$(CX)(f)(x) \coloneqq X(f)(x)$$
$$(CX)(f)(x,*) \coloneqq \begin{cases} X(i\mapsto f(i)-1)(x), & \text{wenn } f(0)>0,\\ (X(i\mapsto f(i{+}1)-1)(x),*), & \text{wenn } f(0)=0.\end{cases}$$

Def. Für Verklebedaten sind die (Ko-)Kettenkomplex (mit Koeffizienten) genauso definiert wie für simpliziale Mengen.

Prop. $H_0(CX)=\mathbb{Z}$, $H_{>0}(CX)=0$

Def. Sei X eine simpliziale Menge.

- Ein **homol. Koeffizientensystem** $\mathcal{A}$ auf X ist ein Funktor

  $$\mathcal{A} : (1\downarrow X)\to \mathbf{AbGrp}.$$

  Dabei ist $1:\Delta\to\mathbf{Set}$ der Funktor, der konstant $\{\star\}$ ist. Expliziter besteht ein Koeffizientensystem aus einer abelschen Gruppe $\mathcal{A}_\sigma$ für jedes n-Simplex $\sigma\in X_n$ und Abbildungen $\mathcal{A}(f,\sigma):\mathcal{A}_\sigma\to\mathcal{A}_{X(f)(\sigma)}$ für alle $\sigma\in X_n$, $f\in\mathrm{Hom}_\Delta([m],[n])$ mit

  $$\mathcal{A}(\mathrm{id},\sigma)=\mathrm{id},\quad \mathcal{A}(f\circ g,\sigma)=\mathcal{A}(g,X(f)(\sigma))\circ\mathcal{A}(f,\sigma).$$

- Ein **kohomol. Koeffizientensystem** $\mathcal{B}$ auf X ist ein Funktor

  $$\mathcal{B} : (1\downarrow X)^{\mathrm{op}}\to \mathbf{AbGrp}.$$

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung und X deren Nerv. Dann definiert

$$\mathcal{F}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n} \coloneqq \{U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_n}\to\mathbb{R}\text{ stetig}\},$$
$$\mathcal{F}(f,(\alpha_0,\ldots,\alpha_n))(\phi) \coloneqq \text{passende Einschränkung von } \phi.$$

ein kohomologisches Koeffizientensystem auf X.

Def. Sei $\mathcal{A}$ ein homologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X. Wir setzen

$$C_n(X;\mathcal{A}) \coloneqq \{\text{ formale endl. Linearkomb. } \sum_{\sigma\in X_n}\lambda_\sigma\cdot\sigma \text{ mit } \lambda_\sigma\in\mathcal{A}_\sigma\ \}$$

und definieren $\partial_n : C_n(X;\mathcal{A})\to C_{n-1}(X;\mathcal{A})$ durch

$$\sum_{\sigma\in X_n}\lambda_\sigma\cdot\sigma\ \ \mapsto\ \sum_{\sigma\in X_n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mathcal{A}(\partial_n^i,\sigma)(\lambda_\sigma)\cdot X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Die Homologiegruppen des so def. Kettenkomplexes $C_\bullet(X;\mathcal{A})$ heißen **Homologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in** $\mathcal{A}$.

Def. Sei $\mathcal{B}$ ein kohomologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X. Wir setzen

$$C^n(X;\mathcal{B}) \coloneqq \{\text{ Funktionen } f:(\sigma\in X_n)\to\mathcal{B}_\sigma\ \}$$

und definieren $\delta_n : C^n(X;\mathcal{B})\to C_{n+1}(X;\mathcal{B})$ durch

$$\delta^n(f)(\sigma) \coloneqq \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\mathcal{B}(\partial_{n+1}^i,\sigma)(f(X(\partial_{n+1}^i)(\sigma))).$$

Die Kohomologiegruppen des so def. Kokettenkomplexes $C^\bullet(X;\mathcal{B})$ heißen **Kohomologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in** $\mathcal{B}$.

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $U=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, X und $\mathcal{F}$ wie im letzten Beispiel. Die Homologiegruppen $H^n(X,\mathcal{F})$ werden Čech-Kohomologiegruppen der Garbe der stetigen Funktionen auf Y bzgl. der Überdeckung U genannt.