Zusammenfassung Partielle DGLn

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

1. Einleitung

Def. Eine **partielle Differentialgleichung** (PDGL) hat die Form

$$E(x, u(x), Du(x), ..., D^k u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \qquad (\star)$$

wobei $E : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht ist. Die höchste Ableitungsordnung von u, die in E vorkommt, heißt **Ordnung** der PDGL.

Def. Eine PDGL von der Ordnung k heißt

- **linear**, falls sie folgende Form besitzt:
$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) = 0$$
- **semilinear**, falls sie linear in der höchsten Ableitungsordnung ist, man sie also schreiben kann als
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) = 0.$$
- **quasilinear**, falls sie sich schreiben lässt als
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) = 0.$$
- sonst **voll nichtlinear**.

Bemerkung. $\{$ lineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ semilineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ quasilineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ PDGLn $\}$

Def (Typeinteilung für lineare PDGLn 2. Ordnung)**.** Seien $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i, j \in \{1, ..., n\})$ vorgegebene Fktn. auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Die lineare PDGL
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **elliptisch**, falls die $(n \times n)$-Matrix (a_{ij}) für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.
- Die lineare PDGL
$$D_1 D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_j(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **hyperbolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.
- Die lineare PDGL
$$D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{2 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **parabolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

Def. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **klassische Lösung**, falls $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ und die Differentialgleichung $(\star)$ überall in Ω erfüllt ist.

2. Laplace- und Poisson-Gleichung

Notation. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $F = (F_1, ..., F_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann heißt

- $\operatorname{div} F \coloneqq \sum_{i=1}^n D_i F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **Divergenz** von F,
- $\operatorname{grad} f \coloneqq \nabla f \coloneqq (\partial_1 f, ..., \partial_n f)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **Gradient** von f,
- Δ mit $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^n D_i D_i f$ **Laplace-Operator**.

Def. Die **Laplace-** bzw. **Poisson-Gleichung** ist die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = f \qquad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Satz (Transformationssatz)**.** Sei $T : \Omega \to T(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeo, dann gilt für $f : T(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f \in L^1(T(\Omega)) \iff (f \circ T) \circ |\det(DT)| \in L^1(\Omega) \quad \text{mit}$$

$$\int_{T(\Omega)} f \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (f \circ T) \cdot |\det(DT)| \, \mathrm{d}x.$$

Bsp (Polarkoordinaten)**.** Sei $f \in L^1(B_r(K))$. Dann ist f auf fast jeder Sphäre $\partial B_\rho(K)$ für $\rho \in [0, r]$ integrierbar und es gilt

$$\int_{B_r(x)} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x_0)} f \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}\rho$$

Satz (Gauß)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Ist $F \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} F \in L^1(\Omega)$, so gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (F \circ \nu) \, \mathrm{d}S,$$

wobei ν der äußere Einheitsnormalenvektor ist.

Notation. Bezeichne mit $\mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$. Für messbare Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ schreibe $|A| \coloneqq \mathcal{L}^n(A)$.

Bsp. Zwischen dem Volumen von Kugeln und Sphären im $\mathbb{R}^n$ bestehen folgende Zusammenhänge:

$$|B_r(0)| = r^n \cdot |B_1(0)| \quad \text{und} \quad |B_r(0)| = \tfrac{r}{n} \cdot \int_{\partial B_r(0)} 1 \, \mathrm{d}S$$

Notation. $\omega_n \coloneqq \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

Notation. Sei $f : \Omega / M \to \mathbb{R}$ integrierbar für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathcal{L}^k(\Omega) \in]0, \infty[$ bzw. $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $\int_M 1 \, \mathrm{d}S \in]0, \infty[$

$$\fint_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x \coloneqq \tfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad \fint_M f(x) \, \mathrm{d}x \coloneqq \tfrac{1}{|M|} \int_M f(x) \, \mathrm{d}x$$

heißen **Mittelwerte** von f auf Ω bzw. M.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Man nennt u

- **harmonisch**, falls $\Delta u = 0$ in Ω gilt.
- **subharmonisch**, falls $\Delta u \geq 0$ in Ω gilt.
- **superharmonisch**, falls $\Delta u \leq 0$ in Ω gilt.

Bspe.
- Affine Funktionen sind harmonisch.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definiere $u(x) \coloneqq x \cdot Ax$. Dann gilt $\Delta u = \operatorname{spur} A$, also $\Delta u = 0 \iff \operatorname{spur} A = 0$.
- Real- und Imaginärteil von holomorphen Fktn. sind harmonisch.

Def. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(x) \coloneqq \begin{cases} -(2\pi)^{-1} \log|x|, & \text{wenn } n = 2 \\ (n(n-2)\,\omega_n)^{-1} |x|^{2-n}, & \text{wenn } n \geq 3 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung** der Laplacegleichung.

Bemerkung.
- Φ ist radialsymmetrisch, d. h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\|x_1\| = \|x_2\|$ gilt $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$.
- Φ, $|D\Phi| \in L^1(B_R(0))$ für alle $R > 0$ aber $|D^2\phi| \notin L^1(B_1(0))$.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_R(x_0) \subset \Omega$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Für

$$\phi :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad r \mapsto \fint_{\partial B_r(x_0)} u \, \mathrm{d}S \qquad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r \to 0} \phi(r) = u(x_0)$
- $\phi'(r) = \tfrac{r}{n} \fint_{B_r(x_0)} \Delta u(x) \, \mathrm{d}x$