Zusammenfassung Stochastik 3

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Modell. Gegeben sei ein Parametrisches Modell, d. h.eine Zufallsgröße X, deren Verteilungsfunktion $P_X \in \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n\}$ von einem Parameter ϑ abhängt.

Problem. Anhand einer **Stichprobe** $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^1$ von X (d. h. $x_1, \ldots, x_n$ sind Realisierung von iid ZGen $X_1, \ldots, X_n \sim P_X$) ist zu entscheiden, ob die sogenannte **Nullhypothese** $H_0 : \vartheta \in \Theta_0 \subset \Theta$ oder eine **Gegenhypothese** $H_1 : \vartheta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ angenommen oder abgelehnt werden soll.

Def. Der **Stichprobenraum** ist $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), P_\vartheta \times \ldots \times P_\vartheta)$

Terminologie. Die Hypothese H_i heißt **einfach**, falls $|H_i| = 1$, andernfalls **zusammengesetzt**.

Def. Ein (nichtrandomisierter) **Test** für H_0 gegen H_1 ist eine Entscheidungsregel über die Annahme von H_0 basierend auf einer Stichprobe, die durch eine messbare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ augedrückt wird und zwar durch

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{bei Annahme von } H_0, \\ 1 & \text{bei Ablehung von } H_0. \end{cases}$$

Def. Der **Ablehungsbereich** oder **kritische Bereich** von φ ist

$$K_n \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1\}.$$

Bem. Es gilt $\varphi = \mathbb{1}_{K_n}$.

Def. Ein **Fehler 1. Art** ist eine Ablehnung der Nullhypothese H_0, obwohl H_0 richtig ist; ein **Fehler 2. Art** ist eine Annahme von H_0, obwohl H_0 falsch ist.

Def. Die **Güte- oder Machtfunktion** des Tests φ ist

$$\begin{aligned} m_\varphi : \Theta \to [0, 1]\,, m_\varphi(\vartheta) &\coloneqq \mathbb{E}_\vartheta \varphi(X_1, \ldots, X_n) \\ &= \mathbb{P}_\vartheta((X_1, \ldots, X_n) \in K_n) \\ &= (P_\vartheta \times \ldots \times P_\vartheta)(K_n) \end{aligned}$$

Die Gegenwsk. $(1 - m_\varphi(\vartheta))$ heißt **Operationscharakteristik** von φ.

Bem. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\vartheta(\text{Fehler 1. Art}) &= m_\varphi(\vartheta) && \text{für } \vartheta \in \Theta_0, \\ \mathbb{P}_\vartheta(\text{Fehler 2. Art}) &= 1 - m_\varphi(\vartheta) && \text{für } \vartheta \in \Theta_1. \end{aligned}$$

Def. Ein Test $\varphi : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ mit

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} m_\varphi(\vartheta) \leq \alpha$$

heißt **α-Test** o. **Signifikanztest** zum **Signifikanzniveau** $\alpha \in (0, 1)$.
Ein α-Test φ heißt **unverfälscht** (erwartungstreu, unbiased), falls

$$\inf_{\vartheta \in \Theta_1} m_\varphi(\vartheta) \geq \alpha.$$

Situation. Sei nun eine Stichprobenfunktion oder **Teststatistik** $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ gegeben. Wir wollen einen Test der einfachen Nullhypothese $H_0 : \vartheta \in \Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ entwickeln.

Def. $K_n^T \subset \mathbb{R}^1$ heißt **kritischer Bereich der Teststatistik**, falls

$$K_n = T^{-1}(K_n^T).$$

Bem. Es gilt

$$\begin{aligned} m_\varphi(\vartheta_0) = \mathbb{P}_{\vartheta_0}((X_1, \ldots, X_n) \in K_n) \qquad &= \\ = \mathbb{P}_{\vartheta_0}((T(X_1), \ldots, T(X_n)) \in K_n^T) &= \int_{K_n^T} f_T(x)\, \mathrm{d}x \leq \alpha, \end{aligned}$$

wobei f_T die Dichte von $T(X_1, \ldots, X_n)$ unter H_0 ist.

Bsp. Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ bekannt und $\alpha \in (0, 1)$ vorgegeben. Zum Test von $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ wählen wir als Statistik

$$T(X_1, \ldots, X_n) \coloneqq \tfrac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\overline{X}_n - \mu_0\right) \text{ mit } \overline{X}_n \coloneqq \tfrac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right).$$

Unter Annahme von H_0 gilt $T(X_1, \ldots, X_n) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
Der Ablehnungsbereich der Statistik ist

$$K_n^T = \{t \in \mathbb{R}^1 \mid |t| > z_{1-\alpha/2}\} \quad \text{mit} \quad z_{1-\alpha/2} \coloneqq \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Für $\alpha = 0,5$ gilt beispielsweise $z_{1-\alpha/2} \approx 1,96$.

Bem. Es gilt

$$\begin{aligned} t \in (K_n^T)^c \iff |t| \leq z_{1-\alpha/2} &\iff |\overline{X}_n - \mu_0| \leq \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \\ &\iff \mu_0 \in \left[\overline{X}_n - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, \overline{X}_n + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right]. \end{aligned}$$

Letzteres Intervall wird **Konfidenzintervall** für μ_0 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ genannt.

Bsp. Sei wieder $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 aber diesmal unbekannt. Zum Testen von $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ verwenden wir

$$\hat{T}(X_1, \ldots, X_n) = \tfrac{\sqrt{n}}{S_n}\left(\overline{X}_n - \mu_0\right), \quad S_n^2 \coloneqq \tfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

Dabei ist S_n die **(korrigierte) Stichprobenvarianz**. Man kann zeigen, dass $\hat{T}(X_1, \ldots, X_n) \sim t_{n-1}$ unter H_0. Dabei ist t_m die **Student'sche t-Verteilung** mit m Freiheitsgraden.
Der Ablehnungsbereich ist

$$K_n^T = \{t \in \mathbb{R}^1 \mid |t| > t_{n-1, 1-\alpha/2}\}.$$

Bem. S_n^2 und $\overline{X}_n$ sind unabhängig für $n \geq 2$.

Diskussion.
- Je kleiner α ist, desto „nullhypothesenfreundlicher" ist der Test. Häufig verwendet wird $\alpha \in \{10\%, 5\%, 1\%, 0,5\%\}$.
- Einseitige Tests: Die Gegenhypothese zu $H_0 : \mu = \mu_0$ ist $H_1 : \mu > \mu_0$. Die Nullhypothese wird nur abgelehnt, falls zu große Stichprobenmittelwerte $\overline{x}_n$ vorliegen. Es ist dann $K_n^T = (z_{1-\alpha}, \infty)$.

Def. Es seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Dann heißt die Summe $X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim \chi_n^2$ **Chi-Quadrat-verteilt** mit n Freiheitsgraden.

Def. Falls $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $Y_n \sim \chi_n^2$ unabhängig sind, so heißt

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y_n}{n}}} \sim t_n$$

t-verteilt mit n-Freiheitsgraden.

Lem. $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi_{n-1}^2$

Kor. $\hat{T}$ aus dem zweiten obigen Bsp ist tatsächlich t-verteilt.

Def. Seien $Y_{n_i} \sim \chi_{n_i}^2$, $i = 1, 2$ zwei unabhängige ZGen. Dann heißt

$$\frac{Y_{n_1}/n_1}{Y_{n_2}/n_2} \sim F_{n_1, n_2}$$

F-verteilt (wie Fisher) mit (n_1, n_2) Freiheitsgraden.

Bsp. Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit μ unbekannt. Wir testen $H_0 : \sigma = \sigma_0$ vs. $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ mit

$$T \coloneqq \tfrac{n-1}{\sigma_0^2} S_n^2$$

Unter Annahme von H_0 gilt $T\ \chi_{n-1}^2$. Falls μ bekannt ist, muss man

$$\widetilde{T} \coloneqq \tfrac{n}{\sigma_0^2} \widetilde{S}_n^2, \quad \widetilde{S}_n^2 \coloneqq \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

als Statistik wählen. Unter Annahme von H_0 ist $\widetilde{T} \sim \chi_n^2$.

Bsp. Seien Stichproben $X_1^{(1)}, \ldots, X_{n_1}^{(1)} \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_1^{(2)}, \ldots, X_{n_2}^{(2)} \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ gegeben. Wir wollen $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ gegen $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$ testen. Dazu verwenden wir

$$T = \frac{S_{X^{(1)}}^2}{S_{X^{(2)}}^2}, \quad S_{X^{(j)}}^2 \coloneqq \tfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n_j} \left(X_i^{(j)} - \overline{X}_n^{(j)}\right)^n.$$

Falls H_0 gilt, so ist $T \sim F_{n_1 - 1, n_2 - 1}$.

Bsp. Situation wie im letzten Beispiel mit $\sigma_1 = \sigma_2$. Wir testen $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs. $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ mit

$$T = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\overline{X}_{n_1}^{(1)} - \overline{X}_{n_2}^{(2)}}{S_{n_1, n_2}}, \quad S_{n_1, n_2}^2 = \frac{(n_1 - 1) S_{X^{(1)}}^2 + (n_2 - 1) S_{X^{(2)}}^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Unter H_0 gilt $T \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$.

Bsp. Seien $\binom{X_1}{Y_1}, \ldots, \binom{X_n}{Y_n} \sim \mathcal{N}\left(\binom{\mu_1}{\mu_2}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho \\ \sigma_1 \sigma_2 \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$.
Wir testen $H_0 : \rho = 0$ vs. $H_1 : \rho \neq 0$ mit

$$T \coloneqq \frac{\sqrt{n-2} \cdot \hat{\rho}_n}{\sqrt{1 - \hat{\rho}_n^2}}, \quad \hat{\rho}_n \coloneqq \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)(Y_i - \overline{Y}_n)}{S_{X,n} \cdot S_{Y,n}}.$$

Falls H_0 richtig ist, so gilt $T \sim t_{n-2}$.
Um $H_0 : \rho = \rho_0 \in (0, 1)$ vs. $H_1 : \rho \neq \rho_0$ zu testen, kann man

$$T = \tfrac{\sqrt{n-3}}{2} \left(\log \tfrac{1 + \hat{\rho}_n}{1 - \hat{\rho}_n} - \log \tfrac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0}\right)$$

verwenden. Für n groß gilt $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$ unter H_0.

Lem. Seien (X_n), (Y_n) zwei Folgen von ZGn über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} c = \text{const}$ (d. h. $\forall \epsilon > 0 : \mathbb{P}(|X_n - c| > \epsilon) \to 0$) und $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y$ (d. h. $\mathbb{P}(Y_n \leq y) \to \mathbb{P}(Y \leq y)$ für alle Stetigkeitspunkte y der VF $y \mapsto \mathbb{P}(Y \leq y)$). Dann gilt:

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} c + Y, \quad X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} c \cdot Y, \quad Y_n / X_n \xrightarrow{d} Y/c \text{ (falls } c \neq 0)$$

und allgemeiner $f(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} f(c, Y)$ für jede Fkt $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Bem. Unabhängigkeit von (X_n) und (Y_n) wird nicht vorausgesetzt!

Situation. Sei $T_n = T(X_1, \ldots, X_n)$ eine Statistik. Falls der ZGWS für T_n die Form

$$\sqrt{n}(T_n - \vartheta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, g(\vartheta))$$

besitzt, so benötigen wir für Hypothesentests eine Möglichkeit, die Abhängigkeit der Varianz von Parameter ϑ zu beseitigen. Man sagt, man führt eine **varianzstabilisierende Transformation** durch. Wir suchen dazu eine stetig diff'bare Funktion $f : \Theta \to \mathbb{R}^1$, sodass

$$\sqrt{n}(f(T_n) - f(\vartheta)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Man zeigt, dass dafür gelten muss:

$$f'(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{g(\vartheta)}}, \quad \text{also} \quad f(\theta) = \int \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{g(\vartheta)}}.$$

Bspe.

- Sei $X \sim \operatorname{Exp}(\mu)$, $\hat{\mu}_n := \frac{1}{\overline{X}_n}$. Dann gilt

  $$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \tfrac{1}{\mu}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, g(\tfrac{1}{\mu})) \quad \text{mit} \quad g(\vartheta) := \vartheta^2.$$

  $\rightsquigarrow$ Mit $f(\theta) := \int \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{g(\vartheta)}} = \int \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta} = \log \theta$

  gilt $\sqrt{n}(\log(\overline{X}_n - \log(\tfrac{1}{\mu}))) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1).$

- Wir wollen eine unbek. Wahrscheinlichkeit p schätzen, etwa durch Wurf einer Münze. Der ZGWS von de-Moirre-Laplace besagt

  $$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, p(1-p)),$$

  wobei $\hat{p}_n$ die relative Häufigkeit ist. Zur Stabilisierung der Varianz verwenden wir nun

  $$f(\theta) := \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{p(1-p)}} = 2 \arcsin(\sqrt{\theta}).$$