Zusammenfassung Funktionalanalysis

Notation. Sei im Folgenden $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition. Ein **Prä-Hilbertraum** ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **Fréchet-Metrik** ist eine Funktion $\rho : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für $x, y \in V$ gilt:

- $\rho(x) = \rho(-x)$
- $\rho(x) = 0 \iff x = 0$
- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A_1, A_2 \subset X$, so ist

$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) \coloneqq \inf\{d(x, y) \mid x \in A_1, y \in A_2\}$$

der **Abstand** zwischen A_1 und A_2.

Definition. Ein **topologischer Raum** ist ein paar (X, τ), wobei X eine Menge und $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von offenen Mengen, sodass gilt:

- $\emptyset \in \tau$
- $\tilde{\tau} \subset \tau \implies \bigcup\limits_{U \in \tilde{\tau}} U \in \tau$
- $U_1, U_2 \in \tau \implies U_1 \cap U_2 \in \tau$

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **Haussdorff-Raum**, wenn folgendes Trennungsaxiom erfüllt ist:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \,:\, \exists\, U_1, U_2 \in \tau \,:\, x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \tau$, also das Komplement offen ist.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißen

$$A^\circ \coloneqq \{x \in X \mid \exists\, U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ und } U \subset A\}$$
$$\overline{A} \coloneqq \{x \in X \mid \forall\, U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$$

Abschluss bzw. **Inneres** von A.

Definition. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$, dann ist auch (A, τ_A) ein topologischer Raum mit der *Relativtopologie* $\tau_A \coloneqq \{U \cap A \mid U \in \tau\}$.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **dicht** in X, falls $\overline{A} = X$.

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **separabel**, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt separabel, falls (A, τ_A) separabel ist.

Definition. Seien τ_1, τ_2 zwei Topologien auf einer Menge X. Dann heißt τ_2 **stärker** (oder feiner) als τ_1 bzw. τ_1 **schwächer** (oder gröber) als τ_2, falls $\tau_1 \subset \tau_2$.

Definition. Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X und τ_1 und τ_2 die induzierten Topologien. Dann heißt d_1 stärker als d_2, falls τ_1 stärker ist als τ_2.

Satz. Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann gilt:

- $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1 \iff \exists\, C > 0 \,:\, \forall\, x \in X \,:\, \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$
- $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent $\iff \exists\, c, C > 0 \,:\, \forall\, x \in X \,:\, c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$

Definition. Die **p-Norm** auf dem $\mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$\|x\|_p \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_\infty \coloneqq \|x\|_max \coloneqq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Bemerkung. Alle p-Normen sind zueinander äquivalent.

Definition. Seien $S \subset X$ eine Menge, (X, τ_X) und (Y, τ_Y) Hausdorff-Räume sowie $x_0 \in S$. Eine Funktion $f : S \to Y$ heißt **stetig** in x_0, falls gilt:

$$\forall\, V \in \tau_Y \,:\, f(x_0) \in V \implies \exists\, U \in \tau_X \text{ mit } x_0 \in U \wedge f(U \cap S) \subset V$$

Ist $X = S$, so heißt $f : X \to Y$ stetige Abbildung, falls f stetig in allen Punkten $x_0 \in X$ ist, d. h. $V \in \tau_Y \implies f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Bemerkung. In metrischen Räumen ist diese Definition äquivalent zur üblichen Folgendefinition.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls $d(x_k, x_l) \xrightarrow{k,l \to \infty} 0$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Folge, falls es eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ gibt mit $x_{k_i} - x \xrightarrow{i \to \infty} 0$.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.

Definition. Ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt **Banachraum**, falls er vollständig bzgl. der induzierten Metrik ist.

Definition. Ein Banachraum heißt **Banach-Algebra**, falls er eine Algebra ist mit $\|x \cdot y\|_X \leq \|x\|_x \cdot \|y\|_X$.

Definition. Ein **Hilbertraum** ist ein Prähilbertraum, der vollständig bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm ist.

Bemerkung. Ein normierter Raum ist genau dann ein Prähilbertraum, falls die Parallelogrammidentität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

gilt. Folglich ist ein Banachraum genau dann ein Hilbertraum, falls die Parallelogrammidentität gilt.

Definition. Sei $\mathbb{K}^\mathbb{N} \coloneqq \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall\, i \in \mathbb{N} \,:\, x_i \in \mathbb{K}\}$ die Menge aller Folgen in $\mathbb{K}$. Mit der Fréchet-Metrik

$$\rho(x) \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|x_i|}{1 + |x_i|} < 1$$

wird der **Folgenraum** $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ zu einem Banachraum.

Satz. Sind $(x^k) = (x_i^k)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ und $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$, so gilt

$$\rho(x^k - x) \xrightarrow{k \to \infty} 0 \iff \forall\, i \in \mathbb{N} \,:\, x_i^k \xrightarrow{k \to \infty} x_i.$$

Definition. Die Norm

$$\|x\|_{\ell^p} \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty], \text{ für } 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_{\ell^\infty} \coloneqq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \in [0, \infty]$$

heißt **ℓ^p-Norm** auf dem Raum $\ell^p(\mathbb{K}) \coloneqq \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \|x\|_{\ell^p} < \infty\}$.

Satz. Der Raum $\ell^p(\mathbb{K})$ ist vollständig, also ein Banachraum.

Bemerkung. Im Fall $p = 2$ wird $\ell^2(\mathbb{K})$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle_{\ell^2} \coloneqq \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$.

Definition (Vervollständigung)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Betrachte die Menge $X^\mathbb{N}$ aller Folgen in X und definiere

$$\tilde{X} \coloneqq \{x \in X^\mathbb{N} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\} / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \text{ in } \tilde{X} \iff d(x_j, y_j) \xrightarrow{j \to \infty} 0.$$

Diese Menge wird mit der Metrik

$$\tilde{d}(x, y) \coloneqq \lim_{i \to \infty} d(x_i, y_i)$$

zu einem vollständigen metrischen Raum. Die injektive Abbildung $J : X \to \tilde{X}$, welche $x \in X$ auf die konstante Folge $(x)_{i \in \mathbb{N}}$, ist isometrisch, d. h. sie erhält. Wir können also X als einen dichten Unterraum von $\tilde{X}$ auffassen. Man nennt $\tilde{X}$ **Vervollständigung** von X.

Definition (**Raum der beschränkten Funktionen**)**.** Sei S eine Menge und Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$ mit Norm $y \mapsto |y|$. Dann ist

$$B(S; Y) \coloneqq \{f : S \to Y \mid f(S) \text{ ist eine beschränkte Teilmenge von } Y\}$$

die Menge der beschränkten Funktionen von B nach Y. Diese Menge ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und wird mit der Supremumsnorm $\|f\|_{B(S)} \coloneqq \sup\limits_{x \in S} |f(x)|$ zu einem Banachraum.

Satz. Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $Y \subset X$ abgeschlossen, so ist auch (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum.

Definition (**Raum stetiger Funktionen auf einem Kompaktum**)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen (d. h. kompakt) und Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$ mit Norm $y \mapsto |y|$, so ist

$$\mathcal{C}^0(S; Y) \coloneqq \mathcal{C}(S; Y) \coloneqq \{f : S \to Y \mid f \text{ ist stetig }\}$$

die Menge der stetigen Funktionen von S nach Y. Sie ist ein abgeschlossener Unterraum von $B(S; Y)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(S;Y)} = \|\cdot\|_{B(S;Y)}$, also ein Banachraum.

Bemerkung. Für $Y = \mathbb{K}$ ist $\mathcal{C}^0(S; \mathbb{K}) = \mathcal{C}(S)$ eine kommutative Banach-Algebra mit dem Produkt $(f \cdot g)(x) \coloneqq f(x) \cdot g(x)$.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **präkompakt**, falls es für jedes $\epsilon > 0$ eine Überdeckung von A mit endlich vielen ϵ-Kugeln $A \subset B_\epsilon(x_1) \cup ... \cup B_\epsilon(x_{n_\epsilon})$ mit $x_1, x_{n_\epsilon} \in X$ gibt.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **kompakt**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedinungen erfüllt ist:

- A ist **überdeckungskompakt**: Für jede Überdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ mit $A_i \overset{\circ}{\subset} X$, gibt es eine endl. Teilmenge $J \subset I$ mit $A \subset \bigcup_{i \in J} A_i$.
- A ist **folgenkompakt**: Jede Folge in A besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A.
- $(A, d|_A)$ ist vollständig und A ist **präkompakt**.

Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

- A präkompakt $\implies$ A beschränkt,
- A kompakt $\implies$ A abgeschlossen und präkompakt,
- Falls X vollständig, dann A präkompakt $\iff$ $\overline{A}$ kompakt.

Satz. Sei $A \subset \mathbb{K}^n$. Dann gilt:

- A präkompakt $\iff$ A beschränkt,
- A kompakt $\iff$ A abgeschlossen und beschränkt (Heine-Borel).

Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ kompakt. Dann gibt es zu $x \in X$ ein $a \in A$ mit $d(x, a) = \operatorname{dist}(x, A)$.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt (K_n) eine **Ausschöpfung** von S, falls

- $S = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$,
- $\emptyset \neq K_i \subset K_{i+1} \subset S$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und
- für alle $x \in S$ gibt es ein $\delta > 0$ und $i \in \mathbb{N}$, sodass $B_\delta(x) \subset K_i$.

Bemerkung. Zu $S \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^n$ und $S \overset{\bullet}{\subset} \mathbb{R}^n$ existiert eine Ausschöpfung.

Definition (Raum stetiger Funktionen auf Menge mit Ausschöpfung). Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ so, dass eine Ausschöpfung $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von S existiert und Y ein Banachraum. Dann bildet die Menge aller stetigen Funktionen

$$C^0(S; Y) := \{f : S \to Y \mid f \text{ ist stetig auf } S\}$$

einen K-Vektorraum und wird mit der Fréchet-Norm

$$\varrho(f) := \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \frac{\|f\|_{C^0(K_i)}}{1 + \|f\|_{C^0(K_i)}}$$

zu einem vollständigen metrischen Raum.

Bemerkung.
- Die von dieser Metrik erzeugte Topologie ist unabhängig von der Wahl der Ausschöpfung.
- Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so stimmt die Topologie mit der von $\|\cdot\|_{B(s)}$ überein.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Für $f : S \to Y$ heißt

$$\operatorname{supp} f := \{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$$

Träger (engl. support) von f.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Dann ist

$$\mathcal{C}_0^0(S; Y) := \{f \in \mathcal{C}^0(S; Y) \mid \operatorname{supp} f \text{ ist kompakt in } S\}$$

die Menge der stetigen Fktn. mit kompaktem Träger von S nach Y.

Definition (Raum differenzierbarer Funktionen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge der differenzierbaren Funktionen von Ω nach Y

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}, Y) := \{ f : \Omega \to Y \mid & f \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar in } \Omega \\ & \text{und für } k \leq m \text{ und } s_1, ..., s_k \in \{1, ..., n\} \\ & \text{ist } \partial_{s_1} ... \partial_{s_k} f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar } \} \end{aligned}$$

ein Vektorraum und mit folgender Norm ein Banachraum:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}$$

Bemerkung. In obiger Norm wird die Summe über alle k-fache partielle Ableitungen mit $k \leq m$ gebildet.

Satz. Sei X ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener echter Teilraum. Für $0 < \Theta < 1$ (falls X Hilbertraum, geht auch $\Theta = 1$) gibt es ein $x_\Theta \in X$ mit

$$\|x_0\| = 1 \quad \text{und} \Theta \leq \operatorname{dist}(x_\Theta, Y) \leq 1.$$

Satz. Für jeden normierten Raum X gilt:

$$\overline{B_1(0)} \text{ kompakt} \iff \dim(X) < \infty.$$

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, Y ein Banachraum und $A \subset \mathcal{C}^0(S, Y)$. Dann heißt A **gleichgradig stetig**, falls

$$\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \xrightarrow{|x-y| \to 0} 0.$$

Definition (Arzelà-Ascoli)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, Y ein endlichdimensionaler Banachraum und $A \subset \mathcal{C}^0(S, Y)$. Dann gilt

$$A \text{ präkompakt} \iff A \text{ ist beschränkt und gleichgradig stetig.}$$

Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Für $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, Y)$ sind dann äquivalent:

- Für alle $\xi \in \mathcal{C}_0^\infty$ gilt $\int_\Omega (\xi \cdot g) \, \mathrm{d}x = 0$.
- Für alle beschränkten $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ mit $\overline{E} \subset \Omega$ gilt $\int_E g \, \mathrm{d}x = 0$.
- Es gilt $g \overset{\text{f.ü.}}{=} 0$ in Ω.

Satz. Sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen X und Y. Dann sind äquivalent:

- T ist stetig.
- T ist stetig in 0.
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$.
- $\exists C > 0 : \forall x \in X : \|Tx\| \leq C \cdot \|x\|$.

Definition. Seien X, Y Vektorräume mit einer Topologie. Dann ist

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y \mid X \text{ ist linear und stetig } \}$$

die Menge aller **linearen Operatoren** zwischen X und Y. Falls die Stetigkeit nicht nur topologisch, sondern bezüglich einer Norm gilt, so redet man von **beschränkten Operatoren**.

Satz. Seien $X \neq \{0\}$, $Y \neq \{0\}$ Banachräume und $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt: Falls T invertierbar ist und $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, dann ist auch S invertierbar.

Bemerkung. Die Menge aller invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(X, Y)$ ist somit eine offene Teilmenge.

Definition. Seien X und Y Banachräume über $\mathbb{K}$. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt **kompakter (linearer) Operator**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- $\overline{T(B_1(0))}$ ist kompakt.
- $T(B_1(0))$ ist präkompakt.
- Für alle beschränkten $M \subset X$ ist $T(M) \subset Y$ präkompakt.
- Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X besitzt $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge.

Definition. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann ist $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ der **Dualraum** von X. Elemente von X' werden **lineare Funktionale** genannt.

Satz (Rieszscher Darstellungssatz)**.** Ist X ein Hilbertraum, so ist

$$J : X \to X', \quad x \mapsto y \mapsto (y, x)_X$$

ein isometrischer konjugiert linearer Isomorphismus.

Satz (Lax-Milgram)**.** Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $a : X \times X \to \mathbb{K}$ sesquilinear. Es gebe Konstanten c_0 und C_0 mit $0 < c_0 \leq C_0 < \infty$, sodass für alle $x, y \in X$ gilt:

- $|a(x, y)| \leq C_0 \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ (Stetigkeit)
- $Rea(x, x) \geq c_0 \cdot \|x\|^2$ (Koerzivität)

Dann existiert genau eine Abbildung $A : X \to X$ mit

$$a(y, x) = (y, Ax) \text{ für alle } x, y \in X.$$

Außerdem gilt: $A \in \mathcal{L}(X)$ ist ein invertierbarer Operator mit

$$\|A\| \leq C_0 \quad \text{und} \quad \|A^{-1}\| \leq \tfrac{1}{c_0}.$$

Satz (Hahn-Banach)**.** Sei X ein $\mathbb{R}$-VR und

- $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear, d. h. für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gelte
  $$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{und} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x),$$
- $f : Y \to \mathbb{R}$ linear auf einem Unterraum $Y \subset X$ und
- $f(x) \leq p(x)$ für $x \in Y$.

Dann gibt es eine lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = f(x) \text{ für } x \in Y \quad \text{und} \quad F(x) \leq p(x) \text{ für } x \in X.$$

Satz. (Hahn-Banach für lineare Funktionale) Sei X ein $\mathbb{R}$-VR, $Y \subset X$ ein Unterraum, $p : X \to \mathbb{R}$ linear und $f : Y \to \mathbb{R}$ linear, sodass $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in Y$. Dann existiert eine lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$ mit $f = F|_Y$ und $F \leq p$.

Satz. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Unterraum. Dann gibt es zu $y \in Y'$ ein $x' \in X'$ mit $x'|_Y = y'$ und $\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}$.

Satz. Sei Y abgeschlossener Unterraum des normierten Raumes X und $x_0 \in X \setminus Y$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit $x'|_Y = 0$, $\|x'\|_{X'} = 1$, $\langle x', x_0\rangle = \operatorname{dist}(x_0, Y)$.

Bemerkung. Dann gibt es auch ein $x' \in X'$ mit $x'|_Y = 0$,

$$\|x'\|_{X'} = (\operatorname{dist}(x_0, Y))^{-1} \quad \text{und} \quad \langle x', x_0\rangle = 1.$$

Satz. Seien X normierter Raum und $x_0 \in X$. Dann gilt

- Ist $x_0 \neq 0$, so gibt es $x_0' \in X'$ mit $\|x_0'\|_{X'} = 1$ und $\langle x_0', x_0\rangle_{X'\times X} = \|x_0\|_X$.
- Ist $\langle x', x_0\rangle_{X'\times X} = 0$ für alle $x' \in X'$, so ist $x_0 = 0$.
- Durch $Tx' = \langle x', x_0\rangle_{X'\times X}$ für $x' \in X'$ ist ein $T \in \mathcal{L}(X', \mathbb{K}) = X''$, dem Bidualraum, definiert mit $\|T\| = \|x_0\|_X$.

Satz (Baire'scher Kategoriensatz)**.** Es sei $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum und $X = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mit abgeschlossenen Mengen $A_k \subset X$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(A_{k_0}) \neq \emptyset$.

Korollar. Jede Basis eines ∞-dimensionalen Banachraumes ist überabzählbar.

Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** Es sei X ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und Y ein normierter Raum. Gegeben sei eine Menge von Funktionen $F \subset \mathcal{C}^0(X, Y)$ mit $\forall\, x \in X \;:\; \sup\limits_{f\in F} \|f(x)\|_Y < \infty$. Dann gibt es ein $x_0 \in X$ und ein $\epsilon > 0$, sodass $\sup\limits_{B_\epsilon(x_0)} \sup\limits_{f\in F} \|f(x)\|_Y < \infty$.

Satz (Banach-Steinhaus)**.** Es sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum, $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\forall\, x \in X \;:\; \sup\limits_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty$. DAnn ist $\mathcal{T}$ eine beschränkte Menge in $\mathcal{L}(X, Y)$, d. h. $\sup\limits_{T\in\mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Definition. Seien X und Y topologische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ **offen**, falls für alle offenen $U \Subset X$ das Bild $f(U) \Subset Y$ offen ist.

Bemerkung. Ist f bijektiv, so ist f genau dann offen, wenn f^{-1} stetig ist. Sind X, Y normierte Räume und ist $T : X \to Y$ linear, so gilt: T ist offen $\iff \exists\, \delta > 0 \;:\; B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$.

Satz (von der offenen Abbildung)**.** Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist T genau dann surjektiv, wenn T offen ist.

Satz (von der inversen Abbildung)**.** Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, so ist T^{-1} stetig, also $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Satz (vom abgeschlossenen Graphen)**.** Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear. Dann ist $\operatorname{Graph}(T) = \{(x, Tx) \,|\, x \in X\}$ genau dann abgeschlossen, wenn T stetig ist. Dabei ist $\operatorname{Graph}(T) \subset X \times Y$ mit der **Graphennorm** $\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Definition. Sei X ein Banachraum.

- Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X **konvergiert schwach** gegen $x \in X$ (notiert $x_k \xrightharpoonup{k\to\infty} x$), falls für alle $x' \in X'$ gilt:

$$\langle x', x_k\rangle_{X'\times X} \xrightarrow{k\to\infty} \langle x', x\rangle_{X'\times X}$$

- Eine Folge $(x_k')_{k\in\mathbb{N}}$ in X' **konvergiert schwach*** gegen $x' \in X'$ (notiert $x_k' \xrightharpoonup[*]{k\to\infty} x'$), falls für alle $x \in X$ gilt:

$$\langle x_k', x\rangle_{X'\times X} \xrightarrow{k\to\infty} \langle x', x\rangle_{X'\times X}$$

- Analog sind **schwache** und **schwache* Cauchyfolgen** definiert.
- Eine Menge $M \subset X$ (bzw. $M \subset X'$) heißt **schwach folgenkompakt** bzw. **schwach* folgenkompakt**, falls jede Folge in der Menge M eine schwach (bzw. schwach*) konvergente Teilfolge besitzt deren Grenzwert wieder in M liegt.

Bemerkung. Der schwache bzw. schwache* Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt. Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

Satz. Es gilt für $x, x_k \in X$, $x', x_k' \in X'$:

$$x_k \xrightharpoonup{k\to\infty} x \;\text{ in } X \quad\iff\quad J_x x_k \xrightharpoonup[*]{k\to\infty} J_x x \text{ in } X''$$

$$x_k' \xrightharpoonup{k\to\infty} x' \text{ in } X' \quad\implies\quad x_k' \xrightharpoonup[*]{k\to\infty} x' \text{ in } X'$$

Lemma.
- Aus $x_k' \xrightharpoonup[*]{k\to\infty} x'$ in X' folgt $\|x'\|_{X'} \le \liminf\limits_{k\to\infty} \|x_k'\|_{X'}$, aus $x_k \xrightharpoonup{k\to\infty} x$ in X folgt $\|x\|_X \le \liminf\limits_{k\to\infty} \|x_k\|_X$.
- Schwach bzw. schwach* konvergente Folgen sind beschränkt.
- Aus $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ in X und $x_k' \xrightharpoonup[*]{k\to\infty} x'$ in X' folgt $\langle x_k', x_k\rangle_{X'\times X} \xrightarrow{k\to\infty} \langle x', x\rangle_{X'\times X}$. Dasselbe folgt mit $x_k \xrightharpoonup{k\to\infty} x$ in X und $x_k' \xrightarrow{k\to\infty} x'$ in X'.

Achtung. In der letzten Behauptung müssen wir vorraussetzen, dass mindestens eine Folge stark konvergiert. Für beidesmal schwache/schwache* Konvergenz ist die Aussage i. A. falsch.

Satz (Banach-Alaoglu)**.** Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist die abgeschl. Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X'$ schwach* folgenkompakt.

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Dann ist $L^1(\Omega)$ separabel (Approximation durch Treppenfunktionen und der Satz besagt: Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty(\Omega)$ beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein $f \in L^\infty(\Omega)$, sodass

$$\int\limits_\Omega f_{k_l} x \cdot \overline{g}\,\mathrm{d} \xrightarrow{l\to\infty} \int\limits_\Omega f \cdot \overline{g}\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } g \in L^1(\Omega)$$

Bemerkung. Schwach*-Konvergenz impliziert eine sogenannte Schwach*-Topologie in dem Sinne, dass man sagt, eine Folge $(x_k')_{k\in\mathbb{N}}$ in X' ist bzgl. dieser Topologie konvergent, wenn sie punktweise für alle $x \in X$ konvergiert.

Definition. Sei X ein Banachraum und J_X die Isometrie bzgl. des Bidualraumes. Dann heißt X **reflexiv**, falls J_X surjektiv ist.

Lemma.
- Ist X reflexiv, so stimmen schwache* und schwache konvergenz in X' überein.
- Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.
- Ist $T : X \to Y$ ein Isomorphismus, so gilt:

$$X \text{ reflexiv} \iff Y \text{ reflexiv}$$

- Es gilt: X reflexiv $\iff$ X' reflexiv.

Lemma. Für jeden Banachraum X gilt: X' separabel $\implies$ X separabel.

Bemerkung. Die Umkehrung gilt i. A. nicht! Gegenbeispiel: $X = L^1$.

Satz (Eberlein-Shmulyan)**.** Sei X reflexiver Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.

Beispiel.
- Hilberträume X sind reflexiv (folgt direkt aus dem Riesz'schen Darstellungssatz; im Reellen $J_X = (R_X R_{X'})^{-1}$, wobei $R_X : X \to X'$ der zugehörige isomorphismus). Daher: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X, so existiert eine Teilfolge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und $x \in X$, sodass

$$(y|x_{k_l})_X \xrightarrow{l\to\infty} (y|x)_X$$

für alle $y \in X$.
- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.
- L^1 und L^∞ sind genau dann nicht reflexiv, wenn sie unendlich-dimensional sind.

Bemerkung. Analog zur schwach*-Topologie kann man auch eine schwache Topologie einführen.

Satz (Trennungssatz)**.** Seien X ein normierter Raum, $M \subset X$ nicht leer, abgeschlossen, konvex und $x_0 \in X \setminus M$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$Re\langle x', x_0\rangle_{X'\times X} > \alpha \quad \text{und} \quad Re\langle x', x\rangle_{X'\times X} \le \alpha \text{ für } x \in M.$$

Satz. Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Dann ist M schwach folgenabgeschlossen, d. h. sind $x_k, x \in X$ für $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;:\; x_k \in M, x_k \xrightharpoonup{k\to\infty} x \text{ in } X \implies x \in M$$

Lemma (Mazur)**.** Sei X normierter Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_k \xrightharpoonup{k\to\infty} x$. Dann gilt $x \in \operatorname{conv}\{x_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$

Satz. Sei X ein reflexiver Banachraum und $M \subset X$ nicht leer, konvex, abgeschlossen. Dann gibt es zu $\tilde{x}$ ein $x \in M$ mit $\|x - \tilde{x}\| = \operatorname{dist}(\tilde{x}, M)$.

Beispiel.
- Sei $M = W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann ist die eindeutige Lösbarkeit des zugehörigen (schwachen) Dirichlet-Problems gesichert.
- Sei $M = \{u \in W^{1,2}(\Omega) \,|\, \int\limits_\Omega u\,\mathrm{d}x = 0\}$ und gelte $\int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}x = 0$. Dann sichern Punkt 3, 4 die eindeutige Lösbarkeit des zugehörigen Neumann-Problems.

- Seien $u_0, \psi_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ gegeben und $u_0(x) \geq \phi_0(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Definiere $M = \{v \in W^{1,2}(\Omega) \,|\, v = u_0 \text{ auf } \partial\Omega, v \geq \psi \text{ in } \Omega\}$. Dann sichern die Punkte 1 bzw. 2 und 4 die eindeutige Existenz einer Lösung dieses Hindernis-Problems.

Lemma. Ist X ∞-dimensionaler Raum, so sind äquivalent:

- X ist separabel
- $\exists X_n \subset X$ endlich-dim. Unterräume : $\forall\, n \in \mathbb{N} : X_n \subset X_{n+1}$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ist dicht in X.
- $\exists X_n \subset X$ endlich-dim. Unterräume : $E_n \cap E_m = \{0\}$ für $n \neq m$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (E_0 \oplus ... \oplus E_n)$ ist dicht in X.
- $\exists$ linear unabhängige Menge $\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ mit $\operatorname{span}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in X.

Definition. Sei X normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Schauder-Basis** von X, falls:

$$\forall\, x \in X \,:\, \exists \text{eindeutige bestimmte } \alpha_k \in \mathbb{K} \,:\, \sum_{k=0}^{n} \alpha_n e_k \xrightarrow{n\to\infty} x \text{ in } X.$$

S ist also eindeutig bestimmt durch die „unendliche Matrix" $(a_{k,l})_{k,l\in\mathbb{N}}$.

Definition. Sei X ein Prähilbertraum. Eine Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $N \subset \mathbb{N}$ in X heißt **Orthogonalsystem**, falls $(e_k|e_l) = 0$ für $k \neq l$ und $e_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und **Orthonormalsystem**, falls zusätzlich $\|e_k\| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Lemma (Besselsche Ungleichung)**.** Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein (endliches) Orthonormalsystem des Prähilbertraumes X. Dann gilt für alle $x \in X$: $0 \leq \|x\|^2 - \sum\limits_{k=0}^{n} |(x|e_k)|^2 = \|x - \sum\limits_{k=0} \infty (x|e_k)e_k\|^2 = \operatorname{dist}(x, \operatorname{span}\{e_0, ..., e_n\})^2$.

Satz. Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem des Prä-Hilbertraumes X. Dann sind äquivalent:

- $\operatorname{span}\{e_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in X
- $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Schauder-Basis von X.
- Für alle $x \in X$ $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (x|e_k)e_k$ (Darstellung)
- Für alle $x, y \in X$ gilt $(x|y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (x|e_k)\overline{(y|e_k)}$ (Parseval-Identität)
- Für alle $x \in X$ gilt $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2$

Definition. Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, nennen wir die $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **Orthonormalbasis**.

Satz. Jeder ∞-dim. Hilbertraum über $\mathbb{K}$ ist genau dann X separabel, wenn X eine Orthonormalbasis besitzt.

Bemerkung. In diesem Fall ist X isometrisch isomorph zu $\updownarrow^2(\mathbb{K})$ (Übergang zu Koeffizienten bzgl. Basis)

Beispiel. Betrachte $L^2(]-\pi, \pi[\,, \mathbb{K})$. Dann ist durch $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ für $k \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(]-\pi, \pi[\,, \mathbb{C})$ gegeben. Weiter ist durch $\widetilde{e}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\widetilde{e}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(kx)$ für $k > 0$ und $\widetilde{e}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(kx)$ für $k < 0$ eine ONB von $L^2(]-\pi, \pi[\,, \mathbb{R})$ gegeben.

Lemma. Zu $f \in L^2(]-\pi, \pi[\,, \mathbb{C})$ sei $P_n f = \sum\limits_{|k|\leq n} (f|e_k)_{L^2} e_k$ mit e_k wie im Beispiel die **Fourier-Summe** von f. Ist f Lipschitz-stetig, gilt $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n f(x)$.

Die Fourier-Summe erlaubt die explizite Approximation von f im Unterraum $X = \operatorname{span}\{e_k \,|\, |k| \leq n\}$. Allgemein führt man ein:

Definition. Sei Y Unterraum des Vektorraums X. Eine lineare Abbildung $P : X \to X$ heißt **(lineare) Projektion auf Y**, falls $P^2 = P$ und $\operatorname{Bild}(P) = Y$.

Lemma.
- P ist Projektion auf $Y \iff P : X \to Y$ und $P = \operatorname{Id}$ auf Y.
- $P : X \to X$ ist Projektion $\implies X = \ker(P) \oplus \operatorname{im}(P)$
- $P : X \to X$ ist Projektion $\implies \operatorname{Id} - P$ ist Projektion und $\ker(\operatorname{Id} - P) = \operatorname{im}(P)$, $\operatorname{im}(\operatorname{Id} - P) = \ker(P)$.
- Zu jedem Unterraum Y von X gibt es eine Projektion auf Y.

Lemma. Für $P \in \mathcal{P}(X)$ gilt:

- $\ker(P)$ und $\operatorname{im}(P)$ sind abgeschlossen
- $\|P\| \geq 1$ oder $\|P\| = 0$

Satz (vom abgeschlossenen Komplement)**.** Sei X ein Banachraum. Gegeben sei ein abgeschlossener Unterraum Y sowie ein Unterraum Z mit $X = Y \oplus Z$. Dann gilt:

$\exists$stetige Projektion P auf Y mit $Z = \ker(P \,:\iff Z$ ist abgeschlossen

Bemerkung. Ist Y abgeschlossener Unterraum eines Banachraumes X, so besitzt Y ein abeschlossenes Komplement genau dann, wenn es eine stetige Projektion auf Y gibt.

Zwei wichtige Klassen von Unterräumen, die ein abgeschlossenes Komplement besitzen, sind endlich-dimensionale Unterräume beliebiger Banachräume sowie abgeschlossene Unterräume von Hilberträumen.

Satz. Sei X ein normierter Vektorraum, E ein n-dimensionaler Unterraum mit Basis $\{e_i \,|\, i = 1, ..., n\}$ und Y ein abgeschlossener Unterraum mit $Y \cap E = \{0\}$. Dann gilt:

- $\exists\, e'_1, ..., e'_n \in X' \,:\, e'_j = 0$ auf Y und $\langle e'_j, e_i \rangle = \delta_{ij}$.
- $\exists$stetige Projektion P auf E mit $Y = \ker(P)$, nämlich $P_X = \sum\limits_{j=1}^{n} \langle e'_j, x \rangle e_j$

Lemma. Ist Y abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums X und P die orthogonale Projektion aus Abschnitt 2.1, so gilt

- $P \in \mathcal{P}(X)$
- $\operatorname{im}(P) = Y$ und $\ker(P) = Y^\perp$
- $X = Y \perp Y^\perp$
- Ist $Z \subset X$ Unterraum mit $X = Z \perp Y$, so gilt $Z = Y^\perp$.

Als Alternative zum Zugang in Abschnitt 2.1 lässt sich festhalten:

Lemma. Seien X Hilbertraum und $P : X \to X$ linear. Dann sind äquivalent:

- P ist die orthogonale Projektion auf $\operatorname{im}(P)$, d. h. $\forall\, x, y \in X \,:\, \|x - Px\| \leq \|x - Py\|$
- $\forall\, x, y \in X \,:\, (x - Px|Py) = 0$
- $P^2 = P$ und $\forall\, x, y \in X \,:\, (Px|y) = (x|Py)$
- $P \in \mathcal{P}(X)$ mit $\|P\| \leq 1$

Sei X Banachraum und X_n endlich-dimensionale Unterräume wie in (2) des ersten Lemmas des Kapitels. Dann gibt es nach Aussage (2) des obigen Satzes also $P_n \in \mathcal{P}(X)$ mit $X_n = \operatorname{im}(P_n)$. Eine stärkere Eigenschaft als (2) des ersten Lemmas ist:

(P1) $\forall\, x \in X \,:\, P_n x \xrightarrow{n\to\infty} x$

(P1) impliziert nach dem Satz von Banach-Steinhaus $C = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$.

Wir forden noch:

(P2) $\forall\, m, n \,:\, P_n \circ P_m = ¶_{\min(n,m)}$

Man rechnet leicht nach, dass zu einer Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (P1), (P2) mittels $Q_n := P_n - P_{n-1}$ (wobei $P_1 = 0$) bzw. $P_n = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i$ eine Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(X)$ mit

(Q1) $\forall\, x \in X \,:\, \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i x \xrightarrow{n\to\infty} x$ (Q2) $\forall\, m, n \,:\, Q_n \circ Q_m = \delta_{mn} Q_n$

Die Unterräume $E_n = \operatorname{im}(Q_n)$ erfüllen dann (3) aus dem ersten Lemma und (2) mit $X_n = E_0 \oplus ... \oplus E_n$.

- Ist X Hilbertraum und $X = \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n}$ mit $\dim X_n < \infty$, $X_n \subset X_{n+1}$, so sei P_n die orthogonale Projektion auf X_n und mit $X_{n+1} = X_n \perp E_n$ sei Q_n die orthogonale Projektion auf E_n. Ist speziell $X_n = \operatorname{span}\{e_i \,|\, 0 \leq i \leq n\}$ mit einer ONB $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, so ist

$$Q_n x = (x|e_n)e_n \quad \text{und} \quad P_n x = \sum_{i=0}^{n} (x|e_i)e_i$$

- Ist $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Schauder-Basis eines Banachraumes X, definiere die **duale Basis** $(e'_i)_i$ durch $e'_i = \alpha_i$ für $i \in \mathbb{N}$, falls $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_k e_k \xrightarrow{n\to\infty} x$. Man kann zeigen, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ diese $e'_i \in X'$ eindeutig bestimmt sind. Damit ist

$$Q_n = \langle e'_n, x \rangle e_n, \quad P_n x = \sum_{i=0}^{n} \langle e'_i, x \rangle e_i$$

- Zerlege $[0,1]$ in Punkte $M_n = \{x_{n,i} \mid i = 0, ..., m_n\}$ mit $0 = x_{n,0} < ... < x_{n,m} = 1$ und $h_n = \max_i |x_{n_i,i} - x_{n_i,i-1}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ sowie $\forall\, n \in \mathbb{N} : M_n \subset M_{n+1}$. Sei $A_{n_i,i} = (x_{n_i,i}, x_{n_i,i})$, $h_{n_i,i} = x_{n_i,i} - x_{n_i,i-1}$. Dann ist der Raum der stückweise konstanten Funktionen bzgl. dieser Zerlegung auf Level n:

$$X_n = \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_{n_i,i}} \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}, \dim(X_n) = m_n$$

Für $f \in L^1(]0,1[)$ definiere $P_n f = \sum_{i=1}^{m_n} (\frac{1}{n_{n_i,i}} \int_{A_{n_i,i}} f(s)\,\mathrm{d}s)\chi_{A_{n_i,i}}$.

Es ist $\mathrm{im}(P_1) = X_n$ und für die Standardzerlegung $x_{n_i,i} = i2^{-n}$ ist $E_n = \mathrm{span}\{e_{n_i} \mid 1 \le i \le 2^{n-1}\}$ mit $e_0 = \chi_{]0,1[}, e_{n,i} = \chi_{A_{n,2i-1}} - \chi_{A_{n,2i}}$.

Für normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume X, Y hatten wir im Abschnitt 3 die Menge der kompakten linearen Operatoren von X nach Y

$$\mathcal{K}(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) \mid \overline{T(B_1(0))} \text{ ist kompakt}\}$$

Wir hatten aber schon festgestellt, dass wir, wenn Y vollständig, „$\overline{T(B_1(0))}$ ist kompakt“ durch „$T(B_1(0))$ ist präkompakt“ ersetzen können. Außerdem gilt:

Lemma. Seien X, Y Banachräume über $\mathbb{K}$. Dann sind äquivalent:

- $T \in \mathcal{K}(X,Y)$
- $M \subset X$ beschränkt $\implies T(M)$ ist präkompakt
- Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge.

Lemma. Seien X, Y Banachräume. Dann gilt:

- Für jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ gilt: T kompakt $\implies T$ vollständig. Ist X zudem reflexiv, gilt auch die Rückrichtung.
- $K(X,Y)$ ist abgeesschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(X,Y)$
- Ist $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ mit $\dim \mathrm{im}(T) < \infty$, so ist $T \in K(X,Y)$
- Ist Y Hilbertraum, so gilt für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$

  $$T \in K(X,Y) \iff \exists\,(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{L}(X,Y) \text{ mit } \mathrm{im}(T_n) < \infty : \|T - T_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

- Für $P \in \mathcal{P}(X)$ gilt: $P \in K(X) \iff \dim \mathrm{im}(P) < \infty$

Lemma. Für $T_1 \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ gilt: T_1 oder T_2 kompakt $\implies T_2T_1$ kompakt

Definition. Die **Resolventenmenge** von T ist definiert als

$$\rho(T) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(\lambda\mathrm{Id} - T) = \{0\}\} \text{ und } \mathrm{im}(\lambda\mathrm{Id} - T) = X,$$

das **Spektrum** von T durch $\sigma(T) \coloneqq \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. Das Spektrum zerlegen wir in das **Punktspektrum**

$$\sigma_p(T) \coloneqq \{\lambda \in \sigma(T) \mid \ker(\lambda\mathrm{Id} - T) \neq \emptyset\},$$

das **kontinuierliche Spektrum**

$$\sigma_c(T) \coloneqq \{\lambda \in \sigma(T) \mid \ker(\lambda\mathrm{Id} - T) = \{0\} \text{ und } \mathrm{im}(\lambda\mathrm{Id} - T) \neq X, \text{ aber } \overline{\mathrm{im}(\lambda\mathrm{Id} - T)} = X\},$$

sowie das **Restspektrum** (Residualspektrum)

$$\sigma_r(T) \coloneqq \{\lambda \in \sigma(T) \mid \ker(\lambda\mathrm{Id} - T) = \{0\} \text{ und } \overline{\mathrm{im}(\lambda\mathrm{Id} - T)} \neq X\}.$$

Offenbar ist $\lambda \in \rho(T)$ genau dann, $\lambda\mathrm{Id} - T : X \to X$ bijektiv ist. Nach dem Satz von der inversen Abbildung ist dies äquivalent zur Existenz von

$$R(\lambda, T) = (\lambda\mathrm{Id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X),$$

der sogenannten **Resolvente** von T in λ. Als Funktion von λ heißt sie auch **Resolventenfunktion**. Weiterhin ist $\lambda \in \sigma_p(T)$ offenbar äquivalent zu $\exists\, x \neq 0 : Tx = \lambda x$, dann heißt λ **Eigenwert** und x **Eigenvektor** (oder **Eigenfunktion**). Der Unterraum $\ker(\mathrm{Id}\lambda - T)$ ist der **Eigenraum** von T zum Eigenwert λ. Er ist T-invariant.

Satz. $\rho(T)$ ist offen und $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ ist eine komplex-analytische Abbildung von $\rho(T)$ nach $\mathcal{L}(X)$. Es gilt für $\lambda \in \rho(T)$: $\|R(\lambda, T)\|^{-1} \le \mathrm{dist}(\lambda, \rho(T))$

Satz. Das Spektrum $\sigma(T)$ ist kompakt und nichtleer (falls $X \neq \{0\}$) mit

$$\sup_{\lambda\in\sigma(T)} = \lim_{m\to\infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} \le \|T\|.$$

Der Wert heißt **Spektralradius**.

Lemma.
- Ist $\dim X < \infty$, so ist $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.
- Ist $\dim X = \infty$ und $T \in K(X)$, so ist $0 \in \sigma(T)$.

Bemerkung. Im Punkt 2 ist i. A. 0 kein Eigenwert, also $0 \notin \sigma_p(T)$.

Definition. Eine Abbildung $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt **Fredholm-Operator**, falls gilt:

- $\dim \ker(A) < \infty$
- $\mathrm{im}(A)$ ist abgeschlossen
- $\mathrm{codim}\,\mathrm{im}(A) < \infty$

Der **Index** eines Fredholm-Operators ist $\mathrm{ind}(A) = \dim\ker(A) - \mathrm{codim}\,\mathrm{im}(A)$.

Beispiele.
- Sei $X = W^{1,2}(\Omega)$, $Y = (W^{1,2}(\Omega))'$. Dann ist $A : W^{1,2}(\Omega) \to (W^{1,2}(\Omega))'$ definiert durch $\langle Au, v\rangle \coloneqq \int_\Omega \sum_{i,j} \partial_i v \cdot a_{ij}\partial_j u \,\mathrm{d}x$ für $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$, der der schwache elliptische Differentialoperatoren mit Neumann-Randbedingungen. Aus Kapitel 4.1 und 6 wissen wir: Der Kern $\ker(A)$ besteht aus den konstanten Funktionen, also ist $\dim\ker(A) = 1$. Das Bild von A ist $\mathrm{im}(A) = \{F \in Y \mid \langle F, 1\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = 0\}$, also abgeschlossen mit $\mathrm{codim}\,\mathrm{im}(A) = 1$. Es ist $Y = \mathrm{im}(A) \oplus \mathrm{span}\{F_0\}$, wenn $\langle F_0, v\rangle = \int_\Omega v\,\mathrm{d}x$. Also ist A ein Fredholm-Operator mit Index 0.
- Für das homogene Dirichlet-Problem ist der Operator $A : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))'$ ein Isomorphismus.

Eine wichtige Klasse von Fredhom-Operatoren sind kompakte Störungen von Id. Es gilt (ohne Beweis):

Satz. Sei $T \in K(X)$. Dann gilt für $A = \mathrm{Id} - T$:

- $\dim\ker T < \infty$
- $\mathrm{im}(A)$ ist abgeschlossen
- $\ker A = \{0\} \implies \mathrm{im}(A) = X$
- $\mathrm{codim}\,\mathrm{im}(A) = \dim\ker(A)$

Insbesondere ist A also ein Fredholm-Operator mit Index 0.

Satz (Riesz-Schauder – Spektralsatz für kompakte Operatoren)**.** Für $T \in K(X)$ gilt:

- Die Menge $\sigma(T) \setminus \{0\}$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Elementen mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt. Falls $|\sigma(T)| = \infty$, ist $\overline{\sigma(T)} = \sigma_p(T) \cup \{0\}$
- Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist $1 \le n_\lambda = \max\{n \in \mathbb{N}_+ \mid \ker(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n-1} \neq \ker(\lambda\mathrm{Id} - T)^n\} < \infty$. Die Zahl n_λ heißt **Ordnung** von λ, $\dim(\ker(\lambda\mathrm{Id} - T))$ heißt **Vielfachheit** von λ.
- Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ gilt $X = \ker(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n_\lambda} \oplus \mathrm{im}(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n_\lambda}$

Beide Unterräume sind abgeschlossen und T-invariant und der **charakteristische Unterraum** $\ker(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n_\lambda}$ ist endlich-dimensional.

- Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist $\sigma(T|_{\mathrm{im}(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n_\lambda}}) = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$
- Ist E_λ für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ die Projektion auf $\ker(\lambda\mathrm{Id} - T)^{n_\lambda}$ gemäß der Zerlegung in Punkt 3, so gilt $E_\lambda E_\mu = \delta_{\lambda\mu}E_\lambda$ für $\lambda, \mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$