# Zusammenfassung Modellkategorien

🅭 🅯 Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

*Bem.* Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

## Die Ordinalzahlen

**Def.** Eine **Wohlordnung** auf einer Menge $S$ ist eine Totalordnung auf $S$ bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel $(S, \leqslant)$ bestehend aus einer Menge $S$ und einer Wohlordnung $\leqslant$ auf $S$.

*Bem.* Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in $S$ keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\ldots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \ldots$

*Bem.* Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

**Axiom** (Wohlordnungssatz)**.** Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

**Def.** Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

**Def.** Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

*Bem.* Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leqslant_S)] \leqslant [(T, \leqslant_T)] \quad :\iff \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leqslant_S) \to (T, \leqslant_T).$$

**Notation.** • $0 := [\varnothing]$, • $n := [\{1, \ldots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega := [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

*Bem.* Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

**Prinzip** (**Transfinite Induktion**)**.**
Sei $P : \mathcal{O}_n \to \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall\, \beta \in \mathcal{O}_n \,:\, (\forall\, \gamma < \beta \,:\, P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall\, \alpha \in \mathcal{O}_n \,:\, P(\alpha)$$

**Def.** Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert:
Für $\alpha = [(S, \leqslant_S)]$ und $\beta = [(T, \leqslant_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

- $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leqslant_{S \amalg T})]$, wobei gilt:
  $$\leqslant_{S\amalg T}|_{S\times S} := \leqslant_S, \quad \leqslant_{S\amalg T}|_{T\times T} := \leqslant_T, \quad S <_{S\amalg T} T.$$
- $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leqslant_{S \rtimes T})]$ mit der lexikogr. Ordnung
  $$(s_1, t_1) \leqslant_{S\rtimes T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \,\vee\, (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leqslant_S s_2)$$
- $\alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \to T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leqslant)]$ mit
  $$f < g \quad :\iff \exists\, t \in T \,:\, f(t) < g(t) \wedge (\forall\, t_2 >_T t \,:\, f(t_2) = g(t_2))$$

*Bem.* Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 := [(\varnothing, \leqslant)] \in \mathcal{O}_n$.
b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.
c) Die Limeszahl $\lim A := \sup A$ einer Teil*menge* $A \subset \mathcal{O}_n$.

*Bem.* Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

| a) | b) | c) |
|---|---|---|
| $\alpha + 0 := \alpha$ | $\alpha+(\beta+1) := (\alpha+\beta)+1$ | $\alpha+\lim A := \lim\{\alpha+\gamma \mid \gamma \in A\}$ |
| $\alpha \cdot 0 := 0$ | $\alpha\cdot(\beta+1) := (\alpha\cdot\beta)+\alpha$ | $\alpha\cdot\lim A := \lim\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma \in A\}$ |
| $\alpha^0 := 1$ | $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta\cdot\alpha$ | $\alpha^{\lim A} := \lim\{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$ |

**Def.** Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe ist mit
• $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$, • $a \cdot 0 = 0$.

**Lem** (Rechenregeln in $\mathcal{O}_n$)**.** • $\alpha\cdot 0 = 0 = 0\cdot\alpha$ • $\alpha\cdot 1 = \alpha = 1\cdot\alpha$
• $\alpha^0 = 1$ • $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^\alpha = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$
• $\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ • $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

- $\mathcal{O}_n$ ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht*!
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:
  $$\forall\, \beta < \gamma : \quad \alpha+\beta < \alpha+\gamma, \quad \alpha\cdot\beta < \alpha\cdot\gamma \;(\alpha>0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \;(\alpha>1).$$

**Lem.** Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1}c_1 + \omega^{\beta_2}c_2 + \ldots + \omega^{\beta_k}c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \ldots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.

## Kategorientheorie

**Def.** Eine **(schwache) 2-Kategorie** $\mathbb{C}$ besteht aus

- einer Ansammlung $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie
  $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & B \arrow[from=U, to=D, Rightarrow] \end{tikzcd} \right\},$$
- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor
  $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$
- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem Objekt $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem natürlichen Isomorphismus
  $$\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}} : \; -\circ(-\circ-) \Longrightarrow (-\circ-)\circ-,$$
  wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ
  $$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$
- und für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ natürlichen Isomorphismen
  $$\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (-\circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$ kommutiert
  $$\begin{tikzcd} K(H(GF)) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] \arrow[d, "K\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}}"] & (KH)(GF) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{G}}"] & ((KH)G)H \\ K((HG)F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] & & (K(HG))F \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}F"'] \end{tikzcd}$$
- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathcal{C}$ kommutiert
  $$\begin{tikzcd} G \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{D},\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "G\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}}"] & & (G \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \arrow[dl, "\rho_{\mathcal{D},\mathcal{E}}F"] \\ & G \circ F & \end{tikzcd}$$

**Bspe.** • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.
• Jede Kategorie $\mathcal{C}$ ist natürlich eine 2-Kategorie.
• Die Kategorie der Ringe $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathbb{R}) := \{\text{Ringe mit Eins}\}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) :=$ Kat. der $B$-$A$-Bimoduln mit $N \circ M := N \otimes_B M$ für $M \in \mathrm{Hom}(A, B)$ und $N \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\mathrm{Id}_A := A$.

**Def.** Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann $\otimes$ anstelle von $\circ$ geschrieben.

**Def.** Sei $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ von $S$ ist eine Familie $\alpha_c : E \to S(c, c)$, $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von Morphismen in $\mathcal{A}$, sodass für alle $(f : c \to c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & S(c,c) \arrow[dr, "S(\mathrm{id}_c, f)"] & \\ E \arrow[ur, "\alpha_c"] \arrow[dr, "\alpha_{c'}"'] & & S(c,c') \\ & S(c',c') \arrow[ur, "S(f, \mathrm{id}_{c'})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, und $E$ universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler $S$-**Keil**.

**Notation.** $E = \int_c S(c, c)$.

*Bem.* Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden: $\lim F = \int_c F(c)$; der Integrand ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$.

*Bem.* Das duale Konzept ist das eines ~~Anfangs~~ Koendes $\int^c S(c, c)$.

**Bsp.** Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_c \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \;\cong\; \mathrm{Nat}(F, G).$$

**Satz** (Fubini)**.** Sei $S : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d,c)} S(d, d, c, c) \;\cong\; \iint_{dc} S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und $\int_c S(d, d', c, c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

**Bsp.** Sei $R$ ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt $*$. Ein additiver Funktor $R^{(\mathrm{op})} \to \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein $R$-Linksmodul (bzw. $R$-Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

**Bsp** (Ninja-Yoneda-Lemma)**.** Für jede Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ gilt

$$F \cong \int^{c} F(c) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

**Def.** Sei $\mathbb{C}$ eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ist geg. durch Morphismen $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ (genannt **Eins**) und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ (**Koeins**) mit $G\epsilon \circ \eta G = \mathrm{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \mathrm{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.

**Lem.** R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

*Bem.* Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\mathrm{Hom}(F \circ -, -) \cong \mathrm{Hom}(-, G \circ -)$$

**Bsp.** $\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$

**Bsp.** Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein $B$-$A$-Modul $M$ ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn $M$ als Rechts-$A$-Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

*Bem.* Sind $\eta$ und $\epsilon$ in $F \dashv G$ sogar Isomorphismen, so heißt $F \dashv G$ auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von $F$ und $G$ sowie einem der Morphismen $\epsilon$, $\eta$) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

## Kan-Erweiterungen

**Def.** Sei $A \xleftarrow{T} M \xrightarrow{K} C$ ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE) $(R, \epsilon)$ von $T$ längs $K$ besteht aus

- einem Morphismus $R : C \to A$
- einem 2-Morphismus $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$,

sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE $(\tilde{R} : C \to A, \epsilon : \tilde{R} \circ K \Rightarrow T)$ gibt es genau ein $\sigma : \tilde{R} \Rightarrow R$ mit $\epsilon \circ \sigma K = \tilde{\epsilon}$. Notation: $R = \mathrm{Ran}_K(T)$

*Bem.* $(R, \epsilon)$ ist RKE von $T$ längs $K$ $\iff$ $\mathrm{Hom}(\tilde{R}, R) \to \mathrm{Hom}(\tilde{R} \circ K, T)$ ist bijektiv für alle $\tilde{R} : C \to A$.

**Prop.** RKE sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

**Bsp.** Die RKE eines bel. Morphismus $T : M \to A$ längs $\mathrm{Id}_M$ existiert stets und ist gegeben durch $(T, T \circ \mathrm{Id}_M \Rightarrow T)$.

**Bsp.** In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\mathrm{Ran}_K(T) = (\mathrm{Hom}_M(K, T),\ \ ev : \mathrm{Hom}_M(K, T) \otimes_C K \Rightarrow T).$$

**Bsp.** Sei $K : \mathcal{M} \to \mathbf{1}$ der eindeutig best. Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von $T$ längs $K$ dasselbe wie ein Limes von $T$.

**Thm.** Seien $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ und $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Existiere für alle Objekte $c \in \mathcal{C}$ der Limes

$$R(c) := \lim_{f : c \to Km} T(m).$$

Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ausdehnen und zwar zu einer RKE von $T$ längs $K$.

*Bem.* Ist $\mathcal{M}$ klein und $\mathcal{C}$ lokal klein und ist $\mathcal{A}$ vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktweise RKE**.

**Lem.** Eine RKE ist genau dann punktweise, wenn sie für alle $a \in \mathcal{A}$ unter dem Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$ erhalten bleibt.

**Thm.** Sei $K : M \to C$ ein Funktor. Betrachte $K^* : [C, A] \to [M, A]$.

- Wenn ein Funktor $\mathrm{Ran}_K : [M, A] \to [C, A]$ mit $K^* \dashv \mathrm{Ran}_K$ existiert, so ist für alle $T : M \to A$ $\mathrm{Ran}_K(T)$ eine RKE von $T$ längs $K$.
- Existiere für alle $T : M \to A$ eine RKE $\mathrm{Ran}_K(T)$. Dann kann man die Zuordnung $T \mapsto \mathrm{Ran}_K(T)$ zu einem Rechtsadjungierten von $K^*$ ausdehnen.

**Thm.** Sei $G : A \to X$ in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- $G$ besitzt einen Linksadjungierten.
- $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A)$ existiert und bleibt von $G$ erhalten, d. h. $G \circ \mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Ran}_G(G \circ \mathrm{Id}_A)$.

In diesem Fall gilt $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A) \dashv G$ und $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A)$ wird sogar von allen Morphismen $H : A \to Y$ bewahrt.

**Thm.** Rechtsadjungierte bewahren RKE.

**Kor.** Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

## Algebraische Strukturen in Kategorien

**Def.** Eine **Retrakt** ist ein Morphismus $r : Y \to X$, sodass ein Morphismus $i : X \to Y$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$ existiert. Sprechweise: $X$ ist ein Retrakt von $Y$ (vermöge $i$).

**Bsp.** Ein Modul $U$ ist genau dann Retrakt von einem Modul $M$, wenn $U$ ein direkter Summand von $M$ ist.

**Prop.** „– ist Retrakt von –“ ist eine reflexive und trans. Relation.

**Def.** Ein **Retrakt eines Morphismus** $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}$ ist ein Morph. $g : X \to Y$, sodass es ein komm. Diagramm folgender Form gibt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & B \end{tikzcd}$$

*Bem.* Ein Retrakt von $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ ist ein Retrakt von $f \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\to})$.

**Prop.** • Retrakte von Isomorphismen sind Isomorphismen.
- Sei $f \circ g = \mathrm{id}$. Dann ist $f$ ein Retrakt von $g \circ f$.

**Prop.** Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist die Klasse $\{f \in \mathcal{C}^{\to} \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$ abgeschlossen unter Retrakten.

**Def.** Sei $i : A \to X$ und $p : E \to B$. Dann werden als äq. definiert:
- $p$ ist **$i$-injektiv** • $i$ ist **$p$-projektiv** • $i \boxslash p$
- $i$ hat die Linkshochhebungseigenschaft (LHHE) bzgl. $p$
- Für alle $f$, $g$ wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales $\lambda$, sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

**Bsp.** Wegeliftung aus der Topologie: $i : \{0\} \to [0, 1]$ erfüllt die LHHE bezüglich allen Überlagerungen $\pi : E \to B$.

**Bsp.** Sei $P$ ein Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Dann ist $P$ genau dann **projektiv**, wenn $(0 \to P)$ die LHHE bzgl. aller Epimorphismen in $\mathcal{A}$ hat. Dual ist $I$ injektiv, wenn alle Monos in $\mathcal{A}$ die LHHE bzgl. $(I \to 0)$ besitzen.

**Bsp.** In der Kategorie der Mengen gilt: Alle Injektionen haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

**Lem** (**Retrakt-Argument**)**.** Sei $f = q \circ j$. Ist $f$ $q$-projektiv ($f \boxslash q$), so ist $f$ ein Retrakt von $j$.

## Zellenkomplexe

**Def.** Sei $\lambda$ eine Ordinalzahl. Eine **$\lambda$-Sequenz** in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein kolimesbewahrender Funktor $X : \lambda \to \mathcal{C}$ (wobei man $\lambda$ als Präordnungskategorie aller $\beta < \lambda$ auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus $X_0 \to \operatorname{colim}_{\beta<\lambda} X_\beta$.

*Bem.* Kolimesbewahrung bedeutet: $\operatorname{colim}_{\alpha<\beta} X_\alpha = X_\beta$ für alle $\beta<\lambda$.

**Def.** Sei $\mathcal{C}$ eine kovollständige Kategorie, $I \subset \operatorname{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge.

- Ein **relativer $I$-Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer $\lambda$-Sequenz $Z$, sodass $\forall\, \alpha \in \mathcal{O}_n$ mit $\alpha+1<\lambda$ ein Pushoutdiagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Z_\alpha \\ B \arrow[r] & Z_{\alpha+1} \arrow[from=u] \end{tikzcd} \quad \begin{matrix} \Leftarrow \textbf{Anklebeabbildung} \\[2em] \Leftarrow \textbf{Zelle} \end{matrix}$$

  mit $f \in I$ existiert. Sprechweise:
  „$Z_{\alpha+1}$ entsteht aus $Z_\alpha$, indem wir $B$ längs $C$ ankleben“
- Ein Objekt $A \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **$I$-Zellenkomplex**, wenn der Morph. $0 \to A$ aus dem initialen Obj. ein relativer $I$-Zellenkomplex ist.

**Bsp.** CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind $I$-Zellenkomplexe mit $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geqslant 0\}$ (und $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$).

**Bspe.**
- Identitäten $A \to A$ sind relative $I$-Zellenkomplexe.
- Das initiale Objekt ist ein absoluter $I$-Zellenkomplex.

**Lem.** Sei $Z : \lambda \to \mathcal{C}$ eine $\lambda$-Sequenz. Sei jeder Morphismus $Z_\beta \to Z_{\beta+1}$ $(\beta + 1 < \lambda)$ ein Pushout eines Morphismus aus $I$. Dann ist die transfinite Komposition von $Z$ ein $I$-Zellenkomplex.

**Thm.** Die Klasse der relativen $I$-Zellenkomplex ist abgeschl. unter:
- transfinite Kompositionen
- Isomorphismen
- Koprodukt