Zusammenfassung Topologie

Def. Ein **metrischer Raum** (X, d) besteht aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass f. a. $x, y, z \in X$ gilt:
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ • $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ($\triangle$-Ungleichung)

Def. Für einen metrischen Raum (X, d) und eine Teilmenge $A \subset X$ ist $(A, d|_A)$ ein metrischer Raum und $d|_A$ heißt **induzierte Metrik**.

Def. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, falls für alle $x \in X$ gilt:

$$\forall \epsilon{>}0 : \exists \delta{>}0 : \forall x'{\in}X : d_X(x, x') < \delta \implies d_X(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Def. Die **offene Kugel** von Radius ϵ um $x \in X$ ist

$$B_\epsilon(x) := \{p \in X \,|\, d(p, x) < \epsilon\}.$$

Def. Eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes heißt **offen**, falls für alle $u \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(u) \subset U$.

Prop. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann offen, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Def. Ein **topologischer Raum** $(X, \mathcal{T})$ besteht aus einer Menge X und einer Menge $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften
- $\emptyset \in \mathcal{T}$, • $\forall U, V \in \mathcal{T} : U \cap V \in \mathcal{T}$, • $\forall S \subset \mathcal{T} : \bigcap\limits_{U \in S} U \in \mathcal{T}$

Die Elemente von $\mathcal{T}$ werden **offene Teilmengen** von X genannt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist.

Bsp. Die **diskrete Topologie** auf einer Menge X ist $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Bsp. Die **Klumpentopologie** auf einer Menge X ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Def. Die Menge der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes heißt von der Metrik **induzierte Topologie**.

Def. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt

$$\mathcal{T}|_A := \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

Unterraumtopologie oder von $\mathcal{T}$ **induzierte Topologie**.

Def. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik auf X existiert, sodass die von der Metrik induzierte Topologie mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt.

Def. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **Hausdorffsch**, falls gilt:

$$\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset.$$

Prop. Metrisierbare topologische Räume sind Hausdorffsch.

Def. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt **stetig**, falls gilt

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Notation. $\mathcal{C}(X, Y) := \{f : X \to Y \,|\, f \text{ stetig}\}$

Bem. Ist $f : X \to Y$ stetig und $A{\subset}X$, so ist $f|_A : A \to Y$ stetig.

Def. Falls $f : X \to Y$ bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind, so heißt f ein **Homöomorphismus**.

Def. Zwei topologische Räume X und Y heißen **homöomorph**, wenn ein Homöomorphismus zwischen X und Y existiert.

Notation. $X \approx Y \quad :\iff \quad X$ und Y sind homöomorph

Satz. $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m \iff n = m$

Def. Sei X eine Menge und $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ Topologien auf X. Dann sagen wir

$\mathcal{T}$ ist **gröber** als $\mathcal{T}'$ $:\iff$ $\mathcal{T}'$ ist **feiner** als $\mathcal{T}$ $:\iff$ $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Def. Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ offener Teilmengen eines Raumes heißt
- **Basis** der Topologie, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.
- **Subbasis** der Topologie, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ Vereinigung von endlichen Schnitten von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Bspe.
- Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \,|\, x \in X, \epsilon > 0\}$ eine Basis der induz. Topologie auf X.
- $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \,|\, x \in \mathbb{Q}^n, \epsilon \in \mathbb{Q}_+\}$ ist eine abz. Basis von $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$.

Prop. Jedes $\mathcal{B}{\subset}\mathcal{P}(X)$ ist Subbasis genau einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X.

Def. Die Topologie heißt die von $\mathcal{B}$ **erzeugte Topologie**.

Def. Sind $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, so ist auch $(X \times Y, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum mit der **Produkttopologie** $(\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$, die von

$$\mathcal{B} := \{U \times Y \,|\, U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times V \,|\, V \in \mathcal{T}_Y\} \quad \text{erzeugt wird.}$$

Prop.
- Die Projektionen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ sind stetig bzgl. der Produkttopologie.
- Ist $\mathcal{T}$ eine echt gröbere Topologie auf $X \times Y$ als die Produkttopologie, so sind die Projektionen π_X und π_Y nicht beide stetig.

Def. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Dann erzeugt $\mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y$ die **Summentopologie** auf $X \cup Y$.

Bem. Sie ist die feinste Topologie auf $X \cup Y$, sodass die beiden Inklusionen $i_X : X \hookrightarrow X \cup Y$ und $i_Y : Y \hookrightarrow X \cup Y$ stetig sind.

Prop. Seien X, Y, Z topologische Räume.
- Falls $X \cap Y = \emptyset$, so ist eine Abbildung $f : X \cup Y \to Z$ genau dann stetig, falls die beiden Kompositionen $f \circ i_X : X \to Z$ und $f \circ i_Y : Y \to Z$ stetig sind.
- Eine Abb. $g : Z \to X \cup Y$ ist genau dann stetig, wenn die beiden Kompositionen $\pi_X \circ g : Z \to X$ und $\pi_Y \circ g : Z \to Y$ stetig sind.

Def. Sei X ein topol. Raum. Das **Innere** $\text{int}(A)$ von $A \subset X$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen in X, die in A enthaltenen sind.

Bem. Als Vereinigung offener Mengen ist das Innere offen.

Def. Der **Abschluss** $\overline{A}$ einer Menge $A \subset X$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen von X, die A enthalten.

Bem. Es gilt $\overline{A} = X \setminus (\text{int}(X \setminus A))$.

Def. Es sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $V \subset X$. Wir nennen V eine **Umgebung** von x, falls es eine offene Teilmenge $U \subset X$ gibt mit $x \in U$ und $U \subset V$.

Prop. Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in $\overline{A}$, falls jede Umgebung von x einen Punkt aus A enthält.

Def. Der **Rand** einer Menge $A \subset X$ ist $\partial A := \overline{A} \setminus \text{int}(A)$.

Prop. Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in ∂X, wenn jede Umgebung von x einen Punkt aus A wie auch aus $X \setminus A$ enthält.

(Weg-)Zusammenhang

Def. Ein topol. Raum X heißt **wegweise zusammenhängend**, falls $\forall x, y \in X : \exists \gamma : [0, 1] \to X \text{ stetig} : \gamma(0) = x \wedge \gamma(1) = y$.

Bspe. Wegzusammenhängend: • $\mathbb{R}^n$ • $(\{p, q\}, \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\})$
Nicht wegzusammenhängend: • $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subset \mathbb{R}$

Def. **Wegzshgskomponenten** sind die Äq'klassen von

$$x \sim y \quad :\iff \quad x, y \text{ lassen sich durch einen Weg verbinden.}$$

Prop. Sei $f : X \to Y$ stetig und X wegzusammenhängend. Dann ist auch $f(X)$ bzgl. der Unterraumtopologie wegzusammenhängend.

Def. Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, falls X nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

Bspe. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind nicht zusammenhängend.

Prop. Sei X ein topologischer Raum. Es sind äquivalent:
- X ist zshgd. • Jede stetige Abb. $f : X \to \{0, 1\}$ ist konstant.
- Für jede offene und abgeschlossene Menge $A \subset X$ gilt: $A \in \{X, \emptyset\}$.

Prop.
- Ist $f : X \to Y$ stetig und X zshgd, dann auch $f(X)$.
- Sind A, B zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes X und gilt $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cup B$ zshgd.

Def. **Komponenten** von X sind die Äq'klassen von

$x \sim y \quad :\iff$ x und y liegen beide in einem zusammenhängenden Unterraum von X.

Bsp. Die Komponenten von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind genau die Ein-Punkt-Mengen. Trotzdem ist $\mathbb{Q}$ nicht diskret!

Prop. Die Menge $[0, 1]$ ist zusammenhängend.

Kor. Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.

Prop (ZWS)**.** Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(0) < 0$ und $f(1) > 0$, so existiert ein $t \in (0, 1)$ mit $f(t) = 0$.

Konvergenz

Def. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Die Folge (x_n) **konvergiert gegen** $x \in X$, falls für jede Umgebung $U \subset X$ von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\forall\, n \geq N \,:\, x_n \in U$.

Notation. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

Bem. Die Notation $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ist nur in Hausdorffräumen zulässig!

Def. Sei $f : X \to Y$ eine Abb. zw. topol. Räumen X, Y. Dann heißt f

- **stetig in** $x \in X$, falls für jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von x ist.
- **folgenstetig in** $x \in X$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ die Bildfolge $(f(x_n))$ in Y gegen $f(x)$ konv.

Prop. Ist f stetig in x, so ist f auch folgenstetig in x.

Def. Eine **Umgebungsbasis** von $x \in X$ ist eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bestehend aus Umgebungen von x, sodass jede Umgebung von x eine der Umgebungen in $\mathcal{B}$ enthält.

Def. Der Raum X erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Bem. Jeder metrische Raum X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, da für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\mathcal{B}_x := \{B_{1/n}(x) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis ist.

Prop. Sei $x \in X$ ein Punkt mit abzählbarer Umgebungsbasis. Dann ist jede in x folgenstetige Abbildung $f : X \to Y$ auch stetig in x.

Def. Eine **gerichtete Menge** ist eine Menge D mit einer partiellen Ordnung $(\leq) \subset D \times D$, sodass $\forall\, \alpha, \beta \in D \,:\, \exists\, \gamma \in D \,:\, \gamma \geq \alpha \wedge \gamma \geq \beta$.

Def. Ein **Netz** in X ist eine Abbildung $\phi : D \to X$, wobei D eine gerichtete Menge ist.

Def. Sei $x \in X$ und $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ ein Netz in X. Das Netz (x_α) **konvergiert** gegen x, falls es für jede Umgebung $U \subset X$ von x ein $\beta \in D$ gibt mit $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha \geq \beta$.

Notation. $\lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha = x$

Def. Eine Abb. $f : X \to Y$ heißt **netzstetig** in $x \in X$, falls für jedes Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ in X mit $\lim\limits_{\alpha\in D} x_\alpha = x$ das Bildnetz $(f(x_\alpha))_{\alpha\in D}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Prop. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn sie netzstetig in x ist.

Prop. Ist $A \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so besteht $\overline{A}$ genau aus den Limiten von Netzen in A, die in X konvergieren.

Def. Ein **Häufungspunkt** eines Netzes $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ in X ist ein Punkt $x \in X$, sodass für jede Umgebung $U \subset X$ von x das Netz **häufig** in U ist, d. h. für alle $\alpha \in D$ existiert ein $\beta \geq \alpha$ mit $x_\beta \in U$.

Def. Sind D und E gerichtete Mengen, so nennen wir eine Abb. $h : E \to D$ **final**, falls $\forall\, \delta \in D \,:\, \exists\, \eta \in E \,:\, \forall\, \gamma \geq \eta \,:\, h(\gamma) \geq \delta$.

Def. Ein **Unternetz** eines Netzes $\phi : D \to X$ ist eine Komposition $\phi \circ h : E \to X$ wobei $h : E \to D$ eine finale Funktion ist. Wir schreiben auch $(x_{h(\gamma)})_{\gamma\in E}$

Prop. Sei $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ ein Netz in X. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Häufungspunkt von (x_α), falls ein Unternetz von (x_α) gegen x konv.

Def. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt **Cauchy-Folge**, falls $\forall\, \epsilon{>}0 \,:\, \exists\, N{\in}\mathbb{N} \,:\, \forall\, n, m{\geq}N \,:\, d(x_n, x_m){<}\epsilon$.

Def. Der metrische Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Achtung. Vollständigkeit ist keine Homöomorphieinvariante!

Def. Sei X eine Menge. Dann ist die Menge

$$\mathcal{B}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \,|\, \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty\}$$

der **beschränkten Funktionen** $X \to \mathbb{R}$ ein metrischer Raum mit

$$d(f, g) := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Prop. Dieser Raum $(\mathcal{B}(X), d)$ ist vollständig.

Def. Eine Abb. $f : (X, d) \to (X', d')$ zw. metr. Räumen heißt …

- … **isometrische Einbettung**, falls für alle $x, y \in X$ gilt:
$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$
- … **Isometrie**, falls f zusätzlich bijektiv ist. In diesem Fall ist auch f^{-1} eine Isometrie und f ein Homöomorphismus.

Prop. Sei X ein metrischer Raum. Dann gibt es eine isometrische Einbettung von X in einen vollständigen metrischen Raum.

Def. Eine **Vervollständigung** eines metrischen Raumes X ist ein vollständiger metrischer Raum Y mit einer isometrischen Einbettung $f : X \to Y$, sodass $f(X)$ **dicht** in Y liegt, d. h. $\overline{f(X)} = Y$.

Satz. Für jeden metrischen Raum existiert eine Vervollständigung.

Prop. Sei X ein metrischer Raum und $f_{1,2} : X \to Y_{1,2}$ Vervollständigungen von X. Dann existiert genau eine Isometrie $\phi_{21} : Y_1 \to Y_2$ mit $\phi_{21}|_{f_1(X)} = f_2 \circ f_1^{-1}$.

Bsp. Die kanonische Inklusion $C_c^\infty(U) \hookrightarrow L^p(U)$ ist eine Vervollständigung von (C_c^∞, d_p) mit

$$d_p(f, g) := \left(\int_U |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Kompaktheit

Def. Es sei X ein topologischer Raum. Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Teilmengen mit $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = X$.

Def. Der Raum X heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, also eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ mit $\bigcup\limits_{i\in I_0} U_i = X$.

Def. Eine Familie $\mathcal{C}$ von Teilmengen von X hat die **endliche Schnitteigenschaft**, falls der Schnitt je endlich vieler Mengen aus $\mathcal{C}$ nichtleer ist.

Prop. Ein Raum X ist genau dann kompakt, falls jede Familie $(C_i)_{i\in I}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X, die die endliche Schnitteigenschaft besitzt, einen nichtleeren Schnitt hat.

Bem. Kompaktheit ist eine Homöomorphieinvariante.

Prop. Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist abg.

Prop. Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist $f(X)$ kompakt.

Prop. Ein abg. Teilraum eines kompakten Raumes ist kompakt.

Prop. Sei $f : X \to Y$ eine bij. stetige Abb. von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum. Dann ist f ein Homöomorphismus.

Prop. Das Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

Prop. Seien X, Y kompakt. Dann ist auch $(X \times Y)$ kompakt.

Satz (Heine-Borel). Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz. Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie kompakter Räume. Dann ist das topologische Produkt $\prod\limits_{i\in I} X_i$ ebenfalls kompakt.

Def. Ein topologischer Raum X heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Prop. Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.

Def. Sei $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ ein Netz in einem topol. Raum X und $A \subset X$. Dann ist $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ **schließlich** in A, falls es ein $\beta \in D$ gibt mit $x_\alpha \in A$ für alle $\alpha \geq \beta$.

Def. Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ heißt **universell**, falls für jede Teilmenge $A \subset X$ das Netz entweder schließlich in A oder in $X \setminus A$ ist.

Prop. Jedes nichtleere Netz in X besitzt ein universelles Unternetz.

Bem. Der Beweis der Prop. verwendet das Lemma von Zorn.

Def. Ein topol. Raum X heißt **netzkompakt**, falls jedes nichtleere Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ in X ein konvergentes Unternetz besitzt.

Satz. Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- X ist kompakt.
- X ist netzkompakt.
- Jedes nichtleere Netz in X hat ein konvergentes Unternetz.

Satz (Tychonoff). Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie kompakter Räume. Dann ist das topologische Produkt $\prod\limits_{i\in I} X_i$ ebenfalls kompakt.

Def. Eine **Kompaktifizierung** eines topol. Raumes X ist ein kompakter topologischer Raum Y zusammen mit einer topologischen Einbettung $f : X \to Y$, sodass $f(X)$ dicht in Y liegt, d. h. $\overline{f(X)} = Y$.

Def. Ein topologischer Raum X heißt **lokalkompakt**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

Bspe. • Jeder diskrete topologische Raum ist lokalkompakt.
• Ein normierter Vektorraum ist genau dann lokalkompakt, wenn er endlichdimensional ist.

Def. Sei X ein Hausdorffraum. Setze $X^+ := X \sqcup \{\infty\}$. Eine Menge $U \subset X^+$ heißt offen, wenn

- $U \subset X$ und U ist offen in X oder
- $\infty \in U$ und $X \setminus U \subset X$ kompakt ist.

Dies definiert eine Topologie auf X^+, der sogenannten **Einpunktkompaktifizierung** von X.

Bem. • Ist X lokalkompakt, dann ist X^+ Hausdorffsch.
• Ist X selbst kompakt, so trägt $X^+ = X \cup \{\infty\}$ die Summentopol.

Prop. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, Y ein kompakter Hausdorffraum, $p \in Y$ und $X \approx Y \setminus \{p\}$. Dann gilt $X^+ \approx Y$.

Kor. $S^n \approx (\mathbb{R}^n)^+$

Notation. Ist $f : X \to Y$ stetig, so definieren wir

$$f^+ : X^+ \to Y^+, \quad f^+|_X := f, \quad f^+(\infty) := \infty.$$

Bem. f^+ ist i. A. nicht stetig, z. B. nicht für $f = i : [0, 1) \to [0, 1]$.

Def. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **eigentlich**, falls das Urbild jeder kompakten Menge in Y unter f kompakt in X ist.

Prop. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, so ist die induz. Abb. $f^+ : X^+ \to Y^+$ genau dann stetig, wenn f eigentlich ist.

Def. Sei X ein normaler Hausdorffraum. Dann ist

$$f : X \to \prod_{\phi \in \mathcal{C}} [0, 1]\,, \quad x \mapsto (\phi(x))_{\phi \in \mathcal{C}} \qquad \text{mit } \mathcal{C} := \mathcal{C}(X, [0, 1])$$

eine topologische Einbettung. Dann ist $\beta X := \overline{f(X)}$ kompakt. Die Abb. $\beta : X \to \beta X$ heißt **Stone-Čech-Kompaktifizierung** von X.

Prop. Sei X ein normaler Hausdorffraum und K ein kompakter Hausdorffraum. Dann faktorisiert jede stetige Abbildung $\phi : X \to K$ in eindeutiger Weise über die Stone-Čech-Kompaktifizierung von X, d. h. es gibt eine eindeutige Abb. $\pi : \beta X \to K$ mit $\pi \circ \beta = \phi$.

Miscellanea

Lem. Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d. h. für je zwei Normen $\|{-}\|_1$ und $\|{-}\|_2$ existieren Zahlen $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n \;:\; \lambda\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le \Lambda\|v\|_1.$$

Lem (Riesz). Sei $(V, \|{-}\|)$ ein normierter reeller VR und $C \subset V$ ein echter Untervektorraum, der abgeschlossen bzgl. $\|{-}\|$ ist. Sei $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $v \in V \setminus C$ mit $\|v\| = 1$ und

$$d(v, C) := \inf_{c \in C} \|v - c\| > 1 - \delta.$$

Lem. Sei $(V, \|{-}\|)$ ein normierter VR und $C \subset V$ ein endlichdim. UVR. Dann ist C abgeschlossen bzgl. $\|{-}\|$.

Prop. Sei $(V, \|{-}\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die abgeschlossene Einheitskugel $B := \{v \in V \mid \|v\| \le 1\}$ ist genau dann kompakt, wenn $\dim(V) < \infty$.

Def. Sei $(V, \|{-}\|)$ ein normierter VR über $\mathbb{R}$. Der VR der **beschränkten Funktionale** ist der normierte VR

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist linear und stetig}\}$$

versehen mit der Norm $\|f\| := \sup_{\|v\| \le 1} |f(v)|$.

Def. Die **Schwach-*-Topologie** auf V^* ist die gröbste Topologie, sodass alle Abbildungen $\phi_v : V^* \to \mathbb{R}, \;\; f \mapsto f(v)$ stetig sind.

Satz. $B_1(0) \subset (V^*, \|{-}\|)$ ist kompakt bzgl. der Schwach-*-Topologie.

Def. Ein topol. Raum X heißt **normal**, falls gilt: Für alle disjunkte abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ gibt es offene Teilmengen $U_A, U_B \subset X$ mit $A \subset U_A$, $B \subset U_B$ und $U_A \cap U_B = \emptyset$.

Bspe. • Metrische Räume • Kompakte Hausdorffräume

Lem (**Urysohn**). Sei X ein normaler topologischer Raum, $F, G \subset X$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f|_F \equiv 0$ und $f|_G \equiv 1$.

Def. Ein topol. Raum erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls er eine abzählbare Basis besitzt.

Satz (**Metrisierbarkeitssatz von Urysohn**).
Erfülle X das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Dann gilt:

$$X \text{ metrisierbar} \iff X \text{ normal und Hausdorffsch}$$

Satz (**Fortsetzungssatz von Tietze**).
Sei X normal, $F \subset X$ abgeschlossen. Ist $f : F \to \mathbb{R}$ stetig, so ex. eine stetige Fortsetzung $g : X \to \mathbb{R}$ von f (d. h. $g|_F = f$), für die gilt:

$$\sup_{x \in F} f(x) = \sup_{x \in X} g(x) \quad \text{und} \quad \inf_{x \in F} f(x) = \inf_{x \in X} g(x).$$

Satz (**Jordanscher Kurvensatz**). Sei $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ stetig und injektiv und $C := f(S^1) \subset \mathbb{R}^2$. Dann besteht $\mathbb{R}^2 \setminus C$ aus zwei Zshgskomponenten, einer beschränkten und einer unbeschränkten. Der Rand beider Zusammenhangkomponenten ist jeweils C.

Satz (**Borsuk-Ulam**). Sei $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gibt es antipodale Punkte $x, -x$ mit $f(x) = f(-x)$.

Satz (Ham-Sandwich-Theorem). Seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt. Dann gibt es eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, die alle drei Teilmengen simultan halbiert.

Quotientenräume

Def. Sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f : X \to Y$ surjektiv. Dann ist die **Finaltopologie** auf Y bzgl. f die feinste Topologie, bezüglich der f stetig ist, also

$$U \subset Y \text{ offen } \;:\iff\; f^{-1}(U) \subset X \text{ offen.}$$

Def. Eine surj. Abb. $f : X \to Y$ zw. topologischen Räumen heißt **Identifizierung**, falls Y die Finaltopologie bzgl. f trägt.

Prop. • Die Verkettung von Identifizierungen ist wieder eine Identifizierung.
• Eine surjektive Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann eine Identifizierung, falls gilt: Für alle topol. Räume Z und Abb. $g : Y \to Z$ ist g genau dann stetig, wenn $g \circ f : X \to Z$ stetig ist.

Def. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einem topol. Raum X. Dann heißt die Menge $X/{\sim}$ versehen mit der Finaltopologie bzgl. der Abb.

$$p : X \to X/{\sim}, \quad x \mapsto [x].$$

Quotientenraum (mit **Quotientopologie**).

Bem. Bei der Quotientenbildung bleiben erhalten:
• Kompaktheit, • Zusammenhang, • Wegzusammenhang.

Achtung. Der Quotientenraum von Hausdorffräumen ist nicht unbedingt Hausdorffsch!

Notation. Für $\emptyset \ne A \subset X$ ist $X/A := X/{\sim}$ mit

$$x \sim y \quad :\iff \quad (x = y) \vee (\{x, y\} \subset A)$$

Prop. Ist X ein normaler Hausdorffraum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist X/A ebenfalls normal und Hausdorffsch.

Def. Die **reellen projektiven Räume** sind definiert als

$$\mathbb{R}P^n := S^n/{\sim} \qquad \text{mit } x \sim y \;:\iff\; x = \pm y.$$

Prop. $\mathbb{R}P^n$ ist kompakt und Hausdorffsch.

Bem. Mit $D^n := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$D^n/{\sim} = \mathbb{R}P^n \qquad \text{mit } x \sim y \;:\iff\; (\{x, y\} \subset \partial D) \wedge (x = \pm y).$$

Bsp. Möbiusband: $M := [0, 1] \times [-1, 1] \,/ (0, t) \sim (1, -t)$

Def. Seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$ und $f : A \to Y$ stetig. Sei $\sim$ die kleinste Äquivalenzrelation auf $X \sqcup Y$, für die $a \sim f(a)$ für alle $a \in A$ gilt. Dann heißt

$$Y \cup_f X := (X \sqcup Y)/{\sim} \qquad \textbf{Anheftung von } X \textbf{ entlang } f.$$

Prop. Ist $Y \cup_f X$ ein Anhefungsraum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist $Y \hookrightarrow Y \cup_f X, y \mapsto [y]$ ein Homöomorphismus auf einen abgeschlossenen Teilraum und $X \setminus A \hookrightarrow Y \cup_f X, x \mapsto [x]$ ist ein Homöomorphismus auf einen offenen Teilraum.

Def. Für $f : X \to Y$ stetig und $f_0 : X \times \{0\} \to Y, (x, \_) \mapsto f(x)$ heißt

$$Z_f = Y \cup_{f_0} (X \times [0, 1]) \qquad \textbf{Abbildungszylinder } Z_f \text{ von } f.$$

Man identifiziert X mit $X \times \{1\} \subset Z_f$.

Def. $C_f := Z_f/(X \times \{1\})$ heißt **Abbildungskegel**.

Simplizialkomplexe

Def. Ein **abstrakter Simplizialkomplex** ist ein Paar (X, Σ) bestehend aus einer total geordneten Menge X und einer Teilmengen $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ (genannt Menge der **abstrakten Simplizes**), sodass gilt:

- Jedes Simplex $\sigma \in \Sigma$ ist nichtleer und endlich.
- Für jede nichtleere Teilmenge $\tilde{\sigma} \subset \sigma \in \Sigma$ gilt $\tilde{\sigma} \in \Sigma$.
- Jedes $x \in X$ ist in mind. einem Simplex enthalten, also $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = X$.

Def. • Für $\sigma \in \Sigma$ heißt $\dim(\sigma) := |\sigma| - 1$ die **Dimension** von σ.

- Teilmengen von σ heißen **Seiten** von σ.
- Nulldim. Simplizes heißen **Ecken**, eindim. Simplizes **Kanten**.
- Der Simplizialkomplex (X, Σ) heißt **endlich**, wenn X endlich ist.

Notation. $[n] := \{0, 1, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$

Def. $\Delta^n_{\text{abstr}} := ([n], \mathcal{P}([n]))$ heißt **volles n-dim. Simplex**

Def. Für $v_0, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\langle v_0, \ldots, v_n \rangle := \{t_0 v_0 + \ldots + t_n v_n \,|\, 0 \leq t_0, \ldots, t_n \text{ und } t_0 + \ldots + t_n = 1\}$$

von den Vektoren $v_0, \ldots v_k$ **aufgespanntes k-Simplex**. Falls $v_0, \ldots, v_k$ nicht affin unabhängig, so ist der k-Simplex degeneriert. Ist dies nicht der Fall, so ist jeder Punkt eindeutig durch die **baryzentrischen Koordinaten** $t_0, \ldots, t_n$ identifiziert.

Def. $\Delta^n := \langle e_0, \ldots, e_n \rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt **Standard-n-Simplex**, wobei $e_0, \ldots, e_n$ die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen.

Bem. Für $k \leq n$ induziert jede ordnungserhaltende Abbildung $\phi : [k] \to [n]$ eine Einbettung durch

$$i_\phi : \Delta^k \to \Delta^n, \quad \sum_{i=0}^k t_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^k t_{\phi(i)} e_{\phi(i)}.$$

Def. Für einen abstrakten Simplizialkomplex (X, Σ) heißt

$$|\Sigma| := T/\!\sim\, := \left(\coprod_{\sigma \in \Sigma} \Delta_\sigma \right) /\!\sim$$

mit $\Delta_\sigma := \Delta^{\dim \sigma} = \Delta^{|\sigma|-1}$ und der Äq'relation $\sim$, die für alle Simplizes $\tau \subseteq \sigma \in \Sigma$ und der durch die Totalordnung auf X ind. ordnungserhaltenden Abb. $\phi : [\dim \tau] \to [\dim \sigma]$ alle Punkte $x \in \Delta_\tau$ mit $i_\phi(x) \in \Delta_\sigma$ identifiziert, **geom. Realisierung** von Σ.

Bem. Offensichtlich ist $|\Sigma|$ immer normal und kompakt genau dann, wenn der abstrakte Komplex Σ endlich ist.

Prop. $|\Delta^n_{\text{abstr}}| = \Delta^n$.

Def. $\partial \Delta^n := \{\sum_{i=0}^n t_i e_i \,|\, 0 \leq t_i, \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_j = 0 \text{ für ein } j\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Prop. $|([n], \mathcal{P}([n]) \setminus \{[n]\})| \approx \partial \Delta^n$.

Def. Ein topologischer Raum heißt **triangulierbar**, wenn er homöomorph zu einem geometrischen Simplizialkomplex ist. Den Homöomorphismus bezeichnet man als **Triangulierung**.

Bsp. $S^n \approx \partial \Delta^{n+1}$

Def. Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls mit je zwei Punkten $x, y \in K$ auch die Verbindungsstrecke $\{tx + (1-t)y \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$ in K liegt. Ist K außerdem abgeschlossen, so heißt K **konvexer Körper** im $\mathbb{R}^n$.

Def. Für $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die **konvexe Hülle** von A definiert durch

$$\operatorname{conv} A := \bigcap \{X \subset \mathbb{R}^n \,|\, X \text{ konvex und } A \subset X\}.$$

Prop. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer Körper und $0 \in \operatorname{int}(K)$. Dann schneidet jeder Strahl im $\mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt 0 den Rand von K in höchstens einem Punkt. Ist K zusätzlich beschränkt (also kompakt und ein konvexer Körper), dann schneidet jeder Strahl den Rand von K in genau einem Punkt.

Prop. Jeder beschränkte konvexe Körper $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in \operatorname{int}(K)$ ist homöomorph zu S^{n-1} vermöge $f : \partial K \to S^{n-1}, \;\; x \mapsto x/\|x\|$.

Notation. $D^n := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$.

Prop. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter konvexer Körper mit $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$. Dann gilt $\partial K \approx \partial D^n$ und $K \approx D^n$.

Kor. $\Delta^n \approx D^n$ und $\partial \Delta^n \approx S^{n-1}$.

Prop. Sei $S = (X, \Sigma)$ ein endlicher abstrakter Simplizialkomplex, also $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ und seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig. Dann ist die Vereinigung all jener affinen Simplizes

$$\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \rangle \subset \mathbb{R}^n \quad \text{mit } \{i_1, \ldots, i_k\} \in \Sigma \qquad \text{homöomorph zu } |S|.$$

Def. Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ heißt **(geom.) Simplizialkomplex**, falls T Vereinigung von affinen Simplizes $\sigma_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in I$ mit der folgenden Eigenschaft ist: Der Schnitt $\sigma_i \cap \sigma_j$ zweier dieser Simplizes ist entweder leer oder eine gemeinsame Seite von σ_i und σ_j.

Bem. In diesem Fall ist T homöomorph zur geometrischen Realisierung eines abstrakten Simplizialkomplexes.

Homotopie und Fundamentalgruppe

Def. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen zueinander **homotop** (geschrieben $f \simeq g$), falls es eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

mit $H(-,0) = f$ und $H(-,1) = g$ gibt.

Lem. Sei X ein topologischer Raum, $X = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ wobei $C_i \subset X$ abgeschlossen, seien $f_i : C_i \to Y$ stetig mit

$$\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\} \;:\; f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}.$$

Dann ist $F : X \to Y, x \mapsto f_i(x), x \in C_i$ stetig.

Prop. • Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

- Seien $f, g : X \to Y$, $h : X' \to X$, $k : Y \to Y'$ stetige Abbildungen. Gilt $f \simeq g$, so auch $k \circ f \circ h \simeq k \circ g \circ h$.

Bsp. • Für $Y \subset \mathbb{R}^n$ konvex sind je zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ zueinander homotop mittels der **linearen Homotopie**

$$H : X \times [0,1] \to Y, \quad (x,t) \mapsto tg(x) + (1-t)f(x).$$

- Für $X = \{p\}$ einpunktig sind Homtopien $H : X \times [0,1] \to Y$ nichts anderes als Wege in Y.

Def. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist eine **Homotopieäquivalenz**, falls ein stetiges $g : Y \to X$ existiert mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Dieses g heißt **Homotopieinverses** zu f.

Def. Existiert eine Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$, so heißen X und Y **homotopieäquivalent**, geschrieben $X \simeq Y$.

Bem. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topol. Räume. Ihre Äquivalenzklassen heißen **Homotopietypen**.

Def. Ein topol. Raum heißt **kontrahierbar** (zusammenziehbar), wenn er homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum ist.

Lem. Seien X, Y topologische Räume und Y kontrahierbar. Dann sind alle stetigen Abbildungen $X \to Y$ homotop.

Kor. Kontrahierbare Räume sind wegzusammenhängend.

Prop. Die Sphären $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind nicht kontrahierbar.

Def. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A

- **Retrakt** von X, falls es eine **Retraktion** $r : X \to A$ gibt, d. h. r ist stetig und $r|_A = \mathrm{id}_A$.
- **Deformationsretrakt** von X, falls es eine Retraktion $r : X \to A$ gibt, sodass $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$. Dabei ist $i : A \to X$ die Inklusion.
- **starken Deformationsretrakt** von X, falls es eine Retraktion $r : X \to A$ gibt, sodass $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ mittels einer Homotopie, die die Punkte in A nicht bewegt.

Bem. Ist $A \subset X$ ein Deformationsretrakt, so sind A und X homotopieäquivalent.

Bsp. Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist Y ein starker Deformationsretrakt des Abbildungszylinders Z_f

Def. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen **homotop relativ zu** $A \subset X$ (geschrieben $f \simeq g$ rel A), falls es eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ von f nach g gibt mit

$$H(a,t) = H(a,0) \quad \text{für alle } a \in A \text{ und } t \in [0,1].$$

Bem. $A \subset X$ ist genau dann starker Deformationsretrakt, wenn id_X homotop rel. A zu einer st. Abb. $f : X \to X$ mit $f(X) = A$ ist.

Lem (Reparametrisierungslemma)**.** Seien $\phi_1, \phi_2 : [0,1] \to [0,1]$ stetig und auf $\{0,1\}$ gleich. Sei $F : P \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie, $G_i(p,t) := F(p, \phi_i(t))$ für $i = 1, 2$. Dann sind $G_1, G_2 : P \times [0,1] \to Y$ homotop relativ zu $P \times \{0,1\}$.

Def. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ fest. Dann wird (X, x_0) ein **punktierter Raum** mit Basispunkt x_0 genannt.

Def. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Definiere

$$\pi_1(X, x_0) := \{\gamma : [0,1] \to X \mid \text{geschl. Weg mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}/\sim$$
$$\text{mit} \quad \gamma_1 \sim \gamma_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad \gamma_1 \simeq \gamma_2 \text{ rel } \{0,1\}.$$

Prop. Die Verknüfung $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 \cdot \gamma_2$ induziert eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x_0)$.

Notation. $\eta^{-1}(t) := \eta(1-t)$ für jeden Weg $\eta : [0,1] \to X$.

Def. $\pi_1(X, x_0)$ heißt **Fundamentalgruppe** von (X, x_0).

Bem. $\pi_1(X, x_0)$ hängt nur von der Wegkomponente von x_0 ab.

Prop. Seien $x_0, x_1 \in X$. Jeder Weg $\eta : [0,1] \to X$ von x_0 nach x_1 induziert einen Isomorphismus

$$\Psi_\eta : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1), \quad [\gamma] \mapsto [\eta^{-1} \cdot \gamma \cdot \eta].$$

Falls $\eta \simeq \eta'$, dann gilt $\Psi_\eta = \Psi_{\eta'}$.
Ist η' ein zweiter Weg von x_0 nach x_1, so ist

$$\kappa := [(\eta')^{-1} \cdot \eta] \in \pi_1(X, x_1)$$

und für alle $g \in \pi_1(X, x_0)$ gilt

$$\Psi_{\eta'}(g) = \kappa \cdot \Psi_\eta(g) \cdot \kappa^{-1} \in \pi(X, x_1)$$

und somit i. A. $\Psi_\eta \neq \Psi_{\eta'}$, falls $\pi_1(X, x_1)$ nicht abelsch ist.

Bspe.
- $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$
- $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z} \sim 2\mathbb{Z}$ (mit $x_0 \in \mathbb{R}P^2$ beliebig)
- Sei G eine beliebige Gruppe. Es gibt einen Simplizialkomplex X mit Basispunkt $x_0 \in X$, sodass $\pi_1(X, x_0) \cong G$.

Def. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **basispunkterhaltend** oder **punktiert**, falls $f(x_0) = y_0$.

Def. Eine punktierte Abbildung $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induziert einen Morphismen der Fundamentalgruppen vermöge

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Prop.
- $(-)_*$ besitzt die Funktor-Eigenschaften, d. h.
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \quad \text{und} \quad (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$
- Sind $f, g : X \to Y$ punktierte stetige Abbildungen und $f \simeq g$, so gilt $f_* = g_*$.

Def. Ein topol. Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, falls X wegzshgd ist und $\pi_1(X, x_0) = 1$ für ein (und damit alle) $x_0 \in X$.

Bsp. S^1 ist nicht einfach zusammenhängend.

Prop. Zusammenziehbare Räume sind einfach zusammenhängend.

Prop. Seien X und Y wegzusammenhängend und $x_0 \in X$.
Ist $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, dann ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ ein Isomorphismus.

Bsp. $\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar, also einfach zusammenhängend.

Prop. Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend.

Def. Für einen punktierten Raum (X, x_0) heißt

$$\pi_n(X, x_0) := \{\gamma : (S^n, s_0) \to (X, x_0) \mid \gamma \text{ stetig}\}/\sim$$
$$\text{mit} \quad \gamma_1 \sim \gamma_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad \gamma_1 \simeq \gamma_2 \text{ rel } \{s_0\}.$$

n-te Homotopiegruppe. Dabei ist $s_0 \in S^n$ fest.

Kategorientheorie

Def. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus
- einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von **Objekten**,
- für je zwei Objekte $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\mathrm{Hom}(A, B)$ von **Morphismen** von A nach B. Für $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ schreibt man auch $f : A \to B$ oder $A \xrightarrow{f} B$. Dabei heißt $\mathrm{dom}(f) := A$ **Quelle** (Domain), $\mathrm{codom}\, f := B$ **Ziel** (Codomain) von f. Die Klasse aller Morphismen wird mit $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ bezeichnet.
- einer assoziativen Kompositionsoperation, d. h. einer Abbildung
$$\prod_{A,B,C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C), \quad (f, g) \mapsto f \circ g,$$
$$\text{mit } (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \text{ für alle } A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \in \mathcal{D}.$$
- für jedes $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einem Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_A : A \to A$ mit $\mathrm{id}_A \circ f = f$ und $g \circ \mathrm{id}_A = g$ für alle $f : B \to A$ und $g : A \to B$.

Bem. Die Identitätsmorphismen sind eindeutig bestimmt.

Def. Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{C}$ heißt **Isomorphismus**, falls es einen Morphismus $B \xrightarrow{g} A \in \mathcal{C}$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Dieses g heißt dann **Inverses** von f, geschrieben $f^{-1} := g$.

Bspe. Es gibt die Kategorien
- **Set** der Mengen und Abbildungen,
- **Grp** (**AbGrp**) der (abelschen) Gruppen, **Rng** der Ringe, $\mathbf{Mod_R}$ der R-Moduln, $\mathbf{Vect}_k$ der k-VRe mit den jeweils strukturerhaltenden Abbildungen,
- **Top** der topologischen Räume, **Met** der metrischen Räumen **KompHaus** der kompakten Hausdorffräume, $\mathbf{Top}^*$ der punktierten topologischen Räume mit den jeweils stetigen (und basispunkterhaltenden) Abbildungen,
- Jede Partialordnung $\leq$ auf einer Menge X definiert eine Kategorie $\mathcal{E}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{E}) := X$ und $\mathrm{Hom}(a, b) := \{\leq_{a,b} \mid a \leq b\}$.
- der Relationen **Rel** mit Mengen als Objekten, $\mathrm{Hom}(A, B) := \mathcal{P}(A \times B)$ und, für $S \subseteq B \times C$ und $R \subseteq A \times B$,
$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists\, b \in B : aRb \wedge bSc\}.$$

Bem. Eine Kategorie mit nur einem Objekt ist ein Monoid.

Def. Ein **Gruppoid** ist eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind.

Bem. Eine Gruppoid mit nur einem Objekt ist eine Gruppe.

Def. Das **Fundamentalgruppoid** $\pi(X)$ eines topologischen Raumes X ist die Kategorie mit $\mathrm{Ob}(\pi(X)) := X$ und

$$\mathrm{Hom}(a, b) := \{\gamma : [0,1] \to X \text{ stetig} \mid \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\}/\sim$$
$$\text{mit } \gamma_0 \sim \gamma_1 \quad :\Longleftrightarrow \quad \gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel } \{0,1\}.$$

Bem. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $\sim$ eine Äq'relation auf $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, sodass:
- Falls $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ mit $f \sim g$, so ist $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ und $\mathrm{codom}(f) = \mathrm{codom}(g)$.
- Ist $f \sim g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ und $h \sim k \in \mathrm{Hom}(B, C)$, so gilt auch $h \circ f \sim k \circ g \in \mathrm{Hom}(A, C)$.

Dann gibt es eine Kategorie $\mathcal{C}/\!\sim$ mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/\!\sim) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}/\!\sim) := \mathrm{Mor}(\mathcal{C})/\!\sim$ und $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

Def. Die **Produktkategorie** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ von Kat. $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist def. durch

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((A_1, A_2), (B_1, B_2)) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, B_1) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A_2, B_2).$$

Def. Seien $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann ist **$F \downarrow G$** die Kategorie mit $\mathrm{Ob}(F \downarrow G) :=$ Morphismen $f : F(A) \to G(B)$ und als Morphismen den kommutativen Quadraten

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & G(B) \arrow[d, "G(\beta)"] \\ F(A') \arrow[r, "f'"] & G(B') \end{tikzcd}$$

Def. Die **terminale Kategorie** $\mathbf{1}$ besteht aus dem Objekt $\star$ und dem Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_\star$.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $F_X : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$ der Funktor mit $F_X(\star) = X$. Dann heißt $\mathcal{C}/X := F_X \downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ **Scheibenkategorie**.

Def. Die **Homotopiekategorie** ist $\mathbf{HTop} := \mathbf{Top}/\simeq$.
Die Kategorie $\mathbf{HTop}^*$ besteht aus basispunkterh. Abb. zw. punktierten topol. Räumen. modulo basispunkterh. Homotopie.

Def. Ein (kovarianter) **Funktor** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zw. Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist gegeben durch eine Abb. von Objekten $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ und einem Morphismus $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ für jeden Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, sodass gilt:
- $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f : A \to B$ und $g : B \to C$ aus $\mathcal{C}$.

Def. Die Kategorie **Gpd** ist die Kategorie der Gruppoide mit Funktoren als Morphismen.

Bspe.
- Für $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}, \mathbf{AbGrp}, \mathbf{Rng}, \mathbf{Top}, \ldots$ gibt es den **Vergissfunktor** $U : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.
- Besitzen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ nur je ein Objekt (sind also Gruppen), so ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nichts anderes als ein Gruppenhomo.
- Der **Potenzmengenfunktor** $P : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ ist definiert durch
$$P(A) := \mathcal{P}(A), \quad P(f : A \to B)(X \subseteq A) := f(X) \subseteq B.$$
- Sind P und Q partiell geordnete Mengen, so ist ein Funktor $P \to Q$ nichts anderes als eine ordnungserhaltende Abbildung.

Bem.
- π definiert einen Funktor $\mathbf{Top} \to \mathbf{Gpd}$.

- π_0 definiert Funktoren $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ und $\mathbf{HTop} \to \mathbf{Set}$.
- π_1 definiert Funktoren $\mathbf{Top}^* \to \mathbf{Grp}$ und $\mathbf{HTop}^* \to \mathbf{Grp}$.

Def. Die **duale Kategorie** einer gegebenen Kategorie $\mathcal{C}$ ist die Kategorie $\mathcal{D} := \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ gegeben durch

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) := \mathrm{Ob}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A), \quad f \circ_{\mathcal{D}} g := g \circ_{\mathcal{C}} f.$$

Def. Ein **kontravarianter Funktor** zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein kovarianter Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

Bspe. • Der **kontravariante Potenzmengenfunktor**

$$P^* : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}, \quad P(A) := \mathcal{P}(A), \quad P(f : A \to B)(Y) := f^{-1}(Y)$$

- Sei k ein Körper, dann ist der **Dualisierungsfunktor**

$$* : \mathbf{Vect}_k^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}_k, \qquad *(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}_k}(V, k),$$
$$*(f : V \to W) := (f^* : W^* \to V^*) := \phi \mapsto \phi \circ f$$

Def. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\alpha : F \to G$ ordnet jedem $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\alpha_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ zu, sodass für jeden Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"'] \arrow[d, "\alpha_A"'] & G(B) \arrow[d, "\alpha_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Bem. Ist $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein weiterer Funktor und $\beta : G \to H$ eine weitere natürliche Transformation, so ist $\beta\alpha : F \to H$ definiert durch

$$(\beta\alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X : F(X) \to H(X)$$

eine natürliche Transformation zwischen F und H.

Bem. Für Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ gibt es die **Funktorkat.** $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ der Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ mit nat. Transformationen als Morphismen.

Def. Die Isomorphismen der Funktorkategorie $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ heißen **natürliche Isomorphismen**.

Notation. $F \simeq G \;:\Longleftrightarrow\; \exists$ nat. Isomorphismus zwischen F und G

Lem. Eine natürliche Transformation $\eta : F \to G$ ist genau dann ein natürlicher Isomorphismus, wenn alle Komponenten $(\eta_X : F(X) \to G(X))_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ Isomorphismen sind.

Bsp. Sei $** := * \circ * : \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Vect}_k$ der Bidualisierungsfunktor. Es gibt eine nat. Transformation $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{Vect}_k} \to **$ gegeben durch

$$\eta_V(v \in V) := (\phi \mapsto \phi(v)).$$

Für endlichdimensionale VR V ist η_V ein Isomorphismus, also ist $\eta|\mathbf{FinVect}_k : \mathrm{Id}_{\mathbf{FinVect}_k} \to **$ ein natürlicher Isomorphismus.

Überlagerungen

Def. Seien X, Y topologische Räume.

- Eine Teilmenge $Y \subset Y$ wird durch eine stetige Abbildung $p : X \to Y$ **gleichmäßig überlagert**, falls es einen diskreten Raum D und einen Homöomorphismus

$$\phi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\approx} U \times D \quad \text{mit} \quad p = \pi_1 \circ \phi$$

gibt, wobei $\pi_1 : X \times D \to X$ die Projektion ist.
- Die Abbildung p heißt **Überlagerung**, falls jeder Punkt in Y eine durch p gleichmäßig überlagerte Umgebung besitzt.

Bsp. $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Überlagerung.

Bem. Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung, Y zshgd. Dann ist

$$Y \to \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}, \quad y \mapsto \#(p^{-1}(y))$$

konstant, da lokalkonstant. Falls $d = \#(p^{-1}(y))$ endlich ist, heißt p eine **d-blättrige** Überlagerung. Ansonsten heißt p eine **unendliche Überlagerung**. Eine Überlagerung mit $d > 1$ heißt **nichttrivial**.

Def. Eine stetige Abbildung $p : X \to Y$ heißt **lokaler Homöomorphismus**, falls für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x existiert, sodass $p|_{U_x} : U_x \to p(U_x)$ ein Homöomorphismus ist.

Lem. Jede Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus.

Prop. Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung, $\gamma : [0,1] \to Y$ ein Weg und $x \in X$ mit $p(x) = \gamma(0)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ mit $\tilde{\gamma}(0) = x$ und $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Satz (Homotopie-Liftungsthm). Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung und $F : W \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie. Sei $\tilde{f} : W \to X$ eine Liftung von $F(-,0)$, d. h. $p \circ \tilde{f} = F(-,0)$. Dann existiert eine Homotopie $\widetilde{F} : W \times [0,1] \to X$ mit $\widetilde{F}(-,0) = \tilde{f}$ und $p \circ \widetilde{F} = F$.

Kor. Seien γ_0, γ_1 Wege in Y mit $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ rel $\{0,1\}$ und $\widetilde{\gamma_0}, \widetilde{\gamma_1} : [0,1] \to X$ Liftungen von γ_0 und γ_1 mit dem gleichen Anfangspunkt $\widetilde{\gamma_0}(0) = \widetilde{\gamma_1}(0) = x_0 \in X$.
Dann gilt $\widetilde{\gamma_0}(1) = \widetilde{\gamma_1}(1)$ und $\widetilde{\gamma_0} \simeq \widetilde{\gamma_1}$ rel $\{0,1\}$.

Kor. Sei $\gamma : [0,1] \to Y$ ein geschl. Weg homotop zu einem konstanten Weg rel $\{0,1\}$. Dann ist jeder Lift $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ auch ein geschl. Weg und homotop zu einem konstanten Weg rel $\{0,1\}$.

Kor. Sei Y ein wegzshgder Raum, $p : X \to Y$ eine wegzshgde nichttriviale Überlagerung. Ist $y_0 \in Y$, so gilt $\pi_1(Y, y_0) \neq 1$.

Kor. $\mathbb{R}P^2 \not\approx S^2$, da die Quotientenabb. $S^2 \to S^2/\!\sim\, = \mathbb{R}P^2$ eine nichttriviale Überlagerung und S^2 einfach zshgd ist.

Prop. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Überlagerung von S^1. Bezeichne für geschl. Wege $f : [0,1] \to S^1$ mit $f(0) = f(1) = e^0$ mit $\tilde{f}$ die Liftung von f mit $\tilde{f}(0) = 0$. Dann ist

$$\deg : \pi_1(S^1, 0) \to \mathbb{Z}, \quad [f] \mapsto \tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Def. Jede stetige Abbildung $f : S^1 \to S^1$ ist homotop zu einer Abbildung $\hat{f} : S^1 \to S^1$ mit $f(e^0) = e^0$. Diese kann als geschl. Weg in S^1 aufgefasst werden. Der **Abbildungsgrad** von f ist $\deg \hat{f} \in \mathbb{Z}$.

Prop. $\deg(z \mapsto z^n : S^1 \to S^1) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Kor (Fundamentalsatz der Algebra)**.** Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Def. Ein topol. Raum X heißt **lokal wegzusammenhängend**, falls für alle $x \in X$ und Umgebungen $U_x \subseteq X$ von x eine wegzshgde Umgebung $V_x \subseteq U_x$ von x existiert.

Satz (Liftungstheorem). Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung, W wegzshgd und lokal wegzshgd, $f : W \to Y$ stetig, $x_0 \in X$, $w_0 \in W$ mit $y_0 := p(x_0) = f(w_0)$. Dann existiert eine stetige Abbildung $\tilde{f} : W \to X$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(w_0) = x_0$ genau dann, wenn

$$f_*(\pi_1(W, w_0)) \subseteq \mathrm{im}(p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)).$$

In diesem Fall ist die Liftung $\tilde{f}$ eindeutig.

Def. Eine **Decktransformation** einer Überlagerung $p : X \to Y$ ist ein Homöomorphismus $\phi : X \to X$ mit $p \circ \phi = p$. Ihre Menge bildet mit der Abbildungs-Komposition eine Gruppe $\mathrm{Deck}(p)$.

Kor. Seien $p : X \to Y$ eine Überlagerung, $x_0, x_1 \in X$ mit $p(x_0) = p(x_1)$. Ist X einfach zshgd und lokal wegzshgd, so gibt es genau eine Decktransformation $\phi : X \to X$ mit $\phi(x_0) = x_1$.

Def. Eine Überlagerung $p : X \to Y$ heißt **universell**, falls p surjektiv, X einfach zshgd und lokal wegzshgd ist.

Prop. Seien $p : X \to Y$ und $p' : X' \to Y$ univ. Überlagerungen. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\phi : X \to X'$ mit $p' \circ \phi = p$.

Für $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine universelle Überlagerung und $g = [\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ sei $\tilde{\gamma}$ der Lift von γ mit $\gamma(0) = x_0$. Sei $\psi_g \in \mathrm{Deck}(p)$ die eindeutige Decktransformation mit $\psi_g(x_0) = \tilde{\gamma}(1)$.

Prop. $\Psi : \pi_1(Y, y_0) \to \mathrm{Deck}(p)$, $g \mapsto \psi_g$ ist ein Gruppeniso.

Prop. Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung, X wegzshgd und lokal wegzshgd und $G < \mathrm{Deck}(p)$ eine Untergruppe. Angenommen, für alle $y \in Y$ und $x_0, x_1 \in p^{-1}(y)$ existiert $g \in G$ mit $g(x_0) = x_1$.
Dann gilt $G = \mathrm{Deck}(p)$.

Def. Eine **Wirkung** oder **Operation** einer Gruppe G auf einem Raum X ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{Top}} X$.

Notation. Statt $\phi(g)$ schreibt man auch ϕ_g oder g.

Def. Der **Orbitraum** der Gruppenwirkung von G auf X ist

$$X/G := X/\!\sim \quad \text{mit} \quad x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, g \in G : g(x) = y.$$

Def. Eine Gruppenwirkung $\phi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ heißt **eigentlich diskontinuierlich**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass gilt: $\forall\, g \in G : \phi_g(U) \cap U \neq \emptyset \implies g = e$.

Prop. Sei X zshgd, lokal wegzshgd, $G \to \mathrm{Aut}(X)$ eine eigentlich diskontinuierliche Wirkung. Dann ist $p : X \to X/G$ eine Überlagerung mit Decktransformationsgruppe G.

Satz. Sei X einfach zshgd und lokal wegzshgd. Die Gruppe G wirke eigentlich diskontinuierlich auf X. Dann gilt für jeden Basispunkt $y_0 \in Y := X/G$: $\pi_1(Y, y_0) \cong G$.

Bspe. • $\pi_1(S^1) = \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, • $\pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, • $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \pi_1(S^2/(\mathbb{Z}/2)) \cong \mathbb{Z}/2$

Def. Ein topologischer Raum X heißt **semilokal einfach zshgd**, falls jedes $x \in X$ eine Umgebung $U_x \subset X$ besitzt, sodass $i_* : \pi_1(U_x, x) \to \pi_1(X, x)$ (wobei $i : U_x \hookrightarrow X$ die Inklusion bezeichnet) trivial ist.

Bspe. Semilokal einfach zshgd: • Simplizialkomplexe, • Mften
Nicht semilokal einfach zshgd: • Hawaiianischen Ohrringe

Satz. Sei Y wegzshgd und lokal wegzshgd. Dann besitzt Y genau dann eine univ. Überlagerung, wenn Y semilokal einfach zshgd ist.