Spektralsequenzen

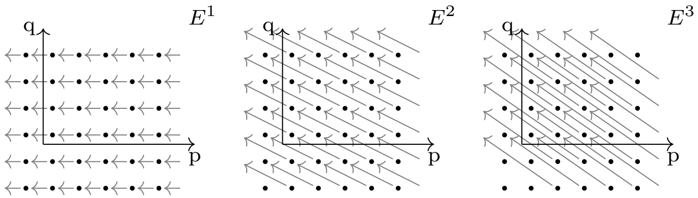
Sei $\mathcal{A}$ im Folgenden eine abelsche Kategorie.

Def. Eine (homologische) **Spektralsequenz** (SS) besteht aus

- Objekten $E^r_{p,q} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \geq 1$,
- Morphismen $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ mit $d^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{p,q} = 0$
- und Isos $\alpha : H_{p,q}(E^r) := \ker(d^r_{p,q}) / \operatorname{im}(d^r_{p+r,q-r+1}) \xrightarrow{\cong} E^{r+1}_{p,q}$.

Sprechweise. • Die Morphismen $d^r_{p,q}$ heißen **Differentiale**.
• Die Gesamtheit $E^r := \{E^r_{p,q}\}_{p,q}$ mit $r \in \mathbb{N}$ fest heißt r-te **Seite**.

Bem. Man stellt Seiten in einem 2-dim Raster dar:



Bem. Bei einer kohomologischen Spektralsequenz sind die Indizes vertauscht und die Differentiale laufen $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$.

Def. Eine Spektralsequenz **konvergiert**, falls für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ ein $R \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $r \geq R$ die Differentiale von und nach $E^r_{p,q}$ null sind und damit $E^\infty_{p,q} := E^R_{p,q} \cong E^{R+1}_{p,q} \cong E^{R+2}_{p,q} \ldots$
Der **Grenzwert** der SS ist die Unendlich-Seite $E^\infty := \{E^\infty_{p,q}\}_{p,q}$.

Notation. $E^r \Rightarrow E^\infty$

Def. Eine SS **degeneriert** auf Seite R, wenn $d^r_{p,q} = 0$ für alle $r \geq R$.

Bem. Das entspricht der gleichmäßigen Konv. aus der Analysis.

Bem. Viele Spektralsequenzen leben im ersten Quadranten, d. h. $E^r_{p,q} = 0$ wenn $p < 0$ oder $q < 0$. Das impliziert, dass für p, q fest und r groß alle Differentiale von und nach $E^r_{p,q}$ aus dem ersten Quadranten heraus- oder hineinführen und damit Null sind.

Def. Ein **exaktes Pärchen** in $\mathcal{A}$ ist gegeben durch Objekte $A, E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ und Morphismen wie folgt

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] & & A \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

sodass das Dreieck an jeder Ecke exakt ist.

Bem. Für das Differential $d := j \circ k : E \to E$ gilt $d^2 = 0$.

Def. Sei ein exaktes Pärchen wie oben gegeben.
Dann gibt es ein **abgeleitetes Pärchen**

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "i'"] & & A' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$$

mit • $E' := \ker(d) / \operatorname{im}(d)$, • $A' := i(A) \subset A$,
• $i' := i|_{A'}$ • $j'(i(a)) := [j(a)] \in E'$ • $k'([e]) := k(e)$

Lem. Das abgeleitete Pärchen eines exakten Pärchens ist exakt.

Bem. Man erhält nun aus einem exakten Pärchen eine Spektralsequenz (im nachfolgenden Sinne) durch iteriertes Ableiten.

Bem. Man kann auch die r-te Seite als einzelnes Obj. E^r auffassen. Dann ist eine **Spektralsequenz** gegeben durch Objekte E^r, $r \geq 1$, Differentiale $d^r : E^r \to E_r$ mit $d^r \circ d^r = 0$ und Isomorphismen $\alpha^r : H(E^r) := \ker(d^r) / \operatorname{im}(d^r) \to E^{r+1}$.

Def. Eine **Filtrierung** eines A-Moduls M ist eine aufsteigende Folge ... $\subseteq F_p M \subseteq F_{p+1} M \subseteq$ ... von Untermodulen von M mit $p \in \mathbb{Z}$, sodass $0 = \cap_p F_p M$ und $M = \cup_p F_p M$.

Bem. Sei $\ldots \subseteq X_p \subseteq X_{p+1} \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Filtrierung eines topologischen Raumes X. Man kann dann die Homologiegruppen schön übersichtlich in ein Raster schreiben:

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(X_p) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n+1}(X_p, X_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_{p-1}, X_{p-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\ H_{n+1}(X_{p+1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n+1}(X_{p+1}, X_p) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_p) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_p, X_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\ H_{n+1}(X_{p+2}) \arrow[r] & H_{n+1}(X_{p+2}, X_{p+1}) \arrow[r] & H_n(X_{p+1}) \arrow[r] & H_n(X_{p+1}, X_p) \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

Die langen exakten Sequenzen von Raumpaaren liegen treppenstufenartig in diesem Raster. Man erhält aus den langen Morphismen wie in den *l. e. S.* (rechts, rechts, runter) exaktes Pärchen (A, E) mit $A_{n+1,p} := H_n(X_p)$ und $E^1_{n,p} := H_n(X_p, X_{p-1})$.

Die Leray-Serre-Spektralsequenz

Def. Eine **Serre-Faserung** ist eine stetige Abb. $p : E \to B$, die die Homotopieliftungseigenschaft für alle CW-Komplexe A erfüllt, d. h. für alle H, H_0 wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales $\tilde{H}$, sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, hook, "i_0"] & E \arrow[d, "p"] \\ A \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists\, \tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Lem. Die Homotopieliftungseig. ist genau dann für alle CW-Komplexe erfüllt, wenn sie für die Kuben $A = [0,1]^n$ erfüllt ist.

Bem. Jeder stetige Weg $\gamma : [0,1] \to B$ in B induziert eine Homotopieäquivalenz $\gamma_* : p^{-1}(\gamma(0)) \to p^{-1}(\gamma(1))$ zwischen den Fasern über Anfangs- und Endpunkt. Wenn B wegzshgd ist, so sind alle Fasern homotopieäquivalent und man notiert $F \to E \to B$ für die Faserung, wobei F die Faser über einem beliebigen Punkt ist. Man erhält eine Wirkung der Fundamentalgr. $\pi_1(B)$ auf der Homologie $H_k(F)$ durch

$$\pi_1(B) \to \mathrm{Aut}(H_k(F)), \quad [(\gamma : [0,1] \to B)] \mapsto (\gamma_* : F \to F)_*$$

Thm. Sei $F \to E \to B$ eine Serre-Faserung, B wegzshgd und G eine ab. Gruppe. Angenommen, $\pi_1(B)$ wirkt trivial auf $H_*(F; G)$.
Dann gibt es die **(Leray-)Serre-Spektralsequenz** mit

$$E^2_{p,q} = H_p(B; H_q(F; G)),$$

deren Eintrag $E^\infty_{p,n-p}$ der Quotient F^p_n / F^{p-1}_n in einer Filtration $0 \subseteq F^0_n \subseteq \ldots \subseteq F^n_n = H_n(X; G)$ von $H_n(X; G)$ ist.

Bem. Wenn G ein Vektorraum ist, so folgt $H_n(X; G) \cong \oplus_p E^\infty_{p,n-p}$.

Thm. Sei $F \to E \to B$ eine Serre-Faserung, B wegzshgd und G eine ab. Gruppe. Angenommen, $\pi_1(B)$ wirkt trivial auf $H^*(F; G)$. Dann ex. die **(Leray-)Serre-Spektralsequenz** für Kohomologie mit

$$E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F; G)),$$

deren Eintrag $E_\infty^{p,n-p}$ der Quotient F_p^n / F_{p+1}^n in einer Filtration $0 \subseteq F_n^n \subseteq \ldots \subseteq F_0^n = H^n(X; G)$ von $H^n(X; G)$ ist.