

Zusammenfassung Gewöhnliche DGLn

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

1. Einführung

Def (Klassifikation von DGLn).

- (I) **Gewöhnliche** DGL: Gesucht ist Funktion in einer Variable
Partielle DGL: Gesucht ist Funktion in mehreren Variablen
- (II) **Ordnung** einer DGL: Höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in Gleichung vorkommt
- (III) **Explizite** DGL: Gleichung der Form $y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)})$
Implizite DGL: Allgemeiner Form $F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0$
- (IV) **Skalare** DGL: Gesucht ist Funktion mit Wert in \mathbb{R}
n-dimensionale DGL: Gesuchte Funktion hat Wert in \mathbb{R}^n
- (V) **Lineare** DGL: Gleichung hat die Form

$$a_k(t)y^{(k)}(t) + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) + c(t) = 0$$

- (VI) **Autonome** DGL: Gleichung der Form $F(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0$
(keine Abhängigkeit von t , Zeitinvarianz)

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann ist ein **Anfangswertproblem** (AWP) gegeben durch die Gleichungen

$$(1.1) \begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Notation. Seien im Folgenden I und J stets Intervalle in \mathbb{R} .

- Def.** • Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von $\dot{y} = f(t, y)$, falls für alle $t \in I$ gilt: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$.
- Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$, $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine k -mal differenzierbare Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von

$$y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)}), \quad (1.2)$$

falls für alle $t \in I$ gilt: $y^{(k)}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$

Satz. • Ist $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2), dann ist

$$(y_1, \dots, y_k): I \rightarrow \mathbb{R}^{kn}, \quad t \mapsto (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$$

eine Lösung des Systems von Gleichungen

$$(1.3) \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{k-1} = y_k \\ y_k = f(t, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k) \end{cases}$$

- Ist umgekehrt $(y_1, \dots, y_k): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.3), dann ist $y = y_1: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2).

Satz. • Ist $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von AWP (1.1), dann ist

$$(y_1, y_2): I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \mapsto (y_1(t), y_2(t)) = (t, y(t))$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.4) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = 1, & y_1(t_0) = t_0 \\ \dot{y}_2(t) = f(y_1(t), y_2(t)), & y_2(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Ist $(y_1, y_2): I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung von (1.4), dann ist $y = y_2: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.1).

Problem. Gesucht ist eine Lösung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ der linearen, skalaren, expliziten DGL 1. Ordnung (mit $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig)

$$\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \quad (1.5)$$

Satz. Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t)$ ist

gegeben durch $y_h(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Satz (Superpositionsprinzip). Sei $y_p: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung von (1.5). Dann ist die Menge aller Lösungen von (1.5)

$$\{y_p + y_h \mid y_h: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist Lösung von } \dot{y}_h(t) = a(t) \cdot y_h(t)\}.$$

Bem. Der Ansatz mit **Variation der Konstanten** $y_p(t) = c(t) \cdot y_h(t)$ für (1.5) führt zu

$$c(t) = \frac{1}{c_0 t_0} \int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \left(\int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

Kor. Die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.6) \begin{cases} \dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mit $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$y(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

Problem. Ges. ist Lösung der DGL mit **getrennten Variablen**

$$\dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y) \quad (1.7)$$

mit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Lsg. 1. Fall: $h(y_0) = 0$ für ein $y_0 \in J$. Dann ist $y(t) = y_0$ eine Lsg.

2. Fall: Es gibt kein $y_0 \in J$ mit $h(y_0) = 0$. Sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ und G eine Stammfunktion von g . Da h stetig und nirgends null ist, ist h entweder strikt positiv oder strikt negativ. Somit ist H streng monoton steigend/fallend und somit umkehrbar. Eine Lösung von (1.7) ist nun gegeben durch

$$y(t) = H^{-1}(G(t) + c_0) \quad \text{mit } c_0 \in \mathbb{R}.$$

Problem. Gesucht ist Lösung des AWP mit getrennten Variablen

$$(1.8) \begin{cases} \dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Lsg. 1. Fall: $h(y_0) = 0$. Dann ist $y(t) = y_0$ eine Lösung.

2. Fall: $h(y_0) \neq 0$. Dann ist h in einer Umgebung von y_0 strikt positiv/negativ. Setze

$$H_1(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{h(s)} ds, \quad G_1(t) := \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

Dann ist H_1 in einer Umgebung von y_0 invertierbar und eine Lösung von (1.8) ist gegeben durch

$$y(t) = H_1^{-1}(G_1(t)).$$

Technik (Transformation). Manchmal lässt sich eine DGL durch **Substitution** eines Termes in eine einfachere DGL überführen, deren Lösung mit bekannten Methoden gefunden werden kann. Die Lsg der ursprünglichen DGL ergibt sich durch Rücksubstitution.

Bsp. Gegeben sei die DGL $\dot{y} = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Substituiere $z(t) = \alpha t + \beta y(t) + \gamma$. Es ergibt sich die neue DGL $\dot{z}(t) = \beta f(z(t)) + \alpha$, die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt.

Bsp (Bernoulli-DGL). Gegeben sei die DGL $\dot{y}(t) = \alpha(t) \cdot y(t) + \beta(t) \cdot (y(t))^\delta$ mit $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Multiplikation mit $(1 - \delta)y^{-\delta}$ und Substitution mit $z(t) = (y(t))^{1-\delta}$ führt zur skalaren linearen DGL 1. Ordnung $\dot{z}(t) = (1 - \delta)\alpha(t)z(t) + (1 - \delta)\beta(t)$.

2. Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abb. $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **stetig in $x_0 \in \mathcal{D}$** , falls $\forall \epsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in \mathcal{D}: \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$.

Die Abb. heißt **stetig in \mathcal{D}** , falls sie in jedem Punkt in \mathcal{D} stetig ist.

Notation. $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty := \sup_{t \in I} \|f(t)\|$

Bem. $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

Def. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluss \bar{A} kompakt in X ist.

Def. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $\mathcal{D} \subset X$. Eine Abbildung $T: \mathcal{D} \rightarrow Y$ heißt

- **stetig in $x \in \mathcal{D}$** , falls $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx$ in Y für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ in \mathcal{D} gilt.
- **Lipschitz-stetig** in \mathcal{D} , falls eine Konstante $\alpha > 0$ existiert mit $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}: \|Tx_1 - Tx_2\|_Y \leq \alpha \cdot \|x_1 - x_2\|_X$.

- **kontraktiv**, falls T Lipschitz-stetig mit $\alpha < 1$ ist.

- **kompakt**, falls T stetig ist und beschränkte Mengen in X auf relativ kompakte Mengen in Y abgebildet werden, d. h. für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{D} besitzt die Folge $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Bem. Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, die Umkehrung gilt aber nicht.

Satz (Arzelà-Ascoli). Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompakt. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn

- \mathcal{F} ist **punktweise beschränkt**, d. h.

$$\forall t \in I : \exists M : \forall f \in \mathcal{F} : \|f(t)\| \leq M$$

- \mathcal{F} ist **gleichgradig stetig**, d. h.

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in I, f \in \mathcal{F} : \|t_1 - t_2\| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| < \epsilon$$

Satz (Fixpunktsatz von Banach). Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $\mathcal{D} \subset X$ nichtleer, abgeschlossen. Sei $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ eine Kontraktion. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $y = Ty$ genau eine Lösung in \mathcal{D} .

Satz (Fixpunktsatz von Schauder). Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, sei $\mathcal{D} \subset X$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt, konvex. Sei $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $y = Ty$ mindestens eine Lösung in \mathcal{D} .

Satz (**Peano**). Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann ist das AWP (1.1) lokal lösbar, d. h. es existiert ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine stetig diff'bare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, die das AWP (1.1) erfüllt.

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Sei $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des AWP (1.1).

- Eine Lösung $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Fortsetzung** (bzw. **echte Fortsetzung**) der Lösung y , falls $I \subset J$ (bzw. $I \subsetneq J$) und $u|_I = y$.
- Die Lösung y heißt **maximale Lösung** des AWP (1.1), falls keine echte Fortsetzung von y existiert. Das Intervall I heißt dann **maximales Existenzintervall**.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- Jede lokale Lösung des AWP (1.1) kann zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden.
- Sei $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine max. Lsg. des AWP (1.1). Dann ist I offen.

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- Die Funktion f heißt **Lipschitz-stetig bzgl. y** auf \mathcal{D} , falls eine Konstante $\mathcal{L} > 0$ existiert, sodass

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{D} : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \mathcal{L} \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

- Wenn für alle $(t, y) \in \mathcal{D}$ eine Umgebung $U_{(t,y)} \subset \mathcal{D}$ existiert, sodass $f|_{U_{(t,y)}}$ Lipschitz-stetig bzgl. y ist, so heißt f **lokal Lipschitz-stetig bzgl. y** auf \mathcal{D} .

Lem. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und stetig diff'bar nach y in \mathcal{D} . Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bzgl. y .

Satz (**Picard-Lindelöf**, lokal quantitativ). Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ und $R_{a,b} := [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}_b(y_0) \subset \mathcal{D}$. Sei f Lipschitz-stetig bzgl. y auf $R_{a,b}$. Dann besitzt das AWP (1.1) im Rechteck $R_{a,b}$ genau eine Lösung $y : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $I_\gamma := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$ mit $\gamma = \min(a, \frac{b}{M})$ und $M = \sup_{(t,y) \in R_{a,b}} \|f(t, y)\|$.

Bem. Im Beweis des Satzes definiert man die Picard-Iterierten $u_j : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $j \in \mathbb{N}$ durch

$$u_0(t) := y_0, \quad u_{j+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_j(\tau)) d\tau.$$

Man zeigt: Die Funktionenfolge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Lösung $u_\infty : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ des AWP.

Satz (Picard-Lindelöf, lokal qualitativ). Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf \mathcal{D} , $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann besitzt das AWP (1.1) eine eindeutige lokale Lösung, d. h. es existiert $\gamma = \gamma(t_0, y_0) > 0$, sodass das AWP (1.1) auf $I_\gamma := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$ genau eine Lösung besitzt.

Satz (Picard-Lindelöf, global). Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf \mathcal{D} , $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall $I = (a_-, a_+)$ mit $t_0 \in I$ und

- Das AWP (1.1) besitzt genau eine Lösung γ auf I .
- Ist $\tilde{z} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige Lösung von (1.1) mit $t_0 \in \tilde{I}$, so gilt $\tilde{I} \subseteq I$ und $z = y|_{\tilde{I}}$.

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Falls f für jedes kompakte Intervall $\tilde{I} \subset I$ global Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\tilde{I} \times \mathbb{R}^n$ ist, dann hat das AWP (1.1) genau eine globale Lösung y auf I .

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $I \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Ist das Wachstum von f linear beschränkt in y auf $I \times \mathbb{R}^n$, d. h. gibt es stetige Funktionen $a, b : I \rightarrow [0, \infty)$ mit $\|f(t, y)\| \leq a(t)\|y\| + b(t)$ für alle $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$, dann besitzt das AWP (1.1) eine eindeutige Lösung auf I .

Satz (Randverhalten maximaler Lösungen). Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ und $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y . Sei $y : (a_-, a_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung des AWP (1.1).

- Ist $a_+ < \infty$, so ist y auf $[t_0, a_+)$ unbeschränkt oder der Rand $\partial\mathcal{D}$ ist nicht leer und $\lim_{t \uparrow a_+} \text{dist}((t, y(t)), \partial\mathcal{D}) = 0$.
- Ist $a_- > -\infty$, so ist y auf $(a_-, t_0]$ unbeschränkt oder der Rand $\partial\mathcal{D}$ ist nicht leer und $\lim_{t \downarrow a_-} \text{dist}((t, y(t)), \partial\mathcal{D}) = 0$.

3. Lineare Differentialgleichungen

Problem. Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Für $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ betrachten wir das AWP

$$(3.1) \begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das AWP (3.1) eine eindeutige (globale) Lösung auf I .

Notation. $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{u : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \text{ stetig}\}$

Def. Eine Teilmenge $M \subset V$ eines Vektorraums V heißt **affiner Teilraum**, wenn es ein $y \in V$ und einen Unterraum $U \subset V$ mit $M = y + U := \{y + u \mid u \in U\}$ gibt.

Satz. Seien $I \subset \mathbb{R}$ offen, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Setze

$$U_h := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \text{ auf } I\}.$$

Dann ist U_h ein n -dimensionaler UVR von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ und für Funktionen $y_1, \dots, y_m \in U_h$ sind äquivalent:

- y_1, \dots, y_m sind linear unabhängig in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- Es gibt $t^* \in I$, sodass $y_1(t^*), \dots, y_m(t^*)$ linear unabh. in \mathbb{R}^n sind.
- Für alle $t \in I$ sind $y_1(t), \dots, y_m(t)$ linear unabhängig in \mathbb{R}^n .

Def. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Eine Menge y_1, \dots, y_n von linear unabh. Lsgn von $\dot{y} = A(t) \cdot y$ heißt ein **Fundamentalsystem** und (y_1, \dots, y_n) **Fundamentalmatrix** der DGL.

Satz. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig.

- Jede Fundamentalmatrix von $\dot{y} = A(t)y$ ist invertierbar f. a. $t \in I$.
- Jede Fundamentalmatrix $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ist stetig differenzierbar.
- Die globale eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ist gegeben durch $y(t) = Y(t)(Y(t_0))^{-1}y_0$.

Satz. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, U_h wie oben und $U := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y} = A(t)y + f\}$. Dann gilt:

- U ist nicht leer.
- Ist $y_p \in U$ eine partikuläre Lösung, dann ist $U = y_p + U_h$, d. h. U ist affiner Unterraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- Sei $y_p, \tilde{y}_p \in U$, dann ist $y_p - \tilde{y}_p \in U_h$.

Satz (Variation der Konstanten). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $Y(t)$ die Fundamentalmatrix. Dann gilt:

- Eine partikuläre Lösung von $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ ist gegeben durch

$$y_p(t) := \int_{t_0}^t Y(t)(Y(s))^{-1}f(s) ds, \quad t_0 \in I.$$

- Es gilt $U = \{\int_{t_0}^t Y(t)(Y(s))^{-1}f(s) ds + Y(t)c \mid c \in \mathbb{R}^n\}$

- Die globale eindeutige Lsg vom AWP (3.1) ist gegeben durch

$$y(t) := Y(t)(Y(t_0))^{-1}y_0 + \int_{t_0}^t Y(t)(Y(s))^{-1}f(s) ds, \quad t \in I.$$

Def. Die **Matrix-Exponentialfunktion** ist definiert als

$$\exp : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A \mapsto e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Satz. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

- Falls A und B kommutieren, d. h. $AB = BA$, dann gilt

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.$$

- Aus $e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt $AB = BA$.
- e^A ist invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
- Wenn B invertierbar ist, dann gilt $e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^AB$.

- Ist A eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so gilt

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$ • $e^{t(A+\lambda I)} = e^{\lambda t} \cdot e^{tA}$

Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar, d. h. es existiere eine Basis aus Eigenvektoren $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sodass $S^{-1}AS =: D$ mit $S := (s_1, \dots, s_n)$ diagonal mit Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist. Dann gilt

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Bem. Wenn e^{tA} eine Fundamentalmatrix ist, dann ist auch $e^{tA}S = Se^{tD}$ eine Fundamentalmatrix.

Def. Der **Jordanblock** der Größe n zum EW λ ist die Matrix

$$J(\lambda, n) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Bem (Jordan-Normalform). Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, für die gilt:

$$P_A(\lambda) = (-1)^N (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene komplexe Eigenwerte mit algebraischen Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sind. Dann gibt es eine Matrix $S \in GL_n(\mathbb{C})$ mit

$$S^{-1}AS = J_A := \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad A_j = \begin{pmatrix} J(\lambda_j, p_{j1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J(\lambda_j, p_{jg_j}) \end{pmatrix}$$

Prop. Für $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$e^{t \cdot J(\lambda, p)} = e^{t\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz. Sei $S^{-1}AS = J_A$ in Jordan-NF. Dann gilt:

$$e^{At} = Se^{J_A t}S^{-1} \quad \text{mit} \quad e^{J_A t} = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{A_k t} \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad e^{A_j t} = \begin{pmatrix} e^{tJ(\lambda_j, p_{j1})} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{tJ(\lambda_j, p_{jg_j})} \end{pmatrix}.$$

Satz. Kommutieren die Matrizen $(A(t))_{t \in I}$ miteinander, d. h.

$$A(t) \cdot A(s) = A(s) \cdot A(t) \quad \text{für alle } t, s \in I,$$

so ist eine Fundamentalmatrix von $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ gegeben durch

$$Y(t) := \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Bem. Insbesondere ist eine Fundamentalmatrix von $\dot{y} = Ay + f$ gegeben durch $Y(t) := e^{A(t-t_0)}$.

Problem. Gegeben seien $f, a_0, \dots, a_{n-1} \in I \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ und $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Betrachte die lineare, skalare DGL

$$(3.1') \begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = z_0, \quad \dot{y}(t_0) = z_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}. \end{cases}$$

Bem. Dieses Problem ist äquivalent zum AWP

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}. \quad \text{Korresp. der Lsgn:} \quad \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in I$, $z = (z_0, \dots, z_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das AWP (3.1') eine eindeutige globale Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Setze

$$U_{h,n} := \{y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \mid y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = 0\}, \\ U_n := \{y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \mid y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = f(t)\}.$$

Dann ist $U_{h,n}$ ein n -dimensionaler UVR von $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ und für Funktionen $x_1, \dots, x_m \in U_{h,n}$ sind äquivalent:

- x_1, \dots, x_m sind linear unabhängig in $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.
- $(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)}), \dots, (x_m, \dot{x}_m, \dots, x_m^{(n-1)})$ sind linear unabhängig in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

- $(x_1(t^*), \dot{x}_1(t^*), \dots, x_1^{(n-1)}(t^*)), \dots, (x_m(t^*), \dot{x}_m(t^*), \dots, x_m^{(n-1)}(t^*))$ sind linear unabhängig in \mathbb{R}^n für ein $t^* \in I$.
- $(x_1(t), \dot{x}_1(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)), \dots, (x_m(t), \dot{x}_m(t), \dots, x_m^{(n-1)}(t))$ sind linear unabhängig in \mathbb{R}^n für alle $t \in I$.

Bezeichnen wir als Fundamentalsystem der DGL in (3.1') eine Menge von n global linear unabhängigen Lösungen der DGL in (3.1') mit $f(t) \equiv 0$, dann gilt:

- Ist $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein Fundamentalsystem, so ist

$$U_{h,n} = \{c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}.$$

- $U_n \neq \emptyset$ und für eine partikuläre Lösung $y_p \in U_n$ der DGL (3.1') ist $U_n = y_p + U_{h,n}$ ein affiner Unterraum von $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$.

Bem. Funktionen $x_1, \dots, x_n \in U_{h,n}$ bilden ein Fundamentalsystem genau dann, wenn

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Bem. Seien die Funktionen $a_j(t) \equiv a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n-1$ konstant. Dann heißt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Begleitmatrix und es gilt

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0).$$

Angenommen, es gilt $P_A(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Nullstellen mit algebraischen Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sind. Falls $k = n$ (bzw. $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1$), so ist $\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}\}$ ein Fundamentalsystem von (3.1'). Sonst ist

$$\tilde{F} := \tilde{F}_1 \cup \dots \cup \tilde{F}_k \quad \text{mit} \quad \tilde{F}_j := \{e^{\lambda_j t}, e^{\lambda_j t} t, \dots, e^{\lambda_j t} t^{\alpha_j - 1}\}$$

ein Fundamentalsystem von (3.1').

Bem. Um den Lösungsraum von (3.1') zu bestimmen, brauchen wir noch eine part. Lsg y_p . Diese kann zum einen durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} y_{1,p}(t) \\ \vdots \\ y_{n,p}(t) \end{pmatrix} := \int_t^{t_0} Y(t) \cdot Y(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds, \quad y_p := y_{1,p}.$$

bestimmt werden. Falls f elementaransatzfähig ist, d. h.

$$f(t) = g(t) \cdot e^{\mu t} \cos(\omega t) + q(t) \cdot e^{\mu t} \sin(\omega t)$$

für Polynome $g(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]$ und $\omega, \mu \in \mathbb{R}$ gilt, dann gibt es eine Lösung der Form

$$y_p(t) = t^\nu (\gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_m t^m) e^{\mu t} \cos(\omega t) + t^\nu (\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_m t^m) e^{\mu t} \sin(\omega t).$$

Dabei ist $m := \max(\deg g, \deg q)$ und

$$\nu := \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu + i\omega \text{ keine Nullstelle von } P_A(\lambda) \text{ ist,} \\ k, & \text{falls } \mu + i\omega \text{ eine } k\text{-fache Nullstelle von } P_A(\lambda) \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Zahlen $\gamma_0, \dots, \gamma_m, \beta_0, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ sind noch zu bestimmen.

Bsp. Das AWP

$$\begin{cases} \ddot{y} + \Theta^2 y = \cos(\omega t) \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2 - \Theta^2} \cos(\Theta t) + \frac{1}{\Theta^2 - \omega^2} \cos(\omega t), & \text{falls } \omega^2 \neq \Theta^2, \\ \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t), & \text{falls } \omega^2 = \Theta^2. \end{cases}$$

4. Asymptotik und Stabilität

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf \mathcal{D} . Eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $\dot{y} = f(t, y)$ und $y(t_0) = y_0$ auf einem Intervall $[t_0, \infty)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ heißt

- **(Lyapunov-) stabil** auf $[t_0, \infty)$, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $(t_0, z_0) \in \mathcal{D}$ und $\|y_0 - z_0\| < \delta$ das AWP

$$(\dagger) \begin{cases} \dot{z} = f(t, z), \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

eine Lösung z auf $[t_0, \infty)$ besitzt, welche die Ungleichung $\|y(t) - z(t)\| < \epsilon$ für alle $t \geq t_0$ erfüllt.

- **attraktiv**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $(t_0, z_0) \in \mathcal{D}$ mit $\|y_0 - z_0\| < \delta$ das AWP (\dagger) eine Lösung z auf $[t_0, \infty)$ besitzt mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - z(t)\| = 0.$$

- **asymptotisch stabil**, falls y stabil und attraktiv ist.
- **exponentiell stabil**, wenn $\delta, \alpha, \omega > 0$ existieren, sodass für alle $(t_0, z_0) \in \mathcal{D}$ mit $\|y_0 - z_0\| < \delta$ das AWP (\dagger) eine Lsg z besitzt mit

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \alpha \|y_0 - z_0\| e^{-\omega(t-t_0)}.$$

Bem. exponentiell stabil \Rightarrow asymptotisch stabil

Bsp. Eine Lösung y des AWP $\dot{y} = \alpha y, y(t_0) = y_0$ ist

- exponentiell stabil, falls $\alpha < 0$,
- stabil, falls $\alpha = 0$ und
- instabil (d. h. weder stabil noch attraktiv), falls $\alpha > 0$.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig.

- Die DGL $\dot{y} = f(y)$ ist translationsinvariant, d. h. ist y eine Lösung von $\dot{y} = f(y)$ auf $[t_0, \infty)$, dann ist $z(t) := y(t_0 + t)$ eine Lösung von $\dot{z} = f(z)$ auf $[0, \infty)$.
- Die Lösung y ist genau dann (exponentiell/asymptotisch) stabil, wenn z (exponentiell/asymptotisch) stabil ist.
- Eine Lösung von $\dot{y} = f(y)$ ist genau dann konstant, also $y(t) \equiv c \in \mathbb{R}^n$, wenn $f(c) = 0$.

Sprechweise. Konstante Lösungen werden auch stationäre Lösungen oder zeitinvariante Lösungen genannt.

Def. Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig auf \mathcal{D} . Jede Nullstelle von f heißt **Ruhelage** (Gleichgewichtspunkt, kritischer Punkt) von f .

Bem. Eine Lösung $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\dot{y} = Ay, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist genau dann (exponentiell/asymptotisch) stabil, wenn es die konstante Lösung $y(t) \equiv 0$ ist.

Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar. Das GGW $y_* \equiv 0$ der DGL $\dot{y} = Ay$ ist genau dann (exp/asympt) stabil, wenn das GGW $z_* \equiv 0$ der DGL $\dot{z} = S^{-1}ASz$ (exp/asympt) stabil ist.

Satz (Stabilität von linearen, autonomen DGLn). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A . Das GGW $y_* \equiv 0$ von $\dot{y} = Ay$ ist genau dann

- stabil, wenn für alle EWe $\Re(\lambda_j) \leq 0$ gilt und alle EWe mit $\Re(\lambda_j) = 0$ halbeinfach sind, d. h. die geometrische Vielfachheit mit der algebraischen übereinstimmt,
- exponentiell stabil, wenn für alle EWe $\Re(\lambda_j) < 0$ gilt,
- ansonsten instabil.

Bem. Falls $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von t abhängig, so gibt es kein Kriterium mit Eigenwerten von $A(t)$, um Stabilität der Lösung $y \equiv 0$ von $\dot{y} = A(t) \cdot y$ zu überprüfen.

Lem. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig. Ist y eine Lsg von $\dot{y} = f(y)$ auf $[0, \infty)$ mit $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, dann ist y_∞ eine Ruhelage von f , d. h. $f(y_\infty) = 0$.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $y_s(t) \equiv y_* \in \mathbb{R}^n$ eine stationäre Lsg von $\dot{y} = f(y)$, d. h. $f(y_*) = 0$. Sei

$$J_f(y_*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(y_*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(y_*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y_*) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von f in y_* . Dann gilt:

- Wenn jeder EW von $J_f(y_*)$ Realteil < 0 besitzt, dann ist $y_s \equiv y_*$ asymptotisch stabil.
- Hat $J_f(y_*)$ mind. einen EW mit Realteil > 0 , dann ist y_s instabil.

Bem. Im Fall von EWen mit Realteil ≤ 0 und mindestens einem EW mit Realteil $= 0$ ist keine Aussage möglich.

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $\mathcal{E} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **erstes Integral** von $\dot{y} = f(y)$, wenn gilt: $\forall y \in \mathcal{D} : (\nabla \mathcal{E}(y) | f(y)) = 0$.

Bsp. Sei $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hamiltonische Funktion. Das zugehörige Hamiltonische System ist

$$\begin{cases} \dot{y} &= \frac{\partial}{\partial z} H(y, z) \\ \dot{z} &= -\frac{\partial}{\partial y} H(y, z). \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{E}(y, z) := H(y, z)$ ein erstes Integral.

Bsp. Das Räuber-Beute-Modell mit Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

$$\begin{cases} \dot{y} &= y(\alpha - \beta z) \\ \dot{z} &= z(\delta y - \gamma) \end{cases}$$

ist nicht hamiltonisch, aber besitzt das erste Integral

$$\mathcal{E}(y, z) := \alpha \ln|z| - \beta z + \gamma \ln|y| - \delta y \quad \text{auf } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

Def. Seien $h, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Die DGL $\dot{y}g(t, y) - h(t, y) = 0$ heißt **exakt**, falls es eine Stammfunktion $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, d. h. $S \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D})$ und

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, y) = h(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial y}(t, y) = g(t, y).$$

Bem. Dann gilt für jede Lösung $y : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$ der DGL:

$$\frac{d}{dt} S(t, y(t)) = \frac{\partial S}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial S}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \dot{y}(t) = 0.$$

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig auf \mathcal{D} , y_* eine Ruhelage von f , $y_s(t) \equiv y_*$ die zugeh. stationäre Lösung, U_{y_*} eine offene Umgebung von y_* . Eine stetig diff'bare Funktion $V : U_{y_*} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- **schwache Lyapunov-Funktion** der DGL $\dot{y} = f(y)$ für y_* , wenn $(\nabla V(y) | f(y)) \leq 0$ für alle $y \in U_{y_*}$.
- **starke Lyapunov-Funktion** der DGL $\dot{y} = f(y)$ für y_* , wenn $(\nabla V(y) | f(y)) < 0$ für alle $y \in U_{y_*} \setminus \{y_*\}$.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig auf \mathcal{D} , y_* eine Ruhelage von f , $y_s(t) \equiv y_*$ die zugeh. stationäre Lösung.

- Sei $V : U_{y_*} \rightarrow \mathbb{R}$ eine **schwache** Lyapunov-Funktion der DGL $\dot{y} = f(y)$ für $y_* \in U_{y_*}$ und es gelte $\forall y \in U_{y_*} \setminus \{y_*\} : V(y_*) < V(y)$, d. h. V hat in y_* ein isoliertes lokales Minimum. Dann ist $y_s(t)$ stabil.
- Wenn V sogar eine **starke** Lyapunov-Funktion ist, so ist $y_s(t)$ asymptotisch stabil.

Def. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases} \quad \text{definit, falls } v^T A v \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Bem. Eine (2×2) -Matrix ist genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante und ihre Spur positiv sind.

Bem. Die Funktion V hat in y_* ein isoliertes lokales Minimum, wenn die Hesse-Matrix $H := (\text{Hess } f)(y_*)$ positiv definit ist, d. h. $\forall v \neq 0 : v^T H v > 0$.

Satz. Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig, y_* eine Ruhelage von f , $y_s(t) \equiv y_*$. Sei $v : U_{y_*} \rightarrow \mathbb{R}$ eine starke Lyapunov-Funktion von $\dot{y} = f(y)$ für $y_* \in U_{y_*}$. Gibt es in jeder Umgebung $\hat{U}_{y_*} \subset U_{y_*}$ von y_* einen Punkt $\hat{y} \in \hat{U}_{y_*}$ mit $V(\hat{y}) < V(y_*)$, so ist $y_s(t)$ instabil.

Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Angenommen, es gibt eine positiv definite Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass die Matrix $A^T P + P A$ negativ definit ist. Dann ist $V(y) := y^T P y$ eine starke Lyapunov-Funktion von $\dot{y} = A y$ für $y_* = 0$ mit der Eigenschaft $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : 0 = V(y_*) < V(y)$.

Satz. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine positiv definite Matrix Q hat die **Lyapunov-Gleichung** $A^T P + P A = -Q$ genau dann eine eindeutige positiv definite Lösung P , wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben.

Kor. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die stationäre Lsg $y_s(t) \equiv 0$ von $\dot{y} = A y$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Lyapunov-Gleichung $A^T P + P A = -Q$ mit einer pos. definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine (eindeutige) Lösung $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt.

Satz. Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine pos. definite Lsg von $A^T P + P A = -I$. Dann gilt

$$\text{Spec}(A) = \{ \text{Eigenwerte von } A \} \subset \{ s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) \leq -\frac{1}{2\|P\|} \}.$$

5. Exakte Differentialgleichungen

Problem. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $p, q : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Betrachte

$$\dot{y}p(t, y) + q(t, y) = 0 \quad (5.1)$$

Def. Die DGL (5.1) heißt **exakt** auf \mathcal{D} , falls es eine stetig diff'bare Funktion $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, y) = q(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial y}(t, y) = p(t, y).$$

Satz. Die DGL (5.1) sei exakt mit Stammfunktion S . Dann erfüllt die Lösung y von (5.1) mit Anfangswert $y(t_0) = y_0$ die Gleichung

$$S(t, y(t)) \equiv S(t_0, y_0).$$

Bem. Falls $\frac{\partial S}{\partial y}(t_0, y_0) = p(t_0, y_0) \neq 0$, so kann man nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung $S(t, y) = S(t_0, y_0)$ nach y auflösen und erhält so eine lokale Lösung von (5.1).

Satz. Sei $\mathcal{D} = (a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $-\infty \leq c < d \leq \infty$. Dann ist die Gleichung (5.1) genau dann exakt, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial q}{\partial y}(t, y)$$

für alle $(t, y) \in \mathcal{D}$ erfüllt ist. Die Stammfunktion ist dann

$$S(t, y) := \int_{t_0}^t q(s, y) \, ds + \int_{y_0}^y p(t_0, z) \, dz.$$

Def. Sei die DGL (5.1) gegeben. Eine stetige und bzgl. y Lipschitz-stetige Funktion $m : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **integrierender Faktor**, falls $m(t, y) \neq 0$ auf \mathcal{D} und die DGL

$$\dot{y} \cdot (p(t, y) \cdot m(t, y)) + (q(t, y) \cdot m(t, y)) = 0 \quad (5.2)$$

exakt ist.

Bem. Da $m \neq 0$ auf \mathcal{D} nach Definition, hat (5.2) dieselben Lösungen wie (5.1).