Dyn. Systeme in der Zahlentheorie

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Dies ist eine übersetzte Zusammenfassung der ersten Kapitel des Buches „Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory" von Harry Furstenberg.

1. (Gleichmäßige) Wiederkehr

Def. Ein **dynamisches System** ist ein Paar (X, G) bestehend aus einem kompakten metrischen Raum X und einer Gruppe oder einem Monoid G mit Wirkung $\varphi : G \to \mathrm{Aut/End}(X)$, $g \mapsto T_g$, $T_g(x) := g.x$.

Def. Ein **Untersystem** eines dynamischen Systems (X, G) ist eine Teilmenge $Z \subseteq X$ mit $T_g(Z) \subseteq Z$ für alle $g \in G$.

Bem. Falls $G = \mathbb{Z}$ oder $M = \mathbb{N}$, dann bezeichnen wir mit $T := T_1$ den Erzeuger der Aktion und nennen (X, T) ein **zykl. System**.

Def. Sei X ein topologischer Raum, $T : X \to X$ stetig.
Ein Punkt $x \in X$ heißt **wiederkehrend**, falls für für alle Umgebungen $V \subset X$ von x ein $n \geqslant 1$ existiert mit $T^n(x) \in V$.

Bem. Sei X sogar ein metrischer Raum, $x \in X$ wiederkehrend.
Dann gibt es eine Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $d(T^{n_k}(x), x) \to 0$ für $k \to \infty$.

Def. Sei X ein topologischer Raum, $T : X \to X$ stetig. Dann heißt

$$Q(x) := \overline{\{T^n x \mid n \geqslant 1\}} \subseteq X$$

abgeschlossener Vorwärtsorbit von $x \in X$.

Lemma.
- $x \in X$ ist wiederkehrend $\iff x \in Q(x)$
- $x \in Q(y) \implies T(x) \in Q(y) \iff Q(x) \subseteq Q(y)$
- Die Relation $xRy :\iff x \in Q(y)$ ist transitiv.

Thm (Birkhoff). Sei X ein kompakter topologischer Raum und $T : X \to X$ stetig. Dann gibt es einen wiederkehrenden Punkt $x \in X$.

Def. Sei K eine kompakte Gruppe, $a \in K$ und $T(x) := ax$. Dann heißt (K, T) ein **Kronecker-System**.

Thm. In einem Kronecker-System sind alle $x \in K$ wiederkehrend.

Def. Ein Homomorphismus zwischen zwei dyn. Systemen (X, G) und (X', G) (zweimal die gleiche Gruppe oder Monoid G) ist eine G-äquivariante stetige Abbildung $\phi : X \to X'$.

Def. Ein dyn. System (Y, G) ist **Faktor** eines dyn. System (X, G), wenn es einen surjektiven Homomorphismus $(X, G) \to (Y, G)$ gibt.
Man nennt (X, G) dann eine **Erweiterung** von (Y, G).

Bem. Sei $\phi : X \to Y$ surjektiv. Dann kann man Y mit der Menge der Fasern von ϕ identifizieren.

Thm. Sei $\phi : (X, T) \to (Y, T)$ ein Morphismus von zyklischen Systemen. Wenn $x \in X$ wiederkehrend ist, dann auch $\phi(x)$.
Allgemeiner: $x \in Q(y) \implies \phi(x) \in Q(\phi(y))$

Def. Sei $(Y, T : Y \to Y)$ ein zyklisches System, K eine kompakte Gruppe und $\psi : Y \to K$ stetig. Setze

$$X := Y \times K, \quad T : X \to X, \ (y, k) \mapsto (Ty, \psi(y)k).$$

Das System (X, T) wird **Gruppenerweiterung** von (Y, T) mit K oder **Schiefprodukt** von (Y, T) mit K genannt.

Bem. Die Gr. K wirkt auf $(X, T) = (Y \times K, T)$ durch Rechtstransl.:

$$R : K \to \mathrm{Aut}(X), \ k \mapsto R_k, \quad R_k(y, k') := (y, k'k).$$

Die Homöomorphismen R_k kommutieren mit T, sind also Automorphismen des dyn. Systems (X, T).

Thm. Sei $(X = Y \times K, T)$ eine Gruppenerw. von (Y, T) und $y_0 \in Y$ wiederkehrend. Dann sind die Pkte $\{(y_0, k) \mid k \in K\}$ wiederkehrend.

Bem. Durch Erweiterung mit der zykl. Gr. $\mathbb{Z}_m$ kann man zeigen:

Prop. Ist $x \in X$ in (X, T) wiederkehrend, dann auch in (X, T^m).

Bsp. Sei $T := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist das System

$$(T^2, (\theta, \phi) \mapsto (\theta + \alpha, \phi + 2\theta + \alpha))$$

eine Gruppenerweiterung des Kronecker-Systems $(T, \theta \mapsto \theta + \alpha)$.
Somit sind alle Punkte des Torus T^2 wiederkehrend.
Aus der Wiederkehr des Punktes $(0, 0)$ erhält man:

Prop. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ gibt es eine ganzzahlige Lsg der diophantinischen Ungleichung $|\alpha n^2 - m| < \epsilon$.

Bem. Durch Verallgemeinerung auf den d-dim Torus zeigt man:

Prop. Sei $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit $p(0) = 0$. Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ eine Lsg der diophantinischen Ungleichung $|p(n) - m| < \epsilon$, $n > 0$.

Def. Sei M ein topol. Raum und $K \subseteq \mathrm{Iso}(M)$ kompakt.
Sei (Y, T) ein zykl. System und $\psi : Y \to K$ stetig. Setze

$$X := Y \times M, \quad T : X \to X, \ (y, u) \mapsto (Ty, \psi(y)u).$$

Das System (X, T) heißt **isometrische Erweiterung** von (Y, T).

Prop. Sei (X, T) eine isom. Erweiterung von (Y, T).
Dann ist $X = \cup X_\alpha$, wobei X_α abgeschlossene T-invariante Teilmengen von X sind, sodass das System $(X_\alpha, T|_{X_\alpha})$ Faktor einer Gruppenerweiterung von (Y, T) ist.

Prop. Sei (X, T) eine isom. Erweiterung von (Y, T) und $y_0 \in Y$ wiederkehrend. Dann sind die Pkte $\{(y, m) \mid m \in M\}$ wiederkehrend.

Def. Sei G eine abz. Gruppe/Monoid und Λ ein kompakter metr. Raum. Sei $\Omega := \Lambda^G \cong \prod \Lambda$ der kompakte metrisierbare Raum der Funktionen von G nach Λ. Die **reguläre Wirkung** von G auf Ω ist

$$G \mapsto \mathrm{Aut/End}(\Omega), \ g \mapsto T_g, \quad T_g(\omega)(g') := \omega(g'g).$$

Ein **Bebutov-System** ist ein Untersystem von (Ω, G).

Bem. Sei $\{g_1, g_2, \ldots\} = G$ eine Abzählung von G.
Dann ist eine Metrik auf Ω definiert durch

$$d(\omega, \omega') := \sum 2^{-n} d(\omega(g_n), \omega'(g_n)).$$

Def. Für $\omega_0 \in \Omega$ ist der Abschluss des Orbits von ω_0,

$$X_{\omega_0} := \overline{\{T_g(\omega_0) \mid g \in G\}},$$

G-invariant. Das dynamische System (X_{ω_0}, G) wird das von ω_0 **erzeugte Bebutov-System** genannt.

Def. Ein **symbolischer Fluss** ist ein Bebutov-System mit endlichem Λ und $G \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$. Die Elemente von Ω sind dann unendliche/doppelt-unendliche Folgen von Elementen von Λ.
Man bezeichnet Λ dann als **Alphabet**.

Def. Ein **Wort** über Λ ist eine endl. Sequenz von Elementen aus Λ. Die Länge $|w|$ eines Wortes ist die Länge der Sequenz.

Prop. Für eine Sequenz $\omega \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ sind äquivalent:
- ω ist wiederkehrend.
- Jedes Wort in ω kommt ein 2. Mal an einer anderen Pos. in ω vor.
- Jedes Wort aus ω kommt an unendlich oft in ω vor.

Bem. Ein wiederkehrendes Wort $\omega \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ hat die allgemeine Form

$$\omega = [(aw^{(1)}a)w^{(2)}(aw^{(1)}a)]w^{(3)}[(aw^{(1)}a)w^{(2)}(aw^{(1)}a)] \ldots$$

mit $a \in \Lambda$ und Wörtern $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$. Damit kann man zeigen:

Def. Eine **Partition** einer Menge ist eine Darstellung dieser Menge als Vereinigung disjunkter Teilmengen.

Lemma (Hilbert). Sei $\mathbb{N} = B_1 \cup \ldots \cup B_q$ eine Partition von $\mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig. Schreibe

$$P(x_1, \ldots, x_l) := \{x_{i_1} + \ldots + x_{i_k} \mid 0 \leqslant k \leqslant l, \ 1 \leqslant i_1 < \ldots i_k \leqslant l\}.$$

Dann gibt es $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_l$, sodass unendlich viele Translationen von $P(m_1, \ldots, m_l)$ in demselben B_j enthalten sind.

Bem. Sei (X, T) ein zykl. System und $f : X \to \Lambda$ stetig. Dann ist

$$(X, T) \to (\Lambda^{\mathbb{N}}, T), \quad x \mapsto (f(x), f(Tx), f(T^2x), \ldots)$$

ein Homomorphismus zyklischer Systeme.

Thm. Seien Λ_1, Λ_2 komp. Räume und $\phi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ eine Abbildung. Für $\omega \in \Lambda_1^{\mathbb{N}}$ definiere $\omega' \in \Lambda_2^{\mathbb{N}}$ durch $\omega'(n) := f(\omega(n))$.
Falls ω wiederkehrend ist und zusätzlich f in allen Punkten $\omega(n)$ stetig ist, dann ist auch ω' wiederkehrend.

Prop. Sei K eine komp. Gruppe und $\xi \in K^{\mathbb{N}}$ wiederkehrend. Dann ist $\eta \in K^{\mathbb{N}}$ definiert durch $\eta(n) := \xi(n)\xi(n-1) \cdots \xi(1)$ wiederkehrend.

Def. Eine Teilmenge S einer abelschen topologischen Gruppe / eines Monoids heißt G **syndetisch**, wenn eine kompakte Menge $K \subset G$ existiert, sodass $\forall g \in G : \exists k \in K : gk \in S$.

Bem. Eine Teilmenge $\{s_1 < s_2 < \ldots\} = S \subset \mathbb{N}$ ist genau dann syndetisch, wenn die Größe $s_i - s_{i-1}$ der „Lücken" zw. Elementen aus S beschränkt ist. Solche Mengen heißen auch **relativ dicht**.

Def. Sei (X, G) ein dyn. System. Ein Punkt $x \in X$ heißt **gleichmäßig wiederkehrend**, falls für alle Umgebungen $V \subset X$ von x die Menge $\{g \in G \mid g.x \in V\}$ syndetisch ist.

Def. Ein dyn. System (X, G) heißt **minimal**, wenn es keine echte abgeschl. Teilmenge von X gibt, die inv. unter der G-Wirkung ist.

Lemma. Sei (X, G) ein dyn System. Es sind äquivalent:
- (X, G) ist minimal
- $\forall x \in X$: der Orbit Gx ist dicht in X
- $\forall \varnothing \neq V \subset X$ offen : $\exists$ endlich viele Elemente $g_1, \ldots, g_n \in G$:

$$g_1^{-1}V \cup \ldots \cup g_n^{-1}V = X.$$

Thm. Sei (X, G) ein minimales dynamisches System. Dann sind alle $x \in X$ gleichmäßig wiederkehrend.

Bem. Aus Zorns Lemma folgt: Jedes dyn. System besitzt ein minimales Untersystem. Es folgt:

Thm. Jedes dyn. System hat einen gleichm. wiederkehrenden Pkt.

Thm. Sei (X, G) ein dyn. System, $x \in X$. Dann sind äquivalent:
- x ist glm. wiederkehrend.
- Das Untersystem $\overline{Gx}$ ist minimal.

Thm. In einem Kronecker-System ist jeder Pkt glm. wiederkehrend.

Thm. Sei (X, T) eine Gruppenerw. oder isometrische Erweiterung von (Y, T) mit Projektion $\pi : (X, T) \to (Y, T)$ und $y_0 \in Y$ glm. wiederkehrend. Dann sind die Pkte $\pi^{-1}(y_0)$ glm. wiederkehrend.

Bem. Es folgt durch Betr. eines dyn. Systems auf dem k-dim Torus:

Thm. Seien $p_1(X), \ldots, p_k(X) \in \mathbb{R}[X]$ Polynome. Für alle $\epsilon > 0$ ist die Teilmenge der nat. Zahlen, die

$$|e^{2\pi i p_1(n) - e^{2\pi i p_1(0)}}| < \epsilon, \ldots, |e^{2\pi i p_k(n) - e^{2\pi i p_k(0)}}| < \epsilon$$

gleichzeitig erfüllen, syndetisch.

Prop. Sei Λ ein endl. Alphabet. Ein Punkt $\omega \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ oder $\omega \in \Lambda^{\mathbb{Z}}$ ist genau dann glm. wiederkehrend, wenn für jedes Wort in ω die Menge der Positionen, an denen dieses Wort auftaucht, syndetisch ist.

Bem. Eine wiederkehrende Sequenz ω in der allgemeinen Form

$$\omega = [(aw^{(1)}a)w^{(2)}(aw^{(1)}a)]w^{(3)}[(aw^{(1)}a)w^{(2)}(aw^{(1)}a)] \ldots$$

ist glm. wiederkehrend, wenn die Länge der $w^{(n)}$ beschränkt ist. Es existieren also nichtperiodische, glm. wiederkehrende Sequenzen.

Def. Ein **Vokabular** ist eine Teilmenge V aller Wörter über einem Alphabet Λ, für die gilt:
- Jedes Teilwort eines Wortes aus V ist ebenfalls in V.
- Jedes Wort in V ist Teilwort eines längeren Wortes aus V.

Def. Sei V ein Vokabular. Sei dann $S(V) \subset \Lambda^{\mathbb{N}}$ die abgeschl., translations-inv. Menge aller Sequenzen, die nur Wörter aus V enthalten.

Lemma. Sei V ein Vokabular, das folgende Bedingung erfüllt: Für alle $l \in \mathbb{N}$ gibt es ein $L \in \mathbb{N}$, sodass für alle Wörter $w \in V$ der Länge $|w| = l$ gilt: w ist in jedem Wort $v \in V$ der Länge $|v| = L$ enthalten. Dann sind alle Sequenzen in $S(V)$ glm. wiederkehrend.

Bem. Sei $\Lambda = \{a_1, \ldots, a_r\}$ und $w_1, \ldots, w_r$ Wörter über Λ, die jeweils alle Buchstaben aus Λ enthalten. Sei $V_1 := \Lambda$ die Menge der Wörter der Länge 1 über Λ und induktiv V_n die Menge der Wörter, die aus einem Wort $w \in V_{n-1}$ durch simultane Substitution

$$a_1 \to w_1, \ldots, a_r \to w_r$$

hervorgehen und deren Teilwörter. Das Vokabular $V := \cup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ heißt dann **substitution minimal set**. Alle Sequenzen in $S(V)$ sind gleichmäßig wiederkehrend.

Bem. Seien $d_1, d_2, \ldots \in \mathbb{N}$ mit $d_n \mid d_{n+1}$ für alle n. Schreibe nun $\mathbb{Z}$ als disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{Z} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (d_k \mathbb{Z} + a_k) \quad \text{mit } a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{Z}.$$

Sei Λ kompakt und $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Λ. Setze $\omega(n) := \lambda_k$, falls $n \in d_k\mathbb{Z} + a_k$. Wenn nun $[-N, N] \subset \sqcup_{k=1}^{l}(d_k\mathbb{Z} + a_k)$, dann gilt für alle $n \in [-N, N], q \in \mathbb{Z}$: $\omega(n) = \omega(n + q \cdot d_l)$. Somit tritt jedes Wort in ω periodisch auf und ω ist glm. wiederkehrend.

Def. Eine Teilmenge $R \subset \mathbb{N}$ oder $R \subset \mathbb{Z}$ heißt **dick**, wenn sie Intervalle $[a_n, a_n + n]$ beliebiger Länge enthält.

Bem. Eine Menge ist genau dann syndetisch, wenn ihr Schnitt mit jeder dicken Menge nichtleer ist. Eine Menge ist genau dann dick, wenn ihr Schnitt mit jeder syndetischen Menge nichtleer ist.

Def. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ oder $A \subset \mathbb{Z}$ heißt **stückw. syndetisch**, wenn sie Schnitt einer dicken und einer syndetischen Menge ist.

Thm. Sei $B \subseteq \mathbb{N}$ oder $B \subseteq \mathbb{Z}$ stückw. syndetisch, $B = B_1 \cup \ldots \cup B_q$ eine Partition. Dann ist auch eine Menge B_i stückweise syndetisch.

Bem. Seien $\tau_1, \ldots, \tau_n$ die kanonischen Erzeuger von $H_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.

Lemma. Habe $T : T^d \to T^d$ die Form

$$T(\theta_1, \ldots, \theta_d) := (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + f_1(\theta_1), \ldots, \theta_d + f_{d-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}))$$

mit α irrational, $f_i : T^i \to T$ stetig mit $(f_i)_*(\tau_i) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, d-1$. Dann ist (T^d, T) ein minimales dynamisches System.

Thm. Sei $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit mind. einem irrationalen Koeffizienten. Dann gibt es $\forall \epsilon > 0$ eine Lsg der Ungleichung $|p(n) - m| < \epsilon$.

Def. Sei X ein kompakter metrischer Raum und $T : X \to X$ stetig. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **wandernd**, wenn die Urbilder $T^{-1}(A)$, ..., $T^{-n}(A)$, ... disjunkt von A (und damit auch voneinander) sind.

Def. Ein dyn. System (X, T) heißt **nicht wandernd**, wenn keine offene, nichtleere Menge $A \subset X$ wandernd ist.

Def. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **nirgends dicht**, falls $\operatorname{int}(\overline{A}) = \varnothing$.

Def. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **mager**, wenn sie Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen ist.

Thm. Sei (X, T) nicht wandernd. Dann ist die Menge der nicht wiederkehrenden Punkte in X mager.

2. Van der Waerdens Theorem

Lemma. Sei X ein komp. metr. Raum, $T : X \to X$ stetig und $A \subset X$. Angenommen, $\forall \epsilon > 0 : \forall x \in A : \exists y \in Y : \exists n \geqslant 1 : d(T^n y, x) < \epsilon$. Dann $\forall \epsilon > 0 : \exists z \in A : \exists n \geqslant 1 : d(T^n z, z) < \epsilon$.

Def. Sei X ein komp. Raum, $T : X \to X$ stetig. Eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **homogen** bzgl. T, wenn es eine Untergruppe $G < \operatorname{Aut}(X)$ gibt mit $\forall S \in G : ST = TS$ und $S(A) = A$, sodass das dyn. System (A, G) minimal ist.

Bsp. Sei $(X, T) = (Y \times K, T)$ eine Gruppenerweiterung von (Y, T). Dann sind die Fasern $\{(y_0, k) \mid k \in K\}$ für alle $y_0 \in Y$ homogen.

Def. Eine abgeschl. Teilmenge $A \subset X$ eines komp. metr. Raumes heißt **wiederkehrend** für eine Transformation $T : X \to X$, falls für alle $\epsilon > 0$ und $x \in A$ ein $y \in A$ und $n \geqslant 1$ existiert, sodass $d(T^n y, x) < \epsilon$.

Lemma. Sei $A \subset X$ homogen bzgl. $T : X \to X$. Angenommen, $\forall \epsilon > 0 : \exists x, y \in A,\ n \geqslant 1 : d(T^n y, x) < \epsilon$. Dann ist A wiederkehrend.

Bsp. Sei $(X, T) = (Y \times K, T)$ eine Gruppenerw. von (Y, T) und $y_0 \in Y$ wiederkehrend. Dann ist die Faser $\{y_0\} \times K$ wiederkehrend.

Lemma. Sei $A \subset X$ homogen und wiederkehrend bzgl. $T : X \to X$. Dann enthält A einen wiederkehrenden Punkt von (X, T).

Thm (Multiple Birkhoff Recurrence, **MBR**). Sei X ein komp. metr. Raum und $T_1, \ldots, T_l : X \to X$ komm. stetige Abbildungen. Dann gibt es einen Punkt $x \in X$ und eine Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $n_k \to \infty$ und $T_i^{n_k} x \to x$ simultan für alle $i = 1, \ldots, l$ bei $k \to \infty$.

Def. Eine **arithmetische Sequenz** der Länge $N \in \mathbb{N}$ ist eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ der Form $A = \{a + ib \mid i = 1, \ldots, N\}$ mit $a \in \mathbb{N}$, $b \geqslant 1$.

Thm (**Grünwald**). Sei $\mathbb{N}^m = B_1 \cup \ldots \cup B_q$ eine Partition von $\mathbb{N}^m$. Dann hat eine Menge B_j die Eigenschaft, dass für alle endl. Teilmengen $F \subset \mathbb{N}^m$ ein $a \in \mathbb{N}^m$ und ein $b \in \mathbb{N}$ existiert mit $bF + a \subset B_j$.

Bem. Dieses Thm ist eine Verallgemeinerung auf >1 Dim. von:

Thm (**van der Waerden**). Sei $\mathbb{N} = B_1 \cup \ldots \cup B_q$ eine Partition. Dann enthält ein B_j arithmetische Sequenzen beliebiger Länge.

Einschub: Etwas Funktionalanalysis

Def. Sei $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ein **topologischer k-Vektorraum** V ist ein k-VR mit einer Topologie bzgl. der die Addition $+ : V \times V \to V$ und die Skalarmultiplikation $\cdot : k \times V \to V$ stetig sind.

Def. Sei $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein k-VR. Eine Teilmenge $A \subset V$ heißt
- **absorbierend**, wenn $\forall v \in V : \exists r > 0 : \forall \alpha \in k : |\alpha| < r \implies \alpha v \in A$.
- **ausgewogen**, wenn $\forall v \in A : \forall \alpha \in k : |\alpha| \leqslant 1 \implies \alpha v \in A$.
- **absolutkonvex**, wenn A ausgewogen und konvex ist.

Lemma. Eine Teilmenge $A \subset V$ ist genau dann absolutkonvex, wenn

$$\forall v, w \in A : \forall \lambda, \mu \in k : |\lambda| + |\mu| \leqslant 1 \implies \lambda v + \mu w \in A.$$

Def. Ein topol. k-VR V heißt **lokalkonvex**, wenn jede Umgebung von $0 \in V$ eine offene, absorbierende, absolutkonv. Teilmenge besitzt.

Bsp. Normierte Räume sind lokalkonvex.

Def. Sei V ein k-VR, $K \subset V$ konvex.
Ein Punkt $x \in K$ heißt **Extremalpunkt**, wenn

$$\forall\, y_i, \dots, y_k \in K,\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0,1]\ :$$
$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \wedge \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k = x \implies y_1 = \dots = y_k = x.$$

Lemma. Sei V ein topol. VR, $A \subset V$. Ist A konvex, dann auch $\overline{A}$.

Satz (Krein-Milman). Sei V ein lokalkonvexer Raum, $K \subset V$ kompakt und konvex. Dann ist K gleich dem Abschluss der von den Extremalpunkten von K aufgespannten konvexen Hülle.

3. Invariante Maße auf kompakten Räumen

Bem. Sei im Folgenden $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum mit einem topol. Raum X, einer σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf X und einem endlichen normierten Maß $\mu : \mathcal{B} \to [0,1]$ mit $\mu(X) = 1$.

Notation. $L^p(X, \mathcal{B}, \mu) := \{$Äq'klassen p-integrierbarer Fktn $X \to \mathbb{R}\}$ heißt **Lebesgue-Raum** ($1 \leqslant p < \infty$). Für $p = \infty$ setze $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) := \{$Äq'klassen wes. beschränkter Fktn $X \to \mathbb{R}\}$.
Es werden dabei Fktn identifiziert, die fast-überall übereinstimmen.

Bem. $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ ist ein Banachraum für $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Notation. $E(f) := \int_X f \, d\mu$ für $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Def. Eine messbare Abbildung $T : X \to X$ heißt **maßerhaltend**, wenn $\forall\, B \in \mathcal{B} : \mu(B) = \mu(T^{-1}B)$. Das Tupel $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ heißt **maßerhaltendes System** (m. e. S.).

Lemma. T ist maßerhaltend $\iff \forall\, f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu) : E(f) = E(f \circ T)$

Def. Ein maßerh. System $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ heißt **ergodisch**, wenn

$$\forall\, B \in \mathcal{B} : T^{-1}B = B \implies \mu(B) \in \{0, \mu(X)\}.$$

Man sagt auch, T sei eine ergodische Transformation.

Thm (Birkhoffscher Ergodensatz).
Sei $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ein m. e. S. und $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Dann gilt

$$f_n(x) := \tfrac{1}{n+1} \cdot (f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^n x)) \xrightarrow{n \to \infty} \overline{f}(x)$$

für fast-alle $x \in X$, wobei $\overline{f}$ T-invariant ist, d. h. $\overline{f} = \overline{f} \circ T$.
Falls $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ mit $1 \leqslant p < \infty$, dann $f_n \to \overline{f}$ in $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Bem. Es folgt $E(f) = E(\overline{f})$. Wenn T ergodisch ist, dann ist $\overline{f}$ fast-überall konstant $E(f)$, also $f_n(x) \to E(f)$ für fast-alle $x \in X$.

Thm (Poincaré). Sei $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ein m. e. S. und $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A) > 0$. Dann gibt es ein $n \geqslant 1$ mit $\mu(A \cap T^{-n}A) > 0$.

Beweis. Sei $f = \mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion von A.
Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gilt

$$\int f(T^n x) f(T^m x) \, d\mu(x) = 0 \quad \text{für } n \neq m.$$

Es folgt durch $2\times$ Übergang zum Grenzwert $E(\overline{f}^2) = 0$, also

$$0 = E(\overline{f}) = E(f) = \mu(A) > 0 \ \lightning$$

Thm. Sei $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ein m. e. S., wobei X ein separabler metrischer Raum ist, dessen offenen Mengen messbar sind. Dann sind fast-alle Punkte in X wiederkehrend.

Def. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf X. Ein Maß μ auf $(X, \mathcal{B})$ heißt

- **von innen regulär**, wenn für alle $A \in \mathcal{B}$ gilt:
$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq X \text{ kompakt und messbar}, F \subseteq A\}.$$
- **von außen regulär**, wenn für alle $A \in \mathcal{B}$ gilt:
$$\mu(A) = \inf\{\mu(F) \mid F \subseteq X \text{ offen und messbar}, F \supseteq A\}.$$
- **regulär**, wenn es von innen und außen regulär ist.