

Zusammenfassung Topologie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Def. Ein **metrischer Raum** (X, d) besteht aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass f. a. $x, y, z \in X$ gilt:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Δ -Ungleichung)

Def. Für einen metrischen Raum (X, d) und eine Teilmenge $A \subset X$ ist $(A, d|_A)$ ein metrischer Raum und $d|_A$ heißt **induzierte Metrik**.

Def. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **stetig**, falls für alle $x \in X$ gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Def. Die **offene Kugel** von Radius ϵ um $x \in X$ ist

$$B_\epsilon(x) := \{p \in X \mid d(p, x) < \epsilon\}.$$

Def. Eine Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes heißt **offen**, falls für alle $u \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(u) \subset U$.

Prop. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann offen, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ das Urbild $f^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Def. Ein **topologischer Raum** (X, \mathcal{T}) besteht aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\forall U, V \in \mathcal{T} : U \cup V \in \mathcal{T}$
- $\forall S \subset \mathcal{T} : \bigcup_{U \in S} U \in \mathcal{T}$

Die Elemente von \mathcal{T} werden **offene Teilmengen** von X genannt. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen ist.

Notation. Seien im Folgenden X und Y topologische Räume.

Bsp. Die **diskrete Topologie** auf einer Menge X ist $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Bsp. Die **Klumpentopologie** auf einer Menge X ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

Def. Die Menge der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes heißt von der Metrik **induzierte Topologie**.

Def. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt

$$\mathcal{T}|_A := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

Unterraumtopologie oder von \mathcal{T} **induzierte Topologie**.

Def. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt **metrisierbar**, falls eine Metrik auf X existiert, sodass die von der Metrik induzierte Topologie mit \mathcal{T} übereinstimmt.

Def. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt **Hausdorffsch**, falls gilt:

$$\forall x, y \in X : x \neq y \implies \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset.$$

Prop. Metrisierbare topologische Räume sind Hausdorffsch.

Def. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) heißt **stetig**, falls gilt

$$\forall U \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

Notation. $\mathcal{C}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}$

Bem. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und $A \subset X$, so ist $f|_A : A \rightarrow Y$ stetig.

Def. Falls $f : X \rightarrow Y$ bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind, so heißt f ein **Homöomorphismus**.

Def. Zwei topologische Räume X und Y heißen **homöomorph**, wenn ein Homöomorphismus zwischen X und Y existiert.

Notation. $X \approx Y : \iff X$ und Y sind homöomorph

Satz. $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m \iff n = m$

Def. Sei X eine Menge und $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ Topologien auf X . Dann sagen wir

$$\mathcal{T} \text{ ist } \mathbf{größer} \text{ als } \mathcal{T}' : \iff \mathcal{T}' \text{ ist } \mathbf{feiner} \text{ als } \mathcal{T} : \iff \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'.$$

Def. Eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ offener Teilmengen eines topologischen Raumes heißt

- **Basis** der Topologie, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} ist.
- **Subbasis** der Topologie, falls jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen ist, von denen jede Schnitt endlich vieler Mengen aus \mathcal{B} ist.

- Bspe.**
- Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon > 0\}$ eine Basis der induz. Topologie auf X .
 - $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, \epsilon \in \mathbb{Q}_+\}$ ist eine abz. Basis von $(\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$.

Prop. Jede Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ist Subbasis von genau einer Topologie \mathcal{T} von X .

Def. Die Topologie heißt die von \mathcal{B} **erzeugte Topologie**.

Def. Sind (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume, so ist auch $(X \times Y, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum mit der **Produkttopologie** $(\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$, die von

$$\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{X \times V \mid V \in \mathcal{T}_Y\} \text{ erzeugt wird.}$$

- Prop.**
- Die Projektionen $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ und $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ sind stetig bzgl. der Produkttopologie.
 - Ist \mathcal{T} eine echt gröbere Topologie auf $X \times Y$ als die Produkttopologie, so sind die Projektionen π_X und π_Y nicht beide stetig.

Def. Seien (X, \mathcal{T}_X) und (Y, \mathcal{T}_Y) topologische Räume. Dann erzeugt $\mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y$ die **Summentopologie** auf $X \cup Y$.

Bem. Sie ist die feinste Topologie auf $X \cup Y$, sodass die beiden Inklusionen $i_X : X \hookrightarrow X \cup Y$ und $i_Y : Y \hookrightarrow X \cup Y$ stetig sind.

Prop. Seien X, Y, Z topologische Räume.

- Falls $X \cap Y = \emptyset$, so ist eine Abbildung $f : X \cup Y \rightarrow Z$ genau dann stetig, falls die beiden Kompositionen $f \circ i_X : X \rightarrow Z$ und $f \circ i_Y : Y \rightarrow Z$ stetig sind.
- Eine Abb. $g : Z \rightarrow X \cup Y$ ist genau dann stetig, wenn die beiden Kompositionen $\pi_X \circ g : Z \rightarrow X$ und $\pi_Y \circ g : Z \rightarrow Y$ stetig sind.

Def. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann ist das **Innere** von A (notiert $\text{int}(A)$) die Vereinigung aller in A enthaltenen offenen Mengen.

Bem. Als Vereinigung offener Mengen ist das Innere offen.

Def. Der **Abschluss** \bar{A} einer Menge $A \subset X$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen von X , die A enthalten.

Bem. Es gilt $\bar{A} = X \setminus (\text{int}(X \setminus A))$.

Def. Es sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $V \subset X$. Wir nennen V eine **Umgebung** von x , falls es eine offene Teilmenge $U \subset X$ gibt mit $x \in U$ und $U \subset V$.

Prop. Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in \bar{A} , falls jede Umgebung von x einen Punkt aus A enthält.

Def. Der **Rand** einer Menge $A \subset X$ ist $\partial A := \bar{A} \setminus \text{int}(A)$.

Prop. Ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in ∂X , wenn jede Umgebung von x einen Punkt aus A wie auch aus $X \setminus A$ enthält.

Def. Ein topologischer Raum X heißt **wegweise zusammenhängend**, falls es für je zwei Punkte $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.

Bspe. • \mathbb{R}^n ist wegzusammenhängend.

- $(\{p, q\}, \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\})$ ist wegzusammenhängend!
- $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist nicht wegzusammenhängend.

Def. Die Äquivalenzklassen von

$$x \sim y : \iff x, y \text{ lassen sich durch einen Weg verbinden.}$$

heißen **Wegzusammenhangskomponenten**.

Prop. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und X wegzusammenhängend. Dann ist auch $f(X)$ bzgl. der Unterraumtopologie wegzusammenhängend.

Def. Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, falls X nicht disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist.

Bspe. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind nicht zusammenhängend.

Prop. Sei X ein topologischer Raum. Es sind äquivalent:

- X ist zusammenhängend.
- Für jede offene und abgeschlossene Menge $A \subset X$ gilt: $A \in \{X, \emptyset\}$.
- Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ in den diskreten Raum mit zwei Elementen ist konstant.

Prop. • Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und X zusammenhängend, dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

- Sind A, B zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes X und gilt $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.

Korollar. Folgende Relation ist eine Äquivalenzrelation auf X :

$$x \sim y : \iff x \text{ und } y \text{ liegen beide in einem zusammenhängenden Unterraum von } X.$$

Def. Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen **Komponenten**.

Bsp. Die Komponenten von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sind genau die Ein-Punkt-Mengen. Trotzdem ist \mathbb{Q} nicht diskret!

Prop. Die Menge $[0, 1]$ ist zusammenhängend.

Korollar. Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.

Prop (ZWS). Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(0) < 0$ und $f(1) > 0$, so existiert ein $t \in (0, 1)$ mit $f(t) = 0$.

Def. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Die Folge (x_n) **konvergiert gegen** $x \in X$, falls für jede Umgebung $U \subset X$ von x ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\forall n \geq N : x_n \in U$.

Notation. $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Achtung. Das „ $=$ “ ist nicht wörtlich zu verstehen!

Def. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abb. zw. topol. Räumen X, Y . Dann heißt f

- **stetig in** $x \in X$, falls für jede Umgebung $V \subset Y$ von $f(x)$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von x ist.
- **folgenstetig in** $x \in X$, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ die Bildfolge $(f(x_n))$ in Y gegen $f(x)$ konvergiert.

Prop. Ist f stetig in x , so ist f auch folgenstetig in x .

Def. Eine **Umgebungsbasis** von $x \in X$ ist eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ bestehend aus Umgebungen von x , sodass jede Umgebung von x eine der Umgebungen in \mathcal{B} enthält.

Def. Der Raum X erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Bem. Jeder metrische Raum X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, da für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\mathcal{B}_x := \{B_{1/n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis ist.

Prop. Sei $x \in X$ ein Punkt mit abzählbarer Umgebungsbasis. Dann ist jede in x folgenstetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ auch stetig in x .

Def. Eine **gerichtete Menge** ist eine Menge D mit einer partiellen Ordnung $(\leq) \subset D \times D$, sodass $\forall \alpha, \beta \in D : \exists \gamma \in D : \gamma \geq \alpha \wedge \gamma \geq \beta$.

Def. Ein **Netz** in X ist eine Abbildung $\phi : D \rightarrow X$, wobei D eine gerichtete Menge ist.

Def. Sei $x \in X$ und $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ ein Netz in X . Das Netz (x_α) **konvergiert** gegen x , falls es für jede Umgebung $U \subset X$ von x ein $\beta \in D$ gibt mit $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha \geq \beta$.

Notation. $\lim_{\alpha \in D} x_\alpha = x$

Def. Eine Abb. $f : X \rightarrow Y$ heißt **netzstetig** in $x \in X$, falls für jedes Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ in X mit $\lim_{\alpha \in D} x_\alpha = x$ das Bildnetz $(f(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Prop. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn sie netzstetig in x ist.

Prop. Ist $A \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so besteht \bar{A} genau aus den Limiten von Netzen in A , die in X konvergieren.

Def. Ein **Häufungspunkt** eines Netzes $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ in X ist ein Punkt $x \in X$, sodass für jede Umgebung $U \subset X$ von x das Netz **häufig** in U ist, d. h. für alle $\alpha \in D$ existiert ein $\beta \geq \alpha$ mit $x_\beta \in U$.

Def. Sind D und E gerichtete Mengen, so nennen wir eine Abb. $h : E \rightarrow D$ **final**, falls $\forall \delta \in D : \exists \eta \in E : \forall \gamma \geq \eta : h(\gamma) \geq \delta$.

Def. Ein **Unternetz** eines Netzes $\phi : D \rightarrow X$ ist eine Komposition $\phi \circ h : E \rightarrow X$ wobei $h : E \rightarrow D$ eine finale Funktion ist. Wir schreiben auch $(x_{h(\gamma)})_{\gamma \in E}$

Prop. Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ ein Netz in X . Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann Häufungspunkt von (x_α) , falls ein Unternetz von (x_α) gegen x konv.

Def. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heißt **Cauchy-Folge**, falls $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Def. Der metrische Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Achtung. Vollständigkeit ist keine Homöomorphieinvariante!

Def. Sei X eine Menge. Dann ist die Menge

$$\mathcal{B}(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

der **beschränkten Funktionen** $X \rightarrow \mathbb{R}$ ein metrischer Raum mit

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Prop. Dieser Raum $(\mathcal{B}(X), d)$ ist vollständig.

Def. Eine Abb. $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ zw. metr. Räumen heißt ...

- ... **isometrische Einbettung**, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

- ... **Isometrie**, falls f zusätzlich bijektiv ist. In diesem Fall ist auch f^{-1} eine Isometrie und f ein Homöomorphismus.

Prop. Sei X ein metrischer Raum. Dann gibt es eine isometrische Einbettung von X in einen vollständigen metrischen Raum.

Def. Eine **Vervollständigung** eines metrischen Raumes X ist ein vollständiger metrischer Raum Y mit einer isometrischen Einbettung $f : X \rightarrow Y$, sodass $f(X)$ **dicht** in Y liegt, d. h. $\overline{f(X)} = Y$.

Satz. Für jeden metrischen Raum existiert eine Vervollständigung.

Prop. Sei X ein metrischer Raum und $f_{1,2} : X \rightarrow Y_{1,2}$ Vervollständigungen von X . Dann existiert genau eine Isometrie $\phi_{21} : Y_1 \rightarrow Y_2$ mit $\phi_{21}|_{f_1(X)} = f_2 \circ f_1^{-1}$.

Bsp. Die kanonische Inklusion $C_c^\infty(U) \hookrightarrow L^p(U)$ ist eine Vervollständigung von (C_c^∞, d_p) mit

$$d_p(f, g) := \left(\int_U |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Def. Es sei X ein topologischer Raum. Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen mit $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Def. Der Raum X heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, also eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ mit $\bigcup_{i \in I_0} U_i = X$.

Def. Eine Familie \mathcal{C} von Teilmengen von X hat die **endliche Schnitteigenschaft**, falls der Schnitt je endlich vieler Mengen aus \mathcal{C} nichtleer ist.

Prop. Ein Raum X ist genau dann kompakt, falls jede Familie $(C_i)_{i \in I}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X , die die endliche Schnitteigenschaft besitzt, einen nichtleeren Schnitt hat.

Bem. Kompaktheit ist eine Homöomorphieinvariante.

Prop. Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorffraumes ist abg.

Prop. Ist X kompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(X)$ kompakt.

Prop. Ein abg. Teilraum eines kompakten Raumes ist kompakt.

Prop. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine bij. stetige Abb. von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum. Dann ist f ein Homöomorphismus.

Prop. Das Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

Prop. Seien X, Y kompakt. Dann ist auch $(X \times Y)$ kompakt.

Satz (Heine-Borel). Eine Teilmenge von \mathbb{R} ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter Räume. Dann ist das topologische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ebenfalls kompakt.

Def. Ein topologischer Raum X heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Prop. Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.

Def. Sei $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ ein Netz in einem topologischen Raum X und $A \subset X$. Dann ist $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ **schließlich** in A , falls es ein $\beta \in D$ gibt mit $x_\alpha \in A$ für alle $\alpha \geq \beta$.

Def. Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ heißt **universell**, falls für jede Teilmenge $A \subset X$ das Netz entweder schließlich in A oder in $X \setminus A$ ist.

Prop. Jedes nichtleere Netz in X besitzt ein universelles Unternetz.

Bem. Der Beweis der Prop. verwendet das Lemma von Zorn.

Def. Ein topol. Raum X heißt **netzkompakt**, falls jedes nichtleere Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ in X ein konvergentes Unternetz besitzt.

Satz. Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

- X ist kompakt.
- X ist netzkompakt.

- Jedes nichtleere Netz in X hat ein konvergentes Unternetz.

Satz (Tychonoff). Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter Räume. Dann ist das topologische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ebenfalls kompakt.

Lemma. Alle Normen auf \mathbb{R}^n sind äquivalent, d.h. für je zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ existieren Zahlen $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \lambda \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \Lambda \|v\|_1.$$

Lemma (Riesz). Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller VR und $C \subset V$ ein echter Untervektorraum, der abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|$ ist. Sei $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $v \in V \setminus C$ mit $\|v\| = 1$ und

$$d(v, C) := \inf_{c \in C} \|v - c\| > 1 - \delta.$$

Lemma. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter VR und $C \subset V$ ein endlichdim. UVR. Dann ist C abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|$.

Prop. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über \mathbb{R} . Die abgeschlossene Einheitskugel $B := \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$ ist genau dann kompakt, wenn $\dim(V) < \infty$.

Def. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter VR über \mathbb{R} . Der VR der **beschränkten Funktionale** ist der normierte VR

$$V^* := \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist linear und stetig}\}$$

versehen mit der Norm $\|f\| := \sup_{\|v\| \leq 1} |f(v)|$.

Def. Die **Schwach*-Topologie** auf V^* ist die größte Topologie, sodass alle Abbildungen $\phi_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(v)$ stetig sind.

Satz. $B_1(0) \subset (V^*, \|\cdot\|)$ ist kompakt bzgl. der Schwach*-Topologie.

Def. Ein topol. Raum X heißt **normal**, falls gilt: Für alle disjunkte abgeschlossene Mengen $A, B \subset X$ gibt es offene Teilmengen $U_A, U_B \subset X$ mit $A \subset U_A, B \subset U_B$ und $U_A \cap U_B = \emptyset$.

- Bspe.** • Metrische Räume sind normal.
• Kompakte Hausdorffräume sind normal.

Lemma (Urysohn). Sei X ein normaler topologischer Raum, $F, G \subset X$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \rightarrow [0, 1]$, die auf F konstant gleich 0 und auf G konstant gleich 1 ist.

Def. Ein topol. Raum erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, falls er eine abzählbare Basis besitzt.

Satz (Metrisierbarkeitssatz von Urysohn).
Erfülle X das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Dann gilt:

$$X \text{ metrisierbar} \iff X \text{ normal und Hausdorffsch}$$

Satz (Fortsetzungssatz von Tietze).

Sei X normal, $F \subset X$ abgeschlossen. Ist $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ex. eine stetige Fortsetzung $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ von f (d.h. $g|_F = f$), für die gilt:

$$\sup_{x \in F} f(x) = \sup_{x \in X} g(x) \quad \text{und} \quad \inf_{x \in F} f(x) = \inf_{x \in X} g(x).$$

Def. Eine **Kompaktifizierung** eines topol. Raumes X ist ein kompakter topologischer Raum Y zusammen mit einer topologischen Einbettung $f : X \rightarrow Y$, sodass $f(X)$ dicht in Y liegt, d.h. $\overline{f(X)} = Y$.

Def. Ein topologischer Raum X heißt **lokalkompakt**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

Bspe. • Jeder diskrete topologische Raum ist lokalkompakt.

- Ein normierter Vektorraum ist genau dann lokalkompakt, wenn er endlichdimensional ist.

Def. Sei X ein Hausdorffraum. Setze $X^+ := X \sqcup \{\infty\}$. Eine Menge $U \subset X^+$ heißt offen, wenn

- $U \subset X$ und U ist offen in X oder
- $\infty \in U$ und $X \setminus U \subset X$ kompakt ist.

Dies definiert eine Topologie auf X^+ , der sogenannten **Einpunktkompaktifizierung** von X .

Bem. • Wenn X lokalkompakt, dann ist X^+ Hausdorffsch.

- Falls X selbst kompakt ist, so trägt X^+ die Summentopologie von X und $\{\infty\}$.

Prop. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, Y ein kompakter Hausdorffraum, $p \in Y$ und $X \approx Y \setminus \{p\}$. Dann gilt $X^+ \approx Y$.

Korollar. $S^n \approx (\mathbb{R}^n)^+$

Notation. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so definieren wir

$$f^+ : X^+ \rightarrow Y^+, \quad f^+|_X := f, \quad f^+(\infty) := \infty.$$

Bem. Die Abbildung f^+ ist nicht i. A. stetig, z.B. nicht für

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto x.$$

Def. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **eigentlich**, falls das Urbild jeder kompakten Menge in Y unter f kompakt in X ist.

Prop. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so ist die induz. Abb. $f^+ : X^+ \rightarrow Y^+$ genau dann stetig, wenn f eigentlich ist.

Def. Sei X ein normaler Hausdorffraum. Dann ist

$$f : X \rightarrow \prod_{\phi \in \mathcal{C}} [0, 1], \quad x \mapsto (\phi(x))_{\phi \in \mathcal{C}} \quad \text{mit } \mathcal{C} := \mathcal{C}(X, [0, 1])$$

eine topologische Einbettung. Dann ist $\beta X := \overline{f(X)}$ kompakt. Die Abb. $\beta : X \rightarrow \beta X$ heißt **Stone-Čech-Kompaktifizierung** von X .

Prop. Sei X ein normaler Hausdorffraum und K ein kompakter Hausdorffraum. Dann faktorisiert jede stetige Abbildung $\phi : X \rightarrow K$ in eindeutiger Weise über die Stone-Čech-Kompaktifizierung von X , d.h. es gibt eine eindeutige Abb. $\pi : \beta X \rightarrow K$ mit $\pi \circ \beta = \phi$.

Def. Sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $f : X \rightarrow Y$ surjektiv. Dann ist die **Finaltopologie** auf Y bzgl. f die feinste Topologie, bezüglich der f stetig ist, also

$$U \subset Y \text{ offen} \iff f^{-1}(U) \subset X \text{ offen}.$$

Def. Eine surjektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **Identifizierung**, falls die Topologie auf Y genau die Finaltopologie bzgl. f ist.

Prop. • Die Verkettung von Identifizierungen ist wieder eine Identifizierung.

- Eine surjektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann eine Identifizierung, falls gilt: Für alle topol. Räume Z und Abb. $g : Y \rightarrow Z$ ist g genau dann stetig, wenn $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig ist.

Def. Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einem topol. Raum X . Dann heißt die Menge X/\sim versehen mit der Finaltopologie bzgl. der Abb.

$$p : X \rightarrow X/\sim, \quad x \mapsto [x].$$

Quotientenraum (mit **Quotienttopologie**).

Bem. Bei der Quotientenbildung bleiben erhalten: Kompaktheit, Zusammenhang, Wegzusammenhang.

Achtung. Der Quotientenraum von Hausdorffräumen ist nicht unbedingt Hausdorffsch!

Notation. Für $\emptyset \neq A \subset X$ ist $X/A := X/\sim$ mit

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (\{x, y\} \subset A)$$

Prop. Ist X ein normaler Hausdorffraum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist X/A ebenfalls normal und Hausdorffsch.

Def. Die **reellen projektiven Räume** sind definiert als

$$\mathbb{R}P^n := S^n/\sim \quad \text{mit } x \sim y \iff x = \pm y.$$

Prop. $\mathbb{R}P^n$ ist kompakt und Hausdorffsch.

Bem. Mit $D^n := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$D^n/\sim = \mathbb{R}P^n \quad \text{mit } x \sim y \iff (\{x, y\} \subset \partial D) \wedge (x = \pm y).$$

Bsp. Möbiusband: $M := [0, 1] \times [-1, 1]/(0, t) \sim (1, -t)$

Def. Seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$ und $f : A \rightarrow Y$ stetig. Sei \sim die kleinste Äquivalenzrelation auf $X \sqcup Y$, für die $a \sim f(a)$ für alle $a \in A$ gilt. Dann heißt

$$Y \cup_f X := (X \sqcup Y)/\sim \quad \textbf{Anheftung von } X \textbf{ entlang } f.$$

Prop. Ist $Y \cup_f X$ ein Anheftungsraum und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist $Y \hookrightarrow Y \cup_f X, y \mapsto [y]$ ein Homöomorphismus auf einen abgeschlossenen Teilraum und $X \setminus A \hookrightarrow Y \cup_f X, x \mapsto [x]$ ist ein Homöomorphismus auf einen offenen Teilraum.

Def. Für $f : X \rightarrow Y$ stetig und $f_0 : X \times \{0\} \rightarrow Y, (x, -) \mapsto f(x)$ heißt

$$Z_f = Y \cup_{f_0} (X \times [0, 1]) \quad \textbf{Abbildungszylinder } Z_f \textbf{ von } f.$$

Man identifiziert X mit $X \times \{1\} \subset Z_f$.

Def. $C_f := Z_f/(X \times \{1\})$ heißt **Abbildungskegel**.

Def. Ein **abstrakter Simplicialkomplex** ist ein Paar (X, Σ) bestehend aus einer total geordneten Menge X und einer Teilmengen $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ (genannt Menge der **abstrakten Simplizes**), sodass gilt:

- Jedes Simplex $\sigma \in \Sigma$ ist nichtleer und endlich.
- Für jede nichtleere Teilmenge $\bar{\sigma} \subset \sigma \in \Sigma$ gilt $\bar{\sigma} \in \Sigma$.

- Jedes $x \in X$ ist in mind. einem Simplex enthalten, also $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = X$.

Def. • Für $\sigma \in \Sigma$ heißt $\dim(\sigma) := |\sigma| - 1$ die **Dimension** von σ .

- Teilmengen von σ heißen **Seiten** von σ .
- Nulldim. Simplizes heißen **Ecken**, eindim. Simplizes **Kanten**.
- Der Simplicialkomplex (X, Σ) heißt **endlich**, wenn X endlich ist.

Notation. $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$

Def. $\Delta_{\text{abstr}}^n := ([n], \mathcal{P}([n]))$ heißt **volles n -dim. Simplex**

Def. Für $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\langle v_0, \dots, v_n \rangle := \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \mid 0 \leq t_0, \dots, t_n \text{ und } t_0 + \dots + t_n = 1\}$$

von den Vektoren v_0, \dots, v_k **aufgespanntes k -Simplex**. Falls v_0, \dots, v_k nicht affin unabhängig, so ist der k -Simplex degeneriert. Ist dies nicht der Fall, so ist jeder Punkt eindeutig durch die **baryzentrischen Koordinaten** t_0, \dots, t_n identifiziert.

Def. $\Delta^n := \langle e_0, \dots, e_n \rangle \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt **Standard- n -Simplex**, wobei e_0, \dots, e_n die Einheitsvektoren in \mathbb{R}^{n+1} bezeichnen.

Bem. Für $k \leq n$ induziert jede ordnungserhaltende Abbildung $\phi : [k] \rightarrow [n]$ eine Einbettung durch

$$i_\phi : \Delta^k \rightarrow \Delta^n, \quad \sum_{i=0}^k t_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^k t_{\phi(i)} e_{\phi(i)}.$$

Def. Für einen abstrakten Simplicialkomplex (X, Σ) heißt

$$|\Sigma| := T/\sim := \left(\coprod_{\sigma \in \Sigma} \Delta_\sigma \right) / \sim$$

mit $\Delta_\sigma := \Delta^{\dim \sigma} = \Delta^{|\sigma|-1}$ und der Äquivalenzrelation \sim , die für alle Simplizes $\tau \subseteq \sigma \in \Sigma$ und der durch die Totalordnung auf X induzierten ordnungserhaltenden Abbildung $\phi : [\dim \tau] \rightarrow [\dim \sigma]$ alle Punkte $x \in \Delta_\tau$ mit $i_\phi(x) \in \Delta_\sigma$ identifiziert, **geometrische Realisierung** von Σ .

Bem. Offensichtlich ist $|\Sigma|$ immer normal und kompakt genau dann, wenn der abstrakte Komplex Σ endlich ist.

Prop. $|\Delta_{\text{abstr}}^n| = \Delta^n$.

Def. $\partial \Delta^n := \{ \sum_{i=0}^n t_i e_i \mid 0 \leq t_i, \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_j = 0 \text{ für ein } j \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Prop. $|([n], \mathcal{P}([n]) \setminus \{[n]\})| \approx \partial \Delta^n$.

Def. Ein topologischer Raum heißt **triangulierbar**, wenn er homöomorph zu einem geometrischen Simplicialkomplex ist. Den Homöomorphismus bezeichnet man als **Triangulierung**.

Bsp. $S^n \approx \partial \Delta^{n+1}$

Def. Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls mit je zwei Punkten $x, y \in K$ auch die Verbindungsstrecke $\{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$ in K liegt. Ist K außerdem abgeschlossen, so heißt K **konvexer Körper** im \mathbb{R}^n .

Def. Für $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die **konvexe Hülle** von A definiert durch

$$\text{conv } A := \bigcap \{X \subset \mathbb{R}^n \mid X \text{ konvex und } A \subset X\}.$$

Prop. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer Körper und $0 \in \text{int}(K)$. Dann schneidet jeder Strahl im \mathbb{R}^n mit Anfangspunkt 0 den Rand von K in höchstens einem Punkt. Ist K zusätzlich beschränkt (also kompakt und ein konvexer Körper), dann schneidet jeder Strahl den Rand von K in genau einem Punkt.

Prop. Jeder beschränkte konvexe Körper $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in \text{int}(K)$ ist homöomorph zu S^{n-1} vermöge $f : \partial K \rightarrow S^{n-1}, x \mapsto x/\|x\|$.

Notation. $D^n := \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$.

Prop. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter konvexer Körper mit $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Dann gilt $\partial K \approx \partial D^n$ und $K \approx D^n$.

Korollar. $\Delta^n \approx D^n$ und $\partial \Delta^n \approx S^{n-1}$.

Prop. Sei $S = (X, \Sigma)$ ein endlicher abstrakter Simplicialkomplex, also $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ und seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig. Dann ist die Vereinigung all jener affinen Simplizes

$$\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \rangle \subset \mathbb{R}^n \quad \text{mit } \{i_1, \dots, i_k\} \in \Sigma \quad \text{homöomorph zu } |S|.$$

Def. Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^n$ heißt **(geom.) Simplicialkomplex**, falls T Vereinigung von affinen Simplizes $\sigma_i \subset \mathbb{R}^n, i \in I$ mit der folgenden Eigenschaft ist: Der Schnitt $\sigma_i \cap \sigma_j$ zweier dieser Simplizes ist entweder leer oder eine gemeinsame Seite von σ_i und σ_j .

Bem. In diesem Fall ist T homöomorph zur geometrischen Realisierung eines abstrakten Simplicialkomplexes.

Def. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen zueinander **homotop** (geschrieben $f \simeq g$), falls es eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

mit $H(-, 0) = f$ und $H(-, 1) = g$ gibt.

Lemma. Sei X ein topologischer Raum, $X = C_1 \cup \dots \cup C_n$ wobei $C_i \subset X$ abgeschlossen, seien $f_i : C_i \rightarrow Y$ stetig mit

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : f_i|_{C_i \cap C_j} = f_j|_{C_i \cap C_j}.$$

Dann ist $F : X \rightarrow Y, x \mapsto f_i(x), x \in C_i$ stetig.

Prop. • Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

• Seien $f, g : X \rightarrow Y, h : X' \rightarrow X, k : Y \rightarrow Y'$ stetige Abbildungen. Gilt $f \simeq g$, so auch $k \circ f \circ h \simeq k \circ g \circ h$.

Bsp. • Für $Y \subset \mathbb{R}^n$ konvex sind je zwei Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ zueinander homotop mittels der **linearen Homotopie**

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad (x, t) \mapsto tg(x) + (1-t)f(x).$$

- Für $X = \{p\}$ einpunktig sind Homotopien $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ nichts anderes als Wege in Y .

Def. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist eine **Homotopie-Äquivalenz**, falls ein stetiges $g : Y \rightarrow X$ existiert mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Dieses g heißt **Homotopieinverses** zu f .

Def. Existiert eine Homotopieäquivalenz $f : X \rightarrow Y$, so heißen X und Y **homotopieäquivalent**, geschrieben $X \simeq Y$.

Bem. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topol. Räume. Ihre Äquivalenzklassen heißen **Homotopietypen**.

Def. Ein topol. Raum heißt **kontrahierbar** (zusammenziehbar), wenn er homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum ist.

Lemma. Seien X, Y topologische Räume und Y kontrahierbar. Dann sind alle stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$ homotop.

Korollar. Kontrahierbare Räume sind wegzusammenhängend.

Prop. Die Sphären $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind nicht kontrahierbar.

Def. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt A

- **Retrakt** von X , falls es eine **Retraktion** $r : X \rightarrow A$ gibt, d. h. r ist stetig und $r|_A = \text{id}_A$.
- **Deformationsretrakt** von X , falls es eine Retraktion $r : X \rightarrow A$ gibt, sodass $i \circ r \simeq \text{id}_X$. Dabei ist $i : A \rightarrow X$ die Inklusion.
- **starken Deformationsretrakt** von X , falls es eine Retraktion $r : X \rightarrow A$ gibt, sodass $i \circ r \simeq \text{id}_X$ mittels einer Homotopie, die die Punkte in A nicht bewegt.

Bem. Ist $A \subset X$ ein Deformationsretrakt, so sind A und X homotopieäquivalent.

Bsp. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist Y ein starker Deformationsretrakt des Abbildungszyklinders Z_f

Def. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen **homotop relativ zu** $A \subset X$ (geschrieben $f \simeq g \text{ rel } A$), falls es eine Homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ von f nach g gibt mit

$$H(a, t) = H(a, 0) \quad \text{für alle } a \in A \text{ und } t \in [0, 1].$$

Bem. $A \subset X$ ist genau dann starker Deformationsretrakt, wenn id_X homotop rel. A zu einer st. Abb. $f : X \rightarrow X$ mit $f(X) = A$ ist.

Lemma (Reparametrisierungslemma).

Seien $\phi_1, \phi_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig und auf $\{0, 1\}$ gleich. Sei $F : P \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie, $G_i(p, t) := F(p, \phi_i(t))$ für $i = 1, 2$. Dann sind $G_1, G_2 : P \times [0, 1] \rightarrow Y$ homotop relativ zu $P \times \{0, 1\}$.

Def. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ fest. Dann wird (X, x_0) ein **punktierter Raum** mit Basispunkt x_0 genannt.

Def. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Definiere

$$\pi_1(X, x_0) := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \text{geschl. Weg mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\} / \sim$$

mit $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_1 \simeq \gamma_2 \text{ rel } \{0, 1\}$.

Prop. Die Verknüpfung $(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto \gamma_1 \cdot \gamma_2$ induziert eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x_0)$.

Notation. $\eta^{-1}(t) := \eta(1-t)$ für jeden Weg $\eta : [0, 1] \rightarrow X$.

Def. $\pi_1(X, x_0)$ heißt **Fundamentalgruppe** von (X, x_0) .

Bem. $\pi_1(X, x_0)$ hängt nur von der Wegkomponente von x_0 ab.

Prop. Seien $x_0, x_1 \in X$. Jeder Weg $\eta : [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach x_1 induziert einen Isomorphismus

$$\Psi_\eta : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1), \quad [\gamma] \mapsto [\eta^{-1} \cdot \gamma \cdot \eta].$$

Falls $\eta \simeq \eta'$, dann gilt $\Psi_\eta = \Psi_{\eta'}$.

Ist η' ein zweiter Weg von x_0 nach x_1 , so ist

$$\kappa := [(\eta')^{-1} \cdot \eta] \in \pi_1(X, x_1)$$

und für alle $g \in \pi_1(X, x_0)$ gilt

$$\Psi_{\eta'}(g) = \kappa \cdot \Psi_\eta(g) \cdot \kappa^{-1} \in \pi_1(X, x_1)$$

und somit i. A. $\Psi_\eta \neq \Psi_{\eta'}$, falls $\pi_1(X, x_1)$ nicht abelsch ist.

Bspe. • $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$
 • $\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z} \sim 2\mathbb{Z}$ (mit $x_0 \in \mathbb{R}P^2$ beliebig)
 • Sei G eine beliebige Gruppe. Es gibt einen Simplicialkomplex X mit Basispunkt $x_0 \in X$, sodass $\pi_1(X, x_0) \cong G$.

Def. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume. eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **basispunkterhaltend** oder **punktiert**, falls $f(x_0) = y_0$.

Def. Eine punktierte Abbildung $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induziert einen Morphismen der Fundamentalgruppen vermöge

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Prop. • $(-)_*$ besitzt die Funktor-Eigenschaften, d. h.

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \quad \text{und} \quad (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

• Sind $f, g : X \rightarrow Y$ punktierte stetige Abbildungen und $f \simeq g$, so gilt $f_* = g_*$.

Def. Ein topol. Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, falls X wegzshgd ist und $\pi_1(X, x_0) = 1$ für ein (und damit alle) $x_0 \in X$.

Bsp. S^1 ist nicht einfach zusammenhängend.

Prop. Ist X zusammenziehbar, so ist X einfach zshgd.

Prop. Seien X und Y wegzusammenhängend und $x_0 \in X$. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, dann ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ ein Isomorphismus.

Bsp. \mathbb{R}^n ist zusammenziehbar, also einfach zusammenhängend.

Prop. Für $n \geq 2$ ist S^n einfach zusammenhängend.

Def. Für einen punktierten Raum (X, x_0) heißt

$$\pi_n(X, x_0) := \{\gamma : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0) \mid \gamma \text{ stetig}\} / \sim$$

mit $\gamma_1 \sim \gamma_2 : \iff \gamma_1 \simeq \gamma_2 \text{ rel } \{s_0\}$.

n -te Homotopiegruppe. Dabei ist $s_0 \in S^n$ fest.

Def. Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus

- einer Klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$ von **Objekten**,
- für je zwei Objekte $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\text{Hom}(A, B)$ von **Morphismen** von A nach B . Für $f \in \text{Hom}(A, B)$ schreibt man auch $f : A \rightarrow B$ oder $A \xrightarrow{f} B$. Dabei heißt $\text{dom}(f) := A$ **Quelle** (Domain), $\text{codom } f := B$ **Ziel** (Codomain) von f . Die Klasse aller Morphismen wird mit $\text{Mor}(\mathcal{C})$ bezeichnet.

- einer assoziativen Kompositionsoperation, d. h. einer Abbildung

$$\prod_{A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C), \quad (f, g) \mapsto f \circ g,$$

$$\text{mit } (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \text{ für alle } A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \in \mathcal{C}.$$

- für jedes $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einem Identitätsmorphismus $\text{id}_A : A \rightarrow A$ mit $\text{id}_A \circ f = f$ und $g \circ \text{id}_A = g$ für alle $f : B \rightarrow A$ und $g : A \rightarrow B$.

Bem. Die Identitätsmorphismen sind eindeutig bestimmt, da

$$\text{id}_A = \text{id}_A \circ \text{id}'_A = \text{id}'_A.$$

Def. Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B \in \mathcal{C}$ heißt **Isomorphismus**, falls es einen Morphismus $B \xrightarrow{g} A \in \mathcal{C}$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_B$ und $g \circ f = \text{id}_A$. Dieses g heißt dann **Inverses** von f , geschrieben $f^{-1} := g$.

Bspe. Es gibt die Kategorien

- **Set** der Mengen und Abbildungen,
- **Grp** (**AbGrp**) der (abelschen) Gruppen, **Rng** der Ringe, **Mod_R** der R -Moduln, **Vect_k** der k -VRe mit den jeweils strukturerhaltenden Abbildungen,
- **Top** der topologischen Räume, **Met** der metrischen Räumen **KompHaus** der kompakten Hausdorffräume, **Top*** der punktierten topologischen Räume mit den jeweils stetigen (und basispunkterhaltenden) Abbildungen,
- Jede Partialordnung \leq auf einer Menge X definiert eine Kategorie \mathcal{E} mit $\text{Ob}(\mathcal{E}) := X$ und $\text{Hom}(a, b) := \{\leq_{a,b} \mid a \leq b\}$.
- der Relationen **Rel** mit Mengen als Objekten, $\text{Hom}(A, B) := \mathcal{P}(A \times B)$ und, für $S \subseteq B \times C$ und $R \subseteq A \times B$,

$$S \circ R := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : aRb \wedge bSc\}.$$

Bem. Eine Kategorie mit nur einem Objekt ist eine Gruppe.

Def. Ein **Grupoid** ist eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind.

Def. Das **Fundamentalgrupoid** $\pi(X)$ eines topologischen Raumes X ist die Kategorie

$$\begin{aligned} \text{Ob}(\pi(X)) &:= X, \\ \text{Hom}(a, b) &:= \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ stetig} \mid \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\} / \sim \\ &\text{mit } \gamma_0 \sim \gamma_1 : \iff \gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel } \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Bem. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, \sim eine Äq'relation auf $\text{Mor}(\mathcal{C})$, sodass:

- Falls $f, g \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ mit $f \sim g$, so ist $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$ und $\text{codom}(f) = \text{codom}(g)$.

- Ist $f \sim g \in \text{Hom}(A, B)$ und $h \sim k \in \text{Hom}(B, C)$, so gilt auch $h \circ f \sim k \circ g \in \text{Hom}(A, C)$.

Dann gibt es eine Kategorie \mathcal{C}/\sim mit $\text{Ob}(\mathcal{C}/\sim) := \text{Ob}(\mathcal{C})$ und $\text{Mor}(\mathcal{C}/\sim) := \text{Mor}(\mathcal{C})/\sim$.

Def. Die **Homotopiekategorie** ist **HTop** := **Top**/ \simeq . Die Kategorie **HTop*** besteht aus basispunkterhaltenden Homotopieklassen von basispunkterhaltenden Abbildungen zwischen punktierten topologischen Räumen.

Def. Ein (kovarianter) **Funktor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zw. Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} besteht aus einer Abb. von Objekten $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ und einem Morphismus $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ für jeden Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, sodass gilt:

- $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ für alle $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ aus \mathcal{C} .

Def. Die Kategorie **Gpd** ist die Kategorie der Gruppoide mit Funktoren als Morphismen.

Bspe. • Für $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}, \mathbf{AbGrp}, \mathbf{Rng}, \mathbf{Top}, \dots$ gibt es den **Vergissfunktor** $U : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$.

- Besitzen \mathcal{C} und \mathcal{D} nur je ein Objekt (sind also Gruppen), so ist ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ nichts anderes als ein Gruppenhomomorphismus.

- Der **Potenzmengenfunktor** $P : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist definiert durch $P(A) := \mathcal{P}(A)$, $P(f : A \rightarrow B)(X \subseteq A) := f(X) \subseteq B$.

- Sind P und Q partiell geordnete Mengen, so ist ein Funktor $P \rightarrow Q$ nichts anderes als eine ordnungserhaltende Abbildung.

Bem. • π definiert einen Funktor **Top** \rightarrow **Gpd**.

- π_0 definiert Funktoren **Top** \rightarrow **Set** und **HTop** \rightarrow **Set**.
- π_1 definiert Funktoren **Top*** \rightarrow **Grp** und **HTop*** \rightarrow **Grp**.

Def. Die **duale Kategorie** einer gegebenen Kategorie \mathcal{C} ist die Kategorie $\mathcal{D} := \mathcal{C}^{\text{op}}$ gegeben durch

$$\text{Ob}(\mathcal{D}) := \text{Ob}(\mathcal{C}), \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A), \quad f \circ_{\mathcal{D}} g := g \circ_{\mathcal{C}} f.$$

Def. Ein **kontravarianter Funktor** zwischen Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} ist ein Funktor $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$.

Bspe. • Der **kontravariante Potenzmengenfunktor**

$$P^* : \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad P(A) := \mathcal{P}(A), \quad P(f : A \rightarrow B)(Y) := f^{-1}(Y)$$

- Sei k ein Körper, dann ist der **Dualisierungsfunktor**

$$\begin{aligned} * : \mathbf{Vect}_k^{\text{op}} &\rightarrow \mathbf{Vect}_k, & *(V) &:= \text{Hom}_{\mathbf{Vect}_k}(V, k), \\ *(f : V &\rightarrow W) &:= (f^* : W^* \rightarrow V^*) &:= \phi \mapsto \phi \circ f \end{aligned}$$

Def. Seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $\alpha : F \rightarrow G$ ordnet jedem $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $\alpha_X \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ zu, sodass für jeden Morphismus $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & G(B) \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

Bem. Ist $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein weiterer Funktor und $\beta : G \rightarrow H$ eine weitere natürliche Transformation, so ist $\beta\alpha : F \rightarrow H$ definiert durch

$$(\beta\alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X : F(X) \rightarrow H(X)$$

eine natürliche Transformation zwischen F und H .

Bem. Für Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} gibt es die **Funktorkat.** $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ der Funktoren von \mathcal{C} nach \mathcal{D} mit nat. Transformationen als Morphismen.

Def. Die Isomorphismen der Funktorkategorie $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ heißen **natürliche Isomorphismen**.

Lemma. Eine natürliche Transformation $\eta : F \rightarrow G$ ist genau dann ein natürlicher Isomorphismus, wenn alle Komponenten $(\eta_X : F(X) \rightarrow G(X))_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}}$ Isomorphismen sind.

Bsp. Sei $** := * \circ * : \mathbf{Vect}_k \rightarrow \mathbf{Vect}_k$ der Bidualisierungsfunktor. Es gibt eine nat. Transformation $\eta : \text{Id}_{\mathbf{Vect}_k} \rightarrow **$ gegeben durch

$$\eta_V(v \in V) := (\phi \mapsto \phi(v)).$$

Für endlichdimensionale VR V ist η_V ein Isomorphismus, also ist $\eta|_{\mathbf{FinVect}_k} : \text{Id}_{\mathbf{FinVect}_k} \rightarrow **$ ein natürlicher Isomorphismus.

Def. Seien X, Y topologische Räume.

- Eine Teilmenge $Y \subset X$ wird durch eine stetige Abbildung $p : X \rightarrow Y$ **gleichmäßig überlagert**, falls es einen diskreten Raum D und einen Homöomorphismus

$$\phi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times D \quad \text{mit} \quad p = \pi_1 \circ \phi$$

gibt, wobei $\pi_1 : X \times D \rightarrow X$ die Projektion ist.

- Die Abbildung p heißt **Überlagerung**, falls jeder Punkt in Y eine durch p gleichmäßig überlagerte Umgebung besitzt.

Bsp. $\mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Überlagerung.

Bem. Sei $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, Y zshgd. Dann ist

$$Y \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}, \quad y \mapsto \#(p^{-1}(y))$$

konstant, da lokalkonstant. Falls $d = \#(p^{-1}(y))$ endlich ist, heißt p eine **d -blättrige** Überlagerung. Ansonsten heißt p eine **unendliche Überlagerung**. Eine Überlagerung mit mehr als einem Blatt heißt **nichttriviale Überlagerung**.

Def. Eine stetige Abbildung $p : X \rightarrow Y$ heißt **lokaler Homöomorphismus**, falls für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x existiert, sodass $p|_{U_x} : U_x \rightarrow p(U_x)$ ein Homöomorphismus ist.

Lemma. Jede Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus.

Prop. Sei $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ ein Weg und $x \in X$ mit $p(x) = \gamma(0)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Weg $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\tilde{\gamma}(0) = x$ und $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Satz (Homotopie-Liftungsthm). Sei $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung und $F : W \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie. Sei $\tilde{f} : W \rightarrow X$ eine Liftung von $F(-, 0)$, d. h. $p \circ \tilde{f} = F(-, 0)$. Dann existiert eine Homotopie $\tilde{F} : W \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $\tilde{F}(-, 0) = \tilde{f}$ und $p \circ \tilde{F} = F$.

Korollar. Seien γ_0, γ_1 Wege in Y mit $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel } \{0, 1\}$ und $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow X$ Liftungen von γ_0 und γ_1 mit dem gleichen Anfangspunkt $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = x_0 \in X$. Dann gilt $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ und $\tilde{\gamma}_0 \simeq \tilde{\gamma}_1 \text{ rel } \{0, 1\}$.

Korollar. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ ein geschl. Weg homotop zu einem konstanten Weg $\text{rel } \{0, 1\}$. Dann ist jeder Lift $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ auch ein geschl. Weg und homotop zu einem konstanten Weg $\text{rel } \{0, 1\}$.

Korollar. Sei Y ein wegzshgder Raum, $p : X \rightarrow Y$ eine wegzshgde nichttriviale Überlagerung. Ist $y_0 \in Y$, so gilt $\pi_1(Y, y_0) \neq 1$.

Korollar. $\mathbb{R}P^2 \not\approx S^2$, da die Quotientenabb. $S^2 \rightarrow S^2/\sim = \mathbb{R}P^2$ eine nichttriviale Überlagerung und S^2 einfach zshgd ist.

Prop. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist eine Überlagerung von S^1 . Bezeichne für geschl. Wege $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ mit $f(0) = f(1) = 0$ mit \tilde{f} die Liftung von f mit $\tilde{f}(0) = 0$. Dann ist

$$\deg : \pi_1(S^1, 0) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad [f] \mapsto \tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Def. Stetig Abbildungen $f : S^1 \rightarrow S^1$ mit $f(1) = 1$ können als geschlossene Wege $[0, 1] \rightarrow S^1$ aufgefasst werden. Dann heißt $\deg f \in \mathbb{Z}$ der **Abbildungsgrad** von f .

Prop. $\deg(z \mapsto z^n : S^1 \rightarrow S^1) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Korollar (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle in \mathbb{C} .

Def. Ein topol. Raum X heißt **lokal wegzusammenhängend**, falls für alle $x \in X$ und Umgebungen $U_x \subseteq X$ von x eine wegzshgde Umgebung $V_x \subseteq U_x$ von x existiert.

Satz (Liftungstheorem). Sei $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, W wegzshgd und lokal wegzshgd, $f : W \rightarrow Y$ stetig, $x_0 \in X, w_0 \in W$ mit $y_0 := p(x_0) = f(w_0)$. Dann existiert eine stetige Abbildung $\tilde{f} : W \rightarrow X$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(w_0) = x_0$ genau dann, wenn

$$f_*(\pi_1(W, w_0)) \subseteq \text{im}(p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)).$$

In diesem Fall ist die Liftung \tilde{f} eindeutig.

Def. Eine **Decktransformation** einer Überlagerung $p : X \rightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus $\phi : X \rightarrow X$ mit $p \circ \phi = p$. Ihre Menge bildet mit der Abbildungs-Komposition eine Gruppe $\text{Deck}(p)$.

Korollar. Seien $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, $x_0, x_1 \in X$ mit $p(x_0) = p(x_1)$. Ist X einfach zshgd und lokal wegzshgd, so gibt es genau eine Decktransformation $\phi : X \rightarrow X$ mit $\phi(x_0) = x_1$.

Def. Eine Überlagerung $p : X \rightarrow Y$ heißt **universell**, falls p surjektiv, X einfach zshgd und lokal wegzshgd ist.

Prop. Seien $p : X \rightarrow Y$ und $p' : X' \rightarrow Y$ univ. Überlagerungen. Dann gibt es einen Homöomorphismus $\phi : X \rightarrow X'$ mit $p' \circ \phi = p$.

Für $p : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine universelle Überlagerung und $g = [\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$ sei $\tilde{\gamma}$ der Lift von γ mit $\gamma(0) = x_0$. Sei $\psi_g \in \text{Deck}(p)$ die eindeutige Decktransformation mit $\psi_g(x_0) = \tilde{\gamma}(1)$.

Prop. $\Psi : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \text{Deck}(p), g \mapsto \psi_g$ ist ein Gruppenisom.

Prop. Sei $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, X wegzshgd und lokal wegzshgd und $G < \text{Deck}(p)$ eine Untergruppe. Angenommen, für alle $y \in Y$ und $x_0, x_1 \in p^{-1}(y)$ existiert $g \in G$ mit $g(x_0) = x_1$. Dann gilt $G = \text{Deck}(p)$.

Def. Eine **Wirkung** oder **Operation** einer Gruppe G auf einem Raum X ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Top}} X$.

Notation. Statt $\phi(g)$ schreibt man auch ϕ_g oder g .

Def. Der **Orbitraum** der Gruppenwirkung von G auf X ist

$$X/G := X/\sim \quad \text{mit} \quad x \sim y : \iff \exists g \in G : g(x) = y.$$

Def. Eine Gruppenwirkung $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ heißt **eigentlich diskontinuierlich**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass gilt: $\forall g \in G : \phi_g(U) \cap U \neq \emptyset \implies g = e$.

Prop. Sei X zshgd, lokal wegzshgd, $G \rightarrow \text{Aut}(X)$ eine eigentlich diskontinuierliche Wirkung. Dann ist $p : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung mit Decktransformationsgruppe G .

Satz. Sei X einfach zshgd und lokal wegzshgd. Die Gruppe G wirke eigentlich diskontinuierlich auf X . Dann gilt für jeden Basispunkt $y_0 \in Y := X/G$: $\pi_1(Y, y_0) \cong G$.

Bspe. • $\pi_1(S^1) = \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$
• $\pi_1(S^1 \times S^1) = \pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z}^2$
• $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \pi_1(S^2/(\mathbb{Z}/2)) \cong \mathbb{Z}/2$

Def. Ein topologischer Raum X heißt **semilokal einfach zshgd**, falls jedes $x \in X$ eine Umgebung $U_x \subset X$ besitzt, sodass $i_* : \pi_1(U_x, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ (wobei $i : U_x \hookrightarrow X$ die Inklusion bezeichnet) trivial ist.

Bspe. • Simplicialkomplexe und Mftn sind semilokal einfach zshgd.
• Nicht semilokal einfach zshgd sind die Hawaiianischen Ohrringe.

Satz. Sei Y wegzshgd und lokal wegzshgd. Dann besitzt Y genau dann eine universelle Überlagerung, wenn Y semilokal einfach zusammenhängend ist.

Satz (Jordanscher Kurvensatz). Sei $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig und injektiv und $C := f(S^1) \subset \mathbb{R}^2$. Dann besteht $\mathbb{R}^2 \setminus C$ aus zwei Zshgskomponenten, einer beschränkten und einer unbeschränkten. Der Rand beider Zusammenhangskomponenten ist jeweils C .

Satz (Borsuk-Ulam). Sei $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gibt es antipodale Punkte $x, -x$ mit $f(x) = f(-x)$.

Satz (Ham-Sandwich-Theorem). Seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt. Dann gibt es eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, die alle drei Teilmengen simultan halbiert.