

# Zusammenfassung Gewöhnliche DGLn

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Def** (Klassifikation von DGLn).

- (I) **Gewöhnliche** DGL: Gesucht ist Funktion in einer Variable
- Partielle** DGL: Gesucht ist Funktion in mehreren Variablen
- (II) **Ordnung** einer DGL: Höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in Gleichung vorkommt
- (III) **Explizite** DGL: Gleichung der Form  $y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)})$
- Implizite** DGL: Allgemeinere Form  $F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0$
- (IV) **Skalare** DGL: Gesucht ist Funktion mit Wert in  $\mathbb{R}$
- n-dimensionale** DGL: Gesuchte Funktion hat Wert in  $\mathbb{R}^n$
- (V) **Lineare** DGL: Gleichung hat die Form
$$a_k(t)y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = 0$$
- (VI) **Autonome** DGL: Gleichung der Form  $F(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0$  (keine Abhängigkeit von  $t$ , Zeitinvarianz)

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Dann ist ein **Anfangswertproblem** (AWP) gegeben durch die Gleichungen

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.1)$$

**Notation.** Seien im Folgenden  $I$  und  $J$  stets Intervalle in  $\mathbb{R}$ .

**Def.** • Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Eine differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Lösung** von  $\dot{y} = f(t, y)$ , falls für alle  $t \in I$  gilt:  $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ .

• Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Eine  $k$ -mal differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Lösung** von

$$y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)}), \quad (1.2)$$

falls für alle  $t \in I$  gilt:  $y^{(k)}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$

**Satz.** • Ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.2), dann ist

$$(y_1, \dots, y_k) : I \rightarrow \mathbb{R}^{kn}, \quad t \mapsto (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$$

eine Lösung des Systems von Gleichungen

$$(1.3) \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{k-1} = y_k \\ \dot{y}_k = f(t, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k) \end{cases}$$

• Ist umgekehrt  $(y_1, \dots, y_k) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.3), dann ist  $y = y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.2).

**Satz.** • Ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von AWP (1.1), dann ist

$$(y_1, y_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \mapsto (y_1(t), y_2(t)) = (t, y(t))$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.4) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = 1, & y_1(t_0) = t_0 \\ \dot{y}_2(t) = f(y_1(t), y_2(t)), & y_2(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Ist  $(y_1, y_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eine Lösung von (1.4), dann ist  $y = y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.1).

**Problem.** Gesucht ist eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  der linearen, skalaren, expliziten DGL 1. Ordnung (mit  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig)

$$\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \quad (1.5)$$

**Satz.** Die allgemeine Lösung der Gleichung  $\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t)$  ist

gegeben durch  $y_h(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

**Satz.** Sei  $y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine partikuläre Lösung von (1.5). Dann ist die Menge aller Lösungen von (1.5) gegeben durch

$$\{y_p + y_h \mid y_h : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist Lösung von } \dot{y}_h(t) = a(t) \cdot y_h(t)\}$$

**Bemerkung.** Der Ansatz mit **Variation der Konstanten**  $y_p(t) = c(t) \cdot y_h(t)$  für (1.5) führt zu

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{1}{c_0 t_0} \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) d\tau \\ \Rightarrow y_p(t) &= \left(\int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \end{aligned}$$

**Korollar.** Die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.6) \begin{cases} \dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mit  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$y(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

**Problem.** Ges. ist Lösung der DGL mit **getrennten Variablen**

$$\dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y) \quad (1.7)$$

mit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

**Lsg.** 1. Fall:  $h(y_0) = 0$  für ein  $y_0 \in J$ . Dann ist  $y(t) = y_0$  eine Lsg.

2. Fall: Es gibt kein  $y_0 \in J$  mit  $h(y_0) = 0$ . Sei  $H$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{h}$  und  $G$  eine Stammfunktion von  $g$ . Da  $h$  stetig und nirgends null ist, ist  $h$  entweder strikt positiv oder strikt negativ. Somit ist  $H$  streng monoton steigend/fallend und somit umkehrbar. Eine Lösung von (1.7) ist nun gegeben durch

$$y(t) = H^{-1}(G(t) + c_0) \quad \text{mit } c_0 \in \mathbb{R}.$$

**Problem.** Gesucht ist Lösung des AWP mit getrennten Variablen

$$(1.8) \begin{cases} \dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

**Lsg.** 1. Fall:  $h(y_0) = 0$ . Dann ist  $y(t) = y_0$  eine Lösung.

- 2. Fall:  $h(y_0) \neq 0$ . Dann ist  $h$  in einer Umgebung von  $y_0$  strikt positiv/negativ. Setze

$$H_1(y) := \int_{y(t_0)}^y \frac{1}{h(s)} ds, \quad G_1(t) := \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

Dann ist  $H_1$  in einer Umgebung von  $y_0$  invertierbar und eine Lösung von (1.8) ist gegeben durch

$$y(t) = H_1^{-1}(G_1(t)).$$

**Technik** (Transformation). Manchmal lässt sich eine DGL durch **Substitution** eines Termes in eine einfachere DGL überführen, deren Lösung mit bekannten Methoden gefunden werden kann. Die Lösung der ursprünglichen DGL ergibt sich durch Rücksubstitution.

**Bsp.** Gegeben sei die DGL  $\dot{y} = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$  mit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Substituiere  $z(t) = \alpha t + \beta y(t) + \gamma$ . Es ergibt sich die neue DGL  $\dot{z}(t) = \beta f(z(t)) + \alpha$ , die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt.

**Bsp** (Bernoulli-DGL). Gegeben sei die DGL

$\dot{y}(t) = \alpha(t) \cdot y(t) + \beta(t) \cdot (y(t))^\delta$  mit  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Multiplikation mit  $(1 - \delta)y^{-\delta}$  und Substitution mit  $z(t) = (y(t))^{1-\delta}$  führt zur skalaren linearen DGL 1. Ordnung

$$\dot{z}(t) = (1 - \delta)\alpha(t)z(t) + (1 - \delta)\beta(t).$$

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Abb.  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **stetig in  $x_0 \in \mathcal{D}$** , falls

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D} : \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

Die Abb. heißt **stetig** in  $\mathcal{D}$ , falls sie in jedem Punkt in  $\mathcal{D}$  stetig ist.

**Notation.**  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig}\}$ ,  $\|f\|_\infty := \sup_{t \in I} \|f(t)\|$

**Bemerkung.**  $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  ist ein Banachraum.

**Def.** Eine Teilmenge  $A \subset X$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluss  $\bar{A}$  kompakt in  $X$  ist.

**Def.** Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banachräume. Sei  $\mathcal{D} \subset X$ . Eine Abbildung  $T : \mathcal{D} \rightarrow Y$  heißt

- **stetig in  $x \in \mathcal{D}$** , falls  $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx$  in  $Y$  für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  in  $\mathcal{D}$  gilt.
- **Lipschitz-stetig** in  $\mathcal{D}$ , falls eine Konstante  $\alpha > 0$  existiert mit

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D} : \|Tx_1 - Tx_2\|_Y \leq \alpha \cdot \|x_1 - x_2\|_X.$$

- **kontraktiv**, falls  $T$  Lipschitz-stetig mit  $\alpha < 1$  ist.
- **kompakt**, falls  $T$  stetig ist und beschränkte Mengen in  $X$  auf relativ kompakte Mengen in  $Y$  abgebildet werden, d. h. für jede beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}$  besitzt die Folge  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge.

**Bemerkung.** Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, die Umkehrung gilt aber nicht.

**Satz** (Arzelà-Ascoli). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  kompakt. Eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$  ist genau dann relativ kompakt, wenn

- $\mathcal{F}$  ist **punktwise beschränkt**, d. h.

$$\forall t \in I : \exists M : \forall f \in \mathcal{F} : \|f(t)\| \leq M$$

- $\mathcal{F}$  ist **gleichgradig stetig**, d. h.

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in I, f \in \mathcal{F} : \|t_1 - t_2\| < \delta \implies \|f(t_1) - f(t_2)\| < \epsilon$$

**Satz** (Fixpunktsatz von Banach). Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein Banachraum,  $\mathcal{D} \subset X$  nichtleer, abgeschlossen. Sei  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  eine Kontraktion. Dann besitzt die Fixpunktgleichung  $y = Ty$  genau eine Lösung in  $\mathcal{D}$ .

**Satz** (Fixpunktsatz von Schauder). Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein Banachraum, sei  $\mathcal{D} \subset X$  nichtleer, abgeschlossen, beschränkt, konvex. Sei  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Fixpunktgleichung  $y = Ty$  mindestens eine Lösung in  $\mathcal{D}$ .

**Satz.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Dann ist das AWP (1.1) lokal lösbar, d.h. es existiert ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $t_0 \in I$  und eine stetig diff'bare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die das AWP (1.1) erfüllt.

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung des AWP (1.1).

- Eine Lösung  $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Fortsetzung** (bzw. **echte Fortsetzung**) der Lösung  $y$ , falls  $I \subset J$  (bzw.  $I \subsetneq J$ ) und  $u|_I = y$ .
- Die Lösung  $y$  heißt **maximale Lösung** des AWP (1.1), falls keine echte Fortsetzung von  $y$  existiert. Das Intervall  $I$  heißt dann **maximales Existenzintervall**.

**Satz.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ .

- Jede lokale Lösung des AWP (1.1) kann zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden.
- Sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine max. Lsg. des AWP (1.1). Dann ist  $I$  offen.

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

- Die Funktion  $f$  heißt **Lipschitz-stetig bzgl.  $y$**  auf  $\mathcal{D}$ , falls eine Konstante  $\mathcal{L} > 0$  existiert, sodass

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{D} : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \mathcal{L} \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

- Wenn für alle  $(t, y) \in \mathcal{D}$  eine Umgebung  $U_{(t,y)} \subset \mathcal{D}$  existiert, sodass  $f|_{U_{(t,y)}}$  Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  ist, so heißt  $f$  **lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$**  auf  $\mathcal{D}$ .

**Lemma.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und stetig diff'bar nach  $y$  in  $\mathcal{D}$ . Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$ .

**Satz** (Picard-Lindelöf, lokal quantitativ). Seien  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$  und  $R_{a,b} := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b}(y_0) \subset \mathcal{D}$ . Sei  $f$  Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $R_{a,b}$ . Dann besitzt das AWP (2.1) im Rechteck  $R_{a,b}$  genau eine Lösung  $y : I_y \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf  $I_\gamma := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$  mit  $\gamma = \min(a, \frac{b}{M})$  und  $M = \sup_{(t,y) \in R_{a,b}} \|f(t, y)\|$ .

*Bemerkung.* Im Beweis des Satzes definiert man die Picard-Iterierten  $u_j : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $j \in \mathbb{N}$  durch

$$u_0(t) := y_0, \quad u_{j+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_j(\tau)) d\tau.$$

Man zeigt: Die Funktionenfolge  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen eine Lösung  $u_\infty : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  des AWP.

**Satz** (Picard-Lindelöf, lokal qualitativ). Seien  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $\mathcal{D}$ ,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Dann besitzt das AWP (2.1) eine eindeutige lokale Lösung, d.h. es existiert  $\gamma = \gamma(t_0, y_0) > 0$ , sodass das AWP (2.1) auf  $I_\gamma := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$  genau eine Lösung besitzt.

**Satz** (Picard-Lindelöf, global). Seien  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $\mathcal{D}$ ,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall  $I = ]a_-, a_+[$  mit  $t_0 \in I$  und

- Das AWP (2.1) besitzt genau eine Lösung  $\gamma$  auf  $I$ .
- Ist  $\tilde{z} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine beliebige Lösung von (2.1) mit  $t_0 \in \tilde{I}$ , so gilt  $\tilde{I} \subseteq I$  und  $z = y|_{\tilde{I}}$ .

**Satz.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ . Falls  $f$  für jedes kompaktes Intervall  $\tilde{I} \subset I$  global Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $\tilde{I} \times \mathbb{R}^n$  ist, dann hat das AWP (2.1) genau eine globale Lösung  $y$  auf  $I$ .

**Satz.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  offen,  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $I \times \mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ . Ist das Wachstum von  $f$  linear beschränkt in  $y$  auf  $I \times \mathbb{R}^n$ , d.h. gibt es stetige Funktionen  $a, b : I \rightarrow [0, \infty[$  mit  $\|f(t, y)\| \leq a(t)\|y\| + b(t)$  für alle  $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$ , dann besitzt das AWP (2.1) eine eindeutige Lösung auf  $I$ .

**Satz** (Randverhalten maximaler Lösungen). Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$  und  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$ . Sei  $y : ]a_-, a_+[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine maximale Lösung des AWP (2.1).

- Ist  $a_+ < \infty$ , so ist  $y$  auf  $[t_0, a_+[$  unbeschränkt oder der Rand  $\partial \mathcal{D}$  ist nicht leer und  $\lim_{t \uparrow a_+} \text{dist}((t, y(t)), \partial \mathcal{D}) = 0$ .
- Ist  $a_+ > -\infty$ , so ist  $y$  auf  $]a_-, t_0]$  unbeschränkt oder der Rand  $\partial \mathcal{D}$  ist nicht leer und  $\lim_{t \downarrow a_-} \text{dist}((t, y(t)), \partial \mathcal{D}) = 0$ .

**Problem.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Für  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  betrachten wir das AWP

$$(3.1) \begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

**Satz.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ . Dann besitzt das AWP (3.1) eine eindeutige (globale) Lösung auf  $I$ .

**Notation.**  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{u : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \text{ stetig}\}$

**Def.** Eine Teilmenge  $M \subset V$  eines Vektorraums  $V$  heißt **affiner Teilraum**, wenn es ein  $y \in V$  und einen Unterraum  $U \subset V$  mit  $M = y + U := \{y + u \mid u \in U\}$  gibt.

**Satz.** Seien  $I \subset \mathbb{R}$  offen,  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig. Setze

$$U_h := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \text{ auf } I\}.$$

Dann ist  $U_h$  ein  $n$ -dimensionaler UVR von  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$  und für Funktionen  $y_1, \dots, y_m \in U_h$  sind äquivalent:

- $y_1, \dots, y_m$  sind linear unabhängig in  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ .
- Es gibt  $t^* \in I$ , sodass  $y_1(t^*), \dots, y_m(t^*)$  linear unabh. in  $\mathbb{R}^n$  sind.
- Für alle  $t \in I$  sind  $y_1(t), \dots, y_m(t)$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^n$ .