# Zusammenfassung Kommutative Algebra

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

## Ringe und Ideale

**Def.** Ein Ring ist ein Tupel $(A, +, \cdot, 0, 1)$ mit einer Menge $A$, Operationen $+, \cdot : A \times A \to A$ und Elementen $0, 1 \in A$, sodass

- $(A, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist,
- $(A, \cdot, 1)$ ein Monoid ist und
- die Multiplikation distributiv über die Addition ist, d. h.

$$x(y+z) = xy + xz \;\text{ und }\; (y+z)x = yx + zx \quad \forall\, x, y, z \in A.$$

**Bspe.** • $\mathbb{Z}$, • $K[x_1, \ldots, x_n]$, • **Nullring**: der Ring mit $0 = 1$

**Def.** Sei $(A, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $B \subseteq A$ heißt **Unterring**, falls $0, 1 \in B$ und $B$ unter $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist.

**Bspe.** • $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, • $K \subset K[X]$

**Def.** Ein **Ringhomomorphismus** $\phi : A \to B$ ist eine Abbildung, welche sowohl ein Gruppenhomomor. $(A, +_A, 0_A) \to (B, +_B, 0_B)$ als auch ein Ringhomomorphismus $(A, \cdot_A, 1_A) \to (B, \cdot_B, 1_B)$ ist.

*Bem.* Ringe und Ringhomomorphismen bilden eine Kategorie **Ring**.

**Lem.** Ein Ringhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus (in dieser Kategorie), wenn er bijektiv ist.

**Konvention.** Seien $A$ im Folgenden Ringe und $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

**Def.** Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt (beidseitiges) **Ideal** von $A$, falls

- $\mathfrak{a} \subseteq A$ eine Untergruppe ist und
- für alle $a \in A$ und $x \in \mathfrak{a}$ gilt: $ax, xa \in \mathfrak{a}$.

**Lem.** Der Schnitt von (beliebig vielen) Idealen ist selbst ein Ideal.

**Def.** Sei $M \subseteq A$ eine Teilmenge. Das von $M$ **erzeugte Ideal** ist der Schnitt aller Ideale von $A$, die $M$ umfassen.

*Bem.* Falls $A$ kommutativ ist, so gilt

$$\text{von } M \text{ erzeugtes Ideal} = \{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \,|\, n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in A, x_k \in M \}.$$

**Notation.** $(x_1, \ldots, x_n) \subseteq A$ ist das von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ erzeugte Ideal.

*Bem.* • Das **Nullideal** $(0)$ ist das kleinste Ideal, denn $(0) = \{0\}$.
• Das **Einsideal** $(1)$ ist das größte Ideal, denn $(1) = A$.

**Prop.** • Sei $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal. Dann ist auch $\phi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$ ein Ideal.
• Sei $A' \subseteq A$ ein Unterring. Dann ist auch $\phi(A') \subseteq B$ ein Unterring.

**Def.** Das Ideal $\ker \phi := \phi^{-1}((0))$ heißt **Kern** von $\phi$.

*Bem.* $\phi$ ist injektiv $\iff$ $\ker \phi = 0$

**Prop.** Sei $\phi : A \to B$ surjektiv, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist auch das Bild $\phi(A) \subseteq B$ ein Ideal.

**Prop.** Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es einen Ring $A/\mathfrak{a}$ und einen Ringhomomor. $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ mit folgender universeller Eigenschaft:
Für jeden Ring $B$ und Ringhomomor. $\psi : A \to B$ mit $\mathfrak{a} \subsetneq \ker \psi$ gibt es genau einen Ringhomomor. $\widetilde{\psi} : A/\mathfrak{a} \to B$ mit $\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi$.

*Konstr.* Sei durch $x \sim y \;:\iff\; x - y \in \mathfrak{a}$ eine Äq'relation $\sim$ auf $A$ definiert. Setze $A/\mathfrak{a} := A/\!\sim$ und $\pi(x) := [x]$. Die Addition und Multiplikation auf $A$ ind. die Addition bzw. Multiplikation auf $A/\mathfrak{a}$.

**Def.** $A/\mathfrak{a}$ heißt **Quotientenring** von $A$ nach $\mathfrak{a}$.

**Notation.** Man lässt häufig die Äquivalenzklammern weg, man schreibt also „$x = y$ in $A/\mathfrak{a}$" anstatt „$[x] = [y]$".

**Prop.** Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Folgende Korresp. ist bij. und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{Ideale } \mathfrak{b} \subseteq A \text{ mit } \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a} \} & \leftrightarrow & \{ \text{Ideale } \mathfrak{c} \subseteq A/\mathfrak{a} \} \\ \mathfrak{b} & \mapsto & \pi(\mathfrak{b}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{c}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{c} \end{array}$$

**Prop** (**Homomorphiesatz**). Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomor. Dann ist $\underline{\phi} : A/\ker(\phi) \to \operatorname{im}(\phi)$, $[x] \mapsto \phi(x)$ ein Ringisomorphismus.

Im Folgenden seien alle Ringe **kommutativ**, d. h. $xy = yx$ f. a. $x, y$.

**Def.** Sei $A$ ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in A$ heißt

- **regulär**, falls $\forall\, y \in A : xy = 0 \implies y = 0$.
- **Nullteiler**, falls es nicht regulär ist, d. h. wenn ein $y \in A \setminus \{0\}$ mit $xy = 0$ existiert.

**Def.** Ein Ring $A$ heißt **Integritätsbereich**, wenn $0 \in A$ der einzige Nullteiler in $A$ ist.

**Achtung.** Die Null im Nullring ist regulär!

*Bem.* Ein Ring $A$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn

$$0 \neq 1 \text{ in } A \qquad \text{und} \qquad \forall\, x, y \in \,: xy = 0 \implies x = 0 \lor y = 0.$$

**Beob.** Sei $\phi : A \to B$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Ist $B$ ein Integritätsbereich, so auch $A$.

**Def.** Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **Hauptideal**, falls $\mathfrak{a} = (a)$ für ein $a \in A$. Ein Ring $A$ heißt **Hauptidealbereich**, falls jedes Ideal in $A$ ein Hauptideal ist.

**Bspe.** • $\mathbb{Z}$, • $K[x]$

**Gegenbsp.** • $K[x_1, \ldots, x_n]$ für $n \geq 2$

**Def.** Ein Element $x \in A$ heißt **nilpotent**, falls $\exists\, n \geq 0 : x^n = 0$.

**Beob.** Ist $A$ ein Integritätsbereich, so ist $0 \in A$ das einzige nilpotente Element in $A$.

**Def.** Sei $A$ ein Ring, nicht notwendigerweise kommutativ.
Ein Element $x \in A$ heißt **Einheit**, falls ein $y \in A$ mit $xy = yx = 1$ existiert. $A^\times := \{ \text{Einheiten in } A \}$ heißt **Einheitengruppe**.
Der Ring $A$ heißt **Schiefkörper**, falls 0 die einzige Nicht-Einheit ist.
Falls zusätzlich $A$ kommutativ ist, so heißt $A$ ein **Körper**.

**Beob.** • $x \in A$ ist eine Einheit $\iff$ $(x) = (1)$ $\iff$ $A/(x) = 0$
• Einheiten sind regulär.

**Prop.** Sei $A$ ein kommutativer Ring. Dann sind äquivalent:

- $A$ ist ein Körper.
- $A$ besitzt genau zwei Ideale (nämlich $(0)$ und $(1)$).
- Ein Ringhomomorphismus $A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn $B$ nicht der Nullring ist.

**Def.** • Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ heißt **Primideal**, falls $1 \not\in \mathfrak{p}$ und $\forall\, a, b \in A : ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p} \lor b \in \mathfrak{p}$.
• Ein Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ heißt **maximal**, falls für jedes Ideal $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq A$ *entweder* $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} = A$ (nicht beides!) gilt.

**Bspe.** • Jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ hat die Form $(m)$ mit $m \in \mathbb{N}$. Das Ideal $(m)$ ist genau dann prim, wenn $m = 0$ oder $m$ eine Primzahl ist.
• Sei $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ ein irred. Polynom. Dann ist $(f)$ prim.

**Lem.**
$\mathfrak{p} \subseteq A$ ist prim $\iff$ $A/\mathfrak{p}$ ist ein Integritätsbereich
$\mathfrak{m} \subseteq A$ ist maximal $\iff$ $A/\mathfrak{m}$ ist ein Körper

**Kor.** Maximale Ideale sind prim.

**Prop.** Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Folgende Korresp. ist bij. und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \} & \leftrightarrow & \{ \text{Primideale } \mathfrak{q} \subset A/\mathfrak{a} \} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \pi(\mathfrak{p}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{q}) & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

Genauso bekommt man eine bijektive, monotone Korrespondenz

$$\{ \text{max. Ideale } \mathfrak{m} \subset A \text{ mit } \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a} \} \quad \leftrightarrow \quad \{ \text{max. Ideale } \mathfrak{n} \subset A/\mathfrak{a} \}$$

**Prop.** Ein Ring besitzt genau dann ein maximales Ideal, wenn er nicht der Nullring ist.

**Kor.** • Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gibt es genau dann ein maximales Ideal $\mathfrak{p} \subset A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} \neq (1)$.
• Ein Element $x \in A$ liegt genau dann in einem maximalen Ideal von $A$, wenn $x$ keine Einheit ist.

**Def.** Ein **lokaler Ring** ist ein komm. Ring $A$ mit genau einem max. Ideal $\mathfrak{m}$. Der Körper $F := A/\mathfrak{m}$ heißt **Restklassenkörper** von $A$.

**Notation.** Man schreibt „Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring."

**Def.** Ein **halblokaler Ring** ist ein kommutativer Ring mit nur endlich vielen maximalen Idealen.

**Lem.** Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein Ideal mit $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$. Dann ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.

**Prop.** Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, sodass $1 + x$ für alle $x \in \mathfrak{m}$ eine Einheit ist. Dann ist $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$, also $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.

**Prop.** Die Menge $\mathfrak{n} := \{ \text{nilpotente Elemente} \} \subseteq A$ ist ein Ideal, das sogenannte **Nilradikal**.

*Bem.* Der Ring $A/\mathfrak{n}$ hat außer 0 keine nilpotenten Elemente.

**Prop.** Das Nilradikal eines kommutativen Ringes ist der Schnitt aller seiner Primideale.

**Def.** Das **Jacobsonsche Ideal** $\mathfrak{j} \subset A$ ist der Schnitt aller maximalen Ideale von $A$.

**Prop.** Ein Element $x \in A$ liegt genau dann im Jacobsonschen Ideal $\mathfrak{j}$, wenn $1 - xy$ für alle $y \in A$ eine Einheit ist.

**Def.** Die **Summe von Idealen** $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ von $A$ ist das Ideal

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i := \{ \sum_{k=1}^{n} x_k \,|\, k \in \mathbb{N}, x_k \in \mathfrak{a}_{i_k}, i_k \in I \}.$$

*Bem.* $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ ist das kleinste Ideal, das alle $\mathfrak{a}_i$ umfasst.

**Beob.** $(x_1) + \ldots + (x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$

*Bem.* Ideale eines Ringes $A$ bilden mit Schnitt und Summe einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusionsordnung.

**Def.** Das **Produkt zweier Ideale** $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ ist

$$\mathfrak{ab} := \text{von } \{ab \,|\, a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\} \text{ erzeugtes Ideal.}$$

**Beob.** • $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, • $(x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n) = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$

**Bsp.** In $A = \mathbb{Z}$ gilt für $m, n \in \mathbb{N}$
• $(m) + (n) = (m, n) = (\text{ggT}(m, n))$, • $(m) \cap (n) = (\text{kgV}(m, n))$.

**Beob.** • Summe, Schnitt und Produkt von Idealen sind assoziativ.
- Summe und Schnitt sind kommutativ. Das Produkt von Idealen ist kommutativ, wenn der Ring kommutativ ist.
- Distributivgesetz: $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{ab} + \mathfrak{ac}$
- Modularitätsgesetz: Ist $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{c}$, so folgt

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}).$$

**Def.** Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ heißen **koprim**, falls $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$.

**Bsp.** In $A = \mathbb{Z}$ gilt: $(m)$, $(n)$ sind koprim $\iff$ $\text{ggT}(m, n) = 1$

**Prop.** Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n \subseteq A$ paarweise koprime Ideale. Dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i.$$

**Def.** Das **direkte Produkt** einer Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Ringen ist der Ring $\prod_{i\in I} A_i := \{(a_i \in A_i)_{i\in I}\}$ mit kmpnntnwsr Verknüpfung.

*Bem.* Das direkte Produkt ist das kategorienth. Produkt in **Ring**.

**Prop.** Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale. Dann ist

$$\phi : A \to \prod_{i=1}^{n} (A/\mathfrak{a}_i), \quad x \mapsto ([x], \ldots, [x])$$

genau dann surjektiv, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_i$ paarweise koprim sind.

*Bem.* Der Ringhomomor. $\phi$ ist genau dann injektiv, wenn $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = 0$.

**Prop.** Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \subset A$ Primideale und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Gilt $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, so gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$.

**Prop.** Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \subseteq A$ Ideale und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Gilt $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, so gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_j$.

**Def.** Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ zwei Ideale. Der **Idealquotient** von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ ist das Ideal $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) := \{x \in A \,|\, x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$.

**Notation.** • $(x : \mathfrak{b}) := ((x) : \mathfrak{b})$, • $(\mathfrak{a} : y) := (\mathfrak{a} : (y))$

**Def.** Der **Annulator** eines Ideals $\mathfrak{b} \subseteq A$ ist $\text{ann}(\mathfrak{b}) := (0 : \mathfrak{b})$.

**Lem.** • $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ • $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ • $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{bc})$
• $(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) = \bigcap_{i\in I} (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$ • $(\mathfrak{a} : \sum_{i\in I} \mathfrak{b}) = \bigcap_{i\in I} (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$

**Def.** Das **Wurzelideal** eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist das Ideal

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in A \,|\, \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in \mathfrak{a}\}.$$

*Bem.* Das Nilradikal ist $\sqrt{(0)}$, das Wurzelideal des Nullideals. Es gilt $\sqrt{\mathfrak{a}} = \pi^{-1}(\sqrt{(0)})$ mit $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$, $x \mapsto [x]$.

**Lem.** • $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \mathfrak{a}$ • $\sqrt{\mathfrak{a}^n} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ für $n \geq 1$ • $\sqrt{\mathfrak{a}} = (1) \iff \mathfrak{a} = (1)$
• $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ • $\sqrt{\mathfrak{ab}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$ • $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$

**Def.** Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **Wurzelideal**, falls $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

**Prop.** Das Wurzelideal von $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ist der Schnitt aller Primideale von $A$, die $\mathfrak{a}$ enthalten.

**Prop.** $\{$ Nullteiler von $A$ $\} = \bigcup_{x\in A\setminus\{0\}} \sqrt{\text{ann}(x)}$

**Lem.** $\sqrt{\mathfrak{a}}$ und $\sqrt{\mathfrak{b}}$ koprim $\implies$ $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ koprim

**Def.** Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus komm. Ringe. Die **Kontraktion** von $\mathfrak{b} \subseteq B$ (bzgl. $\phi$) ist das Ideal $A \cap \mathfrak{b} := \phi^{-1}(\mathfrak{b})$.

*Bem.* Es wird also $\phi$ in der Notation unterdrückt. Falls $\phi$ die Inklusion eines Unterrings ist, so ist $A \cap \mathfrak{b}$ wörtlich zu verstehen.

**Beob.** $A \cap \mathfrak{b} = \ker(A \to B \to B/\mathfrak{b})$

**Lem.** Ist $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal, so auch $A \cap \mathfrak{q} \subset A$.

**Achtung.** Die Kontraktion max. Ideale ist i. A. nicht maximal!

**Def.** Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus komm. Ringe. Die **Erweiterung** von $\mathfrak{a} \subseteq A$ (bzgl. $\phi$) ist das Ideal $B\mathfrak{a} := (\phi(\mathfrak{a}))$, das von $\phi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal.

*Bem.* Ist $\phi$ die Inklusion eines Unterrings, so ist $B\mathfrak{a}$ tatsächlich die Menge der $B$-Linearkombinationen von Elementen in $\mathfrak{a}$.

*Bem.* Die Erweiterung eines Primideals ist i. A. nicht mehr prim.

**Prop.** Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus komm. Ringe. Die Erweiterung und Kontraktion von Idealen (bzgl. $\phi$) bilden eine Galois-Verbindung, d. h. für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ und $\mathfrak{b} \subseteq B$ gilt

$$B\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \iff \mathfrak{a} \subseteq A \cap \mathfrak{b}.$$

Äquivalent dazu sind Erw. und Kontraktion monoton und es gelten

$$\mathfrak{a} \subseteq A \cap (B\mathfrak{a}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} \supseteq B(A \cap \mathfrak{b}).$$

Außerdem folgt aus den Eigenschaften einer Galois-Verbindung, dass

$$B\mathfrak{a} = B(A \cap (B\mathfrak{a})) \quad \text{und} \quad A \cap \mathfrak{b} = A \cap (B(A \cap \mathfrak{b})).$$

Damit induzieren Erweiterung und Kontraktion eine bijektive ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den kontrahierten Idealen von $A$ und den erweiterten Idealen von $B$.

**Lem.** Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subseteq A$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subseteq B$ gilt

- $B\sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{B\mathfrak{a}}$
- $B(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = B\mathfrak{a}_1 + B\mathfrak{a}_2$
- $B(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subseteq B\mathfrak{a}_1 \cap B\mathfrak{a}_2$
- $B(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = (B\mathfrak{a}_1)(B\mathfrak{a}_2)$
- $B(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2) \subseteq (B\mathfrak{a}_1 : B\mathfrak{a}_2)$
- $A \cap \sqrt{\mathfrak{b}} = \sqrt{A \cap \mathfrak{b}}$
- $A \cap (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) \supseteq A \cap \mathfrak{b}_1 + A \cap \mathfrak{b}_2$
- $A \cap (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) = (A \cap \mathfrak{b}_1) \cap (A \cap \mathfrak{b}_2)$
- $A \cap (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) \supseteq (A \cap \mathfrak{b}_1)(A \cap \mathfrak{b}_2)$
- $A \cap (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2) \subseteq (A \cap \mathfrak{b}_1 : A \cap \mathfrak{b}_2)$

# Moduln

**Def.** Sei $A$ ein Ring. Ein **$A$-(Links-)Modul** ist eine abelsche Gruppe $(M, +, 0)$ zusammen mit einer Abb. $\cdot : A \times M \to M$, sodass

- die Multiplikation eine Operation von $(A, \cdot, 1)$ auf $M$ ist, d. h. $(ab)x = a(bx)$ und $1 \cdot x = x$ für alle $a, b \in A$ und $x \in M$.
- die Multiplikation distributiv über die Addition ist, d. h. $a(x + y) = ax + ay$ und $(a + b)x = ax + bx$ f. a. $a, b \in A$, $x, y \in M$.

**Achtung.** Es heißt *der* Modul, nicht *das* Modul!

**Bspe.** • Der Ring $A$ ist selbst ein $A$-Modul.

- Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist (durch Einschränkung der Multiplikation) ein $A$-Modul.
- Ein $K$-Modul ($K$ ein Körper) ist dasselbe wie ein $K$-VR.
- Ein $\mathbb{Z}$-Modul ist dasselbe wie eine abelsche Gruppe.
- Ein $K[x]$-Modul ist dasselbe wie ein $K$-Vektorraum $V$ zusammen mit einem Endomorphismus $V \to V$.
- Sei $G$ eine endliche Gruppe und
$$A := K[G] := \{ \sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid g \in G, a_g \in K \}$$
die **Gruppenalgebra** von $G$ über $K$. Ein $A$-Modul ist dasselbe wie ein $K$-VR $V$ mit einer linearen Darstellung $G \to \mathrm{End}_K(V)$.

**Def.** Ein $A$-Modulhomomorphismus ist eine Abbildung $\phi : M \to N$ zwischen $A$-Moduln $M$ und $N$, welche ein Gruppenhomomorphismus $(M, +_M, 0_M) \to (N, +_N, 0_N)$ und verträglich mit der Wirkung des multiplikativen Monoids von $M$ und $N$ ist, d. h. $\phi(ax) = a\phi(x)$ für alle $a \in A$ und $x \in M$.

*Bem.* $A$-Moduln und $A$-Modulhomomor. bilden eine Kat. $A$-**Mod**.

**Lem.** Ein $A$-Modulhomomorphismus ist genau dann ein Isomorphismus (in dieser Kategorie), wenn er bijektiv ist.

**Def.** Sei $M$ ein $A$-Modul. Eine Teilmenge $M' \subseteq M$ heißt **Untermodul** von $M$, falls

- $M'$ eine Untergruppe von $(M, +, 0)$ ist und
- $M'$ abgeschlossen unter Multiplikation mit Elementen aus $A$ ist, d. h. $ax \in M'$ für alle $a \in A$ und $x \in M'$.

**Bsp.** Sei $A$ kommutativ. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist genau dann ein Ideal von $A$, wenn $\mathfrak{a}$ ein Untermodul von $A$ ist.

**Def.** Sei $\phi : M \to N$ eine $A$-Modulhomomorphismus.
Der **Kern** v. $\phi$ ist der Untermodul $\ker \phi := \{x \in M \mid \phi(x) = 0\} \subseteq M$.
Das **Bild** von $\phi$ ist der Untermodul $\mathrm{im}\, \phi := \phi(M) \subseteq N$.

**Prop.** Sei $M$ ein $A$-Modul und $M' \subseteq M$ ein Untermodul. Dann gibt es ein $A$-Modul $M/M'$ und einen Ringhomomor. $\pi : M \to M/M'$ mit folgender universeller Eigenschaft:
Für jeden $A$-Modul $N$ und $A$-Modulhomomor. $\psi : M \to N$ mit $M' \subseteq \ker \psi$ gibt es genau einen $A$-Modulhomomor. $\widetilde{\psi} : M/M' \to N$ mit $\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi$.

*Konstr.* $M/M' := M/{\sim}$ mit $x \sim y \;:\!\iff x - y \in M'$

**Def.** Der Modul $M/M'$ heißt **Quotientenmodul** von $M$ nach $M'$.

**Prop.** Sei $M$ ein $A$-Modul und $M' \subseteq M$ ein Untermodul.
Folgende Korrespondenz ist bijektiv und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \text{Untermoduln } M' \subseteq N \subseteq M \} & \leftrightarrow & \{ \text{Untermoduln } \overline{N} \subseteq M/M' \} \\ N & \mapsto & \pi(N) \\ \pi^{-1}(\overline{N}) & \leftarrow\!\shortmid & \overline{N} \end{array}$$

**Def.** Der **Kokern** eines $A$-Modulhomomorphismus $\phi : M \to N$ ist

$$\mathrm{coker}\, \phi := N/\,\mathrm{im}(\phi).$$

*Bem.* • $\phi$ injektiv $\iff \ker \phi = 0$ • $\phi$ surjektiv $\iff \mathrm{coker}\, \phi = 0$

**Prop (Homomorphiesatz).** Sei $\phi : M \to N$ ein $A$-Modulhomom. Dann ist $\underline{\phi} : M/\ker(\phi) \to \mathrm{im}(\phi)$, $[x] \mapsto \phi(x)$ ein $A$-Modulisomor.

**Def.** Sei $M$ ein $A$-Modul. Die **Summe** einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Untermoduln von $M$ ist

$$\sum_{i \in I} M_i := \{ \sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in M_i \}$$

(Dabei ist $\sum_{i \in I} x_i$ endlich, d. h. $x_i = 0$ für alle bis auf endl. viele $i \in I$.)

**Prop.** Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln von $M$. Dann ist auch der Schnitt $\bigcap_{i \in I} M_i$ ein Untermodul von $M$.

*Bem.* Untermoduln eines Moduls $M$ bilden mit Schnitt und Summe einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusionsordnung.

**Prop (Isomorphiesätze).** Sei $A$ ein Ring.

1. Sei $M$ ein $A$-Modul und $M_1, M_2 \subseteq M$ zwei Untermoduln. Dann existiert ein kanonischer $A$-Modulisomorphismus
$$(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2).$$
2. Sei $L$ ein $A$-Modul und $N \subseteq M \subseteq L$ Untermoduln. Dann existiert ein kanonischer $A$-Modulisomorphismus
$$(L/N)/(M/N) \cong L/M.$$

**Def.** Sei $A$ kommutativ, $M$ ein $A$-Modul und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal.
Das **Produkt** von $\mathfrak{a}$ und $M$ ist $\mathfrak{a}M := \{ax \mid a \in \mathfrak{a}, x \in M\}$.

**Notation.** $aM := (a)M = \{ax \mid x \in M\}$ für $a \in A$

**Def.** Sei $A$ komm. und $N$, $P$ Untermoduln eines $A$-Moduls $M$. Das Ideal $(N : P) := \{a \in A \mid aP \subseteq N\} \subseteq A$ heißt **Quotient** von $N$ nach $P$.

**Def.** Das Ideal $\mathrm{ann}\, M := (0 : M)$ heißt **Annulator** von $M$.

*Bem.* Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{ann}\, M$, so können wir $M$ auch als $A/\mathfrak{a}$-Modul auffassen.

**Def.** Der $A$-Modul $M$ heißt **treu**, falls $\mathrm{ann}\, M = 0$.

**Lem.** Sei $A$ kommutativ, $N, P \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt
• $\mathrm{ann}(N + P) = \mathrm{ann}(N) + \mathrm{ann}(P)$ • $(N : P) = \mathrm{ann}((N + P)/N)$

**Def.** Sei $M$ ein $A$-Modul, $X \subset M$ eine Teilmenge.
Der von $X$ **erzeugte Untermodul** ist
$$L(X) := \sum_{x \in X} Ax = \sum_{x \in X} \{ax \mid a \in A\} = \{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \in A\}.$$

**Def.** Eine Teilmenge $X \subset M$ heißt **Erzeugendensystem**, falls $L(X) = M$. Ein $A$-Modul $M$ heißt **endlich erzeugt**, falls ein endliches Erzeugendensystem von $M$ existiert.

*Bem.* Ein $A$-Modul $M$ ist ganau dann endlich erzeugt, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und ein surj. $A$-Modulhomomorphismus $\phi : A^n \to M$ existiert.

**Def.** Das **direkte Produkt** einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von $A$-Moduln ist das $A$-Modul $\prod_{i \in I} M_i := \{(x_i \in M_i)_{i \in I}\}$ mit kmpnntnwsr Verkn.

*Bem.* Das direkte Produkt ist das kategorienth. Produkt in $A$-**Mod**.

**Def.** Die **direkte Summe** einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von $A$-Moduln ist
$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{(x_i \in M_i)_{i \in I} \mid x_i = 0 \text{ für alle bis auf endl. viele } i \in I\} \subseteq \prod_{i \in I} M_i.$$

*Bem.* Die dir. Summe ist das kategorienth. Koprodukt in $A$-**Mod**.
Ist $I$ endlich, so gilt $\bigoplus_{i \in I} M_i \cong \prod_{i \in I} M_i$.

**Bsp (Direkte Summenzerlegung).** Sei $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ ein endl. direktes Produkt komm. Ringe. Dann gilt $A \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$ als $A$-Modul mit
$$\mathfrak{a}_i := \{(x_i)_{i=1}^n \mid x_j = 0 \text{ für } j \neq i\}.$$

**Def.** Ein **$A$-Modul** $M$ heißt frei, falls eine Menge $I$ existiert, sodass $M \cong \bigoplus_{i \in I}$ als $A$-Modul.

*Bem.* Ein endlicher freier Modul ist ein Modul, der zu $A^n := A \oplus \ldots \oplus A$ für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph ist.

**Prop.** Sei $A$ ein Ring. Ein $A$-Modul $M$ ist genau dann endl. erzeugt, wenn $M$ der Quotient eines $A$-Moduls der Form $A^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist.

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring, $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Sei $\phi \in \mathrm{End}_A(M)$ mit $\mathrm{im}\, \phi \subseteq \mathfrak{a}M$. Dann erfüllt $\phi$ eine Gleichung der Form $\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$.

**Kor.** Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und $M$ ein $A$-Modul mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $x \in A$ mit $x = 1$ modulo $\mathfrak{a}$ und $xM = 0$.

**Lem (Nakayama).** Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $A$, welches im Jacobsonschen Radikal $\mathfrak{j}$ von $A$ enthalten ist. Dann folgt aus $\mathfrak{a}M = M$ schon $M = 0$.

**Kor.** Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, welches im Jacobsonschen Ideal $\mathfrak{j}$ enthalten ist. Dann folgt aus $M = \mathfrak{a}M + N$ schon $M = N$.

**Def.** Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring. Sei $M$ ein endlich erz. $A$-Modul. Setze $M(\mathfrak{m}) := M/\mathfrak{m}M$. Wegen $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{ann}(M(\mathfrak{m}))$ ist $M(\mathfrak{m})$ in natürl. Art ein (endlich-dim.) $F$-Vektorraum, die **spezielle Faser** von $M$. Das Bild eines Elements $x \in M$ in $M(\mathfrak{m})$ wird **Wert des Schnittes** $x$ in der speziellen Faser genannt.

**Prop.** Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring, $M$ ein endlich erz. $A$-Modul. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Schnitte von $M$, deren Werte in $M(\mathfrak{m})$ eine Basis bilden. Dann erzeugen $x_1, \ldots, x_n$ den $A$-Modul $M$.

## Exakte Sequenzen

**Def.** Sei $A$ ein Ring. Eine Sequenz

$$\ldots \to M^{i-1} \xrightarrow{\phi^{i-1}} M^i \xrightarrow{\phi^i} M^{i+1} \to \ldots$$

von $A$-Moduln und $A$-Modulhomomorphismen heißt **exakt** bei $M^i$, falls $\operatorname{im}\phi^{i-1} = \ker\phi^i$. Die Sequenz heißt **exakt**, falls sie exakt bei jedem $M^i$ ist.

**Bsp.** Sei $\phi : M \to N$ ein $A$-Modulhomomorphismus. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi \text{ ist injektiv} \quad &\iff \quad 0 \to M \xrightarrow{\phi} N \text{ ist exakt} \\ \phi \text{ ist surjektiv} \quad &\iff \quad M \xrightarrow{\phi} N \to 0 \text{ ist exakt} \end{aligned}$$

**Def.** Eine **kurze exakte Sequenz** k. e. S. von $A$-Moduln ist eine exakte Sequenz der Form $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$.

*Bem.* Jede lange exakte Sequenz $\ldots \to M^{i-1} \to M^i \to M^{i+1} \to \ldots$ zerfällt in kurze exakte Sequenzen: Mit $N^i = \operatorname{im}\phi^{i-1} = \ker\phi^i$ haben wir kurze exakte Sequenzen $0 \to N^i \to M^i \to N^{i+1} \to 0$.
Andersherum kann man solche kurzen exakten Sequenzen zu einer langen exakten Sequenz zusammenkleben.

**Lem.** Sei $A$ ein komm. Ring. Eine Seq. $E : M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ ist genau dann exakt, wenn für alle $A$-Moduln $N$ die Sequenz

$$\operatorname{Hom}(E, N) : 0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}(M', N).$$

exakt ist.

**Lem.** Sei $A$ ein kommutativer Ring.

- Eine Sequenz $E : M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ ist genau dann exakt, wenn für alle $A$-Moduln $N$ folgende induzierte Sequenz exakt ist:

  $$\operatorname{Hom}(E, N) : 0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}(M', N).$$

- Eine Sequenz $F : 0 \to N' \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} N''$ ist genau dann exakt, wenn für alle $A$-Moduln $M$ folgende induzierte Sequenz exakt ist:

  $$\operatorname{Hom}(M, F) : \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\phi_*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\psi_*} \operatorname{Hom}(M, N'') \to 0.$$

**Lem** (**Schlangenlemma**). Sei $A$ ein Ring. Sei folgendes komm. Diagramm von $A$-Moduln mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' & \end{tikzcd}$$

Dann gibt es einen Verbindungshomomorphismus $\delta : \ker\phi'' \to \operatorname{coker}\phi'$, mit dem folgende Sequenz exakt ist:

$$\ker\phi' \to \ker\phi \to \ker\phi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\phi' \to \operatorname{coker}\phi \to \operatorname{coker}\phi''.$$

**Def.** Sei $A$ ein Ring und $\mathfrak{C}$ eine Klasse von $A$-Moduln.
Eine Abb. $\lambda : \mathfrak{C} \to G$ in eine ab. Gruppe heißt **additive Funktion**, falls für alle kurzen exakten Seq. $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ von Moduln aus $\mathfrak{C}$ gilt, dass $\lambda(C) = \lambda(C') + \lambda(C'')$.

**Bsp.** Sei $K$ ein Körper und $\mathfrak{C}$ die Klasse der endlich-dim. VR über $K$. Dann ist $\dim : \mathfrak{C} \to \mathbb{Z}$ eine additive Funktion.

**Prop.** Sei $A$ ein Ring, $\mathfrak{C}$ eine Klasse von $A$-Moduln und $\lambda : \mathfrak{C} \to G$ eine additive Funktion. Sei

$$0 \to M^0 \xrightarrow{\phi^0} M^1 \to \ldots \to M^{n-1} \xrightarrow{\phi^{n-1}} M^n \to 0$$

eine exakte Sequenz von Moduln in $\mathfrak{C}$, sodass auch die Kerne der $\phi^i$ in $\mathfrak{C}$ liegen. Dann gilt $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M^i) = 0$.

## Tensorprodukt

**Def.** Seien $M$, $N$ und $P$ drei $A$-Moduln. Eine Abbildung $\beta : M \times N \to P$ heißt **$A$-bilinear**, falls für alle $x \in M$ die Abbildung $\beta(x, -)$ und für alle $y \in N$ die Abbildung $\beta(-, y)$ ein $A$-Modulhomomorphismus ist.

**Bsp.** Die Multiplikation $\cdot : A \times A \to A$ ist $A$-bilinear.

**Prop.** Seien $M$ und $N$ zwei $A$-Moduln. Dann existiert ein $A$-Modul $M \otimes_A N$ und eine bilineare Abbildung $\gamma : M \times N \to M \otimes_A N$ mit folgender universellen Eigenschaft:
Für jeden $A$-Modul $P$ und für jede bilineare Abbildung $\beta : M \times N \to P$ gibt es genau einen $A$-Modulhomomorphismus $\underline{\beta} : M \otimes_A N \to P$ mit $\beta = \underline{\beta} \circ \gamma$.

**Def.** $M \otimes_A N$ heißt **Tensorprodukt** von $M$ und $N$ über $A$.

*Konstr.*
- Sei $C$ der freie $A$-Modul $A^I$ mit $I := M \times N$. Elemente von $C$ haben die Form $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i, y_i)$ mit $\lambda_i \in A$, $x_i \in M$, $y_i \in N$.
- Sei $D \subset C$ der von allen Elementen der Form

  $$\begin{aligned} &(x + x', y) - (x, y) - (x', y), \qquad &&(ax, y) - a(x, y), \\ &(x, y + y') - (x, y) - (x, y'), \qquad &&(x, ay) - a(x, y) \end{aligned}$$

  mit $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ und $a \in A$ erzeugte Untermodul.
- Setze $M \otimes_A N := C/D$.

**Notation.** $x \otimes y := \gamma(x, y)$

*Bem.* Jedes Element in $M \otimes_A N$ lässt sich als $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ mit $x_i \in M$, $y_i \in N$ schreiben. In $M \otimes_A N$ gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} &x \otimes (ay) = a(x \otimes y) = (ax) \otimes y \\ &(x + x') \otimes (y + y') = x \otimes y + x' \otimes y + x \otimes y' + x' \otimes y' \end{aligned}$$

**Lem.** Das Tensorprodukt induziert einen Bifunktor

$$\otimes_A : A\textbf{-Mod} \times A\textbf{-Mod} \to A\textbf{-Mod}.$$

**Lem.** Sei $A$ ein komm. Ring, $M$ und $N$ zwei $A$-Moduln, $x_i \in M$ und $y_i \in N$ mit $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ in $M \otimes_A N$. Dann gibt es endlich erzeugte Untermoduln $M_0 \subseteq M$ und $N_0 \subseteq N$ mit $x_1, \ldots, x_n \in M_0$, $y_1, \ldots, y_n \in N_0$ und $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ in $M_0 \otimes_A N_0$

**Def.** Sei $A$ ein komm. Ring, $M_1, \ldots, M_r$ und $P$ $A$-Moduln.
Eine Abbildung $\mu : M_1 \times \ldots \times M_r \to P$ heißt **$A$-multilinear**, falls sie linear in jedem Argument ist.

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring, $M_1, \ldots, M_r$ $A$-Moduln. Es existiert ein $A$-Modul $M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r$ und eine multilineare Abbildung $\gamma : M_1 \times \ldots \times M_r \to M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r$ mit der univ. Eigenschaft
Für jeden $A$-Modul $P$ und für jede multilineare Abbildung $\mu : M_1 \times \ldots \times M_r \to P$ gibt es genau einen $A$-Modulhomomorphismus $\underline{\mu} : M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r \to P$ mit $\mu = \underline{\mu} \circ \gamma$.

*Konstr.* $M_1 \otimes_A \ldots \otimes_A M_r := M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A (\ldots \otimes_A M_r))$

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring und $M$, $N$ und $P$ drei $A$-Moduln. Es existieren kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} &M \otimes_A N \cong N \otimes_A M, \qquad &&(M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A (N \otimes_A P), \\ &(M \oplus N) \otimes_A P \cong (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P), \qquad &&A \otimes_A M \cong M. \end{aligned}$$

**Def.** Seien $A$ und $B$ zwei komm. Ringe. Ein $(A, B)$-Bimodul ist eine abelsche Gruppe, welche sowohl ein $A$- als auch ein $B$-Modul ist, sodass die Modulstrukturen miteinander verträglich sind, d. h. für alle $a \in A$, $b \in B$ und $x \in N$ gilt $a(bx) = b(ax)$.

**Lem.** Sei $M$ ein $A$-Modul, $P$ ein $B$-Modul und $N$ ein $(A, B)$-Bimodul. Dann gibt es einen kanon. Isomorphismus abelscher Gruppen

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

**Def.** Sei $\phi : A \to B$ ein Morphismus kommutativer Ringe.

- Die **Skalareinschränkung** eines $B$-Moduls $N$ (vermöge $\phi$) ist der $A$-Modul $N^A$, der als Menge und ab. Gruppe $N$ ist und dessen Skalarmult. durch $a \cdot x := \phi(a) \cdot x$ definiert ist.
- Die **Skalarerweiterung** eines $A$-Moduls $M$ (vermöge $\phi$) ist der $B$-Modul $M_B := B^A \otimes_A M$ mit der Skalarmultiplikation definiert durch $b(b' \otimes x) := (bb') \otimes x$.

**Prop.** Sei $\phi : A \to B$ ein Morphismus kommutativer Ringe.

- Sei $N$ ein $B$-Modul. Ist $B^A$ als $A$-Modul endlich erzeugt und $N$ als $B$-Modul endlich erzeugt, so ist $N^A$ als $A$-Modul endlich erzeugt.
- Sei $M$ ein $A$-Modul. Ist $m$ als $A$-Modul endlich erzeugt, so ist $M_B$ als $B$-Modul endlich erzeugt.

**Lem.** Sei $M$ ein $A$-Modul und $N$ ein $B$-Modul. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $N \otimes_B M_B \cong N^A \otimes_A M$ von $B$-Moduln.

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring und $M$, $N$ und $P$ drei $A$-Moduln. Dann ist folgende Abbildung ein $A$-Modulisomorphismus:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(M \otimes_A N, P) &\to \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, P)), \\ \beta &\mapsto (x \mapsto (y \mapsto \beta(x \otimes y))). \end{aligned}$$

*Bem.* Mit anderen Worten: Es ex. eine Adj. $- \otimes_A N \dashv \operatorname{Hom}_A(N, -)$

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring. Das Tensorprodukt ist rechtsexakt, d. h. ist $E : M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von $A$-Moduln und $N$ ein weiterer $A$-Modul, so ist auch die induzierte Sequenz

$$E \otimes_A N : M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0 \quad \text{exakt.}$$

*Bem.* Dies folgt daraus, dass das Tensorprodukt als Linksadjungierter Kolimiten erhält.

**Achtung.** Das Tensorprodukt ist i. A. nicht exakt. Insbesondere erhält es keine injektiven Abbildungen.

**Def.** Sei $A$ ein kommutativer Ring. Ein $A$-Modul $M$ heißt flach, falls $(- \otimes_A M)$ exakt ist, d. h. falls für jede (lange) exakte Sequenz $E$ auch $E \otimes_A M$ exakt ist.

**Prop.** Sei $A$ komm. und $M$ ein $A$-Modul. Es sind äquivalent:

- Der $A$-Modul $M$ ist flach.
- Für jede kurze exakte Sequenz $E : 0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ ist die tensorierte Sequenz $E \otimes_A M$ exakt.
- Für jede injektive $A$-lineare Abbildung $\phi : N \to N'$ ist auch $\phi \otimes \mathrm{id}_M : N \otimes_A M \to N' \otimes_A M$ injektiv.
- Für jede inj. $A$-lineare Abb. $\phi : N \to N'$ zw. endl. erzeugten $A$-Moduln ist auch $\phi \otimes \mathrm{id}_M : N \otimes_A M \to N' \otimes_A M$ injektiv.

**Prop.** Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Ist $M$ ein flacher $A$-Modul, so ist $M_B$ ein flacher $B$-Modul.

## Algebren

**Def.** Eine kommutative ***A*-Algebra** $B$ ist ein kommutativer Ring $B$ zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$, dem *Strukturmorphismus* der Algebra.

*Bem.* Ist $a \in A$ und $b \in B$, so definieren wir $ab := \phi(a)b$ (wie bei der Skalareinschränkung).

**Bspe.**
- Sei $K$ ein Körper. Eine nichttriviale $K$-Algebra ist dasselbe wie ein Ring, der $K$ als Unterring enthält.
- Jeder Ring ist auf genau eine Weise eine $\mathbb{Z}$-Algebra.

**Def.** Ein *Homomorphismus* von $A$-Algebren $B$ und $C$ ist ein Ringhomomorphismus $\chi : B \to C$, welcher einen Homomorphismus $\chi : B^A \to C^A$ von $A$-Moduln induziert.

*Bem.* Ein Ringhomomorphismus $\chi : B \to C$ ist also genau dann ein $A$-Algebrenhomomor., wenn $\chi(ab) = a\chi(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

*Bem.* $A$-Algebren und ihre Homomor. bilden eine Kategorie $A$-**Alg**.

**Def.** Sei $A$ ein komm. Ring. Eine komm. $A$-Algebra $B$ heißt eine ...

- ...**endliche *A*-Algebra**, falls $B^A$ als $A$-Modul endlich erzeugt ist, d. h. falls endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_n \in B$ existieren, sodass jedes Element aus $B$ als $A$-Linearkombination der $b_i$ geschrieben werden kann.
- ...**endlich erzeugte *A*-Algebra** oder $A$-Algebra **endlichen Typs**, falls endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_n \in B$ existieren, sodass jedes andere Element von $B$ als Polynom in den $b_i$ mit Koeffizienten aus $A$ geschrieben werden kann.

**Def.** Ein kommutativer Ring heißt **endlich erzeugt**, falls er eine $\mathbb{Z}$-Algebra endlichen Typs ist.

**Def.** Sei $A$ ein kommutativer Ring. Seien $\phi : A \to B$ und $\psi : A \to C$ die Strukturabbildungen zweier $A$-Algebren $B$ und $C$. Dann ist auf $D := B^A \otimes_A C^A$ eine Multiplikation durch

$$\mu : D \times D \to D, \quad (b \otimes c, b' \otimes c') \mapsto (bb') \otimes (cc')$$

definiert. Der Ring $D$ wird mit der Strukturabbildung

$$\rho : A \to D, \quad a \mapsto \phi(a) \otimes 1 = 1 \otimes \psi(A)$$

zu einer $A$-Algebra. Diese heißt **Tensorprodukt** $B \otimes_A C$ der kommutativen Algebren $B$ und $C$.

## Gerichtete Limiten

**Def.** Eine **gerichtete Menge** ist eine nichtleere teilweise geordnete Menge $(I, \leq)$, sodass $\forall\, i, j \in I : \exists\, k \in I : i \leq k \wedge j \leq k$.

*Bem.* Eine teilweise geordnete Menge $(I, \leq)$ ist genau dann gerichtet, wenn in $I$, aufgefasst als Präordnungskategorie, jedes endliche Diagramm einen Kokegel besitzt.

**Def.** Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge und $A$ ein Ring.
Ein **gerichtetes System** $M_\bullet$ von $A$-Moduln über $I$ ist ein Funktor

$$M_\bullet : I \to A\text{-}\mathbf{Mod}, \quad i \mapsto M_i, \quad (i \leq j) \mapsto \mu^i_j : M_i \to M_j,$$

wobei wir $I$ als Präordnungskategorie auffassen.

**Prop.** Sei $M_\bullet$ ein gerichtetes System von $A$-Moduln. Dann existiert der Kolimes $\varinjlim_{i \in I} M_i$ von $M_\bullet$.

**Def.** Dieser Kolimes wird **gerichteter Limes** von $M_\bullet$ genannt.

*Konstr.*
- Sei $C := \bigoplus_{i \in I} M_i$.
- Sei $D \subseteq C$ der Untermodul, der von allen Elementen der Form $x_i - \mu^i_j(x_i)$ mit $i \leq j$ und $x_i \in M_i$ erzeugt wird.
- Dann erfüllt $M := C/D$ die geforderte universelle Eigenschaft.

*Bem.*
- Jedes $x \in \varinjlim_{i \in I} M_i$ wird durch ein $x_i \in M_i$ repräsentiert.
- Ein Element $x_i \in M_i$ repräsentiert dabei genau dann das Nullelement, falls ein $j \in I$ mit $i \leq j$ existiert, sodass $\mu^i_j(x_i) = 0$.

**Lem.** Jeder $A$-Modul ist der gerichtete Limes seiner endlich erzeugten Untermoduln.

**Def.** Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge. Ein *Homomorphismus* von gerichteten Systemen $M_\bullet$ und $N_\bullet$ von $A$-Moduln über $I$ ist eine natürliche Transformation $\phi_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$.

*Bem.* Damit bilden gerichtete Systeme von $A$-Moduln über $I$ zusammen mit ihren Homomorphismen eine Kategorie $[I, A\text{-}\mathbf{Mod}]$.

**Prop.** Sei $\phi_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ ein Morphismus zwischen gerichtete Systeme von $A$-Moduln über $I$, $M := \varinjlim_{i \in I} M_i$ und $N := \varinjlim_{i \in I} N_i$.
Dann gibt es genau einen Morphismus $\phi := \varinjlim_{i \in I} \phi_i : M \to N$ mit

$$(M_i \to M \xrightarrow{\phi} N) = (M_i \xrightarrow{\phi_i} N_i \to N) \quad \text{für alle } i \in I.$$

*Bem.* Damit ist der gerichtete Limes ein Funktor

$$\varinjlim_{i \in I} : [I, A\text{-}\mathbf{Mod}] \to A\text{-}\mathbf{Mod}.$$

**Def.** Eine Sequenz $M_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet$ von gerichteten Systemen von $A$-Moduln über $I$ heißt **exakt**, falls für alle $i \in I$ die Sequenz $M_i \xrightarrow{\phi_i} N_i \xrightarrow{\psi_i} P_i$ exakt ist.

**Prop.** Der Gerichteter-Limes-Funktor ist exakt:
Sei $M_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet$ eine exakte Sequenz gerichteter Systeme von $A$-Moduln über $I$. Dann ist die induzierte Sequenz

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \xrightarrow{\varinjlim \phi_i} \varinjlim_{i \in I} N_i \xrightarrow{\varinjlim \psi_i} \varinjlim_{i \in I} P_i \qquad \text{auch exakt.}$$

**Prop.** Sei $M_\bullet$ ein gerichtes System von $A$-Moduln über $I$ und $N$ ein $A$-Modul. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\varinjlim_{i \in I} (M_i \otimes_A N) \cong (\varinjlim_{i \in I} M_i) \otimes_A N.$$

**Prop.** Sei $A_\bullet$ ein gerichtetes System von Ringen und Ringhomomorphismen. Fasse $A_\bullet$ als gerichtetes System von ab. Gruppen (d. h. $\mathbb{Z}$-Moduln) auf. Dann gibt es $A := \varinjlim_{i \in I} A_i$ eine Multiplikation, sodass $A$ ein Ring ist und die Gruppenhomomorphismen $A_i \to A$ sogar Ringhomomorphismen sind.

**Prop.** Ist $\varinjlim_{i \in I} A_i = 0$, so gibt es ein $i \in I$ mit $A_i = 0$.

**Def.** Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie kommutativer $A$-Algebren.
Für eine endliche Teilmenge $J \subset I$ setzen wir $B_J := \bigotimes_{i \in J} B_i$.
Dann ist $B_\bullet$ ein gerichtetes System über $(\mathcal{P}(I)_{\text{fin}}, \subseteq)$. Der Limes $\bigotimes_{i \in I} B_i := \varinjlim_{J \subseteq I} B_J$ heißt **Tensorprodukt** über die Familie $(B_i)_{i \in I}$.

# Lokalisierung

**Def.** Sei $A$ ein Ring. Eine **multiplikativ abgeschl. Teilmenge** von $A$ ist eine Teilmenge $S \subseteq A$ mit $1 \in S$ und $xy \in S$ für alle $x, y \in S$.

**Bspe.**
- Ein Ring $A$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn $A \setminus \{0\}$ multiplikativ abgeschlossen ist.
- Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist $1 + \mathfrak{a}$ mult. abgeschlossen.

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Dann gibt es einen komm. Ring $S^{-1}A$ und einen Ringhomomor. $\iota : A \to S^{-1}A$ mit folgender universeller Eigenschaft:

Für jeden Ring $B$ und Ringhomomor. $\phi : A \to B$ mit $\phi(S) \subseteq B^\times$ gibt es genau einen Ringhomomor. $\psi : S^{-1}A \to B$ mit $\phi = \psi \circ \iota$.

*Konstr.*
- Führe auf der Menge der Paare $(a, s) \in A \times S$ eine Äquivalenzrelation ein durch

$$(a, s) \sim (b, t) \quad :\Longleftrightarrow \exists u \in S : u(at - bs) = 0.$$

- Setze $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$.
- Wir schreiben $\frac{a}{s}$ für die Äquivalenzklasse von $(a, s)$ in $S^{-1}A$.
- Auf $S^{-1}A$ sind Addition und Mult. (wohl!) definiert durch

$$\tfrac{a}{s} + \tfrac{b}{t} := \tfrac{at+bs}{st}, \qquad \tfrac{a}{s} \cdot \tfrac{b}{t} := \tfrac{ab}{st}.$$

- Der Ringhomomorphismus ist gegeben durch $\iota(a) := \frac{a}{1}$.

**Def.** Der kommutative Ring $S^{-1}A$ heißt **Lokalisierung** von $A$ nach $S$ und $\iota : A \to S^{-1}A$ ihr *Strukturhomomorphismus*.

**Prop.** Sei $A$ komm. und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Dann gilt:
- Für alle $s \in S$ ist $\iota(s)$ eine Einheit in $S^{-1}A$.
- Ist $a \in A$ mit $\iota(a) = 0$, so gibt es ein $s \in S$ mit $as = 0$ in $A$.
- Jedes Element in $S^{-1}A$ hat die Form $\iota(a)\iota(s)^{-1}$ für ein $a \in A$ und ein $s \in S$.

*Bem.* Diese drei Eigenschaften charakterisieren die Lokalisierung eindeutig: Ist $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, der die drei Eigenschaften von $\iota$ aus der letzten Prop. erfüllt, so gilt $B \cong S^{-1}A$.

**Def.** Sei $A$ ein komm. Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist $A \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen. Der komm. Ring $A_\mathfrak{p} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$ heißt **Lokalisierung** von $A$ bei $\mathfrak{p}$ oder **Halm** von $A$ an $\mathfrak{p}$.

*Bem.* $A_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} := A_\mathfrak{p}\mathfrak{p} = \{ \tfrac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{p}, s \in A \setminus \mathfrak{p} \}.$$

**Def.** Sei $A$ ein Integritätsbereich. Dann ist $S := A \setminus \{0\}$ mult. abgeschlossen. Die Lokal. $S^{-1}A$ heißt **Quotientenkörper** von $A$.

*Bem.* Der Strukturhomomorphismus $A \to S^{-1}A$ ist in diesem Fall injektiv, wir können daher $A$ als Unterring von $S^{-1}A$ ansehen. Der Körper $S^{-1}A$ ist der kleinste Körper, der $A$ als Unterring enthält.

**Bsp.** $\mathbb{Q}$ ist der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$

**Bsp.** $S^{-1}A = 0 \iff 0 \in S$

**Def.** Sei $A$ ein komm. Ring, $f \in A$. Dann ist $S := \{f^n \mid n \geq 0\}$ mult. abgeschlossen. Die Lokalisierung $A[f^{-1}] := S^{-1}A$ heißt **Lokalisierung** von $A$ **außerhalb** von $f$.

*Konstr.* Sei $A$ ein kommutativer Ring, $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen und $M$ ein $A$-Modul.
- Wir definieren auf der Menge der Paare $M \times S$ eine Äquivalenzrelation durch

$$(m, s) \sim (m', s') \quad :\Longleftrightarrow \exists u \in S : u(ms' - m's) = 0.$$

- Wir schreiben $\frac{m}{s}$ für die Äquivalenzklasse von $(m, s)$.
- Vermöge der Addition und der Skalarmultiplikation

$$\tfrac{m}{s} + \tfrac{n}{t} := \tfrac{mt+ns}{st} \qquad \text{bzw.} \qquad \tfrac{a}{s} \cdot \tfrac{m}{t} := \tfrac{am}{st}$$

wird $S^{-1}M := (M \times S)/\sim$ zu einem $S^{-1}A$-Modul.

**Def.** Der $S^{-1}A$-Modul $S^{-1}M$ heißt **Lokalisierung** von $M$ nach $S$ und $\iota : M \to (S^{-1}M)^A$, $m \mapsto \frac{m}{1}$ sein *Strukturhomomorphismus.*

**Def.** Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Der $A_\mathfrak{p}$-Modul $M_\mathfrak{p} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}M$ heißt *Lokalisierung* von $M$ bei $\mathfrak{p}$ oder *Halm* von $M$ an $\mathfrak{p}$. Das Bild von $m \in M$ in $M_\mathfrak{p}$ heißt **Keim** von $m$ an $\mathfrak{p}$.

**Def.** Sei $f \in A$. Dann heißt $M[f^{-1}] := \{f^n \mid n \geq 0\}^{-1}M$ die *Lokalisierung* von $M$ außerhalb von $f$. Das Bild von $m \in M$ in $M[f^{-1}]$ heißt *Einschränkung* von $m$ außerhalb von $f$.

*Bem.* Sei $A$ ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Die Lokalisierung von $A$-Moduln nach $S$ stiftet einen Funktor $A$-**Mod** $\to (S^{-1}A)$-**Mod**: Für einen Morphismus $\phi : M \to N$ ist

$$S^{-1}\phi : S^{-1}M \to S^{-1}N, \quad \tfrac{m}{s} \mapsto \tfrac{\phi(m)}{s}.$$

**Prop.** Die Lokalisierung ist exakt: Sei $A$ ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Ist $M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M''$ exakt, so ist auch $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}\phi} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}M''$ exakt.

**Prop.** Sei $A$ ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Sei $M$ ein $A$-Modul und $P, N \subseteq M$ Untermoduln. Dann gilt:
- $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P \subseteq S^{-1}M$
- $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M/S^{-1}N$ als $S^{-1}A$-Moduln
- $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P \subseteq S^{-1}M$

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Sei $M$ ein $A$-Modul. Dann ist folgende Abb. ein Iso von $S^{-1}A$-Moduln:

$$\phi : S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M, \quad \tfrac{a}{s} \otimes m \mapsto \tfrac{am}{s}$$

**Kor.** Sei $A$ ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}A$ eine flache $A$-Algebra.

**Prop.** Sei $A$ ein kommutativer Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Seien $M$ und $N$ zwei $A$-Moduln. Dann ist folgende Abbildung ein Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln:

$$\phi : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes N), \quad \tfrac{m}{s} \otimes \tfrac{n}{t} \mapsto \tfrac{m \otimes n}{st}$$

**Bsp.** Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \cong (M \otimes_A N)_\mathfrak{p}$.

# Lokale Eigenschaften

**Sprechweise.** Eine Eigenschaft kommutativer Ringe (oder Moduln über einem solchen) heißt **lokal**, falls gilt:
Ein Ring $A$ (bzw. Modul $M$) besitzt die Eigenschaft genau dann, wenn all seine Halme $A_\mathfrak{p}$ (bzw. $M_\mathfrak{p}$) die Eigenschaft besitzen.

**Prop.** Sei $A$ ein kommutativer Ring und $M$ ein $A$-Modul. Dann sind äquivalent:

- $M = 0$
- $M_\mathfrak{p} = 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$
- $M_\mathfrak{m} = 0$ für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$

Mit der Exaktheit der Lokalisierung folgt:

**Kor.** Sei $A$ ein kommutativer Ring und $\phi : M \to N$ ein Homomorphismus von $A$-Moduln.

- Es sind äquivalent:
  - $\phi : M \to N$ ist injektiv.
  - $\phi_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ ist injektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$.
  - $\phi_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ ist injektiv für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.
- Es sind äquivalent:
  - $\phi : M \to N$ ist surjektiv.
  - $\phi_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ ist surjektiv für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$.
  - $\phi_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ ist surjektiv für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.

**Prop.** Sei $A$ ein kommutativer Ring und $M$ ein $A$-Modul. Dann sind äquivalent:

- $M$ ist ein flacher $A$-Modul.
- $M_\mathfrak{p}$ ist ein flacher $A_\mathfrak{p}$-Modul für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$.
- $M_\mathfrak{p}$ ist ein flacher $A_\mathfrak{m}$-Modul für alle max. Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.

## Ideale in Lokalisierungen

**Notation.** Sei $A$ ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ schreiben wir $S^{-1}\mathfrak{a} := (S^{-1}A)\mathfrak{a}$.

*Bem.* Dies ist gerechtfertigt, denn jedes Element in $(S^{-1}A)\mathfrak{a}$ hat die Form $\sum_i \frac{a_i}{s_i}$ und diese Terme können wir auf einen gemeinsamen Nenner bringen.

**Prop.** Alle Ideale in $S^{-1}A$ sind erweiterte Ideale, d. h. von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$.

**Prop.** $A \cap (S^{-1}\mathfrak{a}) = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$

**Bsp.** $S^{-1}\mathfrak{a} = (1) \iff \mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ist genau dann ein kontrahiertes Ideal bezüglich $A \to S^{-1}A$, wenn kein Element von $S$ ein Nullteiler in $A/\mathfrak{a}$ ist.

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring. Die Lokalisierung nach einer mult. abg. Teilmenge $S \subseteq A$ vertauscht mit folgenden Ideal-Operationen: endl. Summen, endl. Produkte, endl. Schnitte und Wurzeln. Das heißt, für zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ gilt:

- $S^{-1}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} + S^{-1}\mathfrak{b}$
- $S^{-1}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cdot S^{-1}\mathfrak{b}$
- $S^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cap S^{-1}\mathfrak{b}$
- $S^{-1}\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{S^{-1}\mathfrak{a}}$

**Kor.** $\sqrt{(0)} = S^{-1}\sqrt{(0)} \subseteq S^{-1}A$

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Folgende Korrespondenz ist bijektiv und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{ Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \} & \leftrightarrow & \{ \text{ Primideale } \mathfrak{q} \subset S^{-1}A \} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{p} = (S^{-1}A)\mathfrak{p} \\ A \cap \mathfrak{q} & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

**Kor.** Für ein Primideal $\mathfrak{r} \subset A$ liefert dies eine Korrespondenz

$$\{ \text{ Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit } \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{r} \} \leftrightarrow \{ \text{ Primideale } \mathfrak{q} \subset A_\mathfrak{r} \}$$

*Bem.* Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal und $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ ein weiteres Primideal. Lokalisieren bei $\mathfrak{p}$ schneidet alle Primideale heraus, die nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten sind. Der Wechsel nach $A/\mathfrak{q}$ schneidet alle Primideale heraus außer denen, die $\mathfrak{q}$ enthalten. Somit enthält $A_\mathfrak{p}/(A_\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = (A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}$ nur Primideale zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$.

**Def.** Sei $A$ ein komm. Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Der Körper $A(\mathfrak{p}) := A_\mathfrak{p}/(A_\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = (A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}$ heißt **Restklassenkörper** von $A$ an $\mathfrak{p}$.

**Prop.** Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Dann ist ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ genau dann eine Kontraktion eines Primideals in $B$, falls $A \cap (B\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring, $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen und $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul. Dann ist $S^{-1} \operatorname{ann}(M) = \operatorname{ann}(S^{-1}M)$.

**Kor.** Sei $A$ ein komm. Ring, $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen, $M$ ein $A$-Modul und $N, P \subseteq M$ zwei Untermoduln. Ist $P$ endlich erzeugt, so gilt $S^{-1}(N : P) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$.

# Primärzerlegung

**Def.** Ein Ideal $\mathfrak{q} \subset A$ heißt **primär**, falls $1 \notin \mathfrak{q}$ und falls aus $xy \in \mathfrak{q}$ schon $x \in \mathfrak{q}$ oder $\exists n \in \mathbb{N} : y^n \in \mathfrak{q}$ folgt.

**Lem.** $\mathfrak{q} \subsetneq A$ ist primär $\iff$ $\{$ Nullteiler $\} = \sqrt{(0)}$ in $A/\mathfrak{q}$

**Bspe.** • Primideale sind primär.
- Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Ist $\mathfrak{b} \subset B$ primär, so auch $A \cap \mathfrak{b} \subset A$.

**Lem.** Sei $\mathfrak{q}$ primär. Dann ist $\sqrt{\mathfrak{q}}$ das kleinste Primideal mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$.

**Def.** Sei $\mathfrak{q} \subset A$ ein primäres Ideal und $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$. Dann heißt $\mathfrak{q}$ ein **$\mathfrak{p}$-primäres** Ideal.

| *Bem.* | | |
|---|---|---|
| Primzahlen | $\hat{=}$ | Primideale |
| Primzahlpotenzen | $\hat{=}$ | primäre Ideale |

**Bsp.** Die primären Ideale in $\mathbb{Z}$ sind die Ideale der Form $(0)$ und $(p^n)$ für eine Primzahl $p$.

**Achtung.** Im Allgemeinen ist ein primäres Ideal keine Potenz eines Primideals! Andersherum ist die Potenz eines Primideals auch nicht notwendigerweise primär. Analoges gilt aber für max. Ideale:

**Prop.** Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Ist $\mathfrak{m} := \sqrt{\mathfrak{a}}$ ein maximales Ideal, so ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal.

**Kor.** Ist $\mathfrak{m}$ ein max. Ideal, so sind $\mathfrak{m}^n$ mit $n \geq 1$ alle $\mathfrak{m}$-primär.

**Def.** Sei $A$ ein komm. Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ als Schnitt $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ endlich vieler primärer Ideale $\mathfrak{q}_i$ heißt **Primärzerlegung** von $\mathfrak{a}$. Sind die $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ paarweise verschieden und gilt $\mathfrak{q}_i \not\supset \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_j$ für alle $i$, so heißt die Primärzerlegung **minimal**.

**Def.** Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **zerlegbar**, wenn es eine Primärzerlegung besitzt.

**Lem.** Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal und $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ alle $\mathfrak{p}$-primär. Dann ist auch $(\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n)$ wieder $\mathfrak{p}$-primär.

**Kor.** Man kann eine Primärzerlegung eines Ideals zu einer minimalen Primärzerlegung reduzieren.

**Lem.** Sei $\mathfrak{p} \subset A$ prim, $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal und $x \in A$. Dann gilt:
- Ist $x \in \mathfrak{q}$, so gilt $(\mathfrak{q} : x) = (1)$.
- Ist $x \notin \mathfrak{q}$, so ist $(\mathfrak{q} : x)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal.
- Ist $x \notin \mathfrak{p}$, so ist $(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{q}$.

**Satz** (erster Eindeutigkeitssatz)**.** Sei $A$ ein komm. Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Dann sind die Ideale $\mathfrak{p}_i$ genau die Ideale, die von der Form $\sqrt{(\mathfrak{a} : x)}$ mit $x \in A$ sind.

*Bem.* Insb. sind die Ideale $\mathfrak{p}_i$ unabh. von der Primärzerlegung.

**Def.** Die Ideale $\mathfrak{p}_i$ heißen die zu $\mathfrak{a}$ **assozierten Primideale**.

**Lem.** Sei $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ assoziiertes Primideal. Dann gibt es ein $x \in A$, sodass $(\mathfrak{a} : x)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal ist.

**Def.** Sei $A$ ein komm. Ring und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Die minimalen Elemente der Menge der zu $\mathfrak{a}$ assoz. Primideale heißen **isolierte Primideale**, alle anderen zu $\mathfrak{a}$ assoz. Primideale **eingebettete Primideale**. Ein primäres Ideal $\mathfrak{q}_i$ heißt isolierte / eingebettete **Primärkomponente** von $\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{p}_i$ isoliert / eingebettet ist.

**Prop.** Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein zerlegbares Primideal. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ enthält ein assoziiertes (und damit auch ein isoliertes) Primideal zu $\mathfrak{a}$.

**Kor.** Die isolierten Primideale zu $\mathfrak{a}$ sind genau die min. Elemente von $\{$ Primideale $\mathfrak{p} \subset A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \} \cong \{$ Primideale in $A/\mathfrak{a} \}$.

**Prop.** Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit min. Primärzerl. $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Dann gilt $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i = \{x \in A \mid (a : x) \neq \mathfrak{a}\}$.

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring, in dem $(0)$ zerlegbar ist. Dann gilt:
- Die Menge $D$ der Nullteiler in $A$ ist die Vereinigung der zu $(0)$ assoziierten Primideale.
- Die Menge der nilpotenten Elemente ist der Schnitt aller (isolierten) Primideale, die zu $(0)$ assoziiert sind.

**Prop.** Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:
- Ist $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, so folgt $S^{-1}\mathfrak{q} = (1)$.
- Ist $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, so ist $S^{-1}\mathfrak{q}$ ein $S^{-1}\mathfrak{p}$-primäres Ideal und es gilt $A \cap S^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$.

**Kor.** Sei $A$ ein komm. Ring und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist folgende Korrespondenz bijektiv und monoton:

$$\begin{array}{rcl} \{ \mathfrak{q} \subset A \text{ primär mit } \sqrt{\mathfrak{q}} \cap S = \emptyset \} & \leftrightarrow & \{ \mathfrak{r} \subset S^{-1}A \text{ primär} \} \\ \mathfrak{q} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{q} \\ A \cap \mathfrak{r} & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{r} \end{array}$$

**Def.** Sei $A$ ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Die **Sättigung** eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq A$ bzgl. $S$ ist das Ideal $S(\mathfrak{a}) := A \cap S^{-1}\mathfrak{a}$.

**Prop.** Sei $A$ ein komm. Ring und $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Seien die $\mathfrak{q}_i$ so sortiert, dass ein $m$ existiert mit $S \cap \mathfrak{p}_i = \emptyset \iff i \leq m$. Dann sind $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap S^{-1}\mathfrak{q}_m$ und $S(\mathfrak{a}) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ minimale Primärzerlegungen.

**Def.** Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring. Eine Menge $\mathfrak{S}$ von zu $\mathfrak{a}$ assoz. Primidealen heißt **isoliert**, falls gilt:

$$\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p} \in \mathfrak{S} \implies \mathfrak{p}' \in \mathfrak{S} \quad \text{für zu } \mathfrak{a} \text{ assoz. Ideale } \mathfrak{p}, \mathfrak{p}'.$$

**Prop.** Sei $\mathfrak{S}$ eine isolierte Menge von zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primidealen. Dann ist $S := A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen und für jedes an $\mathfrak{a}$ assoziierte Primideal $\mathfrak{p}'$ gilt: $\mathfrak{p}' \in \mathfrak{S} \iff \mathfrak{p}' \cap S = \emptyset$.

**Satz** (zweiter Eindeutigkeitssatz). Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit minimaler Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$. Sei $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Ist $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$ eine isolierte Menge von zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primidealen, so ist $\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_m$ unabhängig von der Zerlegung.

Für $m = 1$ folgt:

**Kor.** Die isolierten Primärkomp. von $\mathfrak{a}$ sind eindeutig bestimmt.

# Ganzheit

**Def.** Sei $B$ ein komm. Ring und $A \subseteq B$ ein Unterring. Ein Element $x \in B$ heißt **ganz** über $A$, falls $x$ eine Gleichung der Form $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ mit $a_i \in A$ erfüllt.

**Prop.** Sei $A \subseteq B$ eine Erw. komm. Ringe. Es sind äquivalent:

- $x$ ist ganz über $A$.
- $A[x] \subseteq B$ ist als $A$-Modul endlich erzeugt.
- Es existiert ein Unterring $C \subseteq B$ mit $C \supseteq A[x]$, der als $A$-Modul endlich erzeugt ist.
- Es ex. ein treuer $A[x]$-Modul $M$, der als $A$-Modul endl. erz. ist.

**Kor.** Sei $A \subseteq B$ eine Erw. komm. Ringe.

- Seien $x_1, \ldots, x_n \in B$ jeweils ganz über $A$. Dann ist $A[x_1, \ldots, x_n]$ ein endlich erzeugter $A$-Modul.
- Die Menge $C := \{$ über $A$ ganze Elemente $x \in B\} \subseteq B$ ist ein Unterring von $B$ mit $C \supseteq A$.

**Def.** Die Menge $C \subseteq B$ heißt **ganzer Abschluss** von $A$ in $B$.
Ist $C = A$, so heißt $A$ **ganz abgeschlossen** in $B$.
Ist $C = B$, so heißt $B$ **ganz über** $A$.

**Bsp.** $\mathbb{Z}$ ist in $\mathbb{Q}$ ganz abgeschlossen.

**Def.** Sei $\phi : A \to B$ ein Mor. komm. Ringe. (Dadurch wird $B$ zu einer $A$-Algebra.) Dann heißt $\phi$ ganz und $B$ eine **ganze $A$-Algebra**, falls $B$ ganz über $\phi(A) \subseteq B$ ist.

**Lem.** Für eine $A$-Algebra $B$ gilt:

$$B \text{ endlich} \iff B \text{ endlich erz. } \wedge B \text{ ganz} \quad \text{(jeweils als } A\text{-Algebra).}$$

**Kor.** Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Erweiterungen kommutativer Ringe. Ist $B$ ganz über $A$ und $C$ ganz über $B$, so ist auch $C$ ganz über $A$.

**Kor.** Der ganze Abschluss von $A$ in $B$ ist in $B$ ganz abgeschlossen.

**Prop.** Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung komm. Ringe. Dann gilt:

- Für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ ist $B/\mathfrak{b}$ ganz über $A/(A \cap \mathfrak{b})$.
- Für jede mult. abg. Teilmenge $S \subseteq A$ ist $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$.

**Prop** (**Noethernormalisierung**). Sei $K$ ein Körper und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $A := K[x_1, \ldots, x_n]$. Dann gibt es algebraisch unabhängige Elemente $y_1, \ldots, y_n \in A$, sodass $A$ ganz über $B := K[y_1, \ldots, y_n]$ ist, und ein $0 \leq r \leq n$ mit $B \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \ldots, y_n)$.

*Beweis.* Per Ind. über $n$. Der Fall $n = 0$ ist trivial. Sei nun $n > 0$.

- Falls $\mathfrak{a} = (0)$, so setze $y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n$ und $r := n$.
- Ansonsten wähle ein Polynom $f = \sum_{\alpha \in M} \lambda_\alpha x^\alpha \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$, wobei $M \subset \mathbb{N}^n$ endlich ist mit $\lambda_\alpha \in K^\times$ für alle $\alpha \in M$.
- Wähle $w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{N}$ und $w_n := 1$, sodass die Abbildung
$$w : M \to \mathbb{N}, \quad \alpha \mapsto \alpha \cdot w := \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n$$
injektiv ist. (Dies kann man etwa erreichen, indem man die Tupel in $M$ als Zahlen in einem Stellenwertsystem mit genügend großer Basis $b := 1 + \max_{\alpha \in M} \max_{i=1,\ldots,n} \alpha_i$ ansieht und $w_i := b^{n-i}$ setzt.)
- Setze $z_i = x_i - x_n^{w_i}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $A' := K[z_1, \ldots, z_{n-1}]$.
- Dann kann man $f$ im Polynomring $K[z_1, \ldots, z_{n-1}, x_n] = A'[x_n]$,
$$f = \sum_{\alpha \in M} \lambda_\alpha (z_1 + x_n^{w_1})^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z_{n-1} + x_{n-1}^{w_{n-1}})^{\alpha_{n-1}} \cdot x_n^{\alpha_n},$$
auch schreiben als $f = \lambda_\beta \cdot x_n^m + \mu_1 \cdot x_n^{m-1} + \ldots + \mu_m$, wobei $\beta := \arg\max_{\alpha \in M} w(\alpha)$, $m := w(\beta)$ und $\mu_i \in K[z_1, \ldots, z_{n-1}]$.
Somit sind $x_n$ und alle weiteren $x_i$, also $A$, ganz über $A'[f]$.
- Setze $y_n := f$. Die IH, angewendet auf $A' := K[z_1, \ldots, z_{n-1}]$, liefert algebraisch unabhängige $y_1, \ldots, y_{n-1} \in A' \subset A$ mit $A'$ ganz über $B' := K[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ und $0 \leq r \leq n-1$ mit $B' \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \ldots, y_{n-1})$. Dann sind $B = B'[y_n] \subseteq A'[y_n] \subseteq A$ ganze Körpererweiterungen und $B \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \ldots, y_n)$. $\square$

*Bem.* Insbesondere ist $K[y_1, \ldots, y_r] \to A/\mathfrak{a}$ ein endlicher injektiver Homomorphismus von $K$-Algebren.

## Die Cohen-Seidenbergsche Sätze

**Prop.** Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen. Dann ist $B$ genau dann ein Körper, wenn $A$ ein Körper ist.

**Prop.** Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung komm. Ringe. Dann gilt:

- Ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ ist maximal $\iff$ $A \cap \mathfrak{q} \subset A$ ist maximal.
- Für Primideale $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}' \subseteq B$ gilt $A \cap \mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}' \iff \mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.
- Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ex. ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

**Satz** („**Going up**"). Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erw. komm. Ringe. Sei $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Kette von Primidealen in $A$ und $\mathfrak{q}_1 \subset B$ ein Primideal mit $A \cap \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1$. Dann gibt es eine Kette $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ von Primidealen in $B$ mit $A \cap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

**Prop.** Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung komm. Ringe, $C$ der ganze Abschluss von $A$ in $B$ und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}C$ der ganze Abschluss von $S^{-1}A$ in $S^{-1}C$.

**Def.** Ein Integritätsbereich heißt **ganz abgeschlossen**, falls er in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist.

**Bspe.** $\mathbb{Z}$ und $K[x_1, \ldots, x_n]$ sind ganz abgeschlossen

**Prop.** Sei $A$ ein Integritätsbereich. Dann sind äquivalent:

- $A$ ist ganz abgeschlossen.
- Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ist $A_\mathfrak{p}$ ganz abgeschlossen.
- Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ ist $A_\mathfrak{m}$ ganz abgeschlossen.

**Def.** Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung komm. Ringe und $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal.

- Ein Element $x \in B$ heißt **ganz** über $\mathfrak{a}$, falls $x$ eine Gleichung der Form $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ erfüllt.
- Der **ganze Abschluss** von $\mathfrak{a}$ in $B$ ist $\{x \in B \mid x \text{ ist ganz über } \mathfrak{a}\}$.

**Lem.** Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $C$ der ganze Abschluss von $A$ in $B$. Dann ist $\sqrt{C\mathfrak{a}}$ der ganze Abschluss von $\mathfrak{a}$ in $B$.

**Def.** Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Ein Element $x \in L$ heißt **algebraisch**, wenn es ganz über $K$ ist.

**Prop.** Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei $A$ ganz abgeschlossen mit Quotientenkörper $K$. Sei $x \in B$ ganz über einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$. Dann ist $x$ algebraisch über $K$ und für sein Minimalpolynom $f \in K[t]$ gilt $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}[t]$.

**Satz** („**Going down**"). Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erw. von Integritätsbereichen und $A$ ganz abgeschlossen. Sei $\mathfrak{p}_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Kette von Primidealen in $A$ und $\mathfrak{q}_1 \subset B$ ein Primideal mit $A \cap \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1$. Dann gibt es eine Kette $\mathfrak{q}_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{q}_n$ von Primidealen in $B$ mit $A \cap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

**Prop.** Sei $A$ ein ganz abgeschl. Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K$. Sei $L \supseteq K$ eine endliche, separable Körpererweiterung und $B$ der ganze Abschluss von $A$ in $L$. Dann ex. eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $L$ über $K$, sodass $B \subseteq Av_1 + \ldots + Av_n$.

## Bewertungsringe

**Def.** Ein Integritätsbereich $B$ mit Quotientenkörper $K$ heißt **Bewertungsbereich** für $K$, falls gilt: $\forall\, x \in K^\times : x \in B \vee x^{-1} \in B$.

**Prop.** Sei $B$ ein Bewertungsring. Dann gilt:

- $B$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} := B \setminus B^\times$.
- $B$ ist ganz abgeschlossen.

**Satz.** Sei $K$ ein Körper, $L \supset K$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $B \subseteq K$ ein Unterring. Sei $\phi : B \to L$ ein nicht in $K$ fortsetzbarer Ringhomomorphismus, d. h. ist $\hat{\phi} : B' \to L$ ein Ringhomomorphismus definiert auf einem Unterring $B' \subseteq K$ mit $B' \supseteq B$ mit $\hat{\phi}|_B = \phi$, so gilt $B = B'$. Dann gilt:

- $B$ ist ein lokaler Ring mit max. Ideal $\mathfrak{m} = \ker \phi$.
- Sei $x \in K^\times$. Dann gilt $\mathfrak{m}[x] \neq B[x]$ oder $\mathfrak{m}[x^{-1}] \neq B[x^{-1}]$.
- $B$ ist ein Bewertungsring für $K$.

**Kor.** Sei $A \subseteq K$ ein Unterring eines Körpers. Dann ist der ganze Abschluss $\overline{A}$ von $A$ in $K$ der Schnitt aller Bewertungsringe $B$ von $K$ mit $B \supseteq A$.

**Prop.** Sei $A \subseteq B$ eine endlich erzeugte Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei $v \in B \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $u \in A \setminus \{0\}$ mit folgender Eigenschaft: Jeder Homomorphismus $\phi : A \to L$ in einen algebraisch abgeschlossenen Körper $L$ mit $\phi(u) \neq 0$ kann zu einem Homomorphismus $\psi : B \to L$ mit $\psi(v) \neq 0$ fortgesetzt werden.

**Kor.** Ist eine endlich erzeugte $K$-Algebra $B$ ein Körper, so ist $B$ eine endliche algebraische Erweiterung von $K$.

**Kor** (Schwacher Hilbertscher Nullstellensatz). Ist $\mathfrak{m}$ ein max. Ideal einer endl. erz. $K$-Algebra $A$, so ist $A/\mathfrak{m}$ eine endl. alg. Erweiterung von $K$. Insb. ist $A/\mathfrak{m} \cong K$, falls $K$ algebraisch abgeschlossen ist.

## Kettenbedingungen

**Prop.** Sei $X$ eine teilweise geordnete Menge. Dann sind äquivalent:

- Jede aufsteigende Folge $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ in $X$ ist **stationär**, d. h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x_N$ für alle $n \geq N$.
- Jede nicht leere Teilmenge $A \subseteq X$ besitzt ein maximales Element, d. h. $\exists a \in A : \forall b \in A : a \leq b \implies a = b$.

**Def.** Sei $A$ ein Ring und $M$ ein $A$-Modul.

- Ist jede bzgl. der Inklusion aufsteigende Folge $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ von Untermoduln von $N$ stationär, so heißt $M$ **noethersch**.
- Ist jede bzgl. der Inklusion absteigende Folge $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ von Untermoduln von $N$ stationär, so heißt $M$ **artinsch**.

**Bspe.**

| $A$ | $M$ | noethersch? | artinsch? |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{Z}$ | irgendeine endl. Gruppe | ✓ | ✓ |
| $\mathbb{Z}$ | $\{x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid \mathrm{ord}(x) = p^n\}$ mit $p$ prim | ✗ | ✓ |
| $\mathbb{Z}$ | $\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ gekürzt} \mid b = p^n\}$ | ✗ | ✗ |

**Prop.** Sei $A$ ein Ring. Ein $A$-Modul $M$ ist genau dann noethersch, wenn alle seine Untermodule endlich erzeugt sind.

**Prop.** Sei $A$ ein Ring und $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von $A$-Moduln. Dann gilt:

- $M$ noethersch $\iff$ $M'$, $M''$ noethersch
- $M$ artinsch $\iff$ $M'$, $M''$ artinsch

**Kor.** Die endliche direkte Summe von noetherschen/artinschen $A$-Moduln ist noethersch/artinsch.

**Def.** Ein Ring $A$ heißt **noethersch**/**artinsch**, falls er als Modul über sich selbst noethersch/artinsch ist.

*Bem.* Ein Ring ist genau dann noethersch/artinsch, wenn die Menge seiner Ideale die aufsteigende/absteigende Kettenbedingung erfüllt. Ein Ring ist genau dann noethersch, wenn all seine Ideale endlich erzeugt sind.

**Bspe.**

| $A$ | noethersch? | artinsch? |
|---|---|---|
| $\mathbb{Z}$ | ✓ | ✗ |
| ein bel. HIB | ✓ | ? |
| $K[x]$ | ✓ | ✗ |
| $K[x_1, x_2, \ldots]$ | ✗ | ✗ |

**Achtung.** Unterringe von noetherschen Ringen sind nicht unbedingt noethersch.

**Prop.** Ist $A$ ein noetherscher Ring und $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul, so ist $M$ noethersch.

**Def.** Sei $A$ ein Ring und $M$ ein $A$-Modul.

- Eine **Untermodulkette** von $M$ der Länge $n$ ist eine Kette von Untermoduln der Form $M_\bullet : M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots \supsetneq M_n = 0$.
- $M$ heißt **einfach**, falls $M$ nur 0 und $M$ als Untermoduln besitzt.
- Eine Untermodulkette heißt **Kompositionsreihe**, wenn die Quotienten $M_i/M_{i+1}$ jeweils einfach sind.
- Die **Länge** $\ell(M) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ von $M$ ist das Infimum aller Längen von Kompositionsreihen von $M$.

**Prop.** Sei $A$ ein Ring und $M$ ein $A$-Modul der Länge $n := \ell(M) < \infty$. Dann gilt:

- Für jeden echten Untermodul $N \subsetneq M$ gilt $\ell(N) < \ell(M)$.
- Die Länge jeder Untermodulkette in $M$ ist $\leq \ell(M)$.
- Jede Kompositionsreihe von $M$ hat die Länge $n$.
- Jede Untermodulkette von $M$ lässt sich zu einer Kompositionsreihe erweitern.

**Prop.** Sei $A$ ein kommutativer Ring. Ein $A$-Modul $M$ besitzt genau dann eine Kompositionsreihe, wenn $M$ noethersch und artinsch ist.

**Def.** Ein $A$-Modul $M$ heißt **von endlicher Länge**, wenn $M$ noethersch und artinsch ist.

**Prop.** Sei $A$ ein Ring. Die Länge ist eine additive Funktion auf $\mathfrak{C} := \{\ A\text{-Moduln endlicher Länge}\ \}$.

**Satz** (Jordan-Hölder)**.** Sind $M_\bullet$ und $M'_\bullet$ zwei Kompositionsreihen eines $A$-Moduls $M$ endlicher Länge $n$, so existiert eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $M_{i-1}/M_i \cong M'_{\sigma(i-1)}/M'_{\sigma(i)}$.

**Prop.** Für einen VR $V$ über einem Körper $K$ sind äquivalent:

- $V$ ist endlich-dimensional.
- $V$ ist von endlicher Länge.
- $V$ ist noethersch.
- $V$ ist artinsch.

**Kor.** Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ maximale Ideale in einem kommutativen Ring mit $(0) = \mathfrak{m}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}_n$. Dann ist $A$ genau dann noethersch, wenn $A$ artinsch ist.

## Noethersche Ringe

**Prop.** Der Quotient $A/\mathfrak{a}$ eines noetherschen Rings $A$ ist noethersch.

**Kor.** Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomo. Ist $A$ noethersch, so auch $\phi(A)$.

**Prop.** Sei $A \subseteq B$ eine endliche Erweiterung kommutativer Ringe. Ist $A$ noethersch, so auch $B$.

**Bsp.** $\mathbb{Z}[i]$ ist noethersch als endl. Erw. von $\mathbb{Z}$

**Prop.** Sei $A$ ein kommutativer noetherscher Ring und $S \subseteq A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}A$ noethersch.

**Kor.** Die Halme $A_\mathfrak{p}$ eines komm. noeth. Rings $A$ sind noethersch.

**Satz** (**Hilbertscher Basissatz**)**.** Ist $A$ ein noetherscher kommutativer Ring, so ist auch der Polynomring $A[x]$ noethersch.

**Kor.** Ist $A$ ein noetherscher kommutativer Ring, so ist auch der Polynomring $A[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch. Allgemeiner ist jede endlich erzeugte $A$-Algebra noethersch.

**Prop.** Seien $A \subseteq B \subseteq C$ Erweiterungen von kommutativen Ringen. Sei $A$ noethersch. Sei $C$ endlich erzeugt als $A$-Algebra und endlich als $B$-Algebra. Dann ist $B$ endlich erzeugt als $A$-Algebra.

**Def.** Sei $A$ ein komm. Ring. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ heißt **irreduzibel**, falls für je zwei Ideale $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subseteq A$ gilt: Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$, so gilt $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$.

**Prop.** Sei $A$ ein noetherscher kommutativer Ring. Dann gilt:

- Jedes Ideal von $A$ ist Schnitt von endlich vielen irred. Idealen.
- Jedes irreduzible Ideal von $A$ ist ein Primärideal.
- Folglich ist in $A$ jedes Ideal zerlegbar.
- Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ enthält eine Potenz $(\sqrt{\mathfrak{a}})^n$ seines Wurzelideals.
- Insbesondere ist $\sqrt{(0)} \subseteq A$ nilpotent.
- Für ein max. Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ und ein Ideal $\mathfrak{q} \subseteq A$ sind äquivalent:
  – $\mathfrak{q}$ ist ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal. – $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ – $\exists n \in \mathbb{N} : \mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$
- Die zu einem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ assoziierten Ideale sind genau die Primideale von $A$ der Form $(\mathfrak{a} : x)$ mit $x \in A$.

## Artinsche Ringe

**Prop.** Sei $A$ ein artinscher kommutativer Ring. Dann gilt:

- Jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ ist ein maximales Ideal.
- Das Nilradikal ist gleich dem Jacobsonschen Ideal.
- $A$ besitzt nur endlich viele maximale Ideale (d. h. $A$ ist halblokal).
- Das Nilradikal von $A$ ist nilpotent.

**Def.** Sei $A$ ein komm. Ring. Eine **Primidealkette** der Länge $n$ in $A$ ist eine Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ von Primidealen in $A$.

**Def.** Die **Dimension** $\dim A \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}$ eines komm. Ringes $A$ ist das Supremum über die Längen aller Primidealketten in $A$.

**Bspe.** • $\dim A \geq 0 \iff A \neq 0$ • $\dim K = 0$ • $\dim \mathbb{Z} = 1$

**Satz.** Für einen kommutativen Ring $A \neq 0$ gilt:

$$A \text{ ist artinsch} \iff A \text{ ist noethersch und } \dim A = 0$$

*Bem.* Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein artinscher lokaler Ring, so ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal von $A$ und damit $\sqrt{(0)} = \mathfrak{m}$. Insbesondere ist $\mathfrak{m}$ nilpotent und jedes Element von $A$ entweder nilpotent oder eine Einheit.

**Prop.** Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring.
Dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{m}^n \supsetneq m^{n+1}$.
- Es ist $\mathfrak{m}^n = (0)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $A$ ist artinsch.

**Satz** (**Struktursatz** für artinsche kommutative Ringe)**.**
Jeder artinsche kommutative Ring ist eindeutig (bis auf Isomorphie der Faktoren) ein direktes Produkt artinscher lokaler Ringe.

**Def.** Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring. Dann heißt der $F$-Vektorraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ **Zariskischer Kotangentialraum** von $A$.

*Bem.* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist die spezielle Faser von $\mathfrak{m}$ als $A$-Modul. Ist $\mathfrak{m}$ als $A$-Modul endlich erzeugt, so auch $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ als $F$-Vektorraum.

**Prop.** Für einen artinschen lokalen Ring $(A, \mathfrak{m}, F)$ sind äquivalent:

- Jedes Ideal in $A$ ist ein Hauptideal (also $A$ ein HIB).
- Das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.
- Es gilt $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$.

**Bspe.** Artinsche lokale Ringe sind:

- $\mathbb{Z}/(p^n)$, wobei $p$ prim ist
- $K[x]/(f^n)$, wobei $f$ irreduzibel ist

## Diskrete Bewertungsringe

**Prop.** Sei $A$ ein eindimensionaler noetherscher Integritätsbereich. Dann kann jedes Ideal $0 \subsetneq \mathfrak{a} \subseteq A$ eindeutig als Produkt von primären Idealen mit paarweise verschiedenen Wurzelidealen geschrieben werden.

**Def.** Eine **diskrete Bewertung** auf einem Körper $K$ ist eine surjektive Abbildung $\nu : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cap \{\infty\}$, für die gilt:

$$\nu^{-1}(\infty) = \{0\}, \quad \nu(xy) = \nu(x) + \nu(y), \quad \nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y)).$$

**Lem.** • $\nu(1) = 0$ • $\nu(x^{-1}) = -\nu(x)$

**Def.** Der **Bewertungsring** von $K$ (zu $\nu$) ist der Unterring

$$\{x \in K \mid \nu(x) \geq 0\} \subset K.$$

**Lem.** Der Bewertungsring von $K$ zu $\nu$ ist in der Tat ein solcher.

**Def.** Ein Integritätsbereich $A$ heißt **diskreter Bewertungsring**, falls $A$ der Bewertungsring einer diskreten Bewertung auf dem Quotientenkörper $K$ von $A$ ist.

**Prop.** Sei $A$ ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung $\nu : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Dann gilt:

- $x \in A^\times \iff \nu(x) = 0$
- $\nu(x) = \nu(y) \iff (x) = (y)$
- $A$ ist ein lokaler Ring mit max. Ideal $\mathfrak{m} := \{x \in A \mid \nu(x) > 0\}$.
- Jedes Ideal in $A$ hat die Form $\mathfrak{m}_k = \nu^{-1}([k, \infty])$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- $A$ ist noethersch.
- $A$ ist eindimensional.
- Jedes nichtverschwindende Ideal in $A$ ist eine Potenz von $\mathfrak{m}$.

**Bspe.**

- Sei $p$ eine Primzahl. Jedes $y \in \mathbb{Q}^\times$ kann man als $y = p^n \frac{s}{t}$ mit $p \nmid s$, $p \nmid t$ schreiben. Dabei ist $n = n_y \in \mathbb{Z}$ eindeutig festgelegt. Setze $\nu(x) := n_y$ und $\nu(0) := \infty$. Dann ist $\nu$ eine Bewertung auf $\mathbb{Q}$ mit Bewertungsring $\mathbb{Z}_{(p)}$.
- Sei $F$ ein Körper und $F(x) := \{\frac{h}{g} \mid h, g \in F[x], g \neq 0\}$ der Körper der rationalen Fktn über $F$ in $x$. Sei $f \in F[x]$ irreduzibel. Jedes $y \in F(x)^\times$ kann man als $y = f^n \frac{h}{g}$ mit $p \nmid h$, $p \nmid g$ schreiben. Dabei ist $n = n_y \in \mathbb{Z}$ eind. festgelegt. Setze $\nu(x) := n_y$ und $\nu(0) := \infty$. Dann ist $\nu$ eine Bewertung auf $F(x)$ mit Bewertungsring $F[x]_{(f)}$.

**Prop.** Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein eindimensionaler noetherscher lokaler Integritätsbereich. Dann sind äquivalent:

- $A$ ist ein diskreter Bewertungsring.
- $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.
- $A$ ist ganz abgeschlossen.
- $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$
- Jedes (nicht verschwindende) Ideal von $A$ ist eine Potenz von $\mathfrak{m}$.
- $\exists x \in A : \forall \text{Ideal } \mathfrak{a} \subseteq A : \exists n \in \mathbb{N} : \mathfrak{a} = (x^n)$

## Dedekindsche Bereiche

**Lem/Def.** Ein eindim. noetherscher Integritätsbereich $A$ heißt **Dedekindscher Bereich**, wenn er die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- $A$ ist ganz abgeschlossen.
- Jedes Primärideal in $A$ ist Potenz eines Primideals.
- Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ ist $A_\mathfrak{p}$ ein diskr. Bewertungsbereich.

**Kor.** In einem Dedekindschen Bereich lässt sich jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ als eindeutiges Produkt von Primidealen schreiben.

**Bsp.** Jeder HIB ist ein Dedekindscher Bereich.

**Satz.** Sei $K$ ein Zahlkörper, also eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Dann ist der Ring der ganzen Zahlen in $K$, d. h. der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$, ein Dedekindscher Bereich.