

# Zusammenfassung Partielle DGLn

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

## 1. Einleitung

**Def.** Eine **partielle Differentialgleichung** (PDGL) hat die Form

$$E(x, u(x), Du(x), \dots, D^k u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \quad (*)$$

wobei  $E : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gesucht ist. Die höchste Ableitungsordnung von  $u$ , die in  $E$  vorkommt, heißt **Ordnung** der PDGL.

**Def.** Eine PDGL von der Ordnung  $k$  heißt

- **linear**, falls sie folgende Form besitzt:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) = 0$$

- **semilinear**, falls sie linear in der höchsten Ableitungsordnung ist, man sie also schreiben kann als

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) = 0.$$

- **quasilinear**, falls sie sich schreiben lässt als

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) = 0.$$

- sonst **voll nichtlinear**.

**Bemerkung.**  $\{\text{lineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{semilineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{quasilineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{PDGLn}\}$

**Def** (Typeinteilung für lineare PDGLn 2. Ordnung). Seien  $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ) vorgegebene Fktn. auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.

- Die lineare PDGL

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **elliptisch**, falls die  $(n \times n)$ -Matrix  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  für alle  $x \in \Omega$  positiv definit ist.

- Die lineare PDGL

$$D_1 D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **hyperbolisch**, falls die  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix  $(a_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$  für alle  $x \in \Omega$  positiv definit ist.

- Die lineare PDGL

$$D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{2 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **parabolisch**, falls die  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix  $(a_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$  für alle  $x \in \Omega$  positiv definit ist.

**Def.** Eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **klassische Lösung**, falls  $u \in C^k(\Omega)$  und die Differentialgleichung  $(*)$  überall in  $\Omega$  erfüllt ist.

## 2. Laplace- und Poisson-Gleichung

**Notation.** Seien  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F = (F_1, \dots, F_n)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Funktionen. Dann heißt

- $\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^n D_i F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  **Divergenz** von  $F$ ,
- $\operatorname{grad} f := \nabla f := (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  **Gradient** von  $f$ ,
- $\Delta$  mit  $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^n D_i D_i f$  **Laplace-Operator**.

**Notation.** Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  schreibe

$$V \in \Omega \quad \text{für} \quad V \subset \mathbb{R}^n \text{ mit } \bar{V} \text{ kompakt und } \bar{V} \subset \Omega^\circ.$$

**Def.** Die **Laplace-** bzw. **Poisson-Gleichung** ist die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

**Satz** (Transformationssatz). Sei  $T : \Omega \rightarrow T(\Omega)$  für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Diffeo, dann gilt für  $f : T(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \in L^1(T(\Omega)) \iff (f \circ T) \circ |\det(DT)| \in L^1(\Omega) \quad \text{mit}$$

$$\int_{T(\Omega)} f \, dx = \int_{\Omega} (f \circ T) \cdot |\det(DT)| \, dx.$$

**Bsp** (Polarkoordinaten). Sei  $f \in L^1(B_r(K))$ . Dann ist  $f$  auf fast jeder Sphäre  $\partial B_\rho(K)$  für  $\rho \in [0, r]$  integrierbar und es gilt

$$\int_{B_r(x)} f(x) \, dx = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x_0)} f \, dS \, d\rho$$

**Satz** (Gauß). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, offen mit  $C^1$ -Rand  $\partial\Omega$ . Ist  $F \in C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  mit  $\operatorname{div} F \in L^1(\Omega)$ , so gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} (F \circ \nu) \, dS,$$

wobei  $\nu$  der äußere Einheitsnormalenvektor ist.

**Korollar.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, offen mit  $C^1$ -Rand  $\partial\Omega$ . Sind  $f, g \in C^1(\bar{\Omega})$ , dann gilt die partielle Integrationsregel

$$\int_{\Omega} D_i f g \, dx = - \int_{\Omega} f D_i g \, dx + \int_{\partial\Omega} f g \nu^i \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Sind  $f, g \in C^2(\bar{\Omega})$ , dann gelten die Greenschen Formeln

$$\int_{\Omega} D f \cdot D g \, dx = - \int_{\Omega} f \Delta g \, dx + \int_{\Omega} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dx = \int_{\partial\Omega} (f D_\nu g - g D_\nu f) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

**Proposition.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  messbar mit  $|\Omega| < \infty$ ,  $I = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$  und  $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ . Angenommen,

- $f(x, -) \in C^1(I)$  für fast alle  $x \in \Omega$ ,
- $f(-, t) \in L^1(\Omega) \frac{\partial f}{\partial t}(-, t) \in L^1(\Omega)$  für alle  $t \in I$  und

- für alle  $t \in I$  gibt es  $\epsilon > 0$  sodass  $]t - \epsilon, t + \epsilon[ \subset I$  und

$$\sup_{s \in ]t - \epsilon, t + \epsilon[} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(-, s) \right| \in L^1(\Omega).$$

Dann ist die Abbildung

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{\Omega} f(x, t) \, dx$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx.$$

**Bemerkung.** Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn  $\Omega$  offen und beschränkt ist,  $f(x, -) \in C^1(I)$  für alle  $x \in \Omega$  und  $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in C(\bar{\Omega} \times I)$ .

**Notation.** Bezeichne mit  $\mathcal{L}^n$  das Lebesgue-Maß auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Für messbare Teilmengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  schreibe  $|A| := \mathcal{L}^n(A)$ .

**Bsp.** Zwischen dem Volumen von Kugeln und Sphären im  $\mathbb{R}^n$  bestehen folgende Zusammenhänge:

$$|B_r(0)| = r^n \cdot |B_1(0)| \quad \text{und} \quad |B_r(0)| = \frac{r}{n} \cdot \int_{\partial B_r(0)} 1 \, dS$$

**Notation.**  $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

**Notation.** Sei  $f : \Omega/M \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  messbar mit  $\mathcal{L}^k(\Omega) \in ]0, \infty[$  bzw.  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit  $\int_M 1 \, dS \in ]0, \infty[$

$$\int_{\Omega} f f(x) \, dx := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_M f f(x) \, dx := \frac{1}{|M|} \int_M f(x) \, dx$$

heißten **Mittelwerte** von  $f$  auf  $\Omega$  bzw.  $M$ .

**Def.** Ein **Glättungskern** auf  $\mathbb{R}^n$  ist eine nicht-negative, radialsymmetrische Funktion  $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$ .

**Def.** Der **Standardglättungskern** ist die Funktion

$$\eta(x) := C \cdot \exp\left(-\frac{1}{|x|^{2-1}}\right) \cdot \mathbb{1}_{B_1(0)}(x)$$

mit Normierungskonstante  $C$ . Für  $\epsilon > 0$  ist der dazugehörige skalierte Glättungskern gegeben durch

$$\eta_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \eta(x/\epsilon).$$

Alle Glättungskern-Eigenschaften bleiben bei Skalierung erhalten.

**Notation.**  $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$

**Def.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\epsilon > 0$ . Für  $f \in L^1_{\text{loc}}$  heißt die Funktion

$$f_\epsilon : \Omega_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \eta_\epsilon * f(x) := \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) f(y) \, dy \quad \text{e-Glättung von } f$$

**Satz** (Eigenschaften von Glättungen). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\epsilon > 0$  und  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Dann gilt

- Regularität:  $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$  mit  $D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha \eta_\epsilon) * f$  für beliebige Multiindizes  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .
- Ist  $D_i f$  stetig auf  $\Omega$ , so gilt  $D_i(f_\epsilon) = (D_i f)_\epsilon$  auf  $\Omega_\epsilon$ .

- Falls  $f \in C^\alpha(\Omega)$  für ein  $\alpha \in ]0, 1]$ , so gilt  $f_\epsilon \in C^\alpha(\Omega_\epsilon)$  mit derselben Hölderkonstante.
- Falls  $f \in L^p(\Omega)$  für  $p \in [0, \infty]$ , so gilt  $\|f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$ .
- $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$  fast-überall in  $\Omega$ .
- Falls  $f \in C(\Omega)$ , so konvergiert  $f_\epsilon$  gleichmäßig gegen  $f$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  auf kompakten Teilmengen von  $\Omega$ ,
- Falls  $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  für  $p \in [1, \infty[$ , so gilt  $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$  in  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ .
- Abschätzung der Approximationsgüte: Ist  $Du \in L^p(\Omega)$ , so gilt

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \epsilon \cdot \|Df\|_{L^p\Omega}.$$

**Def.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $u \in C^2(\Omega)$ . Man nennt  $u$

- **harmonisch**, falls  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  gilt.
- **subharmonisch**, falls  $\Delta u \geq 0$  in  $\Omega$  gilt.
- **superharmonisch**, falls  $\Delta u \leq 0$  in  $\Omega$  gilt.

**Bspe.** • Affine Funktionen sind harmonisch.

- Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Definiere  $u(x) := x \cdot Ax$ . Dann gilt  $\Delta u = \text{spur} A$ , also  $\Delta u = 0 \iff \text{spur} A = 0$ .
- Real- und Imaginärteil von holomorphen Fktn. sind harmonisch.

**Def.** Die Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} -(2\pi)^{-1} \log|x|, & \text{wenn } n = 2 \\ (n(n-2)\omega_n)^{-1}|x|^{2-n}, & \text{wenn } n \geq 3 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung** der Laplacegleichung.

**Bemerkung.** •  $\Phi$  ist radialsymmetrisch, d. h. für alle

- $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit  $\|x_1\| = \|x_2\|$  gilt  $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$ .
- $\Phi, |D\Phi| \in L^1(B_R(0))$  für alle  $R > 0$  aber  $|D^2\Phi| \notin L^1(B_1(0))$ .
- Die Konstanten wurden so gewählt, dass gilt:

$$-\int_{\partial B_r(0)} D\Phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = 1 \quad \text{für alle } r > 0.$$

**Lemma.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $B_R(x_0) \subset \Omega$ ,  $u \in C^2(\Omega)$ . Für

$$\phi : ]0, R[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad r \mapsto \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = u(x_0)$
- $\phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{\partial B_r(x_0)} \Delta u(x) \, dx$

**Korollar** (Mittelwertseigenschaft). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $B_r(x_0) \Subset \Omega$  und  $u \in C^2(\Omega)$ . Dann gilt:

$$0 = \Delta u \implies u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{und} \quad u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

In diesen Gleichungen darf man  $=$  durch  $\leq, <, \geq$  oder  $>$  ersetzen.

**Satz.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann sind äquivalent:

- $u$  ist harmonisch, d. h. es gilt  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ .

- $u$  erfüllt die sphärische Mittelwertseigenschaft, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

- $u$  erfüllt die Mittelwertseigenschaft auf Kugeln, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

**Bemerkung.** Die Äquivalenz gilt auch unter den schwächeren Voraussetzungen  $u \in C(\Omega)$  oder  $u \in L^1(\Omega)$ .

**Satz.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  subharmonisch in  $\Omega$ , d. h.  $\Delta u \geq 0$  in  $\Omega$ . Dann gilt

- Das **schwache Maximumsprinzip**:  $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist  $\Omega$  zusammenhängend und existiert  $x_0 \in \Omega$  mit  $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ , so ist  $u$  konstant.

**Bemerkung.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, offen, zusammenhängend und  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  harmonisch. Dann gilt

$$\min_{\partial\Omega} u < \max_{\partial\Omega} u \implies \min_{\partial\Omega} u < u < \max_{\partial\Omega} u \text{ auf } \Omega.$$

**Korollar** (Eindeutigkeit). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Dann ist  $u = v$ , falls gilt:

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v & \text{in } \Omega \\ u = v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

**Bemerkung** (Stetige Abhängigkeit von Randwerten). Gilt lediglich  $\Delta u = \Delta v$  in  $\Omega$ , aber nicht  $u = v$  auf  $\partial\Omega$ , so gilt immerhin

$$\max_{\overline{\Omega}} |u - v| = \max_{\partial\Omega} |u - v|.$$

**Satz** (Harnack-Ungleichung). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $V \Subset \Omega$  offen, zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante  $c = c(\Omega, V)$ , sodass

$$\sup_V u \leq c \cdot \inf_V u \quad \text{für alle harmonischen Fktn. } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

**Satz.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und erfülle  $u \in C(\Omega)$  die Mittelwert-Eigenschaft auf Sphären, d. h.

$$u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Dann gilt  $u(x) = u_\epsilon(x)$  für alle  $x \in \Omega$  und  $\epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ . Insbesondere ist  $u \in C^\infty(\Omega)$  und harmonisch.

**Korollar.** Obiger Satz gilt auch, wenn  $u \in C(\Omega)$  die Mittelwert-Eigenschaft auf Kugeln erfüllt, d. h.

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

**Def.** Eine Folge von Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf einem topologischen Raum  $X$  **konvergiert lokal gleichmäßig** gegen  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , falls es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U_x$  von  $x$  gibt, sodass  $f_n$  auf  $U_x$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

**Korollar** (Konvergenzsatz von Weierstraß). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, zusammenhängend und  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge harmonischer Funktionen auf  $\Omega$ , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $u$  konvergiert. Dann ist  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ .

**Korollar** (Harnackscher Konvergenzsatz). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf  $\Omega$ . Gibt es ein  $x_0 \in \Omega$ , sodass  $(u_k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt (und damit konvergent) ist, so konvergiert  $(u_k)$  lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion auf  $\Omega$ .

**Satz** (von Hermann Weyl). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} u \cdot \Delta \phi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann gibt es eine harmonische Funktion  $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $u(x) = \tilde{u}(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$ .

**Satz** (Innere Abschätzung für Ableitungen harmonischer Fktn). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $u \in C^2(\Omega)$  harmonisch. Dann gilt für jeden Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$  und jede Kugel  $B_r(x_0) \Subset \Omega$ :

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq C(n, k) r^{-n-k} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \quad \text{mit } C(n, k) := \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\omega_n}.$$

**Satz** (Liouville). Sei  $u \in C^2(\Omega)$  harmonisch.

- Ist  $u$  beschränkt, so ist  $u$  konstant.
- Gilt  $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|u(x)|}{|x|^{k+1}} = 0$ , so ist  $u$  ein Polynom, dessen Grad  $\leq k$  ist.

**Def.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **analytisch** in  $x \in \Omega$ , falls  $f$  sich lokal durch ihre Taylorreihe darstellen lässt, also ein  $r \in ]0, \text{dist}(x, \partial\Omega)[$  existiert mit

$$f(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) (y - x)^\alpha \quad \text{für alle } y \in B_r(x).$$

**Satz.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $u \in C^2(\Omega)$ . Wenn  $u$  harmonisch ist, dann auch analytisch.

**Problem.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, (beschränkt), regulär und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Gesucht ist  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$(2.1) \begin{cases} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

**Satz** (Greensche Darstellungsformel). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, offen mit  $C^1$ -Rand und  $h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  mit  $\Delta h \in L^1(\Omega)$ . Es gilt für  $x \in \Omega$ :

$$h(x) = - \int_{\Omega} \Phi(x-y) \Delta h(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \, dS(y)$$

$$- \int_{\partial\Omega} h(y) D_y \Phi(x-y) \cdot \nu \, dS(y)$$

**Bemerkung.** Für Randpunkte  $x \in \partial\Omega$  gilt:

$$\frac{1}{2} h(x) = - \int_{\Omega} \Phi(x-y) \Delta h(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \, dS(y)$$

$$- \int_{\partial\Omega} h(y) D_y \Phi(x-y) \cdot \nu \, dS(y)$$

**Korollar** (Darstellungsformel für Lsgn in  $\mathbb{R}^n$ ). Sei  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ , setze

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\Phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, dy.$$

Dann gilt:  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  und  $-\Delta u = f$  in  $\mathbb{R}^n$ .

*Bemerkung.* • Für  $n = 2$  ist die Lösung potentiell unbeschränkt.

- Für  $n \geq 3$  ist diese Lsg beschränkt und erfüllt  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ .

**Proposition.** Jede andere beschränkte Lösung von  $-\Delta u = f$  auf  $\mathbb{R}^n$  unterscheidet sich nur durch eine additive Konstante.

**Def.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine **Greensche Funktion** für  $\Omega$  ist eine Funktion  $G : \{(x, y) \in \Omega \times \Omega \mid x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$ , falls für alle  $x \in \Omega$  gilt:

- Die **Korrektorfunktion**  $y \mapsto G(x, y) - \Phi(x - y)$  ist von der Klasse  $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  und ist harmonisch in  $\Omega$ .
- Die Funktion  $G(x, -)$  hat Nullrandwerte auf  $\partial\Omega$ , d. h. es gilt  $\lim_{y \rightarrow y_0} G(x, y) = 0$  für alle  $y_0 \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$ .

*Bemerkung.* Die Funktion  $G(x, -)$  ist in  $\mathcal{C}^2(\Omega \setminus \{x\}) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$  und hat die gleiche Singularität wie  $y \mapsto \Phi(x - y)$ .

**Satz.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt, mit  $\mathcal{C}^1$ -Rand  $\partial\Omega$ . Ist  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  eine Lösung von (2.1) und ist  $G$  die Greensche Funktion für  $\Omega$  (falls existent), dann gilt für alle  $x \in \Omega$ :

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \cdot D_y G(x, y) \cdot \nu \, dS(y).$$

**Lemma.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $G$  die Greensche Funktion für  $\Omega$  und  $B_r(x) \Subset \Omega$ . Für  $f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  gilt dann:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_{\epsilon}(x)} (G(x, y) Df(y) - f(y) D_y G(x, y)) \cdot \nu(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = f(x).$$

**Satz.** Ist  $G$  die Greensche Funktion zu  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt mit  $\mathcal{C}^1$ -Rand  $\partial\Omega$ , so gilt  $G(x, y) = G(y, x)$  für alle  $x, y \in \Omega$  mit  $x \neq y$ .

**Korollar.** Sei  $G$  die Greensche Funktion zu  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt mit  $\mathcal{C}^1$ -Rand  $\partial\Omega$ , so ist die Funktion  $x \mapsto G(x, y)$  harmonisch auf  $\Omega \setminus \{y\}$ .

**Def.** Sei  $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$  eine Kugel,  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a)$ . Dann heißt

$$x^* := a + r^2 \frac{x - a}{\|x - a\|^2} \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a) \quad \textbf{Spiegelungspunkt} \text{ von } x.$$

*Bemerkung.* Es gilt: •  $\|x - a\| \cdot \|x^* - a\| = r^2$  •  $(x^*)^* = x$

- $\forall y \in \partial B_r(a) : \|x^* - y\|^2 = r^2 \|x - a\|^{-2} \|y - x\|^2$ .

**Notation.** Für  $B_r(a) \subset \mathbb{R}$  sei  $g : B_r(a) \times B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g(x, y) := \begin{cases} -\Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y-x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ -\Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

**Proposition.** Für die Funktion  $g$  gilt:

- $g(x, y) - \Phi(x - y) = 0$  für alle  $y \in \partial B_r(a)$  und  $x \in B_r(a)$ .
- $y \mapsto g(x, y)$  ist glatt und harmonisch in  $B_r(a)$  für alle  $x \in B_r(a)$ .

**Korollar.** Die Greensche Funktion für  $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$  lautet

$$G_{B_r(a)}(x, y) := \Phi(x - y) + g(x, y) = \begin{cases} \Phi(x - y) - \Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y-x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ \Phi(a - y) - \Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

**Def.** Der **Poisson-Kern für die Kugel**  $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$  ist

$$K_{B_r(a)}(x, y) := \frac{1}{n\omega_n} \cdot \frac{r^2 - |x-a|^2}{r|x-y|^n}.$$

**Satz** (Poisson-Integralformel für Kugeln). Sei  $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$  und  $g : \partial B_r(a)$  stetig.

- Für  $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_r(a)})$  harmonisch mit  $u=g$  auf  $\partial B_r(a)$  gilt

$$u(x) = \int_{\partial B_r(a)} K_{B_r(a)}(x, y) g(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für alle } x \in B_r(a). \quad (2.8)$$

- Umgekehrt definiert (2.8) die eindeutige harmonische Funktion  $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}^1(\overline{B_r(a)})$  mit  $u = g$  auf  $\partial B_r(a)$ .