Zusammenfassung Modellkategorien

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Def. Eine **(schwache) 2-Kategorie** $\mathbb{C}$ besteht aus

- einer Ansammlung $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"{name=F}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=G}] & B \arrow[Rightarrow, from=F, to=G] \end{tikzcd} \right\},$$

- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem Objekt $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}} : \; - \circ (- \circ -) \Longrightarrow (- \circ -) \circ -,$$

  wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$

- und für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ natürlichen Isomorphismen

$$\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (- \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} K(H(GF)) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] \arrow[d, "K\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}}"] & (KH)(GF) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{G}}"] & ((KH)G)H \\ K((HG)F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] & & (K(HG))F \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}} F"'] \end{tikzcd}$$

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathbb{C}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} G \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{D},\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "G\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}}"] & & (G \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \arrow[dl, "\rho_{\mathcal{D},\mathcal{E}} F"] \\ & G \circ F & \end{tikzcd}$$

Bspe.
- Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.
- Jede Kategorie $\mathcal{C}$ ist natürlich eine 2-Kategorie.
- Die Kategorie der Ringe $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathbb{R}) := \{\text{Ringe mit Eins}\}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) :=$ Kat. der B-A-Bimoduln mit $N \circ M := N \otimes_B M$ für $M \in \mathrm{Hom}(A, B)$ und $N \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\mathrm{Id}_A := A$.

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann $\otimes$ anstelle von $\circ$ geschrieben.

Def. Sei $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ von S ist eine Familie $\alpha_c : E \to S(c, c)$, $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von Morphismen in $\mathcal{A}$, sodass für alle $(f : c \to c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & S(c,c) \arrow[dr, "S(\mathrm{id}_c, f)"] & \\ E \arrow[ur, "\alpha_c"] \arrow[dr, "\alpha_{c'}"'] & & S(c,c') \\ & S(c',c') \arrow[ur, "S(f, \mathrm{id}_{c'})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, und E universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler S-**Keil**.

Notation. $E = \int_c S(c, c)$.

Bem. Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden: $\lim F = \int_c F(c)$; der Integrand ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$.

Bem. Das duale Konzept ist das eines ~~Anfangs~~ Koendes $\int^c S(c, c)$.

Bsp. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_c \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \;\cong\; \mathrm{Nat}(F, G).$$

Satz (Fubini)**.** Sei $S : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d,c)} S(d, d, c, c) \;\cong\; \iint_{dc} S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und $\int_c S(d, d', c, c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

Bsp. Sei R ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt $*$. Ein additiver Funktor $R^{(\mathrm{op})} \to \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein R-Linksmodul (bzw. R-Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Lem (Ninja-Yoneda-Lemma)**.** Für jede Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ gilt

$$F \cong \int^c F(c) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

Def. Sei $\mathbb{C}$ eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ist geg. durch Morphismen $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ (genannt **Eins**) und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ (**Koeins**) mit $G\epsilon \circ \eta G = \mathrm{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \mathrm{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.

Lem. R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bem. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\mathrm{Hom}(F \circ -, -) \cong \mathrm{Hom}(-, G \circ -)$$

Bsp. $\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$

Bsp. Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein B-A-Modul M ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn M als Rechts-A-Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

Bem. Sind η und ϵ in $F \dashv G$ sogar Isomorphismen, so heißt $F \dashv G$ auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von F und G sowie einem der Morphismen ϵ, η) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

Kan-Erweiterungen

Def. Sei $\mathcal{A} \xleftarrow{T} \mathcal{M} \xrightarrow{K} \mathcal{C}$ ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE) (R, ϵ) von T längs K besteht aus

- einem Morph. $R : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$
- einem 2-Morph. $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$,

sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE $(S : \mathcal{C} \to \mathcal{A}, \eta : S \circ K \Rightarrow T)$ gibt es genau ein $\sigma : S \Rightarrow R$ mit $\epsilon \circ \sigma K = \eta$. Notation: $R = \mathrm{Ran}_K(T)$

Bem. Es sind äquivalent:
- (R, ϵ) ist RKE von T längs K
- $\eta \mapsto \epsilon \circ \eta K : \mathrm{Nat}(S, R) \to \mathrm{Nat}(S \circ K, T)$ ist bij. $\forall\, S : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$

Bem. Es gilt $R = \mathrm{Ran}_K(T)$ genau dann, wenn es in $S \in [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ natürliche Isomorphismen $\mathrm{Nat}(S, R) \cong \mathrm{Nat}(S \circ K, T)$ gibt.

Prop. RKEs sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bspe.
- Die RKE eines bel. Morphismus $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ längs $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ existiert stets und ist gegeben durch $(T, T \circ \mathrm{Id}_M \Rightarrow T)$.
- In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\mathrm{Ran}_K(T) = (\mathrm{Hom}_M(K, T), \;\; ev : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(K, T) \otimes_C K \Rightarrow T).$$

Bsp. Sei $K : \mathcal{M} \to \mathbf{1}$, $* \mapsto 1$ und $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von T längs K dasselbe wie ein Limes von T.

Thm. Seien $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ und $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Existiere für alle $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ der Limes $R(c) := \lim((f : c \to Km) \mapsto Tm)$. Dabei ist die Indexkategorie des Limes die Kommakat. $\Delta(c) \downarrow K$. Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ausdehnen und zwar zu einer RKE von T längs K.

Bem. Ist $\mathcal{M}$ klein und $\mathcal{C}$ lokal klein und ist $\mathcal{A}$ vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktweise RKE**.

Lem. Eine RKE ist genau dann punktweise, wenn sie für alle $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ unter dem Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$ erhalten bleibt.

Thm. Sei $K : M \to C$ ein Funktor. Betrachte $K^* : [\mathcal{C}, \mathcal{A}] \to [\mathcal{M}, \mathcal{A}]$.

- Wenn ein Funktor $\mathrm{Ran}_K : [\mathcal{M}, \mathcal{A}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ mit $K^* \dashv \mathrm{Ran}_K$ ex., so ist $\mathrm{Ran}_K(T)$ für alle $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ eine RKE von T längs K.
- Existiere für alle $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ eine RKE $\mathrm{Ran}_K(T)$. Dann kann man die Zuordnung $T \mapsto \mathrm{Ran}_K(T)$ zu einem Rechtsadjungierten von K^* ausdehnen.

Thm. Sei $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- G besitzt einen Linksadjungierten.
- $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$ existiert und $G \circ \mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}) = \mathrm{Ran}_G(G \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$.

In diesem Fall gilt $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}) \dashv G$ und $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$ wird sogar von allen Morphismen $H : \mathcal{A} \to \mathcal{Y}$ bewahrt.

Thm. Rechtsadjungierte bewahren RKE.

Kor. Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

Algebraische Strukturen in Kategorien

Def. Eine **Retrakt** ist ein Morphismus $r : Y \to X$, sodass ein Morphismus $i : X \to Y$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$ existiert.
Sprechweise: X ist ein Retrakt von Y (vermöge i).

Bsp. Ein Modul U ist genau dann Retrakt von einem Modul M, wenn U ein direkter Summand von M ist.

Prop. „– ist Retrakt von –“ ist eine reflexive und trans. Relation.

Def. Ein **Retrakt eines Morphismus** $(X \xrightarrow{g} Y) \in \mathcal{C}$ ist ein Mor. $f : A \to B$, sodass es ein komm. Diagramm folgender Form gibt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "id_A"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "id_B"'] & Y \arrow[r, "s"] & B \end{tikzcd}$$

Bem. Ein Retrakt von $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ ist ein Retrakt von $f \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\to})$.

Prop. • Retrakte von Isomorphismen sind Isomorphismen.
• Sei $f \circ g = \mathrm{id}$. Dann ist f ein Retrakt von $g \circ f$.

Prop. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist die Klasse $\{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$ abgeschlossen unter Retrakten.

Def. Sei $i : A \to X$ und $p : E \to B$. Dann werden als äq. definiert:
- p ist **i-injektiv** • i ist **p-projektiv** • $i \boxslash p$
- i hat die Linkshochhebungseigenschaft (LHHE) bzgl. p
- p hat die Rechtshochhebungseigenschaft (RHHE) bzgl. i
- Für alle f, g wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales λ, sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists\,\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

Bsp. Wegeliftung aus der Topologie: $i : \{0\} \to [0,1]$ erfüllt die LHHE bezüglich allen Überlagerungen $\pi : E \to B$.

Bsp. Ein Objekt P einer ab. Kat. $\mathcal{A}$ ist genau dann **projektiv**, wenn $(0 \to P)$ die LHHE bzgl. aller Epis in $\mathcal{A}$ hat. Dual ist $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ injektiv g.d.w. alle Monos in $\mathcal{A}$ die LHHE bzgl. $(I \to 0)$ besitzen.

Bsp. In **Set** gilt: Alle Inj. haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

Lem (**Retrakt-Argument**). Sei $f = q \circ j$.
- Ist f q-projektiv ($f \boxslash q$), so ist f ein Retrakt von j.
- Ist f j-injektiv ($j \boxslash f$), so ist f ein Retrakt von q.

Zellenkomplexe

Def. Sei λ eine Ordinalzahl. Eine **λ-Sequenz** in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein kolimesbewahrender Funktor $X : \lambda \to \mathcal{C}$ (wobei man λ als Präordnungskategorie aller $\beta < \lambda$ auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus $X_0 \to \mathrm{colim}_{\beta<\lambda} X_\beta$.

Bem. Kolimesbewahrung bedeutet: $\mathrm{colim}_{\alpha<\beta} X_\alpha = X_\beta$ für alle $\beta < \lambda$.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine kovollständige Kategorie, $I \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge.
- Ein **relativer I-Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer λ-Sequenz Z, sodass $\forall\, \alpha \in \mathcal{O}_n$ mit $\alpha + 1 < \lambda$ ein Pushoutdiagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Z_\alpha \arrow[d] & \leftarrow \textbf{Anklebeabbildung} \\ B \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & Z_{\alpha+1} & \leftarrow \textbf{Zelle} \end{tikzcd}$$

  mit $f \in I$ existiert. Sprechweise:
  „$Z_{\alpha+1}$ entsteht aus Z_α, indem wir B längs C ankleben“
- Ein Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **I-Zellenkomplex**, wenn der Morph. $0 \to A$ aus dem initialen Obj. ein relativer I-Zellenkomplex ist.

Bsp. CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind I-Zellenkomplexe mit $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geqslant 0\}$ (und $\mathcal{C} = \textbf{Top}$).

Bspe. • Identitäten $A \to A$ sind relative I-Zellenkomplexe.
• Das initiale Objekt ist ein absoluter I-Zellenkomplex.

Lem. Sei $Z : \lambda \to \mathcal{C}$ eine λ-Sequenz. Sei jeder Morphismus $Z_\beta \to Z_{\beta+1}$ $(\beta + 1 < \lambda)$ ein Pushout eines Morphismus aus I. Dann ist die transfinite Komposition von Z ein I-Zellenkomplex.

Thm. Die Klasse der relativen I-Zellenkomplex ist abgeschl. unter:
• transfiniten Kompositionen • Isomorphismen • Koprodukten

Faktorisierungssysteme

Def. Eine Unterkat. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **links-saturiert**, falls $\mathcal{L}$ abgeschl. ist unter Pushouts, transfiniten Kompositionen und Retrakten.

Lem. Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ links-saturiert. Dann ist $\mathcal{L}$ unter Koprodukten abgeschlossen und enthält alle Isomorphismen.

Bsp. Sei $R \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$. Dann ist die Unterkategorie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ mit $\mathrm{Mor}(\mathcal{L}) := {}^{\boxslash}R := \{i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \mid \forall\, r \in R : i \boxslash r\}$ links-saturiert.

Def. • $L \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **proj. abgeschlossen**, falls $L \supseteq {}^{\boxslash}(L^{\boxslash})$.
• $R \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **injektiv abgeschlossen**, falls $R \supseteq ({}^{\boxslash}L)^{\boxslash}$.

Prop. • ${}^{\boxslash}(L^{\boxslash})$ ist die projektive Hülle von L, d. h. die kleinste Klasse von Morphismen, die projektiv abgeschl. ist und L umfasst.
• Die projektive Hülle von L ist links-saturiert. Ist L schon projektiv abgeschlossen, so ist L insbesondere links-saturiert.

Def. • Ein Paar (L, R) von Klassen von Morphismen von $\mathcal{C}$ **faktorisiert** $\mathcal{C}$, falls $\forall\, f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \;:\; \exists\, i \in L, p \in R \;:\; f = p \circ i$.
• Ein faktorisierendes Paar (L, R) heißt **schwaches Faktorisierungssystem** (SFS), falls $L = {}^{\boxslash}R$ und $R = L^{\boxslash}$.
• Ein SFS (L, R) heißt **orth. Faktorisierungssystem**, falls jedes $i \in L$ die eindeutige LHHE bzgl. allen $p \in R$ erfüllt.

Prop. Sei (L, R) faktorisierend. Dann ist (L, R) genau dann ein SFS, wenn $L \boxslash R$ und L und R unter Retrakten abgeschlossen sind.

Bsp. $(\{\text{Surjektionen}\}, \{\text{Injektionen}\})$ ist ein (S)FS in **Set**

Modellkategorien

Motto. Modellkat. sind ein Werkzeug, math. Theorien zu studieren.

Def. Eine Klasse $W \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ von Morphismen erfüllt die **2-aus-3-Eigenschaft**, falls für jede Komposition $h = g \circ f$ in $\mathcal{C}$ gilt: Liegen zwei der drei Morphismen f, g, h in W, so auch der dritte.

Def. $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}$ wie eben heißt **Unterkat. schwacher Äquivalenzen**, falls $\mathcal{W}$ die 2-aus-3-Eig. erfüllt und abgeschl. unter Retrakten ist.

Bsp. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist $\mathcal{W} := F^{-1}(\{\text{Isos in } \mathcal{D}\})$ eine Unterkategorie schwacher Äquivalenzen.

Def. Ein Tripel $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ von Unterkategorien einer Kategorie $\mathcal{M}$ heißt **Modellstruktur** auf $\mathcal{M}$, falls sowohl $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ als auch $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ schwache Faktorisierungssysteme sind und $\mathcal{W}$ die 2-aus-3-Eigenschaft erfüllt.

Def. Eine bivollständige Kategorie $\mathcal{M}$ zusammen mit einer Modellstruktur $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ heißt eine **Modellkategorie**.

Sprechweise. Man verwendet folgende Bezeichnungen und Pfeile:

$\mathcal{W}$	$\xrightarrow{\sim}$	**schwache Äquivalenz**
$\mathcal{C}$	$\hookrightarrow$	**Kofaserung**
$\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$	$\overset{\sim}{\hookrightarrow}$	**azyklische Kofaserung**
$\mathcal{F}$	$\twoheadrightarrow$	**Faserung**
$\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$	$\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}$	**azyklische Faserung**

Bem. Ist $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ eine Modellstruktur auf $\mathcal{M}$, so ist $(\mathcal{W}^{\mathrm{op}}, \mathcal{F}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ eine Modellstruktur auf $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$.

Bem. Wegen $\mathcal{C} = {}^{\boxslash}(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ bzw. $\mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^{\boxslash}$ ist das Datum $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ überbestimmt.

Bsp. Sei $\mathcal{M}$ bivollständig. Sei $\mathcal{W} := \mathcal{C} := \{\text{Isos in } \mathcal{M}\}$. Dann wird $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{F} := \mathcal{M}$ eine Modellkategorie.

Prop. In einer Modellkategorie sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ links-saturiert.

Lem. $\mathcal{W}$ enthält alle Isomorphismen und ist unter Retrakten abgeschlossen, bildet also eine Unterkat. schwacher Äquivalenzen.

Notation. Das initiale Objekt von $\mathcal{M}$ wird mit $\varnothing$, das terminale Objekt mit $*$ bezeichnet.

Def. • Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ heißt **kofasernd**, falls $\varnothing \to X$ eine Kofaserung ist. Eine azyklische Faserung $q : QX \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ mit QX kofasernd heißt **kofasernder Ersatz** (oder Approx.) von X.
• Dual heißt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ **fasernd**, falls X in $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ kofasernd ist und $X \overset{\sim}{\hookrightarrow} RX$ mit RX fasernd heißt **fasernder Ersatz** von X.

Bsp. Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ beliebig. Dann faktorisiere $\varnothing \to X$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \\ & QX \arrow[ur, two heads, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Man erhält also immer einen kofasernden Ersatz QX für X.
Dual gibt es immer einen fasernden Ersatz RX für X.

Prop. Seien $q : QX \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ und $q' : Q'X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ zwei kofasernde Approximationen von X. Dann existiert eine schwache Äquivalenz $\xi : QX \xrightarrow{\sim} Q'X$ mit $q' \circ \xi = q$.

Def. Ein Obj. X heißt **bifasernd**, falls es fasernd und kofasernd ist.

Prop. Für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ sind RQX und QRX schwach äquivalent und beide bifasernd.

Lem (Ken Brown)**.** Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Funktor, $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, $\mathcal{N}$ besitze eine Unterkat. $\mathcal{W}'$ schwacher Äquivalenzen. Wenn F azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten nach $\mathcal{W}'$ abbildet, so bildet F alle schwachen Äquivalenzen zwischen kofasernden Objekten nach $\mathcal{W}'$ ab.

Def. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie. Ein **Zylinderobjekt** $X \times I$ zu einem $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ ist ein Obj. zusammen mit Morphismen wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i_0", "\sim"'] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] & & \\
& X \times I \arrow[r, "p", "\sim"'] & X \\
X \arrow[ur, "\sim", "i_1"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Der Zylinder $X \times I$ heißt **gut**, falls $X \amalg X \to X \times I$ eine Kofaserung ist. Ein guter Zylinder heißt **sehr gut**, falls $p : X \times I \to X$ eine azyklische Faserung ist.

Bem. Sei die Kodiagonale $\nabla : X \amalg X \to X$ wie folgt faktorisiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, hook] & & & \\
& X \amalg X \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\nabla"] & X \times I \arrow[r, two heads, "\sim"] & X \\
X \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Dann erhalten wir ein Zylinderobjekt $X \times I$ für X.

Def. Zwei Morphismen $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{M}$ heißen **links-homotop** (notiert $f \sim^l g$), falls ein Zylinder $X \times I$ und ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\sim"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& X \times I \arrow[r, dashed, "h"] & Y \\
X \arrow[ur, "\sim"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

existiert. Wir definieren $\pi^l(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)/\langle \sim^l \rangle$, wobei $\langle \sim^l \rangle$ die von der symmetrischen, refl. Relation $\sim^l$ erzeugte Äq'relation ist. Die Homotopie heißt (sehr) gut, wenn der Zylinder $X \times I$ es ist.

Beob. Sei $X \amalg X \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p\,\sim} X$ irgendein Zylinderobjekt. Faktorisiere $i = q \circ i'$ in Kofaserung und azyklische Faserung. Dann ist auch

$$X \amalg X \overset{i'}{\hookrightarrow} X' \xrightarrow{pq\,\sim} X$$

ein Zylinderobjekt, sogar ein gutes. Ebenso kann man p faktorisieren und ein ein anderes Zylinderobjekt erhalten.

Lem. Sei X kofasernd, $X \amalg X \to X \times I \to X$ ein gutes Zylinderobj. Dann sind $i_{0,1} : X \to X \amalg X \to X \times I$ azyklische Kofaserungen.

Lem. Sei $h : f \simeq^l g$. Dann: $f \in \mathcal{W} \iff g \in \mathcal{W}$.

Def. Ein **Pfadobjekt** X^I ist eine Faktorisierung

$$X \xrightarrow[\sim]{i} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

des Diagonalmorph. $\Delta : X \to X \times X$. Das Pfadobjekt X^I heißt gut, wenn p eine Faserung und sehr gut, wenn zus. i eine Kofaserung ist.

Def. Eine Rechtshomotopie $h : f \simeq^r g$ ist ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
& & Y \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Y^I \arrow[ur, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Bem. Ein Pfadobj. in $\mathcal{M}$ ist dasselbe wie ein Zylinderobj. in $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$.

Lem. Seien $f, g : X \to Y$ und $e : W \to X$, $d : Y \to Z$.

- $\exists\, h : f \simeq^l g \iff \exists\, h' : f \simeq^{l,\mathrm{gut}} g$.
- Sei Y fasernd. Dann: $\exists\, h : f \simeq^{l,\mathrm{gut}} g \iff \exists\, h' : f \simeq^{l,\text{sehr gut}} g$
- $\exists\, h : f \simeq^l g \implies \exists\, h' : d \circ f \simeq^l d \circ g$
- $\exists\, h : f \simeq^{l,\text{sehr gut}} g \implies \exists\, h' : f \circ e \simeq^{l,\text{sehr gut}} g \circ e$
- Sei X kofasernd. Dann ist $\simeq^l$ eine Äq'relation auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)$.

Kor. Sei Y fasernd. Dann induziert Komposition eine Abbildung

$$\pi^l(X,Y) \times \pi^l(W,X) \to \pi^l(W,Y), \quad ([g],[f]) \mapsto [g \circ f].$$

Prop. Seien $f, g : X \to Y$.

- Sei X kofasernd. Dann: $f \simeq^l g \implies f \simeq^r g$
- Sei Y fasernd. Dann: $f \simeq^l g \impliedby f \simeq^r g$

Notation. Wenn X kofasernd und Y fasernd ist, schreibt man

$$\pi(X,Y) := \pi^l(X,Y) = \pi^r(X,Y).$$

Thm. Sei X kofasernd. Sei $p : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$ eine azyklische Faserung. Dann ist $p_* : \pi^l(X,Z) \to \pi^l(X,Y)$, $[f] \mapsto [p \circ f]$ eine Bijektion.

Thm (**Whitehead**)**.**
Für einen Morphismus $f : X \to Y$ zw. bifasernden Objekten gilt

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{W} &\iff f \text{ ist eine Homotopieäquivalenz} \\ &:\iff \exists\, g : Y \to X \;:\; g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \wedge f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y . \end{aligned}$$

Lem. Sei $f : X \to Y$. Seien RX und RY fixierte fasernde Approx. an X bzw. Y. Dann hängt $Rf : RX \to RY$ bis auf Rechts- und auch Linkshomotopie nur von der Rechtshomotopieklasse von $r \circ f$ ab.

Achtung. I. A. ist $f \mapsto R(f)$ nicht funktoriell.

Die Homotopiekategorie einer Modellkategorie

Def. Sei $\mathcal{C}$ ein Kategorie, $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eine Klasse von Morphismen. Die **Lokalisierung** $\mathcal{C}[S^{-1}]$ von $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie, die folgende 2-universelle Eigenschaft erfüllt:

- $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ schickt Morphismen aus S aus Isos.
- Für jede Kategorie $\mathcal{D}$ ist $\gamma^* : [\mathcal{C}[S^{-1}], \mathcal{D}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{S \mapsto \mathrm{Isos}}$ eine Kategorienäquivalenz.

Bem. Die Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt Lokalisierung von Kategorien.

Def. Die **Homotopiekategorie** $\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$ einer Modellkategorie $\mathcal{M}$ ist die Lokalisierung von $\mathcal{M}$ an der Klasse der schwachen Äquivalenzen.

Konstruktion. Ganz explizit:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}) &:= \mathrm{Ob}(\mathcal{M}) \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X,Y) &:= \pi(RQX, RQY) \end{aligned}$$

Nach einem früheren Lemma ist die Komposition $([f],[g]) \mapsto [f \circ g]$ wohldefiniert. Der Funktor $\gamma : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$ ist gegeben durch

$$X \mapsto X, \quad f \mapsto [RQf].$$

Lem. Sei $f : X \to Y$ in $\mathcal{M}$. Dann gilt $f \in \mathcal{W} \Leftrightarrow Qf \in \mathcal{W} \Leftrightarrow RQf \in \mathcal{W}$.

Lem. γ wie definiert ist ein Funktor.

Lem. $f \in \mathcal{W} \iff \gamma(f)$ ist ein Iso.

Lem. Sei X kofasernd und Y fasernd. Dann ist die Abbildung

$$\pi(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X,Y), \quad [f] \mapsto [RQf]$$

eine Bijektion.

Lem. Ist $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein Funktor, der schwache Äq. auf Isos schickt, dann identifiziert F links- bzw. rechtshomotope Morphismen.

Lem. Jeder Morphismus in $\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$ ist Komposition von Morphismen der Form $\gamma(f)$, $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ und der Form $\gamma(f)^{-1}$, $f \in \mathcal{W}$.

Lem. Obige Konstruktion erfüllt die geforderte univ. Eigenschaft.

Lem. Sei $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$ die volle Unterkategorie der kofasernden Objekte und $F : \mathcal{M}_c \to \mathcal{C}$ ein Funktor, der azyklische Kofaserungen auf Isos schickt. Dann identifiziert F rechtshomotope Morphismen.

Thm. Ein Morphismus $p : Z \to Y$ zw. fasernden Objekten ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn $p_* : \pi(X,Z) \to \pi(X,Y)$ bijektiv ist für alle kofasernden Objekte $X \in \mathcal{M}$.

Klassen von Modellkategorien

Lokal präsentierbare Kategorien

Motto. Eine lokal präsentierare Kategorie ist eine große Kategorie, welche erzeugt wird von kleinen Objekten unter kleinen Kolimiten.

Def. Eine ∞-große Kardinalzahl κ heißt **regulär**, wenn die Vereinigung von weniger als κ vielen Mengen, die alle weniger als κ-viele Elem. enthalten, selbst weniger als κ-viele Elemente enthält.

Bem. Zu jeder Kardinalzahl λ existiert ein reguläres κ mit $\lambda \leqslant \kappa$.

Def. Sei κ eine Kardinalzahl. Eine Kategorie heißt **κ-klein**, falls sie nur κ-viele Morphismen besitzt.

Bem. Sei κ regulär. Dann ist eine Kat. bereits dann κ-klein, falls sie nur κ-viele Objekte besitzt und alle Hom-Mengen κ-klein sind.

Def. Eine Kategorie heißt **κ-filtriert**, wobei κ eine reguläre Kardinalzahl ist, wenn jedes α-kleine Diagramm in der Kategorie einen Kokegel besitzt, wobei $\alpha < \kappa$.

Def. Eine teilweise geordnete Menge $(I, \leqslant)$ heißt **α-gerichtet**, falls die zugehörige Kategorie α-filtriert ist, d. h. jeweils weniger als α-viele Elemente haben eine obere Schranke.

Bem. Sei $\lambda \geqslant \kappa$. Dann ist jede λ-filtrierte Kategorie auch κ-filtriert.

Def. Ein Objekt X einer Kat. $\mathcal{C}$ heißt **κ-kompakt** oder **α-klein**, wenn $\mathrm{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ mit κ-filtrierten Kolimiten vertauscht:

$$\mathrm{colim}_i \, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T_i) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{colim}_i \, T_i)$$

für alle κ-filtrierte Diagramme $(T_i)_{i \in \mathcal{I}}$.

Def. Ein Objekt heißt genau dann **klein**, wenn es κ-kompakt ist für irgendeine reguläre Kardinalzahl κ.

Bspe. • Jede endliche Menge ist $\aleph_0$-kompakt in **Set**.
- Jeder endlich-dim. VR ist $\aleph_0$-kompakt in $\mathbf{Vect}(\mathbb{R})$.
- Jeder endlich-präsentierte Modul ist $\aleph_0$-kompakt in $\mathbf{Mod}(R)$.
- Unendliche Mengen sind nicht $\aleph_0$-kompakt in **Set**.
- Jeder nicht diskrete topologische Raum ist nicht $\aleph_0$-kompakt.
- **Set** ist lokal $\aleph_0$-präsentierbar mit $S = \{\heartsuit\}$.
- $\mathbf{Mod}(R)$ ist lokal $\aleph_0$-präsentierbar mit $S = \{R^n / \mathrm{im}(A) \mid n \geqslant 0, A \in R^{n \times m}, m \geqslant 0\}$

Def. Eine **lokal κ-präsentierbare Kategorie** ist eine lokal kleine und kovollständige Kategorie, sodass eine Menge $S \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von κ-kompakten Objekten existiert, sodass jedes Objekt aus $\mathcal{C}$ kleiner Kolimes von Objekten aus S ist.

Def. Eine Kategorie heißt genau dann **lokal präsentierbar**, wenn sie lokal κ-präsentierbar für eine reguläre Kardinalzahl κ ist.

Bspe. • **sSet** ist lokal präsentierbar.
- Sei $\mathcal{C}$ klein. Dann ist $\mathbf{PSh}(\mathcal{C}) = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ lokal präsentierbar.
- **FinSet** ist nicht lokal präsentierbar (weil nicht kovollständig)

Fun Fact. Sei $\mathcal{C}$ lokal präsentierbar. Wenn auch $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ lokal präsentierbar ist, dann ist $\mathcal{C}$ die zu einer Quasiordnung gehörige Kategorie!

Lem. Sei $X : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor, wobei $\mathcal{I}$ α-filtriert und $\mathcal{J}$ α-klein. Dann ist der kanonische Isomorphismus $\mathrm{colim}_i \lim_j X(i,j) \to \lim_j \mathrm{colim}_i \, X(i,j)$ eine Bijektion.

Bsp. α-kleine Kolimiten α-kompakter Obj. sind wieder α-kompakt.

Kombinatorische Modellkategorien

Lem (Kleines-Objekt-Argument).
Sei $\mathcal{C}$ lokal präsentierbar, $\mathcal{I} \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge, $\mathrm{Cell}(\mathcal{I})$ die Unterkat. der relativen $\mathcal{I}$-Zellenkomplexe und $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ die Unterkat. der Retrakte von $\mathrm{Cell}(\mathcal{I})$. Dann ist $(\mathrm{Cof}(\mathcal{I}), \mathcal{I}^{\boxslash})$ ein SFS.

Def. • Eine Modellkategorie $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ heißt **kofasernd erzeugt**, wenn *Mengen* $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ mit $\mathcal{C} = \mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \mathrm{Cof}(\mathcal{J})$ existieren.
- Lokal präsentierbare und kofasernd erzeugte Modellkategorien heißen **kombinatorisch**.

Sprechweise. Die Kof. in $\mathcal{I}$ heißen **erzeugende Kofaserungen**, die in $\mathcal{J}$ **azyklische erzeugende Kofaserungen**.

Satz. Sei $\mathcal{M}$ eine lokal präsentierbare Kategorie. Sei $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ eine Unterkat. schw. Äquivalenzen. Seien $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ Mengen. Dann sind $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ genau dann erzeugende (azyklische) Kofaserungen einer Modellstruktur auf $\mathcal{M}$, falls
- $\mathrm{Cell}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{W}$ (Azyklizität) • $\mathcal{I}^{\boxslash} = \mathcal{J}^{\boxslash} \cap \mathcal{W}$ (Kompatibilität)

Eigentliche Modellkategorien

Def. Eine Modellkategorie $\mathcal{M}$ heißt **linkseigentlich**, falls für alle Pushouts der Form

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

auch der Morphismus $g : X \to Y$ eine schwache Äquivalenz ist. $\mathcal{M}$ heißt rechtseigentlich, falls $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ linkseigentlich ist, d. h. Pullbacks schwacher Äquivalenzen längs Faserungen wieder schwache Äquivalenzen sind.

Bsp. Eine Modellkategorie, in der jedes Objekt kofasernd ist, ist linkseigentlich.

Def. $\mathcal{M}$ heißt **eigentlich**, falls $\mathcal{M}$ links- und rechtseigentlich ist.

Prop. In jeder Modellkategorie ist der Pushout einer schwachen Äquivalenz zwischen kofasernden Objekten längs Kofaserungen wieder eine schache Äquivalenz.

Bem. Gute Homotopien kann man längs Kofaserungen erweitern:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"] \arrow[d, hook, "i"] & Y^I \arrow[d, "p_0", "\sim"'] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\overline{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

Prop. Eine Modellkategorie $\mathcal{M}$ ist genau dann links-eigentlich, wenn für alle Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f", "\sim"'] & C \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g", "\sim"'] & B \arrow[d, "h", "\sim"'] \\ A & C \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[r, "l"] & B \end{tikzcd}$$

auch der ind. Mor. $A \cup_C B \to A' \cup_{C'} B'$ eine schwache Äq. ist.

Quillen-Adjunktionen

Motto. Wir wollen Modellstrukturen und -kategorien vergleichen.

Def. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, $\mathcal{H}$ eine beliebige Kategorie. Ein Funktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ heißt **homotopisch**, falls F die schwachen Äquivalenzen in $\mathcal{M}$ auf Isomorphismen in $\mathcal{H}$ abbildet.

Bem. Homotopische Funktoren faktorisieren über $\mathcal{M}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Bsp. Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Funktor zw. Modellkategorien, der schwache Äquivalenzen erhält. Dann ist $\delta \circ F : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$ homotopisch, wobei $\delta : \mathcal{N} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$ die Lokalisierung ist.

Bem. Solch ein Funktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ induziert einen Funktor $\mathrm{Ho}(M) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$.

Def. Ein **linksabgeleiteter Funktor** eine Funktors $F : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ ist ein Funktor $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}$ zusammen mit einer natürlichen Transformation $\mu : \mathbb{L}F \circ \gamma \Rightarrow F$, sodass für alle weiteren Funktoren $G : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}$ und nat. Transformationen $\xi : G \circ \gamma \Rightarrow F$ genau eine natürliche Transformation $\nu : G \Rightarrow \mathbb{L}F$ existiert mit $\xi = \mu \circ \nu$, d. h. $\mathrm{Nat}(G, \mathbb{L}F) \cong \mathrm{Nat}(G \circ \gamma, F)$ ist für alle G eine Bijektion, d. h. eine Linksableitung von F ist nichts anderes als eine Rechts-Kan-Erweiterung von F längs γ.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{H} \\ \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \arrow[ur, "\mathbb{L}F"] & \end{tikzcd}$$

Analog ist eine **Rechtsableitung** $\mathbb{R}F$ von F eine Linkskanerweiterung von F längs $\gamma : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$.

Satz. Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ ein Funktor, der azyklische Kofaserungen zwischen kof. Obj. auf Isomorphismen abbildet. Dann existiert $\mathbb{L}F$ und $\mu_X : \mathbb{L}F(X) \to F(X)$ ist ein Iso für alle kofasernden X.

Konstruktion. Sei $h\mathcal{M}_c$ die volle Unterkategorie der kof. Objekte von $\mathcal{M}$ modulo Rechts-Homotopie. Betrachte die Komposition

$$\mathcal{M} \xrightarrow{Q} h\mathcal{M}_c \xrightarrow{F_*} \mathcal{H}.$$

Dabei ist Q der kofasernde Ersatz und F_* wird induziert von F, da F homotope Morphismen identifiziert. Nach Ken Brown bildet die Komposition schwache Äquivalenzen auf Isos ab und induziert daher den gesuchten Funktor $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}$ mit $\mathbb{L}F \circ \gamma = F_* \circ Q$. Definiere $\mu : \mathbb{L}F \circ \gamma \to F$ durch $\mu_X := F(q : QX \to X)$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$. Falls X selbst kofasernd ist, so ist q eine schwache Äquivalenz zw. kofasernden Objekten und somit $\mu_X = F(q)$ ein Isomorphismus.

Def. Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Funktor zwischen Modellkategorien. Eine **totale Linksableitung** $\mathbb{L}F$ ist ein Funktor $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$, sodass $\mathbb{L}F$ die Linksableitung von $\delta \circ F$ ist:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{N} \arrow[d, "\delta"] \\ \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\mathbb{L}F"] \arrow[ur, phantom, "\Rightarrow"] & \mathrm{Ho}(\mathcal{N}) \end{tikzcd}$$

Ein Funktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bilde azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten auf schache Äquivalenzen ab. Dann existiert seine totale Linksableitung $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$.

Def. Eine Adjunktion $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$ von Modellkategorien heißt **Quillen-Adjunktion**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- F erhält Kofaserungen und U erhält Faserungen,
- F erhält Kofaserungen und azyklische Kofaserungen,
- U erhält Faserungen und azyklische Faserungen,
- F erhält azyklische Kofaserungen und U azyklische Faserungen.

Bem. Die Äquivalenz folgt aus $Fi \boxslash p \iff i \boxslash Up$.

Def. Eine Quillen-Adj. (F, U) heißt **Quillen-Äquivalenz**, falls

$$\forall X \in \mathcal{M}_c, Y \in \mathcal{N}_f \;:\; (FX \to Y) \in \mathcal{W} \iff (X \to UY) \in \mathcal{W}.$$

Satz. Sei (F, U) eine Quillenadjunktion. Dann existieren $\mathbb{L}F$, $\mathbb{R}U$ und bilden eine Adjunktion $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{N}) : \mathbb{R}U$.
Ist (F, U) sogar eine Quillenäquivalenz, so ist $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U)$ eine Adjunktion aus Äquivalenzen.

Kor. Quillenäq. Modellkat'n haben äquivalente Homotopiekat'n.

Prop. Für eine Quillenadjunktion $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$ sind äquivalent:

- (F, U) ist eine Quillenäquivalenz
- $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U)$ ist eine Adjunktion von Äquivalenzen
- F reflektiert schw. Äq'n zw. kof. Objekten und die Komposition $FQUY \xrightarrow{F(q_{UY})} FUY \xrightarrow{\epsilon} Y$ ist eine schw. Äq. für alle fas. Y.
- U reflektiert schw. Äq'n zw. fas. Objekten und die Komposition $X \xrightarrow{\eta} UFX \xrightarrow{U(r_{FX})} URFX$ ist eine schw. Äq. für alle kof. X.

Falls U schw. Äq'n in $\mathcal{N}$ erzeugt, dann ist auch äquivalent:
- $\eta : X \to UFX$ ist eine schwache Äq. für alle kofasernden X.

Falls F schw. Äq'n in $\mathcal{M}$ erzeugt, dann ist auch äquivalent:
- $\eta : X \to UFX$ ist eine schwache Äq. für alle kofasernden X.

Def. Sei $f : A \to B$ ein Mor. in der Modellkat. $\mathcal{M}$. Dieser induziert Funktoren $f^* : B/\mathcal{M} \to A/\mathcal{M}$ und $f_* : \mathcal{M}/A \to \mathcal{M}/B$. Der Funktor f^* besitzt einen Linksadj. $f_! : A/\mathcal{M} \to B/\mathcal{M}$, der durch Pushout entlang f geg. ist, und f_* besitzt einen Rechtsadj. $f^! : \mathcal{M}/B \to \mathcal{M}/A$.

Prop. $\mathcal{M}$ ist genau dann linkseigentlich, wenn $(f_!, f^*)$ eine Quillenadjunktion ist und genau dann rechtseigentlich, wenn $(f_*, f^!)$ eine Quillenadjunktion ist für alle schwachen Äquivalenzen f.

Anhang: Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel $(S, \leqslant)$ bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung $\leqslant$ auf S.

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\ldots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \ldots$

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz)**.** Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leqslant_S)] \leqslant [(T, \leqslant_T)] \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leqslant_S) \to (T, \leqslant_T).$$

Notation. • $0 := [\varnothing]$, • $n := [\{1, \ldots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega := [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

Prinzip (**Transfinite Induktion**)**.**
Sei $P : \mathcal{O}_n \to \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n \,:\, (\forall \gamma < \beta \,:\, P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n \,:\, P(\alpha)$$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert:
Für $\alpha = [(S, \leqslant_S)]$ und $\beta = [(T, \leqslant_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

- $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leqslant_{S \amalg T})]$, wobei gilt:

$$\leqslant_{S \amalg T} |_{S \times S} \; := \leqslant_S, \quad \leqslant_{S \amalg T} |_{T \times T} \; := \leqslant_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$

- $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leqslant_{S \rtimes T})]$ mit der lexikogr. Ordnung

$$(s_1, t_1) \leqslant_{S \rtimes T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \;\vee\; (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leqslant_S s_2)$$

- $\alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \to T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leqslant)]$ mit

$$f < g \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, t \in T \,:\, f(t) < g(t) \wedge (\forall\, t_2 >_T t \,:\, f(t_2) = g(t_2))$$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 := [(\varnothing, \leqslant)] \in \mathcal{O}_n$.
b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.
c) Die Limeszahl $\lim A := \sup A$ einer Teil*menge* $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

a)	b)	c)
$\alpha + 0 := \alpha$	$\alpha + (\beta+1) := (\alpha+\beta)+1$	$\alpha + \lim A := \lim \{\alpha+\gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha \cdot 0 := 0$	$\alpha \cdot (\beta+1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$	$\alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha^0 := 1$	$\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$	$\alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe ist mit
• $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, • $a \cdot 0 = 0$.

Lem (Rechenregeln in $\mathcal{O}_n$)**.** • $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
• $\alpha^0 = 1$ • $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^\alpha = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$
• $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ • $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

- $\mathcal{O}_n$ ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht*!
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:

$$\forall \beta < \gamma: \quad \alpha+\beta < \alpha+\gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \;\; (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \;\; (\alpha > 1).$$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \ldots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.