

Zusammenfassung Partielle DGLn

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

1. Einleitung

Def. Eine **partielle Differentialgleichung** (PDGL) hat die Form

$$E(x, u(x), Du(x), \dots, D^k u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \quad (*)$$

wobei $E : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist. Die höchste Ableitungsordnung von u , die in E vorkommt, heißt **Ordnung** der PDGL.

Def. Eine PDGL von der Ordnung k heißt

- **linear**, falls sie folgende Form besitzt:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) = 0$$

- **semilinear**, falls sie linear in der höchsten Ableitungsordnung ist, man sie also schreiben kann als

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) = 0.$$

- **quasilinear**, falls sie sich schreiben lässt als

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) = 0.$$

- sonst **voll nichtlinear**.

Bemerkung. $\{\text{lineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{semilineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{quasilineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{PDGLn}\}$

Def (Typeinteilung für lineare PDGLn 2. Ordnung). Seien $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) vorgegebene Fktn. auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Die lineare PDGL

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **elliptisch**, falls die $(n \times n)$ -Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

- Die lineare PDGL

$$D_1 D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **hyperbolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

- Die lineare PDGL

$$D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{2 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **parabolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

Def. Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **klassische Lösung**, falls $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ und die Differentialgleichung $(*)$ überall in Ω erfüllt ist.

Grundlagen

Notation. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibe

$$V \in \Omega \quad \text{für} \quad V \subset \mathbb{R}^n \text{ mit } \bar{V} \text{ kompakt und } \bar{V} \subset \Omega^\circ.$$

Notation. Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $F = (F_1, \dots, F_n)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann heißt

- $\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^n D_i F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **Divergenz** von F ,
- $\operatorname{grad} f := \nabla f := (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ **Gradient** von f ,
- Δ mit $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^n D_i D_i f$ **Laplace-Operator**.

Satz (Transformationssatz). Sei $T : \Omega \rightarrow T(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeo, dann gilt für $f : T(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \in L^1(T(\Omega)) \iff (f \circ T) \circ |\det(DT)| \in L^1(\Omega) \quad \text{mit}$$

$$\int_{T(\Omega)} f \, dx = \int_{\Omega} (f \circ T) \cdot |\det(DT)| \, dx.$$

Bsp (Polarkoordinaten). Sei $f \in L^1(B_r(K))$. Dann ist f auf fast jeder Sphäre $\partial B_\rho(K)$ für $\rho \in [0, r]$ integrierbar und es gilt

$$\int_{B_r(x)} f(x) \, dx = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x_0)} f \, dS \, d\rho$$

Satz (Gauß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit \mathcal{C}^1 -Rand $\partial\Omega$. Ist $F \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} F \in L^1(\Omega)$, so gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} (F \circ \nu) \, dS,$$

wobei ν der äußere Einheitsnormalenvektor ist.

Korollar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit \mathcal{C}^1 -Rand $\partial\Omega$. Sind $f, g \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, dann gilt die partielle Integrationsregel

$$\int_{\Omega} D_i f g \, dx = - \int_{\Omega} f D_i g \, dx + \int_{\partial\Omega} f g \nu^i \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Sind $f, g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, dann gelten die Greenschen Formeln

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Df \cdot Dg \, dx &= - \int_{\Omega} f \Delta g \, dx + \int_{\Omega} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ \int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dx &= \int_{\partial\Omega} (f D_\nu g - g D_\nu f) \, d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

Proposition (Diff. parameterabh. Integrale). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| < \infty$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Angenommen,

- $f(x, -) \in \mathcal{C}^1(I)$ für fast alle $x \in \Omega$,
- $f(-, t) \in L^1(\Omega) \frac{\partial f}{\partial t}(-, t) \in L^1(\Omega)$ für alle $t \in I$ und
- für alle $t \in I$ gibt es $\epsilon > 0$ sodass $(t - \epsilon, t + \epsilon) \subset I$ und

$$\sup_{s \in (t - \epsilon, t + \epsilon)} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(-, s) \right| \in L^1(\Omega).$$

Dann ist die Abbildung

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{\Omega} f(x, t) \, dx$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx.$$

Bemerkung. Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn Ω offen und beschränkt ist, $f(x, -) \in \mathcal{C}^1(I)$ für alle $x \in \Omega$ und $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times I)$.

Notation. Bezeichne mit \mathcal{L}^n das Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^n . Für messbare Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ schreibe $|A| := \mathcal{L}^n(A)$.

Bsp. Zwischen dem Volumen von Kugeln und Sphären im \mathbb{R}^n bestehen folgende Zusammenhänge:

$$|B_r(0)| = r^n \cdot |B_1(0)| \quad \text{und} \quad |B_r(0)| = \frac{r}{n} \cdot \int_{\partial B_r(0)} 1 \, dS$$

Notation. $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

Notation. Sei $f : \Omega/M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathcal{L}^k(\Omega) \in (0, \infty)$ bzw. $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale

Untermannigfaltigkeit mit $\int_M 1 \, dS \in (0, \infty)$

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_M f(x) \, dx := \frac{1}{|M|} \int_M f(x) \, dx$$

heißen **Mittelwerte** von f auf Ω bzw. M .

Funktionenräume

Def. Eine Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt (lokal) **Hölder-stetig** in $x_0 \in S$ zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$ mit Hölderkonstante $C_{x_0} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, falls für alle $x \in S$ (bzw. $x \in K$ für ein $K \Subset S$) gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C_{x_0} |x - x_0|^\alpha$$

Def. Die **Hölder-Seminorm** von $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$[f]_{\mathcal{C}^{0, \alpha}(S)} := \sup_{x, x_0 \in S} \frac{|f(x_0) - f(x)|}{|x - x_0|^\alpha}.$$

Def (**Hölder-Räume**). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\alpha \in (0, 1]$.

- $\mathcal{C}^{0, \alpha}(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \mid [f]_{\mathcal{C}^{0, \alpha}(K)} < \infty \text{ für alle komp. } K \Subset S\}$
- $\mathcal{C}^{0, \alpha}(\bar{\Omega}) := \{f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \mid [f]_{\mathcal{C}^{0, \alpha}(\bar{\Omega})} < \infty\}$.
- $\mathcal{C}^{k, \alpha}(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega) \mid [D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0, \alpha}(K)} < \infty \text{ für alle kompakten } K \Subset \Omega \text{ und Multiindizes } \beta \text{ mit } |\beta| = k\}$
- $\mathcal{C}^{k, \alpha}(\bar{\Omega}) := \{f \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}) \mid \text{alle Ableitungen bis zur Ordnung } k \text{ von } f \text{ sind beschränkt und } [D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0, \alpha}(\bar{\Omega})} < \infty \text{ für alle Multiindizes } \beta \text{ mit } |\beta| = k\}$

Bemerkung. Es gelten die Inklusionen $\mathcal{C}(\Omega) \supsetneq \mathcal{C}^{0, \alpha}(\Omega) \supsetneq \mathcal{C}^1(\Omega)$, aber i. A. $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \not\subset \mathcal{C}^{0, 1}(\bar{\Omega})$.

Bemerkung. Die Räume $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ und $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ sind Banachräume bzgl.

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} := \sum_{0 \leq |\beta| \leq k} \sup_{\overline{\Omega}} |D^\beta f|,$$

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|=k} [D^\beta f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Def. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $p \in [1, \infty]$. Für $f : A \rightarrow I$ messbar sei

$$\|f\|_{L^p(A)} := \begin{cases} \left(\int_A |f|^p dx \right)^{1/p} & \text{falls } p < \infty, \\ \text{ess sup}_A |f| & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Der **Lebesgue-Raum** $L^p(A)$ ist der Raum aller Äquivalenzklassen von fast-überall übereinstimmenden Funktionen, für die $\| \cdot \|_{L^p(A)}$ endlich ist. Der Raum $L^p_{\text{loc}}(A)$ ist der Raum aller Funktionen $A \rightarrow \mathbb{R}^n$, die für alle offenen $O \Subset A$ zu $L^p(O)$ gehören.

Bemerkung. $L^p(A)$ ist ein Banachraum mit der Norm $\| \cdot \|_{L^p(A)}$.

Glättungen

Def. Ein **Glättungskern** auf \mathbb{R}^n ist eine nicht-negative, radialsymmetrische Funktion $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta dx = 1$.

Def. Der **Standardglättungskern** ist die Funktion

$$\eta(x) := C \cdot \exp\left(-\frac{1}{|x|^2-1}\right) \cdot \mathbb{1}_{B_1(0)}(x)$$

mit Normierungskonstante C . Für $\epsilon > 0$ ist der dazugehörige skalierte Glättungskern gegeben durch

$$\eta_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \eta(x/\epsilon).$$

Alle Glättungskern-Eigenschaften bleiben bei Skalierung erhalten.

Notation. $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$. Für $f \in L^1_{\text{loc}}$ heißt die Funktion

$$f_\epsilon : \Omega_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \eta_\epsilon * f(x) := \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) f(y) dy \quad \textcolor{blue}{\text{e-Glättung}} \text{ von } f$$

Satz (Eigenschaften von Glättungen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$ und $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann gilt

- Regularität: $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ mit $D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha \eta_\epsilon) * f$ für beliebige Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- Ist $D_i f$ stetig auf Ω , so gilt $D_i(f_\epsilon) = (D_i f)_\epsilon$ auf Ω_ϵ .
- Falls $f \in C^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0, 1]$, so gilt $f_\epsilon \in C^\alpha(\Omega_\epsilon)$ mit derselben Hölderkonstante.
- Falls $f \in L^p(\Omega)$ für $p \in [0, \infty]$, so gilt $\|f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$.
- $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$ fast-überall in Ω .
- Falls $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, so konvergiert f_ϵ gleichmäßig gegen f für $\epsilon \rightarrow 0$ auf kompakten Teilmengen von Ω ,
- Falls $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$, so gilt $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.
- Abschätzung der Approximationsgüte: Ist $Du \in L^p(\Omega)$, so gilt

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \epsilon \cdot \|Df\|_{L^p(\Omega)}.$$

Hausdorff-Maß

Def. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $k \in [0, \infty)$, $\delta > 0$. Das **approximierende Maß** \mathcal{H}^k_δ von A ist definiert als

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty \omega_k r_i^k \mid A \subset \bigcup_{i=1}^\infty \overline{B_{r_i}(x_i)}, r_i < \delta \right\}$$

Bemerkung. $\mathcal{H}^k_\delta(A)$ ist monoton fallend in δ .

Def. Das **k-dimensionale Hausdorff-Maß** \mathcal{H}^k von A ist

$$\mathcal{H}^k(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}^k_\delta(A).$$

Proposition. • Für $\delta > 0$ ist \mathcal{H}^k_δ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

- \mathcal{H}^k ist ein Maß auf \mathbb{R}^n
- Bewegungsinvarianz: $\mathcal{H}^k(x + T(A)) = \mathcal{H}^k(A)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $T \in O(n)$.
- Ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig mit Konstante L_f , so gilt

$$\mathcal{H}^k(f(A)) \leq L_f^k \mathcal{H}^k(A).$$

- Skalierungsverhalten: $\mathcal{H}^k(\lambda A) = \lambda^k \mathcal{H}^k(A)$
- Spezialfälle: \mathcal{H}^0 ist ein Zählmaß, $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ und $\mathcal{H}^k \equiv 0$.

Lemma. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \leq k < k' < \infty$.

- Ist $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, so gilt $\mathcal{H}^{k'}(A) = 0$.
- Ist $\mathcal{H}^{k'}(A) > 0$, so gilt $\mathcal{H}^k(A) = \infty$.

Def. Die **Hausdorff-Dimension** von $A \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\dim_H(A) := \inf \{k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \mathcal{H}^k(A) = 0\}$$

$$= \sup \{k \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \mathcal{H}^k(A) = \infty\}.$$

Proposition. Für die Cantor-Menge $C \subset \mathbb{R}$ gilt $\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$.

2. Laplace- und Poisson-Gleichung

Def. Die **Laplace-** bzw. **Poisson-Gleichung** ist die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Man nennt u

- **harmonisch**, falls $\Delta u = 0$ in Ω gilt.
- **subharmonisch**, falls $\Delta u \geq 0$ in Ω gilt.
- **superharmonisch**, falls $\Delta u \leq 0$ in Ω gilt.

Bspe. • Affine Funktionen sind harmonisch.

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definiere $u(x) := x \cdot Ax$. Dann gilt $\Delta u = \text{spur} A$, also $\Delta u = 0 \iff \text{spur} A = 0$.
- Real- und Imaginärteil von holomorphen Fktn. sind harmonisch.

Def. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} -(2\pi)^{-1} \log|x|, & \text{wenn } n = 2 \\ (n(n-2)\omega_n)^{-1} |x|^{2-n}, & \text{wenn } n \geq 3 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung** der Laplacegleichung.

Bemerkung. • Φ ist radialsymmetrisch, d. h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\|x_1\| = \|x_2\|$ gilt $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$.
• $\Phi, |D\Phi| \in L^1(B_R(0))$ für alle $R > 0$ aber $|D^2\Phi| \notin L^1(B_1(0))$.
• Die Konstanten wurden so gewählt, dass gilt:

$$-\int_{\partial B_r(0)} D\Phi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} = 1 \quad \text{für alle } r > 0.$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_R(x_0) \subset \Omega$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Für

$$\phi : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad r \mapsto \int_{\partial B_r(x_0)} u d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = u(x_0)$
- $\phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{\partial B_r(x_0)} \Delta u(x) dx$

Korollar (Mittelwertseigenschaft). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_r(x_0) \Subset \Omega$ und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$0 = \Delta u \implies u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{und} \quad u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u d\mathcal{H}^{n-1}$$

In diesen Gleichungen darf man $=$ durch $\leq, <, \geq$ oder $>$ ersetzen.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:

- u ist harmonisch, d. h. es gilt $\Delta u = 0$ in Ω .
- u erfüllt die sphärische Mittelwertseigenschaft, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

- u erfüllt die Mittelwertseigenschaft auf Kugeln, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Bemerkung. Die Äquivalenz gilt auch unter den schwächeren Voraussetzungen $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ oder $u \in L^1(\Omega)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω , d. h. $\Delta u \geq 0$ in Ω . Dann gilt

- Das **schwache Maximumsprinzip**: $\max_\Omega u = \max_{\partial\Omega} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist Ω zusammenhängend und existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_\Omega u$, so ist u konstant.

Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ harmonisch. Dann gilt

$$\min_{\partial\Omega} u < \max_\Omega u \implies \min_{\partial\Omega} u < u < \max_\Omega u \text{ auf } \Omega.$$

Korollar (Eindeutigkeit). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dann ist $u = v$, falls gilt:

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v & \text{in } \Omega \\ u = v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Bemerkung (Stetige Abhängigkeit von Randwerten). Gilt lediglich $\Delta u = \Delta v$ in Ω , aber nicht $u = v$ auf $\partial\Omega$, so gilt immerhin

$$\max_{\Omega} |u - v| = \max_{\partial\Omega} |u - v|.$$

Satz (Harnack-Ungleichung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \Subset \Omega$ offen, zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega, V)$, sodass

$$\sup_V u \leq c \cdot \inf_V u \quad \text{für alle harmonischen Fktn. } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und erfülle $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Sphären, d. h.

$$u(x_0) = \oint_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Dann gilt $u(x) = u_\epsilon(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Insbesondere ist $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und harmonisch.

Korollar. Obiger Satz gilt auch, wenn $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Kugeln erfüllt, d. h.

$$u(x_0) = \oint_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Def. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf einem topologischen Raum X **konvergiert lokal gleichmäßig** gegen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x von x gibt, sodass f_n auf U_x gleichmäßig gegen f konvergiert.

Korollar (Konvergenzsatz von Weierstraß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiert. Dann ist u harmonisch auf Ω .

Korollar (Harnackscher Konvergenzsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf Ω . Gibt es ein $x_0 \in \Omega$, sodass $(u_k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt (und damit konvergent) ist, so konvergiert (u_k) lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion auf Ω .

Satz (von Hermann Weyl). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} u \cdot \Delta \phi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Dann gibt es eine harmonische Funktion $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = \tilde{u}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Satz (Innere Abschätzung für Ableitungen harmonischer Fktn). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gilt für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$ und jede Kugel $B_r(x_0) \Subset \Omega$:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq C(n, k) r^{-n-k} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \quad \text{mit } C(n, k) := \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\omega_n}.$$

Satz (Liouville). Sei $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch.

- Ist u beschränkt, so ist u konstant.
- Gilt $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|u(x)|}{|x|^{k+1}} = 0$, so ist u ein Polynom, dessen Grad $\leq k$ ist.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **analytisch** in $x \in \Omega$, falls f sich lokal durch ihre Taylorreihe darstellen lässt, also ein $r \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$ existiert mit

$$f(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) (y - x)^\alpha \quad \text{für alle } y \in B_r(x).$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Wenn u harmonisch ist, dann auch analytisch.

Problem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, (beschränkt), regulär und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gesucht ist $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(2.1) \begin{cases} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Satz (Greensche Darstellungsformel). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit \mathcal{C}^1 -Rand und $h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ mit $\Delta h \in L^1(\Omega)$. Es gilt für $x \in \Omega$:

$$\begin{aligned} h(x) &= - \int_{\Omega} \Phi(x-y) \Delta h(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \, dS(y) \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} h(y) D_y \Phi(x-y) \cdot \nu \, dS(y) \end{aligned}$$

Bemerkung. Für Randpunkte $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h(x) &= - \int_{\Omega} \Phi(x-y) \Delta h(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \, dS(y) \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} h(y) D_y \Phi(x-y) \cdot \nu \, dS(y) \end{aligned}$$

Korollar (Darstellungsformel für Lsgn in \mathbb{R}^n). Sei $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$, setze

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\Phi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, dy.$$

Dann gilt: $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n .

- Bemerkung.**
- Für $n = 2$ ist die Lösung potentiell unbeschränkt.
 - Für $n \geq 3$ ist diese Lsg beschränkt und erfüllt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$.

Proposition. Jede andere beschränkte Lösung von $-\Delta u = f$ auf \mathbb{R}^n unterscheidet sich nur durch eine additive Konstante.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine **Greensche Funktion** für Ω ist eine Funktion $G : \{(x, y) \in \Omega \times \Omega \mid x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \Omega$ gilt:

- Die **Korrektorfunktion** $y \mapsto G(x, y) - \Phi(x - y)$ ist von der Klasse $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ und ist harmonisch in Ω .
- Die Funktion $G(x, -)$ hat Nullrandwerte auf $\partial\Omega$, d. h. es gilt $\lim_{y \rightarrow y_0} G(x, y) = 0$ für alle $y_0 \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$.

Bemerkung.

- Ist Ω beschränkt, so ist die Greensche Funktion eindeutig.

- Die Funktion $G(x, -)$ ist in $\mathcal{C}^2(\Omega \setminus \{x\}) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega} \setminus \{x\})$ und hat die gleiche Singularität wie $y \mapsto \Phi(x - y)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, mit \mathcal{C}^1 -Rand $\partial\Omega$. Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ eine Lösung von (2.1) und ist G die Greensche Funktion für Ω (falls existent), dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) \, dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \cdot D_y G(x, y) \cdot \nu \, dS(y).$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, G die Greensche Funktion für Ω und $B_r(x) \Subset \Omega$. Für $f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ gilt dann:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon(x)} (G(x, y) Df(y) - f(y) D_y G(x, y)) \cdot \nu(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = f(x).$$

Satz. Ist G die Greensche Funktion zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit \mathcal{C}^1 -Rand $\partial\Omega$, so gilt $G(x, y) = G(y, x)$ für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$.

Korollar. Sei G die Greensche Funktion zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit \mathcal{C}^1 -Rand $\partial\Omega$, so ist die Funktion $x \mapsto G(x, y)$ harmonisch auf $\Omega \setminus \{y\}$.

Def. Sei $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a)$. Dann heißt

$$x^* := a + r^2 \frac{x - a}{\|x - a\|^2} \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a) \quad \textbf{Spiegelungspunkt} \text{ von } x.$$

Bemerkung. Es gilt: • $\|x - a\| \cdot \|x^* - a\| = r^2$ • $(x^*)^* = x$
• $\forall y \in \partial B_r(a) : \|x^* - y\|^2 = r^2 \|x - a\|^{-2} \|y - x\|^2$.

Notation. Für $B_r(a) \subset \mathbb{R}$ sei $g : B_r(a) \times B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x, y) := \begin{cases} -\Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y-x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ -\Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Proposition. Für die Funktion g gilt:

- $g(x, y) - \Phi(x - y) = 0$ für alle $y \in \partial B_r(a)$ und $x \in B_r(a)$.
- $y \mapsto g(x, y)$ ist glatt und harmonisch in $B_r(a)$ für alle $x \in B_r(a)$.

Korollar. Die Greensche Funktion für $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ lautet

$$\begin{aligned} G_{B_r(a)}(x, y) &:= \Phi(x - y) + g(x, y) \\ &= \begin{cases} \Phi(x - y) - \Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y-x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ \Phi(a - y) - \Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases} \end{aligned}$$

Def. Der **Poisson-Kern für die Kugel** $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$K_{B_r(a)}(x, y) := \frac{1}{n\omega_n} \cdot \frac{r^2 - |x-a|^2}{r|x-y|^n}.$$

Satz (Poisson-Integralformel für Kugeln). Sei $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ und $g : \partial B_r(a)$ stetig.

- Für $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}(\bar{B_r(a)})$ harmonisch mit $u=g$ auf $\partial B_r(a)$ gilt

$$u(x) = \int_{\partial B_r(a)} K_{B_r(a)}(x, y) g(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für alle } x \in B_r(a). \quad (2.8)$$

- Umgekehrt definiert (2.8) die eindeutige harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}^1(\bar{B_r(a)})$ mit $u = g$ auf $\partial B_r(a)$.

Notation. $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ heißt **Halbraum**.

Def. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt $\bar{x} := (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ **Spiegelpunkt** von x bzgl. $\partial\mathbb{R}_+^n$.

Satz. Die Greensche Funktion für \mathbb{R}_+^n lautet

$$G_{\mathbb{R}_+^n}(x, y) := \Phi(x - y) - \Phi(x^* - y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}_+^n \text{ mit } x \neq y.$$

Def. Der **Poisson-Kern für den Halbraum** \mathbb{R}_+^n ist definiert als

$$K_{\mathbb{R}_+^n}(x, y) := \frac{1}{n\omega_n} \cdot \frac{2x_n}{|x-y|^n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n \text{ und } y \in \partial\mathbb{R}_+^n.$$

Satz (Poisson-Integralformel für den Halbraum). Sei $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Dann definiert

$$u(x) := \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K_{\mathbb{R}_+^n}(x, y) g(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n$$

eine beschränkte, harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ mit $u = g$ auf $\partial\mathbb{R}_+^n$.

Notation. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibe

- $\Omega^+ := \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_n > 0\} = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$
- $\Omega^0 := \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_n = 0\} = \Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^n$
- $\Omega^- := \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \mid x_n < 0\} = \Omega \setminus \overline{\mathbb{R}_+^n}$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und symmetrisch bzgl. $\partial\mathbb{R}_+^n$, d. h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x \in \Omega \iff \bar{x} \in \Omega$.

- Ungerades Spiegelungsprinzip: Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^+) \cap \mathcal{C}(\Omega^+ \cup \Omega^0)$ harmonisch auf Ω^+ mit $u = 0$ auf Ω^0 , so ist die ungerade Fortsetzung

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega^+ \cup \Omega^0, \\ -u(\bar{x}) = -u(x_1, \dots, -x_n) & \text{für } x \in \Omega^- \end{cases}$$

harmonisch auf Ω .

- Gerades Spiegelungsprinzip: Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^+) \cap \mathcal{C}^1(\Omega^+ \cup \Omega^0)$ mit $D_n u = 0$ auf Ω^0 , so ist die gerade Fortsetzung

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega^+ \cup \Omega^0, \\ u(\bar{x}) = u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{für } x \in \Omega^- \end{cases}$$

harmonisch auf Ω .

Bemerkung. Aus dem Spiegelungsprinzip und dem Satz von Liouville folgt die Eindeutigkeit beschränkter harmonischer Funktionen auf dem Halbraum mit vorgegebenen Randwerten.

Problem (Dirichlet-RWP). Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ gesucht mit

$$(2.9) \begin{cases} \Delta u &= 0 & \text{in } \Omega, \\ u &= g & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ heißt **\mathcal{C}^0 -subharmonisch**, falls die MW-Ungleichung auf Sphären erfüllt ist, d. h.

$$u(x_0) \leq \int_{\partial B_r(x_0)} u d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle } x_0 \in \Omega \text{ und } r \in (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)).$$

Die Funktion heißt **\mathcal{C}^0 -superharmonisch**, falls $-u$ \mathcal{C}^0 -subharmonisch ist und **\mathcal{C}^0 -harmonisch**, falls u sowohl subharmonisch als auch harmonisch ist.

Notation. $H^-(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \mid u \text{ ist subharmonisch auf } \Omega\}$
 $H^+(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \mid u \text{ ist superharmonisch auf } \Omega\}$
 $H^0(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \mid u \text{ ist harmonisch auf } \Omega\}$

Bemerkung. \mathcal{C}^0 -harmonische Funktionen sind glatt und harmonisch.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ sind äquivalent:

- u ist \mathcal{C}^0 -subharmonisch auf Ω .
- u erfüllt die MW-Ungleichung auf Kugeln, d. h. für alle $x_0 \in \Omega$ gilt

$$u(x_0) \leq \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \quad \text{für alle } r \in (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega)).$$

- u erfüllt die MW-Ungleichung auf kleinen Kugeln, d. h. für alle $x_0 \in \Omega$ gibt es ein $R(x_0) \in (0, \text{dist}(x_0, \partial\Omega))$ mit

$$u(x_0) \leq \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \quad \text{für alle } r \in (0, R(x_0)).$$

- Für alle Kugeln $B_r(x_0) \Subset \Omega$ gilt das Vergleichsprinzip mit harmonischen Funktionen, d. h. für jede harmonische Funktion $h \in \mathcal{C}(\overline{B_r(x_0)})$ gilt: $u \leq h$ auf $\partial B_r(x_0) \implies u \leq h$ in $B_r(x_0)$.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $B_r(x_0) \Subset \Omega$. Der **Perron-Projektor** $P_{x_0, r} : \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}(\Omega)$ ist definiert durch

$$(P_{x_0, r} u)(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \setminus B_r(x_0) \\ \int_{\partial B_r(x_0)} K_{B_r(x_0)}(x, y) u(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y), & x \in B_r(x_0). \end{cases}$$

Bemerkung. Die Funktion $P_{x_0, r}(u)$ wird **harmonische Fortsetzung** von u auf $B_r(x_0)$ genannt.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:

- Sind $v \in H^-(\Omega)$ und $w \in H^+(\Omega)$, so gilt $v - w \in H^-(\Omega)$.
- Sind $v_1, v_2 \in H^-(\Omega)$, $w_1, w_2 \in H^+(\Omega)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, so ist

$$\begin{aligned} \{\max(v_1, v_2), \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\} &\subset H^-(\Omega), \\ \{\min(w_1, w_2), \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\} &\subset H^+(\Omega). \end{aligned}$$

- Sind $v \in H^-(\Omega)$, $w \in H^+(\Omega)$ und $B_r(x_0) \Subset \Omega$, so gelten

$$\begin{aligned} P_{x_0, r} v &\geq v \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad P_{x_0, r} v \in H^-(\Omega), \\ P_{x_0, r} w &\leq w \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad P_{x_0, r} w \in H^+(\Omega). \end{aligned}$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann heißt $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ **Sublösung** des Dirichletproblems (2.9), falls $u \leq g$ auf $\partial\Omega$ gilt und **Superlösung** von (2.9), falls $u \geq g$ auf $\partial\Omega$ gilt.

Notation. $H_g^-(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^-(\Omega) \mid u \leq g \text{ auf } \partial\Omega\}$,
 $H_g^+(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^+(\Omega) \mid u \geq g \text{ auf } \partial\Omega\}$,
 $u^-(x) := \sup\{v(x) \mid v \in H_g^-(\Omega)\}$,
 $u^+(x) := \sup\{v(x) \mid v \in H_g^+(\Omega)\}.$

Methode (Perron). Zeige zunächst, dass u^- und u^+ harmonisch sind. Zeige dann unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an Ω , dass $u^- = u^+$ gilt und die vorgegebenen Randwerte annimmt.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann sind u^- und u^+ wohldefiniert und es gilt

$$\inf_{\partial\Omega} g \leq u^- \leq u^+ \leq \sup_{\partial\Omega} g.$$

Bemerkung. Falls eine Lösung u des Dirichlet-Problems existiert, so gilt $u = u^- = u^+$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann sind u^- und u^+ harmonisch in Ω .

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $x_0 \in \partial\Omega$. Eine Funktion $b : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt (obere) **Barriere** zu Ω in x_0 , falls

- $b \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^+(\Omega)$
- $b(x_0) = 0$ und $b(x) > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$

Falls eine solche Barriere existiert, so heißt x_0 **regulärer Randpunkt**.

Bemerkung. Eine Funktion $b : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_0^-$ heißt untere Barriere, falls $(-b) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine obere Barriere ist.

Def. Eine **lokale Barriere** zu Ω in $x_0 \in \partial\Omega$ ist eine Barriere $\tilde{b} : B_r(x_0) \cap \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ zu $B_r(x_0) \cap \Omega$ in x_0 .

Bemerkung. Aus jeder lokalen Barriere lässt sich eine globale Barriere konstruieren.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Falls das Dirichlet-Problem (2.9) für jede Funktion $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ besitzt, so sind alle Randpunkte $x_0 \in \partial\Omega$ regulär.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $x_0 \in \partial\Omega$. Ist x_0 regulär, dann gilt für jede stetige Funktion $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$:

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} u^-(x) = g(x_0) = \lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} u^+(x).$$

Satz (Perron). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann sind äquivalent:

- Der Rand $\partial\Omega$ ist regulär.
- Das Dirichlet-Problem (2.9) besitzt eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ für alle $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Def. Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt die **äußere Kugelbedingung** in $x_0 \in \partial\Omega$ an Ω , falls ein Ball $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ mit $\overline{\Omega} \cap \overline{B_r(a)} = \{x_0\}$ existiert.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Erfüllt Ω die äußere Kugelbedingung in $x_0 \in \partial\Omega$ an Ω , dann ist x_0 ein regulärer Randpunkt.

Bemerkung. Beschränkte Gebiete mit \mathcal{C}^2 -Rand und strikt konvexe Gebiete erfüllen die äußere Kugelbedingung.

Problem. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht ist eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ der Poisson-Gleichung

$$(2.10) \begin{cases} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Proposition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und $\partial\Omega$ regulär. Sind $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in C(\partial\Omega)$, so besitzt (2.10) eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Bemerkung. Die Behauptung folgt leicht aus den vorherigen Sätzen, aber die Voraussetzung $f \in C_0^2(\Omega)$ ist zu stark.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Das **Newton-Potential** $N_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ einer Funktion $f \in L^\infty(\Omega)$ ist die Faltung

$$N_f(x) := \int_{\Omega} \Phi(x-y)f(y) \, dy.$$

Bemerkung. Die Fktn f wird außerhalb von Ω durch 0 fortgesetzt.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $f \in L^\infty(\Omega)$. Dann gilt $N_f \in C^1(\Omega)$ mit $DN_f(x) = \int_{\Omega} D_x \Phi(x-y)f(y) \, dy$ für alle $x \in \Omega$.

Korollar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $f \in L^\infty(\Omega)$. Dann gilt $N_f \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ für alle $\alpha \in (0, 1)$.

Satz (Hölder). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschr. und $f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für ein bel. $\alpha \in (0, 1)$. Dann gilt $N_f \in C^2(\Omega)$ mit $-\Delta N_f = f$ in Ω und für jede Kugel B mit $\Omega \Subset B$ gilt die Darstellung

$$D_i D_j N_f(x) = \int_B D_{x_i} D_{x_j} \Phi(x-y)(f(y) - f(x)) \, dy \\ - f(x) \cdot \int_{\partial B} D_{x_j} \Phi(x-y) \nu_i(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial\Omega$ regulär. Sind $f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0, 1)$ und $g \in C(\partial\Omega)$, so besitzt (2.10) eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Bemerkung. Für das Newtonpotential überträgt sich die Regularität von f wie folgt: Ist $\alpha \in (0, 1)$ und $f \in C^{k,\alpha}(\bar{B}_{2R})$, so ist $N_f \in C^{k+2,\alpha}(\bar{B}_R)$ für alle $R > 0$. Im Allgemeinen gilt:

$$f \in L^\infty \not\Rightarrow N_f \in C^2, \quad f \in C^k \not\Rightarrow N_f \in C^{k+2}, \quad f \in C^{k,1} \not\Rightarrow N_f \in C^{k+2,1}$$

Problem. Gesucht sind Lösungen des Eigenwertproblems mit Dirichlet-Randwert 0 für den Laplaceoperator, also Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenfunktionen $u_\lambda \in C^2(\Omega)$ mit

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda &= \lambda u_\lambda & \text{in } \Omega \\ u_\lambda &= 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Bemerkungen. • Es sind nur nichtnegative EWe möglich.

- Es gibt höchstens abzählbar viele EWe.
- Die zugehörigen Eigenräume sind endlich-dimensional.
- Eigenfunktionen zu unterschiedlichen EWe sind orthogonal bzgl.

$$\langle u, v \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} u \cdot v \, dx.$$

- Eigenfunktionen sind glatt.

3. Wärmeleitungsgleichung

Notation. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wir suchen $u : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$ und schreiben $u_t := \frac{\partial u}{\partial t}$ für die Zeitableitung, $Du(t, x) := D_x u(t, x)$ für die Ortsableitung und $\Delta u(t, x) := \Delta_x u(t, x)$.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $T > 0$.

- Der **parabolische Zylinder** ist $\Omega_T := (0, T] \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
- Der **parabolische Rand** von Ω_T ist

$$\partial_p \Omega_T := (\{0\} \times \Omega) \cup ([0, T] \times \partial\Omega) \subset \partial\Omega_T.$$

Notation. Wir benötigen untersch. Regularitäten in Ort und Zeit:

$$C_1^2(\Omega_T) := \{f \in C^1(\Omega_T) \mid f \text{ ist zweimal stetig nach } x \text{ ableitbar}\}$$

Problem. Wärmeleitungsgleichung (WLG): $u_t - \Delta u = 0$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T > 0$ und $u \in C_1^2(\Omega_T)$. Dann heißt u

$$\left. \begin{array}{l} \text{subkalarisch} \\ \text{kalarisch} \\ \text{superkalarisch} \end{array} \right\} \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u \leq 0 \\ u_t - \Delta u = 0 \\ u_t - \Delta u \geq 0 \end{array} \right\} \text{ in } \Omega_T \text{ gilt.}$$

Bemerkung (Invarianzen der Lösungseigenschaft). Wenn $u \in C_t^2(\Omega_T)$ kalarisch, dann auch (auf geeigneten Zylindern):

$$\begin{aligned} u_{0,x_0}(t, x) &:= u(t, x - x_0) && \text{für } x_0 \in \mathbb{R}^n \\ u_{\mathcal{T},0}(t, x) &:= u(t - \mathcal{T}, x) && \text{für } \mathcal{T} \in \mathbb{R} \\ u_R(t, x) &:= u(t, Rx) && \text{für } R \in SO(n) \\ u_\lambda(t, x) &:= \lambda^n u(\lambda^2 t, \lambda x) && \text{für } \lambda > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Es gilt } \int_{\mathbb{R}^n} u_\lambda(t, y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(\lambda^2 t, y) \, dy.$$

Bspe. • Sei v harmonisch auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $(t, x) \mapsto v(x)$ kalarisch auf Ω_T .

- Für $n = 1$ und $c_1, c_2, a \in \mathbb{R}$ sind kalarisch:

$$\begin{aligned} (t, x) &\mapsto \exp(a^2 t) \cdot (c_1 \sinh(ax) + c_2 \cosh(ax)) \\ (t, x) &\mapsto \exp(-a^2 t) \cdot (c_1 \sin(ax) + c_2 \cos(ax)) \\ (t, x) &\mapsto c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Def. Die **Fundamentallösung der WLG** ist die Funktion

$$\Psi : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Bemerkungen. • $\Psi_t(t, x) - \Delta_x \Psi(t, x) = 0$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

- $\Psi(t, 0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$, • $\Psi(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ bei $x \neq 0$ fest.

- Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t, x) \, dx = 1$.

- Raum- und Zeitableitungen lassen sich explizit berechnen.

- $\|\Psi(t, -)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$,

- $\|D\Psi(t, -)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\Psi_t(t, -)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$,

- $\Psi(t, -) * \Psi(s, -) = \Psi(t+s, -)$

Bemerkung. Für die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung gilt:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n : B_1(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(x_0 - x) > \Phi(re_1)\}$$

Def. Die **Wärmeleitungskugel** um $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $r > 0$ ist

$$W_r(t_0, x_0) := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t < t_0 \text{ und } \Psi(t_0 - t, x_0 - x) > r^{-n}\} \\ \subseteq (-\infty, t_0) \times \mathbb{R}^n$$

Notation. $W_r := W_r(0, 0)$

Notation. Für $r > 0$ setze

$$b_r : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto \frac{|x|^2}{4t} + n \log r - \frac{n}{2} \log(-4\pi t).$$

Bemerkungen. • Monotonie: Für $r \leq \tilde{r}$ gilt $W_r(x_0) \subseteq W_{\tilde{r}}(x_0)$

- Translationsinvarianz: $W_r(t_0, x_0) = (t_0, x_0) + W_r(0, 0)$
- Parabolische Reskalierung: $(t, x) \in W_r \iff (r^{-2}t, r^{-1}x) \in W_1$
- Explizite Darstellung: Für $r > 0$ gilt

$$\begin{aligned} W_r(0, 0) &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \mid b_r(t, x) > 0\} \\ \partial W_r(0, 0) &= \{(0, 0)\} \cup \{(t, x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \mid b_r(t, x) = 0\} \\ W_r(0, 0) &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \mid -\frac{r^2}{4\pi} < t < 0 \text{ und} \\ &\quad |x|^2 < 4t(-n \log r + \frac{n}{2} \log(-4\pi t))\} \end{aligned}$$

- Es gilt $\int_{W_r} \frac{|x|^2}{t^2} \, d(t, x) = 4r^n$

Lemma. Sei $R > 0$ und $u \in C_1^2(W_R)$. Für

$$\phi : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad r \mapsto \frac{1}{4r^n} \int_{W_r} u(t, x) \frac{|x|^2}{t^2} \, d(t, x) \quad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = u(0, 0)$
- $\phi'(r) = \frac{n}{r^{n+1}} \int_{W_r} (-u_t(t, x) + \Delta u(t, x)) \cdot b_r(t, x) \, d(t, x)$

Satz (MWE). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T > 0$, $u \in C_1^2(\Omega_T)$ und $W_r(t_0, x_0) \Subset \Omega_T$. Dann gilt:

$$u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \Omega_T$$

$$\implies u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r^n} \int_{W_r(t_0, x_0)} u(t, x) \cdot \frac{|x - x_0|^2}{(t - t_0)^2} \, d(t, x)$$

In diesen Gleichungen darf man = durch \leq , $<$, \geq oder $>$ ersetzen.

Korollar. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $T > 0$ und $u \in C_1^2(\Omega_T)$ sind äquivalent:

- u ist kalarisch
- u erfüllt die MWE auf WL-Kugeln, d. h. f. a. $W_r(t_0, x_0) \Subset \Omega_T$ gilt

$$u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r^n} \int_{W_r(t_0, x_0)} u(t, x) \cdot \frac{|x - x_0|^2}{(t - t_0)^2} \, d(t, x)$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, $T > 0$ und $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ subkalarisch. Dann gilt:

- Das **schwache Maximumsprinzip**: $\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\partial_p \Omega_T} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist Ω zshgd und gibt es $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ mit $u(t_0, x_0) = \max_{\overline{\Omega_T}} u$, so ist u konstant auf Ω_{t_0} .

Bemerkung. Es gelten auch entsprechende Minimumsprinzipien für superkalorische Funktionen.

Bemerkung („unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit“).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend, $T > 0$ und $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_T})$ eine kalorische Funktion, die auf $[0, T] \times \partial\Omega$ verschwindet. Dann gilt

$$\min_{\{0\} \times \partial\Omega} u < \max_{\{0\} \times \partial\Omega} u \implies \min_{\partial\{0\} \times \Omega} u < u < \max_{\{0\} \times \partial\Omega} u \text{ in } \Omega_T.$$

Korollar (Eindeutigkeit). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $T > 0$, $u, v \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_T})$ mit

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v_t - \Delta v & \text{in } \Omega_T \\ u = v & \text{auf } \partial_p \Omega_T \end{cases}$$

Dann gilt $u \equiv v$ in Ω_T .

Proposition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit regulären Randpunkten und $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ für ein $\alpha \in (0, 1)$ und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann gilt für jede Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega \times (0, \infty)) \cap \mathcal{C}(\Omega \times [0, \infty))$ von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } (0, \infty) \times \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial_p \Omega_T \end{cases}$$

mit beliebigen Anfangswerten auf $\{0\} \times \Omega$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, -) = v,$$

wobei $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ die eindeutige Lösung der folgender Poisson-Gleichung ist:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Satz. Sei $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, \infty]$. Dann ist die Funktion $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t, x) := (\Psi(t, -) * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t, x - y) \cdot g(y) \, dy$$

in $\mathcal{C}^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllt

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u &= g & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Satz. Für die Funktion u aus dem vorherigen Satz gilt:

- Ist $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so konvergiert

$$u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow 0, x \rightarrow x_0} g(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Mengen.

- Ist $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in [1, \infty]$, so ist $\|u(t, -)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ für alle $t > 0$. Ist $p < \infty$, so gilt

$$\|u(t, -) - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Proposition. Es gilt außerdem

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, dx \quad \text{für alle } t > 0.$$

Satz. Sei $f \in \mathcal{C}_1^2([0, \infty] \times \mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(f) \Subset [0, \infty] \times \mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t, x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t - s, x - y) \cdot f(s, y) \, dy \, ds$$

in $\mathcal{C}_1^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllt die inhomogene WL

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u &= 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Satz (Allgemeine Lösungsformel). Sei $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{C}_1^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(f) \Subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t, x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t, x - y) \cdot g(y) \, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(t - s, x - y) \cdot f(s, y) \, dy \, ds$$

in $\mathcal{C}_1^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und erfüllt

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u &= g & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

4. Die Wellengleichung

Notation. $u_{tt} := \partial_t^2 u$

Problem. Seien $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Gesucht ist eine Lösung der homogenen **Wellengleichung** (WG)

$$(4.1) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Satz. Seien $b \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{g} \in \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$. Dann besitzt das AWP für die Transportgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u + b \cdot Du &= \tilde{f} & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u &= \tilde{g} & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^1((0, \infty) \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, die gegeben ist durch

$$u(t, x) := \tilde{g}(x - tb) + \int_0^t \tilde{f}(s, x + (s - t)b) \, ds.$$

Satz. Seien $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ und

$$u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (t, x) \mapsto \frac{1}{2} (g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(s) \, ds.$$

Dann ist $u \in \mathcal{C}^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ die eindt. Lsg von (4.1) auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Bemerkung. • Es gibt keinen Regularisierungseffekt, d. h. im Allgemeinen ist u nur in \mathcal{C}^2 , nicht besser.

- „Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit“: Ist $\text{supp}(g) \cup \text{supp}(f) \subset [x_0 - r, x_0 + r]$ für $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, so gilt $\text{supp}(u, -) \subset [x_0 - (t + r), x_0 + t + r]$.

Korollar. Seien $g \in \mathcal{C}^2([0, \infty))$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} g''(x) = g(0) = 0$ und $h \in \mathcal{C}([0, \infty))$ mit $h(0) = 0$. Dann ist die Funktion $u : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$u(t, x) := \begin{cases} \frac{1}{2} (g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(s) \, ds & \text{für } x \geq t \geq 0, \\ \frac{1}{2} (g(x + t) - g(t - x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(s) \, ds & \text{für } t \geq x \geq 0 \end{cases}$$

die \mathcal{C}^2 -Lösung des AWP der homogenen Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \{0\} \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } (0, \infty) \times \{0\}. \end{cases}$$

Notation. Für $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiere

$$U_x(t, r) := \int_{\partial B_r(x)} u(t, y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

$$G_x(r) := \int_{\partial B_r(x)} g(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad H_x(r) := \int_{\partial B_r(x)} h(y) \, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

Lemma (Euler-Lagrange-Darboux-Gleichung).

Sei $u \in \mathcal{C}^m([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ mit $m \geq 2$ eine Lsg von (4.1). Dann gilt $U_x \in \mathcal{C}^m([0, \infty) \times [0, \infty))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und U_x erfüllt das AWP

$$\begin{cases} \partial_t^2 U_x - \partial_r^2 U_x - \frac{n-1}{r} \partial_r U_x = 0 & \text{in } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ U_x = G_x, \partial_t U_x = H_x & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$