

# Kurzfassung Riemannsche Geometrie

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Def.** Eine **topologische Mannigfaltigkeit** (Mft) ist ein topologischer Raum  $M^m$  mit folgenden Eigenschaften:

- $M^m$  ist **hausdorffsch**, d. h.

$$\forall x, y \in M^m : x \neq y \implies \exists U_x \subseteq M^m : \exists U_y \subseteq M^m : \\ x \in U_x \wedge y \in U_y \wedge U_x \cap U_y = \emptyset.$$

- $M^m$  erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, d. h. es gibt eine abzählbare Menge  $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{T}$ , sodass

$$\forall A \subseteq M^m : \exists K \subset \mathbb{N} : A = \bigcup_{k \in K} U_k.$$

- $M^m$  ist **lokal euklidisch**, d. h. für alle  $x \in M^m$  gibt es eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  und einen Homöomorphismus  $\phi : U_x \rightarrow \mathcal{O}$  mit  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$  offen.

*Bemerkung.* lokal euklidisch  $\nRightarrow$  hausdorffsch

**Prop.** Sei  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$M \text{ zusammenhängend} \iff M \text{ wegzusammenhängend.}$$

**Def.** • Sei  $M$  eine  $m$ -dim. topol. Mft. Ein **Atlas** ist eine Menge  $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j : U_j \rightarrow \mathcal{O}_j) \mid j \in J\}$  mit  $U_j \subseteq M$  und  $\mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^n$  offen und Homöomorphismen  $\phi_j$ , für die gilt  $\bigcup_{j \in J} U_j = M$ .

- Die Paare  $(U_j, \phi_j)$  werden **Karten** genannt.
- Für je zwei Karten  $(U_j, \phi_j)$  und  $(U_k, \phi_k)$  gibt es eine **Kartenwechselabbildung**

$$\phi_{kj} := \phi_k \circ \phi_j^{-1} \big|_{\phi_j(U_j \cap U_k)} : \phi_j(U_j \cap U_k) \rightarrow \phi_k(U_j \cap U_k).$$

- Ein Atlas heißt **differenzierbar**, wenn alle Kartenwechselabbildungen  $\mathcal{C}^\infty$ -Abbildungen sind.
- Ein Atlas  $\mathcal{A}$  heißt **differenzierbare Struktur** von  $M$ , wenn gilt: Ist  $(\tilde{U}, \tilde{\phi}_j)$  eine Karte von  $M$  und  $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \{(\tilde{U}, \tilde{\phi}_j)\}$  ein differenzierbarer Atlas, dann gilt  $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}$ .
- Eine topol. Mft versehen mit einer differenzierbaren Struktur heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

**Notation.** Seien ab jetzt  $M^m$  und  $N^n$  differenzierbare Mften der Dimensionen  $m$  und  $n$

**Def.** • Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt in  $x \in M$  **differenzierbar**, wenn es eine Karte  $(U_x, \phi : U_x \rightarrow \mathcal{O}) \in \mathcal{A}_M$  und eine Karte  $(\tilde{U}_{f(x)}, \tilde{\phi} : \tilde{U}_{f(x)} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}) \in \mathcal{A}_N$  gibt, sodass

$$\tilde{\phi} \circ f|_{U_x} \circ \phi^{-1} : \mathcal{O} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}} \quad \text{differenzierbar } (\mathcal{C}^\infty) \text{ ist.}$$

- Die Abbildung  $f$  heißt **differenzierbar**, falls sie in jedem Punkt  $x \in M$  differenzierbar ist.

**Notation.**  $\mathcal{C}^\infty(M, N) := \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$

*Bemerkung.* Die Definition ist unabhängig von Wahl der Karten um  $x$  und  $f(x)$ .

**Def.** Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt **Diffeomorphismus**, wenn  $f$  ein Homöo ist und  $f$  und  $f^{-1}$  differenzierbar sind.

**Def.** Sei  $p \in M$ . Zwei Funktionen  $f : U_p \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : V_p \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U_p, V_p \subseteq M$  heißen äquivalent, falls es eine offene Umgebung  $W \subset U_p \cap V_p$  mit  $f|_W = g|_W$  gibt. Die Äquivalenzklasse  $[f]$  bezüglich der so definierten Äq'relation heißt **Funktionskeim** in  $p$ .

**Notation.**  $\mathcal{C}^\infty(M, p) := \{[f] \mid [f] \text{ Funktionskeim in } p\}$

*Bemerkung.* Die Menge der Funktionskeime ist eine  $\mathbb{R}$ -Algebra.

**Def.** Eine lineare Abb.  $\delta : \mathcal{C}^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Derivation**, falls

$$\forall [f], [g] \in \mathcal{C}^\infty(M, p) : \delta[f \cdot g] = \delta[f] \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta[g].$$

**Def.** Der gewöhnliche Tangentialraum des  $\mathbb{R}^n$  im Punkt  $p$  ist

$$\tilde{T}_p \mathbb{R}^n := \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

mit  $(p, v) + (p, w) := (p, v + w)$  und  $\lambda \cdot (p, v) := (p, \lambda \cdot v)$ .

**Def.** Der **Tangentialraum** von  $M$  im Punkt  $p \in M$  ist

$$T_p M := \{\partial : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial \text{ linear, derivativ}\}$$

Ein Element  $v \in T_p M$  heißt **Tangentialvektor** an  $M$  in  $p$ .

*Bemerkung.* Wir erhalten eine Abbildung

$$T_p M \times \mathcal{C}^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, [f]) \mapsto v.f := v[f].$$

*Bemerkung.*  $T_p M$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

**Satz.** Die Vektorräume  $T_p \mathbb{R}^n$  und  $\tilde{T}_p \mathbb{R}^n$  sind isomorph. Insbesondere gilt  $\dim(T_p \mathbb{R}^n) = n$ .

**Korollar.** Für eine  $m$ -dimensionale diff'bare Mft  $M$  gilt:  $\dim(T_p M) = m$ .

*Bemerkung.* Sei  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve. Dann kann man  $\dot{c}(0)$  auffassen als Tangentialvektor an  $M$  in  $c(0)$  mittels

$$\dot{c}(0)[f] := \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (f \circ c).$$

*Bemerkung.* Sei  $(U, \phi)$  eine Karte von  $M$ . Wir setzen

$$\frac{\partial^\phi}{\partial x_i} \big|_p [f] := (\phi^{-1} \circ \alpha_i)'(0)[f] = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} (f \circ \phi^{-1} \circ \alpha_i) \\ \text{mit } \alpha_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U, \quad t \mapsto \phi(p) + t e_i.$$

Wir erhalten  $\frac{\partial^\phi}{\partial x_i} \big|_p \in T_p M$ .

**Def.** Sei  $f : M \rightarrow N$  diff'bar. Die **Ableitung** von  $f$  in  $p \in M$  ist die Abbildung

$$T_p f = f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, \quad v \mapsto f_{*p} v \\ \text{wobei } f_{*p}(v).[g] := v.[g \circ f].$$

**Lemma.** Sei  $M$  eine diff'bare Mft,  $p \in M$ . Dann gilt

- $f_{*p}$  ist linear
- $(\text{id}_M)_{*p} = \text{id}_{T_p M}$
- Kettenregel: Seien  $N, P$  diff'bare Mften. Dann gilt  $\forall p \in M : (f \circ g)_{*p} = f_{*g(p)} \circ g_{*p}$ .

**Korollar.** Wenn  $f : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus ist, dann ist  $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  ein VR-Isomorphismus für alle  $p \in M$ .

**Satz.** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mft,  $p \in M$  und  $(U, \phi)$  eine Karte.

- Es gilt  $T_p M = \{\dot{c}(0) \mid c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ diff'bar}, c(0) = p\}$
- $\{\frac{\partial^\phi}{\partial x^i} \big|_p \mid i = 1, \dots, n\}$  ist eine Basis von  $T_p M$ .

**Def.**  $TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$  heißt **Tangentialbündel** von  $M$ . Die

**Fußpunktabbildung** ist die Projektion

$$\pi : TM \rightarrow M, v \in T_p M \mapsto p.$$

**Def.** Ein **Vektorfeld** auf  $M$  ist eine Abbildung  $X : M \rightarrow TM$ , sodass  $\pi \circ X = \text{id}_M$ . Dies ist äquivalent zu  $\forall p \in M : X(p) \in T_p(M)$ .

*Bemerkung.* Sei  $X : M \rightarrow TM$  ein Vektorfeld,  $(U, \phi)$  eine Karte.

Dann gibt es Funktionen  $\xi^j : U \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$  mit

$$X(p) = \sum_{j=1}^n \xi^j(p) \frac{\partial^\phi}{\partial x^j} \big|_p \quad \text{für alle } p \in M.$$

- Def.** • Ein Vektorfeld  $X$  auf  $M$  heißt in  $p \in M$  **diff'bar** ( $\mathcal{C}^\infty$ ), wenn es eine Karte  $(U, \phi)$  um  $p$  gibt, sodass die Funktionen  $\xi_1, \dots, \xi^m$  diff'bar ( $\mathcal{C}^\infty$ ) sind.
- $X$  heißt **differenzierbar**, wenn  $X$  in allen  $p \in M$  diff'bar ist.

**Lemma.** Wenn die Koordinatenfunktionen  $\xi^1, \dots, \xi^n$  für eine bestimmte Karte  $(U, \phi : U \rightarrow \mathcal{O})$  differenzierbar sind, dann sind sie es für jede andere Karte  $(\tilde{U}, \psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}})$  mit  $\tilde{U} \subseteq U$ .

**Def.** Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale diff'bare Mft mit diff'barer Struktur  $\mathcal{A} = \{(U_j, \phi_j) \mid j \in J\}$ . Dann ist  $TM$  eine  $2m$ -dimensionale Mft mit Atlas  $\tilde{\mathcal{A}} := \{(\tilde{U}_j := \pi^{-1}(U_j), \tilde{\phi}_j) \mid j \in J\}$ , wobei

$$\tilde{\phi}_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow \phi_j(U_j) \times \mathbb{R}^m, \quad \sum_{k=1}^m \xi^k(p) \frac{\partial^{\phi_j}}{\partial x^k} \big|_p \mapsto (\phi_j(p), \xi^1(p), \dots, \xi^n(p)).$$

Eine Menge  $V \subseteq TM$  heißt offen, wenn  $\tilde{\phi}_j(V \cap \pi^{-1}(U_j)) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  offen ist für alle  $j \in J$ .

**Notation.**  $\chi(M) := \{\text{diff'bare Vektorfelder auf } M\}$

*Bemerkung.*  $\chi(M)$  ist ein  $\mathbb{R}$ -VR und ein  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul.

**Lemma.** Jedes  $X \in \chi(M)$  induziert eine Abbildung

$$X : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \quad \phi \mapsto X(\phi) := p \mapsto X(p).[ \phi ].$$

Die Abbildung  $X$  ist linear und derivativ.

**Lemma.** Seien  $X, Y \in \chi(M)$  mit  $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) : X(f) = Y(f)$ . Dann gilt  $X = Y$ .

**Lemma.** Seien  $X, Y \in \chi(M)$ . Dann definiert

$$Z : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M), \quad f \mapsto X(Y(f)) - Y(X(f))$$

ein Vektorfeld auf  $M$ .

**Def.** Dieses Vektorfeld  $[X, Y] := Z$  wird als **Kommutator** oder **Lie-Klammer** von  $X$  und  $Y$  bezeichnet.

**Def.** Sei  $X \in \chi(M)$ . Eine diff'bare Kurve  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  heißt **Integralekurve** von  $X$ , falls

$$\forall t \in (-\epsilon, \epsilon) : \dot{c}(t) = X_{c(t)}.$$

**Lemma.** Sei  $X \in \chi(M)$ ,  $p \in M$  und  $v \in T_p M$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{c}(t) = X_{c(t)}, \quad c(0) = p$$

eine eindeutige lokale Lösung  $c = c_p^X : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ .

**Def.** Die Abbildung  $\Phi_X : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ ,  $(p, t) \mapsto c_p^X(t)$  heißt **Fluss** von  $X$ .

**Def.** Ein Vektorraum  $V$  mit einer bilinearen Abbildung  $[-, -] : V \times V \rightarrow V$ ,  $(v, w) \mapsto [v, w]$  heißt **Lie-Algebra**, falls

- die Abb. antisymmetrisch ist, d. h.  $\forall v, w \in V : [v, w] = -[w, v]$
- die **Jacobi-Identität** erfüllt ist, d. h.

$$\forall v, w, z \in V : [v, [w, z]] + [z, [v, w]] + [w, [z, v]] = 0.$$

**Bspe.** •  $(\chi(M), [-, -])$  ist eine Lie-Algebra.

- $\mathbb{R}^{n \times n}$  ist eine Lie-Algebra mit  $[A, B] := AB - BA$ .

**Def.** Eine Gruppe  $G$ , welche ebenfalls eine diff'bare Mft ist, heißt **Lie-Gruppe**, wenn gilt:

- $\mu : G \times G \rightarrow G$ ,  $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$  ist diff'bar.
- $\iota : G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$  ist diff'bar.

**Bsp.** Die allgemeine lineare Gruppe  $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n} \approx \mathbb{R}^{(n^2)}$  ist eine Lie-Gruppe. Die Differenzierbarkeit der Inversion folgt aus der Cramerschen Regel.

**Def.** Sei  $G$  eine Lie-Gruppe und  $g \in G$ . Dann sind

$$lg : G \rightarrow G, \quad x \mapsto g \cdot x = \mu(g, x)$$

$$rg : G \rightarrow G, \quad x \mapsto x \cdot g = \mu(x, g)$$

Diffeomorphismen mit Umkehrabbildung  $l(g^{-1})$  bzw.  $r(g^{-1})$ .

**Bsp.** Abgeschlossene Untergruppen von  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  sind Lie-Gruppen, z. B.

- $\text{GL}(n, \mathbb{C}) \subset \text{GL}(2n, \mathbb{R})$
- $O_n \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$
- $U_n \subset \text{GL}(2n, \mathbb{R})$

**Def.** Sei  $f : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus und  $X \in \chi(M)$ . Dann ist

$$f_* X : N \rightarrow TN, \quad x \mapsto f_{*f^{-1}(x)} X(f^{-1}(x))$$

**Def.** Ein Vektorfeld  $X \in \chi(G)$  heißt **linksinvariant**, wenn gilt:

$$\forall g, h \in G : X(g \cdot h) = lg_* X(h).$$

Kürzer:  $\forall g \in G : lg_* X = X$ .

**Notation.**  $\mathcal{L}(G) := \{X \in \chi(G) \mid X \text{ ist linksinvariant}\} \subset \chi(G)$

*Bemerkung.* Ein linksinvariantes VF  $X \in \chi(G)$  ist eindeutig bestimmt durch  $X(e)$ . Andererseits: Ist  $x \in T_e G$ , dann gibt es ein linksinvariantes VF  $X \in \chi(G)$  mit  $X(e) = x$ . Somit ist die Abbildung

$$i : \mathcal{L}(G) \rightarrow T_e G, \quad X \mapsto X(e)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus.

**Lemma.** Seien  $X, Y \in \mathcal{L}(G)$ . Dann ist  $[X, Y] \in \mathcal{L}(G)$ .

**Korollar.**  $(\mathcal{L}(G), [-, -])$  ist eine  $\dim(G)$ -dimensionale Unter-Lie-Algebra von  $(\chi(G), [-, -])$ .

**Notation.**  $OJ := T_e G \cong \mathcal{L}(G)$

**Def.** Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum  $V$  ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Die davon induzierte Norm ist  $\|v\| := \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ .

**Def.** Eine **Riemannsche Metrik** auf einer diff. Mft  $M$  ist eine Familie  $g = (g_p)_{p \in M}$  von Skalarprodukten  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , die differenzierbar von  $p$  abhängt, d. h. für alle  $X, Y \in \chi(M)$  ist  $g(X, Y) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$  differenzierbar ( $\mathcal{C}^\infty$ ). Das Tupel  $(M, g)$  heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

*Bemerkung.* Sei  $(U, \phi)$  eine Karte von  $M$ . Setze

$$g_{ij}^\phi : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto g(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} |_p, \frac{\partial \phi}{\partial x^j} |_p).$$

Seien  $X = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$  und  $Y = \sum_{j=1}^n w^j \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$  zwei VF in  $U$ . Dann gilt

$$g(X, Y)(p) = g_p(X(p), Y(p)) = \sum_{i,j=1}^n v^i(p) w^j(p) g_{ij}(p).$$

**Def.** Seien  $(M, g_M), (N, g_N)$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt Isometrie, wenn gilt:

- $f$  ist ein Diffeomorphismus
- $f$  erhält Riemannsche Metriken, d. h. für alle  $X, Y \in \chi(M)$  gilt:

$$g_M(X, Y) = g_N(f_* X, f_* Y) \circ f,$$

$$\text{also } \forall p \in M : \forall v, w \in T_p M : g_{M,p}(v, w) = g_{N,f(p)}(f_* v, f_* w).$$

**Def.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$I(M, g) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ Isometrie}\}$$

in kanonischer Weise eine Lie-Gruppe (Myers-Steenrod).

**Satz.** Jede diff'bare Mannigfaltigkeit hat eine Riemannsche Metrik.

**Bsp.** Das Oberer-Halbraum-Modell des hyperbolischen Raum ist

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, e_n \rangle_{\text{eukl}} > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

mit dem offensichtlichen Atlas und der Riemannschen Metrik

$$g_p^{\text{Hyp}}((p, \tilde{v}), (p, \tilde{w})) := \frac{\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle_{\text{eukl}}}{\langle p, e_n \rangle^2}.$$

**Def.** Eine diffbare Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zwischen diff'baren Mften heißt **Immersion**, falls  $f_* p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  für alle  $p \in M$  injektiv ist.

**Def.** Angenommen,  $N$  ist sogar eine Riemannsche Mft mit Metrik  $g_N$ . Dann erhalten wir eine Riemannsche Metrik auf  $M$ , die mit  $f$  **zurückgeholte Metrik**, durch

$$(f^* g_N)_p(v, w) := g_{N,f(p)}(f_* v, f_* w).$$

**Def.** Eine Immersion  $f : (M, g^M) \rightarrow (N, g^N)$  heißt **isometrisch**, falls  $g^M = f^* g^N$ .

**Prop.** Sei  $M$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für alle Punkte  $p, q \in M$  einen stückweise differenzierbaren Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(1) = q$ .

**Def.** Für  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  stückweise  $\mathcal{C}^1$  heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \quad \text{Länge von } \gamma.$$

**Def.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mft. Dann ist der **Riemannsche Abstand** gegeben durch die Metrik

$$d_g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto \inf \{ L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ stückweise } \mathcal{C}^1 \text{ mit } \gamma(a) = p \text{ und } \gamma(b) = q \}.$$

*Bemerkung.* Nach dem Satz von Hopf-Rinow stimmt die von  $d_g$  induzierte Topologie mit der von  $M$  überein.

**Def.** Ein **Zusammenhang** (kov. Ableitung) ist eine Abb.

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

sodass für  $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$  und  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  gilt:

- $\nabla_{X_1 + f X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + f \nabla_{X_2} Y$
- $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- $\nabla_X (fY) = f(\nabla_X Y) + (X(f)) \cdot Y$  (Leibniz-Regel)

**Def.** Sei  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $M$ . Dann heißt

$$T^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad \text{torsion von } \nabla.$$

Wenn  $T^\nabla = 0$ , dann heißt  $\nabla$  **torsionsfrei**.

**Def.** Ein Zusammenhang  $\nabla$  auf einer riemannschen Mft.  $(M, g)$  heißt **metrisch**, wenn gilt:

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y, Z)$$

**Theorem.** Auf jeder Riem. Mft.  $(M, g)$  gibt es genau einen torsionsfreien, metrischen Zusammenhang. Für diesen gilt:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X)$$

**Def.** Der eindeutige torsionsfreie und metrische Zusammenhang auf  $(M, g)$  heißt **Levi-Civita-Zusammenhang** auf  $(M, g)$ .

*Bemerkung.* Sei  $(M, g)$  eine riemannsche Mft.,  $(U, \phi)$  eine Karte von  $M$ . Dann gibt es diff'bare Funktionen  $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ , sodass gilt

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \phi}{\partial x^k}.$$

Die Funktionen  $\Gamma_{ij}^k$  heißen **Christoffel-Symbole** von  $\nabla$ .

**Lemma.**  $\left[ \frac{\partial \phi}{\partial x^j}, \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \right] = 0$

**Satz.** Für die Christoffel-Symbole gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^j} g_{il} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} g_{jl} - \frac{\partial \phi}{\partial x^l} g_{ij} \right),$$

wobei

$$g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto g_p \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(p), \frac{\partial \phi}{\partial x^j}(p) \right)$$

$$g^{kl} : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ definiert ist durch } \sum_{r=1}^n g^{jr} g_{rk} = \delta_k^j.$$

**Def.** Sei  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $M$ . Dann heißt  $X \in \chi(M)$  parallel, falls

$$\nabla X : \chi(M) \rightarrow \chi(M), \quad Y \mapsto \nabla_Y X$$

gleich Null ist.

**Def.** Ein **Tensorfeld** vom Typ  $(j, k)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  und  $j \in \{0, 1\}$  ist eine Abbildung

$$T : \chi(M) \times \dots \times \chi(M) \rightarrow \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(M), & \text{falls } j = 0, \\ \chi(M), & \text{falls } j = 1, \end{cases}$$

die in jedem Argument linear ist.

**Bspe.** •  $T^\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  ist Tensor vom Typ  $(1, 2)$ .

- $\nabla Y : \chi(M) \rightarrow \chi(M), \quad X \mapsto \nabla_X Y$  ist Tensor vom Typ  $(1, 1)$ .
- Alternierende  $k$ -Formen auf  $\mathbb{R}^n$  sind Tensoren vom Typ  $(0, k)$ .
- Riemannsche Metriken sind Tensorfelder vom Typ  $(0, 2)$ .

**Satz.** Sei  $T$  ein Tensorfeld auf  $M$  vom Typ  $(j, k)$ . Sei  $p \in M$ . Seien  $X_1, \dots, X_k \in \chi(M)$ . Dann hängt  $T(X_1, \dots, X_k)(p)$  nur von  $X_1(p), \dots, X_k(p)$  ab.

*Bemerkung.* Sei  $(U, \phi)$  eine Karte von  $M$  und  $T$  ein Tensorfeld vom Typ  $(1, k)$  auf  $M$ . Dann gibt es Funktionen  $T_{i_1, \dots, i_k}^l$ , sodass

$$T \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x^{i_k}} \right) = \sum_{l=1}^n T_{i_1, \dots, i_k}^l \frac{\partial \phi}{\partial x^l}.$$

**Notation.**  $\nabla_v Y := (\nabla_X Y)(p)$  für  $v \in T_p M$  und  $X$  ein VF mit  $X_p = v$  (wohldefiniert).

**Satz.** Sei  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $M$ . Sei  $p \in M, v \in T_p M$  und  $Y, \tilde{Y} \in \chi(M)$ . Falls für eine diff'bare Kurve  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  gilt

$$c(0) = p, \quad \dot{c}(0) = v \quad \text{und} \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) : Y(c(t)) = \tilde{Y}(c(t)),$$

dann gilt  $\nabla_v Y = \nabla_v \tilde{Y}$ .

**Def.** Ein **VF längs einer Kurve**  $c : I \rightarrow M$  ist eine Abbildung

$$X : I \rightarrow TM \quad \text{mit} \quad X(t) = X_t \in T_{c(t)} M,$$

welche diff'bar ist, d. h. für alle  $t_0 \in I$  existiert eine Karte  $(U, \phi)$  um  $c(t_0)$ , sodass man schreiben kann

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi^i(t) \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Big|_{c(t)} \quad \text{für alle } t \in c^{-1}(U)$$

mit diff'baren Funktionen  $\xi^i : c^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Bemerkung.*  $X_t$  muss nicht Einschränkung eines VF auf  $M$  sein.

**Notation.**  $\chi_c := \{ \text{Vektorfelder längs } c \}$

*Bemerkung.*  $\chi_c$  ist ein Modul über  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ .

**Satz.** Sei  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $M$ , sei  $c : I \rightarrow M$  eine diff'bare Kurve. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\frac{\nabla}{dt} = \frac{D}{dt} = \frac{D^\nabla}{dt} : \chi_c \rightarrow \chi_c,$$

sodass für  $X, \tilde{X} \in \chi_c, Y \in \chi(M)$  und  $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$  gilt:

- $\frac{D}{dt}(X + \tilde{X}) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}\tilde{X},$
- $\frac{D}{dt}(f \cdot X) = f \cdot \frac{D}{dt}X + f'X,$
- $\frac{D(Y \circ c)}{dt} = \nabla_{\dot{c}} Y.$

**Def.** Die Abbildung  $\frac{D}{dt}$  heißt von  $\nabla$  **induzierte kovariante Ableitung längs c**.

**Satz.** Sei  $(M, g)$  eine Riem. Mft,  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang und  $c : I \rightarrow M$  diff'bar. Dann gilt

$$\forall X, Y \in \chi_c : g(X, Y)' = g\left(\frac{DX}{dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{DY}{dt}\right).$$

**Def.** Sei  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $M$ . Dann heißt  $X \in \chi_c$  **parallel (längs c)**, wenn  $\frac{DX}{dt} = 0$ .

*Bemerkung.* Sei  $(U, \phi)$  eine Karte,  $\tilde{I} \subset I$  mit  $c(\tilde{I}) \subset U$ . In lokalen Koordinaten lässt sich Parallelität ausdrücken durch

$$(\xi^k)' + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(t) \xi^j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n \text{ und alle } t \in \tilde{I}.$$

Für die Funktionen  $\xi^k$  ist das ein System linearer DGL mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}' = A(t) \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$$

Dieses System ist linear beschränkt, es folgt daher die Existenz von parallelen Vektorfeldern in Kartenumgebungen.

**Satz.** Sei  $t_0 \in I = (a, b)$  und  $v \in T_{c(t_0)} M$  vorgegeben. Dann gibt es genau ein VF  $X \in \chi_X$  mit

$$\frac{DX}{dt} \equiv 0 \quad \text{und} \quad X(t_0) = v.$$

**Def.** Sei  $[a, b] \rightarrow M$  diff'bar. Die Abbildung

$$P_c : T_{c(a)} M \rightarrow T_{c(b)} M, \quad v \mapsto X^v(b), \quad \text{wobei } \frac{DX^v}{dt} \equiv 0 \text{ und } X^v(a) = v,$$

heißt **Parallelverschiebung** längs  $c$  bzgl.  $\nabla$ .

**Satz.**  $P_c$  ist linear.

**Satz.** Ist  $(M, g)$  Riem. Mft und  $\nabla$  der LC-Zshg, dann gilt

$$g_{c(b)}(P_c(v), P_c(w)) = g_{c(a)}(v, w).$$

Mit anderen Worten:  $P_c$  ist eine lineare Isometrie.

*Bemerkung.* Wir können nun die Definition der Ableitung als Limes des Differenzenquotienten auf Mannigfaltigkeiten übertragen: Sei  $v \in T_x M, X \in \chi(M)$  und  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = x$  und  $\dot{c}(0) = v$ . Dann ist

$$\nabla_v X = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{c(t)}^{-1}(X(c(t))) - X(c(0))}{t}$$

*Bemerkung.* Parallelverschiebung ist auch möglich und sinnvoll entlang stückweise glatter Kurven.

**Def.** Die **Holonomiegruppe** von  $M$  in  $x \in M$  bzgl.  $\nabla$  ist

$$\text{Hol}_x^\nabla := \{ P_c : T_x M \rightarrow T_x M \mid c \text{ stückweise glatt mit } c(0) = c(1) = x. \}$$

Dabei ist  $P_c \circ P_{\tilde{c}} = P_{c \circ \tilde{c}}$  und  $(P_c)^{-1} = P_{c^{-1}}$ .

*Bemerkung.*  $\text{Hol}_x^\nabla$  ist sogar eine Lie-Gruppe und eine Untergruppe von  $O(T_x M, g_x)$ .

**Def.** Eine glatte Kurve  $c : I \rightarrow M$  heißt **Geodäte** bzgl.  $\nabla$ , falls

$$\frac{D^\nabla \dot{c}}{dt} \equiv 0, \quad \text{d. h. das Tangential-VF } \dot{c} \text{ ist parallel längs } c.$$

*Bemerkung.* Sei  $(U, \phi)$  eine Karte,  $\tilde{I} \subset I$  mit  $c(\tilde{I}) \subset U$ . In lokalen Koordinaten lässt sich diese Bedingung ausdrücken durch die **Geodätengleichung**

$$(\ddot{c}^k)'(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n \text{ und alle } t \in \tilde{I}.$$

**Satz.** Zu jedem  $p \in M$  und  $v \in T_p M$  gibt es ein  $\epsilon > 0$  und genau eine Geodäte  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$  und  $\dot{c}(0) = v$ .

**Satz.** Seien  $c_{1,2} : I_{1,2} \rightarrow M$  zwei Geodäten bzgl.  $\nabla$  mit  $0 \in I_1 \cap I_2$ . Falls  $c_1(0) = c_2(0)$  und  $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$ , dann gilt  $c_1|_{I_1 \cap I_2} \equiv c_2|_{I_1 \cap I_2}$ .

**Satz.** Gegeben  $p \in M$  und  $v \in T_p M$ , dann gibt es genau ein Intervall  $I_v \ni \mathbb{R}$  mit  $0 \in I_v$  und eine Geodäte

$$c_v : I_v \rightarrow M \quad \text{mit} \quad c(0) = p, \quad \dot{c}_v(0) = v,$$

die maximal im folgenden Sinn ist: Für jede Geodäte  $c : I \rightarrow M$  mit  $\dot{c}(0) = v$  gilt:  $I \subseteq I_v$  und  $c = c_v|_I$ .

**Notation.** Für  $v \in T_p M$  sei  $c_v : I_v \rightarrow M$  die zugehörige maximale Geodäte.

**Def.** Ein Zusammenhang  $\nabla$  auf  $M$  heißt **vollständig**, wenn  $I_v = \mathbb{R}$  für alle  $v \in TM$ .

**Lemma** (Spray-Eigenschaft). Ist  $v \in T_p M$ ,  $c_v : I_v \rightarrow M$  die maximale Geodäte mit  $\dot{c}_v(0) = v$ . Sei  $\lambda \neq 0$ , dann ist

$$c_{\lambda v} : I_{\lambda v} \rightarrow M, \quad t \mapsto c_v(\lambda t) \quad \text{wobei} \quad I_{\lambda v} := \frac{1}{\lambda} I_v$$

die maximale Geodäte mit  $c_{\dot{\lambda} v}(0) = \lambda v$ .

**Def.** Sei  $M$  eine Mft mit Zshg  $\nabla$  und  $p \in M$ . Dann heißt

$$\text{Exp}_p : \widetilde{T_p M} \rightarrow M, \quad v \mapsto c_v(1), \quad \widetilde{T_p M} := \{v \in T_p M \mid 1 \in I_v\}$$

**Exponentialabbildung** von  $\nabla$  in  $p$ .

**Lemma.** •  $\widetilde{T_p M}$  ist sternförmig bzgl. 0

- $\forall v \in \widetilde{T_p M} : \forall t \in [0, 1] : \text{Exp}_p(tv) = c_v(t)$

**Satz.** • Es gibt eine offene Umgebung  $\hat{U} \subseteq T_p M$  mit  $0 \in \hat{U} \subseteq \widetilde{T_p M}$ , sodass  $\text{Exp}_p|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Abbildung ist.

- Wir können  $\hat{U}$  so wählen, dass  $\text{Exp}_p|_{\hat{U}} : \hat{U} \rightarrow \text{Exp}_p(\hat{U})$  ein Diffeomorphismus ist.

*Bemerkung.* Man kann zeigen:

- $\widetilde{T_p M} \subseteq T_p M$
- $\text{Exp}_p : \widetilde{T_p M} \rightarrow M$  ist überall  $C^\infty$ , aber nicht überall ein lokaler Diffeomorphismus (Schnittpunkt-Phänomen)
- Ist  $(M, \nabla)$  geodätisch vollständig, dann gilt  $\widetilde{T_p M} = T_p M$ .

**Def.** Eine Kurve  $c : I \rightarrow M$  heißt **nach / proportional zur BL parametrisiert**, wenn gilt:

$$\|\dot{c}(t)\| \equiv 1 \quad / \quad \|\dot{c}(t)\| \equiv \text{konst.}$$

*Bemerkung.* • Jede Geodäte ist proportional zur BL parametrisiert.

- Eine Kurve ist genau dann prop. zur BL parametrisiert, wenn es  $\alpha \geq 0$  gibt mit  $L(c|_{[a,b]}) = \alpha \cdot (b - a)$ .

**Def.** Eine **Variation** von  $c : [a, b] \rightarrow M$  ist eine  $C^\infty$ -Abbildung

$$(-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M, \quad (s, t) \mapsto \alpha(s, t) \quad \text{mit} \quad \forall t \in [a, b] : \alpha(0, t) = c(t).$$

Sie heißt **Variation mit festen Endpunkten**, wenn zudem gilt:

$$\forall s \in (-\epsilon, \epsilon) : \alpha(s, a) = c(a) \wedge \alpha(s, b) = c(b)$$

**Sprechweise.**  $s$  heißt **Variationsparameter**

**Def.** Eine Variation einer stückweise glatten Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  (mit  $c$  glatt auf den Teilintervallen  $[t_{i-1}, t_i]$ ) ist eine stetige Abb.

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M, \quad (s, t) \mapsto \alpha_s(t) \quad \text{mit} \quad \alpha|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_{i-1}, t_i]} \text{ ist } C^\infty.$$

**Notation.** •  $\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s_0, t_0)$  ist der Tang.-Vektor an  $s \mapsto \alpha(s, t_0)$  in  $s_0$ .

- $\frac{\partial \alpha}{\partial t}(s_0, t_0)$  ist der Tangentialvektor an  $s \mapsto \alpha(s, t)$  in  $t_0$ .

**Def.** Eine Abbildung  $X : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$  mit  $X(s, t) \in T_{\alpha(s, t)} M$  heißt **Vektorfeld längs  $\alpha$** , wenn  $X$  differenzierbar (bzw. stückweise diff'bar) ist.

**Notation.** Sei  $X$  ein VF längs  $\alpha(s, t)$ . Dann

$$\frac{D X}{\partial s}(s_0, t_0) := \frac{D}{ds} \Big|_{s=s_0} (s \mapsto X(s, t_0))$$

$$\frac{D X}{\partial t}(s_0, t_0) := \frac{D}{dt} \Big|_{t=t_0} (s \mapsto X(s, t))$$

**Lemma.**  $\frac{D}{\partial s} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s}$

**Satz (1. Variationsformel).** Sei  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Variation von einer  $C^\infty$ -Kurve  $c = \alpha_0 : [a, b] \rightarrow M$ . Sei  $\|\dot{c}(t)\| = \text{konst} \neq 0$ . Dann gilt mit  $X(t) := \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0, t)$

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\alpha_s) = \frac{1}{\|\dot{c}\|} \left( g(X, \dot{c}) \Big|_a^b - \int_a^b g(X(\tau), \frac{D \dot{c}}{dt}) d\tau \right)$$

**Sprechweise.**  $X(t) := \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0, t)$  heißt **Variationsvektorfeld**

**Satz** (1. Variationsformel für stückweise glattes  $c$ ). Sei  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  eine stückweise glatte Variation, glatt auf  $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$  mit  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ . Dann ist

$$\frac{d \alpha_s}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{1}{\|\dot{c}\|} \left( g(X, \dot{c}) \Big|_a^b + \sum_{i=1}^{k-1} g(X(t_i), \nabla_i \dot{c}) - \int_a^b g(X, \frac{D \dot{c}}{dt}) dt \right)$$

mit  $\nabla_i \dot{c} = \dot{c}(t_i^-) - \dot{c}(t_i^+)$

**Notation.**  $\dot{c}(t_i^+) = \lim_{t \downarrow t_i} \dot{c}(t)$ ,  $\dot{c}(t_i^-) = \lim_{t \uparrow t_i} \dot{c}(t)$

**Satz.** Zu jedem (stückweise) glatten  $X \in \chi_c$  gibt es eine (stückweise) glatte Variation  $\alpha$  von  $c$  mit  $X = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0, t)$ . Wenn  $X(a) = X(b) = 0$ , so kann man  $\alpha$  als Variation mit festen Endpunkten wählen.

**Satz.** Für eine stückweise glatte Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  mit  $\|\dot{c}\| = \text{konst}$  sind äquivalent:

- $c$  ist eine Geodäte
- $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\alpha_s) = 0$  für jede stückweise glatte Variation  $\alpha$  von  $c$  mit festen Endpunkten.

**Korollar.** Sei  $c : [a, b] \rightarrow M$  stückweise glatt und kürzeste stückweise Verbindung ihrer Endpunkte (d. h. für alle  $\tilde{c} : [a, b] \rightarrow M$  stückweise glatt mit  $c(a) = \tilde{c}(a)$  und  $c(b) = \tilde{c}(b)$  ist  $L(c) \leq L(\tilde{c})$ ). Dann ist  $c$  eine glatte Geodäte.

**Achtung.** Geodäten sind nicht global kürzeste Verbindungen, die Umkehrung gilt also nicht!

**Notation.**  $\Omega_{p,q} := \{c : [0, 1] \rightarrow M \mid c(0)=p, c(1)=q, c \text{ stückw. glatt}\}$

*Bemerkung.* Geodäten sind „kritische Punkte“ von  $L : \Omega_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$  unter der Nebenbedingung  $\|\dot{c}\| = \text{konst}$ . Ersetzt man das Längenfunktional durch die Energie, so ist diese NB unnötig.

**Notation.**  $S_\rho(0) = \{x \in T_p M \mid \|x\| = \rho\}$

**Satz** (Gaußlemma). Sei  $(M, g)$  eine zshgde Riem. Mft,  $\nabla = \nabla^{LC}$ . Sei  $p \in M$  und  $\epsilon > 0$ , sodass

$$\text{Exp}_p|_{B_\epsilon(0)} : B_\epsilon(0) \rightarrow \text{Exp}_p(B_\epsilon(0))$$

ein Diffeo ist. Dann schneiden die radialen Geodäten

$$t \mapsto \text{Exp}_p(tv) = v_v(t), \quad v \in T_p M \setminus \{0\},$$

die Hyperflächen  $\text{Exp}_p(S_\rho(0))$ ,  $\rho \in (0, \epsilon)$  orthogonal.

**Satz.** Seien  $p \in M$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $\rho \in [0, \epsilon)$  wie oben. Dann ist

$$c_v|_{[0, \delta]} : [0, \delta] \rightarrow M, \quad t \mapsto c_v(t) = \text{Exp}_p(tv) \quad (v \in T_p M, \|v\| = 1)$$

die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte, genauer: Es gilt  $\delta = L(c_v|_{[0, \delta]}) \leq L(\gamma)$  für jedes  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  stückweise glatt mit  $\gamma(a) = p$ ,  $\gamma(b) = c_v(\delta)$ . Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\gamma(t) = c_v(r(t))$  mit  $r : [a, b] \rightarrow [0, \delta]$  monoton wachsend.