

# Zusammenfassung Informatik III

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Abkürzung.** WC/BC/AC steht für Worst/Average/Best Case.

**Algorithmus** (Insertion Sort). BC:  $O(n)$ ; AC, WC:  $O(n^2)$

**Notation.**  $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ . Für  $f \in \mathcal{F}$  ist

$$\begin{aligned} O(f) &:= \{g \in \mathcal{F} \mid \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\} \\ \Omega(f) &:= \{g \in \mathcal{F} \mid \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n)\} \\ o(f) &:= \{g \in \mathcal{F} \mid \forall c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)\} \\ \omega(f) &:= \{g \in \mathcal{F} \mid \forall c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c \cdot f(n)\} \\ \Theta(f) &:= \{g \in \mathcal{F} \mid \exists c_1, c_2 > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \\ &\quad c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)\} = O(f) \cap \Omega(f) \end{aligned}$$

**Satz.** Seien  $0 < \alpha < \beta$ ,  $0 < a < b$  und  $1 < A < B$ . Betrachte

- $f_1(n) := \log \log n$
- $f_2(n) := (\log n)^\alpha$
- $f_3(n) := (\log n)^\beta$
- $f_4(n) := n^a$
- $f_5(n) := n^\alpha (\log n)^\alpha$
- $f_6(n) := n^b (\log n)^\alpha$
- $f_7(n) := n^b$
- $f_8(n) := n^a$
- $f_9(n) := A^n \cdot n^a$
- $f_{10}(n) := A^n \cdot n^b$
- $f_{11}(n) := B^n$

Es gilt:  $f_i \in o(f_{i+1})$  für  $i = 1, \dots, 10$ .

**Def** (RAM). Die Random Access Access Machine besitzt eine unendlich lange Liste von aufsteigend nummerierten Speicherzellen  $R[0], R[1], \dots$ , die jeweils eine ganze Zahl beinhalten und einen Programmzähler. Sie kann mittels der folgenden Sprache programmiert werden:

$\langle \text{Zieladresse} \rangle ::= \langle \text{Adresse} \rangle \mid R[\langle \text{Adresse} \rangle]$

$\langle \text{Operand} \rangle ::= \langle \text{Literal} \rangle \mid R[\langle \text{Adresse} \rangle]$

$\langle \text{Befehl} \rangle ::= \langle \text{Zieladresse} \rangle \text{ ‘:=’ } \langle \text{Operand} \rangle \odot \langle \text{Operand} \rangle$   
| ‘if’  $\langle \text{Operand} \rangle \bowtie \langle \text{Operand} \rangle$  ‘goto’  $\langle \text{Label} \rangle$

$\langle \text{Programm} \rangle ::= \langle \text{Befehl} \rangle \text{ ‘;’ } \langle \text{Programm} \rangle \mid \text{‘End’}$

wobei  $\odot \in \{+, -, *, \div\}$  und  $\bowtie \in \{<, \leq, =, \geq, >, \neq\}$ . Diese einfache Grammatik lässt sich auch für unbedingte Sprünge nutzen (mittels Bedingung  $0 = 0$ ). Ein Sprung über das Ende des Programms hinaus lässt das Programm anhalten. Per Konvention steht die Größe der Eingabe in der Speicherzelle  $R[1]$ , während die tatsächliche Eingabe in  $R[2], \dots, R[R[1] + 1]$  abgelegt wird.

**Def.** Ein **Graph** ist ein Tupel  $(V, E)$ , wobei  $V$  eine endliche Mengen von **Knoten** und  $E \subset V \times V$  die Menge der **Kanten** ist.

**Def.** Eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ist eine Borel-messbare Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Def.** Der Erwartungswert einer Zufallsvariable  $X$  auf einem (diskreten) Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ist

$$\mathbb{E} := \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \cdot X(\omega).$$

*Bem.* Es gilt für  $|x| < 1$ :  $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

**Algorithmus.** Zwei sortierte Folgen der Gesamtlänge  $n$  können in  $O(n)$  Zeit gemischt werden.

**Algorithmus** (Mergesort). BC, AC, WC:  $O(n \log n)$

**Satz** (Master-Theorem). Seien  $a, b, c, k, N$  reelle Zahlen mit  $a, c > 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $b, N \in \mathbb{N}$  und  $b \geq 2$  und sei  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine Funktion, die folgende Rekursionsungleichung erfüllt:

$$T(n) \leq \begin{cases} c, & \text{für } n \leq N \\ cn^k + aT(\lceil n/b \rceil), & \text{für } n > N \end{cases}$$

Sei ferner  $\lambda := \log_b a$ . Dann gilt

$$T(n) = \begin{cases} O(n^k), & \text{falls } \lambda < k \\ O(n^k \log n), & \text{falls } \lambda = k \\ O(n^\lambda), & \text{falls } \lambda > k. \end{cases}$$

**Satz.** Seien  $a, b, c, k, N$  reelle Zahlen mit  $a, c > 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $b, N \in \mathbb{N}$  und  $b \geq 2$  und sei  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine Funktion, die folgende Rekursionsungleichung erfüllt:

$$T(n) \geq \begin{cases} c, & \text{für } n \leq N \\ cn^k + aT(\lceil n/b \rceil), & \text{für } n > N \end{cases}$$

Sei ferner  $\lambda := \log_b a$ . Dann gilt

$$T(n) = \begin{cases} \Omega(n^k), & \text{falls } \lambda < k \\ \Omega(n^k \log n), & \text{falls } \lambda = k \\ \Omega(n^\lambda), & \text{falls } \lambda > k. \end{cases}$$

**Satz** (Karatsuba und Ofman). Zwei  $n$ -stellige Zahlen können in  $O(n^{\log_2 3})$  Zeit multipliziert werden.

**Def.** Für  $\beta \in [\frac{1}{2}, 1)$  ist ein  $\beta$ -Splitter eine Funktion, die aus einer List von  $n$  Schlüsseln einen Schlüssel auswählt, sodass höchstens je  $\beta n$  Schlüssel der Liste größer bzw. kleiner sind.

**Satz** (Selektion). Gegeben seien eine Menge  $X$  von  $n$  Elementen aus einem total geordneten Universum und eine ganze Zahl  $k$  mit  $1 \leq k \leq n$ . Dann können wir (deterministisch) in  $O(n)$  Zeit das  $k$ -kleinste Element aus  $X$  bestimmen.

**Algorithmus** (Quicksort). BC, AC:  $O(n \log n)$ , WC:  $O(n^2)$

**Algorithmus** (Heapsort). Inplace, BC/AC/WC:  $O(n \log n)$

**Satz.** Jeder deterministische vergleichsbasierte Sortieralgorithmus hat im RAM-Modell eine Worst-Case-Laufzeit von  $O(n \log n)$ . Wenn alle Permutation mit gleicher Wkt. auftreten, gilt dies auch für die mittlere Laufzeit.

**Satz.** Jeder randomisierte vergleichsbasierte Sortieralgorithmus hat im RAM-Modell eine erwartete Laufzeit von  $\Omega(n \log n)$  auf WC-Eingaben der Länge  $n$ .

**Satz** (Sortieren durch Zählen).  $n$  ganze Zahlen im Bereich  $\{0, \dots, m-1\}$  können in Zeit  $O(n+m)$  sortiert werden.

**Satz** (Radix-Sort).  $n$  ganze Zahlen im Bereich  $\{0, \dots, 10^k - 1\}$  können in Zeit  $O(nk)$  sortiert werden.

**Satz.**  $n$  Strings mit insgesamt  $N$  Zeichen aus dem Alphabet  $\{0, \dots, m-1\}$  können in  $O(n+m+N)$  Zeit sortiert werden.

**Satz** (0-1-Prinzip). Sortiert ein Vergleichsnetzwerk für  $n$  Schlüssel alle 0-1-Tupel der Länge  $n$  korrekt, dann sortiert es alle Tupel der Länge  $n$  korrekt, ist also ein Sortiernetzwerk.

**Satz.** Für jede Zweierpotenz  $n$  gibt es ein Sortiernetzwerk für  $n$  Schlüssel mit Tiefe  $\log_2 n(1 + \log_2 n)/2$ .

	BinHeap	FibHeap
insert	$O(\log n)$	$O(1)$
delete	$O(\log n)$	$O(\log n)$
find_min	$O(1)$	$O(1)$
decrease_key	$O(\log n)$	$O(1)$

**Satz.** Der Grad jedes Knoten in einem Fibonacci-Heap mit  $n$  Knoten ist  $O(\log n)$

**Satz** (amortisierte Kosten des Fibonacci-Heaps). Eine Folge von  $r$  insert-, find\_min- und decrease\_key- und  $n \leq r$  delete-Operationen auf einem am Anfang leeren Fibonacci-Heap können in  $O(r + n \log r)$  Zeit ausgeführt werden.

**Satz.** AVL-Bäume unterstützen alle Operationen einer Prioritätswarteschlange und eines Wörterbuchs in Zeit  $O(\log n)$ , wobei  $n$  die Anzahl der gespeicherten Tupel ist.

**Satz.** Seien  $a$  und  $b$  ganzzahlige Konstanten mit  $a \geq 2$  und  $b \geq 2a - 1$ . Dann unterstützen  $(a, b)$ -Bäume alle Operationen einer Prioritätswarteschlange und eines Wörterbuchs in Zeit  $O(\log n)$ , wobei  $n$  die Anzahl der gespeicherten Tupel ist.

**Def.** Der Belegungsfaktor einer Hashtabelle ist  $\alpha := n/s$ , wobei  $n$  die Anzahl der Schlüssel und  $s$  die Größe der Hashtabelle ist.

**Satz.** Eine Wörterbuchoperation auf einer Hashtabelle mit Belegungsfaktor  $\alpha$  kann unter den Annahmen (A) und (B) in mittlerer Zeit  $O(t + \alpha)$  ausgeführt werden, wobei  $t$  die Auswertungszeit der Hashfunktion ist.

**Def.** Sei  $s \in \mathbb{N}$ ,  $U$  eine Menge und  $\mathcal{H}$  eine endliche Klasse von Funktionen von  $U$  nach  $\{0, \dots, s-1\}$ . Die Klasse  $\mathcal{H}$  heißt  $c$ -universell, wobei  $c > 0$ , falls

$$|\{h \in \mathcal{H} \mid h(x) = h(y)\}| \quad \text{für alle } x, y \in U \text{ mit } x \neq y.$$

**Satz.** Eine Wörterbuchoperation auf einer Hashtabelle mit Belegungsfaktor  $\alpha$  kann in erwarteter Zeit  $O(t + \alpha)$  ausgeführt werden, wobei  $t$  die Auswertungszeit der Hashfunktion ist, wenn die Hashfunktion zufällig aus einer universellen Klasse  $\mathcal{H}$  von Hashfunktionen gewählt wird.

**Lemma.** Sei  $s \in \mathbb{N}$  und  $p$  eine Primzahl. Für  $a \in \{1, \dots, p-1\}$  sei  $h_a : \{0, \dots, p-1\} \rightarrow \{0, \dots, s-1\}$ ,  $x \mapsto (ax \bmod p) \bmod s$ .

Dann ist  $\mathcal{H} = \{h_a \mid 1 \leq a \leq p-1\}$  eine 2-universelle Klasse von Hashfunktionen von  $\{0, \dots, p-1\}$  nach  $\{0, \dots, s-1\}$ .

**Lemma.** Sei  $r \in \mathbb{N}$ ,  $s$  eine Primzahl und  $\Sigma = \{0, \dots, s-1\}$ . Für jedes  $r$ -Tupel  $a = (a_1, \dots, a_r) \in \Sigma^r$  sei

$$h_a : \Sigma^r \rightarrow \Sigma, \quad (x_1, \dots, x_r) \mapsto \left( \sum_{i=1}^r a_i x_i \right) \bmod s.$$

Dann ist  $\mathcal{H} = \{h_a \mid a \in \Sigma^r\}$  eine 1-universelle Klasse von Funktionen von  $\Sigma^r$  nach  $\Sigma$ .

**Satz.** Eine Operationsfolge bestehend aus *initialize*( $n$ ) und  $m$  union- und *find-Operationen* kann in  $O(m + n \log n)$  Zeit ausgeführt werden.

**Satz.** Eine Operationsfolge bestehend aus *initialize*( $n$ ) gefolgt von  $m$  union- und *find-Operationen* kann in  $O(n + m\alpha(n, \frac{m}{n}))$  Zeit ausgeführt werden, wobei  $\alpha$  die inverse Ackermann-Funktion bezeichnet.

**Lemma.** Sei  $T = (V, E)$  ein ungerichteter Graph. Dann ist  $T$  genau dann ein Baum, wenn beliebige zwei der folgenden Bedingungen erfüllt sind. Dann gilt auch die dritte Bedingung.

- $T$  ist zusammenhängend.
- $T$  ist azyklisch.
- $|E| = |V| - 1$

**Satz.** Eine topologische Sortierung eines gerichteten azyklischen Graphen kann in  $O(n + m)$  Zeit berechnet werden.

**Satz.** Sei  $W$  ein DFS-Wald eines ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  und seien  $u, v \in V$ . Dann gehören  $u$  und  $v$  genau dann zur selben Zusammenhangskomponente von  $G$ , wenn sie Knoten im selben Baum von  $W$  sind.

**Def.** Eine **starke Zusammenhangskomponente** in einem gerichteten Graphen ist eine maximale Gruppe von Knoten, sodass zwischen je zwei Knoten der Gruppe ein Pfad existiert.

**Satz.** Die starken Zusammenhangskomponenten eines gerichteten Graphen mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten können in  $O(n + m)$  Zeit berechnet werden.

**Lemma** ( $\Delta$ -Ungleichung). Für jede Kante  $(u, v) \in E$  ist  $\delta(v) \leq \delta(u) + c(u, v)$

**Algorithmus** (Bellman-Ford). Relaxiere  $n$  mal je alle Kanten im Graphen.

**Satz.** Das Single-Source-Shortest-Paths-Problem mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten kann in Zeit  $O(nm)$  gelöst werden.

**Satz (Dijkstras Algorithmus).** Das Single-Source-Shortest-Paths-Problem kann in  $O(n \log n + m)$  Zeit gelöst werden.

**Satz.** Das Single-Source-Shortest-Paths-Problem kann in Netzwerken mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten und allen Kantenkosten 1 in Zeit  $O(n + m)$  gelöst werden.

**Algorithmus** (Floyd-Warshall). Verwende Tabelle mit aktuell berechneter Entfernung zwischen je zwei Knoten (dynamische Programmierung). Betrachte dann alle Tripel von Knoten, wende Dreiecksungleichung an.

**Satz.** Das All-Pairs-Shortest-Paths-Problem mit  $n$  Knoten kann in Zeit  $O(n^3)$  gelöst werden.

**Algorithmus** (Kruskal). Für immer diejenige Kante zum Spannbaum hinzu, die die geringsten Kosten hat und durch die kein Zirkel entsteht. Laufzeit:  $O(m \log n)$

**Algorithmus** (Prim). Wir lassen einen minimalen Baum zwischen einer Gruppe durch Knoten durch Hinzunahme der jeweils günstigsten Kante nach „draußen“ wachsen.

**Satz.** Ein minimal aufspannender Wald eines ungerichteten Netzwerks mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten kann in Zeit  $O(n \log n + m)$  berechnet werden.

**Def.** Eine (deterministische) **Turing-Maschine** (DTM) ist ein Tupel  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r, \sqcup)$  mit

- Einer Zustandsmenge  $Q$  (endlich)
- Einem Eingabealphabet  $\Sigma$  (endlich)
- Einem **Bandalphabet**  $\Gamma$  enthält  $\Sigma$
- Einer Übergangsfunktion  $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$
- Einem Startzustand  $q_0 \in Q$
- Einem **akzeptierenden Zustand**  $q_a \in Q$
- Einem **verwerfenden Zustand**  $q_r \in Q$
- Einem Symbol  $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$

**Satz.** Jede Sprache, die von einer RAM mit dem logarithmischen Kostenmaß in Zeit  $T(n) \geq n$  entschieden wird, wird von einer Turing-Maschine in Zeit  $O(T(n)^4)$  entschieden.

**Notation.** • Die Menge aller von einer DTM in Polynomialzeit entscheidbaren Sprachen ist P.

- Die Menge aller von einer NTM in Polynomialzeit entscheidbaren Sprachen ist NP.

**Frage.**  $N = NP$ ?

**Problem** (Independent Set). Frage: Enthält ein gegebener Graph eine unabhängige Menge der Größe  $k$ , also  $k$  Knoten, von denen keine zwei benachbart sind.

**Problem** (Clique). Frage: Enthält ein gegebener Graph eine Clique der Größe  $k$ , also einen vollständigen Untergraphen mit  $k$  Knoten?

**Problem** (Vertex Cover). Eine Knotenüberdeckung ist eine Teilmenge aller Knoten in einem Graph, sodass jede Kante im Graph mindestens einen dieser Knoten als Randpunkt besitzt. Frage: Enthält ein gegebener Graph eine Knotenüberdeckung der Größe  $k$ ?

**Def.** Seien  $L_1$  und  $L_2$  Sprachen über  $\Sigma_1$  bzw.  $\Sigma_2$ . Eine **Polynomialzeit-Reduktion** von  $L_1$  auf  $L_2$  ist eine Funktion  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  mit folgenden Eigenschaften:

- Es gibt eine DTM  $M$  und ein Polynom  $p$ , sodass  $M$  auf jeder Eingabe  $w \in \Sigma_1^*$  den Wert  $f(w)$  in maximal  $p(|w|)$  Schritten berechnet.
- Für alle  $w \in \Sigma_1^*$  gilt:  $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$

**Notation.** Wenn es eine Polynomialzeit-Reduktion von  $L_1$  auf  $L_2$  gibt, so schreiben wir  $L_1 \leq_p L_2$

**Lemma.** Die Relation  $\leq_p$  ist reflexiv und transitiv.

**Lemma.** Es gibt Polynomialzeit-Reduktion zwischen den Problemen Independent Set, Clique und Vertex Cover.

**Satz.** Gilt  $L_1 \leq_p L_2$  und ist  $L_2 \in P$ , dann ist auch  $L_1 \in P$ .

**Def.** Eine Sprache  $L$  heißt **NP-hart** oder **NP-schwer**, wenn  $L' \leq_p L$  für alle  $L' \in NP$ . Ist  $L$  NP-schwer und gilt zugleich  $L \in NP$ , so heißt  $L$  **NP-vollständig**.

**Notation.**  $SAT := \{\langle F \rangle \mid F \text{ ist eine erfüllbare Boolesche Formel in CNF}\}$

**Satz** (Cook).  $SAT$  ist NP-vollständig.

**Satz.** Independent Set (und somit auch Clique und Vertex Cover) sind NP-vollständig.