Zusammenfassung Gewöhnliche DGLn

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def (Klassifikation von DGLn)**.**

(I) **Gewöhnliche** DGL: Gesucht ist Funktion in einer Variable
Partielle DGL: Gesucht ist Funktion in mehreren Variablen

(II) **Ordnung** einer DGL: Höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in Gleichung vorkommt

(III) **Explizite** DGL: Gleichung der Form $y^{(k)}{=}f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k-1)})$
Implizite DGL: Allgemeinere Form $F(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k)}) = 0$

(IV) **Skalare** DGL: Gesucht ist Funktion mit Wert in $\mathbb{R}$
n-dimensionale DGL: Gesuchte Funktion hat Wert in $\mathbb{R}^n$

(V) **Lineare** DGL: Gleichung hat die Form

$$a_k(t) y^{(k)}(t) + a_{(k-1)}(t) y^{k-1}(t) + ... + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t) y(t) = 0$$

(VI) **Autonome** DGL: Gleichung der Form $F(y, \dot{y}, ..., y^{(k)}) = 0$ (keine Abhängigkeit von t, Zeitinvarianz)

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ und $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann ist ein **Anfangswertproblem** (AWP) gegeben durch die Gleichungen

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1.1}$$

Notation. Seien im Folgenden I und J stets Intervalle in $\mathbb{R}$.

Def.
- Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von $\dot{y} = f(t, y)$, falls für alle $t \in I$ gilt: $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$.
- Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$. Eine k-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von
$$y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, ..., y^{(k-1)}), \tag{1.2}$$
falls für alle $t \in I$ gilt: $y^{(k)}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(k-1)}(t))$

Satz.
- Ist $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2), dann ist
$$(y_1, ..., y_k) : I \to \mathbb{R}^{kn}, \qquad t \mapsto (y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(k-1)}(t))$$
eine Lösung des Systems von Gleichungen
$$(1.3) \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \quad \vdots \\ \dot{y}_{k-1} = y_k \\ \dot{y}_k = f(t, y_1, y_2, ..., y_{k-1}, y_k) \end{cases}$$
- Ist umgekehrt $(y_1, ..., y_k) : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.3), dann ist $y = y_1 : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2).

Satz.
- Ist $y : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von AWP (1.1), dann ist
$$(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad t \mapsto (y_1(t), y_2(t)) = (t, y(t))$$
eine Lösung des Anfangswertproblems
$$(1.4) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = 1, & y_1(t_0) = t_0 \\ \dot{y}_2(t) = f(y_1(t), y_2(t)), & y_2(t_0) = y_0 \end{cases}$$
- Ist $(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung von (1.4), dann ist $y = y_2 : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.1).

Problem. Gesucht ist eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ der linearen, skalaren, expliziten DGL 1. Ordnung (mit $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig)

$$\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \tag{1.5}$$

Satz. Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t)$ ist gegeben durch $y_h(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Satz. Sei $y_p : I \to \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung von (1.5). Dann ist die Menge aller Lösungen von (1.5) gegeben durch

$$\{y_p + y_h \mid y_h : I \to \mathbb{R} \text{ ist Lösung von } \dot{y_h}(t) = a(t) \cdot y_h(t)\}$$

Bemerkung. Der Ansatz mit **Variation der Konstanten** $y_p(t) = c(t) \cdot y_h(t)$ für (1.5) führt zu

$$c(t) = \frac{1}{c_0} \int_{t_0}^{t} b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds\right) d\tau$$
$$\Rightarrow y_p(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds\right) d\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$$

Korollar. Die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.6) \begin{cases} \dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mit $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$y(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\, ds\right) d\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$$

Problem. Ges. ist Lösung der DGL mit **getrennten Variablen**

$$\dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y) \tag{1.7}$$

mit $g : I \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$ stetig.

Lsg. 1. Fall: $h(y_0) = 0$ für ein $y_0 \in J$. Dann ist $y(t) = y_0$ eine Lsg.

2. Fall: Es gibt kein $y_0 \in J$ mit $h(y_0) = 0$. Sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ und G eine Stammfunktion von g. Da h stetig und nirgends null ist, ist h entweder strikt positiv oder strikt negativ. Somit ist H streng monoton steigend/fallend und somit umkehrbar. Eine Lösung von (1.7) ist nun gegeben durch
$$y(t) = H^{-1}(G(t) + c_0) \quad \text{mit } c_0 \in \mathbb{R}.$$

Problem. Gesucht ist Lösung des AWP mit getrennten Variablen

$$(1.8) \begin{cases} \dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Lsg. 1. Fall: $h(y_0) = 0$. Dann ist $y(t) = y_0$ eine Lösung.

2. Fall: $h(y_0) \neq 0$. Dann ist h in einer Umgebung von y_0 strikt positiv/negativ. Setze
$$H_1(y) := \int_{y(t_0)}^{y} \frac{1}{h(s)}\, ds, \quad G_1(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds.$$
Dann ist H_1 in einer Umgebung von y_0 invertierbar und eine Lösung von (1.8) ist gegeben durch
$$y(t) = H_1^{-1}(G_1(t)).$$

Technik (Transformation)**.** Manchmal lässt sich eine DGL durch **Substitution** eines Termes in eine einfachere DGL überführen, deren Lösung mit bekannten Methoden gefunden werden kann. Die Lösung der ursprünglichen DGL ergibt sich durch Rücksubstitution.

Bsp. Gegeben sei die DGL $\dot{y} = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Substituiere $z(t) = \alpha t + \beta y(t) + \gamma$. Es ergibt sich die neue DGL $\dot{z}(t) = \beta f(z(t)) + \alpha$, die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt.

Bsp (Bernoulli-DGL)**.** Gegeben sei die DGL $\dot{y}(t) = \alpha(t) \cdot y(t) + \beta(t) \cdot (y(t))^\delta$ mit $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Multiplikation mit $(1 - \delta) y^{-\delta}$ und Substitution mit $z(t) = (y(t))^{1-\delta}$ führt zur skalaren linearen DGL 1. Ordnung
$$\dot{z}(t) = (1 - \delta)\alpha(t) z(t) + (1 - \delta)\beta(t).$$

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abb. $f : \mathcal{D} {\to} \mathbb{R}^n$ heißt **stetig in $x_0 \in \mathcal{D}$**, falls
$$\forall \epsilon{>}0 : \exists \delta{>}0 : \forall x \in \mathcal{D} : \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$
Die Abb. heißt **stetig** in $\mathcal{D}$, falls sie in jedem Punkt in $\mathcal{D}$ stetig ist.

Notation. $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{f : I \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t \in I} \|f(t)\|$

Bemerkung. $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \|{-}\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

Def. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluss $\overline{A}$ kompakt in X ist.

Def. Seien $(X, \|{-}\|_X)$ und $(Y, \|{-}\|_Y)$ Banachräume. Sei $\mathcal{D} \subset X$. Eine Abbildung $T : \mathcal{D} \to Y$ heißt

- **stetig in $x \in \mathcal{D}$**, falls $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} Tx$ in Y für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ in $\mathcal{D}$ gilt.
- **Lipschitz-stetig** in $\mathcal{D}$, falls eine Konstante $\alpha > 0$ existiert mit
$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D} : \|Tx_1 - Tx_2\|_Y \leq \alpha \cdot \|x_1 - x_2\|_X.$$
- **kontraktiv**, falls T Lipschitz-stetig mit $\alpha < 1$ ist.
- **kompakt**, falls T stetig ist und beschränkte Mengen in X auf relativ kompakte Mengen in Y abgebildet werden, d. h. für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}$ besitzt die Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung. Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, die Umkehrung gilt aber nicht.

Satz (Arzelà-Ascoli)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompakt. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn

- $\mathcal{F}$ ist **punktweise beschränkt**, d. h.
$$\forall t \in I : \exists M : \forall f \in \mathcal{F} : \|f(t)\| \leq M$$
- $\mathcal{F}$ ist **gleichgradig stetig**, d. h.
$$\forall \epsilon{>}0 : \exists \delta{>}0 : \forall t_1, t_2{\in}I, f{\in}\mathcal{F} : \|t_1{-}t_2\| < \delta \Rightarrow \|f(t_1){-}f(t_2)\| < \epsilon$$

Satz (Fixpunktsatz von Banach)**.** Sei $(X, \|{-}\|_X)$ ein Banachraum, $\mathcal{D} \subset X$ nichtleer, abgeschlossen. Sei $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ eine Kontraktion. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $y = Ty$ genau eine Lösung in D.

Satz (Fixpunktsatz von Schauder)**.** Sei $(X, \|{-}\|_X)$ ein Banachraum, sei $\mathcal{D} \subset X$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt, konvex. Sei $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $y = Ty$ mindestens eine Lösung in $\mathcal{D}$.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in D$. Dann ist das AWP (1.1) lokal lösbar, d. h. es existiert ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine stetig diff'bare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$, die das AWP (1.1) erfüllt.

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Sei $y : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung des AWP (1.1).

- Eine Lösung $u : J \to \mathbb{R}^N$ heißt **Fortsetzung** (bzw. **echte Fortsetzung**) der Lösung y, falls $I \subset J$ (bzw. $I \subsetneq J$) und $u|_I = y$.
- Die Lösung y heißt **maximale Lösung** des AWP (1.1), falls keine echte Fortsetzung von y existiert. Das Intervall I heißt dann **maximales Existenzintervall**.

Satz. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$ stetig und $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- Jede lokale Lösung des AWP (1.1) kann zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden.
- Sei $y : I \to \mathbb{R}^N$ eine max. Lsg. des AWP (1.1). Dann ist I offen.

Def. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$.

- Die Funktion f heißt **Lipschitz-stetig bzgl.** y auf $\mathcal{D}$, falls eine Konstante $\mathcal{L} > 0$ existiert, sodass

$$\forall\, (t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{D} \,:\, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \mathcal{L} \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

- Wenn für alle $(t, y) \in \mathcal{D}$ eine Umgebung $U_{(t,y)} \subset \mathcal{D}$ existiert, sodass $f|_{U_{(t,y)}}$ Lipschitz-stetig bzgl. y ist, so heißt f **lokal Lipschitz-stetig bzgl.** y auf $\mathcal{D}$.

Lemma. Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$ stetig und stetig diff'bar nach y in $\mathcal{D}$. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig bzgl. y.

Satz (Picard-Lindelöf, lokal quantitativ)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ und $R_{a,b} \coloneqq [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b}(y_0) \subset \mathcal{D}$. Sei f Lipschitz-stetig bzgl. y auf $R_{a,b}$. Dann besitzt das AWP (2.1) im Rechteck $R_{a,b}$ genau eine Lösung $y : I_y \to \mathbb{R}^n$ auf $I_\gamma \coloneqq [t_0 - y, t_0 + y]$ mit $\gamma = \min(a, \frac{b}{M})$ und $M = \sup\limits_{(t,y) \in R_{a,b}} \|f(t, y)\|$.

Bemerkung. Im Beweis des Satzes definiert man die Picard-Iterierten $u_j : I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ für $j \in \mathbb{N}$ durch

$$u_0(t) \coloneqq y_0, \qquad u_{j+1}(t) \coloneqq y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y_j(\tau))\, \mathrm{d}\tau.$$

Man zeigt: Die Funktionenfolge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Lösung $u_\infty : I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ des AWP.

Satz (Picard-Lindelöf, lokal qualitativ)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\mathcal{D}$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann besitzt das AWP (2.1) eine eindeutige lokale Lösung, d. h. es existiert $\gamma = \gamma(t_0, y_0) > 0$, sodass das AWP (2.1) auf $I_\gamma \coloneqq [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$ genau eine Lösung besitzt.

Satz (Picard-Lindelöf, global)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\mathcal{D}$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall $I = \,]a_-, a_+[$ mit $t_0 \in I$ und

- Das AWP (2.1) besitzt genau eine Lösung γ auf I.
- Ist $\tilde{z} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige Lösung von (2.1) mit $t_0 \in \tilde{I}$, so gilt $\tilde{I} \subseteq I$ und $z = y|_{\tilde{I}}$.

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Falls f für jedes kompaktes Intervall $\tilde{I} \subset I$ global Lipschitz-stetig bzgl. y auf $\tilde{I} \times \mathbb{R}^n$ ist, dann hat das AWP (2.1) genau eine globale Lösung y auf I.

Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf $I \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Ist das Wachstum von f linear beschränkt in y auf $I \times \mathbb{R}^n$, d. h. gibt es stetige Funktionen $a, b : I \to [0, \infty[$ mit $\|f(t, y)\| \leq a(t)\|y\| + b(t)$ für alle $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$, dann besitzt das AWP (2.1) eine eindeutige Lösung auf I.