Dyn. Systeme in der Zahlentheorie

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Dies ist eine übersetzte Zusammenfassung der ersten Kapitel des Buches „Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory" von Harry Furstenberg.

Def. Ein **dynamisches System** ist ein Paar (X, G) bestehend aus einem kompakten metrischen Raum X und einer Gruppe oder einem Monoid G mit Wirkung $\varphi : G \to \mathrm{Aut/End}(X)$, $g \mapsto T_g$, $T_g(x) := g.x$.

Def. Ein **Untersystem** eines dynamischen Systems (X, G) ist eine Teilmenge $Z \subseteq X$ mit $T_g(Z) \subseteq Z$ für alle $g \in G$.

Bem. Falls $G = \mathbb{Z}$ oder $M = \mathbb{N}$, dann bezeichnen wir mit $T := T_1$ den Erzeuger der Aktion und nennen (X, T) ein **zykl. System**.

Def. Sei X ein topol. Raum, $T : X \to X$ stetig. Ein Punkt $x \in X$ heißt **wiederkehrend**, falls für für alle Umgebungen $V \subset X$ von x ein $n \geq 1$ existiert mit $T^n(x) \in V$.

Bem. Sei X sogar ein metrischer Raum, $x \in X$ wiederkehrend. Dann gibt es eine Folge (n_k) mit $d(T^{n_k}(x), x) \to 0$ für $k \to \infty$.

Def. Sei X ein topol. Raum, $T : X \to X$ stetig. Dann heißt

$$Q(x) := \overline{\{T^n x \mid n \geq 1\}} \subseteq X$$

abgeschlossener Vorwärtsorbit von $x \in X$.

Lemma.
- $x \in X$ ist wiederkehrend $\iff x \in Q(x)$
- $x \in Q(y) \implies T(x) \in Q(y) \iff Q(x) \subseteq Q(y)$
- Die Relation $xRy :\iff x \in Q(y)$ ist transitiv.

Thm. Sei X ein kompakter topol. Raum, $T : X \to X$ stetig. Dann gibt es einen wiederkehrenden Punkt $x \in X$.

Def. Sei K eine kompakte Gruppe, $a \in K$ und $T(x) := ax$. Dann heißt (K, T) ein **Kronecker-System**.

Thm. In einem Kronecker-System sind alle $x \in K$ wiederkehrend.

Def. Ein Homomorphismus zwischen zwei dyn. Systemen (X, G) und (X', G) (zweimal die gleiche Gruppe oder Monoid G) ist eine G-äquivariante stetige Abbildung $\phi : X \to X'$.

Def. Ein dyn. System (Y, G) ist **Faktor** eines dyn. System (X, G), wenn es einen surjektiven Homomorphismus $(X, G) \to (Y, G)$ gibt. Man nennt (X, G) dann eine **Erweiterung** von (Y, G).

Bem. Sei $\phi : X \to Y$ surjektiv. Dann kann man Y mit der Menge der Fasern von ϕ identifizieren.

Thm. Sei $\phi : (X, T) \to (Y, T)$ ein Morphismus von zyklischen Systemen. Wenn $x \in X$ wiederkehrend ist, dann auch $\phi(x)$. Allgemeiner: $x \in Q(y) \implies \phi(x) \in Q(\phi(y))$

Def. Sei $(Y, T : Y \to Y)$ ein zyklisches System, K eine kompakte Gruppe und $\psi : Y \to K$ stetig. Setze

$$X := Y \times K, \quad T : X \to X, \ (y, k) \mapsto (Ty, \psi(y)k).$$

Das System (X, T) wird **Gruppenerweiterung** von (Y, T) mit K oder **Schiefprodukt** von (Y, T) mit K genannt.

Bem. Die Gr. K wirkt auf $(X, T) = (Y \times K, T)$ durch Rechtstransl.:

$$R : K \to \mathrm{Aut}(X), \ k \mapsto R_k, \quad R_k(y, k') := (y, k'k).$$

Die Homöomorphismen R_k kommutieren mit T, sind also Automorphismen des dyn. Systems (X, T).

Thm. Sei $(X = Y \times K, T)$ eine Gruppenerw. von (Y, T) und $y_0 \in Y$ wiederkehrend. Dann sind die Pkte $\{(y_0, k) \mid k \in K\}$ wiederkehrend.

Bem. Durch Erweiterung mit der zykl. Gr. $\mathbb{Z}_m$ kann man zeigen:

Prop. Ist $x \in X$ in (X, T) wiederkehrend, dann auch in (X, T^m).

Bsp. Sei $T := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist das System

$$(T^2, (\theta, \phi) \mapsto (\theta + \alpha, \phi + 2\theta + \alpha))$$

eine Gruppenerweiterung des Kronecker-Systems $(T, \theta \mapsto \theta + \alpha)$. Somit sind alle Punkte des Torus T^2 wiederkehrend. Aus der Wiederkehr des Punktes $(0, 0)$ erhält man:

Prop. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ gibt es eine ganzzahlige Lsg der diophantinischen Ungleichung $|\alpha n^2 - m| < \epsilon$.

Bem. Durch Verallgemeinerung auf den d-dim Torus zeigt man:

Prop. Sei $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ mit $p(0) = 0$. Dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ eine Lsg der diophantinischen Ungleichung $|p(n) - m| < \epsilon$, $n > 0$.

Def. Sei M ein topol. Raum und $K \subseteq \mathrm{Iso}(M)$ kompakt. Sei (Y, T) ein zykl. System und $\psi : Y \to K$ stetig. Setze

$$X := Y \times M, \quad T : X \to X, \quad (y, u) \mapsto (Ty, \psi(y)u).$$

Das System (X, T) heißt **isometrische Erweiterung** von (Y, T).

Prop. Sei (X, T) eine isom. Erweiterung von (Y, T). Dann ist $X = \cup X_\alpha$, wobei X_α abgeschlossene T-invariante Teilmengen von X sind, sodass das System $(X_\alpha, T|_{X_\alpha})$ Faktor einer Gruppenerweiterung von (Y, T) ist.

Prop. Sei (X, T) eine isom. Erweiterung von (Y, T) und $y_0 \in Y$ wiederkehrend. Dann sind die Pkte $\{(y, m) \mid m \in M\}$ wiederkehrend.

Def. Sei G eine abz. Gruppe/Monoid und Λ ein kompakter metr. Raum. Sei $\Omega := \Lambda^G \cong \prod \Lambda$ der kompakte metrisierbare Raum der Funktionen von G nach Λ. Die **reguläre Wirkung** von G auf Ω ist

$$G \mapsto \mathrm{Aut/End}(\Omega), \quad g \mapsto T_g, \quad T_g(\omega)(g') := \omega(g'g).$$

Ein **Bebutov-System** ist ein Untersystem von (Ω, G).

Bem. Sei $\{g_1, g_2, \ldots\} = G$ eine Abzählung von G. Dann ist eine Metrik auf Ω definiert durch

$$d(\omega, \omega') := \sum 2^{-n} d(\omega(g_n), \omega'(g_n)).$$

Def. Für $\omega_0 \in \Omega$ ist der Abschluss des Orbits von ω_0,

$$X_{\omega_0} := \overline{\{T_g(\omega_0) \mid g \in G\}},$$

G-invariant. Das dynamische System (X_{ω_0}, G) wird das von ω_0 **erzeugte Bebutov-System** genannt.

Def. Ein **symbolischer Fluss** ist ein Bebutov-System mit endlichem Λ und $G \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$. Die Elemente von Ω sind dann unendliche/doppelt-unendliche Folgen von Elementen von Λ. Man bezeichnet Λ dann als **Alphabet**.

Def. Ein **Wort** über Λ ist eine endl. Sequenz von Elementen aus Λ. Die Länge $|w|$ eines Wortes ist die Länge der Sequenz.

Prop. Für eine Sequenz $\omega \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ sind äquivalent:
- ω ist wiederkehrend.
- Jedes Wort in ω kommt ein 2. Mal an einer anderen Pos. in ω vor.
- Jedes Wort aus ω kommt an unendlich oft in ω vor.

Bem. Ein wiederkehrendes Wort $\omega \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ hat die allgemeine Form

$$\omega = [(aw^{(1)}a)w^{(2)}(aw^{(1)}a)]w^{(3)}[(aw^{(1)}a)w^{(2)}(aw^{(1)}a)] \ldots$$

mit $a \in \Lambda$ und Wörtern $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$. Damit kann man zeigen:

Lemma (Hilbert)**.** Sei $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_q$ eine Partition von $\mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig. Schreibe

$$P(x_1, \ldots, x_l) := \{x_{i_1} + \ldots + x_{i_k} \mid 0 \leq k \leq l, \ 1 \leq i_1 < \ldots i_k \leq l\}.$$

Dann gibt es $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_l$, sodass unendlich viele Translationen von $P(m_1, \ldots, m_l)$ in demselben B_j enthalten sind.

Bem. Sei (X, T) ein zykl. System und $f : X \to \Lambda$ stetig. Dann ist

$$(X, T) \to (\Lambda^{\mathbb{N}}, T), \quad x \mapsto (f(x), f(Tx), f(T^2 x), \ldots)$$

ein Homomorphismus zyklischer Systeme.

Thm. Seien Λ_1, Λ_2 komp. Räume und $\phi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ eine Abbildung. Für $\omega \in \Lambda_1^{\mathbb{N}}$ definiere $\omega' \in \Lambda_2^{\mathbb{N}}$ durch $\omega'(n) := f(\omega(n))$. Falls ω wiederkehrend ist und zusätzlich f in allen Punkten $\omega(n)$ stetig ist, dann ist auch ω' wiederkehrend.

Prop. Sei K eine komp. Gruppe und $\xi \in K^{\mathbb{N}}$ wiederkehrend. Dann ist $\eta \in K^{\mathbb{N}}$ definiert durch $\eta(n) := \xi(n)\xi(n-1) \cdots \xi(1)$ wiederkehrend.

Def. Eine Teilmenge S einer abelschen topologischen Gruppe / eines Monoids heißt G **„syndetic"**, wenn eine kompakte Menge $K \subset G$ existiert, sodass $\forall g \in G : \exists k \in K : gk \in S$.

Bem. Eine Teilmenge $\{s_1 < s_2 < \ldots\} = S \subset \mathbb{N}$ ist genau dann „syndetic", wenn die Größe $s_i - s_{i-1}$ der „Lücken" zw. Elementen aus S beschränkt ist. Solche Mengen heißen auch **relativ dicht**.

Def. Sei (X, G) ein dyn. System. Ein Punkt $x \in X$ heißt **gleichmäßig wiederkehrend**, falls für alle Umgebungen $V \subset X$ von x die Menge $\{g \in G \mid g.x \in V\}$ syndetisch ist.

Def. Ein dyn. System (X, G) heißt **minimal**, wenn es keine echte abgeschl. Teilmenge von X gibt, die inv. unter der G-Wirkung ist.

Lemma. Sei (X, G) ein dyn System. Es sind äquivalent:
- (X, G) ist minimal
- $\forall x \in X$: der Orbit Gx ist dicht in X
- $\forall \emptyset \neq V \subset X$ offen : $\exists$endlich viele Elemente $g_1, \ldots, g_n \in G$:

$$g_1^{-1} V \cup \ldots \cup g_n^{-1} V = X.$$

Thm. Sei (X, G) ein minimales dynamisches System. Dann sind alle $x \in X$ gleichmäßig wiederkehrend.

Bem. Aus Zorns Lemma folgt: Jedes dyn. System besitzt ein minimales Untersystem. Es folgt:

Thm. Jedes dyn. System hat einen gleichm. wiederkehrenden Pkt.

Thm. Sei (X, G) ein dyn. System, $x \in X$. Dann sind äquivalent:
- x ist glm. wiederkehrend.
- Das Untersystem $\overline{Gx}$ ist minimal.

Thm. In einem Kronecker-System ist jeder Pkt glm. wiederkehrend.

Thm. Sei (X, T) eine Gruppenerw. oder isometrische Erweiterung von (Y, T) mit Projektion $\pi : (X, T) \to (Y, T)$ und $y_0 \in Y$ glm. wiederkehrend. Dann sind die Pkte $\pi^{-1}(y_0)$ glm. wiederkehrend.

Bem. Es folgt durch Betr. eines dyn. Systems auf dem k-dim Torus:

Thm. Seien $p_1(X), \ldots, p_k(X) \in \mathbb{R}[X]$ Polynome. Für alle $\epsilon > 0$ ist die Teilmenge der nat. Zahlen, die

$$|e^{2\pi i p_1(n) - e^{2\pi i p_1(0)}}| < \epsilon, \ldots, |e^{2\pi i p_k(n) - e^{2\pi i p_k(0)}}| < \epsilon$$

gleichzeitig erfüllen, syndetic.