Zusammenfassung Logik für Informatiker

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Prädikatenlogik erster Stufe

Notation. Sei $\beta : \{x_0, x_1, ...\} \to D_I$ eine Belegung zu einer Interpretation I, x eine Variable und $d \in D_I$. Dann setze

$$\beta_x^d : \{x_0, x_1, ...\} \to D_I, \quad y \mapsto \begin{cases} d, & \text{falls } x = y \\ \beta(y), & \text{sonst} \end{cases}$$

Def. Eine Interpretation I und eine Belegung β erfüllen eine eine Formel F, geschrieben $I, \beta \vDash F$, falls

$$\begin{aligned}
I, \beta \vDash (t_1 = t_2) \quad &:\Longleftrightarrow (t_1)_{I,\beta} = (t_2)_{I,\beta} \\
I, \beta \vDash P(t_1, ..., t_n) \quad &:\Longleftrightarrow P^I((t_1)_{I,\beta}, ..., (t_n)_{I,\beta}) \\
I, \beta \vDash \neg A \quad &:\Longleftrightarrow I, \beta \nvDash A \\
I, \beta \vDash A \wedge B \quad &:\Longleftrightarrow (I, \beta \vDash A) \wedge (I, \beta \vDash B) \\
I, \beta \vDash A \vee B \quad &:\Longleftrightarrow (I, \beta \vDash A) \vee (I, \beta \vDash B) \\
I, \beta \vDash A \to B \quad &:\Longleftrightarrow (I, \beta \nvDash A) \vee (I, \beta \vDash B) \\
I, \beta \vDash A \leftrightarrow B \quad &:\Longleftrightarrow \quad ((I, \beta \nvDash A) \wedge (I, \beta \nvDash B)) \\
&\qquad \vee ((I, \beta \vDash A) \wedge (I, \beta \vDash B)) \\
I, \beta \vDash \forall x : A \quad &:\Longleftrightarrow \forall d \in D_I : I, \beta_x^d \vDash A \\
I, \beta \vDash \exists x : A \quad &:\Longleftrightarrow \exists d \in D_I : I, \beta_x^d \vDash A
\end{aligned}$$

Proposition. Es gilt für alle Interpretationen I, Belegungen β und Formeln A, B:

$$\begin{aligned}
I, \beta \vDash A \quad &\Longleftrightarrow I, \beta \nvDash \neg A \Longleftrightarrow I, \beta \vDash \neg\neg A \\
I, \beta \vDash A \wedge B \quad &\Longleftrightarrow I, \beta \vDash \neg(A \to \neg B) \\
I, \beta \vDash A \vee B \quad &\Longleftrightarrow I, \beta \vDash \neg A \to B \\
I, \beta \vDash A \leftrightarrow B \quad &\Longleftrightarrow I, \beta \vDash (A \to B) \wedge (B \to A) \\
I, \beta \vDash \exists x : A \quad &\Longleftrightarrow I, \beta \vDash \neg \forall x : \neg A
\end{aligned}$$

Def. Seien $A \in \mathrm{For}$, $M \subset \mathrm{For}$ und I eine Interpretation. Dann heißt I ein **Modell** von A bzw. M, falls

$$\begin{aligned}
I \vDash A \quad &:\Longleftrightarrow \text{ für alle Belegungen } \beta \text{ gilt } I, \beta \vDash A, \\
I \vDash M \quad &:\Longleftrightarrow \forall F \in M : I \vDash F.
\end{aligned}$$

Notation. Für $M \subset \mathrm{For}$, eine Interpretation I und eine Belegung β schreiben wir:

$$I, \beta \vDash M \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall F \in M : I, \beta \vDash F$$

Def. Seien $A, B \subset \mathrm{For}$. Man sagt, B **folgt** aus A (geschrieben $A \vDash B$), falls für alle Interpretationen I und Belegungen β gilt:

$$I, \beta \vDash A \Longrightarrow I, \beta \vDash B.$$

Falls $A \vDash B$ und $B \vDash A$ gilt, so heißen A und B **logisch äquivalent**, geschrieben $A \mathrel{=\!\!\mid\!\vDash} B$.

Notation. $A_1, ..., A_n \vDash A \quad :\Longleftrightarrow \quad \{A_1, ..., A_n\} \vDash A$

Satz. Für alle Interpretationen I und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$I \vDash \{A_1, ..., A_n\} \Longleftrightarrow I \vDash A_1 \wedge ... \wedge A_n$$

Satz. Für alle $A, B \in \mathrm{For}$ und $M \subset \mathrm{For}$ gilt:

$$M \vDash A \to B \Longleftrightarrow M \cup \{A\} \vDash B$$

Def. Eine Formel $A \in \mathrm{For}$ heißt **Tautologie** oder **(allgemein-) gültig** (geschrieben $\vDash A$), falls $I \vDash A$ für alle Interpretationen I gilt.

Def. Eine Formel $A \in \mathrm{For}$ heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation I und eine Belegung β mit $I, \beta \vDash A$ gibt. Falls es dies nicht gibt, so heißt A **unerfüllbar**.

Satz. Für $A \in \mathrm{For}$ gilt:

- $\vDash A \Longrightarrow A$ ist erfüllbar
- $\vDash A \Longleftrightarrow \varnothing \vDash A$

Satz. Sei $A \in \mathrm{For}$ und $M \subset \mathrm{For}$. Dann gilt $M \vDash A$ genau dann, wenn $M \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar ist. Insbesondere ist A genau dann gültig, wenn $\{\neg A\}$ unerfüllbar ist.

Def. **Universelle Formeln** sind Formeln, die sich nach den folgenden Regeln herleiten lassen:

$$\frac{A \text{ ist quantorenfrei}}{A} \qquad \frac{A \qquad B}{A \wedge B} \qquad \frac{A \qquad B}{A \vee B} \qquad \frac{A}{\forall x : A}$$

Aussagenlogik

Proposition. Sei I eine Teil-Interpretation zu J, β eine Belegung zu I und A eine universelle Formel. Dann gilt:

$$J, \beta \vDash A \Longrightarrow I, \beta \vDash A.$$

Def. Für $p \in \mathcal{P}^0$ heißen die Ausdrücke p und $\neg p$ **Literale**. Eine Disjunktion von Literalen heißt **Klausel**. Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine Konjunktion von Klauseln ist.

Problem (SAT). Gegeben sei eine Formel in konjunktiver Normalform. Frage: Ist diese Formel erfüllbar?

Def. Eine Formel ist in **Negationsnormalform (NNF)**, wenn Negationen nur unmittelbar vor Atomen stehen.

Def. Der **Hilbert-Kalkül** besteht aus den Axiomen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ax}_1 &\coloneqq \{A \to (B \to A) \mid A, B \in \mathrm{For}\} \\
\mathrm{Ax}_2 &\coloneqq \{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \mid A, B, C \in \mathrm{For}\} \\
\mathrm{Ax}_3 &\coloneqq \{(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \mid A, B, C \in \mathrm{For}\}
\end{aligned}$$

und der Schlussregel **Modus Ponens (MP)**

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

Def. Eine Formel $F \in \mathrm{For}$ ist aus $M \subset \mathrm{For}$ **H-herleitbar**, notiert $M \vdash_H A$, wenn es eine Folge $A_1, ..., A_n$ in For gibt mit $A_n = A$, sodass für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt:

$$A_i \in \mathrm{Ax}_1 \cup \mathrm{Ax}_2 \cup \mathrm{Ax}_3 \cup M \quad \text{oder} \quad \exists j, k < i : A_j = A_k \to A_i.$$

Def. $A \in \mathrm{For}$ heißt **herleitbar**, notiert $\vdash A$, falls $\varnothing \vdash A$ gilt.

Beobachtung. Präfixe und Verkettungen von Herleitungen sind ebenfalls Herleitungen.

Proposition.

- Aus $M \vdash A$ und $M \vdash A \to B$ folgt $M \vdash B$.
- Aus $M \vdash \neg A \to \neg B$ folgt $M \vdash B \to A$.

Satz (Deduktionstheorem). $M \vdash A \to B \Longleftrightarrow M \cup \{A\} \vdash B$

Satz. Für alle $A, B, C \in \mathrm{For}$ gilt:

- $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
- $\vdash \neg A \to (A \to B)$
- $\vdash \neg\neg A \to A$
- $\vdash A \to \neg\neg A$
- $\vdash (\neg A \to A) \to A$

Proposition. Es gilt:

$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C} \qquad \frac{\neg\neg A}{A}$$

Satz (Korrektheitssatz). Sei $A \in \mathrm{For}$ und $M \subset \mathrm{For}$. Dann gilt

$$M \vdash A \Longrightarrow M \vDash A.$$

Def. $M \subset \mathrm{For}$ heißt **konsistent**, wenn für kein $A \in \mathrm{For}$ zugleich $M \vdash A$ und $M \vdash \neg A$ gilt.

Lemma.

- Ist M inkonsistent, so gilt $M \vdash B$ für alle $B \in \mathrm{For}$.
- Für $A \in \mathrm{For}$ gilt: $M \nvdash A \Longrightarrow M \cup \{A\}$ ist konsistent.

Lemma (Modell-Lemma). Jede konsistente Menge ist erfüllbar, d. h. sie besitzt ein Modell.

Satz (Vollständigkeitssatz). Sei $A \in \mathrm{For}$ und $M \subset \mathrm{For}$. Dann gilt

$$M \vDash A \Longrightarrow M \vdash A.$$

Proposition. Sei $M \subset \mathrm{For}$. Dann ist M genau dann erfüllbar, wenn M konsistent ist.

Satz (Endlichkeits- bzw. Kompaktheitssatz). Sei $A \in \mathrm{For}$, $M \subset \mathrm{For}$.

- Dann gilt $M \vDash A$ genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge $M' \subset M$ mit $M' \vDash A$ gibt.
- Dann ist M genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von M erfüllbar ist.

Hilbert-Kalkül für Prädikatenlogik

Weitere Beweisverfahren

Zusicherungskalkül

Temporale Logik

Modale Logik