Zusammenfassung Algebr. Topologie

Def. Ein **affines n-Simplex** ist die konvexe Hülle von $n+1$ affin unabhängigen Punkten $p_0, ..., p_{n+1} \in \mathbb{R}^N$. Die konvexe Hülle von einer Teilmenge dieser Eckpunkte wird **Seite** genannt.
Das **Standard-n-Simplex** Δ_n ist das von den $n+1$ Standard-Basisvektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$ aufgespannte Simplex.

Def. Ein (endlicher) **geometrischer Simplizialkomplex** ist eine (endliche) Menge $\mathcal{S}$ endlich vieler affiner Simplizes im $\mathbb{R}^N$, sodass:

- Ist $K \in \mathcal{S}$ und $T \subset K$ eine Seite von K, dann ist auch $T \in \mathcal{S}$.
- Für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$ ist $K_1 \cap K_2$ entweder eine Seite von K_1 und K_2 oder leer.

Def. — Die $|S| \coloneqq \bigcup\limits_{K \in \mathcal{S}} K$ heißt zu $\mathcal{S}$ gehörender **Polyeder** und $\mathcal{S}$ Triangulierung von $|\mathcal{S}|$.

Def. Ein geometrischer Simplizialkomplex mit einer Totalordnung auf der Menge der Eckpunkte heißt **geordnet**.

Notation. Ein n-Simplex mit Eckpunkten $v_0, ..., v_n$ in einem geordneten geom. Simplizialkomplex wird mit $\langle v_0, ..., v_n \rangle$ bezeichnet, falls $v_0 < v_1 < ... < v_n$.

Notation. $\mathcal{S}_n \coloneqq \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma \text{ ist geordneter } n\text{-Simplex}\}$

Def. Eine **simpliziale n-Kette** in einem geordneten geom. Simplizialkomplex ist eine endliche formale Linearkombination

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma,$$

wobei $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}$. Die Menge solcher Linearkombinationen ist $C_n(\mathcal{S})$. Sie ist die freie abelsche Gruppen über der Menge der Simplizes.

Bemerkung. $C_n(\mathcal{S})$ ist eine Gruppe.

Def. Der Rand eines orientierten n-Simplex $\langle v_0, ..., v_n \rangle \in \mathcal{S}$ ist

$$\delta \langle v_0, ..., v_n \rangle \coloneqq \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_0, ..., \hat{v_i}, ..., v_n \rangle.$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Gruppenhomo $\partial_n : C_n(\mathcal{S}) \to C_{n-1}(\mathcal{S})$.

Def. Ein **Kettenkomplex** $C_\bullet$ ist eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Gruppenhomomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ mit der Eigenschaft $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Def. Sei $C_\bullet$ ein Kettenkomplex.

- $Z_n(C_\bullet) \coloneqq \ker \partial_n \subset C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) \coloneqq \operatorname{im} \partial_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) \coloneqq Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$ heißt **n-te Homologiegruppe**.

Prop. Für $n \geq 1$ gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Die simplizialen n-Ketten bilden also einen Kettenkomplex.

Def. Ein **singuläres n-Simplex** in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta^n \to X$. Wir bezeichnen mit $\Delta_n(X)$ die Menge der singulären n-Simplizes in X und mit $C_n(X)$ die freie abelsche Gruppe über $\Delta_n(X)$. Wir definieren

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X), \quad \sigma \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{\langle e_o, ..., \hat{e_i}, ..., e_n \rangle}.$$

Analog zu oben gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, man erhält also einen Komplex $C_\bullet(X)$ der singulären Ketten in X. Die Homologie dieses Komplexes bezeichnet man mit $H_n(X)$.

Def. Eine **Kettenabbildung** zwischen Kettenkomplexen $C_\bullet$ und $D_\bullet$ ist eine Familie $(f_n : C_n \to D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Gruppenhomomorphismen, welche mit dem Differential verträglich sind, d. h.

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \partial_n^{(D)} \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n^{(C)}.$$

Aus einer solchen Abbildung erhält man wiederum eine Abbildung $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \to H_n(C_\bullet)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit definiert H_n einen Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Def. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen erhalten wir eine Abbildung $f_* : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ definiert durch $f_*(\sigma) \coloneqq f \circ \sigma$ für ein n-Simplex $\sigma : \Delta_n \to X$. Die Zuordnung $f \mapsto f_*$ erfüllt die Funktiorialitätsaxiome. Somit definiert H_n für alle $n \in \mathbb{N}$ einen Funktor **Top** $\to$ **AbGrp**.

Korollar. Homöomorphe Räume haben isomorphe singuläre Homologiegruppen.

Prop. Sei $\pi_0(X)$ die Menge der Wegekomponenten von X. Die Inklusionen $A \hookrightarrow X$ (für $A \in \pi_0(X)$) induzieren einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{A \in \pi_0(X)} H_*(A) \cong H_*(X).$$

Prop. Sei $X \neq \emptyset$ wegzusammenhängend. Dann ist $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Def. Eine **Kettenhomotopie** zw. Kettenabb. $\phi_*, \psi_* : C_\bullet \to D_\bullet$ ist eine Folge von Homomorphismen $P_n : C_n \to D_{n+1}$ mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n = \phi_n - \psi_n.$$

Prop. Seien $\phi_*, \psi_* : C_\bullet \to D_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt

$$H_*(\phi_*) = H_*(\psi_*) : H(C_\bullet) \to H(D_\bullet).$$

Satz. Seien $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen. Dann sind $f_*, g_* : X_\bullet \to Y_\bullet$ kettenhomotop.

Korollar.
- Seien $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen. Dann gilt

$$f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y).$$

- Homotopieäquivalente Räume haben isomorphe Homologiegruppen.