Zusammenfassung Homologische Algebra

Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **lokal klein**, wenn $\mathrm{Hom}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge (keine echte Klasse) ist. Sie heißt **klein**, wenn auch die Klasse ihrer Objekte eine Menge ist. Sie heißt **endlich**, wenn Objekt- und Hom-Mengen sogar nur endlich sind.

Def. Sei **Cat** die Kategorie mit kleinen Kategorien als Objekten und Funktoren als Morphismen.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{D}$ heißt **Unterkategorie** einer Kategorie $\mathcal{C}$ (notiert $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$), wenn für alle geeigneten X, Y, f, g gilt:

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \quad \text{und} \quad f \circ_{\mathcal{D}} g = f \circ_{\mathcal{C}} g.$$

Def. Eine Unterkategorie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **voll**, wenn

$$\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt ...

- ... **treu**, wenn für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ die Abbildung $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ injektiv ist.
- ... **voll**, wenn diese Abb. für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ surjektiv ist.

Bem. Die Einbettung einer (vollen) Unterkategorie ist ein (voll-)treuer Funktor.

Def.
- Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **initiales Objekt**, falls für alle $Y \in \mathrm{Ob}(Y)$ genau ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ existiert.
- Ein Objekt $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **terminales Objekt**, falls für alle $Y \in \mathrm{Ob}(Y)$ genau ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ existiert.

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein **Kategorienäquivalenz**, falls es einen Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ mit $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ und $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt. Die Funktoren F und G heißen dann zueinander **quasiinvers** und die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ äquivalent.

Prop. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist genau dann eine Kategorienäquivalenz, wenn:
- F ist volltreu,
- $\forall Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) : \exists X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) : Y \cong F(X)$

Bsp. Sei B ein lokal wegzshgder, semi-lokal einfach zshgder topol. Raum. Dann ist die Kategorie $\mathrm{Cov}(B)$ der Überlagerungen von B äquivalent zur Kategorie $[\pi(B), \mathbf{Set}]$ der Mengen-wertigen Funktoren auf dem Fundamentalgruppoid von B. Dabei ist

$$F : \mathrm{Cov}(B) \to [\pi(B), \mathbf{Set}], \quad F(p : \tilde{B} \to B) := G_{\tilde{B},p},$$

$$G_{\tilde{B},p}(b \in B) := p^{-1}(b), \quad G_{\tilde{B},p}(\gamma : [0,1] \to B)(\tilde{b} \in p^{-1}(\gamma(0))) := \tilde{\gamma}(1),$$

$$\text{mit } \tilde{\gamma} \text{ Liftung von } \gamma \text{ mit } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{b}.$$

Def. Zwei Ringe A und B heißen **Morita-äquivalent**, wenn ihre Kategorien der (Links/Rechts)-Moduln äquivalent sind.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Der **kontravariante Hom-Funktor** $h_X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ist definiert durch

$$h_X(Y) := \mathrm{Hom}(Y, X), \quad h_X(h : Y' \to Y)(g : Y \to X) := g \circ h.$$

Allgemeiner gibt es den Funktor $\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ mit

$$\mathrm{Hom}(h : Y' \to Y, f : X \to X')(g : Y \to X) := f \circ g \circ h.$$

Notation. $\hat{\mathcal{C}} := [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$

Def. Ein Element $x \in X(Y) := \mathrm{Hom}(Y, X)$ heißt **Y-Element** von X.

Def. Ein Funktor $F \in \mathrm{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$ wird **dargestellt** durch $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, falls $F \cong h_X$. Er heißt **darstellbar**, falls ein solches X existiert.

Def. Die **Yoneda-Einbettung** ist der Funktor

$$Y : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}, \quad X \mapsto h_X, \quad \phi \mapsto (\phi \circ - : X(Y) \to X'(Y))_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}.$$

Lemma (Yoneda). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Es gibt es eine nat. Bij.

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \cong F(X) \quad \text{für alle } X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ F \in \hat{\mathcal{C}}.$$

Korollar. Die Yoneda-Einbettung ist volltreu und liefert eine Kategorienäquivalenz von $\mathcal{C}$ und der vollen Unterkategorie der darstellbaren Funktoren in $\hat{\mathcal{C}}$.

Korollar. Ein darstellbarer Funktor wird von genau einem Objekt dargestellt (bis auf Isomorphie).

Def. Das **Produkt** von $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist ein Obj. $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, das $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, $U \mapsto X(U) \times Y(U)$, $\phi \mapsto ((- \circ \phi) \times (- \circ \phi))$ darstellt.

Bem. Diese Definition ist äquivalent zur folgenden:
Das Produkt von X, Y ist $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $p_X : Z \to X$ und $p_Y : Z \to Y$, wenn für alle $Z' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mit Morphismen $p'_X : Z' \to X$ und $p'_Y : Z' \to Y$ genau ein $f : Z' \to Z$ mit $p'_X = p_X \circ f$ und $p'_Y = p_Y \circ f$ existiert.

Def. Seien $\phi : X \to S$ und $\psi : Y \to S$ Abb. von Mengen.
Das Faserprodukt von X und Y über S ist

$$X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid \phi(x) = \psi(y)\}.$$

Def. Sei $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, S)$.
Das **Faserprodukt** von X und Y über S ist ein Obj. in $\mathcal{C}$, das den Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, $U \mapsto X(U) \times_{S(U)} Y(U)$ darstellt.

Bem. Das Faserprodukt von X und Y über S ist das Produkt von $X \xrightarrow{\phi} S$ und $Y \xrightarrow{\psi} S$ in der Scheibenkategorie $\mathcal{C}/S$.

Def. Eine **Gruppenstruktur** auf einem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist gegeben durch Gruppenstrukturen auf $\mathrm{Hom}(Y, X)$ für alle $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Gruppenmorphismen $\mathrm{Hom}(Y, X) \to \mathrm{Hom}(Y', X)$ für jeden Morphismus $\phi : Y' \to Y$ (die die offensichtlichen Axiome erfüllen).

Bem. Falls $\mathcal{C}$ ein term. Obj. 1 und die Produkte $X \times X$ und $X \times X \times X$ besitzt, dann ist eine Gruppenstr. auf X geg. durch Morphismen

$$m : X \times X \to X \text{ (Mult.)}, \quad i : X \to X \text{ (Inv.)}, \quad e : 1 \to X \text{ (Einheit)},$$

die die offensichtlichen Axiome erfüllen.

(Ko-)Limiten

Def. Seien $\mathcal{J}$, $\mathcal{C}$ Kat'en. Der **Diagonal-Funktor** $\Delta : \mathcal{C} \to [\mathcal{J}, \mathcal{C}]$ ist

$$(\Delta X)(J \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})) := X, \quad (\Delta X)(\phi) := \mathrm{id}_X, \quad (\Delta f)_{J \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} := f.$$

Def. Seien $\mathcal{J}$, $\mathcal{C}$ Kategorien, $\mathcal{J}$ klein. Der **(projekte) Limes** eines Funktors $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, das den Funktor

$$G \in \hat{\mathcal{C}}, \quad G(Y) := \mathrm{Hom}_{[\mathcal{J},\mathcal{C}]}(\Delta Y, F), \quad G(f)(\eta) := \eta \circ \Delta f$$

darstellt. Man notiert $X = \varprojlim F$.

Def. Ein **Möchtegern-Limes** eines Funktors $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mit Projektionsabbildungen $f_J : X \to F(J)$ für alle $J \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, sodass $\forall\, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(J, I) : f_I = F(h) \circ f_J$.

Bem. Der Limes X ist durch folgende **universelle Eigenschaft** charakterisiert: Er ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Möchtegern-Limiten, d. h. er ist ein Möchtegern-Limes und für jeden weiteren Möchtegern-Limes X' gibt es genau einen Morphismus $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ mit $\forall\, J \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J}) : f'_J = f_J \circ g$.

Bem. Die univ. Eigenschaft zeigt: Der Limes ist funktoriell, d. h. wenn in $\mathcal{C}$ alle $\mathcal{J}$-Limiten (d. h. Limiten von Funktoren $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$) existieren, dann gibt es einen Funktor $\varprojlim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \to \mathcal{C}$.

Bem. Folgende Konzepte lassen sich als Spezialfall des Limes über eine spezielle Indexkategorie $\mathcal{J}$ auffassen:

Konzept	Indexkategorie $\mathcal{J}$
Terminales Objekt	$\emptyset$ (leere Kategorie)
Produkt	$\mathbf{2} := \{0, 1\}$ (kein nichttrivialer Morphismus)
Faserprodukt	$1 \to 0 \leftarrow 2$ (zwei nichttriviale Morphismen)
Differenzkern	$0 \rightrightarrows 1$ (zwei nichttriviale Morphismen)

Def. Sei $\mathcal{J}$ klein. Der **Kolimes** / **induktive Limes** eines Funktors $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, das den Funktor

$$G \in \hat{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} = [\mathcal{C}, \mathbf{Set}], \quad G(Y) := \mathrm{Hom}_{[\mathcal{J},\mathcal{C}]}(F, \Delta Y), \quad G(f)(\eta) := \Delta f \circ \eta$$

darstellt. Man notiert $X = \varinjlim F$.

Bem. Der Kolimes von $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ist der Limes von $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Bem. Wenn in $\mathcal{C}$ alle $\mathcal{J}$-Kolimiten existieren, dann gibt es einen Funktor $\varinjlim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \to \mathcal{C}$.

Bem. Folgende Konzepte sind ein Spezialfall des Kolimes:

Konzept	Indexkategorie $\mathcal{J}$
Initiales Objekt	$\emptyset$ (leere Kategorie)
Koprodukt	$\mathbf{2} := \{0, 1\}$ (kein nichttrivialer Morphismus)
Kofaserprodukt	$1 \to 0 \leftarrow 2$ (zwei nichttriviale Morphismen)
Kodifferenzkern	$0 \rightrightarrows 1$ (zwei nichttriviale Morphismen)

Satz. Angenommen, eine Kategorie $\mathcal{C}$ enthält ein term. Objekt, den Differenzkern von allen parallelen Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und das Produkt $X \times Y$ von allen Paaren von Objekten.
Dann existieren alle endlichen Limiten in $\mathcal{C}$, d. h. der Limes von jedem Funktor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, wobei $\mathcal{J}$ endlich ist. Duales gilt für endl. Kolimiten mit initialem Obj., Kodifferenzkern und Koprodukten.

Korollar. In **Set** existieren alle endlichen Limiten und Kolimiten.

Bem. Angenommen, in $\mathcal{C}$ existieren alle $\mathcal{J}$-Limiten. Sei $\mathcal{I}$ eine bel. Kategorie. Dann ex. alle $\mathcal{J}$-Limiten in $[\mathcal{I},\mathcal{C}]$ und die Limiten werden objektweise berechnet: Sei $F : \mathcal{J} \to [\mathcal{I},\mathcal{C}]$ ein Funktor, dann ist

$$(\varprojlim F)(I) = \varprojlim(F(-)(I)), \quad (\varprojlim F)(f) = \varprojlim(F(-)(f)).$$

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt **stetig**, wenn er **Limiten bewahrt**, d. h. für alle Funktoren $D : \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ (mit $\mathcal{J}$ klein) mit $\varprojlim D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ex. auch der Limes von $F \circ G$ in $\mathcal{D}$ und es gilt

$$\varprojlim(F \circ D) \cong F(\varprojlim D).$$

Ein Funktor F heißt **kostetig**, wenn er **Kolimiten bewahrt**.

Adjunktionen

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt **linksadjungiert** zum Funktor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, wenn es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G(-))$$

gibt (dabei sind beide Seiten Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$).
Dann heißt G auch **rechtsadjungiert** zu F. Man notiert $F \dashv G$.

Bem. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann besitzt F genau dann einen Rechtsadjungierten $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, wenn für alle $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ der Funktor

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,Y), \quad f \mapsto (- \circ F(f))$$

darstellbar ist, d. h. es existiert $GY \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Isomorphismen

$$a_X^Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,Y) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GY)$$

mit $\forall \phi \in \mathrm{Hom}(X',X) : a_{X'}^Y(- \circ F(\phi)) = a_X^Y(-) \circ \phi$.
Dann ist G auf Morphismen definiert durch

$$G(f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,Y')) := a_{GY}^{Y'}\left(f \circ (a_{GY}^Y)^{-1}(\mathrm{id}_{GY})\right).$$

Bem. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Setze

$$\eta_X := a_X^{FX}(\mathrm{id}_{FX}) : X \to GFX,$$
$$\epsilon_Y := (a_{GY}^Y)^{-1}(\mathrm{id}_{GY}) : FGY \to Y.$$

Dann sind $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ (genannt **Einheit**) und $\epsilon : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ (genannt **Koeinheit**) natürliche Transformationen und es gilt

$$(G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G) = \mathrm{id}_G, \quad (F \xrightarrow{\epsilon F} FGF \xrightarrow{F\eta} F) = \mathrm{id}_F.$$

Umgekehrt definieren zwei solche natürliche Transformationen η und ϵ, die diese Gleichungen erfüllen, eine Adjunktion zwischen F und G. Dabei ist η_X universell unter den Morphismen von $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ zu einem Objekt der Form GY: Für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,GY)$ gibt es genau ein $h \in \mathrm{Hom}(FX,Y)$ mit $f = G(h) \circ \eta_X$, und zwar $h = (a_X^Y)^{-1}(f)$. Duales gilt für ϵ_Y.

Lemma (Verknüpfung von Adjunktionen)**.**
Sei $F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zu $G_1 : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und $F_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ zu $G_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ linksadj. Dann ist $F_2 \circ F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ zu $G_1 \circ G_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ linksadjungiert.

Lemma (Eindeutigkeit des adjungierten Funktors)**.**

- Gelte $F \dashv G_1$ und $F \dashv G_2$. Dann sind G_1 und G_2 nat. isomorph.
- Gelte $F_1 \dashv G$ und $F_2 \dashv G$. Dann sind F_1 und F_2 nat. isomorph.

Bem. Sei $(F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}) \dashv (G : \mathcal{D} \to \mathcal{C})$ eine Adjunktion und $\mathcal{J}$ klein. Dann gibt es eine ind. Adjunktion $(F \circ - : [\mathcal{J},\mathcal{C}] \to [\mathcal{J},\mathcal{D}]) \dashv (G \circ -)$.

Bspe.
- Angenommen, in $\mathcal{C}$ existieren $\mathcal{J}$-Limiten bzw. $\mathcal{J}$-Kolimiten. Dann gibt es eine Adjunktion $\Delta \dashv \varprojlim$ bzw. $\varinjlim \dashv \Delta$.
- Sei $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ der Funktor, der die freie Gruppe über einer Menge bastelt und $V : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ der Vergiss- funktor. Dann gilt $F \dashv V$. Gleiches gilt für viele weitere „freie“ Konstruktionen.
- Sei **KHaus** die Kat. der kompakten Hausdorffräume und $K : \mathbf{Top} \to \mathbf{KHaus}$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung und $I : \mathbf{KHaus} \to \mathbf{Top}$ die Inklusion. Dann gilt $K \dashv I$.

Def. Im Spezialfall, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Präordnungskategorien sind, wird ein Paar von adjungierten Funktoren (d. h. monotonen Abbildungen) zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ auch **Galoisverbindung** genannt.

Bspe.
- $(\lceil - \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}) \dashv (i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}) \dashv (\lfloor - \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z})$
- Sei $L \supset K$ eine endl. Körpererweiterung. Für eine Zwischenerw. $L \supseteq M \supseteq K$ sei $\mathrm{Gal}(L,M) := \{f \in \mathrm{Aut}(L) \,|\, f|_M = \mathrm{id}_M\}$ die Galoisgruppe von L über M. Dann ist

$$\{\,\text{Untergruppen von } \mathrm{Gal}(L,K)\,\} \leftrightarrow \{\,\text{Zwischenerw. } L \supseteq M \supseteq K\,\}$$
$$G \mapsto \{x \in L \,|\, \forall \sigma \in G : \sigma(x) = x\}$$
$$\mathrm{Gal}(L,M) \leftarrow M$$

eine Galoisverbindung (dabei sind Untergruppen durch Inklusion und Zwischenerweiterungen umgekehrt durch Inklusion geordnet).

Lemma. Sei $F \dashv G$ eine Adjunktion. Dann gilt:
- F bewahrt Kolimiten (**LAPC**, left-adjoints preserve colimits).
- G bewahrt Limiten (**RAPL**, right-adjoints preserve limits).

Beweis (RAPL)**.** Sei $\mathcal{J}$ eine kleine Indexkategorie. Es gilt:

$$(F \circ -) \circ (\Delta : \mathcal{C} \to [\mathcal{J},\mathcal{C}]) \dashv (\varprojlim : [\mathcal{J},\mathcal{C}] \to \mathcal{C}) \circ (G \circ -),$$
$$(\Delta : \mathcal{D} \to [\mathcal{J},\mathcal{D}]) \circ F \dashv G \circ (\varprojlim : [\mathcal{J},\mathcal{D}] \to \mathcal{D}).$$

Da $(F \circ -) \circ \Delta \equiv \Delta \circ F$, folgt aus der Eindeutigkeit des Rechtsadjungierten $\varprojlim(G \circ D) \cong G(\varprojlim D)$ natürlich in D.

Def. Eine **monoidale Kategorie** $\mathcal{C}$ besitzt einen Funktor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (genannt Tensorprodukt), ein Objekt $1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und natürliche Isomorphismen (die zwei Kohärenzbedingungen erfüllen)

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \cong X \otimes (Y \otimes Z), \quad \lambda_X : 1 \otimes X \cong X, \quad \rho_X : X \otimes 1 \cong X.$$

Def. Sei $(\mathcal{C},\otimes)$ eine monoidale Kategorie. Ein **interner Hom-Funktor** ist ein Funktor $[-,-] : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, für den gilt: für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ der Funktor $- \otimes X$ linksadjungiert zu $[X,-]$ ist, d. h.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes X, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,[X,Z]).$$

Notation. $[X,Y] =: Y^X$ heißt auch **Exponentialobjekt**.

Def. Eine monoidale Kategorie heißt **kartesisch abgeschlossen**, wenn sie einen internen Hom-Funktor besitzt.

Bspe. **Set**, **AbGrp**, $k-$**Vect** und **Cat** sind kartesisch abgeschl.

Simpliziale Mengen

Def. **Verklebedaten** sind gegeben durch einen Funktor

$$X : \Delta_{\mathrm{strikt}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ_{strikt} die Kategorie mit den Mengen $[n] := \{0,1,\ldots,n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und streng monotonen Abbildungen.

Notation. $X_{(n)} := X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes.

Def. Das **Standard-n-Simplex** $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die von den $(n+1)$ Standardbasisvektoren aufgespannte affinlineare Hülle. Eine streng monotone Abb $f : [n] \to [m]$ induziert durch Abbilden des i-ten Basisvektors auf den $f(i)$-ten eine Inklusion $\Delta_f : \Delta_n \to \Delta_m$,

Def. Die **geometrische Realisierung** von Verklebedaten X ist der topologische Raum

$$|X| := \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_{(n)})\right)/R$$

Dabei ist $X_{(n)}$ diskret. Die Äquivalenzrelation R wird erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\ x \in X_{(n)},\ f : [m] \to [n] \text{ s.m.s.}$$

Def. Das **k-Skelett** $\mathrm{sk}_k\, X$ von Verklebedaten X ist definiert durch

$$(\mathrm{sk}_k\, X)_{(n)} := \{x \in X_{(n)} \,|\, n \le k\}, \quad (\mathrm{sk}_k\, X)(f) := X(f) \text{ sofern möglich}$$

Def. Eine **simpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ die Kategorie mit den Mengen $[n] := \{0,1,\ldots,n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und monotonen Abbildungen.

Notation. $X_n := X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes.

Def. Eine **simpliziale Abbildung** zw. simpl. Mengen X und Y ist eine nat. Transformation zwischen den Funktoren $X, Y : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

Def. Die Kategorie der simplizialen Mengen ist $\mathbf{sSet} := [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$.

Def. Die **geometrische Realisierung** einer simplizialen Menge X ist der topologische Raum

$$|X| := \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n)\right)/R$$

Die Äquivalenzrelation R wird dabei erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\ x \in X_n \text{ u. } f \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([m],[n]).$$

Def. Ein topologischer Raum heißt **trianguliert**, wenn er die Realisierung von Verklebedaten ist.

Def. Der **Nerv** einer Überdeckung $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ eines topologischen Raumes ist die simpliziale Menge

$$X_n := \{(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in A^{n+1} \,|\, U_{\alpha_0} \cap ... \cap U_{\alpha_n} \ne \emptyset\}$$
$$X(f)(\alpha_0, ..., \alpha_n) := (\alpha_{f(0)}, ..., \alpha_{f(m)}) \quad \text{für } f : [m] \to [n].$$

Bem. Falls die Überdeckung lokal endlich ist und alle nichtleeren, endlichen Schnitte $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$ zusammenziehbar sind, so ist die geom. Realisierung des Nerves der Überdeckung homotopieäq. zu X.

Def. Sei Y ein topol. Raum. Die simpliziale Menge X der **singulären Simplizes** in Y ist

$$X_n := \{\text{stetige Abb. } \sigma : \Delta_n \to Y\}, \quad X_n(f)(\sigma) := \sigma \circ \Delta_f.$$

Bem. Diese Konstruktion stiftet eine Funktor $\text{Sing} : \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$.

Def. $\Delta[p]_n := \{ g : [n] \to [p] \text{ monoton steigend} \}$, $\Delta[p](f)(g) := g \circ f$

Def. Der **klassifizierende Raum** einer Gruppe G ist gegeben durch die Realisierung der simpl. Menge BG mit $(BG)_n := G^n$ und

$$BG(f : [m] \to [n])(g_1, \ldots, g_n) := (h_1, \ldots, h_m), \quad h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j.$$

Def. Ein n-Simplex $x \in X_n$ heißt **degeneriert**, falls eine monotone surjektive Abbildung $f : [n] \to [m]$, $n > m$ und ein Element $y \in X_m$ existiert mit $x = X(f)(y)$.

Def. Seien X Verklebedaten. Wir konstruieren eine dazugehörende simpliziale Menge $\tilde{X}$ wie folgt:

$$\tilde{X}_n := \{(x, g) \mid x \in X_{(k)}, g : [n] \to [k] \text{ monoton und surjektiv}\},$$

Für eine monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ und $(x, g) \in \tilde{X}_n$ schreiben wir zunächst $g \circ f = f_1 \circ f_2$ mit einer Injektion f_1 und einer Surjektion f_2 und setzen $\tilde{X}(f)(x, g) := (X(f)(x), f_2)$.

Prop. Eine simpliziale Menge $\tilde{X}$ kann genau dann aus (dann eindeutigen) Verklebedaten gewonnen werden, falls für alle nicht-degenerierten Simplizes $x \in \tilde{X}_n$ und streng monotonen Abbildungen $f : [m] \to [n]$ auch $\tilde{X}(f)(x) \in \tilde{X}_m$ nicht degeneriert ist.

Prop. Seien X Verklebedaten, $\tilde{X}$ die entsprechende simpliziale Menge. Dann gilt $|X| \approx |\tilde{X}|$.

Def. Das **k-Skelett** $\text{sk}_k X$ einer simplizialen Menge X ist geg. durch

$$(\text{sk}_k X)_n := \{X(f)(x) \mid p \leq k, f : [n] \to [p] \text{ monoton}, x \in X_p\}.$$

Def. Eine simpliziale Menge X hat **Dimension** n, falls $X = \text{sk}_n X$.

Prop. Geom. Realisierung ist ein Funktor $|{-}| : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$.

Bspe.
- Eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eines topologischen Raumes ist Verfeinerung von $(V_\beta)_{\beta \in B}$, wenn es eine Abbildung $\psi : A \to B$ gibt, sodass $U_\alpha \subset V_{\psi(\alpha)}$ für alle $\alpha \in A$. Dies induziert eine simpliziale Abb. zwischen den Nerven der Überdeckungen durch

$$F_n(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) := (\psi(\alpha_0), \ldots, \psi(\alpha_n)).$$

- Ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$ stiftet eine Abbildung $BG \to BH$ zwischen den klassifizierenden Räumen durch

$$F(g_1, \ldots, g_n) := (\phi(g_1), \ldots, \phi(g_n)).$$

Def. Ein **simplizialer topologischer Raum** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \to \mathbf{Top}.$$

Bem. Die geometrische Realisierung eines simplizialen topol. Raumes ist definiert wie die einer simplizialen Menge mit dem Unterschied, dass X_n im Allg. nicht die diskrete Topologie trägt.

Def. Eine **bisimpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Notation. $X_{nm} := X([n], [m])$

Bsp. Das **direkte Produkt** von simplizialen Mengen X und Y ist die bisimpliziale Menge

$$(X \times Y)_n := X_n \times Y_n, \quad (X \times Y)(f, g)(x, y) := (f(x), g(y)).$$

Def. Die **Diagonale** DX einer bisimplizialen Menge X ist die simpliziale Menge mit $(DX)_n := X_{nn}$ und $DX(f) := X(f, f)$.

Def. Sei X eine bisimpliziale Menge.
- Setze $|X|^D := |DX|$.
- Definiere einen simplizialen topologischen Raum X^I durch

$$X^I_n := |X_{\bullet n}|, \quad X^I(g) := |X(\text{id}, g)|.$$

  Setze $|X|^{I,II} := |II, I|$.
- Definiere analog $|X|^{II,I}$.

Satz (Eilenberg-Zilber). $|X|^D \cong |X|^{I,II} \cong |X|^{II,I}$ kanonisch.

Def. Der **Nerv** $\mathcal{NC}$ einer kleinen Kategorie $\mathcal{C}$ ist die simpl. Menge

$$\mathcal{NC}_n := \left\{ \text{Diagramme } X_0 \xrightarrow{\varphi_1} X_1 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_n} X_n \text{ in } \mathcal{C} \right\}$$

$$\mathcal{NC}(f : [m] \to [n])(X_0 \xrightarrow{\varphi_1} \ldots \xrightarrow{\varphi_n} X_n) := (Y_0 \xrightarrow{\psi_1} \ldots \xrightarrow{\psi_m} Y_m)$$
$$\text{mit } Y_i := X_{f(i)}, \quad \psi_i := \varphi_{f(i)} \circ \ldots \circ \varphi_{f(i-1)+1}$$

Bsp. $\Delta[n] = \mathcal{NC}(\text{Präordnungskategorie mit Objekten } \{0, \ldots, n\})$

Bem.
- Der Nerv ist volltreuer Funktor $\mathcal{NC} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{sSet}$.
- Jede kleine Kat. kann aus ihrem Nerv zurückgewonnen werden.
- $\mathcal{N}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = D(\mathcal{NC} \times \mathcal{ND})$

Bem. Mit $X * Y := D(X \times Y)$ ist **sSet** eine monoidale Kategorie.

Prop. **sSet** ist kartesisch abgeschlossen. Dabei ist

$$[X, Y]_n = (Y^X)_n := \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n] * X, Y).$$

Prop. Der Nervfunktor ist verträglich mit dem internen Hom: Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kleine Kategorien. Dann ist

$$\mathcal{N}([\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\mathbf{Cat}}) \cong [\mathcal{NC}, \mathcal{ND}]_{\mathbf{sSet}}.$$

Garben

Def.
- Eine mengenwertige **Prägarbe** $\mathcal{F}$ auf einem topol. Raum X ist ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}} \to \mathbf{Set}$. Dabei ist $\mathbf{Ouv}(X)$ die Präordnungs-Kategorie der offenen Teilmengen von X geordnet durch Inklusion.
- Allgemeiner ist eine $\mathcal{C}$-wertige Prägarbe ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}} \to \mathcal{C}$ (z. B. $\mathcal{C} = \mathbf{AbGrp}, \mathbf{R\text{-}Mod}, \mathbf{Top}$).
- Ein Morphismus zwischen Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf demselben topol. Raum ist eine natürliche Transformation zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Notation. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe
- $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$ heißt Menge der **Schnitte** von $\mathcal{F}$ über U.
- $r_{UV} := \mathcal{F}(V \subseteq U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ heißt **Restriktionsabb.**
- $x|_V := r_{UV}(x)$ für $V \subseteq U$ und $x \in \mathcal{F}(U)$ heißt **Einschränkung** von x auf V.

Def. Eine **Garbe** auf einem topol. Raum X ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$, für die gilt: Für alle Familien $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen und Schnitten $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$, die miteinander verträglich sind, d. h.

$$\forall\, i, j \in I \,:\, s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j},$$

gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(\cup_{i \in I} U_i)$ mit $\forall\, i \in I \,:\, s_i = s|_{U_i}$. Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismen zw. den Prägarben.

Bem. Sei $\mathcal{F}$ eine (Prä-)Garbe auf X und $U \subseteq X$ offen. Dann definiert $(\mathcal{F}|U)(V) := \mathcal{F}(U \cap V)$ eine (Prä-)Garbe auf U.

Notation. Sei $\mathbf{PSh}(X) := [\mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}}, \mathbf{AbGrp}]$ die Kategorie der Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X und $\mathbf{Sh}(X) \subset \mathbf{PSh}(X)$ die volle Unterkategorie der Garben.

Def. Eine Sequenz $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ von (Prä-)Garben abelscher Gruppen auf X heißt **exakt** bei $\mathcal{G}$, falls für alle offenen $U \subset X$ die Sequenz $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ exakt bei $\mathcal{G}(U)$ ist.

Def. Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben auf X. Definiere Prägarben $\mathcal{K}$ und $\mathcal{C}$ auf X durch

$$\mathcal{K}(U) := \ker(f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)), \quad \mathcal{C}(U) := \mathcal{G}(U) / \operatorname{im}(f_U).$$

Prop. Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sogar ein Morphismus von Garben. Dann ist auch $\mathcal{K}$ eine Garbe.

Achtung. Aber $\mathcal{C}$ ist im Allgemeinen keine Garbe!

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y. Der **Halm** von $\mathcal{F}$ in $y \in Y$ ist

$$\mathcal{F}_y := \{(U, s) \mid U \subseteq Y \text{offen}, y \in U, s \in \mathcal{F}(U)\} / \sim,$$
$$(U, s) \sim (V, t) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, W \subset U \cap V \text{ offen}, y \in W \,:\, s|_W = t|_W.$$

Notation. $s_y := [(U, s)]$ für $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $y \in U$.

Sprechweise. Elemente $[t] \in \mathcal{F}_y$ heißen **Keime** in y.

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y, $Z \subseteq Y$ beliebig. Definiere

$$\Gamma(Z, \mathcal{F}) := \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{F}),$$

wobei der Limes über alle offenen $U \subset X$ mit $Z \subseteq U$ läuft.

Beobachtung. $\mathcal{F}_y = \Gamma(\{y\}, \mathcal{F})$

Def. Der **Totalraum** F einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf Y ist

$$F := \coprod_{y \in Y} \mathcal{F}_y$$

mit der Topologie erzeugt durch die Mengen

$$\{s_y \mid y \in U\} \quad \text{für } U \subseteq X \text{ offen}, \ s \in \mathcal{F}(U).$$

Bem. Mit dieser Topologie ist die Projektion $\pi : F \to Y$ stetig und ein lokaler Homöomorphismus.

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf Y. Die **Garbifizierung** $\mathcal{F}^+$ von $\mathcal{F}$ ist die Garbe der stetigen Schnitte von $\pi : F \to Y$, also

$$\mathcal{F}^+(U) \coloneqq \{f : U \to F \mid \pi \circ f = (i : U \hookrightarrow Y)\}.$$

Prop. Es ex. ein kanonischer Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ def. durch

$$s \in \mathcal{F}(U) \quad \mapsto \quad (y \mapsto s_y : U \to F).$$

Wenn $\mathcal{F}$ schon eine Garbe ist, dann ist f ein Isomorphismus.

Def. Sei A eine Menge (oder ab. Gruppe, ...), Y ein topol. Raum.

- Die **konstante Prägarbe** $\mathbf{A}$ mit Faser A auf Y ist def. durch
$$\mathbf{A}(U) \coloneqq A, \quad r_{UV} \coloneqq \mathrm{id}_A \quad \text{für alle } V \subseteq U \subseteq Y.$$
- Die **konstante Garbe** mit Faser A ist die Garbifizierung $\mathcal{A} = \mathbf{A}^+$ von $\mathbf{A}$.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf Y heißt **lokal konstant**, falls jeder offene Punkt in Y eine offene Umgebung U besitzt, sodass $F|U$ isomorph zu einer konstanten Garbe ist.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum Y heißt ...

- ... **welk** (flabby, flasque), wenn die Einschränkungsabbildungen
$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$$
für alle *offenenen* $U \subseteq Y$ surjektiv sind.
- ... **weich** (soft, mou), wenn die Einschränkungsabbildungen
$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \to \Gamma(A, \mathcal{F})$$
für alle *abgeschlossenen* $A \subseteq Y$ surjektiv sind.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ ab. Gruppen auf einem topol. Raum Y heißt **fein** (fine, fin), wenn für je zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq Y$ ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ existiert, sodass α auf einer offenen Umgebung von A_1 Null und auf einer offenen Umgebung von A_2 die Identität ist.

(Lokal) geringte Räume

Def. Eine topol. / glatte **Mannigfaltigkeit** ist ein Paar $(M, \mathcal{O}_M)$, wobei M ein Hausdorffraum und $\mathcal{O}_M$ eine Garbe auf M ist, sodass jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, sodass $\mathcal{O}_M|U$ isomorph zu einer Garbe von stetigen / glatten Funktionen auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Def. Ein Morphismus $\Phi : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ zwischen topol. / glatten Mften. ist geg. durch eine stetige Abb. $\phi : M \to N$, sodass

$$\forall U \subseteq N \text{ offen} : \forall f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_N) : f \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_M).$$

Bem. Diese Definitionen sind äquivalent zu den üblichen Alte-Römer-Definitionen von Mannigfaltigkeiten über Atlanten.

Def. Ein **geringter Raum** ist ein Paar $(M, \mathcal{O}_M)$, wobei M ein topol. Raum und $\mathcal{O}_M$ eine Ringgarbe auf M ist.
Ein Morphismus $\Phi : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ zwischen geringten Räumen ist ein Paar (φ, θ), wobei $\varphi : M \to N$ stetig und

$$\theta = (\theta_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_N) \to \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_M))_{U \Subset N \text{ offen}}$$

eine Familie von Ringhomomorphismen ist, sodass

$$\forall V \Subset U \Subset N : \theta_U(-)|_{\varphi^{-1}(V)} = \theta_V(-|_V).$$

Sprechweise. $\mathcal{O}_M$ heißt **Strukturgarbe**.

Bem. Man kann θ als Garbenmorph. $\theta : \mathcal{O}_N \to \varphi_\bullet(\mathcal{O}_M)$ auffassen.

Bsp. Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ eine glatte Mft. Sei $\mathcal{D}_M$ die Garbe der linearen, derivativen Operatoren, also

$$\mathcal{D}_M(U) \coloneqq \{ P : \mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U),\ P = \textstyle\sum f_I(z) \frac{\partial^I}{\partial z^I} \text{ in lok. Koord.} \}.$$

Dann ist $(M, \mathcal{D}_M)$ ein geringter Raum.

Def. Sei A ein komm. Ring. Das **Spektrum** von A ist

$$\mathrm{Spec}(A) \coloneqq \{ \text{Primideale } \mathfrak{p} \subsetneq A \}$$

mit der sogenannten **Zariski-Topologie** mit offenen Mengen

$$\mathcal{T} \coloneqq \{D(S) \mid S \subseteq A\} \subset \mathcal{P}(\mathrm{Spec}(A)), \quad D(S) \coloneqq \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid S \not\subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Die abgeschlossenen Mengen sind von der Form $V(S)$ für $S \subseteq A$ mit

$$V(S) \coloneqq \mathrm{Spec}(A) \setminus D(S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid S \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Für $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ offen sei $\Delta(U)$ das Komplement der Vereinigung der Ideale in U. Da $\Delta(U)$ multiplikativ abgeschlossen ist und $V \subseteq U \implies \Delta(V) \subseteq \Delta(U)$ gilt, können wir eine Prägarbe komm. Ringe $\mathcal{O}'$ auf $\mathrm{Spec}(A)$ wie folgt definieren:

$$\mathcal{O}'(U) \coloneqq (\Delta(U))^{-1} A, \quad r_{UV}([\tfrac{s}{t}]) \coloneqq [\tfrac{s}{t}].$$

Sei $\mathcal{O} \coloneqq \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \coloneqq (\mathcal{O}')^+$ die Garbifizierung von $\mathcal{O}'$.
Der geringte Raum $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O})$ heißt **affines Schema** von A.

Bem. Sei A ein Integritätsbereich. Dann ist das Nullideal $(0) \in \mathrm{Spec}(A)$ ein generischer Punkt, d. h. der topologische Abschluss von (0) ist ganz $\mathrm{Spec}(A)$.

Lemma. $(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}} \coloneqq \Delta(\mathfrak{p})^{-1} A$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$

Def. Ein Ring R heißt **lokal**, wenn er eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- Er besitzt genau ein maximales Linksideal.
- Er besitzt genau ein maximales Rechtsideal.
- Wenn eine endliche (evtl. leere) Summe von Ringelementen eine Einheit ist, dann auch einer der Summanden (insb. gilt $0 \neq 1$).
- $\mathrm{Spec}(R)$ hat genau einen abgeschl. Punkt (das maximale Ideal).

Bem. In lok. Ringen stimmen max. Links- und Rechtsideal überein.

Def. Seien R und S lokale Ringe mit max. Idealen $\mathfrak{m} \subset R$ und $\mathfrak{n} \subset S$. Ein **lokaler Ringhomomorphismus** zwischen R und S ist ein Ringhomomorphismus $f : R \to S$ mit $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$.

Def. Ein geringter Raum $(M, \mathcal{O}_M)$ heißt **lokal geringt**, wenn die Fasern $\mathcal{O}_{M,x}$ für alle $x \in M$ lokale Ringe sind.
Ein Morphismus $\Phi = (\varphi, \theta) : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ heißt **Morph. von lokal geringten Räumen**, wenn für alle $x \in M$ die ind. Abb.

$$\theta_x : \mathcal{O}_{N,y} \to \mathcal{O}_{M,x}$$

ein lokaler Homomorphismus von lokalen Ringen ist.

Bspe. Affine Schemata und Mften sind lokal geringte Räume.

Def. Ein **Schema** ist ein lokal geringter Raum $(S, \mathcal{O}_S)$, der lokal isomorph zum affinen Spektrum eines Ringes ist, d. h. jedes $x \in S$ besitzt eine offene Umgebung U, sodass $(U, \mathcal{O}_S|U)$ als lokal geringter Raum isomorph zum affinen Schema eines komm. Ringes ist.

Garben auf Siten

Def. Sei $\mathcal{S}$ eine Kategorie. Ein **Sieb** auf $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ ist eine Menge $\Phi = \{\varphi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(U_i, U) \mid i \in I\}$ von Morphismen nach U, sodass gilt:

$$\forall V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}),\ i \in I,\ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(V, U_i) : \varphi_i \circ \psi \in \Phi.$$

Bem. Sei Φ ein Sieb auf U, $f \in \mathrm{Hom}(V, U)$. Dann ist

$$f^*(\Phi) \coloneqq \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(W, V) \mid W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}), f \circ \varphi \in \Phi\}$$

ein Sieb auf V, die **Einschränkung** von Φ auf V (über f).

Def. Eine **Grothendieck-Topologie** auf einer Kategorie $\mathcal{S}$ ist gegeben durch eine Menge $C(U)$ von Sieben auf U für jedes $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ (den sogenannten **überdeckenden Sieben**), sodass gilt:

- Für alle $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ ist das Sieb aller Abb. nach U in $C(U)$.
- Die Einschränkung $f^*(\Phi)$ eines Siebes $\Phi \in C(U)$ über $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(V, U)$ ist in $C(U)$.
- Die Überdeckungseigenschaft lässt sich lokal testen:
Für Ψ ein bel. Sieb auf U und $\Phi \in C(U)$ überdeckend. Angenommen, für alle $(\varphi_i : U_i \to U) \in \Phi$ ist die Einschränkung von Ψ über φ_i überdeckend, also $\varphi_i^*(\Psi) \in C(U_i)$. Dann ist auch $\Psi \in C(U)$.

Def. Ein **Situs** ist eine Kategorie $\mathcal{S}$ mit Grothendieck-Topologie.

Def.
- Eine **Prägarbe** von Mengen auf einem Situs $\mathcal{S}$ ist ein kontravarianter Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.
- Allgemeiner ist eine $\mathcal{C}$-wertige Prägarbe ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ (z. B. $\mathcal{C} = \mathbf{AbGrp}, \mathbf{R\text{-}Mod}, \mathbf{Top}$).
- Ein Morphismus zwischen Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf demselben Situs ist eine natürliche Transformation zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Def. Eine **Garbe** auf einem Situs $\mathcal{S}$ ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$, für die gilt: Für alle überdeckenden Siebe $\Phi \in C(U)$ und Familien von Schnitten $(s_\varphi \in \mathcal{F}(V))_{(\varphi : V \to U) \in \Phi}$, die miteinander vertr. sind, d. h.

$$\forall (\varphi : V \to U) \in \Phi : \forall \psi : W \to V : s_{\varphi \circ \psi} = s_\varphi|_W \coloneqq \mathcal{F}(\psi)(s_\varphi),$$

gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$\forall (\varphi : V \to U) \in \Phi : s_\varphi = s|_V \coloneqq \mathcal{F}(\varphi)(s).$$

Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismen zw. den Prägarben.

Bem. Die Notationen und Sprechweisen für (Prä-)Garben auf gew. topol. Räumen werden auch für Garben auf Siten angewendet.
Man notiert weiterhin $s|_V \coloneqq \mathcal{G}(f)(s)$ für für die Einschränkung eines Schnittes $s \in \mathcal{G}(U)$ über $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(V, U)$ (wohlwissend, dass die Einschränkung auch von f abhängt).

Bsp. Sei G eine Gruppe und $\mathcal{S}_G$ die Kategorie der Mengen mit G-Wirkung und äquivarianten Abbildungen. Man nennt ein Sieb Φ über $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}_G)$ überdeckend, wenn $U = \cup_{(\varphi:V\to U)\in\Phi}\varphi(V)$.
Sei $\mathbf{Sh}_G$ die Kategorie der Garben über dem Situs $\mathcal{S}_G$.
Sei $G_l := G \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}_G)$ mit der Linkswirkung $g.h := gh$.
Es gibt einen Funktor $\alpha : \mathbf{Sh}_G \to \mathcal{S}_G$ mit $\alpha(F) := F(G_l) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}_G)$, wobei G auf $F(G_l)$ durch $g.x := F(h \mapsto hg)(x)$ für $x \in F(G_l)$ wirkt.

Prop. $\alpha : \mathbf{Sh}_G \to \mathcal{S}_G$ ist eine Kategorienäquivalenz.

Komplexe und (Ko-)Homologie

Def.
- Ein **Kettenkomplex** $C_\bullet$ ist eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ mit der Eigenschaft $\partial_{n-1}\circ\partial_n = 0$.
- Ein **Kokettenkomplex** $C^\bullet$ ist eine Folge $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ mit der Eigenschaft $\delta^{n+1}\circ\delta^n = 0$.

Def. Sei $C_\bullet$ ein Kettenkomplex.
- C_n heißt Gruppe der **n-Ketten**,
- $\partial : C_n \to C_{n-1}$ heißt **Randabbildung**,
- $Z_n(C_\bullet) := \ker\partial_n \subset C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) := \mathrm{im}\,\partial_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$ heißt **n-te Homologiegruppe**.

Analog nennt man für einen Kokettenkomplex $C^\bullet$
- δ^n **Korandabbildung**,
- C^n **n-Koketten**,
- $Z^n := \ker\delta^n$ **n-Kozykel**,
- $B^n := \mathrm{im}\,\delta^{n-1}$ **n-Koränder**,
- $H^n(C^\bullet) := Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet)$ n-te **Kohomologiegruppe**.

Def. Eine Morphismus $f : C_\bullet \to D_\bullet$ (bzw. $f : C^\bullet \to D^\bullet$) zwischen (Ko-)Kettenkomplexen ist eine Familie von Abbildungen
$$(f_n : C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\text{bzw. } (f^n : C^n \to D^n)_{n\in\mathbb{N}}),$$
die mit den Randabbildungen verträglich sind, d. h.
$$f_{n-1}\circ\partial_n^C = \partial_n^D \circ f_n \quad (\text{bzw. } f^{n+1}\circ\delta_C^n = \delta_D^n\circ f^n) \quad \text{für alle } n.$$

Prop. H_n (bzw. H^n) ist ein Funktor von der Kategorie der (Ko-)Kettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Def. Sei X eine simpl. Menge. Sei $C_n(X)$ die von den n-Simplizes X_n erzeugte abelsche Gruppe (d. h. die Gruppe der endl. formalen Linearkombinationen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). Sei $\delta_n^i : [n-1] \to [n]$ diejenige streng monotone Abb. mit $i \notin \mathrm{im}\,\delta_n^i$. Definiere
$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X), \quad \sum_{\sigma\in X_n}\lambda_\sigma\cdot\sigma \mapsto \sum_{\sigma\in X_n}\lambda_\sigma\sum_{i=0}^{n}(-1)^i X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Prop. $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ ist ein Kettenkomplex (d. h. $\partial_{n-1}\circ\partial_n = 0$)

Def. Sei X eine simpl. Menge und A eine ab. Gruppe. Dann ist …
- … der **Kettenkomplex** $(C_\bullet(X;A), \partial_\bullet)$ von X **mit Koeffizienten** in A definiert durch
$$C_n(X;A) := C_n(X)\otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad \partial_n := \partial_n\otimes\mathrm{id} : C_n(X;A) \to C_{n-1}(X;A).$$
- … der **Kokettenkomplex** $(C^\bullet(X;A), \delta^\bullet)$ von X mit **Koeffizienten** in A definiert durch
$$C^n(X;A) := \mathrm{Hom}(C^n(X), A),$$
$$\delta^n : C^n(X;A) \to C^{n+1}(X;A), \quad f \mapsto f\circ\delta_{n+1}.$$

Beobachtung. $C_n(X;\mathbb{Z}) = C_n(X)$

Notation. Sei X eine simpliziale Menge. Setze
- $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$,
- $H^n(X) := H^n(C^\bullet(X;\mathbb{Z}))$,
- $H_n(X;A) := H_n(C_\bullet(X;A))$,
- $H^n(X;A) := H^n(C^\bullet(X;A))$.

Prop. Für jede simpl. Menge X ex. ein kanonischer Isomorphismus
$$H_0(X,\mathbb{Z}) \cong \text{freie ab. Gr. erzeugt von Zshgskomponenten von } |X|.$$

Def. Der **Kegel** CX über Verklebedaten X ist definiert durch
$$(CX)_{(0)} := X_{(0)} \amalg \{\star\}, \quad (CX)_{(n)} := X_{(n)} \amalg (X_{(n-1)}\times\{\star\}),$$
$$(CX)(f)(x) := X(f)(x),$$
$$(CX)(f)(x,*) := \begin{cases} X(i\mapsto f(i)-1)(x), & \text{wenn } f(0) > 0,\\ (X(i\mapsto f(i{+}1)-1)(x), *), & \text{wenn } f(0) = 0.\end{cases}$$

Def. Für Verklebedaten ist der zugeh. (Ko-)Kettenkomplex (mit Koeffizienten) genauso definiert wie für simpliziale Mengen.

Prop. $H_0(CX) = \mathbb{Z}$, $H_{>0}(CX) = 0$

Def. Sei X eine simpliziale Menge.
- Ein **homol. Koeffizientensystem** $\mathcal{A}$ auf X ist ein Funktor
$$\mathcal{A} : (1\downarrow X) \to \mathbf{AbGrp}.$$
Dabei ist $1 : \mathbf{1} \to \mathbf{Set}$ der Funktor, der konstant $\{\star\}$ ist (und $\mathbf{1}$ die Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismus).
Expliziter besteht ein Koeffizientensystem aus einer abelschen Gruppe $\mathcal{A}_\sigma$ für jedes n-Simplex $\sigma \in X_n$ und Abbildungen $\mathcal{A}(f,\sigma) : \mathcal{A}_\sigma \to \mathcal{A}_{X(f)(\sigma)}$ für alle $\sigma \in X_n$, $f \in \mathrm{Hom}_\Delta([m],[n])$ mit
$$\mathcal{A}(\mathrm{id},\sigma) = \mathrm{id}, \quad \mathcal{A}(f\circ g,\sigma) = \mathcal{A}(g, X(f)(\sigma))\circ\mathcal{A}(f,\sigma).$$
- Ein **kohomol. Koeffizientensystem** $\mathcal{B}$ auf X ist ein Funktor
$$\mathcal{B} : (1\downarrow X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{AbGrp}.$$
- Ein Morphismus zw. (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf derselben simpl. Menge ist eine natürliche Transformation.

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung und X deren Nerv. Dann definiert
$$\mathcal{F}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n} := \{U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_n} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\},$$
$$\mathcal{F}(f,(\alpha_0,\ldots,\alpha_n))(\phi) := \text{passende Einschränkung von } \phi.$$
ein kohomologisches Koeffizientensystem auf X.

Def. Sei $\mathcal{A}$ ein homologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X. Wir setzen
$$C_n(X;\mathcal{A}) := \{ \text{ formale endl. Linearkomb. } \sum_{\sigma\in X_n}\lambda_\sigma\cdot\sigma \text{ mit } \lambda_\sigma\in\mathcal{A}_\sigma \}$$
und definieren $\partial_n : C_n(X;\mathcal{A}) \to C_{n-1}(X;\mathcal{A})$ durch
$$\sum_{\sigma\in X_n}\lambda_\sigma\cdot\sigma \;\mapsto\; \sum_{\sigma\in X_n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mathcal{A}(\partial_n^i,\sigma)(\lambda_\sigma)\cdot X(\partial_n^i)(\sigma).$$
Die Homologiegruppen des so def. Kettenkomplexes $C_\bullet(X;\mathcal{A})$ heißen **Homologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in $\mathcal{A}$**.

Def. Sei $\mathcal{B}$ ein kohomologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X. Wir setzen
$$C^n(X;\mathcal{B}) := \{ \text{ Funktionen } f : (\sigma\in X_n) \to \mathcal{B}_\sigma \}$$
und definieren $\delta_n : C^n(X;\mathcal{B}) \to C_{n+1}(X;\mathcal{B})$ durch
$$\delta^n(f)(\sigma) := \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\mathcal{B}(\partial_{n+1}^i,\sigma)(f(X(\partial_{n+1}^i)(\sigma))).$$
Die Kohomologiegruppen des so def. Kokettenkomplexes $C^\bullet(X;\mathcal{B})$ heißen **Kohomologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in $\mathcal{B}$**.

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $U = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$, X und $\mathcal{F}$ wie im letzten Beispiel. Die Homologiegruppen $H^n(X,\mathcal{F})$ werden Čech-Kohomologiegruppen der Garbe der stetigen Funktionen auf Y bzgl. der Überdeckung U genannt.

Def. Eine (lange) **exakte Sequenz** ab. Gruppen ist ein (Ko-)Kettenkomplex mit verschwindenden Homologiegruppen, d. h.
$$\mathrm{im}\,\partial_n = \ker\partial_{n-1} \quad \text{für alle } n.$$

Def. Eine **kurze ex. Sequenz** (k. e. S.) ist eine ex. Seq. der Form
$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Def. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Die Sequenz heißt **spaltend**, falls sie isomorph zur k. e. S. $0 \to A \to A\oplus C \to C$ ist.

Prop. Für eine Sequenz $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ sind äquivalent:
- Die Sequenz spaltet.
- Es existiert eine Retraktion $r : B \to A$ mit $r\circ f = \mathrm{id}_A$.
- Es existiert ein Schnitt $s : C \to B$ mit $g\circ s = \mathrm{id}_C$.

Def. Eine Sequenz $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ von Komplexen heißt **exakt**, wenn für alle n die Seq. $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ exakt ist.

Prop. Eine kurze exakte Sequenz $0 \to A^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C^\bullet \to 0$ von Kokettenkomplexen induziert eine lange exakte Sequenz
$$\ldots \to H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^\bullet)} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{H^n(p^\bullet)} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A^\bullet) \to \ldots$$

Lemma. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann sind ebenfalls exakt:
$$0 \to C_\bullet(X;A) \to C_\bullet(X;B) \to C_\bullet(X;C) \to 0,$$
$$0 \to C^\bullet(X;A) \to C^\bullet(X;B) \to C^\bullet(X;C) \to 0.$$

Korollar. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann existieren lange exakte Sequenzen
$$\ldots \to H_n(X;A) \to H_n(X;B) \to H_n(C) \to H_{n-1}(X;A) \to \ldots$$
$$\ldots \to H^n(X;A) \to H^n(X;B) \to H^n(C) \to H^{n+1}(X;A) \to \ldots$$

Def. Eine Sequenz $0 \to \mathcal{B}' \to \mathcal{B} \to \mathcal{B}'' \to 0$ von (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf einer simpl. Menge X heißt **exakt**, falls

$$0 \to \mathcal{B}'_\sigma \to \mathcal{B}_\sigma \to \mathcal{B}''_\sigma \to 0 \qquad \text{für alle } \sigma \in X_n \text{ exakt ist.}$$

Lemma. Eine kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{B}' \to \mathcal{B} \to \mathcal{B}'' \to 0$ von (ko-)homologischen Koeff'systemen induziert kurze ex. Sequenzen

$$0 \to C_\bullet(X; \mathcal{B}') \to C_\bullet(X; \mathcal{B}) \to C_\bullet(X; \mathcal{B}'') \to 0,$$
$$0 \to C^\bullet(X; \mathcal{B}') \to C^\bullet(X; \mathcal{B}) \to C^\bullet(X; \mathcal{B}'') \to 0$$

und damit auch entsprechende lange exakte Sequenzen.

Def. Eine **simpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{AbGrp}$.

Def. Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe.
Dann ist $(A_\bullet, \partial)$ ein Kettenkomplex mit

$$\partial_n : A_n \to A_{n-1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A(\partial_n^i)(a).$$

Def. Eine **kosimpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A : \Delta \to \mathbf{AbGrp}$.

Def. Sei A eine kosimpliziale abelsche Gruppe.
Dann ist $(A^\bullet, \delta)$ ein Kokettenkomplex mit

$$\delta^n : A^n \to A^{n+1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A(\partial_{n+1}^i)(a).$$

Def. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine (nicht unbedingt offene) Überdeckung von Y und $\mathcal{F}$ eine Garbe ab. Gruppen auf Y. Die kosimpliziale abelsche Gruppe $\check{C}(U, \mathcal{F})$ der **Čech-Koketten** ist

$$\check{C}^m(U, \mathcal{F}) \coloneqq \prod_{\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in A} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}),$$
$$\check{C}(U, \mathcal{F})(f : [m] \to [n])((f_{\alpha_0, \ldots, \alpha_m})_{\alpha_0, \ldots, \alpha_m}) \coloneqq$$
$$(f_{g(0), \ldots, g(m)}|U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n})_{\alpha_0, \ldots, \alpha_n}.$$

Bem. Die Randabb. im zugeh. Kokettenkomplex ist gegeben durch

$$(\delta^n \phi)_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1}} \coloneqq \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \phi_{\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha_i}, \ldots, \alpha_{n+1}}.$$

Def. Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes heißen **Čech-Homologiegruppen** von $\mathcal{F}$ bzgl. der Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Bem. $\check{H}(U, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$ hängt nicht von der Überdeckung ab.

Def. Sei Y ein topol. Raum und X dessen simpl. Menge der singulären Simplizes. Die Homologiegruppen von $C_\bullet(X; A)$ heißen **singuläre Homologiegruppen** $H_n(Y; A)$ von Y mit Koeff. A.

Def. Sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mft, $\Omega^k(M)$ das $C^\infty(M)$-Modul der k-Formen auf M. Die **äußere Ableitung** $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ ist in lokalen Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n)$ definiert durch

$$\mathrm{d}\left(\sum_{|I|=k} f_I \mathrm{d}x^I\right) = \sum_{|I|=k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^I.$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Komplexes $\Omega^\bullet(M)$ heißen **De-Rham-Kohomologiegruppen**.

Def. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und A ein $\mathfrak{g}$-Modul. Setze $C^k(\mathfrak{g}, A) \coloneqq L(\wedge^k \mathfrak{g}, A)$ und definiere $\mathrm{d} : C^k(\mathfrak{g}, A) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}, A)$ durch eine allgemeine Cartan-Formel

$$(\mathrm{d}c)(g_1, \ldots, g_{k+1}) \coloneqq \sum_{1 \le j < l \le k+1} (-1)^{j+l-1} c([g_j, g_l], g_1, \ldots, \hat{g_j}, \ldots, \hat{g_l}, \ldots, g_{k+1})$$
$$+ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j g_j c(g_1, \ldots, \hat{g_j}, \ldots, g_{k+1}).$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Kokettenkomplexes werden mit $H^\bullet(\mathfrak{g}, A)$ bezeichnet.

Def. Eine **Kettenhomotopie** zw. Morphismen $f, g : C_\bullet \to D_\bullet$ von Kettenkomplexen ist eine Folge von Homomorphismen $k_n : C_n \to D_{n+1}$ mit $\forall\, n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1}^D \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n^C = f_n - g_n$.

Lemma. Seien $f, g : C_\bullet \to D_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt

$$H_n(f) = H_n(g) \quad \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Prop.
- Seien $\phi, \psi : X \to Y$ homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Dann sind die induzierten Abbildungen $\phi_*, \psi_* : C_\bullet(X; A) \to C_\bullet(Y; A)$ kettenhomotop.
- Seien $\phi, \psi : M \to N$ zwei glatt homotope Abbildungen von $\mathcal{C}^\infty$-Mften. Dann sind $\phi^*, \psi^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$.

Korollar. Homotopieäquivalente Räume besitzen isomorphe singuläre Homologiegruppen.

Abelsche und additive Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Axiom. $\mathcal{C}$ ist erfüllt **A1**, wenn sie über **AbGrp** angereichtert ist, d. h. die Morphismenmengen sind ab. Gruppen und die Verknüpfung

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

ist für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ bilinear.

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A2**, wenn es ein **Nullobjekt** $0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt mit

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0) = \text{Nullgruppe} = \{\mathrm{id}_0\}.$$

Bem. Dann ist auch $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0) = \mathrm{Hom}(0, X) = 0$ für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A3**, wenn es für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt $X \oplus Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (genannt **direkte Summe**) und Morphismen

$$X \underset{p_X}{\overset{i_X}{\rightleftarrows}} X \oplus Y \underset{i_Y}{\overset{p_Y}{\rightleftarrows}} Y$$

gibt mit • $p_X \circ i_X = \mathrm{id}_X$, • $p_Y \circ i_Y = \mathrm{id}_Y$, • $p_Y \circ i_X = 0$,
• $p_X \circ i_Y = 0$, • $(i_X \circ p_X) + (i_Y \circ p_Y) = \mathrm{id}_{X \oplus Y}$.

Bem. $X \oplus Y$ ist sowohl Produkt als auch Koprodukt von X und Y.

Def. Der **Kern** $\ker \varphi$ eines Morphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ist ein Paar $(K \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K, X))$ mit sodass $\varphi \circ k = 0$, sodass es für alle $k' \in \mathrm{Hom}(K', X)$ mit $\varphi \circ k'$ einen eindeutigen Morphismus $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K', K)$ mit $k' = k \circ h$ gibt.

Bem. Die Definition des Kerns ist äquivalent zur folgenden:
Der Kern von φ ist das darstellende Obj. $K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{AbGrp})$ des Funktors

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{AbGrp}, \quad Z \mapsto \ker(\varphi \circ - : X(Z) \to Y(Z)), \quad f \mapsto (- \circ f).$$

Def. Der **Kokern** $\operatorname{coker} \varphi$ eines Morphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ist ein Paar $(C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C))$ mit $c \circ \varphi = 0$, sodass es für alle $c' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C')$ mit $c' \circ \varphi = 0$ einen eindeutigen Morphismus $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ mit $c' = h \circ c$ gibt.

Bem. Die Definition des Kokerns ist äquivalent zur folgenden:
Der Kern von φ ist ein Morphismus $c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C)$, sodass

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Z) \xrightarrow{c \circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{\varphi \circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \to 0$$

für alle $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ exakt ist.

Achtung. Der Kokern ist *nicht* das darstellende Obj. des Funktors

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{AbGrp}, \quad Z \mapsto \operatorname{coker}(\varphi \circ - : X(Z) \to Y(Z)), \quad f \mapsto (- \circ f).$$

Bem. Kern und Kokern sind eindeutig bis auf Isomorphismus.

Def. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Dann heißt
- $\operatorname{im} \varphi \coloneqq \ker(\operatorname{coker} \varphi)$ **Bild** von φ,
- $\operatorname{coim} \varphi \coloneqq \operatorname{coker}(\ker \varphi)$ **Kobild** von φ.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein Morphismus.
- f heißt **Monomorphismus**, wenn f linkskürzbar ist, d. h.
  $$\forall\, X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) : \forall\, g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \;:\; f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$
- f heißt **Epimorphismus**, wenn f rechtskürzbar ist, d. h.
  $$\forall\, Y' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) : \forall\, g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y') \;:\; g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Lemma. Kerne sind Monomorphismen, Kokerne Epimorphismen.

Lemma.
- Sei (K, k) der Kern von φ. Dann gilt
  $$\varphi \text{ ist ein Monomorphismus} \iff K \cong 0.$$
- Sei (C, c) der Kokern von φ. Dann gilt
  $$\varphi \text{ ist ein Epimorphismus} \iff C \cong 0.$$

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A4**, wenn für alle $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ eine Sequenz

$$K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} C$$

existiert mit folgenden Eigenschaften: • $\varphi = j \circ i$
- (K, k) ist der Kern, (C, c) der Kokern von φ,
- (I, i) ist der Kokern von k, (I, j) der Kern von c.

Diese Sequenz heißt **kanonische Zerlegung** von φ.

Bem. Die kanonische Zerlegung ist eindeutig bis auf eindeutigen Iso.

Bem. Angenommen, $\mathcal{C}$ besitzt Kerne und Kokerne.
Dann gibt es für alle $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ die Diagramme

$$\ker \varphi \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} \operatorname{coim} \varphi, \quad \operatorname{im} \varphi \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} \operatorname{coker} \varphi.$$

Aus den univ. Eigenschaften von Kern u. Kokern folgt die Existenz eines Morphismus $l \in \mathrm{Hom}(\operatorname{coim} \varphi, \operatorname{im} \varphi)$ mit $j \circ l \circ i = \varphi$.
Das Ax. **A4** gilt genau dann, wenn l für alle φ ein Isomorphismus ist.

Def.
- Eine **präadditive** Kategorie erfüllt das Axiom **A1**.
- Eine **additive** Kategorie erfüllt die Axiome **A1-A3**.
- Eine **präab.** Kategorie ist additiv und besitzt Kerne und Kokerne.
- Eine **abelsche** Kategorie erfüllt die Axiome **A1-A4**.

Bem. Die Axiome **A1-A4** sind selbstdual, d. h. eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist genau (prä-)additiv / (prä-)abelsch, wenn $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ es auch ist.

Bspe. Ab. Kategorien sind: • **AbGrp**, • R-**Mod**, • **PSh**(X).

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **balanciert**, falls gilt:
$\forall\, (f : X \to Y) \in \mathcal{C} \;:\; f$ ist epi und mono $\iff$ f ist ein Isomorphismus.

Prop. Abelsche Kategorien sind balanciert.