Zusammenfassung Geometrie

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Geometrie von Kurven

Notation. Sei im Folgenden I ein Intervall, d. h. eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Def. Eine Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **reguläre Kurve**, wenn c beliebig oft differenzierbar ist und $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.
Der affine Unterraum $\tau_{c,t} \coloneqq c(t) + \mathbb{R}(c'(t))$ heißt **Tangente** an c im Punkt $c(t)$ bzw. Tangente an c zum Zeitpunkt t.

Def. Für eine reguläre Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$L(c) \coloneqq \int_a^b \|c'(t)\| \, dt \quad \textbf{Bogenlänge (BL)}.$$

Satz. Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisierung, d. h. sei $c : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ ein Diffeomorphismus, dann gilt $L(c) = L(c \circ \phi)$.

Def. Eine reguläre Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **nach Bogenlänge parametrisiert**, wenn $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

Satz. Jede reguläre Kurve $c : I \to \mathbb{R}$ lässt sich nach BL parametrisieren, d. h. es existiert ein Intervall J und ein Diffeomorphismus $\phi : J \to I$, welcher sogar orientierungserhaltend ist, sodass $\tilde{c} \coloneqq c \circ \phi$ nach BL parametrisiert ist.

Def. Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen **gleichgerichtet**, falls $a = \lambda b$ für ein $\lambda \geq 0$.

Satz. Sei $v : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann gilt $\|\int_a^b v(t) \, dt\| \leq \int_a^b \|v(t)\| \, dt$, wobei Gleichheit genau dann gilt, falls alle $v(t)$ gleichgerichtet sind.

Satz. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $x \coloneqq c(a), y \coloneqq c(b)$. Dann gilt $L(c) \geq d(x, y)$. Wenn $L(c) = d(x, y)$, dann gibt es einen Diffeomorphismus $\phi : [a, b] \to [0, 1]$, sodass $c = c_{xy} \circ \phi$, wobei

$$c_{xy} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto x + t(y - x).$$

Def. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve und $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ eine Zerteilung von $[a, b]$. Dann ist die Länge des **Polygonzugs** durch die Punkte $c(t_i)$ gegeben durch

$$\hat{L}_c(t_0, \ldots, t_k) = \sum_{j=1}^{k} \|c(t_j) - c(t_{j-1})\|.$$

Def. Eine stetige Kurve c heißt **rektifizierbar** von Länge $\hat{L}_c$, wenn gilt: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle Unterteilungen $a = t_0 < t1 < \ldots < t_k = b$ der Feinheit mindestens δ gilt:

$$\|\hat{L}_c - \hat{L}_c(t_0, t_1, \ldots, t_k)\| < \epsilon.$$

Def. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ regulär und nach BL parametrisiert. Dann heißt der Vektor $c''(t)$ **Krümmungsvektor** von c in $t \in I$ und die Abbildung $\kappa : I \to \mathbb{R}, \; t \mapsto \|c''(t)\|$ heißt **Krümmung** von c.

Def. Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ wird **ebene Kurve** genannt.

Def. Sei c eine reguläre, nach BL parametrisierte, ebene Kurve. Dann ist das **Normalenfeld** von c die Abbildung

$$n = n_c : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto J \cdot c'(t) \quad \text{mit } J \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Bem. Für alle $t \in I$ bildet $(c'(t), n_c(t))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$. Es gilt außerdem $c''(t) \perp c'(t)$, also $c''(t) = \kappa(t) \cdot n_c(t)$, d. h. die Krümmung hat im $\mathbb{R}^2$ ein Vorzeichen.

Satz (**Frenet-Gleichungen** ebener Kurven)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulär, nach BL parametrisiert und $v = c'$, dann gilt

$$c'' = \kappa \cdot n \quad \text{und} \quad n' = -\kappa \cdot v.$$

Bsp. Für die nach BL parametrisierte gegen den UZS durchlaufene Kreislinie mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \;\; t \mapsto m + r \begin{pmatrix} \cos(t/r) \\ \sin(t/r) \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad \forall \, t \in \mathbb{R} : \kappa(t) = \tfrac{1}{r}.$$

Satz. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ glatte, nach BL parametrisiert mit konstanter Krümmung $\kappa(t) = R \neq 0$. Dann ist c Teil eines Kreisbogens mit Radius $\frac{1}{|R|}$.

Def. Für $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulär, nicht notwendigerweiße nach BL parametrisiert, ist die Krümmung zur Zeit t definiert als

$$\kappa(t) \coloneqq \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

Bem. Obige Definition ist invariant unter orientierungs- erhaltenden Umparametrisierungen, und stimmt für nach BL parametrisierte Kurven mit der vorhergehenden Definition überein.

Satz (Hauptsatz der lokalen ebenen Kurventheorie)**.** Sei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $t_0 \in I$ und $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v_0\| = 1$. Dann gibt es ganu eine nach BL parametrisierte $\mathcal{C}^2$-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ, $c(t_0) = x_0$ und $c'(t_0) = v(t_0) = v_0$.

Def. Eine reguläre Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$ und $c'(a) = c'(b)$. Eine reguläre geschlossene Kurve c heißt **einfach geschlossen**, wenn $c|_{[a,b[}$ injektiv ist.

Def. Für eine geschl. reguläre ebene Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt

$$\overline{\kappa}(c) \coloneqq \int_a^b \kappa(t) \cdot \|c'(t)\| \, dt \quad \textbf{Totalkrümmung} \text{ von } c.$$

Bem. Ist c nach BL parametrisiert, so ist $\overline{\kappa}(c) = \int_a^b \kappa(t) \, dt$.

Satz. Die Totalkrümmung ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist $c : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve und $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ eine Diffeomorphismus mit $\phi' > 0$, dann gilt $\overline{\kappa}(c) = \overline{\kappa}(c \circ \phi)$.

Satz (**Polarwinkelfunktion**)**.** Sei $\gamma : [a, b] \to S^1$ stetig (glatt) und $\omega_a \in \mathbb{R}$, sodass $\gamma(a) = e^{i\omega_a}$. Dann gibt es eine eindeutige stetige (glatte) Abb. $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$, genannt Polarwinkelfunktion von γ mit $\omega(a) = \omega_a$ und $\gamma(t) = e^{i\omega(t)} = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\omega(t)) \\ \sin(\omega(t)) \end{smallmatrix}\right)$ für alle $t \in [a, b]$.

Satz. Seien ω und $\tilde{\omega}$ zwei stetige Polarwinkelfunktionen zu einer stetigen Abbildung $\gamma : [a, b] \to S^1$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $\omega(t) - \tilde{\omega}(t) = 2\pi k$ für alle $t \in [a, b]$.

Satz. Für eine ebene reguläre geschl. Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt

$$U_c \coloneqq \frac{1}{2\pi} \overline{\kappa}(c) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa(t) \|c'(t)\| \, dt \in \mathbb{Z} \quad \textbf{Umlaufzahl} \text{ von } c.$$

Satz (Umlaufsatz von Hopf)**.** Die Umlaufzahl einer einfach geschlossenen regulären Kurve ist ± 1.

Def. Für eine reg. geschlossene ebene Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt

$$\kappa_{\text{abs}}(c) \coloneqq \int_a^b |\kappa_c(t)| \cdot \|c'(t)\| \, dt \quad \textbf{Absolutkrümmung}.$$

Satz. Für die Absolutkrümmung einer einfach geschlossenen regulären Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ gilt $\kappa_{\text{abs}} \geq 2\pi$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn κ_c das Vorzeichen nicht wechselt.

Satz (Whitney-Graustein)**.** Für zwei glatte reguläre geschlossene ebene Kurven $c, d : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) c ist zu d regulär homotop (ii) $U_c = U_d$

Def. Eine glatte reguläre Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ heißt **Frenet-Kurve**, wenn für alle $t \in I$ die Ableitungen $c'(t), c''(t), \ldots, c^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig sind.

Def. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve und $t \in I$. Wende das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf $\{c'(t), c''(t), \ldots, c^{(n-1)}(t)\}$ an und ergänze das resultierende Orthonormalsystem $(b_1(t), \ldots, b_{n-1}(t))$ mit einem passenden Vektor $b_n(t)$ zu einer Orthonormalbasis, die positiv orientiert ist. Die so definierten Funktionen $b_1, \ldots, b_n : I \to \mathbb{R}^n$ sind stetig und werden zusammen das **Frenet-n-Bein** von c genannt.

Def. Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ das Frenet-n-Bein einer Frenet-Kurve c. Dann:

$$A \coloneqq (\langle b_j', b_k \rangle)_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & & & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\kappa_{n-2} & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Funktion $\kappa_j : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \langle b_j'(t), b_{j+1}(t) \rangle, j = 1, \ldots, n-1$ heißt j-te **Frenet-Krümmung** von c.

Satz (Hauptsatz der lokalen Raumkurventheorie)**.** Seien $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-2} > 0$ und $t_0 \in I$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, sowie $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau eine nach BL parametrisierte Frenet-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$, sodass gilt

- $c(t_0) = x_0$,
- das Frenet-n-Bein von c in t_0 ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und
- die j-te Frenet-Krümmung von c ist κ_j.

Def (Frenet-Kurven im $\mathbb{R}^3$)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve und $t \in I$. Dann heißt

- $b_1(t) = v(t) = c'(t)$ der **Tangentenvektor** an c in t,
- $b_2(t) = \frac{c''(t)}{\|c''(t)\|}$ **Normalenvektor** an c in t,
- $\mathrm{span}(b_1(t), b_2(t))$ **Schmiegebene** an c in t,
- $b_3(t) = b_1(t) \times b_2(t)$ **Binormalenvektor** an c in t,
- $\tau_c(t) = \tau(t) := \kappa_2(t) = \langle b_2'(t), b_3(t)\rangle$ **Torsion** o. **Windung** von c.

Bem. Die Frenet-Gleichungen für nach BL parametrisierte Frenet-Kurven im $\mathbb{R}^3$ lauten

$$b_1' = \kappa_c b_2, \quad b_2' = -\kappa_c b_1 + \tau_c b_3, \quad b_3' = -\tau_c b_2$$

Bem. Für eine nicht nach BL parametrisierte Frenet-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ gilt für Krümmung und Torsion

$$\kappa_c := \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} \quad \text{und} \quad \tau_c := \frac{\det(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2}.$$

Def. Für eine glatte geschl. reguläre Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$\overline{\kappa}(c) := \int_a^b \kappa_c(t) \cdot \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t \quad \textbf{Totalkrümmung} \text{ von } c.$$

Hierbei ist die Krümmung einer regulären Raumkurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert: Sei $\phi : I \to J$ orientierungserhaltend (d. h. $\phi' > 0$) und so gewählt, dass $\tilde{c} := c \circ \phi^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ nach BL parametrisiert ist, dann definieren wir $\kappa_c(t) := \kappa_{\tilde{c}}(\phi(t))$.

Satz (Fenchel)**.** Für eine geschlossene reguläre glatte (oder $\mathcal{C}^2$) Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ gilt $\overline{\kappa}(c) \geq 2\pi$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn c eine einfach geschlossene konvexe reguläre glatte (oder $\mathcal{C}^2$) Kurve ist, die in einer affinen Ebene des $\mathbb{R}^3$ liegt.

Satz. Sei $v : [0, b] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine stetige rektifizierbare Kurve der Länge $L < 2\pi$ mit $c(0) = c(b)$, so liegt das Bild von v ganz in einer offenen Hemisphäre.

Lokale Flächentheorie

Notation. Sei im Folgenden $m \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Def. Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$\partial_v f(u) := \lim_{h \to 0} \frac{f(u + hv) - f(u)}{h}$$

Richtungsableitung von f im Punkt u (falls der Limes existiert).

Def. Für $v = e_j$ heißt $\partial_j f(u) := \partial_{e_j} f(u)$ **partielle Ableitung** nach der j-ten Variable. Falls die partielle Ableitung für alle $u \in U$ existiert, erhalten wir eine Funktion $\partial_j : U \to \mathbb{R}^n, u \mapsto \partial_j f(u)$.

Notation. $\partial_{j_1, j_2, \ldots, j_k} f := \partial_{j_1}(\partial_{j_2}(\ldots(\partial_{j_k} f)))$

Def. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt $\mathcal{C}^k$-Abbildung, wenn alle k-ten partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind. Wenn $f \in \mathcal{C}^k$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$, so heißt f **glatt**.

Satz (Schwarz)**.** Ist f eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung, so kommt es bei allen l-ten partiellen Ableitungen mit $l \leq k$ nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen an.

Def. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt in $u \in U$ **total differenzierbar**, wenn gilt: Es gibt eine lineare Abbildung $D_u f = \partial f_u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, genannt das **totale Differential** von f in u, sodass für genügend kleine $h \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f(u + h) = f(u) + \partial f_u(h) + o(h)$$

für eine in einer Umgebung von 0 definierte Funktion $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$.

Def. Für eine total differenzierbare Funktion f heißt die Matrix $J_u f = (D_u f(e_1), \ldots, D_u f(e_n))$ **Jacobi-Matrix** von f in u.

Bem. Es gelten folgende Implikationen:

 f ist stetig partiell differenzierbar
$\Longrightarrow$ f ist total differenzierbar ($\Longrightarrow$ f ist stetig)
$\Longrightarrow$ f ist partiell differenzierbar

Def. Eine total differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **regulär** oder **Immersion**, wenn für alle $u \in U$ gilt: $\mathrm{Rang}(J_u f) = m$, d. h. alle partiellen Ableitungen sind in jedem Punkt linear unabhängig und $J_u f$ ist injektiv. Insbesondere muss $m \leq n$ gelten.

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine (glatte) Immersion. Dann heißt das Bild $f(U)$ **immergierte Fläche**, immersierte Fläche oder parametrisiertes Flächenstück. Sei $\tilde{U}$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $\phi : \tilde{U} \to U$ ein Diffeomorphismus, dann heißt $\tilde{X} := X \circ \phi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ **Umparametrisierung** von X.

Notation. Sei im folgenden $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion.

Def. Für $u \in U$ heißt der Untervektorraum

$$T_u X := \mathrm{span}(\partial_1 X(u), \ldots, \partial_m X(u)) = \mathrm{Bild}(D_u X) \subset \mathbb{R}^n$$

Tangentialraum von X in u und sein orthogonales Komplement $N_u X := (T_u X)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ **Normalraum** an X in u.

Bem. Für $u \in U$ definiert

$$\langle v, w \rangle_u := \langle D_u X(v), D_u X(w) \rangle_{\mathrm{eukl}}$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^m$. Die Positiv-Definitheit folgt dabei aus der Injektivität von D_u.

Notation. Bezeichne mit $\mathrm{SymBil}(\mathbb{R}^m)$ die Menge der symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^m$.

Def. Die **erste Fundamentalform** (1. FF) einer Immersion X ist

$$\mathrm{I} : U \to \mathrm{SymBil}(\mathbb{R}^m), \quad u \mapsto \mathrm{I}_u := \langle \cdot, \cdot \rangle_u.$$

Äquivalent dazu wird auch die Abbildung

$$g : U \to \mathbb{R}^{m \times m}, \quad u \mapsto g_u := (J_u X)^T (J_u X)$$

manchmal als erste Fundamentalform bezeichnet.

Def. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Wir nennen c eine **Kurve auf X**, wenn es eine glatte Kurve $\alpha : [a, b] \to U$ mit $c = X \circ \alpha$ gibt.

Bem. Dann gilt $L(c) := \int_a^b \|c'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|D_{\alpha(t)} X(\alpha'(t))\|\,\mathrm{d}t.$

Bem. Seien $c_1 = X \circ \alpha_1$ und $c_2 = X \circ \alpha_2$ zwei reguläre Kurven auf X, die sich in einem Punkt schneiden, d. h. $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2) =: u$. Dann ist der Schnittwinkel $\measuredangle(c_1'(t), c_2'(t))$ von c_1 und c_2 in $X(u)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}\cos(\measuredangle(c_1'(t), c_2'(t))) &= \frac{\langle c_1'(t_1), c_2'(t_2)\rangle}{\|c_1'(t_1)\| \cdot \|c_2'(t_2)\|} \\ &= \frac{I_u(\alpha_1'(t_1), \alpha_2'(t_2))}{\sqrt{I_u(\alpha_1'(t_1), \alpha_1'(t_1)) \cdot I_u(\alpha_2'(t_2), \alpha_2'(t_2))}}\end{aligned}$$

Def. Sei $C \subset U$ eine kompakte messbare Teilmenge, dann heißt

$$A(X(C)) := \int_C \sqrt{\det(g_u)}\,\mathrm{d}u \quad \textbf{Flächeninhalt} \text{ von } X(C).$$

Satz (Transformation der ersten FF)**.** Sei $\tilde{X} = X \circ \phi$ eine Umparametrisierung von X mit einem Diffeo $\phi : \tilde{U} \to U$, dann gilt

$$\forall\, \tilde{u} \in \tilde{U} \ : \ \tilde{g}_{\tilde{u}} = (J_{\tilde{u}} \tilde{X})^T (J_{\tilde{u}} \tilde{X}) = (J_{\tilde{u}}(\phi))^T \cdot g_{\phi(\tilde{u})} \cdot (J_{\tilde{u}}(\phi)).$$

Bsp (Drehfläche)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}, t \mapsto (r(t), z(t))$ eine reguläre glatte Kurve. Dann heißt

$$X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (t, s) \mapsto (r(t)\cos(s), r(t)\sin(s), z(t))$$

Drehfläche mit Profilkurve c. Es gilt:

$$g_{(t,s)} = \begin{pmatrix} \|c'(t)\|^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}$$

Bsp (Kugelfläche)**.** Die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ ist

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto (-\sin(t) cos(t), \cos^2(t), \sin(t)).$$

Def. Zwei Immersionen $X : U \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{X} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^k$ heißen **lokal isometrisch**, wenn es eine Umparametrisierung $\phi : U \to \tilde{U}$ gibt, sodass die ersten Fundamentalformen von X und $\tilde{X} \circ \phi$ übereinstimmen. Ist eine Immersion X isometrisch zu einer Immersion, deren Bild eine offene Teilmenge einer affinen Ebene ist, so heißt X **abwickelbar**.

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion mit $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Dann heißt X **Hyperfläche** (HF) im $\mathbb{R}^n$.

Bem. Es gilt in diesem Fall offenbar $\dim T_u = n - 1$ und $\dim N_u = 1$ für $u \in U$ und für einen Vektor $\nu_u \in N_u X \setminus \{0\}$ gilt $N_u X = \mathbb{R} \cdot v_u$.

Def. $v_u := \sum\limits_{j=1}^{n} \det(\partial_1 X(u), \ldots, \partial_{n-1} X(u), e_j) e_j$

Bem. Es gilt:
- $v_u \in N_u X \setminus \{0\}$
- $\det(\partial_1 X(u), \ldots, \partial_{n-1} X(u), v_u) > 0$
- Für $n = 3$ und $m = 2$ ist $v_u = \partial_1 X(u) \times \partial_2 X(u)$.

Notation. $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ heißt **Einheitssphäre**.

Def. Für eine Hyperfläche $X : U \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$\nu : U \to S^{n-1}, \quad u \mapsto \nu_u := \frac{v_u}{\|v_u\|} \quad \textbf{Gaußabbildung}.$$

Satz. Die Gaußabbildung einer Hyperfläche ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist $\phi : \tilde{U} \to U$ ein Diffeo mit $\det(J_{\tilde{u}} \phi) > 0$ für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$, dann ist $\tilde{\nu} = \nu \circ \phi$.

Notation. $\mathrm{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) := \{B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \mid B \text{ bilinear }\}$

Def. Die **vektorwertige zweite Fundamentalform** ist die Abbildung einer Immersion X ist die Abbildung

$$\mathrm{II} : U \to \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \quad u \mapsto \mathrm{II}(u) = \mathrm{II}_u, \text{ mit}$$
$$\mathrm{II}_u : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (v, w) \mapsto \mathrm{II}_u(v, w) := (\partial_v \partial_w X(u))^{N_u},$$

wobei $(\cdot)^{N_u}$ die orth. Projektion auf den Normalenraum bezeichnet.

Bem. Nach dem Satz von Amandus Schwarz ist II_u eine symmetrische Bilinearform.

Bem. Für eine Hyperfläche $X : U \to \mathbb{R}^n$, $(U \Subset \mathbb{R}^{n-1})$ gilt

$$\mathrm{II}_u(v, w) = h_u(v, w)\nu_u \quad \text{mit} \quad h_u(v, w) = \langle \mathrm{II}_u(v, w), \nu_u\rangle.$$

Def. Die Abbildung $h : U \to \mathrm{SymBil}(\mathbb{R}^{n-1})$, $u \mapsto h_u = h(u)$ mit $h_u(v, w) = \langle \mathrm{II}_u(v, w), \nu_u\rangle = \langle \partial_v \partial_w X(u), \nu_u\rangle$ heißt **zweite Fundamentalform** (2. FF) der Hyperfläche X.

Bem. Man kann die 2. FF als matrixwertige Abb. auffassen:

$$h : U \to \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, \quad u \mapsto (h_{jk}(u)) = \langle \partial_j \partial_k X(u), \nu_u\rangle$$

Satz. Für die Gaußabbildung ν einer Hyperfläche $X : U \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle \partial_j \nu, \partial_k X\rangle = -h_{jk} \quad \text{und} \quad \langle \partial_j \nu, \nu\rangle = 0 \quad \text{für alle } j, k \in \{1, ..., m\}.$$

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche und $u \in U$, dann ist die **Weingartenabbildung** von X im Punkt u definiert durch

$$W_u := -D_u\nu \circ (D_u X)^{-1} : T_u X \to T_u X \quad \text{(linear)}.$$

Bem. Es gilt $W_u(\partial_j X(u)) = -\partial_j \nu(u)$.

Satz.
- W_u ist selbstadjungiert bzgl. der Einschränkung $\langle\cdot,\cdot\rangle_{T_u}$.
- $h_{jk}(u) = \langle W_u(\partial_j X(u)), \partial_k X(u)\rangle$
- Die Weingartenabbildung ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist $\phi : \tilde{U} \to U$ ein Diffeo mit $\det(J\phi) > 0$, dann gilt für $\tilde{X} := X \circ \phi$ und alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$: $W_{\phi(\tilde{u})} = \tilde{W}_{\tilde{u}}$.

Satz. Sei $g_u = (g_{jk}(u))$ die Matrix der ersten und $h_u = (h_{jk}(u))$ die Matrix der zweiten FF einer Hyperfläche X, dann gilt für die Matrix $w_u = (w_{jk}(u))$ von W_u bzgl. der Basis $\{\partial_1 X(u), ..., \partial_{n-1} X(u)\}$ von $T_u X$:

$$w_u = g_u^{-1} \cdot h_u$$

Bem. Die Weingartenabbildung ist als selbstadjungierter Endomorphismus reell diagonalisierbar (Spektralsatz).

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche.

- Die Eigenwerte $\kappa_1(u), ..., \kappa_{n-1}(u)$ mit Vielfachheiten von W_u heißen **Hauptkrümmungen** von X in u und die dazugehörigen Eigenvektoren **Hauptkrümmungsrichtungen** von X in u.
- Die **mittlere Krümmung** von X ist definiert als

$$H : U \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \tfrac{1}{n-1}\,\mathrm{spur}(W_u) = \tfrac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \kappa_j(u).$$

- Die **Gauß-(Kronecker-)Krümmung** von X ist die Abbildung

$$K : U \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \det(W_u) = \tfrac{\det(h_u)}{\det(g_u)} = \prod_{j=1}^{n-1} \kappa_j(u).$$

Satz. Die Hauptkrümmungen, die mittlere Krümmung und die Gauß-Kronecker-Krümmung sind invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen.

Bsp. Für die Drehfläche (s. o.) von $c = (r, z) : I \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ gilt:

$$w = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \frac{z'}{|c'|r} \end{pmatrix}, \quad \kappa_1 = \tfrac{\det(c', c'')}{|c'|^3} = \tfrac{z''r' - r''z'}{|c'|^3}, \quad \kappa_2 = \tfrac{z'}{|c'|r}.$$

Satz. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche und $u_0 \in U$ ein Punkt. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \Subset U$ von u_0 und eine Umparametrisierung $\phi : U_0 \to \tilde{U}$, sodass für $\tilde{X} := X \circ \phi^{-1}$ gilt: Es gibt eine glatte (bzw. $\mathcal{C}^2$) Funktion $f : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ mit $D_{\phi(u_0)} f = 0$, sodass $\tilde{X} = \mathrm{Graph}(f)$, d. h. es gilt für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$:

$$\tilde{X}(\tilde{u}) = (\tilde{u}, f(\tilde{u})).$$

Notation. $\nabla f = (\partial_1 f, ..., \partial_k f)$ heißt **Gradient** von $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$.

Satz. Sei $U \Subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Dann ist die zweite FF der Graphen-Hyperfläche $X : U \to \mathbb{R}^n, u \mapsto (u, f(n))$

$$h_{jk}(u) = \frac{\partial_{jk} f(u)}{\sqrt{1 + |\nabla f(u)|^2}}.$$

Satz. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine HF, $u_0 \in U$, sowie $E_{u_0} := X(u_0) + T_{u_0} X$ die affine Tangentialebene an X in u_0. Dann gilt:

- Ist $K(u_0) > 0$, so liegt für eine kleine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von u_0 das Bild $X(U_0)$ ganz auf einer Seite von E_{u_0}.
- Ist $K(u_0) < 0$, so trifft für jede Umgebung $U_0 \subset U$ von u_0 das Bild $X(U_0)$ beide Seiten von E_{u_0}.

Def. Sei $u_0 \in U, v \in T_{u_0} X, P_v := X(u_0) + \mathrm{span}(v, \nu(u_0))$. Sei $U_0 \subset U$ eine offene Umgebung von u_0, dann heißt

$P_v \cap X(U_0)$ **Normalenschnitt** in u_0 in Richtung v.

Satz. Wenn U_0 hinreichend klein, dann ist $P_v \cap X(U_0)$ Bild einer regulären glatten Kurve.

Def. Für $u \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ heißt

$\kappa_v(u) := \langle W_u v, v\rangle$ **Normalenkrümmung** in u in Richtung v.

Bem. Sei $\|v\| = 1$. Sei $c : I \to P_v \hat{=} \mathbb{R}^2$ nach BL parametrisiert, sodass $\mathrm{Bild}(c) = P_v \cap X(U_0)$, und $c(0) = X(u_0)$ und $c'(0) = v$. Dann: $\kappa_v(u) = \kappa_c(0)$

Satz. Die Hauptkrümmungen $\kappa_1(u_0), \kappa_2(u_0)$ einer HF $X : U \to \mathbb{R}^3$ in $u_0 \in U$ sind die Extrema der Abbildung

$$T_{u_0} X \supset S^1 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \kappa_v(u_0) = \langle W_{u_0} v, v\rangle.$$

Die Levi-Civita-Ableitung

Def. Ein **Vektorfeld** (VF) auf einer offenen Menge $U \Subset \mathbb{R}^m$ ist eine Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^m$.

Notation. $\chi(U) = \{v : U \to \mathbb{R}^n \mid v \text{ glatt}\}$

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine immergierte Fläche, $U \Subset \mathbb{R}^m$. Ein **tangentiales Vektorfeld** längs X ist eine glatte Abbildung

$$V : U \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \forall\, u \in U : V(u) \in T_u X.$$

Bem. Mit typtheoretischer Syntax ist ein tangentiales Vektorfeld längs X eine glatte Abbildung $V : \prod_{u:U} T_u X$.

Notation. $\chi(TX) = \{V : U \to \mathbb{R}^n \mid V \text{ ist tang. VF längs } X\}$

Bem. Folgende Abbildung ist eine Bijektion:

$$H : \chi(U) \to \chi(TX), \quad v \mapsto v^\wedge := \partial_v X, \text{ wobei}$$
$$\partial_v X : \prod_{u:U} T_u X, \quad u \mapsto \partial_{v(u)} X(u)$$

Notation. Für ein glattes Vektorfeld $Y : U \to \mathbb{R}^n$ bezeichnet Y^T das tangentiale Vektorfeld längs X definiert durch

$$Y^T : \prod_{u:U} T_u X, \quad u \mapsto (Y(u))^{T_u X}.$$

Def. $\nabla : \chi(U) \times \chi(TX) \to \chi(TX), \quad (w, V) \mapsto \nabla_w V := (\partial_w V)^T$ heißt **Levi-Civita-Ableitung** von V in Richtung w.

Achtung. Gradient $\neq$ Levi-Civita-Ableitung (trotz Symbol ∇)!

Satz (Eigenschaften der Levi-Civita-Ableitung). Sei $f : U \to \mathbb{R}$ glatt, $w_1, w_2, w \in \chi(U)$, $V, V_1, V_2 \in \chi(TX)$. Dann gilt:

- $\nabla_{f(w_1) + w_2} V = f \cdot \nabla_{w_1} V + \nabla_{w_2} V$ (Linearität 1)
- $\nabla_w(V_1 + V_2) = \nabla_w V_1 + \nabla_w V_2$ (Linearität 2)
- $\nabla_w(f \cdot V) = f \cdot (\nabla_w V) + \partial_w f \cdot V$ (Produktregel)
- $\partial_w \langle V_1, V_2\rangle = \langle \nabla_w V_1, V_2\rangle + \langle V_1, \nabla_w V_2\rangle$ (Metrizität)

Notation. Sei $j \in \{1, ..., m\}$, dann betrachten wir die konstante Abbildung $e_j : U \to \mathbb{R}^n, u \mapsto e_j$. Wir setzen $\nabla_j V := \nabla_{e_j} V$.

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, so schreiben wir:

$$\nabla_j(\partial_k X) = \sum_{l=1}^{m} \Gamma^l_{jk} \partial_l(X) \qquad \text{für } j, k \in \{1, ..., m\}.$$

Dabei heißen die Funktionen $\Gamma^l_{jk} : U \to \mathbb{R}$ **Christoffel-Symbole**.

Notation. $\Gamma_{jkl} := \sum_{r=1}^{m} g_{rl} \Gamma^r_{jk} : U \to \mathbb{R}$

Satz. $\Gamma_{jkl} = \sum_{r=1}^{m} \Gamma^r_{jk} \langle \partial_r X, \partial_l X\rangle = \langle \nabla_j(\partial_k X), \partial_l X\rangle = \langle \partial_j(\partial_k X), \partial_l X\rangle$

Satz. Es gilt $\Gamma^l_{jk} = \Gamma^l_{kj}$ und $\Gamma_{jkl} = \frac{1}{2}(\partial_j \cdot g_{kl} + \partial_k \cdot g_{jl} + \partial_l \cdot g_{jk})$.

Bem. Die Christoffelsymbole kann man aus der 1. FF berechnen (hier sind g^{lh} die Komponenten von g^{-1}):

$$\Gamma^l_{jk} = \sum_{h=1}^{m} g^{lh} \cdot \Gamma_{jkh} = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{m} g^{lh} \cdot (\partial_j \cdot g_{kh} + \partial_k \cdot g_{jh} + \partial_h \cdot g_{jk}),$$

Bem. Schreiben wir $V = \sum_{k=1}^m v^k \partial_k X$ für $V \in \chi(TX)$, dann ist

$$\nabla_j V = \sum_{l=1}^m \left(\partial_j v^l + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l v^k \right) \partial_l X.$$

Def (Levi-Civita-Ableitung für Vektorfelder auf U)**.** Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine immergierte Fläche, so heißt

$$\nabla : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U)$$
$$(w, v) \mapsto \nabla_w v = H^{-1}(\nabla_w \overbrace{H(v)}^{= v^\wedge})$$

Levi-Civita-Ableitung von v in Richtung w.

Bem. Schreiben wir $V = \sum v^k \partial_k X$ für $V \in \chi(TX)$, dann ist

$$\nabla_j V = \sum_{l=1}^m \left(\partial_j v^l + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l v^k \right) e_l = \partial_j V + \Gamma_j V \text{ mit}$$
$$\Gamma_j : U \to \mathbb{R}^{m \times m}, \; u \mapsto (\Gamma_{jk}^l(u))_{lk}.$$

Satz. Seien $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \chi(U), f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Dann:

- $\nabla_{f \cdot w_1 + w_2} v = f \cdot \nabla_{w_1} v + \nabla_{w_2} v$ (Linearität 1)
- $\nabla_w (v_1 + v_2) = \nabla_w v_1 + \nabla_w v_2$ (Linearität 2)
- $\nabla_w (f \cdot v) = f \cdot (\nabla_w v) + (\nabla_w f) \cdot v$ (Produktregel)
- $\partial_w \mathrm{I}(v_1, v_2) = \mathrm{I}(\nabla_w v_1, v_2) + \mathrm{I}(v_1, \nabla_w v_2)$ (verträglich mit 1. FF)

Def. Sei $\alpha : [a,b] \to U$ eine glatte, reguläre Kurve, $c := X \circ \alpha$. Eine glatte Abbildung $V : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $V(t) \in T_{\alpha(t)} X \forall t \in [a,b]$ **tangentiales Vektorfeld** längs c.

Bem. Eine glatte Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^m$ bestimmt eindeutig ein tang. VF vermöge

$$V(t) := v^\wedge(t) = \partial_{v(t)} X(\alpha(t)) = J_{\alpha(t)} X \cdot v(t).$$

Schreiben wir $v = \sum v^j e_j$ und $\alpha = \sum \alpha^j e_j$, so gilt für $V = v^\wedge$:

$$V' = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V = \sum_{j=1}^m (v^j)' (\partial_j X \circ \alpha) + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\partial_k \partial_j X \circ \alpha).$$

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $c = X \circ \alpha$ eine reguläre glatte Kurve auf X. Sei V ein tang. VF längs c, dann heißt

$$\tfrac{\nabla V}{\mathrm{d}t} := (V')^T$$

die **Levi-Civita-Ableitung** von V längs c. Das tang. VF V heißt **(Levi-Civita-)parallel**, wenn gilt

$$\tfrac{\nabla V}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Bem. Für α, v, V aus der letzten Bemerkung folgt

$$\frac{\nabla V}{\mathrm{d}t} = \sum_{l=1}^m \left((v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) (\partial_l X \circ \alpha).$$

Notation. $\hat{\Gamma}_\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^{m \times m}, \; (\hat{\Gamma}_\alpha(t))_{jl} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l(\alpha(t))((\alpha^k)'(t))$

Def. Wir fassen eine glatte Abbildung $v : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ als VF längs $\alpha : [a,b] \to U$ auf. Dann nennen wir

$$\frac{\nabla v}{\mathrm{d}t} := \sum_{l=1}^m \left((v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) e_l = v' + \hat{\Gamma}_\alpha v$$

Levi-Cevita-Ableitung von v längs α.

Satz. Es gilt dann $\frac{\nabla(v^\wedge)}{\mathrm{d}t} = (\frac{\nabla v}{\mathrm{d}t})^\wedge$. Ein VF $V = v^\wedge$ ist also genau dann parallel, wenn $v' + \hat{\Gamma}_\alpha v = 0$ bzw.

$$(v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) = 0 \quad \text{für alle } l = 1, ..., m.$$

Bem. Es handelt sich bei $v' + \hat{\Gamma}_\alpha v = 0$ um ein System linearer Differentialgleichungen (mit nicht konstanten stetigen Koeffizienten). Damit existiert bei gegebenem Anfangswert $v(a)$ eine auf ganz $[a,b]$ definierte eindeutige Lösung der Differentialgleichung.

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $c = X \circ \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine reguläre glatte Kurve auf X. Für $t \in [a,b]$ heißt die Abbildung

$$P_t^c : T_{\alpha(a)} X \to T_{\alpha(t)} X, \quad x \mapsto V_x(t),$$

wobei $V_x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ das parallele tangentiale VF längs c mit Anfangsbedingung $V_x(a) = x \in T_{\alpha(a)} X$ ist, **Parallelverschiebung** längs c von $c(a)$ nach $c(t)$.

Satz. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $c = X \circ \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre glatte Kurve auf X. Für alle $t \in [a,b]$ ist die Abbildung $P_t^c : T_{\alpha(a)} X \to T_{\alpha(t)} X$ eine lineare Isometrie, d. h. P_t^c ist linear und es gilt $\langle x, y \rangle = \langle P_t^c x, P_t^c y \rangle$ für alle $x, y \in T_{\alpha(a)} X$.

Geodäten

Def. Eine reguläre glatte Kurve $c = X \circ \alpha$ auf X heißt **Geodäte** auf X, wenn gilt

$$(c'')^T = \tfrac{\nabla c'}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \tfrac{\nabla \alpha'}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Satz. Eine Geodäte ist immer proportional zur BL parametrisiert, d. h. $\|c'\|$ ist konstant.

Bem. Sei $c = X \circ \alpha$ mit $\alpha = \sum \alpha^j e_j$ mit glatten Abb. α^j. Dann gilt

$$\frac{\nabla c'}{\mathrm{d}t} = \sum_{l=1}^m \left((\alpha^l)'' + \sum_{j,k=1}^m (\alpha^j)' (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) (\partial_l X \circ \alpha).$$

Somit ist c genau dann eine Geodäte, wenn gilt

$$(\alpha^l)'' + \sum_{j,k=1}^m (\alpha^j)' (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) = 0 \quad \text{für alle } l = 1, ..., m$$

oder $\alpha'' + \Gamma_\alpha(\alpha', \alpha') = 0$ (i. F. **Geodätengleichung**), wobei

$$\Gamma_\alpha : [a,b] \to \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \; t \mapsto \Gamma_{\alpha(t)} \text{ mit}$$
$$\Gamma_{\alpha(t)}(v, w) = \sum_{j,k,l=1}^m v^j w^k \Gamma_{jk}^l (\alpha(t)) e_l.$$

Bem. Es handelt sich hierbei um ein System nichtlinearer gew. DG zweiter Ordnung, welches nach dem Satz von Picard- Lindelöf bei gegebenen Anfangswerten immer eine eindeutige lokale Lösung besitzt. Es folgt:

Satz (Lokale Existenz von Geodäten)**.** Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, sei $u \in U$ und $w \in \mathbb{R}^m$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_w \Subset \mathbb{R}^m$ von w und eine $\epsilon > 0$, sodass gilt: Für jedes $v \in U_w$ gibt es eine eindeutige Lösung $\alpha_v : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ der Geodätengleichung mit $\alpha_v(0) = u$ und $\alpha_v'(0) = v$.
Anders ausgedrückt: Zu jedem $u \in U$ und zu jedem $W \in T_u X$ gibt es eine offene Umgebung $U_W \Subset T_u X$ von W sowie ein $\epsilon > 0$, sodass es für jedes $V \in U_W$ eine eindeutige Geodäte $c_v : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ auf X gibt mit $c_v(0) = X(u)$ und $c_v'(0) = V$.

Satz (Spray-Eigenschaft)**.** Sei $\alpha_v : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ die eindeutige Lsg. der Geodätengleichung mit $\alpha_v(0) = u$ und $\alpha_v'(0) = v$ und $r > 0$. Dann ist die eindeutige Lösung der Geodätengleichung α_{rv} mit $\alpha_{rv}(0) = rv$ und $\alpha_{rv}'(0) = rv$ auf dem Intervall $(-\frac{\epsilon}{r}, \frac{\epsilon}{r})$ definiert und es gilt $\alpha_{rv}(t) = \alpha_v(rt)$ für alle $t \in (-\frac{\epsilon}{r}, \frac{\epsilon}{r})$.

Satz. Sei $u \in U$. Dann gibt es ein $\epsilon_u > 0$, sodass für alle $v \in \overline{B_u^{\epsilon_u}}$ gilt: Die Geodätengleichung besitzt eine auf $[-1, 1]$ definierte Lösung α_v mit $\alpha_v(0) = u$ und $\alpha_v'(0) = v$.

Def. Sei $u \in U$, dann heißt die Abbildung

$$\mathrm{Exp}_u : B_u^{\epsilon_u} \to U, \quad v \mapsto \alpha_v(1)$$

(geodätische) Exponentialabbildung von X in u.

Def. Sei $u \in U$, dann gibt es ein $0 < \epsilon \le \epsilon_u$, sodass $\mathrm{Exp}_u | B_u^\epsilon$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

Def. Sei $\alpha : [a,b] \to U$ eine glatte Kurve, sodass $X \circ \alpha$ nach BL parametrisiert ist. Eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung

$$(-\epsilon, \epsilon) \times [a,b] \to U, \quad (s,t) \mapsto \alpha_s(t)$$

mit $\alpha_0 = \alpha$ heißt eine **Variation** von α. Ist nun $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, so erhalten wir auch eine Variation der Kurve $c := X \circ \alpha$ auf X durch andere Kurven, nämlich $c_s := X \circ \alpha_s$ auf X.

Notation. $\delta := \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$.

Satz (Variationsformel der Länge)**.** Unter obigen Annahmen gilt

$$\delta L(c_s) = \langle c'(b), \delta c_s(b) \rangle - \langle c'(a), \delta c_s(a) \rangle - \int_a^b \langle (c''(t))^T, \delta c_s(t) \rangle \, \mathrm{d}t.$$

Satz (Gaußlemma)**.** Die Parametrisierung $\widetilde{X} := X \circ \mathrm{Exp}_u : B_u^\epsilon \to \mathbb{R}^n$ durch Exponentialkoordinaten ist eine radiale Isometrie: Seien $v \in B_u^{\epsilon_u} \setminus \{0\}$ und $w \in \mathbb{R}^m$ und zerlegen wir w in $w = w_\| + w_\perp$ mit $w_\| \in \mathbb{R}v$ und $\langle w_\perp, v \rangle = 0$, dann gilt

$$\|D_v \widetilde{X}(w_\|)\| = \|w_\|\|$$
$$D_v \widetilde{X}(w) \perp D_v \widetilde{X}(v), \quad \text{wenn } w \perp v \text{ und somit}$$
$$\|D_v \widetilde{X}(w)\|^2 = \|w_\|\|^2 + \|D_v \widetilde{X}(w_\perp)\|^2.$$

Satz. Sei $\gamma : [a,b] \to B_u^\epsilon$ reguläre glatte Kurve mit $\gamma(a) = 0, \gamma(b) = v$. Dann gilt: $L(X \circ \mathrm{Exp}_u \circ \gamma) \ge \|v\|$ mit $L(X \circ \mathrm{Exp}_u \circ \gamma) = \|v\| \iff \gamma(t) = \rho(t) v$ mit $\rho : [a,b] \to [0,1]$ streng monoton wachsend.

Satz. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Fläche, $u_0 \in U$, $\epsilon > 0$, sodass $\mathrm{Exp}_{u_0} : B^\epsilon_{u_0} \to U$ Diffeomorphismus. Sei $u \in \mathrm{Exp}_{u_0}(B^\epsilon_{u_0})$. Dann gibt es (bis auf Umparametrisierung) genau eine bzgl. der Länge

$$L_{\mathrm{I}}(\alpha) := \int_a^b \mathrm{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))\,\mathrm{d}t$$

kürzeste reguläre glatte Kurve $\alpha : [a,b] \to U$ mit $\alpha(a) = u_0$ und $\alpha(b) = u$, nämlich $\alpha : [0,1] \to U,\ t \mapsto \mathrm{Exp}_{u_0}(t \cdot \mathrm{Exp}_{u_0}^{-1}(u))$.

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Fläche, dann heißt

$$[\cdot,\cdot] : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U), \quad (v,w) \mapsto [v,w] = \partial_v w - \partial_w v$$

Lie-Klammer der Vektorfelder v und w.

Satz. Für alle $v, w \in \chi(U)$ ist $[v,w] = \nabla_v w - \nabla_w v$.

Def. Die Abbildung

$$R : \chi(U) \times \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U), \quad (v,w,z) \mapsto R(v,w)z$$
$$\text{mit } R(v,w)z = \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_w(\nabla_v z) - \nabla_{[v,w]} z$$

heißt **Krümmungstensor**.

Bem (Krümmungstensor in Koordinaten). Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\nabla_j(\nabla_k z) &= \partial_j \partial_k z + (\partial_j \Gamma_k) z + \Gamma_k(\partial_j z) + \Gamma_j(\partial_k z) + \Gamma_j \Gamma_k z,\\
R_{jk} z &:= R(e_j, e_k) z = \Gamma_j \Gamma_k z - \Gamma_k \Gamma_j z + (\partial_j \Gamma_k - \partial_k \Gamma_j) z,\\
R_{jk} &:= R(e_j, e_k) = (\Gamma_j \cdot \Gamma_k - \Gamma_k \cdot \Gamma_j) + (\partial_j \Gamma_k - \partial_k \Gamma_j).
\end{aligned}$$

Für $v = \sum v^j e_j, w = w^k e_k : U \to \mathbb{R}^m$ mit $v^j, w^k : U \to \mathbb{R}$ glatt ist

$$R(v,w)z = \sum_{k,j=1}^m v^k w^j (R_{kj} z)$$

und mit $z = \sum z^l e_l : U \to \mathbb{R}^m, z^l : U \to \mathbb{R}$ glatt folgt

$$R(v,w)z = \sum_{i,j,k,l}^m v^i w^j z^k R^l_{ijk} e_l,$$

wobei $R^l_{ijk} : U \to \mathbb{R}$ so gewählt, dass $R_{ij}(e_k) = \sum R^l_{ijk} e_l$. Es gilt:

$$R^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \sum_{s=1}^m (\Gamma^l_{is}\Gamma^s_{jk} - \Gamma^l_{js}\Gamma^s_{ik}).$$

Satz. Die Abbildung

$$\mathrm{I}_{R_{ij}} : \chi(U) \times \chi(U) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}), \quad (v,w) \mapsto \underbrace{\mathrm{I}(R_{ij}, v, w)}_{u \mapsto \mathrm{I}_u((R_{ij} v)(u), w(u))}$$

ist eine antisymmetrische Bilinearform.

Notation. $R_{ijkl} := \mathrm{I}_u(R_{ij}(u) e_k, e_l)$

Lemma. Es gilt $-R_{jikl} = R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.

Satz (Gaußgleichung). Mit $\mathrm{II}_{jk}(u) = (\partial_j \partial_k X(u))^{N_u}$ gilt

$$R_{ijkl}(u) = \langle \mathrm{II}_{jk}(u) \mathrm{II}_{il}(u) \rangle - \langle \mathrm{II}_{ik}(u), \mathrm{II}_{jl}(u) \rangle.$$

Bem. Im Spezialfall, dass X eine HF ist, gilt $\mathrm{II}_{jk} = h_{jk}\nu$. Da $\langle \nu, \nu \rangle = 1$, folgt $R_{ijkl} = h_{jk}h_{ie} - h_{ik}h_{jl}$.

Satz (Theorema egregium (Gauß)). Für eine HF $X : U \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$K(u) = \frac{\det(h(u))}{\det(g(u))} = \frac{R_{1221}(u)}{\det(g(u))}.$$

Letzter Ausdruck ist nur abh. von der 1. FF und ihren Ableitungen.

Satz (Codazzi-Mainardi-Gleichungen). Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ HF, dann

$$\partial_i h_{jk}(u) - \sum_{l=1}^{n-1} \Gamma^l_{ik}(u) h_{e_j}(u) = \partial_j h_{ik}(u) - \sum_{l=1}^{n-1} \Gamma^l_{jk}(u) h_{e_i}(u).$$

Satz (Hauptsatz der lokalen Flächentheorie (Bonnet)). Sei $U \Subset \mathbb{R}^m$ einfach zusammenhängend und

$$g, h : U \to \{A \in \mathbb{R}^{m \times m} \mid A^T = A,\ A \text{ positiv definit}\}$$

glatt. Dann sind äquivalent:

- $\exists X : U \to \mathbb{R}^{m+1}$ Hyperfläche mit g und h als 1. FF bzw. 2. FF.
- g, h erfüllen die Gauß- und die Codazzi-Mainardi-Gleichung.

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche. Ein Punkt $u \in U$ heißt **Nabelpunkt**, wenn in u alle Hauptkrümmungen gleich sind, also $W_u = \mu I$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$. Wenn alle $u \in U$ Nabelpunkte sind, so heißt X **Nabelpunkthyperfläche**.

Satz. Sei $n \geq 3$ und $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Nabelpunkt-HF in $\mathcal{C}^3$, dann ist $X(U)$ Teilmenge einer Hyperebene oder einer Hypersphäre im $\mathbb{R}^n$.

Def. Sei $O \Subset \mathbb{R}^n$. Eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung $\Phi : O \to \mathbb{R}^n$ heißt **orthogonales Hyperflächensystem** (OHFS), wenn für alle $x \in O$ und alle $j, k \in \{1, ..., n\}, j \neq k$ gilt:

$$\langle \partial_j \Phi(x), \partial_k \Phi(x) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \partial_j \Phi(x), \partial_j \Phi(x) \rangle \neq 0$$

Notation. Für $t \in \mathbb{R}$ ist $U^{j,t} := \{(x_1, ..., x_n) \in O \mid x_j = t\}$.

Bem. Falls $U^{j,t}$ offen ist in $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = t\}$, ist

$$X^{j,t} := \Phi|_{U^{j,t}} : U^{j,t} \to \mathbb{R}^n$$

eine Hyperfläche und für alle $x \in U^{j,t}$ gilt

$$\partial_j \Phi(x) \perp T_x X^{j,t} = \mathrm{Spann}\{\partial_k \Phi(x) \mid k \in \{1, ..., n\} \setminus \{j\}\}.$$

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine HF und $c := X \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^n, I$ Intervall und $\alpha : I \to U$ glatt. Dann heißt c **Krümmungslinie**, wenn für alle $c'(t)$ für alle $t \in I$ eine Hauptkrümmungsrichtung von X ist, d. h. ein Eigenvektor von $W_{\alpha(t)}$.

Satz. Ist $\Phi : O \to \mathbb{R}^n$ OHFS, dann sind die Koordinatenlinien

$$h \mapsto \Phi(t_1, ..., t_{j-1}, t_j + h, t_{j+1}, ..., t_n) \quad \text{mit } (t_1, ..., t_n) \in O \text{ fest}$$

Krümmungslinien von X^{k,t_k} mit $k \neq j$.

Def. Eine lineare Abb. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **konform**, wenn

$$\measuredangle(v,w) = \measuredangle(F(v), F(w)) \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Bem. Jede lineare Abbildung lässt sich darstellen als

$$F(x) = A_F \cdot x \text{ mit } A_F \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und es gilt F konform $\iff \frac{1}{\mu} A_F \in O(n)$ für ein $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$. Dieses μ wird **konformer Faktor** oder Streckungsfaktor genannt.

Def. Seien $O, \widetilde{O} \Subset \mathbb{R}^n$. Ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $f : O \to \widetilde{O}$ heißt **konform**, wenn für alle $x \in O$ die Abbildung $D_x f$ konform ist.

Satz. Jede konforme Abbildung auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist bis auf Verknüpfung mit der komplexen Konjugation eine holomorphe reguläre Abbildung und umgekehrt.

Def. Eine Abbildung $f : O \to \widetilde{O}$ heißt **kugeltreu**, wenn sie offene Teilmengen von Sphären auf offene Teilmengen von Sphären abbildet. Dabei gelten Hyperebenen als Sphären mit Radius ∞.

Satz (Liouville). Wenn $n \geq 3$, dann ist jede konforme $\mathcal{C}^3$-Abb. $f : O \to \widetilde{O}$ kugeltreu, d. h. falls $X : U \to O$ eine Nabelpunkt-HF ist, dann ist $f \circ X : U \to \widetilde{O}$ auch eine Nabelpunkt-HF.

Bsp. Konforme Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ sind:

- Isometrien: $f(x) = Ax + b, A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n$
- Zentrische Streckungen: $f(x) = rx, r > 0$
- Inversionen an Sphären: $\iota : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}, x \neq 0$

Lemma. Inversionen an Sphären sind kugeltreu und konform.

Def. Eine **Möbius-Transformation** ist eine Verkettung von Isometrien, zentrischen Streckungen und Inversionen an Sphären.

Bem. Für $n = 2$, $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist eine Möbius-Transformation eine Abbildung $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, sodass dieser Ausdruck definiert ist mit $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \neq 0$.

Satz. Seien $O, \widetilde{O} \Subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ und $f : O \to \widetilde{O}$ winkel- und kugeltreu. Dann ist f Einschränkung einer Möbius-Transformation.

Korollar. Für $n \geq 3$ gilt: Jeder konforme $\mathcal{C}^3$-Diffeomorphismus f ist Einschränkung einer Möbius-Transformation.

Minimalflächen

Lemma. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$, $C = (A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wenn jeder Spaltenvektor von B senkrecht auf allen anderen Spaltenvektoren von C steht und normiert ist, dann gilt

$$\det(C) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Def. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig, dann heißt

$$\int_C f\,\mathrm{d}\mathcal{A} := \int_C f(u) \cdot \sqrt{\det(g_u)}\,\mathrm{d}\mu(u) \quad \textbf{Flächeninhalt}.$$

Prop. Der Flächeninhalt ist invariant unter Umparametrisierungen: Sei $X = \widetilde{X} \circ \phi$, $\phi : U \to \widetilde{U}$ ein Diffeomorphismus, $C \subset U$ kompakt, dann gilt

$$\int_C \sqrt{\det(g_u)}\,\mathrm{d}\mu(u) = \int_{\phi(C)} \sqrt{\det(\widetilde{g}_{\tilde{u}})}\,\mathrm{d}\mu(\tilde{u}).$$

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ immergierte $\mathcal{C}^2$-Fläche, $C \subset U \subset \mathbb{R}^m$ ein Kompaktum mit nichtleerem Inneren, dessen Rand eine Nullmenge ist. Dann ist eine Variation von X auf C eine Abbildung

$$(-\epsilon, \epsilon) \times U \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}^n, \quad (x, u) \mapsto X^s(u) \quad \text{mit}$$

• $X^s : U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^2$-Immersion, • $X^0 = X$, • $X^s|_{U \setminus C} = X|_{U \setminus C}$.

Notation. • $\mathcal{A}(s) := \mathcal{A}(X^s(C))$ • $\delta := \frac{\delta}{\delta s}|_{s=0}$

Lemma. Für $\epsilon > 0$ klein genug kann die Variation so umparametrisiert werden, dass das Variationsvektorfeld normal an X ist, d. h.

$$\xi(u) := \delta X^s(u) \in N_u X \quad \text{für alle } u \in U.$$

Def. Eine kompakte $\mathcal{C}^2$-Variation X^s einer Immersion X heißt **normal**, wenn δX^s ein Normalenvektorfeld längs X ist.

Def. In dieser Situation schreiben wir mit der 2. FF II von X

$$h^\xi : U \to \mathbb{R}^{m \times m}, \quad u \mapsto (\langle \mathrm{II}(e_j, e_k), \xi \rangle)_{jk}.$$

Lemma. Sei $A : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{m \times m}$ diff'bar, dann

$$(\det(A))' = \det(A(t)) \cdot \mathrm{spur}(A^{-1}(t) \cdot A'(t)).$$

Satz (1. Variation). Es gilt $\delta \mathcal{A}(s) = -\int_C \mathrm{spur}(g^{-1} h^\xi)\, \mathrm{d}\mathcal{A}$.

Def. Eine Fläche $X : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **Minimalfläche**, wenn für jedes Kompaktum $C \subset U$ mit nichtleerem Inneren und Rand von Maß Null und für jede normale Variation X^s von X auf C gilt:

$$\delta \mathcal{A}(X^s|_C) = 0.$$

Satz. Eine Fläche X ist genau dann eine Minimalfläche, wenn

$$\mathrm{spur}(g^{-1} h^\mu) = 0$$

für jedes Normalenvektorfeld μ an X.

Bem. Sei μ ein Normalenvektorfeld an eine Hyperfläche X. Dann gibt es eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $\mu = f \cdot \nu$, wobei ν die Gaußabbildung von X ist. Dann ist $h^\mu = f \cdot h$ und $g^{-1} h^\mu = f \cdot g^{-1} \cdot h = f \cdot w$, wobei w die Weingartenabbildung ist.

Satz (1. Variation für HF). Ist $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine HF und $X^s : U \to \mathbb{R}^n$ eine normale Variation von X auf einem Kompaktum $C \subset U$ mit nichtleerem Inneren und Rand vom Maß Null und $\xi = \delta X^x = f\nu$ mit $f : U \to \mathbb{R}$, dann gilt

$$\delta \mathcal{A}(X^s|_C) = -\int_C f(n-1) H \, \mathrm{d}\mathcal{A}.$$

Satz. Eine Hyperfläche $X : U \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann minimal, wenn

$$H \equiv \frac{\kappa_1 + \ldots + \kappa_{n-1}}{n-1} \equiv \frac{\mathrm{spur}(w)}{n-1} \equiv 0.$$

Satz. Für eine minimale immergierte HF $X : U \to \mathbb{R}^n$ gilt: Um jeden Punkt $u_0 \in U$ gibt es ein Kompaktum $C \subset U$ mit nicht leerem Inneren, dessen Rand eine Nullmenge ist und welches $u_0 \in C^\circ$ erfüllt, sodass für jede immergierte HF $\tilde{X} : U \to \mathbb{R}^n$ mit $X|_{U \setminus C} = \tilde{X}|_{U \setminus C}$ erfüllt gilt: $\mathcal{A}(X(C)) \leq \mathcal{A}(\tilde{X}(C))$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\tilde{X}$ eine Umparametrisierung von X ist.

Flächen konstanter mittlerer Krümmung

Situation. Sei $X : U \to \mathbb{R}^2$ immergierte $\mathcal{C}^3$-Hyperfläche und $U_0 \subset U$ offen, sodass $X|_{U_0}$ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist. Sei $C \subset U_0$ ein Kompaktum mit glattem Rand, das Abschluss einer offenen Menge C° ist. Sei außerdem $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, sodass $X(C) \subset \partial D$. Wir nennen D **Dose** mit **Deckel** $X(C)$ und **Boden** $\partial D \setminus X(C)$. Wir betrachten eine $\mathcal{C}^2$-Variation $(-\epsilon, \epsilon) \times U \to \mathbb{R}^n$, $(s, u) \mapsto X^s(u)$ auf C mit $X^0 = X$, sodass gilt:

• $X^s|_{U \setminus C} = X|_{U \setminus C}$ • $\forall\, s \in (-\epsilon, \epsilon)$: $X^s|_{U_0}$ ist eine Einbettung

Dann ist $X^s(C)$ Flächenstück einer Dose D^s, wobei der Boden von D^s mit dem von D übereinstimmt, d. h. $\partial D^s \setminus X^s(C) = \partial D \setminus X(C)$.

Def. X^s heißt **Variation mit konstantem Volumen**, wenn

$$\mathrm{Vol}(D^s) = \mathrm{Vol}(D) \quad \text{für alle } s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Def. Die Hyperfläche X heißt **minimal bei konstantem Volumen**, wenn für alle Variationen von X auf derartigen Kompakta $C \subset U$ mit konstantem Volumen gilt: $\delta \mathcal{A}(X^s|_C) = 0$.

Prop. Sei $X^s = X + \tau_s \nu$ eine normale Variation von X auf C. Sei $V^s := \mathrm{Vol}(D^s)$, dann gilt

$$\delta V^s = \int_C \delta \tau_s \, \mathrm{d}\mathcal{A} = \int_C \langle \delta X^s(u), \nu(u) \rangle \sqrt{\det(g_u)}\, \mathrm{d}u.$$

Notation. $\mathcal{C}^0_C(U, \mathbb{R}) = \{ f : U \to \mathbb{R} \,|\, \text{stetig mit } \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \}$

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine HF. Dann ist folgende Abbildung ein Skalarprodukt, genannt **L^2-Skalarprodukt bzgl. $\mathrm{d}\mathcal{A}$**:

$$\mathcal{C}^0_C(U, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0_C(U, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad (f_1, f_2) \mapsto \int_C f_1 \cdot f_2 \, \mathrm{d}\mathcal{A} =: \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2}$$

Notation. • $\delta V^s := \int_C \langle X^s, \nu \rangle \sqrt{\det(g_u)}\, \mathrm{d}u = \langle f, 1 \rangle_{L^1}$, $f := \langle X^s, \nu \rangle$

• $\delta \mathcal{A}^s := \delta(\mathcal{A}(X^s(C))) = -\int_C f \cdot (n-1) \cdot H \, \mathrm{d}\mathcal{A} = -\langle f, (n-1)H \rangle_{L^1}$

Lemma. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung mit $\mathrm{supp}(f) \subset C$. Wenn $\int_C f \, \mathrm{d}\mathcal{A} = 0$, dann gibt es eine normale Variation $X^s = X + \tau_s \nu$ mit konstantem Volumen, sodass $f = \delta \tau_s = \langle \delta X^s, \nu \rangle$.

Prop. Es sind äquivalent:

- Es gilt $\delta \mathcal{A}^s = 0$ für jede normale Variation X^s von X auf C mit konstantem Volumen.
- Es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$, genannt **Lagrange-Multiplikator**, sodass $\delta(\mathcal{A}^s + \lambda \nu^s) = 0$ für alle normalen Variationen.

Def. Eine Fläche heißt **CMC-Fläche** (constant mean curvature), wenn die mittlere Krümmung H konstant ist.

Satz. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^3$-Hyperfläche mit $U \Subset \mathbb{R}^{n-1}$ zusammenhängend, dann sind äquivalent:

• X ist minimal bei konst. Volumen. • X ist eine CMC-Fläche.

Minimalflächen im $\mathbb{R}^3$

Situation. Sei $U \Subset \mathbb{C}$, $F : U \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. Identifiziere $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ mittels $\binom{a}{b} \mapsto a + ib$.

Def. F heißt in z_0 **holomorph** (komplex diff'bar), wenn

$$F'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert.}$$

Notation (Wirtinger). • $\partial_z F = \frac{1}{2}(\partial_1 F - i \partial_2 F)$
• $\partial_{\overline{z}} F = \frac{1}{2}(\partial_1 F + i \partial_2 F)$

Lemma. Die Funktion F ist genau dann holomorph, wenn $\partial_{\overline{z}} F = 0$. In diesem Fall gilt: $F' = \partial_z F$.

Notation. $\triangle F := \partial_1 \partial_1 F + \partial_2 \partial_2 F$

Lemma. Sei $F : U \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion, dann gilt

$$\partial_z \partial_{\overline{z}} F = \tfrac{1}{4} \triangle F = \tfrac{1}{4}(\partial_1 \partial_1 F + \partial_2 \partial_2 F).$$

Def. Folgene Abbildung ist symmetrisch und über $\mathbb{C}$ bilinear:

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto \langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^n z_j w_j$$

Bem. Die Abbildung ist nicht positiv definit, nicht hermitesch und damit auch kein Skalarprodukt.

Def. Ein Vektor $z \in \mathbb{C}^n$ heißt **isotrop**, wenn $\langle z, z \rangle = 0$.

Lemma. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$z \text{ isotrop} \quad \Longleftrightarrow \quad \|x\| = \|y\| \text{ und } x \perp y$$

Def. Eine $\mathcal{C}^2$-HF $X : U \to \mathbb{R}^3$ heißt **konform parametrisiert**, wenn es eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $\lambda : U \to \mathbb{R}_{>0}$, genannt **konformer Faktor**, gibt, sodass $g = \lambda^2 I_2$, wobei g die 1. FF von X ist.

Bem. Durch Umparametrisierung kann jede hinreichend reguläre Hyperfläche konform parametrisiert werden.

Lemma. Sei $X : U \to \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ eine $\mathcal{C}^2$-Hyperfläche. Dann gilt

$$X \text{ ist konform parametrisiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \partial_z X, \partial_z X \rangle \equiv 0.$$

Dann gilt $\lambda = \sqrt{2 \langle \partial_z X, \overline{\partial_z X} \rangle}$.

Lemma. Sei $X : U \to \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ eine konform param. $\mathcal{C}^2$-HF. Dann:

$$\triangle X = 2 \lambda^2 H \nu.$$

Lemma. Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ eine Hyperfläche. Dann sind äquivalent:

- X ist eine konform parametrisierte Minimalfläche.
- $\partial_z X : U \to \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ ist holomorph und isotrop, also

$$\partial_{\overline{z}}(\partial_z X) = 0 \quad \text{und} \quad \langle \partial_z X, \partial_z X \rangle = 0.$$

Def. Sei $U \Subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine holomorphe Fkt. $F : U \to \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** (STF) von f, wenn $F' = f$.

Bem. Sei U zusammenhängend und $F_1, F_2 : U \to \mathbb{C}$ zwei STFn von f, dann ist $F_1 - F_2 = \text{const}$.

Def. Sei $f = (f_1, ..., f_n) : U \to \mathbb{C}^n$. Eine holomorphe Funktion $F = (F_1, ..., F_n) : U \to \mathbb{C}^n$ heißt **Stammfunktion** von f, wenn $F_j' = f_j$ für $j = 1, ..., n$.

Notation. Wir schreiben $\int f$ für eine STF von f.

Lemma. Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ eine konform parametrisierte HF, dann:

$$X - 2\Re\left(\int \partial_z X\right) = \text{const.}$$

Bem. Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ konform parametrisierte Minimalfläche, dann gilt $X = 2\Re\left(\int \partial_z X\right)$ bis auf Translation.

Satz. Es gibt (bis auf Translation) eine eindeutige Beziehung zwischen der Menge der konform parametrisierten Hyperflächen $X : U \to \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ und der Menge der holomorph isotropen Abbildungen $Y \to \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ gegeben durch (bis auf Translation)

$$Y = 2\partial_z X, \qquad X = \Re \int Y$$

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ eine konform parametrisierte minimale $\mathcal{C}^2$-HF und $Y := 2\partial_z X : U \to \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ (isotrop, holomorph). Sei $\Theta \in \mathbb{R}$, dann ist auch

$$Y_\Theta : U \to \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}, \quad u \mapsto \exp(i\Theta)Y(u)$$

holomorph und isotrop. Wir erhalten dann eine 2π-periodische Schar von Minimalflächen durch

$$X_\Theta = \Re\left(\int Y_\Theta\right) = \Re\left(\exp(i\Theta) \int Y\right) : U \to \mathbb{R}^3, \Theta \in \mathbb{R}.$$

Lemma. Jede Hyperfläche X_Θ für $\Theta \in \mathbb{R}$ in der assoziierten Familie von X ist isometrisch zu X, d. h. $g_\Theta = g$.

Beobachtung. $X_{\Theta+\pi} = -X_\Theta$

Def. Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ eine konform param. Minimalfläche, dann ist

$$X^* := X_{\frac{\pi}{2}} = \Re\left(i \int Y\right) = -\Im\left(\int Y\right)$$

die zu X **konjugierte Minimalfläche**.

Beobachtung. Es gilt $X_\Theta = \cos(\Theta)X + \sin(\Theta)X^*$.

Satz (Weierstraß-Darstellung)**.** Eine konform param. minimale $\mathcal{C}^2$-HF $X : U \to \mathbb{R}^3$ hat (bis auf Translation) die Gestalt

$$X = \Re\left(\int Y\right) \quad \text{mit} \quad Y = h \cdot \left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{g} - g\right), \tfrac{i}{2}\left(\tfrac{1}{g} + g\right), 1\right),$$

wobei $h : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $g : U \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph sind, sodass die Komponenten von Y keine gemeinsamen Nullstellen haben und keine Singularitäten haben.

Beobachtung. Ist X durch g und h gegeben, dann ist die assoziierte Familie X_Θ durch $h_\Theta = \exp(i\Theta)h$ und $g_\Theta = g$ definiert.

Satz. Sei $U \Subset \mathbb{C}$ zusammenhängend, $X : U \to \mathbb{R}^3$ eine konform param. $\mathcal{C}^2$-HF, die durch h und g gegeben ist. Dann gilt $\nu = \Phi \circ g$ für die Gaußabb. ν von X mit der stereographischen Projektion

$$\Phi : \mathbb{C} \to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \quad z \mapsto \tfrac{1}{|z|^2+1}(2z, |z|^2 + 1).$$

Korollar. Sei X eine zusammenhängende konform param. minimale $\mathcal{C}^2$-HF im $\mathbb{R}^3$ mit Gaußabb. ν, dann gilt für die Gaußabbildung ν_Θ der assoziierten Familie X_Θ

$$\nu_\Theta = \nu.$$