Zusammenfassung Modellkategorien

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel $(S, \leq)$ bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung $\leq$ auf S.

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\ldots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \ldots$

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz)**.** Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leq_S)] \leq [(T, \leq_T)] \quad :\iff \exists \,\text{inj. monotone Abb. } (S, \leq_S) \to (T, \leq_T).$$

Notation. • $0 \coloneqq [\emptyset]$, • $n \coloneqq [\{1, \ldots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega \coloneqq [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

Prinzip (**Transfinite Induktion**)**.**
Sei $P : \mathcal{O}_n \to$ **Prop** eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert: Für $\alpha = [(S, \leq_S)]$ und $\beta = [(T, \leq_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

- $\alpha + \beta \coloneqq [(S \amalg T, \leq_{S\amalg T})]$, wobei gilt:
  $$\leq_{S\amalg T}|_{S\times S} \coloneqq \leq_S, \quad \leq_{S\amalg T}|_{T\times T} \coloneqq \leq_T, \quad S <_{S\amalg T} T.$$
- $\alpha \cdot \beta \coloneqq [(S \times T, \leq_{S\times T})]$ mit der lexikogr. Ordnung
  $$(s_1, t_1) \leq_{S\times T} (s_2, t_2) \coloneqq t_1 < t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leq_S s_2)$$
- $\alpha^\beta \coloneqq [(\{\text{Abb. } f : S \to T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leq)]$ mit
  $$f < g \quad :\iff \exists\, t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall\, t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 \coloneqq [(\emptyset, \leq)] \in \mathcal{O}_n$.
b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.
c) Die Limeszahl $\lim A \coloneqq \sup A$ einer Teil*menge* $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

a)	b)	c)
$\alpha + 0 \coloneqq \alpha$	$\alpha+(\beta+1) \coloneqq (\alpha+\beta)+1$	$\alpha+\lim A \coloneqq \lim \{\alpha+\gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha \cdot 0 \coloneqq 0$	$\alpha \cdot (\beta+1) \coloneqq (\alpha\cdot\beta)+\alpha$	$\alpha \cdot \lim A \coloneqq \lim \{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha^0 \coloneqq 1$	$\alpha^{\beta+1} \coloneqq \alpha^\beta \cdot \alpha$	$\alpha^{\lim A} \coloneqq \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe ist mit
• $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, • $a \cdot 0 = 0$.

Lem (Rechenregeln in $\mathcal{O}_n$)**.** • $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
• $\alpha^0 = 1$ • $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^\alpha = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$
• $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ • $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

- $\mathcal{O}_n$ ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht*!
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:
  $$\forall \beta < \gamma: \quad \alpha+\beta < \alpha+\gamma, \quad \alpha\cdot\beta < \alpha\cdot\gamma \ (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \ (\alpha > 1).$$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \ldots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.