Zusammenfassung Modellkategorien

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel $(S, \leq)$ bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung $\leq$ auf S.

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\ldots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \ldots$

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz)**.** Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels
$[(S, \leq_S)] \leq [(T, \leq_T)] \quad :\iff \exists \, \text{inj. monotone Abb. } (S, \leq_S) \to (T, \leq_T).$

Notation. • $0 := [\emptyset]$, • $n := [\{1, \ldots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega := [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

Prinzip (**Transfinite Induktion**)**.**
Sei $P : \mathcal{O}_n \to \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert: Für $\alpha = [(S, \leq_S)]$ und $\beta = [(T, \leq_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

- $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leq_{S \amalg T})]$, wobei gilt:
  $$\leq_{S\amalg T}|_{S \times S} := \leq_S, \quad \leq_{S \amalg T}|_{T \times T} := \leq_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$
- $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leq_{S \times T})]$ mit der lexikogr. Ordnung
  $$(s_1, t_1) \leq_{S \times T} (s_2, t_2) :\iff t_1 < t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leq_S s_2)$$
- $\alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \to T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leq)]$ mit
  $$f < g \quad :\iff \exists \, t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 := [(\emptyset, \leq)] \in \mathcal{O}_n$.
b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.
c) Die Limeszahl $\lim A := \sup A$ einer Teil*menge* $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

a)	b)	c)
$\alpha + 0 := \alpha$	$\alpha + (\beta+1) := (\alpha+\beta)+1$	$\alpha + \lim A := \lim \{\alpha+\gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha \cdot 0 := 0$	$\alpha \cdot (\beta+1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$	$\alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha^0 := 1$	$\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$	$\alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe ist mit
• $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, • $a \cdot 0 = 0$.

Lem (Rechenregeln in $\mathcal{O}_n$)**.** • $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
• $\alpha^0 = 1$ • $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^\alpha = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$
• $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ • $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

- $\mathcal{O}_n$ ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht*!
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:
  $\forall \beta < \gamma : \quad \alpha+\beta < \alpha+\gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \ (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \ (\alpha > 1).$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \ldots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.

Kategorientheorie

Def. Eine **(schwache) 2-Kategorie** $\mathbb{C}$ besteht aus

- einer Ansammlung $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie
  $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & B \arrow[Rightarrow, from=U, to=D] \end{tikzcd} \right\},$$
- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor
  $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$
- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem Objekt $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem natürlichen Isomorphismus
  $$\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}} : \ - \circ (- \circ -) \Longrightarrow (- \circ -) \circ -,$$
  wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ
  $$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$
- und für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ natürlichen Isomorphismen
  $$\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (- \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$ kommutiert
  $$\begin{tikzcd} K(H(GF)) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] \arrow[d, "K\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}}"] & (KH)(GF) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{G}}"] & ((KH)G)H \\ K((HG)F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] & & (K(HG))F \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}F"'] \end{tikzcd}$$
- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathcal{C}$ kommutiert
  $$\begin{tikzcd} G \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{D},\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "G\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}}"'] & & (G \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \arrow[dl, "\rho_{\mathcal{D},\mathcal{E}}F"] \\ & G \circ F & \end{tikzcd}$$

Bspe. • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.
- Jede Kategorie $\mathcal{C}$ ist natürlich eine 2-Kategorie.
- Die Kategorie der Ringe $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathbb{R}) := \{\text{Ringe mit Eins}\}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) :=$ Kat. der B-A-Bimoduln mit $N \circ M := N \otimes_B M$ für $M \in \mathrm{Hom}(A, B)$ und $N \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\mathrm{Id}_A := A$.

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann $\otimes$ anstelle von $\circ$ geschrieben.

Def. Sei $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ von S ist eine Familie $\alpha_c : E \to S(c, c)$, $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von Morphismen in $\mathcal{A}$, sodass für alle $(f : c \to c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & S(c,c) \arrow[dr, "S(\mathrm{id}_c, f)"] & \\ E \arrow[ur, "\alpha_c"] \arrow[dr, "\alpha_{c'}"'] & & S(c,c') \\ & S(c',c') \arrow[ur, "S(f, \mathrm{id}_{c'})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, und E universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler S-**Keil**.

Notation. $E = \int_c S(c, c)$.

Bem. Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden: $\lim F = \int_c F(c)$; der Integrand ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$.

Bem. Das duale Konzept ist das eines ~~Anfangs~~ Koendes $\int^c S(c, c)$.

Bsp. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_c \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \ \cong \ \mathrm{Nat}(F, G).$$

Satz (Fubini)**.** Sei $S : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d,c)} S(d, d, c, c) \ \cong \ \int_d \int_c S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und $\int_c S(d, d', c, c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

Bsp. Sei R ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt $*$. Ein additiver Funktor $R^{(\mathrm{op})} \to \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein R-Linksmodul (bzw. R-Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Bsp (Ninja-Yoneda-Lemma)**.** Für jede Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ gilt

$$F \cong \int^c F(c) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

Def. Sei $\mathbb{C}$ eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{D}, \mathcal{C}$ ist ein nat. Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(F \circ -, -) \cong \mathrm{Hom}(-, G \circ -),$$

d. h. Morphismen $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, sodass $G\epsilon \circ \eta G = \mathrm{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \mathrm{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.