Zusammenfassung Algebr. Topologie

Def. Ein **affines n-Simplex** ist die konvexe Hülle von $n+1$ affin unabhängigen Punkten $p_0, ..., p_{n+1} \in \mathbb{R}^N$. Die konvexe Hülle von einer Teilmenge dieser Eckpunkte wird **Seite** genannt.

Def. Ein (endlicher) **geometrischer Simplizialkomplex** ist eine (endliche) Menge $\mathcal{S}$ endlich vieler affiner Simplizes im $\mathbb{R}^N$, sodass:

- Ist $K \in \mathcal{S}$ und $T \subset K$ eine Seite von K, dann ist auch $T \in \mathcal{S}$.
- Für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$ ist $K_1 \cap K_2$ entweder eine Seite von K_1 und K_2 oder leer.

Def. — Die $|S| := \bigcup\limits_{K \in \mathcal{S}} K$ heißt zu $\mathcal{S}$ gehörender **Polyeder** und $\mathcal{S}$ Triangulierung von $|\mathcal{S}|$.

Def. Ein geometrischer Simplizialkomplex mit einer Totalordnung auf der Menge der Eckpunkte heißt **geordnet**.

Notation. Ein n-Simplex mit Eckpunkten $v_0, ..., v_n$ in einem geordneten geom. Simplizialkomplex wird mit $\langle v_0, ..., v_n \rangle$ bezeichnet, falls $v_0 < v_1 < ... < v_n$.

Notation. $\mathcal{S}_n := \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma \text{ ist geordneter } n\text{-Simplex}\}$

Def. Eine **simpliziale n-Kette** in einem geordneten geom. Simplizialkomplex ist eine endliche formale Linearkombination

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma,$$

wobei $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}$. Die Menge solcher Linearkombinationen ist $C_n(\mathcal{S})$.

Bemerkung. $C_n(\mathcal{S})$ ist eine Gruppe.

Def. Der Rand eines orientierten n-Simplex $\langle v_0, ..., v_n \rangle \in \mathcal{S}$ ist

$$\delta\langle v_0, ..., v_n \rangle := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_0, ..., \hat{v_i}, ..., v_n \rangle.$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Gruppenhomo $\delta_n : C_n(\mathcal{S}) \to C_{n-1}(\mathcal{S})$.