Zusammenfassung Homologische Algebra

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def. **Verklebedaten** sind gegeben durch einen Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}}_{\mathrm{strikt}} \to \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ_{strikt} die Kategorie mit den Mengen $[n] \coloneqq \{0, 1, ..., n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und streng monotonen Abbildungen.

Notation. $X_{(n)} \coloneqq X([n])$

Def. Das **Standard-n-Simplex** $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die von den $(n+1)$ Standardbasisvektoren aufgespannte lineare Hülle. Eine streng monotone Abb $f : [n] \to [m]$ induziert durch Abbilden des i-ten Basisvektors auf den $f(i)$-ten eine Inklusion $\Delta_f : \Delta_n \to \Delta_m$,

Def. Die **geometrische Realisierung** von Verklebedaten X ist der topologische Raum

$$|X| \coloneqq \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R$$

Dabei ist $X_{(n)}$ diskret. Die Äquivalenzrelation R wird erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\, x \in X_{(n)},\, f : [m] \to [n] \text{ s.m.s.}$$

Def. Das **k-Skelett** $\mathrm{sk}_k\, X$ von Verklebedaten X ist definiert durch

$$(\mathrm{sk}_k\, X)_{(n)} \coloneqq \{x \in X_{(n)} \mid n \leq k\}, \quad (\mathrm{sk}_k\, X)(f) \coloneqq X(f) \text{ sofern möglich}$$

Def. Eine **simpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ die Kategorie mit den Mengen $[n] \coloneqq \{0, 1, ..., n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und monotonen Abbildungen.

Notation. $X_n \coloneqq X([n])$

Def. Die **geometrische Realisierung** einer simplizialen Menge X ist der topologische Raum

$$|X| \coloneqq \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n) \right) / R$$

Die Äquivalenzrelation R wird dabei erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\, x \in X_n \text{ und } f : [m] \to [n] \text{ monot.}$$

Def. Ein topologischer Raum heißt **trianguliert**, wenn er die Realisierung von Verklebedaten ist.

Def. Der **Nerv** einer Überdeckung $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ eines topologischen Raumes ist die simpliziale Menge

$$X_n \coloneqq \{(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in A^{n+1} \mid U_{\alpha_0} \cap ... \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\}$$
$$X(f)(\alpha_0, ..., \alpha_n) \coloneqq (\alpha_{f(0)}, ..., \alpha_{f(m)}) \quad \text{für } f : [m] \to [n].$$

Bem. Falls die Überdeckung lokal endlich ist und alle nichtleeren, endlichen Schnitte $U_{\alpha_1} \cap ... \cap U_{\alpha_n}$ zusammenziehbar sind, so ist die geom. Realisierung des Nerves der Überdeckung homotopieäq. zu X.

Def. $\Delta[p]_n \coloneqq \{\, g : [n] \to [p] \text{ monoton steigend} \,\}$, $\Delta[p](f)(g) \coloneqq g \circ f$

Def. Der **klassifizierende Raum** einer Gruppe G ist gegeben durch die Realisierung der simpl. Menge BG mit $(BG)_n \coloneqq G^n$ und

$$BG(f : [m] \to [n])(g_1, ..., g_n) \coloneqq (h_1, ..., h_m), \quad h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j$$

Def. Ein n-Simplex $x \in X_n$ heißt **degeneriert**, falls eine monotone surjektive Abbildung $f : [n] \to [m]$, $n > m$ und ein Element $y \in X_m$ existiert mit $x = X(f)(y)$.

Def. Seien X Verklebedaten. Wir konstruieren eine dazugehörende simpliziale Menge $\tilde{X}$ wie folgt:

$$\tilde{X}_n \coloneqq \{(x, g) \mid x \in X_{(k)}, g : [n] \to [k] \text{ monoton und surjektiv}\},$$

Für eine monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ und $(x, g) \in \tilde{X}_n$ schreiben wir zunächst $g \circ f = f_1 \circ f_2$ mit einer Injektion f_1 und einer Surjektion f_2 und setzen $\tilde{X}(f)(x, g) \coloneqq (X(f)(x), f_2)$.

Prop. Eine simpliziale Menge $\tilde{X}$ kann genau dann aus (eindeutigen) Verklebedaten gewonnen werden, falls für alle nicht-degenerierten Simplizes $x \in \tilde{X}_n$ und streng monotonen Abbildungen $f : [m] \to [n]$ auch $\tilde{X}(f)(x) \in \tilde{X}_m$ nicht degeneriert ist.

Prop. Seien X Verklebedaten, $\tilde{X}$ die entsprechende simpliziale Menge. Dann gilt $|X| \approx |\tilde{X}|$.

Def. Das **k-Skelett** $\mathrm{sk}_k\, X$ einer simplizialen Menge X ist geg. durch

$$(\mathrm{sk}_k\, X)_n \coloneqq \{X(f)(x) \mid p \leq k, f : [n] \to [p] \text{ monoton}, x \in X_p\}.$$

Def. Eine simpliziale Menge X hat **Dimension** n, falls $X = \mathrm{sk}_n\, X$.

Def. Eine **simpliziale Abbildung** zwischen simplizialen Mengen X und Y ist eine natürliche Transformation zwischen den beiden Funktoren $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

Def. Die Kategorie der simplizialen Mengen ist die Funktorkategorie $[\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$.

Prop. Geom. Realisierung ist ein Funktor $|{-}| : [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Top}$.

Bspe.
- Eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eines topologischen Raumes ist Verfeinerung von $(V_\beta)_{\beta \in B}$, wenn es eine Abbildung $\psi : A \to B$ gibt, sodass $U_\alpha \subset V_{\psi(\alpha)}$ für alle $\alpha \in A$. Dies induziert eine simpliziale Abb. zwischen den Nerven der Überdeckungen durch

$$F_n(\alpha_0, ..., \alpha_n) \coloneqq (\psi(\alpha_0), ..., \psi(\alpha_n)).$$

- Ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$ stiftet eine Abbildung $BG \to BH$ zwischen den klassifizierenden Räumen durch

$$F(g_1, ..., g_n) \coloneqq (\phi(g_1), ..., \phi(g_n)).$$

Def. Ein **simplizialer topologischer Raum** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Top}.$$

Die geometrische Realisierung eines simplizialen topologischen Raumes definiert wie bei simplizialen Mengen mit dem Unterschied, dass X_n im Allgemeinen nicht die diskrete Topologie trägt.

Def. Eine **bisimpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Notation. $X_{nm} \coloneqq X([n], [m])$

Bsp. Das **direkte Produkt** von simplizialen Mengen X und Y ist die bisimpliziale Menge

$$(X \times Y)_n \coloneqq X_n \times Y_n, \quad (X \times Y)(f, g)(x, y) \coloneqq (f(x), g(y)).$$

Def. Die **Diagonale** DX einer bisimplizialen Menge X ist die simpliziale Menge mit $(DX)_n \coloneqq X_{nn}$ und $DX(f) \coloneqq X(f, f)$.

Def. Sei X eine bisimpliziale Menge.
- Setze $|X|^D \coloneqq |DX|$.
- Definiere einen simplizialen topologischen Raum X^I durch

$$X^I_n \coloneqq |X_{\bullet n}|, \quad X^I(g) \coloneqq |X(\mathrm{id}, g)|.$$

  Setze $|X|^{I,II} \coloneqq |II, I|$.
- Definiere Analog $|X|^{II,I}$.

Satz (**Eilenberg-Zilber**). $|X|^D \cong |X|^{I,II} \cong |X|^{II,I}$ kanonisch.