

# Zusammenfassung Analysis II

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Notation.** Im Folgenden seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $I, J \subset \mathbb{R}$  offene Intervalle.

## Integration

**Def.** Eine **Zerlegung** eines Intervalls  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$  ist eine Menge  $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ . Die Zahl  $\mu_Z := \max\{x_j - x_{j-1} \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$  heißt **Feinheit** der Zerlegung  $Z$ . Wenn  $Z, Z'$  zwei Zerlegungen von  $[a, b]$  sind mit  $Z' \subset Z$ , dann heißt  $Z'$  Verfeinerung von  $Z$ .

**Def.** Eine Funktion  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Treppenfunktion** bezüglich einer Zerlegung  $Z = \{x_0 < \dots < x_n\}$  von  $[a, b]$ , wenn für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  die Funktion  $\phi$  auf dem offenen Intervall  $(x_{j-1}, x_j)$  konstant ist. Die Menge aller Treppenfunktionen (bezüglich irgendeiner Zerlegung) eines Intervalls  $[a, b]$  wird mit  $\mathcal{T}_{[a,b]}$  bezeichnet.

**Satz.**  $\mathcal{T}[a, b]$  ist ein UVR des reellen VR aller reellwertigen Funktionen auf  $[a, b]$ .

**Def.** Sei  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Treppenfunktion bezüglich einer Zerlegung  $Z = \{x_0 < \dots < x_n\}$ . Dann heißt

$$\int_a^b \phi(x) dx := \sum_{j=1}^n \phi\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) (x_j - x_{j-1})$$

**Integral** von  $\phi$ .

*Bemerkung.* Obige Definition ist unabhängig von der gewählten Zerlegung  $Z$ .

**Satz.** Das Integral von Treppenfunktionen ist linear und monoton.

**Def.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann heißen

$$\int_a^b f(x) dx := \inf \left\{ \int_a^b \phi(x) dx : \phi \in \mathcal{T}[a, b], \phi \geq f \right\}$$
$$\int_a^b f(x) dx := \sup \left\{ \int_a^b \phi(x) dx : \phi \in \mathcal{T}[a, b], \phi \leq f \right\}$$

**Oberintegral** bzw. **Unterintegral** von  $f$ .

*Bemerkung.* Da wir in der Definition voraussetzen, dass die Funktion  $f$  beschränkt ist, existieren Ober- und Unterintegral im eigentlichen Sinne. Für Treppenfunktionen sind Oberintegral und Unterintegral gleich dem Integral für Treppenfunktionen. Das Oberintegral ist immer größer gleich dem Unterintegral.

**Satz.** Für  $f, f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $\lambda \geq 0$  gilt

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_a^b -f(x) dx$$

$$2. \int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx \leq \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$
$$3. \int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx \geq \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$
$$4. \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$
$$5. \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

**Def.** Eine Abb.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Riemann-integrierbar**, wenn

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

*Bemerkung.* Für Treppenfunktionen stimmt das Riemann-Integral mit dem vorher definierten Integral für Treppenfunktionen überein.

**Satz.** Die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf einem Intervall  $[a, b]$  ist ein UVR des  $\mathbb{R}$ -VR aller Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (genannt  $\mathcal{R}_{[a,b]}$ ) und das Riemann-Integral verhält sich linear, dh. es gilt für alle  $f, g : \mathcal{R}_{[a,b]}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$1. \int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$
$$2. \int_a^b (\lambda f)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

**Satz.** Das Riemann-Integral verhält sich monoton.

**Satz.** Alle monotonen und alle stetigen Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sind Riemann-integrierbar.

**Satz.** Seien  $f, g : \mathcal{R}_{[a,b]}$ , dann auch Riemann-integrierbar:

$$1. f_+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max\{f(x), 0\}$$
$$2. f_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max\{-f(x), 0\}$$
$$3. |f|^p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |f(x)|^p, \text{ mit } p \geq 1$$
$$4. fg : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$$

**Satz** (Erster MWS für das Riemann-Integral). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g \geq 0$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in [a, b]$ , sodass gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(x_0) \int_a^b g(x) dx$$

**Def.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $Z = \{x_0 < \dots < x_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Dann heißt

$$1. R(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

**Riemannsche Summe** von  $f$  bzgl.  $Z$  und den Stützstellen  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$  für  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

$$2. O(f, Z) := \sum_{j=1}^n (\sup\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1})$$

**(Darbouxche) Obersumme** von  $f$  bzgl.  $Z$

$$3. U(f, Z) := \sum_{j=1}^n (\inf\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1})$$

**(Darbouxche) Untersumme** von  $f$  bzgl.  $Z$

*Bemerkung.* Sei  $Z'$  eine Verfeinerung von  $Z$ , dann gilt  $O(f, Z') \leq O(f, Z)$  und  $U(f, Z') \geq U(f, Z)$ .

**Satz.** Seien  $Z_1$ , und  $Z_2$  Zerlegungen von  $[a, b]$ , dann gilt  $U(f, Z_1) \leq O(f, Z_2)$ .

**Satz** (Charakterisierung des Riemann-Integrals). Für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt sind folgende vier Aussagen äquivalent:

- $f$  ist Riemann-integrierbar.
- Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$ , sodass

$$O(f, Z) - U(f, Z) < \epsilon.$$

- Es gibt eine Zahl  $\iota \in \mathbb{R}$  mit folgender Eigenschaft: Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass für jede Zerlegung  $Z = \{x_0 < \dots < x_n\}$  von  $[a, b]$  der Feinheit  $\mu_Z \leq \delta$  und jede Wahl von Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  gilt:

$$|\iota - R(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n)| < \epsilon$$

- Es gibt eine Zahl  $\iota \in \mathbb{R}$  mit folgender Eigenschaft: Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es eine Zerlegung  $\tilde{Z}_\epsilon = \{\tilde{x}_0 < \dots < \tilde{x}_m\}$  von  $[a, b]$ , sodass für jede Verfeinerung  $Z = \{x_1 < \dots < x_n\}$  von  $\tilde{Z}_\epsilon$  und jede Wahl von Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  bzgl.  $Z$  gilt:

$$|\iota - R(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq \epsilon.$$

**Satz.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $c \in (a, b)$ . Dann ist  $f$  genau dann Riemann-integrierbar, wenn  $f|_{[a,c]}$  und  $f|_{[c,b]}$  Riemann-integrierbar sind und es gilt in diesem Fall

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Satz** ( $\Delta$ -Ungleichung für das Riemann-Integral). Für  $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ :

$$\int_a^b |f(x) + g(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx.$$

**Satz** (Vertauschung von Integration und Limes bei glm. Konv.). Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, welche gleichmäßig gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

**Def.** Eine differenzierbare Funktion  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Stammfunktion** von  $f$ , wenn die Ableitung von  $F$  gerade  $f$  ist.

*Bemerkung.* Zwei Stammfunktionen einer Funktion  $f$  unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

**Satz.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist eine Stammfunktion von  $f$ :

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

**Satz (HDI).** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt für alle  $x, y \in I$

$$\int_x^y f(x) \, dx = F(y) - F(x)$$

**Satz** (Vertauschung von Grenzwerten und Ableitungen). Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, welche pktw. gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Wenn die Folge der Ableitungen  $f'_n$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert, dann ist auch  $f$  differenzierbar und es gilt  $f' = f^*$ .

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x )$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\exp(ax)$	$\frac{1}{a} \exp(ax)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$x^n \ln(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x - \frac{1}{n+1}), n \geq 1$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a} (x \ln x - x)$

**Satz (Substitutionsregel).** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $g : J \rightarrow I$  stetig differenzierbar. Dann gilt für  $a, b \in I$ :

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) \, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx$$

**Satz (Partielle Integration).** Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt für  $a, b \in I$ :

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx$$

**Def** (Riemann-Integral für komplexwertige Funktionen). Eine komplexwertige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Riemann-integrierbar, wenn ihr Realteil  $\Re(f)$  und ihr Imaginärteil  $\Im(f)$  Riemann-integrierbar sind. Wir setzen

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \Re(f) \, dx + i \int_a^b \Im(f) \, dx.$$

**Def** (Uneigentliche Integrale). • Sei  $a < b$  mit  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, sodass  $f|_{[a, R]}$  für alle  $R \in (a, b)$  Riemann-integrierbar ist. Wir setzen

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{R \uparrow b} \int_a^R f(x) \, dx$$

falls der Grenzwert existiert.

• Sei  $a < b$  mit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, sodass  $f|_{[R, b]}$  für alle  $R \in (a, b)$  Riemann-integrierbar ist. Wir setzen

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{R \downarrow a} \int_R^b f(x) \, dx$$

falls der Grenzwert existiert.

• Sei  $a < b$  mit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $c \in (a, b)$ . Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, sodass für alle  $a < R_1 < c < R_2 < b$  die  $f|_{[R_1, c]}$  und  $f|_{[c, R_2]}$  Riemann-integrierbar sind. Wir setzen

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{R_1 \downarrow a} \int_{R_1}^c f(x) \, dx + \lim_{R_2 \uparrow b} \int_c^{R_2} f(x) \, dx$$

falls beide Grenzwerte existieren.

**Def.** Für zwei Funktionen  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , eine Zerlegung  $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$  von  $[a, b]$  und Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  bzgl.  $Z$  heißt die Summe

$$S(f, dg, Z, \xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

**Riemann-Stieltjes-Summe** von  $f$  bzgl.  $g$  und der Zerlegung  $Z$  mit Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

**Def.** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  heißt **Riemann-Stieltjes-integrierbar** (RS-integrierbar) bzgl. der **Gewichtsfunktion**  $g$ , wenn gilt: Es gibt ein  $\iota \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z_\epsilon$  von  $[a, b]$  existiert, sodass für alle Verfeinerungen  $Z \supset Z_\epsilon$  und Wahlen von Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  gilt:

$$|\iota - S(f, dg, Z, \xi_1, \dots, \xi_n)| \leq \epsilon.$$

Dieses (eindeutig bestimmte)  $\iota$  heißt **Riemann-Stieltjes-Integral** (RS-Integral) von  $f$  bzgl.  $g$ .

*Bemerkung.* Für die Identitätsfunktion  $g(x) = x$  stimmt das Riemann-Stieltjes-Integral mit dem Riemann-Integral überein.

**Satz** (Linearität des RS-Integrals). • Seien  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl.  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  RS-integrierbar und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Dann ist auch  $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$  bzgl.  $g$  RS-integrierbar mit

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) \, dg(x) = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) \, dg(x) + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) \, dg(x)$$

• Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl. den Funktionen  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  RS-integrierbar und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  auch bzgl.  $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)$  RS-integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) \, d(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \int_a^b f(x) \, dg_1(x) + \lambda_2 \int_a^b f(x) \, dg_2(x)$$

**Satz.** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $c \in (a, b)$ , dann ist  $f$  genau dann bzgl.  $g$  RS-integrierbar, wenn die Funktionen  $f|_{[a, c]}$  bzgl.  $g|_{[a, c]}$  und  $f|_{[c, b]}$  bzgl.  $g|_{[c, b]}$  RS-integrierbar sind und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dg(x) = \int_a^c f(x) \, dg(x) + \int_c^b f(x) \, dg(x).$$

**Satz** (Partielle Integration beim RS-Integral). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl.  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  RS-integrierbar, dann ist auch  $g$  bzgl.  $f$  RS-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dg(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) \, df(x)$$

**Satz** (Riemann-Stieltjes- und Riemann-Integral). Sei  $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, dann ist  $f$  bzgl.  $g$  RS-integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) \, dg(x) = \int_a^b f(t)g'(t) \, dt.$$

**Def.** Die **Variation** von  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl. einer Zerlegung  $Z = \{x_0 < \dots < x_n\}$  von  $[a, b]$  ist die nicht-negative Zahl

$$V(g, Z) := \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})|.$$

Die **Totalvariation** von  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$V_a^b(g) := \sup \{V(g, Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Falls  $V_a^b(g) < \infty$ , so heißt  $g$  **von beschränkter Variation**.

**Satz.** Alle monotonen und alle Lipschitz-stetigen Funktionen sind von beschränkter Variation.

**Satz.** Sei  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  von beschränkter Variation und  $c \in (a, b)$ , dann sind auch  $g|_{[a, c]}$  und  $g|_{[c, b]}$  von beschränkter Variation und es gilt

$$V_a^c(g|_{[a, c]}) + V_c^b(g|_{[c, b]}) = V_a^b(g).$$

**Satz.** Seien  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  von beschränkter Variation, dann gilt  $V_a^b(g_1 + g_2) \leq V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2)$ .

**Satz.** Die Menge aller Funktionen  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bildet einen UVR des VR der reellwertigen Funktionen auf  $[a, b]$ .

**Satz.** Sei  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  von beschränkter Variation, dann ist jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bzgl.  $g$  RS-integrierbar mit

$$|\int_a^b f(x) \, dg(x)| \leq \|f\|_{\sup} \cdot V_a^b(g).$$

**Satz** (1. MWS für RS-Integrale). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und bzgl. einer monoton wachsenden Gewichtsfunktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  RS-integrierbar. Dann gibt es  $\mu \in [\inf f([a, b]), \sup f([a, b])]$  mit

$$\int_a^b f(x) \, dg(x) = \mu(g(b) - g(a)).$$

**Satz** (2. MWS für RS-Integrale). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ist  $f$  bzgl.  $g$  RS-integrierbar und es gibt  $c \in [a, b]$ , sodass

$$\int_a^b f(x) \, dg(x) = f(a)(g(b) - g(a)) + f(b)(g(b) - g(c)).$$

**Satz.** Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge stetiger Funktionen, welche gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert und  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  von beschränkter Variation, dann gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dg(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f_n(x) \, dg(x) \right).$$

**Satz** (Helly-Bray). Sie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge von Funktionen von beschränkter Variation, sodass es eine Konstante  $c > 0$  mit  $V_a^b(g_n) < c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt. Konvergiere  $g_n$  pktw. gegen eine Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dg(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f(x) \, dg_n(x) \right).$$

# Metrische und normierte Räume

**Def.** Ein **metrischer Raum**  $(X, d)$  ist ein Tupel bestehend aus einer Menge  $X$  und einer Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , genannt **Metrik**, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1.  $d(x, y) = 0 \iff (x = y)$
2. Symmetrie:  $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
3. Dreiecksungleichung:  $\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

*Bemerkung.* Aus den obigen Axiomen folgt:  $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0$

**Notation.** Sei im folgenden  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

**Def.** Für  $r \in \mathbb{R}$  und  $m \in X$  heißt

$$B_r(m) = B_r^d(m) = \{x \in X : d(x, m) < r\}$$

**offener Ball** oder **offene Kugel** um  $m$  von Radius  $r$  und

$$B_r^a(m) = B_r^{a,d}(m) = \{x \in X : d(x, m) \leq r\}$$

**abgeschlossener Ball** oder **abgeschlossene Kugel** um  $m$ .

**Def.**  $Y \subset X$  heißt eine **Umgebung** von  $m$  bzgl.  $d$ , wenn gilt:

$$\exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(m) \subset Y.$$

**Def.** • Eine Menge  $U \subset X$  heißt **offen** in  $(X, d)$  (notiert  $U \Subset X$ ), falls  $U$  eine Umgebung von allen Punkten  $u \in U$  ist, d. h.

$$\forall u \in U : \exists \epsilon_u > 0 : B_{\epsilon_u}(u) \subset U$$

- Eine Menge  $U \subset X$  heißt **abgeschlossen** in  $(X, d)$  (notiert  $U \P X$ ), falls  $X \setminus U$  offen ist.
- Ein Punkt  $x \in X$  heißt **Randpunkt** von  $Y \subset X$ , falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : (B_\epsilon(x) \cap Y \neq \emptyset \text{ und } B_\epsilon(x) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset).$$

Die Menge aller Randpunkte von  $Y$  wird mit  **$\partial Y$**  bezeichnet.

*Bemerkung.* Die Mengen  $\emptyset$  und  $X$  sind jeweils sowohl offen als auch abgeschlossen in  $X$ . Es gilt außerdem  $\partial Y = \partial(X \setminus Y)$  für alle  $Y \subset X$ .

**Def.** Sei  $Y \subset X$ . Dann heißt

- $Y^\circ := Y \setminus \partial Y$  das **Innere** oder der **offene Kern** von  $Y$ .
- $\bar{Y} := Y \cup \partial Y$  der **Abschluss** oder die **abgeschl. Hülle** von  $Y$ .

**Satz.** Obige Definition ergeben Sinn, d. h. es gilt für alle  $Y \subset X$ :  $Y^\circ \Subset X$  und  $\bar{Y} \P X$

**Satz.** Sei  $Y \subset X$ . Dann gilt:

- $(Y \Subset X) \iff (Y \cap \partial Y) = \emptyset$
- $(Y \P X) \iff (\partial Y \subset Y)$

**Satz** (Metrische Räume sind hausdorffsch). Seien  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ , dann gibt es offene Teilmengen  $U_x, U_y \Subset X$  mit  $x \in U_x$ ,  $y \in U_y$  und  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

**Def.** Sei  $x_n$  eine Folge in  $X$ . Die Folge heißt **konvergent** in  $(X, d)$ , wenn gilt

$$\exists x \in X : \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(x_n, x) \leq \epsilon.$$

Die eindeutige Zahl  $x$  heißt **Grenzwert** oder **Limes** von  $(x_n)$ , notiert  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Satz** (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit). Sei  $A \subset X$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $A$  ist abgeschlossen in  $X$ .
2. Für jede in  $X$  konvergente Folge, die vollständig in  $A$  liegt, gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$ .

**Def.** Eine Folge  $(x_n)$  heißt **Cauchyfolge** in  $(X, d)$ , wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \epsilon$$

**Satz.** Jede konvergente Folge  $(x_n)$  in einem metrischen Raum ist eine Cauchyfolge.

**Def.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in  $(X, d)$  auch in  $(X, d)$  konvergiert.

**Def.** Eine **Norm** auf einem reellen VR  $V$  ist eine Abbildung

$$\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

für die gilt:

1.  $(\|x\| = 0) \iff (x = 0)$
2.  $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. Dreiecksungleichung:  $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Das Tupel  $(V, \|-\|)$  heißt **normierter Vektorraum**.

*Bemerkung.* In jedem normierten Raum gilt  $\|x\| \geq 0$ .

*Bemerkung* (Wichtige Normen). • Die **euklidische Norm** auf  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{\text{eukl}} := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

- Die **Maximumsnorm** auf  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_{\max} := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

- Sei  $X$  eine nichtleere Menge. Dann ist die **Supremumsnorm**

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

eine Norm auf  $V = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$ .

- Sei  $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  der VR der reellwertigen stetigen Funktionen auf  $[a, b]$  und  $p \geq 1$ . Dann ist die **p-Norm**

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm auf  $V$ .

- Seien  $(V, \|-\|_V)$  und  $(W, \|-\|_W)$  zwei normierte (reelle) VR, dann ist auch  $\text{Hom}(V, W) := \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ linear}\}$  ein reeller VR. Die Norm

$$\begin{aligned} \|f\|_{\text{op}} &:= \sup\left\{ \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} \mid x \in V \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup\{\|f(x)\|_W \mid x \in V, \|x\|_V = 1\} \end{aligned}$$

auf  $\text{Hom}(V, W)$  heißt **Operatornorm**.

**Def.** Die Abbildung

$$d_{\|-\|} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

ist eine Metrik auf  $V$  und heißt von der Norm  $\|-\|$  **induzierte Metrik** auf  $V$ .

**Def.** Ein vollständiger normierter Vektorraum  $(V, \|-\|)$  heißt **Banachraum**.

**Satz** (Bolzano-Weierstraß). Für eine Folge  $(x_n)$  in  $(\mathbb{R}^m, \|-\|_{\text{eukl}})$  gilt:

- Ist  $(x_n)$  beschränkt, d. h. gibt es ein  $C > 0$ , sodass  $\|x_n\|_{\text{eukl}} \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann hat  $(x_n)$  eine konvergente Teilfolge.
- Ist  $(x_n)$  eine Cauchyfolge, so ist  $(x_n)$  konvergent (d. h.  $(\mathbb{R}^m, \|-\|_{\text{eukl}})$  ist vollständig).

**Def.** Sei  $V$  ein reeller VR. Zwei Normen  $\|-\|_1$  und  $\|-\|_2$  auf  $V$  heißen äquivalent, wenn es  $c, C > 0$  gibt, sodass für alle  $x \in V$  gilt:

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$$

**Satz.** Alle Normen auf  $\mathbb{R}^n$  (und allen anderen endlich-dimensionalen, reellen VR) sind äquivalent.

**Def.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  zwei metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$ .

- Die Abbildung  $f$  heißt **stetig** in  $a \in X$ , wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta_a > 0 : d_X(x, a) < \delta_a \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$$

Wenn  $f$  in allen Punkten  $x \in X$  stetig ist, so heißt  $f$  stetig.

- Die Abbildung  $f$  heißt **folgenstetig** in  $a \in X$ , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

d. h. für jede Folge  $(x_n)$  in  $X$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

**Satz.** Für eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei metrischen Räumen und  $a \in X$  gilt:  $f$  stetig in  $a \iff f$  folgenstetig in  $a$

**Satz.** Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen zwischen metrischen Räumen und  $a \in X$ . Falls  $f$  in  $a$  und  $g$  in  $f(a)$  stetig sind, so ist  $(g \circ f) : X \rightarrow Z$  stetig in  $a$ .

**Satz.** Seien  $(V, \|-\|_V)$  und  $(W, \|-\|_W)$  zwei normierte VR und  $f : V \rightarrow W$  linear. Dann sind äquivalent:

- $f$  ist stetig

- $\exists C > 0 : \forall x \in V : \|f(x)\|_W < C\|x\|_V$
- $\|f\|_{\text{op}} < \infty$

**Korollar.** Jede lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen normierten reellen VR ist stetig.

**Def.** Sei  $X$  eine Menge und  $(Y, d_Y)$  ein metrischer Raum. Sei  $f_n : X \rightarrow Y$  eine Folge von Abbildungen. Die Folge  $(f_n)$  **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$ , wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \sup\{d_Y(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\} \leq \epsilon$$

**Satz.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  zwei metrische Räume und sei  $f_n : X \rightarrow Y$  eine Folge stetiger Abbildungen, die gleichmäßig gegen  $f : X \rightarrow Y$  konvergiert. Dann ist  $f$  stetig.

**Korollar.** Der normierte VR  $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\text{sup}})$  der stetigen reellen Funktionen auf  $[a, b]$  versehen mit der Supremumsnorm ist vollständig. Allgemeiner ist für jeden metrischen Raum  $(X, d)$  der Vektorraum  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  bezüglich der Supremumsnorm vollständig.

**Def.** Sei  $W \subset X$  eine Teilmenge eines metrischen Raumes  $(X, d)$ . Eine Familie offener Teilmengen  $\{U_i \subseteq X : i \in I\}$  heißt **offene Überdeckung** von  $W$ , wenn gilt:

$$W \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

**Def.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $K \subset X$  heißt **kompakt** in  $(X, d)$ , wenn gilt: Jede offene Überdeckung  $\{U_i \subseteq X : i \in I\}$  besitzt eine endliche offene Teilüberdeckung, d. h. es gibt eine endliche Teilmenge  $J \subset I$ , sodass  $K \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$  gilt.

**Satz.** Eine kompakte Teilmenge  $K$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  ist beschränkt und abgeschlossen.

**Achtung.** Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

**Satz** (Heine-Borel). Im  $\mathbb{R}^n$  gilt auch die Umkehrung: Eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge  $K \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\text{eukl}})$  ist kompakt. Allgemeiner ist jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge eines endlich-dimensionalen, normierten, reellen VR kompakt.

**Achtung.** Obige Aussage gilt nicht für unendlichdimensionale, reelle, normierte VR.

**Satz.** Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes  $(X, d)$  und  $A \subset K$  abgeschlossen in  $X$ . Dann ist auch  $A$  kompakt.

**Def.** Seien  $[a_j, b_j], a_j < b_j, j = 1, \dots, n$  kompakte Intervalle in  $\mathbb{R}$ , dann ist

$$\begin{aligned} Q &:= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in \{1, \dots, n\} : a_j \leq x_j \leq b_j\} \end{aligned}$$

ein **abgeschlossener Quader** im  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz.** Abgeschlossene Quader im  $\mathbb{R}^n$  sind kompakt.

**Def.** Eine Teilmenge  $A \subset X$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge  $(x_n)$  in  $A$  eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in  $A$  liegt.

**Satz** (Bolzano-Weierstraß). Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist folgenkompakt.

*Bemerkung.* Es gilt auch die Umkehrung: Jede folgenkompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist kompakt.

**Satz.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  zwei metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Sei  $K \subset X$  kompakt. Dann ist  $f(K) \subset Y$  kompakt.

**Satz** (Weierstraßscher Satz vom Extremum). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $K \subset X$  eine nichtleere kompakte Teilmenge. Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gibt es  $m, M \in \mathbb{R}$ , sodass gilt:

$$f(m) = \inf\{f(x) : x \in K\}, \quad f(M) = \sup\{f(x) : x \in K\}$$

**Def.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  zwei metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : (d_X(x, y) < \delta) \implies (d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon)$$

**Satz.** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  zwei metrische Räume wobei  $X$  kompakt ist und  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig.

## Kurven

**Notation.** Sei nun  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, das mindestens zwei Punkte enthält. Wir verwenden in diesem Abschnitt die euklidische Norm.

**Def.** Eine stetige Abbildung  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Kurve** im  $\mathbb{R}^n$ .

**Def.** Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  mit Zerlegung  $Z = \{a = t_0 < \dots < t_m = b\}$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve. Dann hat der **Polygonzug**  $P_f(Z)$  die Länge

$$L(P_f(Z)) = \sum_{j=1}^m \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|.$$

**Def.** Eine Kurve  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **rektifizierbar**, wenn gilt: Es gibt ein  $L \in \mathbb{R}$ , sodass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass für jede Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  der Feinheit  $\mu_Z \leq \delta$  gilt:

$$|L - L(P_f(Z))| \leq \epsilon$$

**Def.** Sei  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Eine Kurve  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt in  $t_0 \in I$  **differenzierbar**, wenn der Limes

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existiert. Wenn  $f$  in jedem Punkt  $t \in I$  differenzierbar ist, so heißt  $f$  differenzierbar. Falls  $I$  kein offenes Intervall ist, so heißt die Kurve  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar, wenn es ein offenes Intervall  $J \supset I$  in  $\mathbb{R}$  und eine differenzierbare Kurve  $F : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, sodass  $F|_I = f$  gilt.

*Bemerkung.* Eine Kurve  $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann in  $t \in I$  differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_n$  in  $t$  differenzierbar sind.

**Satz.** Jede stetig differenzierbare Kurve  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist rektifizierbar mit Länge

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

**Def** (Riemann-Integral für Funktionen nach  $\mathbb{R}^n$ ). Eine beschränkte Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Riemann-integrierbar**, wenn gilt: Es gibt ein  $\iota \in \mathbb{R}^n$ , sodass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass für jede Zerlegung  $Z = \{a = t_0 < \dots < t_m = b\}$  der Feinheit  $\mu_Z \leq \delta$  und Wahl von Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_m$  bzgl.  $Z$  gilt:

$$\|\iota - R(f, Z, \xi_1, \dots, \xi_m)\| \leq \epsilon.$$

Der Vektor  $\iota \in \mathbb{R}^n$  heißt **Riemann-Integral** von  $f$ .

*Bemerkung.* Eine Funktion  $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann **Riemann-integrierbar**, wenn jede Komponentenfunktion  $f_j, j = 1, \dots, n$  Riemann-integrierbar ist. Es gilt in diesem Fall:

$$\int_a^b f(t) dt = \left( \int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right)$$

Insbesondere sind stetige Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stets Riemann-integrierbar.

**Satz.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, dann gilt:

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Es gilt Gleichheit, wenn alle  $f(t)$  gleichgerichtet sind, d. h. für alle  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $f(x_1) \neq 0$  gibt es ein  $\lambda \geq 0$ , sodass  $f(x_2) = \lambda f(x_1)$ .

**Def.** Eine Kurve  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **regulär**, wenn sie stetig differenzierbar ist und die Ableitung  $f'$  keine Nullstelle hat.

**Korollar.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre Kurve,  $x := f(a)$  und  $y := f(b)$ . Dann gilt für die Länge  $L_f$  von  $f$ :

$$L_f \geq \|x - y\|.$$

Falls hier Gleichheit gilt, dann gibt es eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung  $\phi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ , sodass  $f = c_{xy} \circ \phi$  wobei

$$c_{xy} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto x + t(y - x)$$

die Strecke von  $x$  nach  $y$  ist.

*Motto:* Die Gerade ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte.



# Partielle Ableitungen

**Def.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$ . Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt in einem Punkt  $u \in U$  **in Richtung  $v$  differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$D_v f(u) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(u + hv) - f(u)}{h}$$

existiert. In diesem Fall heißt  $D_v f(u)$  die **Richtungsableitung** von  $f$  im Punkt  $u \in U$  in Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$ .

**Def.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt

- im Punkt  $u \in U$  bzgl. der  $j$ -ten Koordinatenrichtung **partiell differenzierbar**, falls die Richtungsableitung

$$D_j f(u) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(u) := D_{e_j} f \in \mathbb{R}^m$$

existiert. In diesem Fall heißt  $D_j f(u)$  die  **$j$ -te partielle Ableitung** von  $f$  in  $u$ .

- (auf  $U$ ) bzgl. der  $j$ -ten Koordinatenrichtung partiell differenzierbar, wenn  $f$  in jedem Punkt  $u \in U$  bzgl. der  $j$ -ten Koordinatenrichtung partiell differenzierbar ist.
- im Punkt  $u \in U$  partiell differenzierbar, wenn  $f$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  in  $u$  bzgl. der  $j$ -ten Koordinatenrichtung partiell differenzierbar ist.
- (auf  $U$ ) partiell differenzierbar, wenn  $f$  in jedem Punkt  $u \in U$  partiell differenzierbar ist.

**Achtung.** Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die in  $u \in U$  partiell differenzierbar ist, muss noch lange nicht in  $u$  stetig sein!

**Def.** Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$ , partiell differenzierbar, so setzen wir

$$D_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto D_j f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

Falls die Abbildungen  $D_j f$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  wieder partiell differenzierbar sind, also für alle  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  die Abbildungen

$$D_k D_j f := D_k(D_j f) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

existieren, so nennen wir  $f$  **zweimal partiell differenzierbar**. Alternative Schreibweise:

$$D_k D_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Analog definiert man für  $l \in \mathbb{N}$  rekursiv die  **$l$ -te partielle Ableitung**

$$D_{j_l} D_{j_{l-1}} \cdots D_{j_1} f = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \partial x_{j_{l-1}} \cdots \partial x_{j_1}}.$$

Falls jede  $l$ -te partielle Ableitung stetig ist, so heißt  $f$   **$l$ -mal stetig partiell differenzierbar**.

**Satz** (Schwarz / Clairaut). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n, u \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sowie  $j, k \in \{1, \dots, n\}$ . Wenn die ersten partiellen Ableitungen  $D_j f, D_k f$  und die zweiten partiellen Ableitungen  $D_j D_k f$  und  $D_k D_j f$  im Punkt  $u$  stetig sind, dann gilt

$$D_j D_k f(u) = D_k D_j f(u).$$

## Die totale Ableitung

**Def.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $u \in U$ . Eine Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **in  $u$  (total) differenzierbar**, wenn gilt: Es gibt eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $A_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und eine Abbildung  $\phi_u : B_{r_u}(0) \rightarrow \mathbb{R}^m$  für ein hinreichend kleines  $r_u > 0$ , sodass gilt

1.  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\phi_u(\eta)}{\|\eta\|} = 0$
2. für alle  $\xi \in B_{r_u}(0)$  gilt  $u + \xi \in U$  und
3.  $f(u + \xi) = f(u) + A_u(\xi) + \phi_u(\xi)$

Die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $A_u$  heißt das **totale Differential** von  $f$  in  $u$ . Man schreibt

$$A_u = Df(u).$$

Wenn  $f$  in jedem  $u \in U$  total differenzierbar ist, dann heißt  $f$  **total differenzierbar**.

**Bemerkung.** Seien  $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $u \in U$  total differenzierbar. Dann ist auch  $(f_1 + f_2)$  in  $u$  total differenzierbar und es gilt

$$D(f_1 + f_2)(u) = Df_1(u) + Df_2(u)$$

**Satz.** Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $u \in U$  total differenzierbar, so ist  $f$  in diesem Punkt  $u$  stetig.

**Achtung.** Wenn  $f$  in einem Punkt  $u$  partiell differenzierbar ist, so folgt daraus nicht, dass  $f$  in diesem  $u$  total differenzierbar ist. Selbst wenn in  $u$  alle Richtungsableitungen existieren, muss  $f$  in  $u$  nicht total differenzierbar sein.

**Satz.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $u \in U$  total differenzierbar und  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = 1$ . Dann ist  $f$  in  $u$  in Richtung  $v$  ableitbar mit

$$Df(u)(v) = D_v f(u).$$

**Def.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $u \in U$  total differenzierbar. Dann ist

$$Df(u) = J_u f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \right) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Die Matrix  $J_u f$  heißt **Jacobimatrix** von  $f$  im Punkt  $u$ .

**Satz.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  partiell diffbar und alle partiellen Ableitungen in  $u \in U$  stetig. Dann ist  $f$  in  $u$  total differenzierbar.

**Bemerkung.** Es gelten folgende Implikationen:  
 $f$  ist stetig partiell differenzierbar  
 $\implies f$  ist total differenzierbar ( $\implies f$  ist stetig)  
 $\implies f$  ist partiell differenzierbar

**Satz.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$   $k$ -mal stetig partiell differenzierbar mit  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $1 \leq l \leq k$ , dann sind alle  $l$ -ten partiellen Ableitungen von  $f$  stetig.

**Satz** (Kettenregel). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  sowie  $g : U \rightarrow V$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$  Abbildungen. Wenn  $g$  in  $u \in U$  und  $f$  in  $g(u)$  total differenzierbar ist, dann ist  $(f \circ g) : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  in  $u$  total differenzierbar mit

$$D(f \circ g)(u) = Df(g(u)) \circ Dg(u).$$

**Satz** (MWS). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n, u \in U$  und  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar. Sei außerdem  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , sodass das Bild der Strecke  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto u + t\xi$  ganz in  $U$  liegt. Dann gilt

$$f(u + \xi) - f(u) = \left( \int_0^1 (J_{u+t\xi} f) dt \right) \cdot \xi = \int_0^1 ((J_{u+t\xi} f) \cdot \xi) dt$$

**Korollar** (Schränkensatz). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n, u \in U$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\xi \in \mathbb{R}^n$  wie oben. Sei

$$M := \sup \left\{ \|J_{u+t\xi} f\|_{\text{op}} : t \in [0, 1] \right\},$$

dann gilt

$$\|f(u + \xi) - f(u)\| \leq M \|\xi\|$$

**Notation.** Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $u \in U$  und  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ . Dann setzen wir

$$d^k f(u) \xi^k := \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n (D_{j_k} \cdots D_{j_1} f(u)) \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_k}$$

und

$$d^0 f(u) \xi^0 := f(u).$$

**Satz** (**Taylorformel** in mehreren Veränderlichen). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(p+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Ferner sei  $u \in U$  und  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , sodass für alle  $t \in [0, 1]$  gilt  $h(t) := u + t\xi \in U$ . Dann gibt es ein  $\tau \in [0, 1]$ , sodass

$$f(u + \xi) = F(1) = \left( \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} d^k f(u) \xi^k \right) + \frac{1}{(p+1)!} d^{p+1} f(u + \tau\xi) \xi^{p+1}.$$

**Bemerkung** (Taylorformel für  $p = 2$ ). Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar. Wir nennen

$$(\text{Hess} f)(u) := (D_j D_k f(u))_{j,k}$$

$$= \begin{pmatrix} D_1 D_1 f(u) & \cdots & D_1 D_n f(u) \\ D_2 D_1 f(u) & \cdots & D_2 D_n f(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(u) & \cdots & D_n D_n f(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

die **Hesse-Matrix** von  $f$  in  $u$ . Mit der Taylorformel für  $p = 2$  folgt

$$f(u + \xi) = f(u) + \sum_{j=1}^n Df(u) \xi_j + \frac{1}{2} \cdot \xi^T \cdot (\text{Hess} f)(u) \cdot \xi + R_2^f(u, \xi).$$

**Def.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Ein Punkt  $u \in U$  heißt **kritischer Punkt** von  $f$ , wenn

$$D_j f(u) = 0 \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

**Satz.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Hat  $f$  in  $u \in U$  ein lokales Extremum, dann ist  $u$  ein kritischer Punkt von  $f$ .

**Def.** Eine reelle symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt

- **degeneriert**, wenn  $\det(A) = 0$  gilt.
- **positiv definit**, wenn für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt:  $\xi^T A \xi > 0$ . Äquivalent ist  $A$  positiv definit, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv sind.

- **negativ definit**, wenn  $-A$  positiv definit ist (bzw. alle Eigenwerte von  $A$  negativ sind).
- **indefinit**, wenn  $A$  weder degeneriert, noch positiv, noch negativ definit ist (d. h.  $A$  besitzt sowohl negative als auch positive Eigenwerte).

**Satz** (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und  $u \in U$  ein kritischer Punkt von  $f$ . Dann gilt

1. Ist  $(\text{Hess}f)(u)$  positiv definit, so hat  $f$  in  $u$  ein isoliertes lokales Minimum.
2. Ist  $(\text{Hess}f)(u)$  negativ definit, so hat  $f$  in  $u$  ein isoliertes lokales Minimum.
3. Ist  $(\text{Hess}f)(u)$  indefinit, so hat  $f$  in  $u$  kein lokales Extremum (also einen Sattelpunkt).

**Achtung.** Ist  $(\text{Hess}f)(u)$  degeneriert, so ist keine Aussage möglich.

**Strategie** (Bestimmung globaler Extrema auf Kompakta). Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein Kompaktum mit  $K^\circ \neq \emptyset$  und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und auf  $K^\circ$  partiell differenzierbare Funktion. Als stetige Funktion auf einem Kompaktum nimmt  $f$  auf  $K$  ein Maximum und Minimum an. So kann man Maximum und Minimum bestimmen:

1. Bestimme alle kritischen Stellen von  $f|_{K^\circ}$ .
2. Bestimme alle Extrema von  $f$  auf dem Rand  $\partial K$ .
3. Vergleiche die Funktionswerte von  $f$  an den kritischen Stellen in  $f|_{K^\circ}$  und  $f|_{\partial K}$ .

**Strategie** (Bestimmung globaler Extrema). Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  partiell differenzierbar.

1. Bestimme alle Funktionswerte von  $f$  in allen kritischen Stellen. Sei  $M$  der größte und  $m$  der kleinste Funktionswert an einer kritischen Stelle.
2. Wenn es ein  $R > 0$  gibt, sodass  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)}$  nur Werte kleiner als  $M$  bzw. Werte größer als  $m$  annimmt, dann ist  $M$  das globale Maximum bzw.  $m$  das globale Minimum.

## Satz von der Umkehrfunktion

**Def.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$ . Eine Abbildung  $f : U \rightarrow V$  heißt **( $\mathcal{C}^1$ -)Diffeomorphismus**, wenn  $f$  invertierbar ist und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  stetig partiell differenzierbar sind.

**Bemerkung.** Sei  $f : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus, wobei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$ . Aus der Kettenregel folgt für  $u \in U$ :

$$(J_u f)^{-1} = J_{f(u)}(f^{-1}).$$

**Satz** (Banachscher Fixpunktsatz). Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $\psi : K \rightarrow K$  eine Kontraktion, d. h. es gibt eine Konstante  $\kappa$  mit  $0 < \kappa < 1$ , sodass für alle  $x, y \in K$  gilt

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq \kappa \|x - y\|.$$

Dann hat  $\psi$  genau einen Fixpunkt in  $K$ .

**Satz (Satz von der lokalen Umkehrfunktion).** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $u \in U$  sowie  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig partiell differenzierbar. Wenn  $Df(u)$  invertierbar ist, so gibt es offene Umgebungen  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $u \in X \subset U$ , sodass  $f(X) = Y$  gilt und  $f|_X : X \rightarrow Y$  ein Diffeomorphismus ist.

**Bemerkung.** Es ist wichtig, dass  $f$  stetig partiell differenzierbar ist. Für Funktionen, die lediglich total differenzierbar sind, gilt der Satz von der lokalen Umkehrabbildungen im Allgemeinen nicht.

**Korollar** (Offenheitssatz). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig partiell differenzierbar. Wenn für alle  $u \in U$  die Differentiale  $Df(u)$  invertierbar sind, dann ist  $f(U)$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ .

**Korollar.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine injektive stetig partiell differenzierbare Abbildung, sodass für alle  $u \in U$  die Differentiale  $Df(u)$  invertierbar sind. Dann ist  $f$  ein Diffeomorphismus auf sein Bild, d. h.  $f|_{f(U)}$  ist ein Diffeomorphismus.

## Satz über implizite Funktionen

**Notation.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^p$  offene Teilmengen, dann ist  $U \times V$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{n+p}$ . Sei  $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^q$  stetig differenzierbar. Für ein festes  $u \in U$  sei

$$f_u : V \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad v \mapsto f(u, v).$$

Wir definieren

$$D_V f(u, v) := D(f_u)(v) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$$

bzw. als Matrix

$$J_V f(u, v) := J_v(f_u) \in \mathbb{R}^{q \times p}.$$

Analog definieren wir  $f^v : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  und  $D_U f(u, v)$  bzw.  $J_U f(u, v)$ .

**Bemerkung.** Offenbar gilt für  $u \in U$  und  $v \in V$ :

$$J_{(u,v)} f = (J_U f(u, v), J_V f(u, v)) \in \mathbb{R}^{q \times (n+p)}.$$

**Satz.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig partiell differenzierbar, welche in einem Punkt  $(u_0, v_0) \in U \times V$  eine Nullstelle habe, d. h.  $f(u_0, v_0) = 0$ . Wenn in diesem Punkt  $J_V f(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  invertierbar ist, dann gibt es

- eine offene Menge  $X \subseteq U \times V$  mit  $(u_0, v_0) \in X$ ,
  - eine offene Menge  $Y \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  mit  $(u_0, 0) \in Y$ ,
  - einen Diffeomorphismus  $G : Y \rightarrow X$  mit  $G(u_0, 0) = (u_0, v_0)$ ,
- sodass  $f \circ G = \pi_2$ .

**Satz (Satz über implizite Funktionen).** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^p$  und  $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig partiell differenzierbar, welche in  $(u_0, v_0) \in U \times V$  eine Nullstelle hat, d. h.  $f(u_0, v_0) = 0 \in \mathbb{R}^p$ . Wenn in diesem Punkt  $J_V f(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  invertierbar ist, dann gibt es

- eine offene Menge  $X \subseteq U \times V$  mit  $(u_0, v_0) \in X$ ,
- eine offene Menge  $\tilde{U} \subseteq U$  mit  $u_0 \in \tilde{U}$ ,
- eine stetig partiell differenzierbare Abbildung  $g : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,

sodass

$$f^{-1}(0) \cap X = \text{Graph}(g) = \{(u, g(u)) : u \in \tilde{U}\}.$$

In anderen Worten: Für alle  $(u, v) \in X$  gilt

$$f(u, v) = 0 \iff v = g(u).$$

Die Funktion  $g$  erfüllt dabei

$$g(u_0) = v_0 \quad \text{und} \quad J_{u_0} g = -(J_V f(u_0, v_0))^{-1} \cdot J_U f(u_0, v_0).$$

## Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

**Def.** Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt  $m$ -dimensionale **Untermannigfaltigkeit** von  $\mathbb{R}^n$ , wenn gilt: Für alle  $u \in M$  gibt es eine offene Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $u \in U$  und eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $0 \in V$ , sowie einen Diffeomorphismus  $\Phi : U \rightarrow V$  mit  $\Phi(u) = 0$ , sodass gilt:

$$\Phi(M \cap U) = V \cap \{(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n\} \cong V \cap \mathbb{R}^m.$$

Die Abbildung  $\Phi$  heißt **Karte** von  $M$  um den Punkt  $u$ .

**Def.** Sei  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Kurve mit  $c(0) = u \in M$ , deren Bild ganz in  $M$  liegt, dann heißt der Vektor  $c'(0) \in \mathbb{R}^n$  **Tangentialvektor** an  $M$  in  $u \in M$ . Für  $u \in M$  setzen wir

$$T_u M := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ Tangentialvektor an } M \text{ in } u\}.$$

Die Menge  $T_u M$  heißt **Tangentialraum** von  $M$  im Punkt  $u$ .

**Satz.** Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und  $u \in M$ , dann ist  $T_u M$  ein  $m$ -dimensionaler UVR von  $\mathbb{R}^n$ .

**Def.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $u \in M$ . Das orthogonale Komplement (bzgl. des Standardskalarprodukts  $\langle -, - \rangle$ )

$$N_u M = (T_u M)^\perp$$

von  $T_u M$  in  $\mathbb{R}^n$  heißt **Normalraum** von  $M$  im Punkt  $u$ .

**Def.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit  $p \leq n$  stetig partiell differenzierbar. Ein Punkt  $u \in U$  wird **regulärer Punkt** von  $f$  genannt, wenn die lineare Abbildung  $Df(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  Rang  $p$  hat (also surjektiv ist). Sei  $Y \in \mathbb{R}^p$ , dann heißt sein Urbild

$$f^{-1}(\{y\}) = \{u \in U : f(u) = y\}$$

**reguläres Urbild** oder **reguläre Niveaumenge**, wenn alle Punkte in  $f^{-1}(\{y\})$  reguläre Punkte von  $f$  sind.

**Def.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit  $p \leq n$  stetig partiell differenzierbar. Ist  $y \in \text{Bild}(f)$  und  $M := f^{-1}(\{y\})$  ein reguläres Urbild, dann ist  $M$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $m = n - p$ .

**Def.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar. Dann heißt die Abbildung

$$\nabla g : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad u \mapsto \begin{pmatrix} D_1 g(u) \\ \vdots \\ D_n g(u) \end{pmatrix}$$

**Gradient** von  $g$ . Ist  $g$  in  $u$  differenzierbar, so gilt

$$\nabla g(u) = (J_u g)^\perp.$$

**Satz.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f = (f_1, \dots, f_p) : U \rightarrow \mathbb{R}^p, p \leq n$  stetig partiell differenzierbar. Ist  $y = (y_1, \dots, y_p) \in \text{Bild}(f)$  und  $M := f^{-1}(\{y\})$  ein reguläres Urbild sowie  $u \in M$ , dann ist  $\{\nabla f_1(u), \dots, \nabla f_p(u)\}$  eine Basis von  $N_u M$ .

**Satz** (Lokale Extrema unter Nebenbedingungen). Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Ferner sei  $M \subset U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $u_0 \in M$  ein Punkt, an welchem  $f|_M$  ein lokales Extremum annimmt. Dann gilt  $\nabla f(u_0) \in N_{u_0} M$ . Ist  $M$  sogar ein reguläres Urbild einer stetig partiell differenzierbaren Abbildung  $g = (g_1, \dots, g_p) : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ , dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ , sodass

$$\nabla f(u_0) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_j(u_0).$$

Die Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$  heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.