Zusammenfassung Partielle DGLn

1. Einleitung

Def. Eine **partielle Differentialgleichung** (PDGL) hat die Form

$$E(x, u(x), Du(x), ..., D^k u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \qquad (\star)$$

wobei $E : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht ist. Die höchste Ableitungsordnung von u, die in E vorkommt, heißt **Ordnung** der PDGL.

Def. Eine PDGL von der Ordnung k heißt

- **linear**, falls sie folgende Form besitzt:
$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) = 0$$
- **semilinear**, falls sie linear in der höchsten Ableitungsordnung ist, man sie also schreiben kann als
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) = 0.$$
- **quasilinear**, falls sie sich schreiben lässt als
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), ..., D^{k-1}u(x)) = 0.$$
- sonst **voll nichtlinear**.

Bemerkung. $\{$ lineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ semilineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ quasilineare PDGLn $\} \subsetneq \{$ PDGLn $\}$

Def (Typeinteilung für lineare PDGLn 2. Ordnung)**.** Seien $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(i, j \in \{1, ..., n\})$ vorgegebene Fktn. auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Die lineare PDGL
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **elliptisch**, falls die $(n \times n)$-Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.
- Die lineare PDGL
$$D_1 D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_j(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **hyperbolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.
- Die lineare PDGL
$$D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{2 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x) + f(x) = 0$$
heißt **parabolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

Def. Eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **klassische Lösung**, falls $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ und die Differentialgleichung $(\star)$ überall in Ω erfüllt ist.

2. Laplace- und Poisson-Gleichung

Notation. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $F = (F_1, ..., F_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann heißt

- $\operatorname{div} F \coloneqq \sum_{i=1}^{n} D_i F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **Divergenz** von F,
- $\operatorname{grad} f \coloneqq \nabla f \coloneqq (\partial_1 f, ..., \partial_n f)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **Gradient** von f,
- Δ mit $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^{n} D_i D_i f$ **Laplace-Operator**.

Notation. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibe

$$V \Subset \Omega \quad \text{für} \quad V \subset \mathbb{R}^n \text{ mit } \overline{V} \text{ kompakt und } \overline{V} \subset \Omega^\circ.$$

Def. Die **Laplace-** bzw. **Poisson-Gleichung** ist die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = f \qquad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Satz (Transformationssatz)**.** Sei $T : \Omega \to T(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeo, dann gilt für $f : T(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$

$$f \in L^1(T(\Omega)) \iff (f \circ T) \circ |\det(DT)| \in L^1(\Omega) \quad \text{mit}$$

$$\int_{T(\Omega)} f \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (f \circ T) \cdot |\det(DT)| \,\mathrm{d}x.$$

Bsp (Polarkoordinaten)**.** Sei $f \in L^1(B_r(K))$. Dann ist f auf fast jeder Sphäre $\partial B_\rho(K)$ für $\rho \in [0, r]$ integrierbar und es gilt

$$\int_{B_r(x)} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x_0)} f \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}\rho$$

Satz (Gauß)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Ist $F \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} F \in L^1(\Omega)$, so gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (F \circ \nu) \,\mathrm{d}S,$$

wobei ν der äußere Einheitsnormalenvektor ist.

Korollar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Sind $f, g \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, dann gilt die partielle Integrationsregel

$$\int_\Omega D_i f g \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f D_i g \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f g \nu^i \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

Sind $f, g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, dann gelten die Greenschen Formeln

$$\int_\Omega Df \cdot Dg \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f \Delta g \,\mathrm{d}x + \int_\Omega f D_\nu g \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\int_\Omega (f \Delta g - g \Delta f) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (f D_\nu g - g D_\nu f) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

Proposition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| < \infty$, $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ und $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$. Angenommen,

- $f(x, -) \in \mathcal{C}^1(I)$ für fast alle $x \in \Omega$,
- $f(-, t) \in L^1(\Omega) \frac{\partial f}{\partial t}(-, t) \in L^1(\Omega)$ für alle $t \in I$ und
- für alle $t \in I$ gibt es $\epsilon > 0$ sodass $]t - \epsilon, t + \epsilon[\subset I$ und
$$\sup_{s \in]t-\epsilon, t+\epsilon[} |\tfrac{\partial f}{\partial t}(-, s)| \in L^1(\Omega).$$

Dann ist die Abbildung

$$g : I \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \int_\Omega f(x, t) \,\mathrm{d}x$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn Ω offen und beschränkt ist, $f(x, -) \in \mathcal{C}^1(I)$ für alle $x \in \Omega$ und $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times I)$.

Notation. Bezeichne mit $\mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$. Für messbare Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ schreibe $|A| \coloneqq \mathcal{L}^n(A)$.

Bsp. Zwischen dem Volumen von Kugeln und Sphären im $\mathbb{R}^n$ bestehen folgende Zusammenhänge:

$$|B_r(0)| = r^n \cdot |B_1(0)| \quad \text{und} \quad |B_r(0)| = \tfrac{r}{n} \cdot \int_{\partial B_r(0)} 1 \,\mathrm{d}S$$

Notation. $\omega_n \coloneqq \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

Notation. Sei $f : \Omega / M \to \mathbb{R}$ integrierbar für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathcal{L}^k(\Omega) \in]0, \infty[$ bzw. $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $\int_M 1 \,\mathrm{d}S \in]0, \infty[$

$$\fint_\Omega f(x) \,\mathrm{d}x \coloneqq \tfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad \fint_M f(x) \,\mathrm{d}x \coloneqq \tfrac{1}{|M|} \int_M f(x) \,\mathrm{d}x$$

heißen **Mittelwerte** von f auf Ω bzw. M.

Def. Ein **Glättungskern** auf $\mathbb{R}^n$ ist eine nicht-negative, radialsymmetrische Funktion $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(B_1(0))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \,\mathrm{d}x = 1$.

Def. Der **Standardglättungskern** ist die Funktion

$$\eta(x) \coloneqq C \cdot \exp\left(\tfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) \cdot \mathbb{1}_{B_1(0)}(x)$$

mit Normierungskonstante C. Für $\epsilon > 0$ ist der dazugehörige skalierte Glättungskern gegeben durch

$$\eta_\epsilon(x) \coloneqq \epsilon^{-n} \eta(x/\eta).$$

Alle Glättungskern-Eigenschaften bleiben bei Skalierung erhalten.

Notation. $\Omega_\epsilon \coloneqq \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$. Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ heißt die Funktion

$$f_\epsilon : \Omega_\epsilon \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \eta_\epsilon * f(x) \coloneqq \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x - y) f(y) \,\mathrm{d}y \quad \text{ϵ-**Glättung** von } f$$

Satz (Eigenschaften von Glättungen)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$ und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann gilt

- Regularität: $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\epsilon)$ mit $D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha \eta_\epsilon) * f$ für beliebige Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- Ist $D_i f$ stetig auf Ω, so gilt $D_i(f_\epsilon) = (D_i f)_\epsilon$ auf Ω_ϵ.

- Falls $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in]0,1]$, so gilt $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega_\epsilon)$ mit derselben Hölderkonstante.
- Falls $f \in L^p(\Omega)$ für $p \in [0,\infty]$, so gilt $\|f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$.
- $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} f$ fast-überall in Ω.
- Falls $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, so konvergiert f_ϵ gleichmäßig gegen f für $\epsilon \to 0$ auf kompakten Teilmengen von Ω,
- Falls $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ für $p \in [1,\infty[$, so gilt $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} f$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.
- Abschätzung der Approximationsgüte: Ist $Du \in L^p(\Omega)$, so gilt

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \epsilon \cdot \|Df\|_{L^p\Omega}.$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Man nennt u

- **harmonisch**, falls $\Delta u = 0$ in Ω gilt.
- **subharmonisch**, falls $\Delta u \geq 0$ in Ω gilt.
- **superharmonisch**, falls $\Delta u \leq 0$ in Ω gilt.

Bspe. • Affine Funktionen sind harmonisch.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definiere $u(x) \coloneqq x \cdot Ax$. Dann gilt $\Delta u = \operatorname{spur} A$, also $\Delta u = 0 \iff \operatorname{spur} A = 0$.
- Real- und Imaginärteil von holomorphen Fktn. sind harmonisch.

Def. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(x) \coloneqq \begin{cases} -(2\pi)^{-1}\log|x|, & \text{wenn } n = 2 \\ (n(n-2)\,\omega_n)^{-1}|x|^{2-n}, & \text{wenn } n \geq 3 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung** der Laplacegleichung.

Bemerkung. • Φ ist radialsymmetrisch, d. h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\|x_1\| = \|x_2\|$ gilt $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$.
- Φ, $|D\Phi| \in L^1(B_R(0))$ für alle $R > 0$ aber $|D^2\phi| \notin L^1(B_1(0))$.
- Die Konstanten wurden so gewählt, dass gilt:

$$-\int_{\partial B_r(0)} D\Phi \cdot \nu \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} = 1 \quad \text{für alle } r > 0.$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_R(x_0) \subset \Omega$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Für

$$\phi :]0,R[\to \mathbb{R}, \quad r \mapsto \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r\to 0} \phi(r) = u(x_0)$ • $\phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B_r(x_0)} \Delta u(x)\,\mathrm{d}x$

Korollar (Mittelwertseigenschaft)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_r(x_0) \Subset \Omega$ und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$0 = \Delta u \implies u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{und} \quad u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}$$

In diesen Gleichungen darf man $=$ durch $\leq, <, \geq$ oder $>$ ersetzen.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:

- u ist harmonisch, d. h. es gilt $\Delta u = 0$ in Ω.
- u erfüllt die sphärische Mittelwertseigenschaft, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

- u erfüllt die Mittelwertseigenschaft auf Kugeln, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \qquad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Bemerkung. Die Äquivalenz gilt auch unter den schwächeren Voraussetzungen $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ oder $u \in L^1(\Omega)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω, d. h. $\Delta u \geq 0$ in Ω. Dann gilt

- Das **schwache Maximumsprinzip**: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist Ω zusammenhängend und existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\Omega} u$, so ist u konstant.

Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ harmonisch. Dann gilt

$$\min_{\partial\Omega} u < \max_{\partial\Omega} u \implies \min_{\partial\Omega} u < u < \max_{\partial\Omega} u \text{ auf } \Omega.$$

Korollar (Eindeutigkeit)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dann ist $u = v$, falls gilt:

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v & \text{in } \Omega \\ u = v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Bemerkung (Stetige Abhängigkeit von Randwerten). Gilt lediglich $\Delta u = \Delta v$ in Ω, aber nicht $u = v$ auf $\partial\Omega$, so gilt immerhin

$$\max_{\overline{\Omega}}|u - v| = \max_{\partial\Omega}|u - v|.$$

Satz (Harnack-Ungleichung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \Subset \Omega$ offen, zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega, V)$, sodass

$$\sup_V u \leq c \cdot \inf_V u \qquad \text{für alle harmonischen Fktn. } u : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und erfülle $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Sphären, d. h.

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Dann gilt $u(x) = u_\epsilon(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\epsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Insbesondere ist $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und harmonisch.

Korollar. Obiger Satz gilt auch, wenn $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Kugeln erfüllt, d. h.

$$u(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u \,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Def. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem topologischen Raum X **konvergiert lokal gleichmäßig** gegen $f : X \to \mathbb{R}$, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x von x gibt, sodass f_n auf U_x gleichmäßig gegen f konvergiert.

Korollar (Konvergenzsatz von Weierstraß)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiert. Dann ist u harmonisch auf Ω.

Korollar (Harnackscher Konvergenzsatz)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf Ω. Gibt es ein $x_0 \in \Omega$, sodass $(u_k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt (und damit konvergent) ist, so konvergiert (u_k) lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion auf Ω.

Satz (von Hermann Weyl)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega u \cdot \Delta\phi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Dann gibt es eine harmonische Funktion $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = \tilde{u}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Satz (Innere Abschätzung für Ableitungen harmonischer Fktn)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gilt für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$ und jede Kugel $B_r(x_0) \Subset \Omega$:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq C(n,k) r^{-n-k} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \quad \text{mit } C(n,k) \coloneqq \tfrac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n}.$$

Satz (Liouville)**.** Sei $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch.

- Ist u beschränkt, so ist u konstant.
- Gilt $\limsup_{|x|\to\infty} \frac{|u(x)|}{|x|^{k+1}} = 0$, so ist u ein Polynom, dessen Grad $\leq k$ ist.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **analytisch** in $x \in \Omega$, falls f sich lokal durch ihre Taylorreihe darstellen lässt, also ein $r \in]0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)[$ existiert mit

$$f(y) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \tfrac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x)(y-x)^\alpha \qquad \text{für alle } y \in B_r(x).$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Wenn u harmonisch ist, dann auch analytisch.

Problem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, (beschränkt), regulär und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht ist $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mit

$$(2.1) \begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Satz (Greensche Darstellungsformel)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand und $h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ mit $\Delta h \in L^1(\Omega)$. Es gilt für $x \in \Omega$:

$$h(x) = -\int_\Omega \Phi(x-y)\Delta h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y) - \int_{\partial\Omega} h(y) D_y\Phi(x-y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y)$$

Bemerkung. Für Randpunkte $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\tfrac{1}{2}h(x) = -\int_\Omega \Phi(x-y)\Delta h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y) \cdot Dh(y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y) - \int_{\partial\Omega} h(y) D_y\Phi(x-y) \cdot \nu \,\mathrm{d}S(y)$$

Korollar (Darstellungsformel für Lsgn in $\mathbb{R}^n$)**.** Sei $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$, setze

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (\Phi * f)(x) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dann gilt: $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. • Für $n = 2$ ist die Lösung potentiell unbeschränkt.

• Für $n \geq 3$ ist diese Lsg beschränkt und erfüllt $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Proposition. Jede andere beschränkte Lösung von $-\Delta u = f$ auf $\mathbb{R}^n$ unterscheidet sich nur durch eine additive Konstante.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine **Greensche Funktion** für Ω ist eine Funktion $G : \{(x, y) \in \Omega \times \Omega \,|\, x \neq y\} \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \Omega$ gilt:

- Die **Korrektorfunktion** $y \mapsto G(x, y) - \Phi(x - y)$ ist von der Klasse $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ und ist harmonisch in Ω.
- Die Funktion $G(x, -)$ hat Nullrandwerte auf $\partial\Omega$, d. h. es gilt $\lim_{y\to y_0} G(x, y) = 0$ für alle $y_0 \in \partial\Omega \cup \{\infty\}$.

Bemerkung. Die Funktion $G(x, -)$ ist in $\mathcal{C}^2(\Omega \setminus \{x\}) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$ und hat die gleiche Singularität wie $y \mapsto \Phi(x - y)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$. Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (2.1) und ist G die Greensche Funktion für Ω (falls existent), dann gilt für alle $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} g(y) \cdot D_yG(x, y) \cdot \nu\,\mathrm{d}S(y).$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, G die Greensche Funktion für Ω und $B_r(x) \Subset \Omega$. Für $f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ gilt dann:

$$\lim_{\epsilon\to0} \int_{\partial B_\epsilon(x)} (G(x, y)Df(y) - f(y)D_yG(x, y)) \cdot \nu(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) = f(x).$$

Satz. Ist G die Greensche Funktion zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, so gilt $G(x, y) = G(y, x)$ für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$.

Korollar. Sei G die Greensche Funktion zu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, so ist die Funktion $x \mapsto G(x, y)$ harmonisch auf $\Omega \setminus \{y\}$.

Def. Sei $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a)$. Dann heißt

$$x^* := a + r^2 \frac{x - a}{\|x - a\|^2} \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B_r(a) \quad \textbf{Spiegelungspunkt} \text{ von } x.$$

Bemerkung. Es gilt: • $\|x - a\| \cdot \|x^* - a\| = r^2$ • $(x^*)^* = x$

• $\forall\, y \in \partial B_r(a) : \|x^* - y\|^2 = r^2\|x - a\|^{-2}\|y - x\|^2$.

Notation. Für $B_r(a) \subset \mathbb{R}$ sei $g : B_r(a) \times B_r(a) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x, y) := \begin{cases} -\Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y - x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ -\Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Proposition. Für die Funktion g gilt:

- $g(x, y) - \Phi(x - y) = 0$ für alle $y \in \partial B_r(a)$ und $x \in B_r(a)$.
- $y \mapsto g(x, y)$ ist glatt und harmonisch in $B_r(a)$ für alle $x \in B_r(a)$.

Korollar. Die Greensche Funktion für $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ lautet

$$G_{B_r(a)}(x, y) := \Phi(x - y) + g(x, y)$$
$$= \begin{cases} \Phi(x - y) - \Phi\left(\frac{|x-a|}{r}(y - x^*)\right) & \text{für } x \in B_r(a) \setminus \{a\} \\ \Phi(a - y) - \Phi(re_1) & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Def. Der **Poisson-Kern für die Kugel** $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$K_{B_r(a)}(x, y) := \frac{1}{n\omega_n} \cdot \frac{r^2-|x-a|^2}{r|x-y|^n}.$$

Satz (Poisson-Integralformel für Kugeln)**.** Sei $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ und $g : \partial B_r(a)$ stetig.

- Für $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_r(a)})$ harmonisch mit $u = g$ auf $\partial B_r(a)$ gilt
$$u(x) = \int_{\partial B_r(a)} K_{B_r(a)}(x, y)g(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für alle } x \in B_r(a). \tag{2.8}$$
- Umgekehrt definiert (2.8) die eindeutige harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}^2(B_r(a)) \cap \mathcal{C}^1(\overline{B_r(a)})$ mit $u = g$ auf $\partial B_r(a)$.

Notation. $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n > 0\}$ heißt **Halbraum**.

Def. Für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt $\overline{x} := (x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$ **Spiegelpunkt** von x bzgl. $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Satz. Die Greensche Funktion für $\mathbb{R}^n_+$ lautet

$$G_{\mathbb{R}^n_+}(x, y) := \Phi(x - y) - \Phi(x^* - y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^n_+ \text{ mit } x \neq y.$$

Def. Der **Poisson-Kern für den Halbraum** $\mathbb{R}^n_+$ ist definiert als

$$K_{\mathbb{R}^n_+}(x, y) := \frac{1}{n\omega_n} \cdot \frac{2x_n}{|x-y|^n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n_+ \text{ und } y \in \partial\mathbb{R}^n_+.$$

Satz (Poisson-Integralformel für den Halbraum)**.** Sei $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Dann definiert

$$u(x) := \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K_{\mathbb{R}^n_+}(x, y)g(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n_+$$

eine beschränkte, harmonische Funktion $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit $u = g$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Notation. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ schreibe

- $\Omega^+ := \{(x_1, ..., x_n) \in \Omega \,|\, x_n > 0\} = \Omega \cap \mathbb{R}^n_+$
- $\Omega^0 := \{(x_1, ..., x_n) \in \Omega \,|\, x_n = 0\} = \Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+$
- $\Omega^- := \{(x_1, ..., x_n) \in \Omega \,|\, x_n < 0\} = \Omega \setminus \overline{\mathbb{R}^n_+}$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und symmetrisch bzgl. $\partial\mathbb{R}^n_+$, d. h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x \in \Omega \iff \overline{x} \in \Omega$.

- Ungerades Spiegelungsprinzip: Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^+) \cap \mathcal{C}(\Omega^+ \cup \Omega^0)$ harmonisch auf Ω^+ mit $u = 0$ auf Ω^0, so ist die ungerade Fortsetzung
$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega^+ \cup \Omega^0, \\ -u(\overline{x}) = -u(x_1, ..., -x_n) & \text{für } x \in \Omega^- \end{cases}$$
harmonisch auf Ω.
- Gerades Spiegelungsprinzip: Ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega^+) \cap \mathcal{C}^1(\Omega^+ \cup \Omega^0)$ mit $D_nu = 0$ auf Ω^0, so ist die gerade Fortsetzung
$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega^+ \cup \Omega^0, \\ u(\overline{x}) = u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \text{für } x \in \Omega^- \end{cases}$$
harmonisch auf Ω.

Bemerkung. Aus dem Spiegelungsprinzip und dem Satz von Liouville folgt die Eindeutigkeit beschränkter harmonischer Funktionen auf dem Halbraum mit vorgegebenen Randwerten.

Problem (Dirichlet-RWP)**.** Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ ist $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ gesucht mit

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{in } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ heißt **$\mathcal{C}^0$-subharmonisch**, falls die MW-Ungleichung auf Sphären erfüllt ist, d. h.

$$u(x_0) \leq \fint_{\partial B_r(x_0)} u\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle } x_0 \in \Omega \text{ und } r \in \,]0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)[.$$

Die Funktion heißt **$\mathcal{C}^0$-superharmonisch**, falls $-u$ $\mathcal{C}^0$-subharmonisch ist und **$\mathcal{C}^0$-harmonisch**, falls u sowohl subharmonisch als auch harmonisch ist.

Notation.
$$H^-(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \,|\, u \text{ ist subharmonisch auf } \Omega\}$$
$$H^+(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \,|\, u \text{ ist superharmonisch auf } \Omega\}$$
$$H^0(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) \,|\, u \text{ ist harmonisch auf } \Omega\}$$

Bemerkung. $\mathcal{C}^0$-harmonische Funktionen sind glatt und harmonisch.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ sind äquivalent:

- u ist $\mathcal{C}^0$-subharmonisch auf Ω.
- u erfüllt die MW-Ungleichung auf Kugeln, d. h. für alle $x_0 \in \Omega$ gilt
$$u(x_0) \leq \fint_{B_r(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } r \in \,]0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)[.$$
- u erfüllt die MW-Ungleichung auf kleinen Kugeln, d. h. für alle $x_0 \in \Omega$ gibt es ein $R(x_0) \in \,]0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)[$ mit
$$u(x_0) \leq \fint_{B_r(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } r \in \,]0, R(x_0)[.$$
- Für alle Kugeln $B_r(x_0) \Subset \Omega$ gilt das Vergleichsprinzip mit harmonischen Funktionen, d. h. für jede harmonische Funktion $h \in \mathcal{C}(\overline{B_r(x_0)})$ gilt: $u \leq h$ auf $\partial B_r(x_0) \implies u \leq h$ in $B_r(x_0)$.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $B_r(x_0) \Subset \Omega$. Der **Perron-Projektor** $P_{x_0,r} : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega)$ ist definiert durch

$$(P_{x_0,r}u)(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega \setminus B_r(x_0), \\ \int_{\partial B_r(x_0)} K_{B_r(x_0)}(x, y)u(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(y) & \text{für } x \in B_r(x_0). \end{cases}$$

Bemerkung. Die Funktion $P_{x_0,r}(u)$ wird **harmonische Fortsetzung** von u auf $B_r(x_0)$ genannt.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt:

- Sind $v \in H^-(\Omega)$ und $w \in H^+(\Omega)$, so gilt $v - w \in H^-(\Omega)$.
- Sind $v_1, v_2 \in H^-(\Omega)$, $w_1, w_2 \in H^+(\Omega)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, so ist

$$\{\max(v_1, v_2), \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\} \subset H^-(\Omega),$$
$$\{\min(w_1, w_2), \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\} \subset H^+(\Omega).$$

- Sind $v \in H^-(\Omega), w \in H^+(\Omega)$ und $B_r(x_0) \Subset \Omega$, so gelten

$$P_{x_0,r}v \geq v \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad P_{x_0,r}v \in H^-(\Omega),$$
$$P_{x_0,r}w \leq w \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad P_{x_0,r}w \in H^+(\Omega).$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann heißt $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ **Sublösung** des Dirichletproblems (2.9), falls $u \leq g$ auf $\partial\Omega$ gilt und **Superlösung** von (2.9), falls $u \geq g$ auf $\partial\Omega$ gilt.

Notation.
$$H_g^-(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^-(\Omega) \mid u \leq g \text{ auf } \partial\Omega\},$$
$$H_g^+(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^+(\Omega) \mid u \geq g \text{ auf } \partial\Omega\},$$
$$u^-(x) := \sup\{v(x) \mid v \in H_g^-(\Omega)\},$$
$$u^+(x) := \sup\{v(x) \mid v \in H_g^+(\Omega)\}.$$

Methode (Perron)**.** Zeige zunächst, das u^- und u^+ harmonisch sind. Zeige dann unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an Ω, dass $u^- = u^+$ gilt und die vorgegebenen Randwerte annimmt.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann sind u^- und u^+ wohldefiniert und es gilt

$$\inf_{\partial\Omega} g \leq u^- \leq u^+ \leq \sup_{\partial\Omega} g.$$

Bemerkung. Falls eine Lösung u des Dirichlet-Problems existiert, so gilt $u = u^- = u^+$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann sind u^- und u^+ harmonisch in Ω.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $x_0 \in \partial\Omega$. Eine Funktion $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_0^+$ heißt (obere) **Barriere** zu Ω in x_0, falls

- $b \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap H^+(\Omega)$
- $b(x_0) = 0$ und $b(x) > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$

Falls eine solche Barriere existiert, so heißt x_0 **regulärer Randpunkt**.

Bemerkung. Eine Funktion $b : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_0^-$ heißt untere Barriere, falls $(-b) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_0^+$ eine obere Barriere ist.

Def. Eine **lokale Barriere** zu Ω in $x_0 \in \partial\Omega$ ist eine Barriere $\tilde{b} : B_r(x_0) \cap \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ zu $B_r(x_0) \cap \Omega$ in x_0.

Bemerkung. Aus jeder lokalen Barriere lässt sich eine globale Barriere konstruieren.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Falls das Dirichlet-Problem (2.9) für jede Funktion $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ besitzt, so sind alle Randpunkte $x_0 \in \partial\Omega$ regulär.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $x_0 \in \partial\Omega$. Ist x_0 regulär, dann gilt für jede stetige Funktion $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$:

$$\lim_{\Omega \ni x \to x_0} u^-(x) = g(x_0) = \lim_{\Omega \ni x \to x_0} u^+(x).$$

Satz (Perron)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt. Dann sind äquivalent:

- Der Rand $\partial\Omega$ ist regulär.
- Das Dirichlet-Problem (2.9) besitzt eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ für alle $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Def. Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt die **äußere Kugelbedingung** in $x_0 \in \partial\Omega$ an Ω, falls ein Ball $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ mit $\overline{\Omega} \cap \overline{B_r(a)} = \{x_0\}$ existiert.

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Erfüllt Ω die äußere Kugelbedingung in $x_0 \in \partial\Omega$ an Ω, dann ist x_0 ein regulärer Randpunkt.

Bemerkung. Beschränkte Gebiete mit $\mathcal{C}^2$-Rand und strikt konvexe Gebiete erfüllen die äußere Kugelbedingung.