

Zusammenfassung Stochastik 3

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Modell. Gegeben sei ein Parametrisches Modell, d. h. eine Zufallsgröße X , deren Verteilungsfunktion $P_X \in \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n\}$ von einem Parameter ϑ abhängt.

Problem. Anhand einer **Stichprobe** $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^1$ von X (d. h. x_1, \dots, x_n sind Realisierung von iid ZGen $X_1, \dots, X_n \sim P_X$) ist zu entscheiden, ob die sogenannte **Nullhypothese** $H_0 : \vartheta \in \Theta_0 \subset \Theta$ oder eine **Gegenhypothese** $H_1 : \vartheta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$ angenommen oder abgelehnt werden soll.

Def. Der **Stichprobenraum** ist $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), P_\vartheta \times \dots \times P_\vartheta)$

Terminologie. Die Hypothese H_i heißt **einfach**, falls $|H_i| = 1$, andernfalls **zusammengesetzt**.

Def. Ein (nichtrandomisierter) **Test** für H_0 gegen H_1 ist eine Entscheidungsregel über die Annahme von H_0 basierend auf einer Stichprobe, die durch eine messbare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ausgedrückt wird und zwar durch

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{bei Annahme von } H_0, \\ 1 & \text{bei Ablehnung von } H_0. \end{cases}$$

Def. Der **Ablehnungsbereich** oder **kritische Bereich** von φ ist

$$K_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x_1, \dots, x_n) = 1\}.$$

Bem. Es gilt $\varphi = \mathbb{1}_{K_n}$.

Def. Ein **Fehler 1. Art** ist eine Ablehnung der Nullhypothese H_0 , obwohl H_0 richtig ist; ein **Fehler 2. Art** ist eine Annahme von H_0 , obwohl H_0 falsch ist.

Def. Die **Güte- oder Machtfunktion** des Tests φ ist

$$\begin{aligned} m_\varphi : \Theta \rightarrow [0, 1], m_\varphi(\vartheta) &:= \mathbb{E}_\vartheta \varphi(X_1, \dots, X_n) \\ &= \mathbb{P}_\vartheta((X_1, \dots, X_n) \in K_n) \\ &= (P_\vartheta \times \dots \times P_\vartheta)(K_n) \end{aligned}$$

Die Gegenwsk. $(1 - m_\varphi(\vartheta))$ heißt **Operationscharakteristik** von φ .

Bem. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\vartheta(\text{Fehler 1. Art}) &= m_\varphi(\vartheta) \quad \text{für } \vartheta \in \Theta_0, \\ \mathbb{P}_\vartheta(\text{Fehler 2. Art}) &= 1 - m_\varphi(\vartheta) \quad \text{für } \vartheta \in \Theta_1. \end{aligned}$$

Def. Ein Test $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ mit

$$\sup_{\vartheta \in \Theta_0} m_\varphi(\vartheta) \leq \alpha$$

heißt **α -Test** o. **Signifikanztest** zum **Signifikanzniveau** $\alpha \in (0, 1)$.

Ein α -Test φ heißt **unverfälscht** (erwartungstreu, unbiased), falls

$$\inf_{\vartheta \in \Theta_1} m_\varphi(\vartheta) \geq \alpha.$$

Situation. Sei nun eine Stichprobenfunktion oder **Teststatistik** $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ gegeben. Wir wollen einen Test der einfachen Nullhypothese $H_0 : \vartheta \in \Theta_0 = \{\vartheta_0\}$ entwickeln.

Def. $K_n^T \subset \mathbb{R}^1$ heißt **kritischer Bereich der Teststatistik**, falls

$$K_n = T^{-1}(K_n^T).$$

Bem. Es gilt

$$\begin{aligned} m_\varphi(\vartheta_0) &= \mathbb{P}_{\vartheta_0}((X_1, \dots, X_n) \in K_n) = \\ &= \mathbb{P}_{\vartheta_0}((T(X_1), \dots, T(X_n)) \in K_n^T) = \int_{K_n^T} f_T(x) dx \leq \alpha, \end{aligned}$$

wobei f_T die Dichte von $T(X_1, \dots, X_n)$ unter H_0 ist.

Bsp. Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ bekannt und $\alpha \in (0, 1)$ vorgegeben. Zum Test der Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ wählen wir als Statistik

$$T(X_1, \dots, X_n) := \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\overline{X_n} - \mu_0) \quad \text{mit } \overline{X_n} := \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n).$$

Unter Annahme von H_0 gilt $T(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Der Ablehnungsbereich der Statistik ist

$$K_n^T = \{t \in \mathbb{R}^1 \mid |t| > z_{1-\alpha/2}\} \quad \text{mit } z_{1-\alpha/2} := \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Für $\alpha = 0,5$ gilt beispielsweise $z_{1-\alpha/2} \approx 1,96$.

Bem. Es gilt

$$\begin{aligned} t \in (K_n^T)^c &\iff |t| \leq z_{1-\alpha/2} \iff |\overline{X_n} - \mu_0| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \\ &\iff \mu_0 \in [\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}]. \end{aligned}$$

Letzteres Intervall wird **Konfidenzintervall** für μ_0 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ genannt.

Bsp. Sei wieder $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 aber diesmal unbekannt.

$$\hat{T}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\sqrt{n}}{S_n} (\overline{X_n} - \mu_0), \quad S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$$

Dabei ist S_n die (**korrigierte**) **Stichprobenvarianz**. Man kann zeigen, dass $\hat{T}(X_1, \dots, X_n) \sim t_{n-1}$. Dabei ist t_m die **Student'sche t -Verteilung** mit m Freiheitsgraden. Der Ablehnungsbereich ist

$$K_n^T = \{t \in \mathbb{R}^1 \mid |t| > t_{n-1, 1-\alpha/2}\}.$$

Bem. S_n^2 und $\overline{X_n}$ sind unabhängig für $n \geq 2$.

Diskussion. • Je kleiner α ist, desto „nullhypotesenfreundlicher“ ist der Test. Häufig verwendet wird $\alpha \in \{10\%, 5\%, 1\%, 0,5\%\}$.

• Einseitige Tests: Die Gegenhypothese zu $H_0 : \mu = \mu_0$ ist $H_1 : \mu > \mu_0$. Die Nullhypothese wird nur abgelehnt, falls zu große Stichprobenmittelpunkte $\overline{x_n}$ vorliegen. Es ist dann $K_n^T = (z_{1-\alpha}, \infty)$.

Def. Es seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Dann heißt die Summe $X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi_n^2$ **Chi-Quadrat-verteilt** mit n Freiheitsgraden.

Def. Falls $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $Y_n \sim \chi_n^2$ unabhängig sind, so heißt

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y_n}{n}}} \sim t_n$$

t -verteilt mit n -Freiheitsgraden.

Lem. $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi_{n-1}^2$

Kor. \hat{T} aus dem zweiten obigen Bsp ist tatsächlich t -verteilt.

Def. Seien $Y_{n_i} \sim \chi_{n_i}^2$, $i = 1, 2$ zwei unabhängige ZGen. Dann heißt

$$\frac{Y_{n_1}/n_1}{Y_{n_2}/n_2} \sim F_{n_1, n_2}$$

F-verteilt (wie Fisher) mit (n_1, n_2) Freiheitsgraden.