

Zusammenfassung Partielle DGLn

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

1. Einleitung

Def. Eine **partielle Differentialgleichung** (PDGL) hat die Form

$$E(x, u(x), Du(x), \dots, D^k u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,} \quad (*)$$

wobei $E : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist. Die höchste Ableitungsordnung von u , die in E vorkommt, heißt **Ordnung** der PDGL.

Def. Eine PDGL von der Ordnung k heißt

- **linear**, falls sie folgende Form besitzt:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) = 0$$

- **semilinear**, falls sie linear in der höchsten Ableitungsordnung ist, man sie also schreiben kann als

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) = 0.$$

- **quasilinear**, falls sie sich schreiben lässt als

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) D^\alpha u(x) + E_{k-1}(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) = 0.$$

- sonst **voll nichtlinear**.

Bemerkung. $\{\text{lineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{semilineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{quasilineare PDGLn}\} \subsetneq \{\text{PDGLn}\}$

Def (Typeinteilung für lineare PDGLn 2. Ordnung). Seien $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j \in \{1, \dots, n\}$) vorgegebene Fktn. auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- Die lineare PDGL

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq j \leq n} b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **elliptisch**, falls die $(n \times n)$ -Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

- Die lineare PDGL

$$D_1 D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **hyperbolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

- Die lineare PDGL

$$D_1 u(x) - \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{2 \leq i \leq n} b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x) + f(x) = 0$$

heißt **parabolisch**, falls die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix $(a_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$ für alle $x \in \Omega$ positiv definit ist.

Def. Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **klassische Lösung**, falls $u \in C^k(\Omega)$ und die Differentialgleichung $(*)$ überall in Ω erfüllt ist.

2. Laplace- und Poisson-Gleichung

Notation. Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $F = (F_1, \dots, F_n)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Funktionen. Dann heißt

- $\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^n D_i F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **Divergenz** von F ,
- $\operatorname{grad} f := \nabla f := (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ **Gradient** von f ,
- Δ mit $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^n D_i D_i f$ **Laplace-Operator**.

Def. Die **Laplace-** bzw. **Poisson-Gleichung** ist die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Satz (Transformationssatz). Sei $T : \Omega \rightarrow T(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Diffeo, dann gilt für $f : T(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \in L^1(T(\Omega)) \iff (f \circ T) \circ |\det(DT)| \in L^1(\Omega) \quad \text{mit}$$

$$\int_{T(\Omega)} f \, dx = \int_{\Omega} (f \circ T) \cdot |\det(DT)| \, dx.$$

Bsp (Polarkoordinaten). Sei $f \in L^1(B_r(K))$. Dann ist f auf fast jeder Sphäre $\partial B_\rho(K)$ für $\rho \in [0, r]$ integrierbar und es gilt

$$\int_{B_r(x)} f(x) \, dx = \int_0^r \int_{\partial B_\rho(x_0)} f \, dS \, d\rho$$

Satz (Gauß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit C^1 -Rand $\partial\Omega$. Ist $F \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} F \in L^1(\Omega)$, so gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} (F \circ \nu) \, dS,$$

wobei ν der äußere Einheitsnormalenvektor ist.

Korollar. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit C^1 -Rand $\partial\Omega$. Sind $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$, dann gilt die partielle Integrationsregel

$$\int_{\Omega} D_i f g \, dx = - \int_{\Omega} f D_i g \, dx + \int_{\partial\Omega} f g \nu^i \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Sind $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$, dann gelten die Greenschen Formeln

$$\int_{\Omega} Df \cdot Dg \, dx = - \int_{\Omega} f \Delta g \, dx + \int_{\Omega} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dx = \int_{\partial\Omega} (f D_\nu g - g D_\nu f) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Proposition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| < \infty$, $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ und $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Angenommen,

- $f(x, -) \in C^1(I)$ für fast alle $x \in \Omega$,
- $f(-, t) \in L^1(\Omega) \frac{\partial f}{\partial t}(-, t) \in L^1(\Omega)$ für alle $t \in I$ und
- für alle $t \in I$ gibt es $\epsilon > 0$ sodass $]t - \epsilon, t + \epsilon[\subset I$ und

$$\sup_{s \in]t - \epsilon, t + \epsilon[} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(-, s) \right| \in L^1(\Omega).$$

Dann ist die Abbildung

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{\Omega} f(x, t) \, dx$$

wohldefiniert und stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx.$$

Bemerkung. Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn Ω offen und beschränkt ist, $f(x, -) \in C^1(I)$ für alle $x \in \Omega$ und $f, \frac{\partial f}{\partial t} \in C(\overline{\Omega} \times I)$.

Notation. Bezeichne mit \mathcal{L}^n das Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^n . Für messbare Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ schreibe $|A| := \mathcal{L}^n(A)$.

Bsp. Zwischen dem Volumen von Kugeln und Sphären im \mathbb{R}^n bestehen folgende Zusammenhänge:

$$|B_r(0)| = r^n \cdot |B_1(0)| \quad \text{und} \quad |B_r(0)| = \frac{r}{n} \cdot \int_{\partial B_r(0)} 1 \, dS$$

Notation. $\omega_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

Notation. Sei $f : \Omega/M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $\mathcal{L}^k(\Omega) \in]0, \infty[$ bzw. $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $\int_M 1 \, dS \in]0, \infty[$

$$\int_{\Omega} f f(x) \, dx := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_M f f(x) \, dx := \frac{1}{|M|} \int_M f(x) \, dx$$

heißt **Mittelwerte** von f auf Ω bzw. M .

Def. Ein **Glättungskern** auf \mathbb{R}^n ist eine nicht-negative, radialsymmetrische Funktion $\eta \in C_0^\infty(B_1(0))$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$.

Def. Der **Standardglättungskern** ist die Funktion

$$\eta(x) := C \cdot \exp\left(-\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) \cdot \mathbb{1}_{B_1(0)}(x)$$

mit Normierungskonstante C . Für $\epsilon > 0$ ist der dazugehörige skalierte Glättungskern gegeben durch

$$\eta_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} \eta(x/\epsilon).$$

Alle Glättungskern-Eigenschaften bleiben bei Skalierung erhalten.

Notation. $\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$. Für $f \in L^1_{\text{loc}}$ heißt die Funktion

$$f_\epsilon : \Omega_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \eta_\epsilon * f(x) := \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) f(y) \, dy \quad \text{--Glättung von } f$$

Satz (Eigenschaften von Glättungen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\epsilon > 0$ und $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Dann gilt

- Regularität: $f_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$ mit $D^\alpha f_\epsilon = (D^\alpha \eta_\epsilon) * f$ für beliebige Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- Ist $D_i f$ stetig auf Ω , so gilt $D_i(f_\epsilon) = (D_i f)_\epsilon$ auf Ω_ϵ .
- Falls $f \in C^\alpha(\Omega)$ für ein $\alpha \in]0, 1]$, so gilt $f_\epsilon \in C^\alpha(\Omega_\epsilon)$ mit derselben Hölderkonstante.
- Falls $f \in L^p(\Omega)$ für $p \in [0, \infty]$, so gilt $\|f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}$.

- $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$ fast-überall in Ω .
- Falls $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, so konvergiert f_ϵ gleichmäßig gegen f für $\epsilon \rightarrow 0$ auf kompakten Teilmengen von Ω ,
- Falls $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ für $p \in [1, \infty[$, so gilt $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.
- Abschätzung der Approximationsgüte: Ist $Du \in L^p(\Omega)$, so gilt

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \epsilon \cdot \|Df\|_{L^p(\Omega)}.$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Man nennt u

- **harmonisch**, falls $\Delta u = 0$ in Ω gilt.
- **subharmonisch**, falls $\Delta u \geq 0$ in Ω gilt.
- **superharmonisch**, falls $\Delta u \leq 0$ in Ω gilt.

Bspe. • Affine Funktionen sind harmonisch.

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definiere $u(x) := x \cdot Ax$. Dann gilt $\Delta u = \text{spur} A$, also $\Delta u = 0 \iff \text{spur} A = 0$.
- Real- und Imaginärteil von holomorphen Fktn. sind harmonisch.

Def. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} -(2\pi)^{-1} \log|x|, & \text{wenn } n = 2 \\ (n(n-2)\omega_n)^{-1} |x|^{2-n}, & \text{wenn } n \geq 3 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung** der Laplacegleichung.

- Bemerkung.* • Φ ist radialsymmetrisch, d. h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\|x_1\| = \|x_2\|$ gilt $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$.
- $\Phi, |D\Phi| \in L^1(B_R(0))$ für alle $R > 0$ aber $|D^2\Phi| \notin L^1(B_1(0))$.
 - Die Konstanten wurden so gewählt, dass gilt:

$$-\int_{\partial B_r(0)} D\Phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = 1 \quad \text{für alle } r > 0.$$

Lemma. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_R(x_0) \subset \Omega$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Für

$$\phi :]0, R[\rightarrow \mathbb{R}, \quad r \mapsto \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{gilt dann}$$

- $\lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = u(x_0)$
- $\phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{\partial B_r(x_0)} \Delta u(x) \, dx$

Korollar (Mittelwertseigenschaft). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B_r(x_0) \Subset \Omega$ und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$0 = \Delta u \implies u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{und} \quad u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

In diesen Gleichungen darf man $=$ durch $\leq, <, \geq$ oder $>$ ersetzen.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:

- u ist harmonisch, d. h. es gilt $\Delta u = 0$ in Ω .
- u erfüllt die sphärische Mittelwertseigenschaft, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

- u erfüllt die Mittelwertseigenschaft auf Kugeln, d. h. es gilt

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Bemerkung. Die Äquivalenz gilt auch unter den schwächeren Voraussetzungen $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ oder $u \in L^1(\Omega)$.

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ subharmonisch in Ω , d. h. $\Delta u \geq 0$ in Ω . Dann gilt

- Das **schwache Maximumsprinzip**: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$
- Das **starke Maximumsprinzip**: Ist Ω zusammenhängend und existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, so ist u konstant.

Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen, zusammenhängend und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ harmonisch. Dann gilt

$$\min_{\partial\Omega} u < \max_{\partial\Omega} u \implies \min_{\partial\Omega} u < u < \max_{\partial\Omega} u \text{ auf } \Omega.$$

Korollar (Eindeutigkeit). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Dann ist $u = v$, falls gilt:

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v & \text{in } \Omega \\ u = v & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Bemerkung (Stetige Abhängigkeit von Randwerten). Gilt lediglich $\Delta u = \Delta v$ in Ω , aber nicht $u = v$ auf $\partial\Omega$, so gilt immerhin

$$\max_{\overline{\Omega}} |u - v| = \max_{\partial\Omega} |u - v|.$$

Satz (Harnack-Ungleichung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset\subset \Omega$ offen, zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega, V)$, sodass

$$\sup_V u \leq c \cdot \inf_V u \quad \text{für alle harmonischen Fktn. } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und erfülle $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Sphären, d. h.

$$u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Dann gilt $u(x) = u_\epsilon(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $\epsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Insbesondere ist $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und harmonisch.

Korollar. Obiger Satz gilt auch, wenn $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwert-Eigenschaft auf Kugeln erfüllt, d. h.

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{für alle Kugeln } B_r(x_0) \Subset \Omega.$$

Def. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf einem topologischen Raum X **konvergiert lokal gleichmäßig** gegen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x von x gibt, sodass f_n auf U_x gleichmäßig gegen f konvergiert.

Korollar (Konvergenzsatz von Weierstraß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion u konvergiert. Dann ist u harmonisch auf Ω .

Korollar (Harnackscher Konvergenzsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf Ω . Gibt es ein $x_0 \in \Omega$, sodass $(u_k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt (und damit konvergent) ist, so konvergiert (u_k) lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion auf Ω .

Satz (von Hermann Weyl). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} u \cdot \Delta \phi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

Dann gibt es eine harmonische Funktion $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = \tilde{u}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Satz (Innere Abschätzung für Ableitungen harmonischer Fktn). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch. Dann gilt für jeden Multiindex α mit $|\alpha| = k \in \mathbb{N}_0$ und jede Kugel $B_r(x_0) \Subset \Omega$:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq C(n, k) r^{-n-k} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))} \quad \text{mit } C(n, k) := \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\omega_n}.$$

Satz (Liouville). Sei $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch.

- Ist u beschränkt, so ist u konstant.
- Gilt $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|u(x)|}{|x|^{k+1}} < \infty$, so ist u ein Polynom, dessen Grad $\leq k$ ist.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **analytisch** in $x \in \Omega$, falls f sich lokal durch seine Taylorreihe darstellen lässt, also ein $r \in]0, \text{dist}(x, \partial\Omega)[$ existiert mit

$$f(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) (y - x)^\alpha \quad \text{für alle } y \in B_r(x).$$

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Wenn u harmonisch ist, dann auch analytisch.