Zusammenfassung Modellkategorien

 Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Def. Eine **(schwache) 2-Kategorie** $\mathbb{C}$ besteht aus

- einer Ansammlung $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & B \end{tikzcd} \right\},$$

- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem Objekt $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}} : \; - \circ (- \circ -) \Longrightarrow (- \circ -) \circ -,$$

  wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$

- und für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ natürlichen Isomorphismen

$$\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (- \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} K(H(GF)) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] \arrow[d, "K\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}}"] & (KH)(GF) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{G}}"] & ((KH)G)H \\ K((HG)F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] & & (K(HG))F \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}F"'] \end{tikzcd}$$

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathbb{C}$ kommutiert

$$\begin{tikzcd} G \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{D},\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "G\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}}"'] & & (G \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \arrow[dl, "\rho_{\mathcal{D},\mathcal{E}}F"] \\ & G \circ F & \end{tikzcd}$$

Bspe.

- Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.
- Jede Kategorie $\mathcal{C}$ ist natürlich eine 2-Kategorie.
- Die Kategorie der Ringe $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathbb{R}) := \{\,\text{Ringe mit Eins}\,\}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) :=$ Kat. der B-A-Bimoduln mit $N \circ M := N \otimes_B M$ für $M \in \mathrm{Hom}(A, B)$ und $N \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\mathrm{Id}_A := A$.

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann $\otimes$ anstelle von $\circ$ geschrieben.

Def. Sei $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ von S ist eine Familie $\alpha_c : E \to S(c, c)$, $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von Morphismen in $\mathcal{A}$, sodass für alle $(f : c \to c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & S(c,c) \arrow[dr, "S(\mathrm{id}_c, f)"] & \\ E \arrow[ur, "\alpha_c"] \arrow[dr, "\alpha_{c'}"'] & & S(c,c') \\ & S(c',c') \arrow[ur, "S(f, \mathrm{id}_{c'})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, und E universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler S-**Keil**.

Notation. $E = \int_c S(c, c)$.

Bem. Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden: $\lim F = \int_c F(c)$; der Integrand ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$.

Bem. Das duale Konzept ist das eines ~~Anfangs~~ Koendes $\int^c S(c, c)$.

Bsp. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_c \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \;\cong\; \mathrm{Nat}(F, G).$$

Satz (Fubini)**.** Sei $S : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d,c)} S(d, d, c, c) \;\cong\; \iint_{dc} S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und $\int_c S(d, d', c, c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

Bsp. Sei R ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt $*$. Ein additiver Funktor $R^{(\mathrm{op})} \to \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein R-Linksmodul (bzw. R-Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{*\in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Lem (Ninja-Yoneda-Lemma)**.** Für jede Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ gilt

$$F \cong \int^c F(c) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

Def. Sei $\mathbb{C}$ eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ist geg. durch Morphismen $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ (genannt **Eins**) und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ (**Koeins**) mit $G\epsilon \circ \eta G = \mathrm{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \mathrm{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.

Lem. R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bem. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\mathrm{Hom}(F \circ -, -) \cong \mathrm{Hom}(-, G \circ -)$$

Bsp. $\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$

Bsp. Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein B-A-Modul M ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn M als Rechts-A-Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

Bem. Sind η und ϵ in $F \dashv G$ sogar Isomorphismen, so heißt $F \dashv G$ auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von F und G sowie einem der Morphismen ϵ, η) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

Kan-Erweiterungen

Def. Sei $\mathcal{A} \xleftarrow{T} \mathcal{M} \xrightarrow{K} \mathcal{C}$ ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE) (R, ϵ) von T längs K besteht aus

- einem Morph. $R : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$
- einem 2-Morph. $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$,

sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE $(S : \mathcal{C} \to \mathcal{A}, \eta : S \circ K \Rightarrow T)$ gibt es genau ein $\sigma : S \Rightarrow R$ mit $\epsilon \circ \sigma K = \eta$. Notation: $R = \mathrm{Ran}_K(T)$

Bem. Es sind äquivalent:

- (R, ϵ) ist RKE von T längs K
- $\eta \mapsto \epsilon \circ \eta K : \mathrm{Nat}(S, R) \to \mathrm{Nat}(S \circ K, T)$ ist bij. $\forall\, S : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$

Bem. Es gilt $R = \mathrm{Ran}_K(T)$ genau dann, wenn es in $S \in [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ natürliche Isomorphismen $\mathrm{Nat}(S, R) \cong \mathrm{Nat}(S \circ K, T)$ gibt.

Prop. RKEs sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bspe.

- Die RKE eines bel. Morphismus $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ längs $\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$ existiert stets und ist gegeben durch $(T, T \circ \mathrm{Id}_M \Rightarrow T)$.
- In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\mathrm{Ran}_K(T) = (\mathrm{Hom}_M(K, T), \; ev : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(K, T) \otimes_C K \Rightarrow T).$$

Bsp. Sei $K : \mathcal{M} \to \mathbb{1}$, $* \mapsto 1$ und $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von T längs K dasselbe wie ein Limes von T.

Thm. Seien $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ und $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Existiere für alle $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ der Limes $R(c) := \lim((f : c \to Km) \mapsto Tm)$. Dabei ist die Indexkategorie des Limes die Kommakat. $\Delta(c) \downarrow K$. Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ausdehnen und zwar zu einer RKE von T längs K.

Bem. Ist $\mathcal{M}$ klein und $\mathcal{C}$ lokal klein und ist $\mathcal{A}$ vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktweise RKE**.

Lem. Eine RKE ist genau dann punktweise, wenn sie für alle $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ unter dem Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$ erhalten bleibt.

Thm. Sei $K : M \to C$ ein Funktor. Betrachte $K^* : [\mathcal{C}, \mathcal{A}] \to [\mathcal{M}, \mathcal{A}]$.

- Wenn ein Funktor $\mathrm{Ran}_K : [\mathcal{M}, \mathcal{A}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ mit $K^* \dashv \mathrm{Ran}_K$ ex., so ist $\mathrm{Ran}_K(T)$ für alle $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ eine RKE von T längs K.
- Existiere für alle $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ eine RKE $\mathrm{Ran}_K(T)$. Dann kann man die Zuordnung $T \mapsto \mathrm{Ran}_K(T)$ zu einem Rechtsadjungierten von K^* ausdehnen.

Thm. Sei $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- G besitzt einen Linksadjungierten.
- $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$ existiert und $G \circ \mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}) = \mathrm{Ran}_G(G \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$.

In diesem Fall gilt $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}) \dashv G$ und $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$ wird sogar von allen Morphismen $H : \mathcal{A} \to \mathcal{Y}$ bewahrt.

Thm. Rechtsadjungierte bewahren RKE.

Kor. Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

Algebraische Strukturen in Kategorien

Def. Eine **Retrakt** ist ein Morphismus $r : Y \to X$, sodass ein Morphismus $i : X \to Y$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$ existiert.
Sprechweise: X ist ein Retrakt von Y (vermöge i).

Bsp. Ein Modul U ist genau dann Retrakt von einem Modul M, wenn U ein direkter Summand von M ist.

Prop. „– ist Retrakt von –" ist eine reflexive und trans. Relation.

Def. Ein **Retrakt eines Morphismus** $(X \xrightarrow{g} Y) \in \mathcal{C}$ ist ein Mor. $f : A \to B$, sodass es ein komm. Diagramm folgender Form gibt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[rr, bend left, "id_A"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "id_B"'] & Y \arrow[r, "s"] & B \end{tikzcd}$$

Bem. Ein Retrakt von $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ ist ein Retrakt von $f \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\to})$.

Prop. • Retrakte von Isomorphismen sind Isomorphismen.
• Sei $f \circ g = \mathrm{id}$. Dann ist f ein Retrakt von $g \circ f$.

Prop. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist die Klasse $\{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$ abgeschlossen unter Retrakten.

Def. Sei $i : A \to X$ und $p : E \to B$. Dann werden als äq. definiert:
• p ist **i-injektiv** • i ist **p-projektiv** • $i \boxslash p$
• i hat die Linkshochhebungseigenschaft (LHHE) bzgl. p
• p hat die Rechtshochhebungseigenschaft (RHHE) bzgl. i
• Für alle f, g wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales λ, sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

Bsp. Wegeliftung aus der Topologie: $i : \{0\} \to [0,1]$ erfüllt die LHHE bezüglich allen Überlagerungen $\pi : E \to B$.

Bsp. Ein Objekt P einer ab. Kat. $\mathcal{A}$ ist genau dann **projektiv**, wenn $(0 \to P)$ die LHHE bzgl. aller Epis in $\mathcal{A}$ hat. Dual ist $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ injektiv g.d.w. alle Monos in $\mathcal{A}$ die LHHE bzgl. $(I \to 0)$ besitzen.

Bsp. In **Set** gilt: Alle Inj. haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

Lem (**Retrakt-Argument**). Sei $f = q \circ j$.
• Ist f q-projektiv ($f \boxslash q$), so ist f ein Retrakt von j.
• Ist f j-injektiv ($j \boxslash f$), so ist f ein Retrakt von q.

Zellenkomplexe

Def. Sei λ eine Ordinalzahl. Eine **λ-Sequenz** in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein kolimesbewahrender Funktor $X : \lambda \to \mathcal{C}$ (wobei man λ als Präordnungskategorie aller $\beta < \lambda$ auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus $X_0 \to \mathrm{colim}_{\beta<\lambda} X_\beta$.

Bem. Kolimesbewahrung bedeutet: $\mathrm{colim}_{\alpha<\beta} X_\alpha = X_\beta$ für alle $\beta < \lambda$.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine kovollständige Kategorie, $I \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge.
• Ein **relativer I-Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer λ-Sequenz Z, sodass $\forall\, \alpha \in \mathcal{O}_n$ mit $\alpha + 1 < \lambda$ ein Pushoutdiagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Z_\alpha \arrow[d] & \leftarrow \textbf{Anklebeabbildung} \\ B \arrow[r] & Z_{\alpha+1} & \leftarrow \textbf{Zelle} \end{tikzcd}$$

mit $f \in I$ existiert. Sprechweise:
„$Z_{\alpha+1}$ entsteht aus Z_α, indem wir B längs C ankleben"
• Ein Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **I-Zellenkomplex**, wenn der Morph. $0 \to A$ aus dem initialen Obj. ein relativer I-Zellenkomplex ist.

Bsp. CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind I-Zellenkomplexe mit $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geqslant 0\}$ (und $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$).

Bspe. • Identitäten $A \to A$ sind relative I-Zellenkomplexe.
• Das initiale Objekt ist ein absoluter I-Zellenkomplex.

Lem. Sei $Z : \lambda \to \mathcal{C}$ eine λ-Sequenz. Sei jeder Morphismus $Z_\beta \to Z_{\beta+1}$ $(\beta + 1 < \lambda)$ ein Pushout eines Morphismus aus I. Dann ist die transfinite Komposition von Z ein I-Zellenkomplex.

Thm. Die Klasse der relativen I-Zellenkomplex ist abgeschl. unter:
• transfiniten Kompositionen • Isomorphismen • Koprodukten

Faktorisierungssysteme

Def. Eine Unterkat. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **links-saturiert**, falls $\mathcal{L}$ abgeschl. ist unter Pushouts, transfiniten Kompositionen und Retrakten.

Lem. Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ links-saturiert. Dann ist $\mathcal{L}$ unter Koprodukten abgeschlossen und enthält alle Isomorphismen.

Bsp. Sei $R \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$. Dann ist die Unterkategorie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ mit $\mathrm{Mor}(\mathcal{L}) := {}^{\boxslash}R := \{i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \mid \forall\, r \in R : i \boxslash r\}$ links-saturiert.

Def. • $L \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **proj. abgeschlossen**, falls $L \supseteq {}^{\boxslash}(L^{\boxslash})$.
• $R \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **injektiv abgeschlossen**, falls $R \supseteq ({}^{\boxslash}L)^{\boxslash}$.

Prop. • ${}^{\boxslash}(L^{\boxslash})$ ist die projektive Hülle von L, d. h. die kleinste Klasse von Morphismen, die projektiv abgeschl. ist und L umfasst.
• Die projektive Hülle von L ist links-saturiert. Ist L schon projektiv abgeschlossen, so ist L insbesondere links-saturiert.

Def. • Ein Paar (L, R) von Klassen von Morphismen von $\mathcal{C}$ **faktorisiert** $\mathcal{C}$, falls $\forall\, f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \ : \exists\, i \in L, p \in R : \ f = p \circ i$.
• Ein faktorisierendes Paar (L, R) heißt **schwaches Faktorisierungssystem** (SFS), falls $L = {}^{\boxslash}R$ und $R = L^{\boxslash}$.
• Ein SFS (L, R) heißt **orth. Faktorisierungssystem**, falls jedes $i \in L$ die eindeutige LHHE bzgl. allen $p \in R$ erfüllt.

Prop. Sei (L, R) faktorisierend. Dann ist (L, R) genau dann ein SFS, wenn $L \boxslash R$ und L und R unter Retrakten abgeschlossen sind.

Bsp. $(\{\text{Surjektionen}\}, \{\text{Injektionen}\})$ ist ein (S)FS in **Set**

Modellkategorien

Motto. Modellkat. sind ein Werkzeug, math. Theorien zu studieren.

Def. Eine Klasse $W \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ von Morphismen erfüllt die **2-aus-3-Eigenschaft**, falls für jede Komposition $h = g \circ f$ in $\mathcal{C}$ gilt: Liegen zwei der drei Morphismen f, g, h in W, so auch der dritte.

Def. $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}$ wie eben heißt **Unterkat. schwacher Äquivalenzen**, falls $\mathcal{W}$ die 2-aus-3-Eig. erfüllt und abgeschl. unter Retrakten ist.

Bsp. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist $\mathcal{W} := F^{-1}(\{\text{Isos in } \mathcal{D}\})$ eine Unterkategorie schwacher Äquivalenzen.

Def. Ein Tripel $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ von Unterkategorien einer Kategorie $\mathcal{M}$ heißt **Modellstruktur** auf $\mathcal{M}$, falls sowohl $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ als auch $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ schwache Faktorisierungssysteme sind und $\mathcal{W}$ die 2-aus-3-Eigenschaft erfüllt.

Def. Eine bivollständige Kategorie $\mathcal{M}$ zusammen mit einer Modellstruktur $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ heißt eine **Modellkategorie**.

Sprechweise. Man verwendet folgende Bezeichnungen und Pfeile:

$\mathcal{W}$	$\xrightarrow{\sim}$	**schwache Äquivalenz**
$\mathcal{C}$	$\hookrightarrow$	**Kofaserung**
$\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$	$\overset{\sim}{\hookrightarrow}$	**azyklische Kofaserung**
$\mathcal{F}$	$\twoheadrightarrow$	**Faserung**
$\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$	$\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}$	**azyklische Faserung**

Bem. Ist $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ eine Modellstruktur auf $\mathcal{M}$, so ist $(\mathcal{W}^{\mathrm{op}}, \mathcal{F}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ eine Modellstruktur auf $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$.

Bem. Wegen $\mathcal{C} = {}^{\boxslash}(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ bzw. $\mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^{\boxslash}$ ist das Datum $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ überbestimmt.

Bsp. Sei $\mathcal{M}$ bivollständig. Sei $\mathcal{W} := \mathcal{C} := \{\text{Isos in } \mathcal{M}\}$. Dann wird $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{F} := \mathcal{M}$ eine Modellkategorie.

Prop. In einer Modellkategorie sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ links-saturiert.

Lem. $\mathcal{W}$ enthält alle Isomorphismen und ist unter Retrakten abgeschlossen, bildet also eine Unterkat. schwacher Äquivalenzen.

Notation. Das initiale Objekt von $\mathcal{M}$ wird mit $\varnothing$, das terminale Objekt mit $*$ bezeichnet.

Def. • Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ heißt **kofasernd**, falls $\varnothing \to X$ eine Kofaserung ist. Eine azyklische Faserung $q : QX \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ mit QX kofasernd heißt **kofasernder Ersatz** (oder Approx.) von X.
• Dual heißt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ **fasernd**, falls X in $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ kofasernd ist und $X \overset{\sim}{\hookrightarrow} RX$ mit RX fasernd heißt **fasernder Ersatz** von X.

Bsp. Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ beliebig. Dann faktorisiere $\varnothing \to X$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & X \\ & QX \arrow[ur, two heads, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Man erhält also immer einen kofasernden Ersatz QX für X.
Dual gibt es immer einen fasernden Ersatz RX für X.

Prop. Seien $q : QX \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ und $q' : Q'X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ zwei kofasernde Approximationen von X. Dann existiert eine schwache Äquivalenz $\xi : QX \xrightarrow{\sim} Q'X$ mit $q' \circ \xi = q$.

Def. Ein Obj. X heißt **bifasernd**, falls es fasernd und kofasernd ist.

Prop. Für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ sind RQX und QRX schwach äquivalent und beide bifasernd.

Lem (Ken Brown)**.** Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Funktor, $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, $\mathcal{N}$ besitze eine Unterkat. $\mathcal{W}'$ schwacher Äquivalenzen. Wenn F azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten nach $\mathcal{W}'$ abbildet, so bildet F alle schwachen Äquivalenzen zwischen kofasernden Objekten nach $\mathcal{W}'$ ab.

Def. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie. Ein **Zylinderobjekt** $X \times I$ zu einem $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ ist ein Obj. zusammen mit Morphismen wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i_0", "\sim"'] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] & & \\
& X \times I \arrow[r, "p", "\sim"'] & X \\
X \arrow[ur, "\sim", "i_1"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Der Zylinder $X \times I$ heißt **gut**, falls $X \amalg X \to X \times I$ eine Kofaserung ist. Ein guter Zylinder heißt **sehr gut**, falls $p : X \times I \to X$ eine azyklische Faserung ist.

Bem. Sei die Kodiagonale $\nabla : X \amalg X \to X$ wie folgt faktorisiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, hook] & & & \\
& X \amalg X \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\nabla"] & X \times I \arrow[r, two heads, "\sim"] & X \\
X \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Dann erhalten wir ein Zylinderobjekt $X \times I$ für X.

Def. Zwei Morphismen $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{M}$ heißen **links-homotop** (notiert $f \sim^l g$), falls ein Zylinder $X \times I$ und ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\sim"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
& X \times I \arrow[r, dashed, "h"] & Y \\
X \arrow[ur, "\sim"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

existiert. Wir definieren $\pi^l(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)/\langle \sim^l \rangle$, wobei $\langle \sim^l \rangle$ die von der symmetrischen, refl. Relation $\sim^l$ erzeugte Äq'relation ist. Die Homotopie heißt (sehr) gut, wenn der Zylinder $X \times I$ es ist.

Beob. Sei $X \amalg X \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p\,\sim} X$ irgendein Zylinderobjekt. Faktorisiere $i = q \circ i'$ in Kofaserung und azyklische Faserung. Dann ist auch

$$X \amalg X \overset{i'}{\hookrightarrow} X' \xrightarrow{pq\,\sim} X$$

ein Zylinderobjekt, sogar ein gutes. Ebenso kann man p faktorisieren und ein ein anderes Zylinderobjekt erhalten.

Lem. Sei X kofasernd, $X \amalg X \to X \times I \to X$ ein gutes Zylinderobj. Dann sind $i_{0,1} : X \to X \amalg X \to X \times I$ azyklische Kofaserungen.

Lem. Sei $h : f \simeq^l g$. Dann: $f \in \mathcal{W} \iff g \in \mathcal{W}$.

Def. Ein **Pfadobjekt** X^I ist eine Faktorisierung

$$X \xrightarrow[\sim]{i} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

des Diagonalmorph. $\Delta : X \to X \times X$. Das Pfadobjekt X^I heißt gut, wenn p eine Faserung und sehr gut, wenn zus. i eine Kofaserung ist.

Def. Eine Rechtshomotopie $h : f \simeq^r g$ ist ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
& & Y \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Y^I \arrow[ur, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Bem. Ein Pfadobj. in $\mathcal{M}$ ist dasselbe wie ein Zylinderobj. in $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$.

Lem. Seien $f, g : X \to Y$ und $e : W \to X$, $d : Y \to Z$.
- $\exists\, h : f \simeq^l g \iff \exists\, h' : f \simeq^{l,\mathrm{gut}} g$.
- Sei Y fasernd. Dann: $\exists\, h : f \simeq^{l,\mathrm{gut}} g \iff \exists\, h' : f \simeq^{l,\text{sehr gut}} g$
- $\exists\, h : f \simeq^l g \implies \exists\, h' : d \circ f \simeq^l d \circ g$
- $\exists\, h : f \simeq^{l,\text{sehr gut}} g \implies \exists\, h' : f \circ e \simeq^{l,\text{sehr gut}} g \circ e$
- Sei X kofasernd. Dann ist $\simeq^l$ eine Äq'relation auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)$.

Kor. Sei Y fasernd. Dann induziert Komposition eine Abbildung

$$\pi^l(X, Y) \times \pi^l(W, X) \to \pi^l(W, Y), \quad ([g], [f]) \mapsto [g \circ f].$$

Prop. Seien $f, g : X \to Y$.
- Sei X kofasernd. Dann: $f \simeq^l g \implies f \simeq^r g$
- Sei Y fasernd. Dann: $f \simeq^l g \impliedby f \simeq^r g$

Notation. Wenn X kofasernd und Y fasernd ist, schreibt man

$$\pi(X, Y) := \pi^l(X, Y) = \pi^r(X, Y).$$

Thm. Sei X kofasernd. Sei $p : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$ eine azyklische Faserung. Dann ist $p_* : \pi^l(X, Z) \to \pi^l(X, Y)$, $[f] \mapsto [p \circ f]$ eine Bijektion.

Thm (**Whitehead**)**.**
Für einen Morphismus $f : X \to Y$ zw. bifasernden Objekten gilt

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{W} &\iff f \text{ ist eine Homotopieäquivalenz} \\ &:\iff \exists\, g : Y \to X \;:\; g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \wedge f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y . \end{aligned}$$

Lem. Sei $f : X \to Y$. Seien RX und RY fixierte fasernde Approx. an X bzw. Y. Dann hängt $Rf : RX \to RY$ bis auf Rechts- und auch Linkshomotopie nur von der Rechtshomotopieklasse von $r \circ f$ ab.

Achtung. I. A. ist $f \mapsto R(f)$ nicht funktoriell.

Die Homotopiekategorie einer Modellkategorie

Def. Sei $\mathcal{C}$ ein Kategorie, $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eine Klasse von Morphismen. Die **Lokalisierung** $\mathcal{C}[S^{-1}]$ von $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie, die folgende 2-universelle Eigenschaft erfüllt:
- $\gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ schickt Morphismen aus S aus Isos.
- Für jede Kategorie $\mathcal{D}$ ist $\gamma^* : [\mathcal{C}[S^{-1}], \mathcal{D}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{S \mapsto \mathrm{Isos}}$ eine Kategorienäquivalenz.

Bem. Die Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt Lokalisierung von Kategorien.

Def. Die **Homotopiekategorie** $\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$ einer Modellkategorie $\mathcal{M}$ ist die Lokalisierung von $\mathcal{M}$ an der Klasse der schwachen Äquivalenzen.

Konstruktion. Ganz explizit:

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X, Y) := \pi(RQX, RQY)$$

Nach einem früheren Lemma ist die Komposition $([f], [g]) \mapsto [f \circ g]$ wohldefiniert. Der Funktor $\gamma : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$ ist gegeben durch

$$X \mapsto X, \quad f \mapsto [RQf].$$

Lem. Sei $f : X \to Y$ in $\mathcal{M}$. Dann gilt $f \in \mathcal{W} \Leftrightarrow Qf \in \mathcal{W} \Leftrightarrow RQf \in \mathcal{W}$.

Lem. γ wie definiert ist ein Funktor.

Lem. $f \in \mathcal{W} \iff \gamma(f)$ ist ein Iso.

Lem. Sei X kofasernd und Y fasernd. Dann ist die Abbildung

$$\pi(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X, Y), \quad [f] \mapsto [RQf]$$

eine Bijektion.

Lem. Ist $F : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ ein Funktor, der schwache Äq. auf Isos schickt, dann identifiziert F links- bzw. rechtshomotope Morphismen.

Lem. Jeder Morphismus in $\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$ ist Komposition von Morphismen der Form $\gamma(f)$, $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ und der Form $\gamma(f)^{-1}$, $f \in \mathcal{W}$.

Lem. Obige Konstruktion erfüllt die geforderte univ. Eigenschaft.

Lem. Sei $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$ die volle Unterkategorie der kofasernden Objekte und $F : \mathcal{M}_c \to \mathcal{C}$ ein Funktor, der azyklische Kofaserungen auf Isos schickt. Dann identifiziert F rechtshomotope Morphismen.

Thm. Ein Morphismus $p : Z \to Y$ zw. fasernden Objekten ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn $p_* : \pi(X, Z) \to \pi(X, Y)$ bijektiv ist für alle kofasernden Objekte $X \in \mathcal{M}$.

Beob. Sei X kofasernd und Y fasernd. Dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathcal{M})}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)/\sim$.

Def. Eine Klasse $W \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ besitzt die **2-aus-6-Eigenschaft**, wenn für alle Folgen von Morphismen

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} K \qquad \in \mathcal{C}$$

gilt: Wenn $v \circ u$ und $w \circ v$ aus W sind, so auch u, v, w und $w \circ v \circ u$.

Beob. Die Klasse der Isomor. besitzt die 2-aus-6-Eigenschaft.

Kor. Die Klasse der schwache Äquivalenzen in einer Modellkategorie besitzt die 2-aus-6-Eigenschaft.

Klassen von Modellkategorien

Lokal präsentierbare Kategorien

Motto. Eine lokal präsentierare Kategorie ist eine große Kategorie, welche erzeugt wird von kleinen Objekten unter kleinen Kolimiten.

Def. Eine ∞-große Kardinalzahl κ heißt **regulär**, wenn die Vereinigung von weniger als κ vielen Mengen, die alle weniger als κ-viele Elem. enthalten, selbst weniger als κ-viele Elemente enthält.

Bem. Zu jeder Kardinalzahl λ existiert ein reguläres κ mit $\lambda \leqslant \kappa$.

Def. Sei κ eine Kardinalzahl. Eine Kategorie heißt **κ-klein**, falls sie nur κ-viele Morphismen besitzt.

Bem. Sei κ regulär. Dann ist eine Kat. bereits dann κ-klein, falls sie nur κ-viele Objekte besitzt und alle Hom-Mengen κ-klein sind.

Def. Eine Kategorie heißt **κ-filtriert**, wobei κ eine reguläre Kardinalzahl ist, wenn jedes α-kleine Diagramm in der Kategorie einen Kokegel besitzt, wobei $\alpha < \kappa$.

Def. Eine teilweise geordnete Menge $(I, \leqslant)$ heißt **α-gerichtet**, falls die zugehörige Kategorie α-filtriert ist, d. h. jeweils weniger als α-viele Elemente haben eine obere Schranke.

Bem. Sei $\lambda \geqslant \kappa$. Dann ist jede λ-filtrierte Kategorie auch κ-filtriert.

Def. Ein Objekt X einer Kat. $\mathcal{C}$ heißt **κ-kompakt** oder **α-klein**, wenn $\mathrm{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ mit κ-filtrierten Kolimiten vertauscht:

$$\mathrm{colim}_i \,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T_i) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{colim}_i \, T_i)$$

für alle κ-filtrierte Diagramme $(T_i)_{i \in \mathcal{I}}$.

Def. Ein Objekt heißt genau dann **klein**, wenn es κ-kompakt ist für irgendeine reguläre Kardinalzahl κ.

Bspe. • Jede endliche Menge ist $\aleph_0$-kompakt in **Set**.
- Jeder endlich-dim. VR ist $\aleph_0$-kompakt in $\mathbf{Vect}(\mathbb{R})$.
- Jeder endlich-präsentierte Modul ist $\aleph_0$-kompakt in $\mathbf{Mod}(R)$.
- Unendliche Mengen sind nicht $\aleph_0$-kompakt in **Set**.
- Jeder nicht diskrete topologische Raum ist nicht $\aleph_0$-kompakt.
- **Set** ist lokal $\aleph_0$-präsentierbar mit $S = \{\heartsuit\}$.
- $\mathbf{Mod}(R)$ ist lokal $\aleph_0$-präsentierbar mit $S = \{R^n/\mathrm{im}(A) \mid n \geqslant 0, A \in R^{n \times m}, m \geqslant 0\}$

Def. Eine **lokal κ-präsentierbare Kategorie** ist eine lokal kleine und kovollständige Kategorie, sodass eine *Menge* $S \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von κ-kompakten Objekten existiert, sodass jedes Objekt aus $\mathcal{C}$ kleiner Kolimes von Objekten aus S ist.

Def. Eine Kategorie heißt genau dann **lokal präsentierbar**, wenn sie lokal κ-präsentierbar für eine reguläre Kardinalzahl κ ist.

Lem. Ist $\mathcal{C}$ lokal präsentierbar, so auch $\mathcal{C}/X$ mit $X \in \mathrm{Ob}(X)$.

Bspe. • **sSet** ist lokal präsentierbar.
- Sei $\mathcal{C}$ klein. Dann ist $\mathbf{PSh}(\mathcal{C}) = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ lokal präsentierbar.
- **FinSet** ist nicht lokal präsentierbar (weil nicht kovollständig)

Fun Fact. Sei $\mathcal{C}$ lokal präsentierbar. Wenn auch $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ lokal präsentierbar ist, dann ist $\mathcal{C}$ die zu einer Quasiordnung gehörige Kategorie!

Lem. Sei $X : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathbf{Set}$ ein Funktor, wobei $\mathcal{I}$ α-filtriert und $\mathcal{J}$ α-klein. Dann ist der kanonische Isomorphismus $\mathrm{colim}_i \lim_j X(i,j) \to \lim_j \mathrm{colim}_i X(i,j)$ eine Bijektion.

Bsp. α-kleine Kolimiten α-kompakter Obj. sind wieder α-kompakt.

Kombinatorische Modellkategorien

Lem (Kleines-Objekt-Argument).
Sei $\mathcal{C}$ lokal präsentierbar, $\mathcal{I} \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge, $\mathrm{Cell}(\mathcal{I})$ die Unterkat. der relativen $\mathcal{I}$-Zellenkomplexe und $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ die Unterkat. der Retrakte von $\mathrm{Cell}(\mathcal{I})$. Dann ist $(\mathrm{Cof}(\mathcal{I}), \mathcal{I}^{\boxslash})$ ein SFS.

Def. • Eine Modellkategorie $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ heißt **kofasernd erzeugt**, wenn *Mengen* $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ mit $\mathcal{C} = \mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \mathrm{Cof}(\mathcal{J})$ existieren.
- Lokal präsentierbare und kofasernd erzeugte Modellkategorien heißen **kombinatorisch**.

Sprechweise. Die Kof. in $\mathcal{I}$ heißen **erzeugende Kofaserungen**, die in $\mathcal{J}$ **azyklische erzeugende Kofaserungen**.

Satz. Sei $\mathcal{M}$ eine lokal präsentierbare Kategorie. Sei $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ eine Unterkat. schw. Äquivalenzen. Seien $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathcal{M})$ Mengen. Dann sind $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ genau dann erzeugende (azyklische) Kofaserungen einer Modellstruktur auf $\mathcal{M}$, falls
- $\mathrm{Cell}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{W}$ (Azyklizität) • $\mathcal{I}^{\boxslash} = \mathcal{J}^{\boxslash} \cap \mathcal{W}$ (Kompatibilität)

Eigentliche Modellkategorien

Def. Eine Modellkategorie $\mathcal{M}$ heißt **linkseigentlich**, falls für alle Pushouts der Form

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "g"] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & Y \end{tikzcd}$$

auch der Morphismus $g : X \to Y$ eine schwache Äquivalenz ist.
$\mathcal{M}$ heißt rechtseigentlich, falls $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ linkseigentlich ist, d. h. Pullbacks schwacher Äquivalenzen längs Faserungen wieder schwache Äquivalenzen sind.

Bsp. Eine Modellkategorie, in der jedes Objekt kofasernd ist, ist linkseigentlich.

Def. $\mathcal{M}$ heißt **eigentlich**, falls $\mathcal{M}$ links- und rechtseigentlich ist.

Prop. In jeder Modellkategorie ist der Pushout einer schwachen Äquivalenz zwischen kofasernden Objekten längs Kofaserungen wieder eine schache Äquivalenz.

Bem. Gute Homotopien kann man längs Kofaserungen erweitern:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"] \arrow[d, hook, "i"] & Y^I \arrow[d, "p_0", "\sim"'] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\overline{h}"] & Y \end{tikzcd}$$

Prop. Eine Modellkategorie $\mathcal{M}$ ist genau dann links-eigentlich, wenn für alle Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f", "\sim"'] & C \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g", "\sim"'] & B \arrow[d, "h", "\sim"'] \\ A & C \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[r, "l"] & B \end{tikzcd}$$

auch der ind. Mor. $A \cup_C B \to A' \cup_{C'} B'$ eine schwache Äq. ist.

Quillen-Adjunktionen

Motto. Wir wollen Modellstrukturen und -kategorien vergleichen.

Def. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, $\mathcal{H}$ eine beliebige Kategorie. Ein Funktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ heißt **homotopisch**, falls F die schwachen Äquivalenzen in $\mathcal{M}$ auf Isomorphismen in $\mathcal{H}$ abbildet.

Bem. Homotopische Funktoren faktorisieren über $\mathcal{M}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Bsp. Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Funktor zw. Modellkategorien, der schwache Äquivalenzen erhält. Dann ist $\delta \circ F : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$ homotopisch, wobei $\delta : \mathcal{N} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$ die Lokalisierung ist.

Bem. Solch ein Funktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ induziert einen Funktor $\mathrm{Ho}(M) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$.

Def. Ein **linksabgeleiteter Funktor** eine Funktors $F : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ ist ein Funktor $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}$ zusammen mit einer natürlichen Transformation $\mu : \mathbb{L}F \circ \gamma \Rightarrow F$, sodass für alle weiteren Funktoren $G : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}$ und nat. Transformationen $\xi : G \circ \gamma \Rightarrow F$ genau eine natürliche Transformation $\nu : G \Rightarrow \mathbb{L}F$ existiert mit $\xi = \mu \circ \nu$, d. h. $\mathrm{Nat}(G, \mathbb{L}F) \cong \mathrm{Nat}(G \circ \gamma, F)$ ist für alle G eine Bijektion, d. h. eine Linksableitung von F ist nichts anderes als eine Rechts-Kan-Erweiterung von F längs γ.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{H} \\ \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \arrow[ur, "\mathbb{L}F"] & \end{tikzcd}$$

Analog ist eine **Rechtsableitung** $\mathbb{R}F$ von F eine Linkskanerweiterung von F längs $\gamma : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$.

Satz. Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ ein Funktor, der azyklische Kofaserungen zwischen kof. Obj. auf Isomorphismen abbildet. Dann existiert $\mathbb{L}F$ und $\mu_X : \mathbb{L}F(X) \to F(X)$ ist ein Iso für alle kofasernden X.

Konstruktion. Sei $h\mathcal{M}_c$ die volle Unterkategorie der kof. Objekte von $\mathcal{M}$ modulo Rechts-Homotopie. Betrachte die Komposition

$$\mathcal{M} \xrightarrow{Q} h\mathcal{M}_c \xrightarrow{F_*} \mathcal{H}.$$

Dabei ist Q der kofasernde Ersatz und F_* wird induziert von F, da F homotope Morphismen identifiziert. Nach Ken Brown bildet die Komposition schwache Äquivalenzen auf Isos ab und induziert daher den gesuchten Funktor $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}$ mit $\mathbb{L}F \circ \gamma = F_* \circ Q$. Definiere $\mu : \mathbb{L}F \circ \gamma \to F$ durch $\mu_X := F(q : QX \to X)$ für $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$. Falls X selbst kofasernd ist, so ist q eine schwache Äquivalenz zw. kofasernden Objekten und somit $\mu_X = F(q)$ ein Isomorphismus.

Def. Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Funktor zwischen Modellkategorien. Eine **totale Linksableitung** $\mathbb{L}F$ ist ein Funktor $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$, sodass $\mathbb{L}F$ die Linksableitung von $\delta \circ F$ ist:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{N} \arrow[d, "\delta"] \\ \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \arrow[r, "\mathbb{L}F"] \arrow[ur, Rightarrow] & \mathrm{Ho}(\mathcal{N}) \end{tikzcd}$$

Ein Funktor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bilde azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten auf schache Äquivalenzen ab. Dann existiert seine totale Linksableitung $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{N})$.

Def. Eine Adjunktion $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$ von Modellkategorien heißt **Quillen-Adjunktion**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- F erhält Kofaserungen und U erhält Faserungen,
- F erhält Kofaserungen und azyklische Kofaserungen,
- U erhält Faserungen und azyklische Faserungen,
- F erhält azyklische Kofaserungen und U azyklische Faserungen.

Bem. Die Äquivalenz folgt aus $Fi \boxslash p \iff i \boxslash Up$.

Def. Eine Quillen-Adj. (F, U) heißt **Quillen-Äquivalenz**, falls

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_c, Y \in \mathcal{N}_f \;:\; (FX \to Y) \in \mathcal{W} \iff (X \to UY) \in \mathcal{W}.$$

Satz. Sei (F, U) eine Quillenadjunktion. Dann existieren $\mathbb{L}F$, $\mathbb{R}U$ und bilden eine Adjunktion $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{N}) : \mathbb{R}U$.
Ist (F, U) sogar eine Quillenäquivalenz, so ist $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U)$ eine Adjunktion aus Äquivalenzen.

Kor. Quillenäq. Modellkat'n haben äquivalente Homotopiekat'n.

Prop. Für eine Quillenadjunktion $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$ sind äquivalent:

- (F, U) ist eine Quillenäquivalenz
- $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U)$ ist eine Adjunktion von Äquivalenzen
- F reflektiert schw. Äq'n zw. kof. Objekten und die Komposition $FQUY \xrightarrow{F(q_{UY})} FUY \xrightarrow{\epsilon} Y$ ist eine schw. Äq. für alle fas. Y.
- U reflektiert schw. Äq'n zw. fas. Objekten und die Komposition $X \xrightarrow{\eta} UFX \xrightarrow{U(r_{FX})} URFX$ ist eine schw. Äq. für alle kof. X.

Falls U schw. Äq'n in $\mathcal{N}$ erzeugt, dann ist auch äquivalent:
- $\eta : X \to UFX$ ist eine schwache Äq. für alle kofasernden X.

Falls F schw. Äq'n in $\mathcal{M}$ erzeugt, dann ist auch äquivalent:
- $\eta : X \to UFX$ ist eine schwache Äq. für alle kofasernden X.

Def. Sei $f : A \to B$ ein Mor. in der Modellkat. $\mathcal{M}$. Dieser induziert Funktoren $f^* : B/\mathcal{M} \to A/\mathcal{M}$ und $f_* : \mathcal{M}/A \to \mathcal{M}/B$. Der Funktor f^* besitzt einen Linksadj. $f_! : A/\mathcal{M} \to B/\mathcal{M}$, der durch Pushout entlang f geg. ist, und f_* besitzt einen Rechtsadj. $f^! : \mathcal{M}/B \to \mathcal{M}/A$.

Prop. $\mathcal{M}$ ist genau dann linkseigentlich, wenn $(f_!, f^*)$ eine Quillenadjunktion ist und genau dann rechtseigentlich, wenn $(f_*, f^!)$ eine Quillenadjunktion ist für alle schwachen Äquivalenzen f.

Satz. Sei $F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : U$ eine Adj. von einer komb. Modellkat. $\mathcal{M}$ mit erz. Kofaserungen I und erz. azyklischen Kofaserungen J und einer lokal präsentierbaren Kategorie $\mathcal{N}$. Der Funktor U erzeuge schwache Äquivalenzen in $\mathcal{N}$ (d. h. wir nennen $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{N})$ eine schwache Äquivalenz, falls $U(f)$ eine schwache Äquivalenz ist). Dann wird $\mathcal{N}$ eine Modellkategorie mit erzeugenden Kofaserungen FI und erzeugenden azyklischen Kofaserungen FJ, falls gilt: Jeder relative FJ-Zellenkomplex ist eine schwache Äquivalenz (d. h. $U(\mathrm{Cell}(FJ)) \subset \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$). Bezüglich dieser Modellstruktur auf $\mathcal{N}$ wird (F, U) zu einer Quillenadjunktion.

Scheibenkategorien als Modellkategorien

Lem. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ ein Objekt. Dann sind die Scheibenkategorien $X/\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}/X$ Modellkat'n, wobei die Modellstruktur vom Vergissfunktor $U : X/\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ bzw. $U : \mathcal{M}/X \to \mathcal{M}$ erzeugt wird, d. h. ein Mor. f ist genau dann eine Faserung/Kofaserung/schwache Äquivalenz, wenn $U(f)$ es ist.

Lem.
- Ist $\mathcal{M}$ links- oder rechtseigentlich, so auch $\mathcal{M}/X$ und $X/\mathcal{M}$
- Ist $\mathcal{M}$ eigentlich, so auch $\mathcal{M}/X$ und $X/\mathcal{M}$
- Ist $\mathcal{M}$ kofasernd erzeugt, so auch $\mathcal{M}/X$
- Ist $\mathcal{M}$ kombinatorisch, so auch $\mathcal{M}/X$

Monoidale Modellkategorien

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ zusammen mit einem Bifunktor $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, einem Objekt $\mathbb{1}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, natürlichen Isomorphismen $\alpha : (-\otimes-)\circ- \Rightarrow -\otimes(-\circ-)$, $\lambda : \mathbb{1}\otimes- \Rightarrow -$ und $\rho : -\otimes\mathbb{1}\Rightarrow -$, sodass die Kohärenzdiagramme aus der Definition einer schwachen 2-Kategorie kommutieren.

Bem. Eine monoidale Kategorie ist das gleiche wie eine 2-Kategorie mit nur einem Objekt.

Bspe. Monoidale Kategorien sind: • $(\mathbf{Set}, \times, \{\heartsuit\})$
• $(R\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}R, \otimes_R, R)$ wobei R ein Ring mit Eins ist

Def. Eine **symm. monoidale Kategorie** ist eine monoidale Kat. zusammen mit einem nat. Isomorphismus $\gamma : X\otimes Y\to Y\otimes X$, sodass die geeigneten Kohärenzdiagramme kommutieren. Es reicht aus, zu zeigen, dass folgende Diagramme kommutierten:

$$\begin{tikzcd}
(Y\otimes X)\otimes Z \arrow[d, "\alpha"] & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[l, "\gamma\otimes\mathrm{id}_Z"'] \arrow[r, "\alpha"] & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[d, "\gamma"] \\
Y\otimes(X\otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}_Y\otimes\gamma"] & Y\otimes(Z\otimes X) & (Y\otimes Z)\otimes X \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\otimes X \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & X\otimes\mathbb{1} \arrow[dl, "\rho"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Def. Ein **monoidaler Funktor** zwischen (symm.) monoidalen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ ist ein Funktor $F : \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ zusammen mit natürlichen Isomorphismen $F-\otimes_{\mathcal{D}}F-\Rightarrow F(-\otimes_{\mathcal{C}}-)$ und $F\mathbb{1}_{\mathcal{C}}\Rightarrow\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$, welche verträglich mit α, λ, ρ (und eventuell γ) sind.

Bsp. $\mathbf{Set}\to R\text{-}\mathbf{Mod}$, $X\mapsto$ freier R-Modul mit Basis X

Def. Seien $F, G : \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ monoidale Funktoren. Eine natürliche Transformation $\eta : F\Rightarrow G$ heißt **monoidal**, wenn folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
FX\otimes FY \arrow[r] \arrow[d, "\eta_X\otimes\eta_Y"] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "\eta_{X\otimes Y}"] \\
GX\otimes GY \arrow[r] & G(X\otimes Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F(\mathbb{1}) \arrow[rr, "\eta_{\mathbb{1}}"] & & G(\mathbb{1})
\end{tikzcd}$$

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine monoidale Kategorie. Ein **Rechts-$\mathcal{C}$-Modul** ist eine Kategorie $\mathcal{D}$ mit einem Funktor $\otimes : \mathcal{D}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ und ...

Bsp. Die Kat. $\mathcal{D}$ besitze kleine Koprodukte. Dann wird $\mathcal{D}$ zu einem $\mathbf{Set}$-Modul durch $\times = \otimes : \mathcal{D}\to\mathbf{Set}\to\mathcal{D}$, $(X, I)\mapsto\coprod_{i\in I}X$

Def. Sei $\mathcal{C}$ monoidale Kategorie. Ein Funktor $F : \mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ zwischen $\mathcal{C}$-Rechts-Moduln $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ heißt **$\mathcal{C}$-Modulfunktor**, falls $F(X)\otimes I$ und $F(X\otimes I)$ natürlich isomorph sind.

Def. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ monoidale Kat'en und $i : \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ ein monoidaler Funktor. Dann heißt $(\mathcal{D}, i)$ eine **$\mathcal{C}$-Algebra**. Morphismen von $\mathcal{C}$-Algebren sind kommutative Quadrate von monoidalen Funktoren.

Def. Eine $\mathcal{C}$-Algebra $\mathcal{D}$ heißt **zentral**, falls $i(A)\otimes_{\mathcal{D}}B\cong B\otimes_{\mathcal{D}}i(A)$ natürlich für alle $A\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $B\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

Bem. Ist die $\mathcal{C}$-Algebra $\mathcal{D}$ symmetrisch, so auch zentral.

Def. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ Kategorien. Eine **Adjunktion in 2 Variablen** oder Biadjunktion besteht aus Funktoren

$$\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E},\quad \mathrm{Hom}_r : \mathcal{D}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{E}\to\mathcal{C}, \mathrm{Hom}_l : \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{E}\to\mathcal{D}$$

und natürlichen Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \mathrm{Hom}_l(C, E))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(C\otimes D, E)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathrm{Hom}_r(D, E)).$$

Notation. ${}^{C}E := \mathrm{Hom}_l(C, E)$, $E^D := \mathrm{Hom}_r(D, E)$

Bem. $k\otimes i\boxslash p \iff k\boxslash\mathrm{Hom}_r(i, p) \iff i\boxslash\mathrm{Hom}_l(k, p)$

Bsp. Seien R, S, T drei Ringe, $\mathcal{C} := R\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}S$, $\mathcal{D} := S\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}T$, $\mathcal{E} := R\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}T$. Eine Biadjunktion ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
\otimes &: \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}, & (M, N)&\mapsto M\otimes_S N,\\
\mathrm{Hom}_r &: \mathcal{D}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{E}\to\mathcal{C}, & (N, P)&\mapsto\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}\text{-}T}(N, P),\\
\mathrm{Hom}_l &: \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{E}\to\mathcal{D}, & (M, P)&\mapsto\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(M, P).
\end{aligned}$$

Def. Eine monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ heißt **monoidal abgeschlossen**, wenn $\otimes$ Teil einer Biadjunktion ist.

Bspe. • $(R\text{-}\mathbf{Mod}\text{-}R, \otimes_R, R)$ • $(\mathbf{Set}, \times, \{\heartsuit\})$

Def. Sei $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ Teil einer Biadjunktion, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ Modellkategorien. Dann heißt $\otimes$ **Quillen-Biadjunktion**, falls für alle Kof'en $(f : U\hookrightarrow V)\in\mathcal{C}$, $(g : W\hookrightarrow X)\in\mathcal{D}$ der Morphismus

$$f\,\square\,g : P(f, g) := V\otimes W\cup_{U\otimes W}U\otimes X\to V\otimes X$$

eine Kofaserung in $\mathcal{E}$ ist, welche azyklisch ist, wenn f oder g azyklisch ist.

Lem. Die Bedingung ist äquivalent zu: Für alle Kofaserungen $(g : W\hookrightarrow X)\in\mathcal{D}$ und Faserungen $(p : Y\twoheadrightarrow Z)\in\mathcal{E}$ ist

$$\mathrm{Hom}_{r,\square} : \mathrm{Hom}_r(X, Y)\to\mathrm{Hom}_r(X, Z)\times_{\mathrm{Hom}_r(W, Z)}\mathrm{Hom}_r(W, Y)$$

eine Faserung und azyklisch, wenn g oder p es ist. Analog für Hom_l.

Prop. Sei $\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ ein Quillenbifunktor. Ist $C\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ kofasernd, so ist $C\otimes- : \mathcal{D}\to\mathcal{E}$ ein Quillenfunktor mit Rechtsadj. $\mathrm{Hom}_l(C, -)$.

Bem. Analog: Sei E fasernd. Dann ist $\mathrm{Hom}_r(-, E) : \mathcal{D}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ein Quillen-Links-Adjungierter zu $\mathrm{Hom}_l(-, E) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}$.

Lem. Sei $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ eine Biadj, $I\subseteq\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, $J\subseteq\mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ Mengen. Dann gilt: $\mathrm{Cof}(I)\,\square\,\mathrm{Cof}(J)\subseteq\mathrm{Cof}(I\,\square\,J)$ mit $\mathrm{Cof}(K) := {}^{\boxslash}(K^{\boxslash})$.

Satz. Seien $(\mathcal{C}, I, J)$, $(\mathcal{D}, I', J')$ kombinatorische Modellkategorien. Dann ist $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ genau dann ein Quillenbifunktor, wenn $I\,\square\,I'$ Kofaserungen in $\mathcal{E}$ und $I\,\square\,J'$, $J\,\square\,I'$ jeweils azyklische Kofaserungen in $\mathcal{E}$ sind.

Def. Eine **monoidale Modellkategorie** ist eine Modellkategorie $\mathcal{M}$ mit monoidal abgeschlossener Struktur $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbb{1})$, sodass

- $\otimes : \mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ ein Quillenbifunktor und
- $Q\mathbb{1}\otimes X\to\mathbb{1}\otimes X\cong X$ und $X\otimes Q\mathbb{1}\to X\otimes\mathbb{1}\cong X$ für alle kofasernden X jeweils schwache Äquivalenzen sind.

Bem. Die zweite Bedingung ist äquivalent zu:

$$X\cong\mathrm{Hom}_r(\mathbb{1}, X)\to\mathrm{Hom}_r(Q\mathbb{1}, X),\qquad X\cong\mathrm{Hom}_l(\mathbb{1}, X)\to\mathrm{Hom}_l(Q\mathbb{1}, X)$$

sind schwache Äquivalenzen für alle fasernden X.

Beob. Sei $\mathcal{M}$ eine mon. Modellkat, $(A\xrightarrow{i}X), (E\xrightarrow{p}B)\in\mathcal{M}$. Es gilt

$$i\boxslash p \iff (\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X, E)\to P(i, p)) \text{ ist surjektiv.}$$

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **kartesisch abgeschlossen**, falls $(\mathcal{C}, \times, *)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie ist.

Bsp. Sei $\mathcal{C}$ eine bivollständige, kartesisch abgeschlossene Kategorie. Sei $\mathcal{C}_* := */\mathcal{C}$. Das initiale und terminale Objekt dieser Kategorie ist id_*, sie ist also punktiert. Für $X, Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_*)$ definiere $X\wedge Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ durch folgenden Pushout:

$$\begin{tikzcd}
X\amalg Y \arrow[r] \arrow[d] & X\times Y \arrow[d] \\
* \arrow[r] & X\wedge Y
\end{tikzcd}$$

Für $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ sei $X_+ := X\amalg *\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_*)$.
Es besteht die Adj. $(-)_+ : \mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{C}_* : U$, wobei U der Vergissfunktor ist. Mit $S^0 := *_+ = *\amalg *$ wird $(\mathcal{C}_*, \wedge, S^0)$ zu einer symmetrischen monoidalen Kategorie und $(-)_+$ zu einem monoidalen Funktor.
Für $V, W\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_*)$ definiere $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_*}(V, W)$ als Pullback

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_*}(V, W) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(V, W) \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(*, *) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(*, W)
\end{tikzcd}$$

Dann ist $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}_*}(X, -)$ rechtsadjungiert zu $-\wedge X$ für alle $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_*)$ und damit $\mathcal{C}_*$ soagar monoidal abgeschlossen.
Trage $\mathcal{C}$ zusätzlich eine Modellstruktur, sodass $\times : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ ein Quillenfunktor und $*$ kofasernd ist (also $(\mathcal{C}, \times, *)$ eine monoidale Modellkategorie ist). Dann erzeugt $U : \mathcal{C}_*\to\mathcal{C}$ eine symmetrische monoidale Modellstruktur auf $(\mathcal{C}_*, \wedge, S^0)$ und $(-)_+\dashv U$ ist eine Quillenadjunktion, sogar eine monoidale:

Def. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ monoidale Modellkategorien.
Eine Quillen-Adjunktion $F : \mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D} : U$ heißt **monoidal**, falls

- F monoidal ist und
- $FQ\mathbb{1}_{\mathcal{C}}\xrightarrow{Fq}F\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ eine schwache Äquivalenz ist.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine mon. Modellkat. Eine **$\mathcal{C}$-Modellkategorie** ist eine Modellkat. $\mathcal{D}$ mit Struktur $\otimes : \mathcal{D}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ als $\mathcal{C}$-Rechtsmodul, sodass

- $\otimes : \mathcal{D}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ ist eine Quillenadjunktion,
- $X\otimes Q\mathbb{1}\xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes q}X\otimes\mathbb{1}$ ist eine schw. Äq. für alle kof. $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

Bem. Wenn $\mathcal{C}$ punktiert ist, so auch $\mathcal{D}$.

Prop. Sei $(\mathcal{C}, \times, *)$ eine monoidale Modellkategorie und $*$ kofasernd. Ist dann $\mathcal{D}$ eine $\mathcal{C}$-Modellkategorie, so ist $\mathcal{D}_*$ eine $\mathcal{C}_*$-Modellkategorie. Damit gibt es eine Äquivalenz

$$\{\text{punktierte } \mathcal{C}\text{-Modellkategorie}\} \longleftrightarrow \{\mathcal{C}_*\text{-Modellkategorien}\}.$$

Prop. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ Modellkategorien und $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ eine Quillen-Biadjunktion. Dann ist $\otimes^{\mathbb{L}} : \mathrm{Ho}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{E})$ eine Biadjunktion mit Adjungierten $\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_r$ und $\mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_l$.

Satz. Ist $\mathcal{C}$ eine (symm.) monoidale Modellkategorie, so ist $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ eine monoidal abgeschlossene Kategorie.

Simpliziale Mengen

Ref. Die Homologische-Algebra-Zusammenfassung enthält eine Einführung in simpliziale Mengen.

Bspe.
- $I := \Delta[1]$ heißt **Intervall**,
- $\Delta^i[n] := \{x \in \Delta[n] \mid i \notin \mathrm{im}(x)\} \subset \Delta[n]$ heißt **i-Seite**,
- $S^n := \cup_{i=0}^n \Delta^i[n]$ heißt **n-Sphäre**.
- $\Lambda^i[n] := \cup_{j \neq i} \Delta^j[n]$ heißt **i-Horn**.

Def. Ein Morphismus $p : E \to X$ simplizialer Mengen heißt **Kan-Faserung**, falls $\{\Lambda^i[n] \hookrightarrow \Delta[n] \mid 0 \leqslant i \leqslant n\} \boxslash p$

Def. Eine simpl. Menge heißt **Kan-Komplex**, falls $X \to * := \Delta[0]$ eine Kan-Faserung ist.

Def.
- Ein **inneres Horn** ist ein $\Lambda^i[n] \subset \Delta[n]$ mit $0 < i < n$.
- Eine simpl. Menge X heißt **innerer Kan-Komplex**, falls

$$\{\Lambda^i[n] \hookrightarrow \Delta[n] \mid 0 < i < n\} \boxslash (X \to *).$$

Bem. Es ist X also genau dann ein (innerer) Kan-Komplex, wenn man (innere) Hörner in X füllen kann.

Def. Seien $X \in \mathbf{sSet}$, $x, y \in X_0$, d. h. $x, y : \Delta[0] \to X_0$. Setze

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, \alpha : I \to X \;:\; \alpha(0) = x \wedge \alpha(1) = y.$$

mit $\alpha(\epsilon) := \alpha \circ (\Lambda^\epsilon[1] \hookrightarrow I)$ für $\epsilon = 0, 1$. Setze $\pi_0(X) := X/\!\sim$.

Prop. Ist X ein Kan-Komplex, so ist $\sim$ eine Äq'relation.

Def. Eine **anodyne Erweiterung** ist ein Morphismus $i : A \to B$ von simpl. Mengen, welcher die LHHE bzgl. aller Kan-Faserungen hat, d. h. die Unterkategorie der anodynen Erweiterungen ist die Saturierung von $\{\Lambda^i[n] \to \Delta[n]\}$, also $\mathrm{Cof}(\{\Lambda^i[n] \to \Delta[n]\})$.

Satz. Die Monomorphismen in $\mathbf{sSet}$ sind genau die Retrakte von Zellkomplexen über $\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]\}$.

Def. Eine **triviale Faserung** ist ein Mor. in $\mathbf{sSet}$, welcher die RHHE bzgl. $\{\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]\}$, d. h. bzgl. allen Monomor. hat.

Satz. (anodyne Erweiterungen, Kan-Faserungen) und (Monomorphismen, triviale Faserungen) sind jeweils schwache Faktorisierungssysteme von $\mathbf{sSet}$.

Satz (**Gabriel-Zisman**)**.** Sei $k : Y \to Z$ ein Monomorphismus. Ist dann $i : A \to B$ anodyn, so ist $i \mathbin{\square} k : A \times Z \cup_{A \times Y} B \times Y \to B \times Z$ (mit $\otimes := \times$) ebenfalls anodyn.

Bem. Damit wird folgen, dass $\mathbf{sSet}$ eine kartesisch abgeschlossene Modellkategorie wird (d. h. $\times$ ist ein Quillen-Bifunktor).

Def. Seien X, Y simpliziale Mengen. Dann ist der **Funktionenkomplex** $Y^X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{sSet})$ definiert durch

$$(Y^X)_n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n] \times X, Y)$$

Bem. Es gilt $\mathrm{Hom}(Z, Y^X) \cong \mathrm{Hom}(Z \times X, Y)$.

Kor. Ist Y ein Kan-Komplex, so ist Y^X wieder ein Kan-Komplex.

Def. Zwei Morphismen $f, g : X \to Y$ zwischen simpl. Mengen X, Y heißen **homotop**, falls $f \sim g$ in Y^X, d. h. die Menge der Homotopieklassen von Morphismen ist $\pi_0(Y^X)$.

Kor (**Homotopieerweiterungseigenschaft, HEE**)**.** Sei $p : E \to X$ eine Kan-Faserung und $i : Y \to Z$ ein Monomorphismus. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \times I \arrow[r, "h'"] \arrow[d, hook, "i \times \mathrm{id}_I"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "\overline{h}"] & X \\
Z \times \Lambda^\epsilon[1] \arrow[u] \arrow[uur] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

existiert der gestrichelte Pfeil.

Def. Ein Monomorphismus $i : A \to B$ in $\mathbf{sSet}$ heißt **starker Deformationsretrakt** (SDR), falls ein $r : B \to A$ mit $ri = \mathrm{id}_A$ und $[ir] = [\mathrm{id}_B] \in \pi_0(B^B \text{ in } A/\mathbf{sSet})$, d. h. es existiert $h : B \times I \to B$ mit $h_0 = \mathrm{id}_B$, $h_1 = ir$, $h|_{A \times I} = \mathrm{id}_{A \times I}$ oder ein Zickzack solcher h's.

Bspe. $\Lambda^0[1], \Lambda^1[1] \subset \Delta[1]$ sind starke Deformationsretrakte.

Prop. Sei $i : A \to B$ anodyn, A, B Kan-Komplexe. Dann ist A ein SDR von B vermöge i.

Prop. Sei $i : A \to B$ ein Monomorphismus, sodass A ein SDR von B ist. Dann ist i anodyn.

Prop. Für eine Kan-Faserung $p : E \to X$ sind äquivalent:

- p ist trivial.
- Es existiert ein Schnitt $s : X \to E$ und ein $h : E \times \Delta[1] \to E$ mit $ps = \mathrm{id}_X$ und $h : \mathrm{id}_E \sim sp \pmod X$
- p ist eine Homotopieäquivalenz, d. h. es existiert ein $s : X \to E$ mit Homotopien $k : ps \sim \mathrm{id}_X$ und $h : sp \sim \mathrm{id}_E$.

Prop. Sei $p : E \to X$ eine Faserung, $i : A \to X$ ein SDR. Dann ist $p^{-1}(A) \to E$ im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[d] \\
A \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

ebenfalls ein SDR.

Kor. Sei $p : E \to X \times \Delta[1]$ eine Faserung. Sei $p_0 := p|_{p^{-1}(X \times \Lambda^0[1])}$, $p_1 := p|_{p^{-1}(X \times \Lambda^1[1])} : E_i \to X$ Dann sind $p_0, p_1 : E_i \to X$ faserweise homotopieäquivalent, d. h. es existieren f, g in

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_0"] & E_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_1"] & E_0 \arrow[dl, "p_0"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

mit $\mathrm{id}_{E_0} \sim gf \pmod X$ und $fg \sim \mathrm{id}_{E_1} \pmod X$

Kor. Sei $p : E \to Y$ eine Faserung und $f, g : X \to Y$ homotop. Dann sind die Pullbacks f^*E und g^*E faserweise homotop (also mod Y).

Kor. Sei X zshgd (d. h. $\pi_0(X) = *$), $p : E \to X$ eine Faserung. Dann sind je zwei Fasern von p homotopieäquivalent.

Def.
- Seien $x, y : \Delta[n] \to X$ zwei n-Simplizes in einer simplizialen Menge X mit $x|_{\partial\Delta[n]} = a = x|_{\partial\Delta[n]}$. Schreibe $x \sim y\ (\partial\Delta[n])$, falls $\exists\, h : \Delta[n] \times \Delta[1] \to X$ mit $h|_{\Lambda^0[1]} = x$, $h_{\Lambda^1[1]} = y$, $h_{\partial\Delta[n]} = \mathrm{id}$.
- Ein Kan-Komplex X heißt **minimal**, falls

$$x \sim y\ (\partial\Delta[n]) \quad \Longleftrightarrow \quad x = y.$$

Lem. Sei X ein Kan-Komplex. Dann existiert ein SDR X' von X, sodass X' minimal ist.

Lem. Sei X minimal und $f : X \to X$ mit $f \sim \mathrm{id}_X$. Dann ist f ein Isomorphismus.

Kor. Sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz zwischen minimalen Komplexen. Dann ist f schon ein Isomorphismus.

Def. Eine Faserung $p : E \to X$ heißt **minimal**, falls für alle Simplizes $x, y : \mathrm{Hom}(\Delta[n], E)$ mit $p \circ x = p \circ y$ mit $x \sim y$ (mod $\partial\Delta[n]$).

Def. Ein **Bündel** mit Faser F ist eine Abb. $p : E \to B$, sodass für alle Simplizes $\sigma : \Delta[n] \to B$ der Pullback $\Delta[n] \times_B E$ homotopieäquivalent zu $\Delta[n] \times F$ ist.

Lem. Eine minimale Faserung $p : E \to X$ ist ein Bündel.

Def. Ein Morphismus $f : X \to Y$ in $\mathbf{sSet}$ heißt **schwache Äquivalenz**, falls für alle Kan-Komplexe K der induzierte Morphismus $[f, K] : [Y, K] \to [X, K]$ (mit $[Y, K] := \pi_0(K^Y)$)

Bspe.
- Homotopieäquivalenzen ist eine schwache Äquivalenzen.
- Triviale Faserungen sind schwache Äquivalenzen.
- Sei $i : A \to B$ eine anodyne Erweiterung. Für jeden Kan-Komplex K ist dann $K^i : K^B \to K^A$ eine triviale Faserung, insbesondere also eine schwache Homotopieäquivalenz.
- Ist $f : X \to Y$ eine schwache Äquivalenz zwischen Kan-Komplexen X, Y, so ist f eine Homotopieäquivalenz.

Bem. f ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn in allen Diagrammen der Form

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ Y \arrow[r] & \overline{Y} \end{tikzcd}$$

mit $\overline{X}$, $\overline{Y}$ Kankomplexe, $X \to \overline{X}$, $Y \to \overline{Y}$ anodyn der Morphismus $\overline{f}$ eine schwache Äquivalenz ist.

Lem. Sei $i : A \to B$ anodyn, $p : E \to A$ ein Bündel. Dann existiert ein Pullback-Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"] \\ A \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

mit einem Bündel p'. Weiter ist p' eindeutig bis auf Isomorphie. Außerdem ist $E \hookrightarrow E'$ anodyn.

Prop.
- Eine Faserung $p : E \to X$ ist genau dann trivial, wenn p eine schwache Äquivalenz ist.
- Eine Kofaserung $i : A \to B$ ist genau dann anodyn, wenn i eine schwache Äquivalenz ist.

Lem. Pullbacks längs Bündeln erhalten schwache Äquivalenzen.

Satz (Quillen). Die Kategorie der simplizialen Mengen mit den schwachen Äquivalenzen wird zu einer kartesisch abgeschlossenen, eigentlichen, kombinatorischen Modellkategorie, wenn als Kofaserungen die Monomorphismen und als Faserungen die Kan-Faserungen gewählt werden.

Kettenkomplexe

Sei R ein Ring und **Mod**-R die Kategorie der R-Moduln.

Def. Ein $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}\text{-}R)$ heißt **projektiv**, falls $\mathrm{Hom}_r(P, f) : \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, N)$ für alle surjektiven $f : M \to N$ surjektiv ist.

Bem. Eine Abb. $f : M \to N$ ist genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{Hom}(P, f)$ surjektiv für alle projektiven P.

Bspe.
- R ist projektiv
- Direkte Summen projektiver Moduln sind projektiv.
- Retrakte projektiver Moduln sind wieder projektiv.

Bem. Damit hat **Mod**-R genügend viele projektive, d. h. jedes Modul M erlaubt eine Surjektion $P \to M$ mit P projektiv.

Def. Sei $\mathrm{Ch}_*(R)$ die Kategorie der Kettenkomplexe, die in nichtnegativen Graden konzentriert sind, d. h. Objekte sind Diagramme der Form

$$\ldots \to C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \quad \text{mit } \partial_i \circ \partial_{i+1} = 0.$$

Elemente in $Z_n C := \{x \in C_n \mid \partial_n(x) = 0\}$ heißen **n-Zykel** und Elemente in $B_n C := \{\partial_n(y) \mid y \in C_{n+1}\} \subseteq Z_n C$ heißen **n-Ränder**. Die Gruppe $H_n(C) := Z_n C / B_n C$ heißt **n-te Homologie**. Ist $f : C \to C'$ ein Morphismus von Kettenkomplexen, so induziert dieser einen Morphismus $H_n(f) : H_n(C) \to H_n(C')$. Es heißt f ein Homologie-Isomorphismus (oder Quasi-Isomorphismus), falls $H_n(f)$ für alle $n \geqslant 0$ ein Isomorphismus ist.

Satz. Zusammen mit den Homologie-Isomorphismen als schwache Äquivalenzen wird $\mathrm{Ch}_*(R)$ zu einer kombinatorischen Modellkategorie, wenn wir als Kofaserungen gradweise Monomorphismen mit gradweise projektivem Kokern und als Faserungen Morphismen, die im positiven Grad gradweise Surjektionen sind, wählen.

Def. Diese Modellstruktur heißt **projektive Modellstruktur** auf $\mathrm{Ch}_*(R)$.

Bem. Alle Komplexe in die projektive Modellstruktur sind fasernd, insbesondere ist $\mathrm{Ch}_*(R)$ rechtseigentlich. Die kofasernden Objekte sind die Komplexe projektiver Moduln. Projektive Auflösung entspricht dem kofasernden Ersatz.

Def. Es sei $D(n)$ der Komplex $\ldots \to R \xrightarrow{\mathrm{id}} R \to 0 \to \ldots$ mit R im Grad n und $n-1$ und $S(n)$ der Komplex $\ldots \to 0 \to R \to 0 \to \ldots$ mit R im Grad n.

Def. Der **Einhängungsfunktor** ist

$$\Sigma : \mathrm{Ch}_*(R) \to \mathrm{Ch}_*(R), \quad (\Sigma C)_{n+1} := C_n, \ (\Sigma C)_0 := 0.$$

Bem. Es gilt $D(n+1) = \Sigma(D(n))$ und $S(n+1) = \Sigma(S(n))$.

Bem. Es gilt $\mathrm{Hom}(D(n), C) \cong C_n$ und $\mathrm{Hom}(S(n), C) \cong Z_n C$.

Lem. Ein Morphismus $f : C \to C'$ ist genau dann eine Faserung (d. h. im positiven Grad surjektiv), wenn f die RHHE bzgl. aller $\{0 \to D(n) \mid n \geqslant 1\}$ hat.

Bem. Folglich ist $\{0 \to D(n) \mid n \geqslant 1\}$ die Menge der erz. azykl. Kof. der projektiven Modellstruktur.

Lem. Sei $f : C \to C'$ ein Mor. in $\mathrm{Ch}_*(R)$. Dann sind äquivalent:

- f ist ein Homologie-Isomorphismus und in positiven Graden surjektiv
- Für alle $n \geqslant 0$ ist $C_n \to Z_{n-1} C \times_{Z_{n-1} C'} C'_n, x \mapsto (\partial x, f(x))$ surjektiv.
- f hat die RHE bzgl. $\{S(n) \to D(n) \mid n \geqslant 0\}$

Bem. Folglich ist $\{S(n) \to D(n) \mid n \geqslant 0\}$ die Menge der erz. Kof. der projektiven Modellstruktur.

Anhang: Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel $(S, \leqslant)$ bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung $\leqslant$ auf S.

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\ldots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \ldots$

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz)**.** Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leqslant_S)] \leqslant [(T, \leqslant_T)] \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leqslant_S) \to (T, \leqslant_T).$$

Notation. • $0 := [\varnothing]$, • $n := [\{1, \ldots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega := [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

Prinzip (**Transfinite Induktion**)**.**
Sei $P : \mathcal{O}_n \to \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert:
Für $\alpha = [(S, \leqslant_S)]$ und $\beta = [(T, \leqslant_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

- $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leqslant_{S \amalg T})]$, wobei gilt:
$$\leqslant_{S\amalg T}|_{S\times S} := \leqslant_S, \quad \leqslant_{S\amalg T}|_{T\times T} := \leqslant_T, \quad S <_{S\amalg T} T.$$
- $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leqslant_{S \rtimes T})]$ mit der lexikogr. Ordnung
$$(s_1, t_1) \leqslant_{S\rtimes T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \ \vee \ (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leqslant_S s_2)$$
- $\alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \to T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leqslant)]$ mit
$$f < g \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall\, t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 := [(\varnothing, \leqslant)] \in \mathcal{O}_n$.
b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.
c) Die Limeszahl $\lim A := \sup A$ einer Teil*menge* $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

a)	b)	c)
$\alpha + 0 := \alpha$	$\alpha+(\beta+1) := (\alpha+\beta)+1$	$\alpha+\lim A := \lim\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$
$\alpha \cdot 0 := 0$	$\alpha \cdot (\beta+1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$	$\alpha \cdot \lim A := \lim\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha^0 := 1$	$\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$	$\alpha^{\lim A} := \lim\{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe ist mit
• $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, • $a \cdot 0 = 0$.

Lem (Rechenregeln in $\mathcal{O}_n$)**.** • $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
• $\alpha^0 = 1$ • $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^\alpha = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$
• $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ • $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$

- $\mathcal{O}_n$ ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht*!
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:
$$\forall \beta < \gamma : \quad \alpha+\beta < \alpha+\gamma, \quad \alpha\cdot\beta < \alpha\cdot\gamma \ (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \ (\alpha > 1).$$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \ldots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.