

# Zusammenfassung Gewöhnliche DGLn

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Def** (Klassifikation von DGLn).

- (I) **Gewöhnliche** DGL: Gesucht ist Funktion in einer Variable
- Partielle** DGL: Gesucht ist Funktion in mehreren Variablen
- (II) **Ordnung** einer DGL: Höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in Gleichung vorkommt
- (III) **Explizite** DGL: Gleichung der Form  $y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)})$   
**Implizite** DGL: Allgemeinere Form  $F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0$
- (IV) **Skalare** DGL: Gesucht ist Funktion mit Wert in  $\mathbb{R}$   
**n-dimensionale** DGL: Gesuchte Funktion hat Wert in  $\mathbb{R}^n$
- (V) **Lineare** DGL: Gleichung hat die Form
$$a_k(t)y^{(k)}(t) + a_{(k-1)}(t)y^{(k-1)}(t) + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = 0$$
- (VI) **Autonome** DGL: Gleichung der Form  $F(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0$  (keine Abhängigkeit von  $t$ , Zeitinvarianz)

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Dann ist ein **Anfangswertproblem** (AWP) gegeben durch die Gleichungen

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.1)$$

**Notation.** Seien im Folgenden  $I$  und  $J$  stets Intervalle in  $\mathbb{R}$ .

- Def.** • Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Eine differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Lösung** von  $\dot{y} = f(t, y)$ , falls für alle  $t \in I$  gilt:  $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ .
- Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Eine  $k$ -mal differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Lösung** von

$$y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)}), \quad (1.2)$$

falls für alle  $t \in I$  gilt:  $y^{(k)}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$

**Satz.** • Ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.2), dann ist

$$(y_1, \dots, y_k) : I \rightarrow \mathbb{R}^{kn}, \quad t \mapsto (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$$

eine Lösung des Systems von Gleichungen

$$(1.3) \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{k-1} = y_k \\ \dot{y}_k = f(t, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k) \end{cases}$$

- Ist umgekehrt  $(y_1, \dots, y_k) : I \rightarrow \mathbb{R}^{kn}$  eine Lösung von (1.3), dann ist  $y = y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.2).

**Satz.** • Ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von AWP (1.1), dann ist

$$(y_1, y_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \mapsto (y_1(t), y_2(t)) = (t, y(t))$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.4) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = 1, & y_1(t_0) = t_0 \\ \dot{y}_2(t) = f(y_1(t), y_2(t)), & y_2(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Ist  $(y_1, y_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eine Lösung von (1.4), dann ist  $y = y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.1).

**Problem.** Gesucht ist eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  der linearen, skalaren, expliziten DGL 1. Ordnung (mit  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig)

$$\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \quad (1.5)$$

**Satz.** Die allgemeine Lösung der Gleichung  $\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t)$  ist

gegeben durch  $y_h(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

**Satz.** Sei  $y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine partikuläre Lösung von (1.5). Dann ist die Menge aller Lösungen von (1.5) gegeben durch

$$\{y_p + y_h \mid y_h : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist Lösung von } \dot{y}_h(t) = a(t) \cdot y_h(t)\}$$

**Bemerkung.** Der Ansatz mit **Variation der Konstanten**

$y_p(t) = c(t) \cdot y_h(t)$  für (1.5) führt zu

$$c(t) = \frac{1}{c_0 t_0} \int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau$$
$$\Rightarrow y_p(t) = \left(\int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

**Korollar.** Die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.6) \begin{cases} \dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mit  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$y(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

**Problem.** Ges. ist Lösung der DGL mit **getrennten Variablen**

$$\dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y) \quad (1.7)$$

mit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

**Lsg.** 1. Fall:  $h(y_0) = 0$  für ein  $y_0 \in J$ . Dann ist  $y(t) = y_0$  eine Lsg.

2. Fall: Es gibt kein  $y_0 \in J$  mit  $h(y_0) = 0$ . Sei  $H$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{h}$  und  $G$  eine Stammfunktion von  $g$ . Da  $h$  stetig und nirgends null ist, ist  $h$  entweder strikt positiv oder strikt negativ. Somit ist  $H$  streng monoton steigend/fallend und somit umkehrbar. Eine Lösung von (1.7) ist nun gegeben durch

$$y(t) = H^{-1}(G(t) + c_0) \quad \text{mit } c_0 \in \mathbb{R}.$$

**Problem.** Gesucht ist Lösung des AWP mit getrennten Variablen

$$(1.8) \begin{cases} \dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

**Lsg.** 1. Fall:  $h(y_0) = 0$ . Dann ist  $y(t) = y_0$  eine Lösung.

2. Fall:  $h(y_0) \neq 0$ . Dann ist  $h$  in einer Umgebung von  $y_0$  strikt positiv/negativ. Setze

$$H_1(y) := \int_{y(t_0)}^y \frac{1}{h(s)} ds, \quad G_1(t) := \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

Dann ist  $H_1$  in einer Umgebung von  $y_0$  invertierbar und eine Lösung von (1.8) ist gegeben durch

$$y(t) = H_1^{-1}(G_1(t)).$$

**Technik** (Transformation). Manchmal lässt sich eine DGL durch **Substitution** eines Termes in eine einfachere DGL überführen, deren Lösung mit bekannten Methoden gefunden werden kann. Die Lösung der ursprünglichen DGL ergibt sich durch Rücksubstitution.

**Bsp.** Gegeben sei die DGL  $\dot{y} = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$  mit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Substituiere  $z(t) = \alpha t + \beta y(t) + \gamma$ . Es ergibt sich die neue DGL  $\dot{z}(t) = \beta f(z(t)) + \alpha$ , die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt.

**Bsp** (Bernoulli-DGL). Gegeben sei die DGL

$\dot{y}(t) = \alpha(t) \cdot y(t) + \beta(t) \cdot (y(t))^\delta$  mit  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Multiplikation mit  $(1 - \delta)y^{-\delta}$  und Substitution mit  $z(t) = (y(t))^{1-\delta}$  führt zur skalaren linearen DGL 1. Ordnung

$$\dot{z}(t) = (1 - \delta)\alpha(t)z(t) + (1 - \delta)\beta(t).$$

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Abb.  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **stetig in  $x_0 \in \mathcal{D}$** , falls

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D} : \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

Die Abb. heißt **stetig** in  $\mathcal{D}$ , falls sie in jedem Punkt in  $\mathcal{D}$  stetig ist.

**Notation.**  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig}\}$ ,  $\|f\|_\infty := \sup_{t \in I} \|f(t)\|$

**Bemerkung.**  $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  ist ein Banachraum.

**Def.** Eine Teilmenge  $A \subset X$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluss  $\bar{A}$  kompakt in  $X$  ist.

**Def.** Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banachräume. Sei  $\mathcal{D} \subset X$ . Eine Abbildung  $T : \mathcal{D} \rightarrow Y$  heißt

- **stetig in  $x \in \mathcal{D}$** , falls  $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx$  in  $Y$  für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  in  $\mathcal{D}$  gilt.
- **Lipschitz-stetig** in  $\mathcal{D}$ , falls eine Konstante  $\alpha > 0$  existiert mit

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D} : \|Tx_1 - Tx_2\|_Y \leq \alpha \cdot \|x_1 - x_2\|_X.$$

- **kontraktiv**, falls  $T$  Lipschitz-stetig mit  $\alpha < 1$  ist.
- **kompakt**, falls  $T$  stetig ist und beschränkte Mengen in  $X$  auf relativ kompakte Mengen in  $Y$  abgebildet werden, d. h. für jede beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}$  besitzt die Folge  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge.

**Bemerkung.** Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, die Umkehrung gilt aber nicht.

**Satz** (Arzelà-Ascoli). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  kompakt. Eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$  ist genau dann relativ kompakt, wenn

- $\mathcal{F}$  ist **punktweise beschränkt**, d. h.

$$\forall t \in I : \exists M : \forall f \in \mathcal{F} : \|f(t)\| \leq M$$

- $\mathcal{F}$  ist **gleichgradig stetig**, d. h.

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in I, f \in \mathcal{F} : \|t_1 - t_2\| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| < \epsilon$$

**Satz** (Fixpunktsatz von Banach). Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein Banachraum,  $\mathcal{D} \subset X$  nichtleer, abgeschlossen. Sei  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  eine Kontraktion. Dann besitzt die Fixpunktgleichung  $y = Ty$  genau eine Lösung in  $\mathcal{D}$ .

**Satz** (Fixpunktsatz von Schauder). Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein Banachraum, sei  $\mathcal{D} \subset X$  nichtleer, abgeschlossen, beschränkt, konvex. Sei  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Fixpunktgleichung  $y = Ty$  mindestens eine Lösung in  $\mathcal{D}$ .

**Satz.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Dann ist das AWP (1.1) lokal lösbar, d. h. es existiert ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $t_0 \in I$  und eine stetig diff'bare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die das AWP (1.1) erfüllt.