# Zusammenfassung Gewöhnliche DGLn

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

**Def** (Klassifikation von DGLn).

(I) **Gewöhnliche** DGL: Gesucht ist Funktion in einer Variable
**Partielle** DGL: Gesucht ist Funktion in mehreren Variablen

(II) **Ordnung** einer DGL: Höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in Gleichung vorkommt

(III) **Explizite** DGL: Gleichung der Form $y^{(k)}=f(t,y,\dot{y},...,y^{(k-1)})$
**Implizite** DGL: Allgemeinere Form $F(t,y,\dot{y},...,y^{(k)})=0$

(IV) **Skalare** DGL: Gesucht ist Funktion mit Wert in $\mathbb{R}$
**$n$-dimensionale** DGL: Gesuchte Funktion hat Wert in $\mathbb{R}^n$

(V) **Lineare** DGL: Gleichung hat die Form

$$a_k(t)y^{(k)}(t)+a_{(k-1)}(t)y^{k-1}(t)+...+a_1(t)\dot{y}(t)+a_0(t)y(t)=0$$

(VI) **Autonome** DGL: Gleichung der Form $F(y,\dot{y},...,y^{(k)})=0$ (keine Abhängigkeit von $t$, Zeitinvarianz)

**Def.** Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$ und $(t_0,y_0)\in\mathcal{D}$. Dann ist ein **Anfangswertproblem** (AWP) gegeben durch die Gleichungen

$$\dot{y}(t)=f(t,y(t)),\qquad y(t_0)=y_0. \tag{1.1}$$

**Notation.** Seien im Folgenden $I$ und $J$ stets Intervalle in $\mathbb{R}$.

**Def.**
- Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$. Eine differenzierbare Funktion $y:I\to\mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von $\dot{y}=f(t,y)$, falls für alle $t\in I$ gilt: $\dot{y}(t)=f(t,y(t))$.
- Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}\times(\mathbb{R}^n)^k=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times...\times\mathbb{R}^n$, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$. Eine $k$-mal differenzierbare Funktion $y:I\to\mathbb{R}^n$ heißt **Lösung** von
$$y^{(k)}=f(t,y,\dot{y},...,y^{(k-1)}), \tag{1.2}$$
falls für alle $t\in I$ gilt: $y^{(k)}(t)=f(t,y(t),\dot{y}(t),...,y^{(k-1)}(t))$

**Satz.**
- Ist $y:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2), dann ist
$$(y_1,...,y_k):I\to\mathbb{R}^{kn},\qquad t\mapsto(y(t),\dot{y}(t),...,y^{(k-1)}(t))$$
eine Lösung des Systems von Gleichungen
$$(1.3)\begin{cases}\dot{y}_1=y_2\\ \dot{y}_2=y_3\\ \quad\vdots\\ \dot{y}_{k-1}=y_k\\ \dot{y}_k=f(t,y_1,y_2,...,y_{k-1},y_k)\end{cases}$$
- Ist umgekehrt $(y_1,...,y_k):I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.3), dann ist $y=y_1:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.2).

**Satz.**
- Ist $y:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von AWP (1.1), dann ist
$$(y_1,y_2):I\to\mathbb{R}^{n+1},\qquad t\mapsto(y_1(t),y_2(t))=(t,y(t))$$
eine Lösung des Anfangswertproblems
$$(1.4)\begin{cases}\dot{y}_1(t)=1, & y_1(t_0)=t_0\\ \dot{y}_2(t)=f(y_1(t),y_2(t)), & y_2(t_0)=y_0\end{cases}$$
- Ist $(y_1,y_2):I\to\mathbb{R}^{n+1}$ eine Lösung von (1.4), dann ist $y=y_2:I\to\mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.1).

**Problem.** Gesucht ist eine Lösung $y:I\to\mathbb{R}$ der linearen, skalaren, expliziten DGL 1. Ordnung (mit $a,b:I\to\mathbb{R}$ stetig)

$$\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)+b(t) \tag{1.5}$$

**Satz.** Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)$ ist gegeben durch $y_h(t)=c\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)$ mit $c\in\mathbb{R}$.

**Satz.** Sei $y_p:I\to\mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung von (1.5). Dann ist die Menge aller Lösungen von (1.5) gegeben durch

$$\{y_p+y_h\mid y_h:I\to\mathbb{R}\text{ ist Lösung von }\dot{y_h}(t)=a(t)\cdot y_h(t)\}$$

*Bemerkung.* Der Ansatz mit **Variation der Konstanten** $y_p(t)=c(t)\cdot y_h(t)$ für (1.5) führt zu

$$c(t)=\frac{1}{c_0}\int_{t_0}^{t}b(\tau)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau}a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau$$
$$\Rightarrow y_p(t)=\left(\int_{t_0}^{t}b(\tau)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau}a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right)\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

**Korollar.** Die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.6)\begin{cases}\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)+b(t)\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

mit $a,b:I\to\mathbb{R}$ stetig, $t_0\in I$ und $y_0\in\mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$y(t)=\left(y_0+\int_{t_0}^{t}b(\tau)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau}a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right)\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

**Problem.** Ges. ist Lösung der DGL mit **getrennten Variablen**

$$\dot{y}(t)=g(t)\cdot h(y) \tag{1.7}$$

mit $g:I\to\mathbb{R}$ und $h:J\to\mathbb{R}$ stetig.

**Lsg.**
1. Fall: $h(y_0)=0$ für ein $y_0\in J$. Dann ist $y(t)=y_0$ eine Lsg.
2. Fall: Es gibt kein $y_0\in J$ mit $h(y_0)=0$. Sei $H$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ und $G$ eine Stammfunktion von $g$. Da $h$ stetig und nirgends null ist, ist $h$ entweder strikt positiv oder strikt negativ. Somit ist $H$ streng monoton steigend/fallend und somit umkehrbar. Eine Lösung von (1.7) ist nun gegeben durch
$$y(t)=H^{-1}(G(t)+c_0)\quad\text{mit }c_0\in\mathbb{R}.$$

**Problem.** Gesucht ist Lösung des AWP mit getrennten Variablen

$$(1.8)\begin{cases}\dot{y}(t)=g(t)\cdot h(y(t))\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

**Lsg.**
1. Fall: $h(y_0)=0$. Dann ist $y(t)=y_0$ eine Lösung.
2. Fall: $h(y_0)\neq0$. Dann ist $h$ in einer Umgebung von $y_0$ strikt positiv/negativ. Setze
$$H_1(y):=\int_{y(t_0)}^{y}\frac{1}{h(s)}\,\mathrm{d}s,\qquad G_1(t):=\int_{t_0}^{t}g(s)\,\mathrm{d}s.$$
Dann ist $H_1$ in einer Umgebung von $y_0$ invertierbar und eine Lösung von (1.8) ist gegeben durch
$$y(t)=H_1^{-1}(G_1(t)).$$

**Technik** (Transformation). Manchmal lässt sich eine DGL durch **Substitution** eines Termes in eine einfachere DGL überführen, deren Lösung mit bekannten Methoden gefunden werden kann. Die Lösung der ursprünglichen DGL ergibt sich durch Rücksubstitution.

**Bsp.** Gegeben sei die DGL $\dot{y}=f(\alpha t+\beta y+\gamma)$ mit $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\beta\neq0$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig. Substituiere $z(t)=\alpha t+\beta y(t)+\gamma$. Es ergibt sich die neue DGL $\dot{z}(t)=\beta f(z(t))+\alpha$, die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt.

**Bsp** (Bernoulli-DGL). Gegeben sei die DGL $\dot{y}(t)=\alpha(t)\cdot y(t)+\beta(t)\cdot(y(t))^\delta$ mit $\alpha,\beta:I\to\mathbb{R}$ stetig und $\delta\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Multiplikation mit $(1-\delta)y^{-\delta}$ und Substitution mit $z(t)=(y(t))^{1-\delta}$ führt zur skalaren linearen DGL 1. Ordnung

$$\dot{z}(t)=(1-\delta)\alpha(t)z(t)+(1-\delta)\beta(t).$$

**Def.** Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$. Eine Abb. $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^n$ heißt **stetig in $x_0\in\mathcal{D}$**, falls

$$\forall\,\epsilon>0:\exists\,\delta>0:\forall\,x\in\mathcal{D}:\|x-x_0\|<\delta\implies\|f(x)-f(x_0)\|<\epsilon.$$

Die Abb. heißt **stetig** in $\mathcal{D}$, falls sie in jedem Punkt in $\mathcal{D}$ stetig ist.

**Notation.** $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n):=\{f:I\to\mathbb{R}^n\mid f\text{ stetig}\}$, $\|f\|_\infty:=\sup_{t\in I}\|f(t)\|$

*Bemerkung.* $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n),\|{-}\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

**Def.** Eine Teilmenge $A\subset X$ eines topologischen Raumes $X$ heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluss $\overline{A}$ kompakt in $X$ ist.

**Def.** Seien $(X,\|{-}\|_X)$ und $(Y,\|{-}\|_Y)$ Banachräume. Sei $\mathcal{D}\subset X$. Eine Abbildung $T:\mathcal{D}\to Y$ heißt
- **stetig in $x\in\mathcal{D}$**, falls $Tx_n\xrightarrow{n\to\infty}Tx$ in $Y$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$ in $\mathcal{D}$ gilt.
- **Lipschitz-stetig** in $\mathcal{D}$, falls eine Konstante $\alpha>0$ existiert mit
$$\forall\,x_1,x_2\in\mathcal{D}:\|Tx_1-Tx_2\|_Y\leq\alpha\cdot\|x_1-x_2\|_X.$$
- **kontraktiv**, falls $T$ Lipschitz-stetig mit $\alpha<1$ ist.
- **kompakt**, falls $T$ stetig ist und beschränkte Mengen in $X$ auf relativ kompakte Mengen in $Y$ abgebildet werden, d. h. für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}$ besitzt die Folge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

*Bemerkung.* Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, die Umkehrung gilt aber nicht.

**Satz** (Arzelà-Ascoli). Sei $I\subset\mathbb{R}$ kompakt. Eine Teilmenge $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn
- $\mathcal{F}$ ist **punktweise beschränkt**, d. h.
$$\forall\,t\in I:\exists\,M:\forall\,f\in\mathcal{F}:\|f(t)\|\leq M$$
- $\mathcal{F}$ ist **gleichgradig stetig**, d. h.
$$\forall\,\epsilon>0:\exists\,\delta>0:\forall\,t_1,t_2\in I,f\in\mathcal{F}:\|t_1-t_2\|<\delta\Rightarrow\|f(t_1)-f(t_2)\|<\epsilon$$

**Satz** (Fixpunktsatz von Banach)**.** Sei $(X, \|-\|_X)$ ein Banachraum, $\mathcal{D} \subset X$ nichtleer, abgeschlossen. Sei $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ eine Kontraktion. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $y = Ty$ genau eine Lösung in $D$.

**Satz** (Fixpunktsatz von Schauder)**.** Sei $(X, \|-\|_X)$ ein Banachraum, sei $\mathcal{D} \subset X$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt, konvex. Sei $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Fixpunktgleichung $y = Ty$ mindestens eine Lösung in $\mathcal{D}$.

**Satz.** Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in D$. Dann ist das AWP (1.1) lokal lösbar, d. h. es existiert ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und eine stetig diff'bare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$, die das AWP (1.1) erfüllt.

**Def.** Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Sei $y : I \to \mathbb{R}^N$ eine Lösung des AWP (1.1).

- Eine Lösung $u : J \to \mathbb{R}^N$ heißt **Fortsetzung** (bzw. **echte Fortsetzung**) der Lösung $y$, falls $I \subset J$ (bzw. $I \subsetneq J$) und $u|_I = y$.
- Die Lösung $y$ heißt **maximale Lösung** des AWP (1.1), falls keine echte Fortsetzung von $y$ existiert. Das Intervall $I$ heißt dann **maximales Existenzintervall**.

**Satz.** Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$ stetig und $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- Jede lokale Lösung des AWP (1.1) kann zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden.
- Sei $y : I \to \mathbb{R}^N$ eine max. Lsg. des AWP (1.1). Dann ist $I$ offen.

**Def.** Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$.

- Die Funktion $f$ heißt **Lipschitz-stetig bzgl. $y$** auf $\mathcal{D}$, falls eine Konstante $\mathcal{L} > 0$ existiert, sodass
$$\forall\, (t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{D} : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \mathcal{L} \cdot \|y_1 - y_2\|.$$
- Wenn für alle $(t, y) \in \mathcal{D}$ eine Umgebung $U_{(t,y)} \subset \mathcal{D}$ existiert, sodass $f|_{U_{(t,y)}}$ Lipschitz-stetig bzgl. $y$ ist, so heißt $f$ **lokal Lipschitz-stetig bzgl. $y$** auf $\mathcal{D}$.

**Lemma.** Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^N$ stetig und stetig diff'bar nach $y$ in $\mathcal{D}$. Dann ist $f$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. $y$.

**Satz** (Picard-Lindelöf, lokal quantitativ)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ und $R_{a,b} := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b}(y_0) \subset \mathcal{D}$. Sei $f$ Lipschitz-stetig bzgl. $y$ auf $R_{a,b}$. Dann besitzt das AWP (2.1) im Rechteck $R_{a,b}$ genau eine Lösung $y : I_y \to \mathbb{R}^n$ auf $I_\gamma := [t_0 - y, t_0 + y]$ mit $\gamma = \min(a, \frac{b}{M})$ und $M = \sup\limits_{(t,y) \in R_{a,b}} \|f(t, y)\|$.

*Bemerkung.* Im Beweis des Satzes definiert man die Picard-Iterierten $u_j : I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ für $j \in \mathbb{N}$ durch
$$u_0(t) := y_0, \qquad u_{j+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_j(\tau))\, \mathrm{d}\tau.$$
Man zeigt: Die Funktionenfolge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Lösung $u_\infty : I_\gamma \to \mathbb{R}^n$ des AWP.

**Satz** (Picard-Lindelöf, lokal qualitativ)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. $y$ auf $\mathcal{D}$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann besitzt das AWP (2.1) eine eindeutige lokale Lösung, d. h. es existiert $\gamma = \gamma(t_0, y_0) > 0$, sodass das AWP (2.1) auf $I_\gamma := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$ genau eine Lösung besitzt.

**Satz** (Picard-Lindelöf, global)**.** Seien $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. $y$ auf $\mathcal{D}$, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall $I = ]a_-, a_+[$ mit $t_0 \in I$ und

- Das AWP (2.1) besitzt genau eine Lösung $\gamma$ auf $I$.
- Ist $\tilde{z} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige Lösung von (2.1) mit $t_0 \in \tilde{I}$, so gilt $\tilde{I} \subseteq I$ und $z = y|_{\tilde{I}}$.

**Satz.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Falls $f$ für jedes kompaktes Intervall $\tilde{I} \subset I$ global Lipschitz-stetig bzgl. $y$ auf $\tilde{I} \times \mathbb{R}^n$ ist, dann hat das AWP (2.1) genau eine globale Lösung $y$ auf $I$.

**Satz.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl. $y$ auf $I \times \mathbb{R}^n$, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Ist das Wachstum von $f$ linear beschränkt in $y$ auf $I \times \mathbb{R}^n$, d. h. gibt es stetige Funktionen $a, b : I \to [0, \infty[$ mit $\|f(t, y)\| \leq a(t)\|y\| + b(t)$ für alle $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$, dann besitzt das AWP (2.1) eine eindeutige Lösung auf $I$.

**Satz** (Randverhalten maximaler Lösungen)**.** Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. $y$. Sei $y : ]a_-, a_+[ \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung des AWP (2.1).

- Ist $a_+ < \infty$, so ist $y$ auf $[t_0, a_+[$ unbeschränkt oder der Rand $\partial\mathcal{D}$ ist nicht leer und $\lim\limits_{t \uparrow a_+} \operatorname{dist}((t, y(t)), \partial\mathcal{D}) = 0$.
- Ist $a_+ > -\infty$, so ist $y$ auf $]a_-, t_0]$ unbeschränkt oder der Rand $\partial\mathcal{D}$ ist nicht leer und $\lim\limits_{t \downarrow a_-} \operatorname{dist}((t, y(t)), \partial\mathcal{D}) = 0$.

**Problem.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Für $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ betrachten wir das AWP
$$(3.1) \begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

**Satz.** Sei $I \subset \mathbb{R}$, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das AWP (3.1) eine eindeutige (globale) Lösung auf $I$.

**Notation.** $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{u : I \to \mathbb{R}^n \mid u \text{ stetig}\}$

**Def.** Eine Teilmenge $M \subset V$ eines Vektorraums $V$ heißt **affiner Teilraum**, wenn es ein $y \in V$ und einen Unterraum $U \subset V$ mit $M = y + U := \{y + U \mid u \in U\}$ gibt.

**Satz.** Seien $I \subset \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Setze
$$U_h := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \text{ auf } I\}.$$
Dann ist $U_h$ ein $n$-dimensionaler UVR von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ und für Funktionen $y_1, ..., y_m \in U_h$ sind äquivalent:

- $y_1, ..., y_m$ sind linear unabhängig in $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- Es gibt $t^* \in I$, sodass $y_1(t^*), ..., y_m(t^*)$ linear unabh. in $\mathbb{R}^n$ sind.
- Für alle $t \in I$ sind $y_1(t), ..., y_m(t)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$.

**Def.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Eine Menge $y_1, ..., y_n$ von linear unabhängigen Lösungen von $\dot{y} = A(t) \cdot y$ heißt ein **Fundamentalsystem** und $(y_1, ..., y_n)$ **Fundamentalmatrix** der DGL.

**Satz.** Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig.

- Jede Fundamentalmatrix von $\dot{y} = A(t)y$ ist invertierbar f. a. $t \in I$.
- Jede Fundamentalmatrix $Y : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ ist stetig differenzierbar.
- Die globale eindeutige Lösung von
$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
ist gegeben durch $y(t) = Y(t)\,(Y(t_0))^{-1}\, y_0$.

**Satz.** Seien $I \subseteq \mathbb{R}$, $A : \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig, $U_h$ wie oben und $U := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y} = A(t)y + f\}$. Dann gilt:

- $U$ ist nicht leer.
- Ist $y_p \in U$ eine partikuläre Lösung, dann ist $U = y_p + U_h$, d. h. $U$ ist affiner Unterraum von $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.
- Sei $y_p, \tilde{y}_p \in U$, dann ist $y_p - \tilde{y}_p \in U_h$.

**Satz** (Variation der Konstanten)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $Y(t)$ die Fundamentalmatrix. Dann gilt:

- Eine partikuläre Lösung von $\dot{y} = A(t)y + f(t)$ ist gegeben durch
$$y_p(t) := \int_{t_0}^{t} Y(t)(Y(s))^{-1} f(s)\, \mathrm{d}s \quad t_0 \in I.$$
- Es gilt $U = \{\int_{t_0}^{t} Y(t)(Y(s))^{-1} f(s)\, \mathrm{d}s + Y(t)c \mid c \in \mathbb{R}^n\}$
- Die globale eindeutige Lsg vom AWP (3.1) ist gegeben durch
$$y(t) := Y(t)(Y(t_0))^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t} Y(t)(Y(s))^{-1} f(s)\, \mathrm{d}s, \quad t \in I.$$