

# Zusammenfassung Homologische Algebra

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

## Kategorientheorie

*Bem.* Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie.

**Def.** Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **lokal klein**, wenn  $\text{Hom}(X, Y)$  für alle  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  eine Menge (keine echte Klasse) ist. Sie heißt **klein**, wenn auch die Klasse ihrer Objekte eine Menge ist. Sie heißt **endlich**, wenn Objekt- und Hom-Mengen sogar nur endlich sind.

**Def.** Sei  $\mathbf{Cat}$  die Kategorie mit kleinen Kategorien als Objekten und Funktoren als Morphismen.

**Def.** Eine Kategorie  $\mathcal{D}$  heißt **Unterkategorie** einer Kategorie  $\mathcal{C}$  (notiert  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ ), wenn für alle geeigneten  $X, Y, f, g$  gilt:

$\text{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C}), \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  und  $f \circ_{\mathcal{D}} g = f \circ_{\mathcal{C}} g$ .

**Def.** Eine Unterkategorie  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$  heißt **voll**, wenn

$$\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{D}) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

**Def.** Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt ...

- ... **treu**, wenn für alle  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  die Abbildung  $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$  injektiv ist.
- ... **voll**, wenn diese Abb. für alle  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  surjektiv ist.

*Bem.* Die Einbettung einer (vollen) Unterkategorie ist ein (voll-)treuer Funktor.

- Def.**
- Ein Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  heißt **initiales Objekt**, falls für alle  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  genau ein Morphismus  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  existiert.
  - Ein Objekt  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  heißt **terminales Objekt**, falls für alle  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  genau ein Morphismus  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  existiert.

**Def.** Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist ein **Kategorienäquivalenz**, falls es einen Funktor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $F \circ G \simeq \text{Id}_{\mathcal{D}}$  und  $G \circ F \simeq \text{Id}_{\mathcal{C}}$  gibt. Die Funktoren  $F$  und  $G$  heißen dann zueinander **quasiinvers** und die Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  äquivalent.

**Prop.**  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist genau dann eine Kategorienäquivalenz, wenn:

- $F$  ist volltreu, •  $\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{D}) : \exists X \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : Y \cong F(X)$

**Bsp.** Sei  $B$  ein lokal wegzshgder, semi-lokal einfach zshgder topol. Raum. Dann ist die Kategorie  $\text{Cov}(B)$  der Überlagerungen von  $B$  äquivalent zur Kategorie  $[\pi(B), \mathbf{Set}]$  der Mengen-wertigen Funktoren auf dem Fundamentalgruppoid von  $B$ . Dabei ist

$$F : \text{Cov}(B) \rightarrow [\pi(B), \mathbf{Set}], \quad F(p : \tilde{B} \rightarrow B) := G_{\tilde{B}, p}, \\ G_{\tilde{B}, p}(b \in B) := p^{-1}(b), \quad G_{\tilde{B}, p}(\gamma : [0, 1] \rightarrow B)(\tilde{b} \in p^{-1}(\gamma(0))) := \tilde{\gamma}(1), \\ \text{mit } \tilde{\gamma} \text{ Liftung von } \gamma \text{ mit } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{b}.$$

**Def.** Zwei Ringe  $A$  und  $B$  heißen **Morita-äquivalent**, wenn ihre Kategorien der (Links/Rechts)-Moduln äquivalent sind.

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Der **kontravariante Hom-Funktor**  $h_X : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  ist definiert durch

$$h_X(Y) := \text{Hom}(Y, X), \quad h_X(h : Y' \rightarrow Y)(g : Y \rightarrow X) := g \circ h.$$

Allgemeiner gibt es den Funktor  $\text{Hom} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  mit

$$\text{Hom}(h : Y' \rightarrow Y, f : X \rightarrow X')(g : Y \rightarrow X) := f \circ g \circ h.$$

**Notation.**  $\hat{\mathcal{C}} := [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$

**Def.** Ein Element  $x \in X(Y) := \text{Hom}(Y, X)$  heißt **Y-Element** von  $X$ .

**Def.** Ein Funktor  $F \in \text{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$  wird **dargestellt** durch  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , falls  $F \cong h_X$ . Er heißt **darstellbar**, falls ein solches  $X$  existiert.

**Def.** Die **Yoneda-Einbettung** ist der Funktor

$$Y : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}, \quad X \mapsto h_X, \quad \phi \mapsto (\phi \circ - : X(Y) \rightarrow X'(Y))_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}.$$

**Lemma (Yoneda).** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Es gibt es eine nat. Bij.

$$\text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \cong F(X) \quad \text{für alle } X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), F \in \hat{\mathcal{C}}.$$

**Korollar.** Die Yoneda-Einbettung ist volltreu und liefert eine Kategorienäquivalenz von  $\mathcal{C}$  und der vollen Unterkategorie der darstellbaren Funktoren in  $\hat{\mathcal{C}}$ .

**Korollar.** Ein darstellbarer Funktor wird von genau einem Objekt dargestellt (bis auf Isomorphie).

**Def.** Das **Produkt** von  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ist ein Obj.  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , das  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad U \mapsto X(U) \times Y(U), \quad \phi \mapsto ((-\circ \phi) \times (-\circ \phi))$  darstellt.

*Bem.* Diese Definition ist äquivalent zur folgenden: Das Produkt von  $X, Y$  ist  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  zusammen mit Morphismen  $p_X : Z \rightarrow X$  und  $p_Y : Z \rightarrow Y$ , wenn für alle  $Z' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit Morphismen  $p'_X : Z' \rightarrow X$  und  $p'_Y : Z' \rightarrow Y$  genau ein  $f : Z' \rightarrow Z$  mit  $p'_X = p_X \circ f$  und  $p'_Y = p_Y \circ f$  existiert.

**Def.** Seien  $\phi : X \rightarrow S$  und  $\psi : Y \rightarrow S$  Abb. von Mengen. Das Faserprodukt von  $X$  und  $Y$  über  $S$  ist

$$X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid \phi(x) = \psi(y)\}.$$

**Def.** Sei  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S)$  und  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, S)$ . Das **Faserprodukt** von  $X$  und  $Y$  über  $S$  ist ein Obj. in  $\mathcal{C}$ , das den Funktor  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad U \mapsto X(U) \times_{S(U)} Y(U)$  darstellt.

*Bem.* Das Faserprodukt von  $X$  und  $Y$  über  $S$  ist das Produkt von  $X \xrightarrow{\phi} S$  und  $Y \xrightarrow{\psi} S$  in der Scheibenkategorie  $\mathcal{C}/S$ .

**Def.** Eine **Gruppenstruktur** auf einem Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ist gegeben durch Gruppenstrukturen auf  $\text{Hom}(Y, X)$  für alle  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und Gruppenmorphismen  $\text{Hom}(Y, X) \rightarrow \text{Hom}(Y', X)$  für jeden Morphismus  $\phi : Y' \rightarrow Y$  (die die offensichtlichen Axiome erfüllen).

*Bem.* Falls  $\mathcal{C}$  ein term. Obj. 1 und die Produkte  $X \times X$  und  $X \times X \times X$  besitzt, dann ist eine Gruppenstr. auf  $X$  geg. durch Morphismen

$m : X \times X \rightarrow X$  (Mult.),  $i : X \rightarrow X$  (Inv.),  $e : 1 \rightarrow X$  (Einheit), die die offensichtlichen Axiome erfüllen.

**Def.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  ein Morphismus.

- $f$  heißt **Monomorphismus**, wenn  $f$  linkskürzbar ist, d. h.  $\forall X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : \forall g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) : f \circ g = f \circ h \implies g = h$ .
- $f$  heißt **Epimorphismus**, wenn  $f$  rechtskürzbar ist, d. h.  $\forall Y' \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : \forall g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y') : g \circ f = h \circ f \implies g = h$ .

**Def.** Sei  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ein Objekt. Auf der Klasse der Monomorphismen  $(i : U \rightarrow X) \in \mathcal{C}$  von einem Objekt  $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  nach  $X$  ist durch  $(U, i) \leq (U', i') : \iff \exists f : U' \rightarrow U : i' = i \circ f$

eine Präordnung definiert. Ein **Unterobjekt** von  $X$  ist eine Äquivalenzklasse dieser Präordnung, also von der Äq'-relation

$$x \sim y : \iff x \leq y \wedge y \leq x.$$

**Def.** Eine Kategorie heißt **well-powered**, wenn die Präordnung der Unterobjekte von jedem Obj. eine Menge (nicht nur eine Klasse) ist.

## (Ko-)Limiten

**Def.** Seien  $\mathcal{J}, \mathcal{C}$  Kat'en. Der **Diagonal-Funktor**  $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{J}, \mathcal{C}]$  ist  $(\Delta X)(J \in \text{Ob}(\mathcal{J})) := X, \quad (\Delta X)(\phi) := \text{id}_X, \quad (\Delta f)_{J \in \text{Ob}(\mathcal{J})} := f$ .

**Def.** Seien  $\mathcal{J}, \mathcal{C}$  Kategorien,  $\mathcal{J}$  klein. Der **(projekte) Limes** eines Funktors  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  ist ein Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , das den Funktor

$$G \in \hat{\mathcal{C}}, \quad G(Y) := \text{Hom}_{[\mathcal{J}, \mathcal{C}]}(\Delta Y, F), \quad G(f)(\eta) := \eta \circ \Delta f$$

darstellt. Man notiert  $X = \varinjlim F$ .

**Def.** Ein **Möchtegern-Limes** eines Funktors  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  ist ein Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  mit Projektionsabbildungen  $f_J : X \rightarrow F(J)$  für alle  $J \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ , sodass  $\forall h \in \text{Hom}_{\mathcal{J}}(J, I) : f_I = F(h) \circ f_J$ .

*Bem.* Der Limes  $X$  ist durch folgende **universelle Eigenschaft** charakterisiert: Er ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Möchtegern-Limiten, d. h. er ist ein Möchtegern-Limes und für jeden weiteren Möchtegern-Limes  $X'$  gibt es genau einen Morphismus  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$  mit  $\forall J \in \text{Ob}(\mathcal{J}) : f'_J = f_J \circ g$ .

*Bem.* Die univ. Eigenschaft zeigt: Der Limes ist funktoriell, d. h. wenn in  $\mathcal{C}$  alle  $\mathcal{J}$ -Limiten (d. h. Limiten von Funktoren  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ) existieren, dann gibt es einen Funktor  $\varinjlim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}$ .

*Bem.* Folgende Konzepte lassen sich als Spezialfall des Limes über eine spezielle Indexkategorie  $\mathcal{J}$  auffassen:

Konzept	Indexkategorie $\mathcal{J}$
Terminales Objekt	$\emptyset$ (leere Kategorie)
Produkt	$\mathbf{2} := \{0, 1\}$ (kein nichttrivialer Morphismus)
Faserprodukt	$1 \rightarrow 0 \leftarrow 2$ (zwei nichttriviale Morphismen)
<b>Differenzkern</b>	$0 \rightrightarrows 1$ (zwei nichttriviale Morphismen)

**Def.** Sei  $\mathcal{J}$  klein. Der **Kolimes** / **induktive Limes** eines Funktors  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  ist ein Objekt  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$ , das den Funktor

$G \in \mathcal{C}^{\text{op}} = [\mathcal{C}, \mathbf{Set}], \quad G(Y) := \text{Hom}_{[\mathcal{J}, \mathcal{C}]}(F, \Delta Y), \quad G(f)(\eta) := \Delta f \circ \eta$  darstellt. Man notiert  $X = \varinjlim F$ .

*Bem.* Der Kolimes von  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  ist der Limes von  $F^{\text{op}} : \mathcal{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ .

*Bem.* Wenn in  $\mathcal{C}$  alle  $\mathcal{J}$ -Kolimiten existieren, dann gibt es einen Funktor  $\varinjlim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}$ .

*Bem.* Folgende Konzepte sind ein Spezialfall des Kolimes:

Konzept	Indexkategorie $\mathcal{J}$
Initiales Objekt	$\emptyset$ (leere Kategorie)
<b>Koprodukt</b>	$\mathbf{2} := \{0, 1\}$ (kein nichttrivialer Morphismus)
<b>Kofaserprodukt</b>	$1 \rightarrow 0 \leftarrow 2$ (zwei nichttriviale Morphismen)
<b>Kodifferenzkern</b>	$0 \rightrightarrows 1$ (zwei nichttriviale Morphismen)

**Satz.** Angenommen, eine Kategorie  $\mathcal{C}$  enthält ein term. Objekt, den Differenzkern von allen parallelen Morphismen  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  und das Produkt  $X \times Y$  von allen Paaren von Objekten. Dann existieren alle endlichen Limiten in  $\mathcal{C}$ , d. h. der Limes von jedem Funktor  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ , wobei  $\mathcal{J}$  endlich ist. Duales gilt für endl. Kolimiten mit initialem Obj., Kodifferenzkern und Koprodukten.

**Korollar.** In **Set** existieren alle endlichen Limiten und Kolimiten.

*Bem.* Angenommen, in  $\mathcal{C}$  existieren alle  $\mathcal{J}$ -Limiten. Sei  $\mathcal{I}$  eine bel. Kategorie. Dann ex. alle  $\mathcal{J}$ -Limiten in  $[\mathcal{I}, \mathcal{C}]$  und die Limiten werden objektweise berechnet: Sei  $F : \mathcal{J} \rightarrow [\mathcal{I}, \mathcal{C}]$  ein Funktor, dann ist

$$(\varinjlim F)(I) = \varinjlim (F(-)(I)), \quad (\varinjlim F)(f) = \varinjlim (F(-)(f)).$$

**Def.** Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt **stetig**, wenn er **Limiten bewahrt**, d. h. für alle Funktoren  $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$  (mit  $\mathcal{J}$  klein) mit  $\varinjlim D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ex. auch der Limes von  $F \circ G$  in  $\mathcal{D}$  und es gilt

$$\varinjlim (F \circ D) \cong F(\varinjlim D).$$

Ein Funktor  $F$  heißt **kostetig**, wenn er **Kolimiten bewahrt**.

**Def.** Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **(ko-)vollständig**, wenn alle kleinen (Ko-)Limiten (d. h. (Ko-)Limiten von Funktoren  $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$  mit einer kleinen Kategorie  $\mathcal{J}$ ) in  $\mathcal{C}$  existieren.

**Bspe.** Vollständig sind: **• Set**, **• Grp**, **• Ab**, **• Top**, **• k-Vect**.

## Adjunktionen

**Def.** Ein Funktor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt **linksadjungiert** zum Funktor  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , wenn es einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))$$

gibt (dabei sind beide Seiten Funktoren  $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ ). Dann heißt  $G$  auch **rechtsadjungiert** zu  $F$ . Man notiert  $F \dashv G$ .

*Bem.* Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor. Dann besitzt  $F$  genau dann einen Rechtsadjungierten  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , wenn für alle  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  der Funktor

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y), \quad f \mapsto (- \circ F(f))$$

darstellbar ist, d. h. es existiert  $GY \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und Isomorphismen

$$a_X^Y : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

mit  $\forall \phi \in \text{Hom}(X', X) : a_{X'}^Y(- \circ F(\phi)) = a_X^Y(-) \circ \phi$ . Dann ist  $G$  auf Morphismen definiert durch

$$G(f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')) := a_{GY'}^{Y'}(f \circ (a_{GY}^Y)^{-1}(\text{id}_{GY})).$$

*Bem.* Sei  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  linksadjungiert zu  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ . Setze

$$\eta_X := a_X^{FX}(\text{id}_{FX}) : X \rightarrow GFX,$$

$$\epsilon_Y := (a_{GY}^Y)^{-1}(\text{id}_{GY}) : FGY \rightarrow Y.$$

Dann sind  $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$  (genannt **Einheit**) und  $\epsilon : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  (genannt **Koeinheit**) natürliche Transformationen und es gilt

$$(G \xrightarrow{\eta_G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G) = \text{id}_G, \quad (F \xrightarrow{\epsilon_F} FGF \xrightarrow{F\eta} F) = \text{id}_F.$$

Umgekehrt definieren zwei solche natürliche Transformationen  $\eta$  und  $\epsilon$ , die diese Gleichungen erfüllen, eine Adjunktion zwischen  $F$  und  $G$ . Dabei ist  $\eta_X$  universell unter den Morphismen von  $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  zu einem Objekt der Form  $GY$ : Für alle  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, GY)$  gibt es genau ein  $h \in \text{Hom}(FX, Y)$  mit  $f = G(h) \circ \eta_X$ , und zwar  $h = (a_X^Y)^{-1}(f)$ . Duales gilt für  $\epsilon_Y$ .

**Lemma** (Verknüpfung von Adjunktionen).

Sei  $F_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  zu  $G_1 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  und  $F_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  zu  $G_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$  linksadj. Dann ist  $F_2 \circ F_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$  zu  $G_1 \circ G_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$  linksadjungiert.

**Lemma** (Eindeutigkeit des adjungierten Funktors).

- Gelte  $F \dashv G_1$  und  $F \dashv G_2$ . Dann sind  $G_1$  und  $G_2$  nat. isomorph.
- Gelte  $F_1 \dashv G$  und  $F_2 \dashv G$ . Dann sind  $F_1$  und  $F_2$  nat. isomorph.

*Bem.* Sei  $(F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \dashv (G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C})$  eine Adjunktion und  $\mathcal{J}$  klein. Dann gibt es eine ind. Adjunktion  $(F \circ - : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \rightarrow [\mathcal{J}, \mathcal{D}]) \dashv (G \circ -)$ .

**Bspe.** **•** Angenommen, in  $\mathcal{C}$  existieren  $\mathcal{J}$ -Limiten bzw.

$\mathcal{J}$ -Kolimiten. Dann gibt es eine Adjunktion  $\Delta \dashv \varinjlim$  bzw.  $\varinjlim \dashv \Delta$ .

- Sei  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$  der Funktor, der die freie Gruppe über einer Menge bastelt und  $V : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  der Vergiss-funktor. Dann gilt  $F \dashv V$ . Gleiches gilt für viele weitere „freie“ Konstruktionen.
- Sei **KHaus** die Kat. der kompakten Hausdorffräume und  $K : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{KHaus}$  die Stone-Čech-Kompaktifizierung und  $I : \mathbf{KHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  die Inklusion. Dann gilt  $K \dashv I$ .

**Def.** Im Spezialfall, dass  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Präordnungskategorien sind, wird ein Paar von adjungierten Funktoren (d. h. monotonen Abbildungen) zwischen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  auch **Galoisverbindung** genannt.

**Bspe.** **•**  $([-] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}) \dashv (i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}) \dashv ([-] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z})$

- Sei  $L \supset K$  eine endl. Körpererweiterung. Für eine Zwischenerw.  $L \supseteq M \supseteq K$  sei  $\text{Gal}(L, M) := \{f \in \text{Aut}(L) \mid f|_M = \text{id}_M\}$  die Galoisgruppe von  $L$  über  $M$ . Dann ist

$$\{ \text{Untergruppen von } \text{Gal}(L, K) \} \leftrightarrow \{ \text{Zwischenerw. } L \supseteq M \supseteq K \}$$

$$G \mapsto \{x \in L \mid \forall \sigma \in G : \sigma(x) = x\}$$

$$\text{Gal}(L, M) \leftarrow M$$

eine Galoisverbindung (dabei sind Untergruppen durch Inklusion und Zwischenerweiterungen umgekehrt durch Inklusion geordnet).

**Lemma.** Sei  $F \dashv G$  eine Adjunktion. Dann gilt:

- $F$  bewahrt Kolimiten (**LAPC**, left-adjoints preserve colimits).
- $G$  bewahrt Limiten (**RAPL**, right-adjoints preserve limits).

**Beweis** (RAPL). Sei  $\mathcal{J}$  eine kleine Indexkategorie. Es gilt:

$$(F \circ -) \circ (\Delta : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{J}, \mathcal{C}]) \dashv (\varinjlim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}) \circ (G \circ -),$$

$$(\Delta : \mathcal{D} \rightarrow [\mathcal{J}, \mathcal{D}]) \circ F \dashv G \circ (\varinjlim : [\mathcal{J}, \mathcal{D}] \rightarrow \mathcal{D}).$$

Da  $(F \circ -) \circ \Delta \equiv \Delta \circ F$ , folgt aus der Eindeutigkeit des Rechtsadjungierten  $\varinjlim(G \circ D) \cong G(\varinjlim D)$  natürlich in  $D$ .

*Bem.* Sei umgekehrt  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  ein stetiger Funktor. Unter gewissen Bedingungen an die Größe der Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  besitzt dann  $G$  einen Linksadjungierten:

- Def.** **•** Ein **Koerzeuger** einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein Objekt  $S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , für das der Funktor  $h_S : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  treu ist.
- Eine **koerzeugende Menge** von  $\mathcal{C}$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{S}$  von  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , für die der Funktor  $h_{\mathcal{S}} := \prod_{S \in \mathcal{S}} h_S$  treu ist.

**Lemma.** Ein stetiger Funktor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  hat einen Linksadj., wenn:

- General Adjoint Functor Theorem:  $\mathcal{D}$  ist vollständig und lokal klein und  $G$  erfüllt die Lösungsmengen-Bedingung:

$$\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : \exists I \text{ Menge} : \exists (f_i : X \rightarrow G(Y_i))_{i \in I} :$$

$$\forall (g : X \rightarrow Z) \in \mathcal{C} : \exists i \in I, h : G(Y_i) \rightarrow Z : g = h \circ f_i.$$

- Special Adjoint Functor Theorem (**SAFT**):  
 $\mathcal{D}$  ist vollständig, well-powered (damit automatisch lokal klein), besitzt eine kleine koerzeugende Menge und  $\mathcal{C}$  ist lokal klein.

**Def.** Eine **monoidale Kategorie**  $\mathcal{C}$  besitzt einen Funktor  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  (genannt Tensorprodukt), ein Objekt  $1 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  und natürliche Isomorphismen (die zwei Kohärenzbedingungen erfüllen)

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \cong X \otimes (Y \otimes Z), \quad \lambda_X : 1 \otimes X \cong X, \quad \rho_X : X \otimes 1 \cong X.$$

**Def.** Sei  $(\mathcal{C}, \otimes)$  eine monoidale Kategorie. Ein **interner Hom-Funktor** ist ein Funktor  $[-, -] : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , für den gilt: für alle  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  der Funktor  $- \otimes X$  linksadjungiert zu  $[X, -]$  ist, d. h.

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes X, Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, [X, Z]).$$

**Notation.**  $[X, Y] =: Y^X$  heißt auch **Exponentialobjekt**.

**Def.** Eine monoidale Kategorie heißt **kartesisch abgeschlossen**, wenn sie einen internen Hom-Funktor besitzt.

**Bspe.** **Set**, **Ab**, **k-Vect** und **Cat** sind kartesisch abgeschl.

# Simpliziale Mengen

**Def.** **Verklebedaten** sind gegeben durch einen Funktor

$$X : \Delta_{\text{strikt}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Dabei ist  $\Delta_{\text{strikt}}$  die Kategorie mit den Mengen  $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$  für  $n \in \mathbb{N}$  als Objekten und streng monotonen Abbildungen.

**Notation.**  $X_{(n)} := X([n])$  heißt Menge der  $n$ -Simplizes.

**Def.** Das **Standard- $n$ -Simplex**  $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist die von den  $(n+1)$  Standardbasisvektoren aufgespannte affin-lineare Hülle. Eine streng monotone Abb  $f : [n] \rightarrow [m]$  induziert durch Abbilden des  $i$ -ten Basisvektors auf den  $f(i)$ -ten eine Inklusion  $\Delta_f : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$ ,

**Def.** Die **geometrische Realisierung** von Verklebedaten  $X$  ist der topologische Raum

$$|X| := \left( \coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R$$

Dabei ist  $X_{(n)}$  diskret. Die Äquivalenzrelation  $R$  wird erzeugt von  $(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x))$  mit  $t \in \Delta_m$ ,  $x \in X_{(n)}$ ,  $f : [m] \rightarrow [n]$  s.m.s.

**Def.** Das  **$k$ -Skelett**  $\text{sk}_k X$  von Verklebedaten  $X$  ist definiert durch  $(\text{sk}_k X)_{(n)} := \{x \in X_{(n)} \mid n \leq k\}$ ,  $(\text{sk}_k X)(f) := X(f)$  sofern möglich

**Def.** Eine **simpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Dabei ist  $\Delta$  die Kategorie mit den Mengen  $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$  für  $n \in \mathbb{N}$  als Objekten und monotonen Abbildungen.

**Notation.**  $X_n := X([n])$  heißt Menge der  $n$ -Simplizes.

**Def.** Eine **simpliziale Abbildung** zw. simpl. Mengen  $X$  und  $Y$  ist eine nat. Transformation zwischen den Funktoren  $X, Y : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

**Def.** Die Kategorie der simplizialen Mengen ist  $\mathbf{sSet} := [\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ .

**Def.** Die **geometrische Realisierung** einer simplizialen Menge  $X$  ist der topologische Raum

$$|X| := \left( \coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n) \right) / R$$

Die Äquivalenzrelation  $R$  wird dabei erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m, x \in X_n \text{ u. } f \in \text{Hom}_{\Delta}([m], [n]).$$

**Def.** Ein topologischer Raum heißt **trianguliert**, wenn er die Realisierung von Verklebedaten ist.

**Def.** Der **Nerv** einer Überdeckung  $X = \cup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$  eines topologischen Raumes ist die simpliziale Menge

$$X_n := \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in A^{n+1} \mid U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\}$$

$$X(f)(\alpha_0, \dots, \alpha_n) := (\alpha_{f(0)}, \dots, \alpha_{f(n)}) \quad \text{für } f : [m] \rightarrow [n].$$

*Bem.* Falls die Überdeckung lokal endlich ist und alle nichtleeren, endlichen Schnitte  $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}$  zusammenziehbar sind, so ist die geom. Realisierung des Nerves der Überdeckung homotopieäq. zu  $X$ .

**Def.** Sei  $Y$  ein topol. Raum. Die simpliziale Menge  $X$  der **singulären Simplizes** in  $Y$  ist

$$X_n := \{\text{stetige Abb. } \sigma : \Delta_n \rightarrow Y\}, \quad X_n(f)(\sigma) := \sigma \circ \Delta_f.$$

*Bem.* Diese Konstruktion stiftet eine Funktor  $\text{Sing} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$ .

**Def.**  $\Delta[p]_n := \{g : [n] \rightarrow [p] \text{ monoton steigend}\}$ ,  $\Delta[p](f)(g) := g \circ f$

**Def.** Der **klassifizierende Raum** einer Gruppe  $G$  ist gegeben durch die Realisierung der simpl. Menge  $BG$  mit  $(BG)_n := G^n$  und

$$BG(f : [m] \rightarrow [n])(g_1, \dots, g_n) := (h_1, \dots, h_m), \quad h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j.$$

**Def.** Ein  $n$ -Simplex  $x \in X_n$  heißt **degeneriert**, falls eine monotone surjektive Abbildung  $f : [n] \rightarrow [m]$ ,  $n > m$  und ein Element  $y \in X_m$  existiert mit  $x = X(f)(y)$ .

**Def.** Seien  $X$  Verklebedaten. Wir konstruieren eine dazugehörige simpliziale Menge  $\tilde{X}$  wie folgt:

$$\tilde{X}_n := \{(x, g) \mid x \in X_{(k)}, g : [n] \rightarrow [k] \text{ monoton und surjektiv}\},$$

Für eine monotone Abbildung  $f : [m] \rightarrow [n]$  und  $(x, g) \in \tilde{X}_n$  schreiben wir zunächst  $g \circ f = f_1 \circ f_2$  mit einer Injektion  $f_1$  und einer Surjektion  $f_2$  und setzen  $\tilde{X}(f)(x, g) := (X(f)(x), f_2)$ .

**Prop.** Eine simpliziale Menge  $\tilde{X}$  kann genau dann aus (dann eindeutigen) Verklebedaten gewonnen werden, falls für alle nicht-degenerierten Simplizes  $x \in \tilde{X}_n$  und streng monotonen Abbildungen  $f : [m] \rightarrow [n]$  auch  $\tilde{X}(f)(x) \in \tilde{X}_m$  nicht degeneriert ist.

**Prop.** Seien  $X$  Verklebedaten,  $\tilde{X}$  die entsprechende simpliziale Menge. Dann gilt  $|X| \approx |\tilde{X}|$ .

**Def.** Das  **$k$ -Skelett**  $\text{sk}_k X$  einer simplizialen Menge  $X$  ist geg. durch

$$(\text{sk}_k X)_n := \{X(f)(x) \mid p \leq k, f : [n] \rightarrow [p] \text{ monoton}, x \in X_p\}.$$

**Def.** Eine simpliziale Menge  $X$  hat **Dimension**  $n$ , falls  $X = \text{sk}_n X$ .

**Prop.** Geom. Realisierung ist ein Funktor  $|-| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ .

**Bspe.** • Eine Überdeckung  $(U_{\alpha})_{\alpha \in A}$  eines topologischen Raumes ist Verfeinerung von  $(V_{\beta})_{\beta \in B}$ , wenn es eine Abbildung  $\psi : A \rightarrow B$  gibt, sodass  $U_{\alpha} \subset V_{\psi(\alpha)}$  für alle  $\alpha \in A$ . Dies induziert eine simpliziale Abb. zwischen den Nerven der Überdeckungen durch

$$F_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n) := (\psi(\alpha_0), \dots, \psi(\alpha_n)).$$

• Ein Gruppenhomomorphismus  $\phi : G \rightarrow H$  stiftet eine Abbildung  $BG \rightarrow BH$  zwischen den klassifizierenden Räumen durch

$$F(g_1, \dots, g_n) := (\phi(g_1), \dots, \phi(g_n)).$$

**Def.** Ein **simplizialer topologischer Raum** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}.$$

*Bem.* Die geometrische Realisierung eines simplizialen topol. Raumes ist definiert wie die einer simplizialen Menge mit dem Unterschied, dass  $X_n$  im Allg. nicht die diskrete Topologie trägt.

**Def.** Eine **bisimpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

**Notation.**  $X_{nm} := X([n], [m])$

**Bsp.** Das **direkte Produkt** von simplizialen Mengen  $X$  und  $Y$  ist die bisimpliziale Menge

$$(X \times Y)_n := X_n \times Y_n, \quad (X \times Y)(f, g)(x, y) := (f(x), g(y)).$$

**Def.** Die **Diagonale**  $DX$  einer bisimplizialen Menge  $X$  ist die simpliziale Menge mit  $(DX)_n := X_{nn}$  und  $DX(f) := X(f, f)$ .

**Def.** Sei  $X$  eine bisimpliziale Menge.

- Setze  $|X|^D := |DX|$ .
- Definiere einen simplizialen topologischen Raum  $X^I$  durch

$$X_n^I := |X_{\bullet n}|, \quad X^I(g) := |X(\text{id}, g)|.$$

$$\text{Setze } |X|^{I, II} := |II, I|.$$

- Definiere analog  $|X|^{II, I}$ .

**Satz (Eilenberg-Zilber).**  $|X|^D \cong |X|^{I, II} \cong |X|^{II, I}$  kanonisch.

**Def.** Der **Nerv**  $\mathcal{NC}$  einer kleinen Kategorie  $\mathcal{C}$  ist die simpl. Menge

$$\mathcal{NC}_n := \{ \text{Diagramme } X_0 \xrightarrow{\varphi_1} X_1 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_n} X_n \text{ in } \mathcal{C} \}$$

$$\mathcal{NC}(f : [m] \rightarrow [n])(X_0 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \xrightarrow{\varphi_n} X_n) := (Y_0 \xrightarrow{\psi_1} \dots \xrightarrow{\psi_m} Y_m)$$

mit  $Y_i := X_{f(i)}$ ,  $\psi_i := \varphi_{f(i)} \circ \dots \circ \varphi_{f(i-1)+1}$

**Bsp.**  $\Delta[n] = \mathcal{NC}(\text{Präordnungskategorie mit Objekten } \{0, \dots, n\})$

*Bem.* • Der Nerv ist volltreuer Funktor  $\mathcal{NC} : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{sSet}$ .

- Jede kleine Kat. kann aus ihrem Nerv zurückgewonnen werden.
- $\mathcal{N}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = D(\mathcal{NC} \times \mathcal{ND})$

*Bem.* Mit  $X * Y := D(X \times Y)$  ist  $\mathbf{sSet}$  eine monoidale Kategorie.

**Prop.**  $\mathbf{sSet}$  ist kartesisch abgeschlossen. Dabei ist

$$[X, Y]_n = (Y^X)_n := \text{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n] * X, Y).$$

**Prop.** Der Nervfunktor ist verträglich mit dem internen Hom: Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  kleine Kategorien. Dann ist

$$\mathcal{N}([\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\mathbf{Cat}}) \cong [\mathcal{NC}, \mathcal{ND}]_{\mathbf{sSet}}.$$



# Garben

- Def.** • Eine mengenwertige **Prägarbe**  $\mathcal{F}$  auf einem topol. Raum  $X$  ist ein Funktor  $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Dabei ist  $\mathbf{Ouv}(X)$  die Präordnungs-Kategorie der offenen Teilmengen von  $X$  geordnet durch Inklusion.
- Allgemeiner ist eine  $\mathcal{C}$ -wertige Prägarbe ein Funktor  $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  (z. B.  $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}, \mathbf{R-Mod}, \mathbf{Top}$ ).
  - Ein Morphismus zwischen Prägarben  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  auf demselben topol. Raum ist eine natürliche Transformation zwischen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ .

**Notation.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe

- $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$  heißt Menge der **Schnitte** von  $\mathcal{F}$  über  $U$ .
- $r_{UV} := \mathcal{F}(V \subseteq U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  heißt **Restriktionsabb.**
- $x|_V := r_{UV}(x)$  für  $V \subseteq U$  und  $x \in \mathcal{F}(U)$  heißt **Einschränkung** von  $x$  auf  $V$ .

**Def.** Eine **Garbe** auf einem topol. Raum  $X$  ist eine Prägarbe  $\mathcal{F}$ , für die gilt: Für alle Familien  $(U_i)_{i \in I}$  von offenen Teilmengen und Schnitten  $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$ , die miteinander verträglich sind, d. h.

$$\forall i, j \in I : s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j},$$

gibt es genau einen Schnitt  $s \in \mathcal{F}(\cup_{i \in I} U_i)$  mit  $\forall i \in I : s_i = s|_{U_i}$ . Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismen zw. den Prägarben.

*Bem.* Sei  $\mathcal{F}$  eine (Prä-)Garbe auf  $X$  und  $U \subseteq X$  offen. Dann definiert  $(\mathcal{F}|_U)(V) := \mathcal{F}(U \cap V)$  eine (Prä-)Garbe auf  $U$ .

**Notation.** Sei  $\mathbf{PSh}(X) := [\mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}}, \mathbf{Ab}]$  die Kategorie der Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum  $X$  und  $\mathbf{Sh}(X) \subset \mathbf{PSh}(X)$  die volle Unterkategorie der Garben.

**Def.** Eine Sequenz  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  von (Prä-)Garben abelscher Gruppen auf  $X$  heißt **exakt** bei  $\mathcal{G}$ , falls für alle offenen  $U \subset X$  die Sequenz  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$  exakt bei  $\mathcal{G}(U)$  ist.

**Def.** Sei  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ein Morphismus von Prägarben auf  $X$ . Definiere Prägarben  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{C}$  auf  $X$  durch

$$\mathcal{K}(U) := \ker(f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)), \quad \mathcal{C}(U) := \mathcal{G}(U) / \text{im}(f_U).$$

**Prop.** Sei  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  sogar ein Morphismus von Garben. Dann ist auch  $\mathcal{K}$  eine Garbe.

**Achtung.** Aber  $\mathcal{C}$  ist im Allgemeinen keine Garbe!

**Def.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $Y$ . Der **Halm** von  $\mathcal{F}$  in  $y \in Y$  ist

$$\mathcal{F}_y := \{(U, s) \mid U \subseteq Y \text{ offen}, y \in U, s \in \mathcal{F}(U)\} / \sim, \\ (U, s) \sim (V, t) : \iff \exists W \subset U \cap V \text{ offen}, y \in W : s|_W = t|_W.$$

**Notation.**  $s_y := [(U, s)]$  für  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $y \in U$ .

**Sprechweise.** Elemente  $[t] \in \mathcal{F}_y$  heißen **Keime** in  $y$ .

**Def.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf  $Y$ ,  $Z \subseteq Y$  beliebig. Definiere

$$\Gamma(Z, \mathcal{F}) := \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{F}),$$

wobei der Limes über alle offenen  $U \subset Z$  mit  $Z \subseteq U$  läuft.

**Beobachtung.**  $\mathcal{F}_y = \Gamma(\{y\}, \mathcal{F})$

**Def.** Der **Totalraum**  $F$  einer Prägarbe  $\mathcal{F}$  auf  $Y$  ist

$$F := \coprod_{y \in Y} \mathcal{F}_y$$

mit der Topologie erzeugt durch die Mengen

$$\{s_y \mid y \in U\} \quad \text{für } U \subseteq X \text{ offen}, s \in \mathcal{F}(U).$$

*Bem.* Mit dieser Topologie ist die Projektion  $\pi : F \rightarrow Y$  stetig und ein lokaler Homöomorphismus.

**Def.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Prägarbe auf  $Y$ . Die **Garbifizierung**  $\mathcal{F}^+$  von  $\mathcal{F}$  ist die Garbe der stetigen Schnitte von  $\pi : F \rightarrow Y$ , also

$$\mathcal{F}^+(U) := \{f : U \rightarrow F \mid \pi \circ f = (i : U \hookrightarrow Y)\}.$$

**Prop.** Es ex. ein kanonischer Morphismus  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$  def. durch

$$s \in \mathcal{F}(U) \mapsto (y \mapsto s_y : U \rightarrow F).$$

Wenn  $\mathcal{F}$  schon eine Garbe ist, dann ist  $f$  ein Isomorphismus.

**Def.** Sei  $A$  eine Menge (oder ab. Gruppe, ...),  $Y$  ein topol. Raum.

- Die **konstante Prägarbe**  $\mathbf{A}$  mit Faser  $A$  auf  $Y$  ist def. durch

$$\mathbf{A}(U) := A, \quad r_{UV} := \text{id}_A \quad \text{für alle } V \subseteq U \subseteq Y.$$

- Die **konstante Garbe** mit Faser  $A$  ist die Garbifizierung  $\mathcal{A} = \mathbf{A}^+$  von  $\mathbf{A}$ .

**Def.** Eine Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $Y$  heißt **lokal konstant**, falls jeder offene Punkt in  $Y$  eine offene Umgebung  $U$  besitzt, sodass  $\mathcal{F}|_U$  isomorph zu einer konstanten Garbe ist.

**Def.** Eine Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem topologischen Raum  $Y$  heißt ...

- ... **welk** (flabby, flasque), wenn die Einschränkungsabbildungen

$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$$

für alle *offenen*  $U \subseteq Y$  surjektiv sind.

- ... **weich** (soft, mou), wenn die Einschränkungsabbildungen

$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{F})$$

für alle *abgeschlossenen*  $A \subseteq Y$  surjektiv sind.

**Def.** Eine Garbe  $\mathcal{F}$  ab. Gruppen auf einem topol. Raum  $Y$  heißt **fein** (fine, fin), wenn für je zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen  $A_1, A_2 \subseteq Y$  ein Garbenmorphismus  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  existiert, sodass  $\alpha$  auf einer offenen Umgebung von  $A_1$  Null und auf einer offenen Umgebung von  $A_2$  die Identität ist.

## (Lokal) geringte Räume

**Def.** Eine topol. / glatte **Mannigfaltigkeit** ist ein Paar  $(M, \mathcal{O}_M)$ , wobei  $M$  ein Hausdorffraum und  $\mathcal{O}_M$  eine Garbe auf  $M$  ist, sodass jeder Punkt  $x \in M$  eine offene Umgebung  $U$  besitzt, sodass  $\mathcal{O}_M|_U$  isomorph zu einer Garbe von stetigen / glatten Funktionen auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Def.** Ein Morphismus  $\Phi : (M, \mathcal{O}_M) \rightarrow (N, \mathcal{O}_N)$  zwischen topol. / glatten Mftn. ist geg. durch eine stetige Abb.  $\phi : M \rightarrow N$ , sodass  $\forall U \subseteq N$  offen :  $\forall f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_N) : f \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_M)$ .

*Bem.* Diese Definitionen sind äquivalent zu den üblichen Alte-Römer-Definitionen von Mannigfaltigkeiten über Atlanten.

**Def.** Ein **geringter Raum** ist ein Paar  $(M, \mathcal{O}_M)$ , wobei  $M$  ein topol. Raum und  $\mathcal{O}_M$  eine Ringgarbe auf  $M$  ist. Ein Morphismus  $\Phi : (M, \mathcal{O}_M) \rightarrow (N, \mathcal{O}_N)$  zwischen geringten Räumen ist ein Paar  $(\varphi, \theta)$ , wobei  $\varphi : M \rightarrow N$  stetig und  $\theta = (\theta_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_N) \rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_M))_{U \subseteq N \text{ offen}}$

eine Familie von Ringhomomorphismen ist, sodass  $\forall V \subseteq U \subseteq N : \theta_U(-)|_{\varphi^{-1}(V)} = \theta_V(-|_V)$ .

**Sprechweise.**  $\mathcal{O}_M$  heißt **Strukturgarbe**.

*Bem.* Man kann  $\theta$  als Garbenmorph.  $\theta : \mathcal{O}_N \rightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_M)$  auffassen.

**Bsp.** Sei  $(M, \mathcal{O}_M)$  eine glatte Mft. Sei  $\mathcal{D}_M$  die Garbe der linearen, derivativen Operatoren, also

$\mathcal{D}_M(U) := \{P : \mathcal{O}_M(U) \rightarrow \mathcal{O}_M(U), P = \sum f_I(z) \frac{\partial^I}{\partial z^I} \text{ in lok. Koord.}\}.$  Dann ist  $(M, \mathcal{D}_M)$  ein geringter Raum.

**Def.** Sei  $A$  ein komm. Ring. Das **Spektrum** von  $A$  ist  $\text{Spec}(A) := \{\text{Primideale } \mathfrak{p} \subsetneq A\}$

mit der sogenannten **Zariski-Topologie** mit offenen Mengen  $\mathcal{T} := \{D(S) \mid S \subseteq A\} \subset \mathcal{P}(\text{Spec}(A)), \quad D(S) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid S \not\subseteq \mathfrak{p}\}.$  Die abgeschlossenen Mengen sind von der Form  $V(S)$  für  $S \subseteq A$  mit  $V(S) := \text{Spec}(A) \setminus D(S) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid S \subseteq \mathfrak{p}\}.$

Für  $U \subseteq \text{Spec}(A)$  offen sei  $\Delta(U)$  das Komplement der Vereinigung der Ideale in  $U$ . Da  $\Delta(U)$  multiplikativ abgeschlossen ist und  $V \subseteq U \implies \Delta(V) \subseteq \Delta(U)$  gilt, können wir eine Prägarbe komm. Ringe  $\mathcal{O}'$  auf  $\text{Spec}(A)$  wie folgt definieren:

$$\mathcal{O}'(U) := (\Delta(U))^{-1}A, \quad r_{UV}([ \frac{s}{t} ]) := [ \frac{s}{t} ].$$

Sei  $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} := (\mathcal{O}')^+$  die Garbifizierung von  $\mathcal{O}'$ . Der geringte Raum  $(\text{Spec}(A), \mathcal{O})$  heißt **affines Schema** von  $A$ .

*Bem.* Sei  $A$  ein Integritätsbereich. Dann ist das Nullideal  $(0) \in \text{Spec}(A)$  ein generischer Punkt, d. h. der topologische Abschluss von  $(0)$  ist ganz  $\text{Spec}(A)$ .

**Lemma.**  $(\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}} := \Delta(\mathfrak{p})^{-1}A$  für alle  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$

**Def.** Ein Ring  $R$  heißt **lokal**, wenn er eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- Er besitzt genau ein maximales Linksideal.
- Er besitzt genau ein maximales Rechtsideal.
- Wenn eine endliche (evtl. leere) Summe von Ringelementen eine Einheit ist, dann auch einer der Summanden (insb. gilt  $0 \neq 1$ ).
- $\text{Spec}(R)$  hat genau einen abgeschl. Punkt (das maximale Ideal).

*Bem.* In lok. Ringen stimmen max. Links- und Rechtsideal überein.

**Def.** Seien  $R$  und  $S$  lokale Ringe mit max. Idealen  $\mathfrak{m} \subset R$  und  $\mathfrak{n} \subset S$ . Ein **lokaler Ringhomomorphismus** zwischen  $R$  und  $S$  ist ein Ringhomomorphismus  $f : R \rightarrow S$  mit  $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$ .

**Def.** Ein geringter Raum  $(M, \mathcal{O}_M)$  heißt **lokal geringt**, wenn die Fasern  $\mathcal{O}_{M,x}$  für alle  $x \in M$  lokale Ringe sind. Ein Morphismus  $\Phi = (\varphi, \theta) : (M, \mathcal{O}_M) \rightarrow (N, \mathcal{O}_N)$  heißt **Morph. von lokal geringten Räumen**, wenn für alle  $x \in M$  die ind. Abb.

$$\theta_x : \mathcal{O}_{N,y} \rightarrow \mathcal{O}_{M,x}$$

ein lokaler Homomorphismus von lokalen Ringen ist.

**Bspe.** Affine Schemata und Mften sind lokal geringte Räume.

**Def.** Ein **Schema** ist ein lokal geringter Raum  $(S, \mathcal{O}_S)$ , der lokal isomorph zum affinen Spektrum eines Ringes ist, d.h. jedes  $x \in S$  besitzt eine offene Umgebung  $U$ , sodass  $(U, \mathcal{O}_S|_U)$  als lokal geringter Raum isomorph zum affinen Schema eines komm. Ringes ist.

## Garben auf Siten

**Def.** Sei  $\mathcal{S}$  eine Kategorie. Ein **Sieb** auf  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  ist eine Menge  $\Phi = \{\varphi_i \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(U_i, U) \mid i \in I\}$  von Morphismen nach  $U$ , sodass gilt:

$$\forall V \in \text{Ob}(\mathcal{S}), i \in I, \psi \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(V, U_i) : \varphi_i \circ \psi \in \Phi.$$

*Bem.* Sei  $\Phi$  ein Sieb auf  $U$ ,  $f \in \text{Hom}(V, U)$ . Dann ist

$$f^*(\Phi) := \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(W, V) \mid W \in \text{Ob}(\mathcal{S}), f \circ \varphi \in \Phi\}$$

ein Sieb auf  $V$ , die **Einschränkung** von  $\Phi$  auf  $V$  (über  $f$ ).

**Def.** Eine **Grothendieck-Topologie** auf einer Kategorie  $\mathcal{S}$  ist gegeben durch eine Menge  $C(U)$  von Sieben auf  $U$  für jedes  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  (den sogenannten **überdeckenden Sieben**), sodass gilt:

- Für alle  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  ist das Sieb aller Abb. nach  $U$  in  $C(U)$ .
- Die Einschränkung  $f^*(\Phi)$  eines Siebes  $\Phi \in C(U)$  über  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(V, U)$  ist in  $C(U)$ .
- Die Überdeckungseigenschaft lässt sich lokal testen: Für  $\Psi$  ein bel. Sieb auf  $U$  und  $\Phi \in C(U)$  überdeckend. Angenommen, für alle  $(\varphi_i : U_i \rightarrow U) \in \Phi$  ist die Einschränkung von  $\Psi$  über  $\varphi_i$  überdeckend, also  $\varphi_i^*(\Psi) \in C(U_i)$ . Dann ist auch  $\Psi \in C(U)$ .

**Def.** Ein **Situs** ist eine Kategorie  $\mathcal{S}$  mit Grothendieck-Topologie.

**Def.** • Eine **Prägarbe** von Mengen auf einem Situs  $\mathcal{S}$  ist ein kontravarianter Funktor  $\mathcal{G} : \mathcal{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

- Allgemeiner ist eine  $\mathcal{C}$ -wertige Prägarbe ein Funktor  $\mathcal{F} : \mathcal{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  (z. B.  $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}, \mathbf{R}\text{-Mod}, \mathbf{Top}$ ).
- Ein Morphismus zwischen Prägarben  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  auf demselben Situs ist eine natürliche Transformation zwischen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ .

**Def.** Eine **Garbe** auf einem Situs  $\mathcal{S}$  ist eine Prägarbe  $\mathcal{F}$ , für die gilt: Für alle überdeckenden Siebe  $\Phi \in C(U)$  und Familien von Schnitten  $(s_\varphi \in \mathcal{F}(V))_{(\varphi : V \rightarrow U) \in \Phi}$ , die miteinander vertr. sind, d.h.

$$\forall (\varphi : V \rightarrow U) \in \Phi : \forall \psi : W \rightarrow V : s_{\varphi \circ \psi} = s_\varphi|_W := \mathcal{F}(\psi)(s_\varphi),$$

gibt es genau einen Schnitt  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit

$$\forall (\varphi : V \rightarrow U) \in \Phi : s_\varphi = s|_V := \mathcal{F}(\varphi)(s).$$

Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismen zw. den Prägarben.

*Bem.* Die Notationen und Sprechweisen für (Prä-)Garben auf gew. topol. Räumen werden auch für Garben auf Siten angewendet. Man notiert weiterhin  $s|_V := \mathcal{G}(f)(s)$  für die Einschränkung eines Schnittes  $s \in \mathcal{G}(U)$  über  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{S}}(V, U)$  (wohlwissend, dass die Einschränkung auch von  $f$  abhängt).

**Bsp.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $\mathcal{S}_G$  die Kategorie der Mengen mit  $G$ -Wirkung und äquivarianten Abbildungen. Man nennt ein Sieb  $\Phi$  über  $U \in \text{Ob}(\mathcal{S}_G)$  überdeckend, wenn  $U = \bigcup_{(\varphi : V \rightarrow U) \in \Phi} \varphi(V)$ . Sei  $\mathbf{Sh}_G$  die Kategorie der Garben über dem Situs  $\mathcal{S}_G$ . Sei  $G_I := G \in \text{Ob}(\mathcal{S}_G)$  mit der Linkswirkung  $g.h := gh$ . Es gibt einen Funktor  $\alpha : \mathbf{Sh}_G \rightarrow \mathcal{S}_G$  mit  $\alpha(F) := F(G_I) \in \text{Ob}(\mathcal{S}_G)$ , wobei  $G$  auf  $F(G_I)$  durch  $g.x := F(h \mapsto hg)(x)$  für  $x \in F(G_I)$  wirkt.

**Prop.**  $\alpha : \mathbf{Sh}_G \rightarrow \mathcal{S}_G$  ist eine Kategorienäquivalenz.

## Komplexe und (Ko-)Homologie

**Def.** • Ein **Kettenkomplex**  $C_\bullet$  ist eine Folge  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen  $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  mit der Eigenschaft  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ .  
• Ein **Kokettenkomplex**  $C^\bullet$  ist eine Folge  $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$  von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen  $\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$  mit der Eigenschaft  $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ .

**Def.** Sei  $C_\bullet$  ein Kettenkomplex.

- $C_n$  heißt Gruppe der  **$n$ -Ketten**,
- $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$  heißt **Randabbildung**,
- $Z_n(C_\bullet) := \ker \partial_n \subset C_n(C_\bullet)$  heißt Gruppe der  **$n$ -Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) := \text{im } \partial_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet)$  heißt Gruppe der  **$n$ -Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet) / B_n(C_\bullet)$  heißt  **$n$ -te Homologiegruppe**.

Analog nennt man für einen Kokettenkomplex  $C^\bullet$

- $\delta^n$  **Korandabbildung**, •  $C^n$   **$n$ -Koketten**,
- $Z^n := \ker \delta^n$   **$n$ -Kozykel**, •  $B^n := \text{im } \delta^{n-1}$   **$n$ -Koränder**,
- $H^n(C^\bullet) := Z^n(C^\bullet) / B^n(C^\bullet)$   **$n$ -te Kohomologiegruppe**.

**Def.** Eine Morphismus  $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  (bzw.  $f : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ ) zwischen (Ko-)Kettenkomplexen ist eine Familie von Abbildungen

$$(f_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\text{bzw. } (f^n : C^n \rightarrow D^n)_{n \in \mathbb{N}}),$$

die mit den Randabbildungen verträglich sind, d.h.

$$f_{n-1} \circ \partial_n^C = \partial_n^D \circ f_n \quad (\text{bzw. } f^{n+1} \circ \delta_C^n = \delta_D^n \circ f^n) \quad \text{für alle } n.$$

**Prop.**  $H_n$  (bzw.  $H^n$ ) ist ein Funktor von der Kategorie der (Ko-)Kettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen.

**Def.** Sei  $X$  eine simpl. Menge. Sei  $C_n(X)$  die von den  $n$ -Simplizes  $X_n$  erzeugte abelsche Gruppe (d.h. die Gruppe der endl. formalen Linearkombinationen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ ). Sei  $\delta_n^i : [n-1] \rightarrow [n]$  diejenige streng monotone Abb. mit  $i \notin \text{im } \delta_n^i$ . Definiere

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X), \quad \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \sum_{i=0}^n (-1)^i X(\partial_n^i)(\sigma).$$

**Prop.**  $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$  ist ein Kettenkomplex (d.h.  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ )

**Def.** Sei  $X$  eine simpl. Menge und  $A$  eine ab. Gruppe. Dann ist ...

- ... der **Kettenkomplex**  $(C_\bullet(X; A), \partial_\bullet)$  von  $X$  mit **Koeffizienten** in  $A$  definiert durch  $C_n(X; A) := C_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A$ ,  $\partial_n := \partial_n \otimes \text{id} : C_n(X; A) \rightarrow C_{n-1}(X; A)$ .
- ... der **Kokettenkomplex**  $(C^\bullet(X; A), \delta^\bullet)$  von  $X$  mit **Koeffizienten** in  $A$  definiert durch

$$C^n(X; A) := \text{Hom}(C^n(X), A),$$

$$\delta^n : C^n(X; A) \rightarrow C^{n+1}(X; A), \quad f \mapsto f \circ \delta_{n+1}.$$

**Beobachtung.**  $C_n(X; \mathbb{Z}) = C_n(X)$

**Notation.** Sei  $X$  eine simpliziale Menge. Setze

- $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$ , •  $H^n(X) := H^n(C^\bullet(X; \mathbb{Z}))$ ,
- $H_n(X; A) := H_n(C_\bullet(X; A))$ , •  $H^n(X; A) := H^n(C^\bullet(X; A))$ .

**Prop.** Für jede simpl. Menge  $X$  ex. ein kanonischer Isomorphismus

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \text{freie ab. Gr. erzeugt von Zshgskomponenten von } |X|.$$

**Def.** Der **Kegel**  $CX$  über Verklebedaten  $X$  ist definiert durch

$$(CX)_{(0)} := X_{(0)} \amalg \{\star\}, \quad (CX)_{(n)} := X_{(n)} \amalg (X_{(n-1)} \times \{\star\}),$$

$$(CX)(f)(x) := X(f)(x),$$

$$(CX)(f)(x, *) := \begin{cases} X(i \mapsto f(i) - 1)(x), & \text{wenn } f(0) > 0, \\ X(i \mapsto f(i+1) - 1)(x, *), & \text{wenn } f(0) = 0. \end{cases}$$

**Def.** Für Verklebedaten ist der zugeh. (Ko-)Kettenkomplex (mit Koeffizienten) genauso definiert wie für simpliziale Mengen.

**Prop.**  $H_0(CX) = \mathbb{Z}$ ,  $H_{>0}(CX) = 0$

**Def.** Sei  $X$  eine simpliziale Menge.

- Ein **homol. Koeffizientensystem**  $\mathcal{A}$  auf  $X$  ist ein Funktor

$$\mathcal{A} : (1 \downarrow X) \rightarrow \mathbf{Ab}.$$

Dabei ist  $1 : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{Set}$  der Funktor, der konstant  $\{\star\}$  ist (und  $\mathbf{1}$  die Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismus). Expliziter besteht ein Koeffizientensystem aus einer abelschen Gruppe  $\mathcal{A}_\sigma$  für jedes  $n$ -Simplex  $\sigma \in X_n$  und Abbildungen  $\mathcal{A}(f, \sigma) : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathcal{A}_{X(f)(\sigma)}$  für alle  $\sigma \in X_n$ ,  $f \in \text{Hom}_\Delta([m], [n])$  mit  $\mathcal{A}(\text{id}, \sigma) = \text{id}$ ,  $\mathcal{A}(f \circ g, \sigma) = \mathcal{A}(g, X(f)(\sigma)) \circ \mathcal{A}(f, \sigma)$ .

- Ein **kohomol. Koeffizientensystem**  $\mathcal{B}$  auf  $X$  ist ein Funktor

$$\mathcal{B} : (1 \downarrow X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}.$$

- Ein Morphismus zw. (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf derselben simpl. Menge ist eine natürliche Transformation.

**Bsp.** Sei  $Y$  ein topol. Raum,  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine offene Überdeckung und  $X$  deren Nerv. Dann definiert

$$\mathcal{F}_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} := \{U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\},$$

$$\mathcal{F}(f, (\alpha_0, \dots, \alpha_n))(\phi) := \text{passende Einschränkung von } \phi.$$

ein kohomologisches Koeffizientensystem auf  $X$ .

**Def.** Sei  $\mathcal{A}$  ein homologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge  $X$ . Wir setzen

$$C_n(X; \mathcal{A}) := \{ \text{formale endl. Linearkomb. } \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \text{ mit } \lambda_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma \}$$

und definieren  $\partial_n : C_n(X; \mathcal{A}) \rightarrow C_{n-1}(X; \mathcal{A})$  durch

$$\sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in X_n} \sum_{i=0}^n (-1)^i \mathcal{A}(\partial_n^i, \sigma)(\lambda_\sigma) \cdot X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Die Homologiegruppen des so def. Kettenkomplexes  $C_\bullet(X; \mathcal{A})$  heißen **Homologiegruppen** von  $X$  **mit Koeffizienten in  $\mathcal{A}$** .

**Def.** Sei  $\mathcal{B}$  ein kohomologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge  $X$ . Wir setzen

$$C^n(X; \mathcal{B}) := \{ \text{Funktionen } f : (\sigma \in X_n) \rightarrow \mathcal{B}_\sigma \}$$

und definieren  $\delta_n : C^n(X; \mathcal{B}) \rightarrow C_{n+1}(X; \mathcal{B})$  durch

$$\delta^n(f)(\sigma) := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \mathcal{B}(\partial_{n+1}^i, \sigma)(f(X(\partial_{n+1}^i)(\sigma))).$$

Die Kohomologiegruppen des so def. Kokettenkomplexes  $C^\bullet(X; \mathcal{B})$  heißen **Kohomologiegruppen** von  $X$  **mit Koeffizienten in  $\mathcal{B}$** .

**Bsp.** Sei  $Y$  ein topol. Raum,  $U = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ,  $X$  und  $\mathcal{F}$  wie im letzten Beispiel. Die Homologiegruppen  $H^n(X, \mathcal{F})$  werden Čech-Kohomologiegruppen der Garbe der stetigen Funktionen auf  $Y$  bzgl. der Überdeckung  $U$  genannt.

**Def.** Eine (lange) **exakte Sequenz** ab. Gruppen ist ein (Ko-)Kettenkomplex mit verschwindenden Homologiegruppen, d. h.

$$\text{im } \partial_n = \ker \partial_{n-1} \quad \text{für alle } n.$$

**Def.** Eine **kurze ex. Sequenz** (k. e. S.) ist eine ex. Seq. der Form

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0.$$

**Def.** Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine k. e. S. in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$ . Die Sequenz heißt **spaltend**, falls sie isomorph zur k. e. S.  $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus C \rightarrow C$  ist.

**Prop.** Für eine Sequenz  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  sind äquivalent:

- Die Sequenz spaltet.
- Es existiert eine Retraktion  $r : B \rightarrow A$  mit  $r \circ f = \text{id}_A$ .
- Es existiert ein Schnitt  $s : C \rightarrow B$  mit  $g \circ s = \text{id}_C$ .

**Def.** Eine Sequenz  $0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow 0$  von Komplexen heißt **exakt**, wenn für alle  $n$  die Seq.  $0 \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow 0$  exakt ist.

**Prop.** Eine kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C^\bullet \rightarrow 0$  von Kokettenkomplexen induziert eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^\bullet)} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{H^n(p^\bullet)} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A^\bullet) \rightarrow \dots$$

**Lemma.** Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine k. e. S. ab. Gruppen und  $X$  eine simpl. Menge. Dann sind ebenfalls exakt:

$$0 \rightarrow C_\bullet(X; A) \rightarrow C_\bullet(X; B) \rightarrow C_\bullet(X; C) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow C^\bullet(X; A) \rightarrow C^\bullet(X; B) \rightarrow C^\bullet(X; C) \rightarrow 0.$$

**Korollar.** Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine k. e. S. ab. Gruppen und  $X$  eine simpl. Menge. Dann existieren lange exakte Sequenzen

$$\dots \rightarrow H_n(X; A) \rightarrow H_n(X; B) \rightarrow H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(X; A) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H^n(X; A) \rightarrow H^n(X; B) \rightarrow H^n(C) \rightarrow H^{n+1}(X; A) \rightarrow \dots$$

**Def.** Eine Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'' \rightarrow 0$  von (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf einer simpl. Menge  $X$  heißt **exakt**, falls

$$0 \rightarrow \mathcal{B}'_\sigma \rightarrow \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathcal{B}''_\sigma \rightarrow 0 \quad \text{für alle } \sigma \in X_n \text{ exakt ist.}$$

**Lemma.** Eine kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'' \rightarrow 0$  von (ko-)homologischen Koeff'systemen induziert kurze ex. Sequenzen

$$0 \rightarrow C_\bullet(X; \mathcal{B}') \rightarrow C_\bullet(X; \mathcal{B}) \rightarrow C_\bullet(X; \mathcal{B}'') \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow C^\bullet(X; \mathcal{B}') \rightarrow C^\bullet(X; \mathcal{B}) \rightarrow C^\bullet(X; \mathcal{B}'') \rightarrow 0$$

und damit auch entsprechende lange exakte Sequenzen.

**Def.** Eine **simpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor  $A : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

**Def.** Sei  $A$  eine simpliziale abelsche Gruppe. Dann ist  $(A_\bullet, \partial)$  ein Kettenkomplex mit

$$\partial_n : A_n \rightarrow A_{n-1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i A(\partial_n^i)(a).$$

**Def.** Eine **kosimpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor  $A : \Delta \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

**Def.** Sei  $A$  eine kosimpliziale abelsche Gruppe. Dann ist  $(A^\bullet, \delta)$  ein Kokettenkomplex mit

$$\delta^n : A^n \rightarrow A^{n+1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i A(\partial_{n+1}^i)(a).$$

**Def.** Sei  $Y$  ein topol. Raum,  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine (nicht unbedingt offene) Überdeckung von  $Y$  und  $\mathcal{F}$  eine Garbe ab. Gruppen auf  $Y$ . Die kosimpliziale abelsche Gruppe  $\check{C}(U, \mathcal{F})$  der **Čech-Koketten** ist

$$\check{C}^m(U, \mathcal{F}) := \prod_{\alpha_0, \dots, \alpha_m \in A} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_m}),$$

$$\check{C}(U, \mathcal{F})(f : [m] \rightarrow [n])((f_{\alpha_0, \dots, \alpha_m})_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}) :=$$

$$(f_{g(0), \dots, g(m)}|_{U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}})_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}.$$

*Bem.* Die Randabb. im zugeh. Kokettenkomplex ist gegeben durch

$$(\delta^n \phi)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}} := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \phi_{\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{n+1}}.$$

**Def.** Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes heißen **Čech-Homologiegruppen** von  $\mathcal{F}$  bzgl. der Überdeckung  $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ .

*Bem.*  $\check{H}(U, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$  hängt nicht von der Überdeckung ab.

**Def.** Sei  $Y$  ein topol. Raum und  $X$  dessen simpl. Menge der singulären Simplexes. Die Homologiegruppen von  $C_\bullet(X; A)$  heißen **singuläre Homologiegruppen**  $H_n(Y; A)$  von  $Y$  mit Koeff.  $A$ .

**Def.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mft,  $\Omega^k(M)$  das  $C^\infty(M)$ -Modul der  $k$ -Formen auf  $M$ . Die **äußere Ableitung**  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  ist in lokalen Koordinaten  $(x^1, \dots, x^n)$  definiert durch

$$d \left( \sum_{|I|=k} f_I dx^I \right) = \sum_{|I|=k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I.$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Komplexes  $\Omega^\bullet(M)$  heißen **De-Rham-Kohomologiegruppen**.

**Def.** Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra und  $A$  ein  $\mathfrak{g}$ -Modul. Setze  $C^k(\mathfrak{g}, A) := L(\wedge^k \mathfrak{g}, A)$  und definiere  $d : C^k(\mathfrak{g}, A) \rightarrow C^{k+1}(\mathfrak{g}, A)$  durch eine allgemeine Cartan-Formel

$$(dc)(g_1, \dots, g_{k+1}) := \sum_{1 \leq j < l \leq k+1} (-1)^{j+l-1} c([g_j, g_l], g_1, \dots, \hat{g}_j, \dots, \hat{g}_l, \dots, g_{k+1})$$

$$+ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j g_j c(g_1, \dots, \hat{g}_j, \dots, g_{k+1}).$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Kokettenkomplexes werden mit  $H^\bullet(\mathfrak{g}, A)$  bezeichnet.

**Def.** Eine **Kettenhomotopie** zw. Morphismen  $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  von Kettenkomplexen ist eine Folge von Homomorphismen  $k_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1}^D \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n^C = f_n - g_n$ .

**Lemma.** Seien  $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  kettenhomotop. Dann gilt

$$H_n(f) = H_n(g) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Prop. •** Seien  $\phi, \psi : X \rightarrow Y$  homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Dann sind die induzierten Abbildungen  $\phi_*, \psi_* : C_\bullet(X; A) \rightarrow C_\bullet(Y; A)$  kettenhomotop.

• Seien  $\phi, \psi : M \rightarrow N$  zwei glatt homotope Abbildungen von  $C^\infty$ -Mften. Dann sind  $\phi^*, \psi^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ .

**Korollar.** Homotopieäquivalente Räume besitzen isomorphe singuläre Homologiegruppen.

# Abelsche und additive Kategorien

Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie.

**Axiom.**  $\mathcal{C}$  ist erfüllt **A1**, wenn sie über **Ab** angereichert ist, d. h. die Morphismenmengen sind ab. Gruppen und die Verknüpfung

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

ist für alle  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  bilinear.

**Axiom.**  $\mathcal{C}$  erfüllt **A2**, wenn es ein **Nullobjekt**  $0 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  gibt mit

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0) = \text{Nullgruppe} = \{\text{id}_0\}.$$

*Bem.* Dann ist auch  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0) = \text{Hom}(0, X) = 0$  für alle  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

**Axiom.**  $\mathcal{C}$  erfüllt **A3**, wenn es für alle  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ein Objekt  $X \oplus Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  (genannt **direkte Summe**) und Morphismen

$$X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{p_X} \\ \xleftarrow{i_X} \end{smallmatrix} X \oplus Y \begin{smallmatrix} \xrightarrow{p_Y} \\ \xleftarrow{i_Y} \end{smallmatrix} Y$$

gibt mit  $\bullet \ p_X \circ i_X = \text{id}_X, \bullet \ p_Y \circ i_Y = \text{id}_Y, \bullet \ p_Y \circ i_X = 0,$   
 $\bullet \ p_X \circ i_Y = 0, \bullet \ (i_X \circ p_X) + (i_Y \circ p_Y) = \text{id}_{X \oplus Y}.$

*Bem.*  $X \oplus Y$  ist sowohl Produkt als auch Koprodukt von  $X$  und  $Y$ .

**Def.** Der **Kern**  $\ker \varphi$  eines Morphismus  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  ist ein Paar  $(K \in \text{Ob}(\mathcal{C}), k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K, X))$  mit sodass  $\varphi \circ k = 0$ , sodass es für alle  $k' \in \text{Hom}(K', X)$  mit  $\varphi \circ k'$  einen eindeutigen Morphismus  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(K', K)$  mit  $k' = k \circ h$  gibt.

*Bem.* Die Definition des Kerns ist äquivalent zur folgenden:  
Der Kern von  $\varphi$  ist das darstellende Obj.  $K \in \text{Ob}(\mathbf{Ab})$  des Funktors

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}, \ Z \mapsto \ker(\varphi \circ - : X(Z) \rightarrow Y(Z)), \ f \mapsto (- \circ f).$$

**Def.** Der **Kokern**  $\text{coker } \varphi$  eines Morphismus  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  ist ein Paar  $(C \in \text{Ob}(\mathcal{C}), c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C))$  mit  $c \circ \varphi = 0$ , sodass es für alle  $c' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C')$  mit  $c' \circ \varphi = 0$  einen eindeutigen Morphismus  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$  mit  $c' = h \circ c$  gibt.

*Bem.* Die Definition des Kokerns ist äquivalent zur folgenden:  
Der Kern von  $\varphi$  ist ein Morphismus  $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C)$ , sodass

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Z) \xrightarrow{\text{co}-} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{\varphi \text{ o}-} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \rightarrow 0$$

für alle  $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  exakt ist.

**Achtung.** Der Kokern ist *nicht* das darstellende Obj. des Funktors

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}, \ Z \mapsto \text{coker}(\varphi \circ - : X(Z) \rightarrow Y(Z)), \ f \mapsto (- \circ f).$$

*Bem.* Kern und Kokern sind eindeutig bis auf Isomorphismus.

**Def.** Sei  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ . Dann heißt

- im  $\varphi := \ker(\text{coker } \varphi)$  **Bild** von  $\varphi$ ,
- $\text{coim } \varphi := \text{coker}(\ker \varphi)$  **Kobild** von  $\varphi$ .

**Lemma.** Kerne sind Monomorphismen, Kokerne Epimorphismen.

**Lemma.**  $\bullet$  Sei  $(K, k)$  der Kern von  $\varphi$ . Dann gilt

$$\varphi \text{ ist ein Monomorphismus} \iff K \cong 0.$$

- Sei  $(C, c)$  der Kokern von  $\varphi$ . Dann gilt

$$\varphi \text{ ist ein Epimorphismus} \iff C \cong 0.$$

**Axiom.**  $\mathcal{C}$  erfüllt **A4**, wenn für alle  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  eine Sequenz

$$K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} C$$

existiert mit folgenden Eigenschaften:  $\bullet \ \varphi = j \circ i$

- $(K, k)$  ist der Kern,  $(C, c)$  der Kokern von  $\varphi$ ,
- $(I, i)$  ist der Kokern von  $k$ ,  $(I, j)$  der Kern von  $c$ .

Diese Sequenz heißt **kanonische Zerlegung** von  $\varphi$ .

*Bem.* Die kanonische Zerlegung ist eindeutig bis auf eindeutigen Iso.

*Bem.* Angenommen,  $\mathcal{C}$  besitzt Kerne und Kokerne.  
Dann gibt es für alle  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  die Diagramme

$$\ker \varphi \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} \text{coim } \varphi, \quad \text{im } \varphi \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} \text{coker } \varphi.$$

Aus den univ. Eigenschaften von Kern u. Kokern folgt die Existenz eines Morphismus  $l \in \text{Hom}(\text{coim } \varphi, \text{im } \varphi)$  mit  $j \circ l \circ i = \varphi$ .  
Das Ax. **A4** gilt genau dann, wenn  $l$  für alle  $\varphi$  ein Isomorphismus ist.

**Def.**  $\bullet$  Eine **präadditive** Kategorie erfüllt das Axiom **A1**.

- Eine **additive** Kategorie erfüllt die Axiome **A1-A3**.
- Eine **präab.** Kategorie ist additiv und besitzt Kerne und Kokerne.
- Eine **abelsche** Kategorie erfüllt die Axiome **A1-A4**.

*Bem.* Die Axiome **A1-A4** sind selbstdual, d. h. eine Kategorie  $\mathcal{C}$  ist genau (prä-)additiv / (prä-)abelsch, wenn  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  es auch ist.

**Bspe.** Ab. Kategorien sind:  $\bullet \ \mathbf{Ab}, \bullet \ R\text{-Mod}, \bullet \ \mathbf{PSh}(X)$ .

**Def.** Eine Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **balanciert**, falls gilt:

$$\forall (f : X \rightarrow Y) \in \mathcal{C} : f \text{ ist epi und mono} \iff f \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

**Prop.** Abelsche Kategorien sind balanciert.