Zusammenfassung Modellkategorien

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel $(S, \leqslant)$ bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung $\leqslant$ auf S.

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\ldots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \ldots$

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz). Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leqslant_S)] \leqslant [(T, \leqslant_T)] \quad :\Longleftrightarrow \ \exists \, \text{inj. monotone Abb. } (S, \leqslant_S) \to (T, \leqslant_T).$$

Notation. • $0 := [\varnothing]$, • $n := [\{1, \ldots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega := [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

Prinzip (**Transfinite Induktion**).
Sei $P : \mathcal{O}_n \to \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \, \beta \in \mathcal{O}_n \, : \, (\forall \, \gamma < \beta \, : \, P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \, \alpha \in \mathcal{O}_n \, : \, P(\alpha)$$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert: Für $\alpha = [(S, \leqslant_S)]$ und $\beta = [(T, \leqslant_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

- $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leqslant_{S \amalg T})]$, wobei gilt:
$$\leqslant_{S \amalg T}|_{S \times S} := \leqslant_S, \quad \leqslant_{S \amalg T}|_{T \times T} := \leqslant_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$
- $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leqslant_{S \rtimes T})]$ mit der lexikogr. Ordnung
$$(s_1, t_1) \leqslant_{S \rtimes T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \ \vee \ (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leqslant_S s_2)$$
- $\alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \to T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leqslant)]$ mit
$$f < g \quad :\Longleftrightarrow \ \exists \, t \in T \, : \, f(t) < g(t) \wedge (\forall \, t_2 >_T t \, : \, f(t_2) = g(t_2))$$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 := [(\varnothing, \leqslant)] \in \mathcal{O}_n$.
b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.
c) Die Limeszahl $\lim A := \sup A$ einer Teil*menge* $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

a)	b)	c)
$\alpha + 0 := \alpha$	$\alpha + (\beta+1) := (\alpha+\beta)+1$	$\alpha + \lim A := \lim \{\alpha+\gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha \cdot 0 := 0$	$\alpha \cdot (\beta+1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$	$\alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha^0 := 1$	$\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$	$\alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe ist mit
• $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, • $a \cdot 0 = 0$.

Lem (Rechenregeln in $\mathcal{O}_n$). • $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
• $\alpha^0 = 1$ • $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^\alpha = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$
• $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ • $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

- $\mathcal{O}_n$ ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht*!
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:
$$\forall \, \beta < \gamma : \quad \alpha+\beta < \alpha+\gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \ (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \ (\alpha > 1).$$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \ldots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.

Kategorientheorie

Def. Eine **(schwache) 2-Kategorie** $\mathbb{C}$ besteht aus

- einer Ansammlung $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & B \end{tikzcd} \right\},$$
- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$
- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem Objekt $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem natürlichen Isomorphismus
$$\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}} : \ - \circ (- \circ -) \Longrightarrow (- \circ -) \circ -,$$
wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ
$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$
- und für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ natürlichen Isomorphismen
$$\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (- \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathbb{C}$ kommutiert
$$\begin{tikzcd} K(H(GF)) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] \arrow[d, "K\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}}"] & (KH)(GF) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{G}}"] & ((KH)G)H \\ K((HG)F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] & & (K(HG))F \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}} F"'] \end{tikzcd}$$
- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathbb{C}$ kommutiert
$$\begin{tikzcd} G \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{D},\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "G\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}}"] & & (G \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \arrow[dl, "\rho_{\mathcal{D},\mathcal{E}} F"] \\ & G \circ F & \end{tikzcd}$$

Bspe. • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.

- Jede Kategorie $\mathcal{C}$ ist natürlich eine 2-Kategorie.
- Die Kategorie der Ringe $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathbb{R}) := \{\text{Ringe mit Eins}\}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) :=$ Kat. der B-A-Bimoduln mit $N \circ M := N \otimes_B M$ für $M \in \mathrm{Hom}(A, B)$ und $N \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\mathrm{Id}_A := A$.

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann $\otimes$ anstelle von $\circ$ geschrieben.

Def. Sei $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ von S ist eine Familie $\alpha_c : E \to S(c, c)$, $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von Morphismen in $\mathcal{A}$, sodass für alle $(f : c \to c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & S(c,c) \arrow[dr, "S(\mathrm{id}_c, f)"] & \\ E \arrow[ur, "\alpha_c"] \arrow[dr, "\alpha_{c'}"'] & & S(c,c') \\ & S(c',c') \arrow[ur, "S(f, \mathrm{id}_{c'})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, und E universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler S-**Keil**.

Notation. $E = \int_c S(c, c)$.

Bem. Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden: $\lim F = \int_c F(c)$; der Integrand ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$.

Bem. Das duale Konzept ist das eines ~~Anfangs~~ Koendes $\int^c S(c, c)$.

Bsp. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_c \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \ \cong \ \mathrm{Nat}(F, G).$$

Satz (Fubini). Sei $S : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d,c)} S(d, d, c, c) \ \cong \ \int_d \int_c S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und $\int_c S(d, d', c, c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

Bsp. Sei R ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt $*$. Ein additiver Funktor $R^{(\mathrm{op})} \to \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein R-Linksmodul (bzw. R-Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Bsp (Ninja-Yoneda-Lemma)**.** Für jede Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ gilt
$$F \cong \int^{c} F(c) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

Def. Sei $\mathbb{C}$ eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ist geg. durch Morphismen $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ (genannt **Eins**) und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ (**Koeins**) mit $G\epsilon \circ \eta G = \mathrm{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \mathrm{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.

Lem. R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bem. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:
$$\mathrm{Hom}(F \circ -, -) \cong \mathrm{Hom}(-, G \circ -)$$

Bsp. $\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$

Bsp. Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein B-A-Modul M ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn M als Rechts-A-Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

Bem. Sind η und ϵ in $F \dashv G$ sogar Isomorphismen, so heißt $F \dashv G$ auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von F und G sowie einem der Morphismen ϵ, η) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

Kan-Erweiterungen

Def. Sei $A \xleftarrow{T} M \xrightarrow{K} C$ ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE) (R, ϵ) von T längs K besteht aus

- einem Morphismus $R : C \to A$
- einem 2-Morphismus $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$,

sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE ($\tilde{R} : C \to A, \epsilon : \tilde{R} \circ K \Rightarrow T$) gibt es genau ein $\sigma : \tilde{R} \Rightarrow R$ mit $\epsilon \circ \sigma K = \tilde{\epsilon}$. Notation: $R = \mathrm{Ran}_K(T)$

Bem. (R, ϵ) ist RKE von T längs $K \iff$ $\mathrm{Hom}(\tilde{R}, R) \to \mathrm{Hom}(\tilde{R} \circ K, T)$ ist bijektiv für alle $\tilde{R} : C \to A$.

Prop. RKE sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bsp. Die RKE eines bel. Morphismus $T : M \to A$ längs Id_M existiert stets und ist gegeben durch $(T, T \circ \mathrm{Id}_M \Rightarrow T)$.

Bsp. In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:
$$\mathrm{Ran}_K(T) = (\mathrm{Hom}_M(K, T),\ ev : \mathrm{Hom}_M(K, T) \otimes_C K \Rightarrow T).$$

Bsp. Sei $K : \mathcal{M} \to \mathbf{1}$ der eindeutig best. Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von T längs K dasselbe wie ein Limes von T.

Thm. Seien $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ und $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Existiere für alle Objekte $c \in \mathcal{C}$ der Limes
$$R(c) := \lim_{f : c \to Km} T(m).$$
Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ausdehnen und zwar zu einer RKE von T längs K.

Bem. Ist $\mathcal{M}$ klein und $\mathcal{C}$ lokal klein und ist $\mathcal{A}$ vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktweise RKE**.

Lem. Eine RKE ist genau dann punktweise, wenn sie für alle $a \in \mathcal{A}$ unter dem Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$ erhalten bleibt.

Thm. Sei $K : M \to C$ ein Funktor. Betrachte $K^* : [C, A] \to [M, A]$.

- Wenn ein Funktor $\mathrm{Ran}_K : [M, A] \to [C, A]$ mit $K^* \dashv \mathrm{Ran}_K$ existiert, so ist für alle $T : M \to A$ $\mathrm{Ran}_K(T)$ eine RKE von T längs K.
- Existiere für alle $T : M \to A$ eine RKE $\mathrm{Ran}_K(T)$. Dann kann man die Zuordnung $T \mapsto \mathrm{Ran}_K(T)$ zu einem Rechtsadjungierten von K^* ausdehnen.

Thm. Sei $G : A \to X$ in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- G besitzt einen Linksadjungierten.
- $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A)$ existiert und bleibt von G erhalten, d. h. $G \circ \mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Ran}_G(G \circ \mathrm{Id}_A)$.

In diesem Fall gilt $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A) \dashv G$ und $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A)$ wird sogar von allen Morphismen $H : A \to Y$ bewahrt.

Thm. Rechtsadjungierte bewahren RKE.

Kor. Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

Algebraische Strukturen in Kategorien

Def. Eine **Retrakt** ist ein Morphismus $r : Y \to X$, sodass ein Morphismus $i : X \to Y$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$ existiert. Sprechweise: X ist ein Retrakt von Y (vermöge i).

Bsp. Ein Modul U ist genau dann Retrakt von einem Modul M, wenn U ein direkter Summand von M ist.

Prop. „– ist Retrakt von –“ ist eine reflexive und trans. Relation.

Def. Ein **Retrakt eines Morphismus** $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}$ ist ein Morph. $g : X \to Y$, sodass ein komm. Diagramm folgender Form gibt:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & B \end{tikzcd}$$

Bem. Ein Retrakt von $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ ist ein Retrakt von $f \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\to})$.

Prop. Retrakte von Isos sind Isos.

Prop. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist die Klasse $\{f \in \mathcal{C}^{\to} \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$ abgeschlossen unter Retrakten.

Def. Sei $i : A \to X$ und $p : E \to B$. Dann werden als äq. definiert:

- p ist **i-injektiv** • i ist **p-projektiv** • $i \boxslash p$
- i hat die Linkshochhebungseigenschaft (LHHE) bzgl. p
- Für alle f, g wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales λ, sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

Bsp. Sei P ein Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Dann ist P genau dann **projektiv**, wenn $(0 \to P)$ die LHHE bzgl. aller Epimorphismen in $\mathcal{A}$ hat. Dual ist I injektiv, wenn alle Monos in $\mathcal{A}$ die LHHE bzgl. $(I \to 0)$ besitzen.

Bsp. In der Kategorie der Mengen gilt: Alle Injektionen haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

Lem (**Retrakt-Argument**)**.** Sei $f = q \circ j$. Ist f q-projektiv ($f \boxslash q$), so ist f ein Retrakt von j.

Zellenkomplexe

Def. Sei λ eine Ordinalzahl. Eine **λ-Sequenz** in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein kolimesbewahrender Funktor $X : \lambda \to \mathcal{C}$ (wobei man λ als Präordnungskategorie aller $\beta < \lambda$ auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus $X_0 \to \mathrm{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$.

Bem. Kolimesbewahrung bedeutet: $\mathrm{colim}_{\alpha < \beta} X_\alpha = X_\beta$ für alle $\beta < \lambda$.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine kovollständige Kategorie, $I \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge.

- Ein **relativer I-Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer λ-Sequenz Z, sodass $\forall\, \alpha \in \mathcal{O}_n$ mit $\alpha + 1 < \lambda$ ein Pushoutdiagramm
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Z_\alpha \arrow[d] & \leftarrow \textbf{Anklebeabbildung} \\ B \arrow[r] & Z_{\alpha+1} & \leftarrow \textbf{Zelle} \end{tikzcd}$$
mit $f \in I$ existiert. Sprechweise: „$Z_{\alpha+1}$ entsteht aus Z_α, indem wir B längs C ankleben“
- Ein Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **I-Zellenkomplex**, wenn der Morph. $0 \to A$ aus dem initialen Obj. ein relativer I-Zellenkomplex ist.

Bsp. CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind I-Zellenkomplexe mit $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geqslant 0\}$ (und $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$).

Bspe. • Identitäten $A \to A$ sind relative I-Zellenkomplexe.
• Das initiale Objekt ist ein absoluter I-Zellenkomplex.

Lem. Sei $Z : \lambda \to \mathcal{C}$ eine λ-Sequenz. Sei jeder Morphismus $Z_\beta \to Z_{\beta+1}$ $(\beta + 1 < \lambda)$ ein Pushout eines Morphismus aus I. Dann ist die transfinite Komposition von Z ein I-Zellenkomplex.

Thm. Die Klasse der relativen I-Zellenkomplex ist abgeschl. unter:
• transfinite Kompositionen • Isomorphismen • Koprodukt