

Zusammenfassung Homologische Algebra

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie.

Def. Eine Kategorie \mathcal{C} heißt **lokal klein**, wenn $\text{Hom}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge (keine echte Klasse) ist. Sie heißt **klein**, wenn auch die Klasse ihrer Objekte eine Menge ist. Sie heißt **endlich**, wenn Objekt- und Hom-Mengen sogar nur endlich sind.

Def. Eine Kategorie \mathcal{D} heißt **Unterkategorie** einer Kategorie \mathcal{C} (notiert $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$), wenn für alle geeigneten X, Y, f, g gilt:

$\text{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C}), \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $f \circ_{\mathcal{D}} g = f \circ_{\mathcal{C}} g$.

Def. Eine Unterkategorie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **voll**, wenn

$$\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{D}) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt ...

- ... **treu**, wenn für alle $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ die Abbildung $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ injektiv ist.
- ... **voll**, wenn diese Abb. für alle $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ surjektiv ist.

Bem. Die Einbettung einer (vollen) Unterkategorie ist ein (voll-)treuer Funktor.

Def. • Ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **initiales Objekt**, falls für alle $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ genau ein Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ existiert.
• Ein Objekt $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **terminales Objekt**, falls für alle $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ genau ein Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ existiert.

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist ein **Kategorienäquivalenz**, falls es einen Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $F \circ G \simeq \text{Id}_{\mathcal{D}}$ und $G \circ F \simeq \text{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt. Die Funktoren F und G heißen dann zueinander **quasiinvers**.

Def. Zwei Kategorien \mathcal{C}, \mathcal{D} heißen zueinander **äquivalent**, wenn es eine Kategorienäquivalenz $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ gibt.

Prop. $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist genau dann eine Kategorienäquivalenz, wenn:
• F ist volltreu, • $\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{D}) : \exists X \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : Y \cong F(X)$

Bsp. Sei B ein lokal wegzshgder, semi-lokal einfach zshgder topol. Raum. Dann ist die Kategorie $\text{Cov}(B)$ der Überlagerungen von B äquivalent zur Kategorie $[\pi(B), \mathbf{Set}]$ der Mengen-wertigen Funktoren auf dem Fundamentalgruppoid von B . Dabei ist

$$F : \text{Cov}(B) \rightarrow [\pi(B), \mathbf{Set}], \quad F(p : \tilde{B} \rightarrow B) := G_{\tilde{B}, p}, \\ G_{\tilde{B}, p}(b \in B) := p^{-1}(b), \quad G_{\tilde{B}, p}(\gamma : [0, 1] \rightarrow B)(\tilde{b} \in p^{-1}(\gamma(0))) := \tilde{\gamma}(1), \\ \text{mit } \tilde{\gamma} \text{ Liftung von } \gamma \text{ mit } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{b}.$$

Def. Zwei Ringe A und B heißen **Morita-äquivalent**, wenn ihre Kategorien der (Links/Rechts)-Moduln äquivalent sind.

Def. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Der **kontravariante Hom-Funktor** $h_X : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist definiert durch

$$h_X(Y) := \text{Hom}(Y, X), \quad h_X(h : Y' \rightarrow Y)(g : Y \rightarrow X) := g \circ h.$$

Allgemeiner gibt es den Funktor $\text{Hom} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ mit

$$\text{Hom}(h : Y' \rightarrow Y, f : X \rightarrow X')(g : Y \rightarrow X) := f \circ g \circ h.$$

Notation. $\hat{\mathcal{C}} := [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$

Def. Ein Element $x \in X(Y) := \text{Hom}(Y, X)$ heißt **Y-Element** von X .

Def. Ein Funktor $F \in \text{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$ wird **dargestellt** durch $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, falls $F \cong h_X$. Er heißt **darstellbar**, falls ein solches X existiert.

Def. Die **Yoneda-Einbettung** ist der Funktor

$$Y : \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}, \quad X \mapsto h_X, \quad \phi \mapsto (\phi \circ - : X(Y) \rightarrow X'(Y))_{Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})}.$$

Lemma (Yoneda). Sei \mathcal{C} eine Kategorie. Es gibt es eine nat. Bij.

$$\text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \cong F(X) \quad \text{für alle } X \in \text{Ob}(\mathcal{C}), F \in \hat{\mathcal{C}}.$$

Korollar. Die Yoneda-Einbettung ist volltreu und liefert eine Kategorienäquivalenz von \mathcal{C} und der vollen Unterkategorie der darstellbaren Funktoren in $\hat{\mathcal{C}}$.

Korollar. Ein darstellbarer Funktor wird von genau einem Objekt dargestellt (bis auf Isomorphie).

Def. Das **Produkt** von $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ist ein Obj. $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, das $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad U \mapsto X(U) \times Y(U), \quad \phi \mapsto ((-\circ \phi) \times (-\circ \phi))$ darstellt.

Bem. Diese Definition ist äquivalent zur folgenden:
Das Produkt von X, Y ist $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $p_X : Z \rightarrow X$ und $p_Y : Z \rightarrow Y$, wenn für alle $Z' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mit Morphismen $p'_X : Z' \rightarrow X$ und $p'_Y : Z' \rightarrow Y$ genau ein $f : Z' \rightarrow Z$ mit $p'_X = p_X \circ f$ und $p'_Y = p_Y \circ f$ existiert.

Def. Seien $\phi : X \rightarrow S$ und $\psi : Y \rightarrow S$ Abb. von Mengen. Das Faserprodukt von X und Y über S ist

$$X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid \phi(x) = \psi(y)\}.$$

Def. Sei $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S)$ und $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, S)$. Das **Faserprodukt** von X und Y über S ist ein Obj. in \mathcal{C} , das den Funktor $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad U \mapsto X(U) \times_{S(U)} Y(U)$ darstellt.

Bem. Das Faserprodukt von X und Y über S ist das Produkt von $X \xrightarrow{\phi} S$ und $Y \xrightarrow{\psi} S$ in der Scheibenkategorie \mathcal{C}/S .

Def. Eine **Gruppenstruktur** auf einem Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ist gegeben durch Gruppenstrukturen auf $\text{Hom}(Y, X)$ für alle $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ und Gruppenmorphismen $\text{Hom}(Y, X) \rightarrow \text{Hom}(Y', X)$ für jeden Morphismus $\phi : Y' \rightarrow Y$ (die die offensichtlichen Axiome erfüllen).

Bem. Falls \mathcal{C} ein term. Obj. 1 und die Produkte $X \times X$ und $X \times X \times X$ besitzt, dann ist eine Gruppenstr. auf X geg. durch Morphismen

$$m : X \times X \rightarrow X \text{ (Mult.)}, \quad i : X \rightarrow X \text{ (Inv.)}, \quad e : 1 \rightarrow X \text{ (Einheit)},$$

die die offensichtlichen Axiome erfüllen.

(Ko-)Limiten

Def. Seien \mathcal{J}, \mathcal{C} Kat'en. Der **Diagonal-Funktor** $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{J}, \mathcal{C}]$ ist

$$(\Delta X)(J \in \text{Ob}(\mathcal{J})) := X, \quad (\Delta X)(\phi) := \text{id}_X, \quad (\Delta f)_{J \in \text{Ob}(\mathcal{J})} := f.$$

Def. Seien \mathcal{J}, \mathcal{C} Kategorien, \mathcal{J} klein. Der **(projekte) Limes** eines Funktors $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, das den Funktor

$$G \in \hat{\mathcal{C}}, \quad G(Y) := \text{Hom}_{[\mathcal{J}, \mathcal{C}]}(\Delta Y, F), \quad G(f)(\eta) := \eta \circ \Delta f$$

darstellt. Man notiert $X = \varprojlim F$.

Def. Ein **Möchtegern-Limes** eines Funktors $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ mit Projektionsabbildungen $f_J : X \rightarrow F(J)$ für alle $J \in \text{Ob}(\mathcal{J})$, sodass $\forall h \in \text{Hom}_{\mathcal{J}}(J, I) : f_I = F(h) \circ f_J$.

Bem. Der Limes X ist durch folgende **universelle Eigenschaft** charakterisiert: Er ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Möchtegern-Limiten, d. h. er ist ein Möchtegern-Limes und für jeden weiteren Möchtegern-Limes X' gibt es genau einen Morphismus $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ mit $\forall J \in \text{Ob}(\mathcal{J}) : f'_J = f_J \circ g$.

Bem. Die univ. Eigenschaft zeigt: Der Limes ist funktoriell, d. h. wenn in \mathcal{C} alle \mathcal{J} -Limiten (d. h. Limiten von Funktoren $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$) existieren, dann gibt es einen Funktor $\varprojlim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}$.

Bem. Folgende Konzepte lassen sich als Spezialfall des Limes über eine spezielle Indexkategorie \mathcal{J} auffassen:

Konzept	Indexkategorie \mathcal{J}
Terminales Objekt	\emptyset (leere Kategorie)
Produkt	$\mathbf{2} := \{0, 1\}$ (kein nichttrivialer Morphismus)
Faserprodukt	$1 \rightarrow 0 \leftarrow 2$ (zwei nichttriviale Morphismen)
Differenzkern	$0 \rightrightarrows 1$ (zwei nichttriviale Morphismen)

Def. Sei \mathcal{J} klein. Der **Kolimes** / **induktive Limes** eines Funktors $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ist ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$, das den Funktor

$$G \in \hat{\mathcal{C}}^{\text{op}} = [\mathcal{C}, \mathbf{Set}], \quad G(Y) := \text{Hom}_{[\mathcal{J}, \mathcal{C}]}(F, \Delta Y), \quad G(f)(\eta) := \Delta f \circ \eta$$

darstellt. Man notiert $X = \varinjlim F$.

Bem. Der Kolimes von $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ ist der Limes von $F^{\text{op}} : \mathcal{J}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$.

Bem. Wenn in \mathcal{C} alle \mathcal{J} -Kolimiten existieren, dann gibt es einen Funktor $\varinjlim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}$.

Bem. Folgende Konzepte sind ein Spezialfall des Kolimes:

Konzept	Indexkategorie \mathcal{J}
Initiales Objekt	\emptyset (leere Kategorie)
Koproduct	$\mathbf{2} := \{0, 1\}$ (kein nichttrivialer Morphismus)
Kofaserprodukt	$1 \rightarrow 0 \leftarrow 2$ (zwei nichttriviale Morphismen)
Kodifferenzkern	$0 \rightrightarrows 1$ (zwei nichttriviale Morphismen)

Satz. Angenommen, eine Kategorie \mathcal{C} enthält ein term. Objekt, den Differenzkern von allen parallelen Morphismen $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und das Produkt $X \times Y$ von allen Paaren von Objekten. Dann existieren alle endlichen Limiten in \mathcal{C} , d. h. der Limes von jedem Funktor $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$, wobei \mathcal{J} endlich ist. Duales gilt für endl. Kolimiten mit initialem Obj., Kodifferenzkern und Koprodukten.

Korollar. In **Set** existieren alle endlichen Limiten und Kolimiten.

Bem. Angenommen, in \mathcal{C} existieren alle \mathcal{J} -Limiten. Sei \mathcal{I} eine bel. Kategorie. Dann ex. alle \mathcal{J} -Limiten in $[\mathcal{I}, \mathcal{C}]$ und die Limiten werden objektweise berechnet: Sei $F : \mathcal{J} \rightarrow [\mathcal{I}, \mathcal{C}]$ ein Funktor, dann ist

$$(\varprojlim F)(I) = \varprojlim (F(-)(I)), \quad (\varprojlim F)(f) = \varprojlim (F(-)(f)).$$

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt **stetig**, wenn er **Limiten bewahrt**, d. h. für alle Funktoren $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}$ (mit \mathcal{J} klein) mit $\varprojlim D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ex. auch der Limes von $F \circ G$ in \mathcal{D} und es gilt

$$\varprojlim (F \circ D) \cong F(\varprojlim D).$$

Ein Funktor F heißt **kostetig**, wenn er **Kolimiten bewahrt**.

Adjunktionen

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt **linksadjungiert** zum Funktor $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, wenn es einen natürlichen Isomorphismus

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))$$

gibt (dabei sind beide Seiten Funktoren $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$). Dann heißt G auch **rechtsadjungiert** zu F . Man notiert $F \dashv G$.

Bem. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann besitzt F genau dann einen Rechtsadjungierten $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, wenn für alle $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ der Funktor

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y), \quad f \mapsto (- \circ F(f))$$

darstellbar ist, d. h. es existiert $GY \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ und Isomorphismen

$$a_X^Y : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

mit $\forall \phi \in \text{Hom}(X', X) : a_{X'}^Y(- \circ F(\phi)) = a_X^Y(-) \circ \phi$. Dann ist G auf Morphismen definiert durch

$$G(f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')) := a_{GY'}^{Y'}(f \circ (a_{GY}^Y)^{-1}(\text{id}_{GY})).$$

Bem. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$. Setze

$$\eta_X := a_X^{FX}(\text{id}_{FX}) : X \rightarrow GFX, \\ \epsilon_Y := (a_{GY}^Y)^{-1}(\text{id}_{GY}) : FGY \rightarrow Y.$$

Dann sind $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ (genannt **Einheit**) und $\epsilon : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ (genannt **Koeinheit**) natürliche Transformationen und es gilt

$$(G \xrightarrow{\eta_G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G) = \text{id}_G, \quad (F \xrightarrow{\epsilon_F} FGF \xrightarrow{F\eta} F) = \text{id}_F.$$

Umgekehrt definieren zwei solche natürliche Transformationen η und ϵ , die diese Gleichungen erfüllen, eine Adjunktion zwischen F und G . Dabei ist η_X universell unter den Morphismen von $X \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ zu einem Objekt der Form GY : Für alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, GY)$ gibt es genau ein $h \in \text{Hom}(FX, Y)$ mit $f = G(h) \circ \eta_X$, und zwar $h = (a_X^Y)^{-1}(f)$. Duales gilt für ϵ_Y .

Lemma (Verknüpfung von Adjunktionen).

Sei $F_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zu $G_1 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ und $F_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ zu $G_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{D}$ linksadj. Dann ist $F_2 \circ F_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ zu $G_1 \circ G_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ linksadjungiert.

Lemma (Eindeutigkeit des adjungierten Funktors).

- Gelte $F \dashv G_1$ und $F \dashv G_2$. Dann sind G_1 und G_2 nat. isomorph.
- Gelte $F_1 \dashv G$ und $F_2 \dashv G$. Dann sind F_1 und F_2 nat. isomorph.

Bem. Sei $(F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \dashv (G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C})$ eine Adjunktion und \mathcal{J} klein. Dann gibt es eine ind. Adjunktion $(F \circ - : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \rightarrow [\mathcal{J}, \mathcal{D}]) \dashv (G \circ -)$.

- Bspe.**
- Angenommen, in \mathcal{C} existieren \mathcal{J} -Limiten bzw. \mathcal{J} -Kolimiten. Dann gibt es eine Adjunktion $\Delta \dashv \varprojlim$ bzw. $\varinjlim \dashv \Delta$.
 - Sei $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$ der Funktor, der die freie Gruppe über einer Menge bastelt und $V : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ der Vergiss-funktor. Dann gilt $F \dashv V$. Gleiches gilt für viele weitere „freie“ Konstruktionen.
 - Sei **KHaus** die Kat. der kompakten Hausdorffräume und $K : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{KHaus}$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung und $I : \mathbf{KHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$ die Inklusion. Dann gilt $K \dashv I$.

Def. Im Spezialfall, dass \mathcal{C} und \mathcal{D} Präordnungskategorien sind, wird ein Paar von adjungierten Funktoren (d. h. monotonen Abbildungen) zwischen \mathcal{C} und \mathcal{D} auch **Galoisverbindung** genannt.

- Bspe.**
- $([-] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}) \dashv (i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}) \dashv ([-] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z})$
 - Sei $L \supset K$ eine endl. Körpererweiterung. Für eine Zwischenerw. $L \supseteq M \supseteq K$ sei $\text{Gal}(L, M) := \{f \in \text{Aut}(L) \mid f|_M = \text{id}_M\}$ die Galoisgruppe von L über M . Dann ist

$$\begin{aligned} \{ \text{Untergruppen von } \text{Gal}(L, K) \} &\leftrightarrow \{ \text{Zwischenerw. } L \supseteq M \supseteq K \} \\ G &\mapsto \{x \in L \mid \forall \sigma \in G : \sigma(x) = x\} \\ \text{Gal}(L, M) &\leftarrow M \end{aligned}$$

eine Galoisverbindung (dabei sind Untergruppen durch Inklusion und Zwischenerweiterungen umgekehrt durch Inklusion geordnet).

Lemma. Sei $F \dashv G$ eine Adjunktion. Dann gilt:

- F bewahrt Kolimiten (**LAPC**, left-adjoints preserve colimits).
- G bewahrt Limiten (**RAPL**, right-adjoints preserve limits).

Beweis (RAPL). Sei \mathcal{J} eine kleine Indexkategorie. Es gilt:

$$\begin{aligned} (F \circ -) \circ (\Delta : \mathcal{C} \rightarrow [\mathcal{J}, \mathcal{C}]) \dashv (\varprojlim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \rightarrow \mathcal{C}) \circ (G \circ -), \\ (\Delta : \mathcal{D} \rightarrow [\mathcal{J}, \mathcal{D}]) \circ F \dashv G \circ (\varinjlim : [\mathcal{J}, \mathcal{D}] \rightarrow \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Da $(F \circ -) \circ \Delta \equiv \Delta \circ F$, folgt aus der Eindeutigkeit des Rechtsadjungierten $\varprojlim(G \circ D) \cong G(\varprojlim D)$ natürlich in D .

Simpliziale Mengen

Def. **Verklebedaten** sind gegeben durch einen Funktor

$$X : \Delta_{\text{strikt}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ_{strikt} die Kategorie mit den Mengen $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und streng monotonen Abbildungen.

Notation. $X_{(n)} := X([n])$ heißt Menge der n -Simplizes.

Def. Das **Standard- n -Simplex** $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die von den $(n+1)$ Standardbasisvektoren aufgespannte affinlineare Hülle. Eine streng monotone Abb $f : [n] \rightarrow [m]$ induziert durch Abbilden des i -ten Basisvektors auf den $f(i)$ -ten eine Inklusion $\Delta_f : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$,

Def. Die **geometrische Realisierung** von Verklebedaten X ist der topologische Raum

$$|X| := \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R$$

Dabei ist $X_{(n)}$ diskret. Die Äquivalenzrelation R wird erzeugt von $(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x))$ mit $t \in \Delta_m$, $x \in X_{(n)}$, $f : [m] \rightarrow [n]$ s.m.s.

Def. Das **k -Skelett** $\text{sk}_k X$ von Verklebedaten X ist definiert durch $(\text{sk}_k X)_{(n)} := \{x \in X_{(n)} \mid n \leq k\}$, $(\text{sk}_k X)(f) := X(f)$ sofern möglich

Def. Eine **simpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ die Kategorie mit den Mengen $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und monotonen Abbildungen.

Notation. $X_n := X([n])$ heißt Menge der n -Simplizes.

Def. Eine **simpliziale Abbildung** zw. simpl. Mengen X und Y ist eine nat. Transformation zwischen den Funktoren $X, Y : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Def. Die Kategorie der simplizialen Mengen ist **sSet** := $[\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$.

Def. Die **geometrische Realisierung** einer simplizialen Menge X ist der topologische Raum

$$|X| := \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n) \right) / R$$

Die Äquivalenzrelation R wird dabei erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \quad \text{mit } t \in \Delta_m, x \in X_n \text{ u. } f \in \text{Hom}_{\Delta}([m], [n]).$$

Def. Ein topologischer Raum heißt **trianguliert**, wenn er die Realisierung von Verklebedaten ist.

Def. Der **Nerv** einer Überdeckung $X = \cup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$ eines topologischen Raumes ist die simpliziale Menge

$$\begin{aligned} X_n &:= \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in A^{n+1} \mid U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\} \\ X(f)(\alpha_0, \dots, \alpha_n) &:= (\alpha_{f(0)}, \dots, \alpha_{f(n)}) \quad \text{für } f : [m] \rightarrow [n]. \end{aligned}$$

Bem. Falls die Überdeckung lokal endlich ist und alle nichtleeren, endlichen Schnitte $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}$ zusammenziehbar sind, so ist die geom. Realisierung des Nerves der Überdeckung homotopieäq. zu X .

Def. Sei Y ein topol. Raum. Die simpliziale Menge X der **singulären Simplizes** in Y ist

$$X_n := \{\text{stetige Abb. } \sigma : \Delta_n \rightarrow Y\}, \quad X_n(f)(\sigma) := \sigma \circ \Delta_f.$$

Bem. Diese Konstruktion stiftet eine Funktor $\text{Sing} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$.

Def. $\Delta[p]_n := \{g : [n] \rightarrow [p] \text{ monoton steigend}\}$, $\Delta[p](f)(g) := g \circ f$

Def. Der **klassifizierende Raum** einer Gruppe G ist gegeben durch die Realisierung der simpl. Menge BG mit $(BG)_n := G^n$ und

$$BG(f : [m] \rightarrow [n])(g_1, \dots, g_n) := (h_1, \dots, h_m), \quad h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j.$$

Def. Ein n -Simplex $x \in X_n$ heißt **degeneriert**, falls eine monotone surjektive Abbildung $f : [n] \rightarrow [m]$, $n > m$ und ein Element $y \in X_m$ existiert mit $x = X(f)(y)$.

Def. Seien X Verklebedaten. Wir konstruieren eine dazugehörige simpliziale Menge \tilde{X} wie folgt:

$$\tilde{X}_n := \{(x, g) \mid x \in X_{(k)}, g : [n] \rightarrow [k] \text{ monoton und surjektiv}\},$$

Für eine monotone Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ und $(x, g) \in \tilde{X}_n$ schreiben wir zunächst $g \circ f = f_1 \circ f_2$ mit einer Injektion f_1 und einer Surjektion f_2 und setzen $\tilde{X}(f)(x, g) := (X(f)(x), f_2)$.

Prop. Eine simpliziale Menge \tilde{X} kann genau dann aus (dann eindeutigen) Verklebedaten gewonnen werden, falls für alle nicht-degenerierten Simplizes $x \in \tilde{X}_n$ und streng monotonen Abbildungen $f : [m] \rightarrow [n]$ auch $\tilde{X}(f)(x) \in \tilde{X}_m$ nicht degeneriert ist.

Prop. Seien X Verklebedaten, \tilde{X} die entsprechende simpliziale Menge. Dann gilt $|X| \approx |\tilde{X}|$.

Def. Das **k -Skelett** $\text{sk}_k X$ einer simplizialen Menge X ist geg. durch

$$(\text{sk}_k X)_n := \{X(f)(x) \mid p \leq k, f : [n] \rightarrow [p] \text{ monoton}, x \in X_p\}.$$

Def. Eine simpliziale Menge X hat **Dimension** n , falls $X = \text{sk}_n X$.

Prop. Geom. Realisierung ist ein Funktor $|-| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Bspe. • Eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eines topologischen Raumes ist Verfeinerung von $(V_\beta)_{\beta \in B}$, wenn es eine Abbildung $\psi : A \rightarrow B$ gibt, sodass $U_\alpha \subseteq V_{\psi(\alpha)}$ für alle $\alpha \in A$. Dies induziert eine simpliziale Abb. zwischen den Nerven der Überdeckungen durch

$$F_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n) := (\psi(\alpha_0), \dots, \psi(\alpha_n)).$$

• Ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow H$ stiftet eine Abbildung $BG \rightarrow BH$ zwischen den klassifizierenden Räumen durch

$$F(g_1, \dots, g_n) := (\phi(g_1), \dots, \phi(g_n)).$$

Def. Ein **simplizialer topologischer Raum** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}.$$

Bem. Die geometrische Realisierung eines simplizialen topol. Raumes ist definiert wie die einer simplizialen Menge mit dem Unterschied, dass X_n im Allg. nicht die diskrete Topologie trägt.

Def. Eine **bisimpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Notation. $X_{nm} := X([n], [m])$

Bsp. Das **direkte Produkt** von simplizialen Mengen X und Y ist die bisimpliziale Menge

$$(X \times Y)_n := X_n \times Y_n, \quad (X \times Y)(f, g)(x, y) := (f(x), g(y)).$$

Def. Die **Diagonale** DX einer bisimplizialen Menge X ist die simpliziale Menge mit $(DX)_n := X_{nn}$ und $DX(f) := X(f, f)$.

Def. Sei X eine bisimpliziale Menge.

- Setze $|X|^D := |DX|$.
- Definiere einen simplizialen topologischen Raum X^I durch

$$X_n^I := |X_{\bullet n}|, \quad X^I(g) := |X(\text{id}, g)|.$$

$$\text{Setze } |X|^{I, II} := |II, I|.$$

- Definiere analog $|X|^{II, I}$.

Satz (Eilenberg-Zilber). $|X|^D \cong |X|^{I, II} \cong |X|^{II, I}$ kanonisch.

Garben

Def. • Eine mengenwertige **Prägarbe** \mathcal{F} auf einem topol. Raum X ist ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Dabei ist $\mathbf{Ouv}(X)$ die Präordnungs-Kategorie der offenen Teilmengen von X geordnet durch Inklusion.

- Allgemeiner ist eine \mathcal{C} -wertige Prägarbe ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ (z. B. $\mathcal{C} = \mathbf{AbGrp}, \mathbf{R-Mod}, \mathbf{Top}$).
- Ein Morphismus zwischen Prägarben \mathcal{F} und \mathcal{G} auf demselben topol. Raum ist eine natürliche Transformation zwischen \mathcal{F} und \mathcal{G} .

Notation. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe

- $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$ heißt Menge der **Schnitte** von \mathcal{F} über U .
- $r_{UV} := \mathcal{F}(V \subseteq U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ heißt **Restriktionsabb.**
- $x|_V := r_{UV}(x)$ für $V \subseteq U$ und $x \in \mathcal{F}(U)$ heißt **Einschränkung** von x auf V .

Def. Eine **Garbe** auf einem topol. Raum X ist eine Prägarbe \mathcal{F} , für die gilt: Für alle Familien $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen und Schnitten $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$, die miteinander verträglich sind, d. h.

$$\forall i, j \in I : s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j},$$

gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(\cup_{i \in I} U_i)$ mit $\forall i \in I : s_i = s|_{U_i}$. Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismen zw. den Prägarben.

Bem. Sei \mathcal{F} eine (Prä-)Garbe auf X und $U \subseteq X$ offen. Dann definiert $(\mathcal{F}|_U)(V) := \mathcal{F}(U \cap V)$ eine (Prä-)Garbe auf U .

Def. Eine Sequenz $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ von (Prä-)Garben abelscher Gruppen auf X heißt **exakt** bei \mathcal{G} , falls für alle offenen $U \subset X$ die Sequenz $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ exakt bei $\mathcal{G}(U)$ ist.

Def. Sei $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben auf X . Definiere Prägarben \mathcal{K} und \mathcal{C} auf X durch

$$\mathcal{K}(U) := \ker(f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)), \quad \mathcal{C}(U) := \mathcal{G}(U) / \text{im}(f_U).$$

Prop. Sei $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sogar ein Morphismus von Garben. Dann ist auch \mathcal{K} eine Garbe.

Achtung. Aber \mathcal{C} ist im Allgemeinen keine Garbe!

Def. Sei \mathcal{F} eine Garbe auf Y . Der **Halm** von \mathcal{F} in $y \in Y$ ist

$$\mathcal{F}_y := \{(U, s) \mid U \subseteq Y \text{ offen}, y \in U, s \in \mathcal{F}(U)\} / \sim, \\ (U, s) \sim (V, t) : \iff \exists W \subset U \cap V \text{ offen}, y \in W : s|_W = t|_W.$$

Notation. $s_y := [(U, s)]$ für $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $y \in U$.

Sprechweise. Elemente $[t] \in \mathcal{F}_y$ heißen **Keime** in y .

Def. Sei \mathcal{F} eine Garbe auf Y , $Z \subseteq Y$ beliebig. Definiere

$$\Gamma(Z, \mathcal{F}) := \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{F}),$$

wobei der Limes über alle offenen $U \subset X$ mit $Z \subseteq U$ läuft.

Beobachtung. $\mathcal{F}_y = \Gamma(\{y\}, \mathcal{F})$

Def. Der **Totalraum** F einer Prägarbe \mathcal{F} auf Y ist

$$F := \coprod_{y \in Y} \mathcal{F}_y$$

mit der Topologie erzeugt durch die Mengen

$$\{s_y \mid y \in U\} \quad \text{für } U \subseteq X \text{ offen}, s \in \mathcal{F}(U).$$

Bem. Mit dieser Topologie ist die Projektion $\pi : F \rightarrow Y$ stetig und ein lokaler Homöomorphismus.

Def. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf Y . Die **Garbifizierung** \mathcal{F}^+ von \mathcal{F} ist die Garbe der stetigen Schnitte von $\pi : F \rightarrow Y$, also

$$\mathcal{F}^+(U) := \{f : U \rightarrow F \mid \pi \circ f = (i : U \hookrightarrow Y)\}.$$

Prop. Es ex. ein kanonischer Morphismus $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ def. durch

$$s \in \mathcal{F}(U) \mapsto (y \mapsto s_y : U \rightarrow F).$$

Wenn \mathcal{F} schon eine Garbe ist, dann ist f ein Isomorphismus.

Def. Sei A eine Menge (oder ab. Gruppe, ...), Y ein topol. Raum.

- Die **konstante Prägarbe** \mathbf{A} mit Faser A auf Y ist def. durch

$$\mathbf{A}(U) := A, \quad r_{UV} := \text{id}_A \quad \text{für alle } V \subseteq U \subseteq Y.$$

- Die **konstante Garbe** mit Faser A ist die Garbifizierung $\mathcal{A} = \mathbf{A}^+$ von \mathbf{A} .

Def. Eine Garbe \mathcal{F} auf Y heißt **lokal konstant**, falls jeder offene Punkt in Y eine offene Umgebung U besitzt, sodass $\mathcal{F}|_U$ isomorph zu einer konstanten Garbe ist.

Def. Eine Garbe \mathcal{F} auf einem topologischen Raum Y heißt ...

- ... **welk** (flabby, flasque), wenn die Einschränkungsabbildungen

$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$$

für alle *offenen* $U \subseteq Y$ surjektiv sind.

- ... **weich** (soft, mou), wenn die Einschränkungsabbildungen

$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{F})$$

für alle *abgeschlossenen* $A \subseteq Y$ surjektiv sind.

Def. Eine Garbe \mathcal{F} ab. Gruppen auf einem topol. Raum Y heißt **fein** (fine, fin), wenn für je zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq Y$ ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ existiert, sodass α auf einer offenen Umgebung von A_1 Null und auf einer offenen Umgebung von A_2 die Identität ist.

(Lokal) geringte Räume

Def. Eine topol. / glatte **Mannigfaltigkeit** ist ein Paar (M, \mathcal{O}_M) , wobei M ein Hausdorffraum und \mathcal{O}_M eine Garbe auf M ist, sodass jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, sodass $\mathcal{O}_M|U$ isomorph zu einer Garbe von stetigen / glatten Funktionen auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

Def. Ein Morphismus $\Phi : (M, \mathcal{O}_M) \rightarrow (N, \mathcal{O}_N)$ zwischen topol. / glatten Mften. ist geg. durch eine stetige Abb. $\phi : M \rightarrow N$, sodass

$$\forall U \subseteq N \text{ offen} : \forall f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_N) : f \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_M).$$

Bem. Diese Definitionen sind äquivalent zu den üblichen Alte-Römer-Definitionen von Mannigfaltigkeiten über Atlanten.

Def. Ein **geringter Raum** ist ein Paar (M, \mathcal{O}_M) , wobei M ein topol. Raum und \mathcal{O}_M eine Ringgarbe auf M ist. Ein Morphismus $\Phi : (M, \mathcal{O}_M) \rightarrow (N, \mathcal{O}_N)$ zwischen geringten Räumen ist ein Paar (φ, θ) , wobei $\varphi : M \rightarrow N$ stetig und

$$\theta = (\theta_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_N) \rightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_M))_{U \subseteq N \text{ offen}}$$

eine Familie von Ringhomomorphismen ist, sodass

$$\forall V \subseteq U \subseteq N : \theta_U(-)|_{\varphi^{-1}(V)} = \theta_V(-|_V).$$

Sprechweise. \mathcal{O}_M heißt **Strukturgarbe**.

Bem. Man kann θ als Garbenmorph. $\theta : \mathcal{O}_N \rightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_M)$ auffassen.

Bsp. Sei (M, \mathcal{O}_M) eine glatte Mft. Sei \mathcal{D}_M die Garbe der linearen, derivativen Operatoren, also

$$\mathcal{D}_M(U) := \{ P : \mathcal{O}_M(U) \rightarrow \mathcal{O}_M(U), P = \sum f_I(z) \frac{\partial^I}{\partial z^I} \text{ in lok. Koord. } \}.$$

Dann ist (M, \mathcal{D}_M) ein geringter Raum.

Def. Sei A ein komm. Ring. Das **Spektrum** von A ist

$$\text{Spec}(A) := \{ \text{Primideale } \mathfrak{p} \subsetneq A \}$$

mit der sogenannten **Zariski-Topologie** mit offenen Mengen

$$\mathcal{T} := \{ D(S) \mid S \subseteq A \} \subset \mathcal{P}(\text{Spec}(A)), \quad D(S) := \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid S \not\subseteq \mathfrak{p} \}.$$

Die abgeschlossenen Mengen sind von der Form $V(S)$ für $S \subseteq A$ mit

$$V(S) := \text{Spec}(A) \setminus D(S) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid S \subseteq \mathfrak{p} \}.$$

Für $U \subseteq \text{Spec}(A)$ offen sei $\Delta(U)$ das Komplement der Vereinigung der Ideale in U . Da $\Delta(U)$ multiplikativ abgeschlossen ist und $V \subseteq U \implies \Delta(V) \subseteq \Delta(U)$ gilt, können wir eine Prägarbe komm. Ringe \mathcal{O}' auf $\text{Spec}(A)$ wie folgt definieren:

$$\mathcal{O}'(U) := (\Delta(U))^{-1}A, \quad r_{UV}([\frac{s}{t}]) := [\frac{s}{t}].$$

Sei $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)} := (\mathcal{O}')^+$ die Garbifizierung von \mathcal{O}' .

Der geringte Raum $(\text{Spec}(A), \mathcal{O})$ heißt **affines Schema** von A .

Bem. Sei A ein Integritätsbereich. Dann ist das Nullideal $(0) \in \text{Spec}(A)$ ein generischer Punkt, d. h. der topologische Abschluss von (0) ist ganz $\text{Spec}(A)$.

Lemma. $(\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}} := \Delta(\mathfrak{p})^{-1}A$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$

Def. Ein Ring R heißt **lokal**, wenn er eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- Er besitzt genau ein maximales Linksideal.
- Er besitzt genau ein maximales Rechtsideal.
- Wenn eine endliche (evtl. leere) Summe von Ringelementen eine Einheit ist, dann auch einer der Summanden (insb. gilt $0 \neq 1$).
- $\text{Spec}(R)$ hat genau einen abgeschl. Punkt (das maximale Ideal).

Bem. In lok. Ringen stimmen max. Links- und Rechtsideal überein.

Def. Seien R und S lokale Ringe mit max. Idealen $\mathfrak{m} \subset R$ und $\mathfrak{n} \subset S$. Ein **lokaler Ringhomomorphismus** zwischen R und S ist ein Ringhomomorphismus $f : R \rightarrow S$ mit $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$.

Def. Ein geringter Raum (M, \mathcal{O}_M) heißt **lokal geringt**, wenn die Fasern $\mathcal{O}_{M,x}$ für alle $x \in M$ lokale Ringe sind.

Ein Morphismus $\Phi = (\varphi, \theta) : (M, \mathcal{O}_M) \rightarrow (N, \mathcal{O}_N)$ heißt **Morph. von lokal geringten Räumen**, wenn für alle $x \in M$ die ind. Abb.

$$\theta_x : \mathcal{O}_{N,y} \rightarrow \mathcal{O}_{M,x}$$

ein lokaler Homomorphismus von lokalen Ringen ist.

Bspe. Affine Schemata und Mften sind lokal geringte Räume.

Def. Ein **Schema** ist ein lokal geringter Raum (S, \mathcal{O}_S) , der lokal isomorph zum affinen Spektrum eines Ringes ist, d. h. jedes $x \in S$ besitzt eine offene Umgebung U , sodass $(U, \mathcal{O}_S|U)$ als lokal geringter Raum isomorph zum affinen Schema eines komm. Ringes ist.

Komplexe und (Ko-)Homologie

Def. • Ein **Kettenkomplex** C_{\bullet} ist eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen

$$\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1} \text{ mit der Eigenschaft } \partial_{n-1} \circ \partial_n = 0.$$

- Ein **Kokettenkomplex** C^{\bullet} ist eine Folge $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ mit der Eigenschaft $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Def. Sei C_{\bullet} ein Kettenkomplex.

- C_n heißt Gruppe der **n -Ketten**,
- $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$ heißt **Randabbildung**,
- $Z_n(C_{\bullet}) := \ker \partial_n \subset C_n(C_{\bullet})$ heißt Gruppe der **n -Zykel**,
- $B_n(C_{\bullet}) := \text{im } \partial_{n+1} \subset Z_n(C_{\bullet})$ heißt Gruppe der **n -Ränder**,
- $H_n(C_{\bullet}) := Z_n(C_{\bullet}) / B_n(C_{\bullet})$ heißt **n -te Homologiegruppe**.

Analog nennt man für einen Kokettenkomplex C^{\bullet}

- δ^n **Korandabbildung**, • C^n **n -Koketten**,
- $Z^n := \ker \delta^n$ **n -Kozykel**, • $B^n := \text{im } \delta^{n-1}$ **n -Koränder**,
- $H^n(C^{\bullet}) := Z^n(C^{\bullet}) / B^n(C^{\bullet})$ **n -te Kohomologiegruppe**.

Def. Eine Morphismus $f : C_{\bullet} \rightarrow D_{\bullet}$ (bzw. $f : C^{\bullet} \rightarrow D^{\bullet}$) zwischen (Ko-)Kettenkomplexen ist eine Familie von Abbildungen

$$(f_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\text{bzw. } (f^n : C^n \rightarrow D^n)_{n \in \mathbb{N}}),$$

die mit den Randabbildungen verträglich sind, d. h.

$$f_{n-1} \circ \partial_n^C = \partial_n^D \circ f_n \quad (\text{bzw. } f^{n+1} \circ \delta_C^n = \delta_D^n \circ f^n) \quad \text{für alle } n.$$

Prop. H_n (bzw. H^n) ist ein Funktor von der Kategorie der (Ko-)Kettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Def. Sei X eine simpl. Menge. Sei $C_n(X)$ die von den n -Simplizes X_n erzeugte abelsche Gruppe (d. h. die Gruppe der endl. formalen Linearkombinationen mit Koeffizienten in \mathbb{Z}). Sei $\delta_n^i : [n-1] \rightarrow [n]$ diejenige streng monotone Abb. mit $i \notin \text{im } \delta_n^i$. Definiere

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X), \quad \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_{\sigma} \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_{\sigma} \sum_{i=0}^n (-1)^i X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Prop. $(C_{\bullet}(X), \partial_{\bullet})$ ist ein Kettenkomplex (d. h. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$)

Def. Sei X eine simpl. Menge und A eine ab. Gruppe. Dann ist ...

- ... der **Kettenkomplex** $(C_{\bullet}(X; A), \partial_{\bullet})$ von X mit **Koeffizienten** in A definiert durch

$$C_n(X; A) := C_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad \partial_n := \partial_n \otimes \text{id} : C_n(X; A) \rightarrow C_{n-1}(X; A).$$

- ... der **Kokettenkomplex** $(C^{\bullet}(X; A), \delta^{\bullet})$ von X mit **Koeffizienten** in A definiert durch

$$C^n(X; A) := \text{Hom}(C^n(X), A),$$

$$\delta^n : C^n(X; A) \rightarrow C^{n+1}(X; A), \quad f \mapsto f \circ \delta_{n+1}.$$

Beobachtung. $C_n(X; \mathbb{Z}) = C_n(X)$

Notation. Sei X eine simpliziale Menge. Setze

- $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$, • $H^n(X) := H^n(C^\bullet(X; \mathbb{Z}))$,
- $H_n(X; A) := H_n(C_\bullet(X; A))$, • $H^n(X; A) := H^n(C^\bullet(X; A))$.

Prop. Für jede simpl. Menge X ex. ein kanonischer Isomorphismus

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \text{freie ab. Gr. erzeugt von Zshgskomponenten von } |X|.$$

Def. Der **Kegel** CX über Verklebedaten X ist definiert durch

$$(CX)_{(0)} := X_{(0)} \amalg \{\star\}, \quad (CX)_{(n)} := X_{(n)} \amalg (X_{(n-1)} \times \{\star\}),$$

$$(CX)(f)(x) := X(f)(x),$$

$$(CX)(f)(x, \star) := \begin{cases} X(i \mapsto f(i-1))(x), & \text{wenn } f(0) > 0, \\ (X(i \mapsto f(i+1)-1))(x, \star), & \text{wenn } f(0) = 0. \end{cases}$$

Def. Für Verklebedaten ist der zugeh. (Ko-)Kettenkomplex (mit Koeffizienten) genauso definiert wie für simpliziale Mengen.

Prop. $H_0(CX) = \mathbb{Z}$, $H_{>0}(CX) = 0$

Def. Sei X eine simpliziale Menge.

- Ein **homol. Koeffizientensystem** \mathcal{A} auf X ist ein Funktor $\mathcal{A} : (1 \downarrow X) \rightarrow \mathbf{AbGrp}$.

Dabei ist $1 : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{Set}$ der Funktor, der konstant $\{\star\}$ ist (und $\mathbf{1}$ die Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismus).

Expliziter besteht ein Koeffizientensystem aus einer abelschen Gruppe \mathcal{A}_σ für jedes n -Simplex $\sigma \in X_n$ und Abbildungen

$$\mathcal{A}(f, \sigma) : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathcal{A}_{X(f)(\sigma)} \text{ für alle } \sigma \in X_n, f \in \text{Hom}_\Delta([m], [n]) \text{ mit}$$

$$\mathcal{A}(\text{id}, \sigma) = \text{id}, \quad \mathcal{A}(f \circ g, \sigma) = \mathcal{A}(g, X(f)(\sigma)) \circ \mathcal{A}(f, \sigma).$$

- Ein **kohomol. Koeffizientensystem** \mathcal{B} auf X ist ein Funktor $\mathcal{B} : (1 \downarrow X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$.
- Ein Morphismus zw. (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf derselben simpl. Menge ist eine natürliche Transformation.

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung und X deren Nerv. Dann definiert

$$\mathcal{F}_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} := \{U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\},$$

$$\mathcal{F}(f, (\alpha_0, \dots, \alpha_n))(\phi) := \text{passende Einschränkung von } \phi.$$

ein kohomologisches Koeffizientensystem auf X .

Def. Sei \mathcal{A} ein homologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X . Wir setzen

$$C_n(X; \mathcal{A}) := \left\{ \text{formale endl. Linearkomb. } \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \text{ mit } \lambda_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma \right\}$$

und definieren $\partial_n : C_n(X; \mathcal{A}) \rightarrow C_{n-1}(X; \mathcal{A})$ durch

$$\sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in X_n} \sum_{i=0}^n (-1)^i \mathcal{A}(\partial_n^i, \sigma)(\lambda_\sigma) \cdot X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Die Homologiegruppen des so def. Kettenkomplexes $C_\bullet(X; \mathcal{A})$ heißen **Homologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in \mathcal{A}** .

Def. Sei \mathcal{B} ein kohomologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X . Wir setzen

$$C^n(X; \mathcal{B}) := \{ \text{Funktionen } f : (\sigma \in X_n) \rightarrow \mathcal{B}_\sigma \}$$

und definieren $\delta_n : C^n(X; \mathcal{B}) \rightarrow C_{n+1}(X; \mathcal{B})$ durch

$$\delta_n(f)(\sigma) := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \mathcal{B}(\partial_{n+1}^i, \sigma)(f(X(\partial_{n+1}^i)(\sigma))).$$

Die Kohomologiegruppen des so def. Kokettenkomplexes $C^\bullet(X; \mathcal{B})$ heißen **Kohomologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in \mathcal{B}** .

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $U = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$, X und \mathcal{F} wie im letzten Beispiel. Die Homologiegruppen $H^n(X, \mathcal{F})$ werden Čech-Kohomologiegruppen der Garbe der stetigen Funktionen auf Y bzgl. der Überdeckung U genannt.

Def. Eine (lange) **exakte Sequenz** ab. Gruppen ist ein (Ko-)Kettenkomplex mit verschwindenden Homologiegruppen, d. h.

$$\text{im } \partial_n = \ker \partial_{n-1} \quad \text{für alle } n.$$

Def. Eine **kurze ex. Sequenz** (k. e. S.) ist eine ex. Seq. der Form

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0.$$

Def. Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine k. e. S. in einer abelschen Kategorie \mathcal{A} . Die Sequenz heißt **spaltend**, falls sie isomorph zur k. e. S. $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus C \rightarrow C \rightarrow 0$ ist.

Prop. Für eine Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ sind äquivalent:

- Die Sequenz spaltet.
- Es existiert eine Retraktion $r : B \rightarrow A$ mit $r \circ f = \text{id}_A$.
- Es existiert ein Schnitt $s : C \rightarrow B$ mit $g \circ s = \text{id}_C$.

Def. Eine Sequenz $0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow 0$ von Komplexen heißt **exakt**, wenn für alle n die Seq. $0 \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow 0$ exakt ist.

Prop. Eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C^\bullet \rightarrow 0$ von Kokettenkomplexen induziert eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^\bullet)} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{H^n(p^\bullet)} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A^\bullet) \rightarrow \dots$$

Lemma. Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann sind ebenfalls exakt:

$$0 \rightarrow C_\bullet(X; A) \rightarrow C_\bullet(X; B) \rightarrow C_\bullet(X; C) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow C^\bullet(X; A) \rightarrow C^\bullet(X; B) \rightarrow C^\bullet(X; C) \rightarrow 0.$$

Korollar. Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann existieren lange exakte Sequenzen

$$\dots \rightarrow H_n(X; A) \rightarrow H_n(X; B) \rightarrow H_n(X; C) \rightarrow H_{n-1}(X; A) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H^n(X; A) \rightarrow H^n(X; B) \rightarrow H^n(X; C) \rightarrow H^{n+1}(X; A) \rightarrow \dots$$

Def. Eine Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'' \rightarrow 0$ von (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf einer simpl. Menge X heißt **exakt**, falls

$$0 \rightarrow \mathcal{B}'_\sigma \rightarrow \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathcal{B}''_\sigma \rightarrow 0 \quad \text{für alle } \sigma \in X_n \text{ exakt ist.}$$

Lemma. Eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'' \rightarrow 0$ von (ko-)homologischen Koeff. systemen induziert kurze ex. Sequenzen

$$0 \rightarrow C_\bullet(X; \mathcal{B}') \rightarrow C_\bullet(X; \mathcal{B}) \rightarrow C_\bullet(X; \mathcal{B}'') \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow C^\bullet(X; \mathcal{B}') \rightarrow C^\bullet(X; \mathcal{B}) \rightarrow C^\bullet(X; \mathcal{B}'') \rightarrow 0$$

und damit auch entsprechende lange exakte Sequenzen.

Def. Eine **simpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$.

Def. Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe.

Dann ist (A_\bullet, ∂) ein Kettenkomplex mit

$$\partial_n : A_n \rightarrow A_{n-1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i A(\partial_n^i)(a).$$

Def. Eine **kosimpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A : \Delta \rightarrow \mathbf{AbGrp}$.

Def. Sei A eine kosimpliziale abelsche Gruppe.

Dann ist (A^\bullet, δ) ein Kokettenkomplex mit

$$\delta^n : A^n \rightarrow A^{n+1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i A(\partial_{n+1}^i)(a).$$

Def. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine (nicht unbedingt offene) Überdeckung von Y und \mathcal{F} eine Garbe ab. Gruppen auf Y . Die kosimpliziale abelsche Gruppe $\check{C}(U, \mathcal{F})$ der **Čech-Koketten** ist

$$\check{C}^m(U, \mathcal{F}) := \prod_{\alpha_0, \dots, \alpha_m \in A} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_m}),$$

$$\check{C}(U, \mathcal{F})(f : [m] \rightarrow [n])((f_{\alpha_0, \dots, \alpha_m})_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}) := (f_{g(0), \dots, g(m)}|_{U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}})_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}.$$

Bem. Die Randabb. im zugeh. Kokettenkomplex ist gegeben durch

$$(\delta^n \phi)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}} := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \phi_{\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{n+1}}.$$

Def. Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes heißen **Čech-Homologiegruppen** von \mathcal{F} bzgl. der Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Bem. $\check{H}(U, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$ hängt nicht von der Überdeckung ab.

Def. Sei Y ein topol. Raum und X dessen simpl. Menge der singulären Simplexes. Die Homologiegruppen von $C_\bullet(X; A)$ heißen **singuläre Homologiegruppen** $H_n(Y; A)$ von Y mit Koeff. A .

Def. Sei M eine C^∞ -Mft, $\Omega^k(M)$ das $C^\infty(M)$ -Modul der k -Formen auf M . Die **äußere Ableitung** $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ ist in lokalen Koordinaten (x^1, \dots, x^n) definiert durch

$$d \left(\sum_{|I|=k} f_I dx^I \right) = \sum_{|I|=k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I.$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Komplexes $\Omega^\bullet(M)$ heißen **De-Rham-Kohomologiegruppen**.

Def. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra und A ein \mathfrak{g} -Modul. Setze $C^k(\mathfrak{g}, A) := L(\wedge^k \mathfrak{g}, A)$ und definiere $d : C^k(\mathfrak{g}, A) \rightarrow C^{k+1}(\mathfrak{g}, A)$ durch eine allgemeine Cartan-Formel

$$(dc)(g_1, \dots, g_{k+1}) := \sum_{1 \leq j < l \leq k+1} (-1)^{j+l-1} c([g_j, g_l], g_1, \dots, \hat{g}_j, \dots, \hat{g}_l, \dots, g_{k+1})$$

$$+ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j g_j c(g_1, \dots, \hat{g}_j, \dots, g_{k+1}).$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Kokettenkomplexes werden mit $H^\bullet(\mathfrak{g}, A)$ bezeichnet.

Def. Eine **Kettenhomotopie** zw. Morphismen $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ von Kettenkomplexen ist eine Folge von Homomorphismen $k_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1}^D \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n^C = f_n - g_n$.

Lemma. Seien $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt

$$H_n(f) = H_n(g) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Prop. • Seien $\phi, \psi : X \rightarrow Y$ homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Dann sind die induzierten Abbildungen $\phi_*, \psi_* : C_\bullet(X; A) \rightarrow C_\bullet(Y; A)$ kettenhomotop.

• Seien $\phi, \psi : M \rightarrow N$ zwei glatt homotope Abbildungen von C^∞ -Mften. Dann sind $\phi^*, \psi^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$.

Korollar. Homotopieäquivalente Räume besitzen isomorphe singuläre Homologiegruppen.