

Zusammenfassung Modellkategorien

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel (S, \leq) bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung \leq auf S .

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\dots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \dots$.

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz). Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit \mathcal{O}_n bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$[(S, \leq_S)] \leq [(T, \leq_T)] \iff \exists \text{ inj. monotone Abb. } (S, \leq_S) \rightarrow (T, \leq_T).$

Notation. $\bullet 0 := [\emptyset]$, $\bullet n := [\{1, \dots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, $\bullet \omega := [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega^\omega, \dots$

Prinzip (**Transfinite Induktion**).

Sei $P : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert: Für $\alpha = [(S, \leq_S)]$ und $\beta = [(T, \leq_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

$\bullet \alpha + \beta := [(S \sqcup T, \leq_{S \sqcup T})]$, wobei gilt:

$\leq_{S \sqcup T} \upharpoonright_{S \times S} := \leq_S, \quad \leq_{S \sqcup T} \upharpoonright_{T \times T} := \leq_T, \quad S <_{S \sqcup T} T.$

$\bullet \alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leq_{S \times T})]$ mit der lexikogr. Ordnung

$(s_1, t_1) \leq_{S \times T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leq_S s_2)$

$\bullet \alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \rightarrow T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leq)]$ mit

$f < g \iff \exists t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 := [(\emptyset, \leq)] \in \mathcal{O}_n$.

b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.

c) Die Limeszahl $\lim A := \sup A$ einer Teilmenge $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

a) $\alpha + 0 := \alpha$ b) $\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$ c) $\alpha + \lim A := \lim \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in A\}$
 $\alpha \cdot 0 := 0$ $\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$ $\alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\}$
 $\alpha^0 := 1$ $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$ $\alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und (S, \cdot) eine Halbgruppe ist mit

$\bullet a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \bullet a \cdot 0 = 0.$

Lem (Rechenregeln in \mathcal{O}_n). $\bullet \alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ $\bullet \alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
 $\bullet \alpha^0 = 1$ $\bullet 0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ $\bullet 1^\alpha = 1$ $\bullet \alpha^1 = \alpha$
 $\bullet \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ $\bullet (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

$\bullet \mathcal{O}_n$ ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)

\bullet Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht!*

\bullet Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.

\bullet Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.

\bullet Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:

$\forall \beta < \gamma : \quad \alpha + \beta < \alpha + \gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \quad (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \quad (\alpha > 1).$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \dots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \dots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.

Kategorientheorie

Def. Eine (**schwache**) **2-Kategorie** \mathcal{C} besteht aus

- einer Ansammlung $\text{Ob}(\mathcal{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ A \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \end{array} B \right\},$$

- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$

- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einem Objekt $\text{Id}_{\mathcal{C}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einem natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} : - \circ (- \circ -) \implies (- \circ -) \circ -,$$

wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ

$$\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \text{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$

- und für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ natürlichen Isomorphismen

$$\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \implies \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} : (- \circ \text{Id}_{\mathcal{C}}) \implies \text{Id}_{\text{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} K(H(GF)) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}}} & (KH)(GF) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{G}}} ((KH)G)H \\ \downarrow K\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}} & & \alpha_{\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}} F \uparrow \\ K((HG)F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{G}}} & (K(HG))F \end{array}$$

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathcal{C}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G \circ (\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{D}, \mathcal{E}}} & (G \circ \text{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \\ & \searrow G\lambda_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} & \swarrow \rho_{\mathcal{D}, \mathcal{E}} F \\ & G \circ F & \end{array}$$

Bspe. \bullet Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.

- Jede Kategorie \mathcal{C} ist natürlich eine 2-Kategorie.

- Die Kategorie der Ringe \mathbb{R} mit $\text{Ob}(\mathbb{R}) := \{\text{Ringe mit Eins}\}$ und $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) := \text{Kat. der } B\text{-}A\text{-Bimoduln mit } N \circ M := N \otimes_B M$ für $M \in \text{Hom}(A, B)$ und $N \in \text{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\text{Id}_A := A$.

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann \otimes anstelle von \circ geschrieben.

Def. Sei $S : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $E \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ von S ist eine Familie $\alpha_c : E \rightarrow S(c, c)$, $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ von Morphismen in \mathcal{A} , sodass für alle $(f : c \rightarrow c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & S(c, c) & & \\ & \nearrow \alpha_c & & \searrow S(\text{id}_c, f) & \\ E & & & & S(c, c') \\ & \searrow \alpha_{c'} & & \nearrow S(f, \text{id}_{c'}) & \\ & & S(c', c') & & \end{array}$$

kommutiert, und E universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler **S-Keil**.

Notation. $E = \int_c S(c, c).$

Bem. Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden: $\lim F = \int_c F(c)$; der Integrand ist $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$.

Bem. Das duale Konzept ist das eines ~~Anfangs~~ Koendes $\int_c^{\text{c}} S(c, c).$

Bsp. Seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_c \text{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \cong \text{Nat}(F, G).$$

Satz (Fubini). Sei $S : \mathcal{D}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d, c)} S(d, d, c, c) \cong \iint_{dc} S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und $\int_c S(d, d', c, c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

Bsp. Sei R ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt $*$. Ein additiver Funktor $R^{(\text{op})} \rightarrow \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein R -Linksmodul (bzw. R -Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Bsp (Ninja-Yoneda-Lemma). Für jede Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ gilt

$$F \cong \int^c F(c) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

Def. Sei \mathcal{C} eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ist geg. durch Morphismen $\eta : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ (genannt **Eins**) und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$ (**Koeins**) mit $G\epsilon \circ \eta G = \text{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \text{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.

Lem. R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bem. Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren. Dann gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\text{Hom}(F \circ -, -) \cong \text{Hom}(-, G \circ -)$$

Bsp. $\exists f \dashv f^* \dashv \forall f$

Bsp. Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein B - A -Modul M ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn M als Rechts- A -Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

Bem. Sind η und ϵ in $F \dashv G$ sogar Isomorphismen, so heißt $F \dashv G$ auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von F und G sowie einem der Morphismen ϵ, η) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

Kan-Erweiterungen

Def. Sei $A \xleftarrow{T} M \xrightarrow{K} C$ ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE) (R, ϵ) von T längs K besteht aus

- einem Morphismus $R : C \rightarrow A$
- einem 2-Morphismus $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$,

sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE $(\tilde{R} : C \rightarrow A, \epsilon : \tilde{R} \circ K \Rightarrow T)$ gibt es genau ein $\sigma : \tilde{R} \Rightarrow R$ mit $\epsilon \circ \sigma K = \tilde{\epsilon}$. Notation: $R = \text{Ran}_K(T)$

Bem. (R, ϵ) ist RKE von T längs $K \iff \text{Hom}(\tilde{R}, R) \rightarrow \text{Hom}(\tilde{R} \circ K, T)$ ist bijektiv für alle $\tilde{R} : C \rightarrow A$.

Prop. RKE sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bsp. Die RKE eines bel. Morphismus $T : M \rightarrow A$ längs Id_M existiert stets und ist gegeben durch $(T, T \circ \text{Id}_M \Rightarrow T)$.

Bsp. In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\text{Ran}_K(T) = (\text{Hom}_M(K, T), \text{ev} : \text{Hom}_M(K, T) \otimes_C K \Rightarrow T).$$

Bsp. Sei $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{1}$ der eindeutig best. Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von T längs K dasselbe wie ein Limes von T .

Thm. Seien $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ und $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ Funktoren. Existiere für alle Objekte $c \in \mathcal{C}$ der Limes

$$R(c) := \lim_{f:c \rightarrow Km} T(m).$$

Dabei ist die Indexkategorie des Limes die Kommakat. $\Delta(\mathcal{C}) \downarrow K$. Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ausdehnen und zwar zu einer RKE von T längs K .

Bem. Ist \mathcal{M} klein und \mathcal{C} lokal klein und ist \mathcal{A} vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$, $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktweise RKE**.

Lem. Eine RKE ist genau dann punktweise, wenn sie für alle $a \in \mathcal{A}$ unter dem Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$ erhalten bleibt.

Thm. Sei $K : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Betrachte $K^* : [\mathcal{C}, \mathcal{A}] \rightarrow [\mathcal{M}, \mathcal{A}]$.

- Wenn ein Funktor $\text{Ran}_K : [\mathcal{M}, \mathcal{A}] \rightarrow [\mathcal{C}, \mathcal{A}]$ mit $K^* \dashv \text{Ran}_K$ ex., so ist $\text{Ran}_K(T)$ für alle $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ eine RKE von T längs K .
- Existiere für alle $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ eine RKE $\text{Ran}_K(T)$. Dann kann man die Zuordnung $T \mapsto \text{Ran}_K(T)$ zu einem Rechtsadjungierten von K^* ausdehnen.

Thm. Sei $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- G besitzt einen Linksadjungierten.
- $\text{Ran}_G(\text{Id}_A)$ existiert und bleibt von G erhalten, d. h. $G \circ \text{Ran}_G(\text{Id}_A) = \text{Ran}_G(G \circ \text{Id}_A)$.

In diesem Fall gilt $\text{Ran}_G(\text{Id}_A) \dashv G$ und $\text{Ran}_G(\text{Id}_A)$ wird sogar von allen Morphismen $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Y}$ bewahrt.

Thm. Rechtsadjungierte bewahren RKE.

Kor. Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

Bsp. Sei $G : \mathbf{Field} \rightarrow \mathbf{Ring}$ der Vergissfunktor. Dann ist

$$(\text{Ran}_G(G))(R) = \prod_{\mathfrak{p} \in R} \text{Quot}(R/\mathfrak{p}).$$

Algebraische Strukturen in Kategorien

Def. Eine **Retrakt** ist ein Morphismus $r : Y \rightarrow X$, sodass ein Morphismus $i : X \rightarrow Y$ mit $r \circ i = \text{id}_X$ existiert. Sprechweise: X ist ein Retrakt von Y (vermöge i).

Bsp. Ein Modul U ist genau dann Retrakt von einem Modul M , wenn U ein direkter Summand von M ist.

Prop. „ $-$ ist Retrakt von $-$ “ ist eine reflexive und trans. Relation.

Def. Ein **Retrakt eines Morphismus** $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}$ ist ein Morph. $g : X \rightarrow Y$, sodass es ein komm. Diagramm folgender Form gibt:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & A \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{s} & B \end{array}$$

Bem. Ein Retrakt von $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ ist ein Retrakt von $f \in \text{Ob}(\mathcal{C}^{\rightarrow})$.

Prop. • Retrakte von Isomorphismen sind Isomorphismen.

- Sei $f \circ g = \text{id}$. Dann ist f ein Retrakt von $g \circ f$.

Prop. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist die Klasse $\{f \in \mathcal{C}^{\rightarrow} \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$ abgeschlossen unter Retrakten.

Def. Sei $i : A \rightarrow X$ und $p : E \rightarrow B$. Dann werden als äq. definiert:

- p ist **i -injektiv** • i ist **p -projektiv** • $i \boxtimes p$
- i hat die Linkshochhebungseigenschaft (LHHE) bzgl. p
- Für alle f, g wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales λ , sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow i & \exists \lambda \nearrow & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Bsp. Wegeliftung aus der Topologie: $i : \{0\} \rightarrow [0, 1]$ erfüllt die LHHE bezüglich allen Überlagerungen $\pi : E \rightarrow B$.

Bsp. Sei P ein Objekt einer abelschen Kategorie \mathcal{A} . Dann ist P genau dann **projektiv**, wenn $(0 \rightarrow P)$ die LHHE bzgl. aller Epimorphismen in \mathcal{A} hat. Dual ist I injektiv, wenn alle Monos in \mathcal{A} die LHHE bzgl. $(I \rightarrow 0)$ besitzen.

Bsp. In der Kategorie der Mengen gilt: Alle Injektionen haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

Lem (**Retrakt-Argument**). Sei $f = q \circ j$. Ist f q -projektiv ($f \boxtimes q$), so ist f ein Retrakt von j .

Zellenkomplexe

Def. Sei λ eine Ordinalzahl. Eine **λ -Sequenz** in einer Kategorie \mathcal{C} ist ein kolimesbewahrender Funktor $X : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ (wobei man λ als Präordnungskategorie aller $\beta < \lambda$ auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus $X_0 \rightarrow \text{colim}_{\beta < \lambda} X_\beta$.

Bem. Kolimesbewahrung bedeutet: $\text{colim}_{\alpha < \beta} X_\alpha = X_\beta$ für alle $\beta < \lambda$.

Def. Sei \mathcal{C} eine kovollständige Kategorie, $I \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge.

- Ein **relativer I -Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer λ -Sequenz Z , sodass $\forall \alpha \in \mathcal{O}_n$ mit $\alpha + 1 < \lambda$ ein Pushoutdiagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & Z_\alpha \\ \downarrow f & \searrow r & \downarrow \\ B & \longrightarrow & Z_{\alpha+1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Anklebeabbildung} \\ \\ \leftarrow \text{Zelle} \end{array}$$

mit $f \in I$ existiert. Sprechweise:

„ $Z_{\alpha+1}$ entsteht aus Z_α , indem wir B längs C ankleben“

- Ein Objekt $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **I -Zellenkomplex**, wenn der Morph. $0 \rightarrow A$ aus dem initialen Obj. ein relativer I -Zellenkomplex ist.

Bsp. CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind I -Zellenkomplexe mit $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geq 0\}$ (und $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$).

- Bspe.**
- Identitäten $A \rightarrow A$ sind relative I -Zellenkomplexe.
 - Das initiale Objekt ist ein absoluter I -Zellenkomplex.

Lem. Sei $Z : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ eine λ -Sequenz. Sei jeder Morphismus $Z_\beta \rightarrow Z_{\beta+1}$ ($\beta + 1 < \lambda$) ein Pushout eines Morphismus aus I . Dann ist die transfinite Komposition von Z ein I -Zellenkomplex.

Thm. Die Klasse der relativen I -Zellenkomplex ist abgeschl. unter:

- transfinite Kompositionen
- Isomorphismen
- Koprodukt

Def. Eine Unterkategorie $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **links-saturiert**, falls \mathcal{L} abgeschlossen ist unter Pushouts, transfiniten Kompositionen und Retrakten.

Lem. Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ links-saturiert. Dann ist \mathcal{L} unter Koprodukten abgeschlossen und enthält alle Isomorphismen.

Bsp. Sei $R \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ eine Klasse von Morphismen in einer Kat. \mathcal{C} . Sei \mathcal{L} die Unterkat. mit $\text{Mor}(\mathcal{L}) := \square R := \{i \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid \forall r \in R : i \square r\}$. Dann ist \mathcal{L} schon links-saturiert.

Prop. Für $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ gilt $L_1^\square \subseteq L_2^\square$.

- Def.**
- $L \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **proj. abgeschlossen**, falls $L \supseteq \square(L^\square)$.
 - $R \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **injektiv abgeschlossen**, falls $R \supseteq (\square L)^\square$.

Prop. $\square(L^\square)$ ist die projektive Hülle von L , d. h. die kleinste Klasse von Morphismen, die projektiv abgeschlossen ist und L umfasst.

Prop. Die projektive Hülle von L ist links-saturiert. Ist L schon projektiv abgeschlossen, so ist L insbesondere links-saturiert.

Def. Ein Paar (L, R) von Klassen von Morphismen von \mathcal{C} **faktorisiert** \mathcal{C} , falls $\forall f \in \text{Mor}(\mathcal{C}) : \exists i \in L, p \in R : f = p \circ i$.

Def. Ein faktorisiertes Paar (L, R) heißt **schwaches Faktorisierungssystem** (SFS), falls $L = \square R$ und $R = L^\square$.

Prop. Sei (L, R) faktorisierend. Dann ist (L, R) genau dann ein SFS, wenn $L \square R$ und L und R unter Retrakten abgeschlossen sind.

Bsp. ($\{\text{Surjektionen}\}, \{\text{Injektionen}\}$) ist ein (S)FS in **Set**

Modellkategorien

Motto. Modellkat. sind ein Werkzeug, math. Theorien zu studieren.

Def. Eine Klasse $W \subseteq \text{Mor}(\mathcal{C})$ von Morphismen erfüllt die **2-aus-3-Eigenschaft**, falls für jede Komposition $h = g \circ f$ in \mathcal{C} gilt: Liegen zwei der drei Morphismen f, g, h in W , so auch der dritte.

Def. $W \subseteq \mathcal{C}$ wie eben heißt **Unterkat. schwacher Äquivalenzen**, falls W die 2-aus-3-Eig. erfüllt und abgeschl. unter Retrakten ist.

Bsp. Sei $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist $W := F^{-1}(\{\text{Isos in } \mathcal{D}\})$ eine Unterkategorie schwacher Äquivalenzen.

Def. Ein Tripel $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ von Unterkategorien einer Kategorie \mathcal{M} heißt **Modellstruktur** auf \mathcal{M} , falls sowohl $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ und $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ schwache Faktorisationssysteme sind und W die 2-aus-3-Eigenschaft erfüllt.

Def. Eine bivollständige Kategorie \mathcal{M} zusammen mit einer Modellstruktur $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ heißt eine **Modellkategorie**.

Sprechweise. Man verwendet folgende Bezeichnungen und Pfeile:

\mathcal{W}	$\xrightarrow{\sim}$	schwache Äquivalenz
\mathcal{C}	\hookrightarrow	Kofaserungen
$\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$	$\xrightarrow{\sim}$	azyklische Kofaserungen
\mathcal{F}	\rightarrow	Faserungen
$\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$	$\xrightarrow{\sim}$	azyklische Faserungen

Bem. Ist $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ eine Modellstruktur auf \mathcal{M} , so ist $(\mathcal{W}^{\text{op}}, \mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{F}^{\text{op}})$ eine Modellstruktur auf \mathcal{C}^{op} .

Bem. Wegen $\mathcal{C} = \square(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ bzw. $\mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^\square$ ist das Datum $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ überbestimmt.

Bsp. Sei \mathcal{M} bivollständig. Sei $\mathcal{W} = \{\text{Iso}\} = \mathcal{C}$. Dann wird \mathcal{M} mit $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ eine Modellkategorie.

Prop. In einer Modellkategorie sind \mathcal{C} und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ links-saturiert.

Lem. \mathcal{W} enthält alle Isomorphismen und ist unter Retrakten abgeschlossen, bildet also eine Unterkat. schwacher Äquivalenzen.

Notation. Das initiale Objekt von \mathcal{M} wird mit \emptyset , das terminale Objekt mit $*$ bezeichnet.

Def.

- Ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ heißt **kofasernd**, falls $\emptyset \rightarrow X$ eine Kofaserung ist. Eine azyklische Faserung $q : QX \xrightarrow{\sim} X$ mit QX kofasernd heißt **kofasernder Ersatz** (oder Approx.) von X .

- Dual heißt $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ **fasernd**, falls X in \mathcal{M}^{op} kofasernd ist und $X \xrightarrow{\sim} RX$ mit RX fasernd heißt **fasernder Ersatz** von X .

Bsp. Sei $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ beliebig. Dann faktorisiere $\emptyset \rightarrow X$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \uparrow \sim \\ & & QX \end{array}$$

Man erhält also immer einen kofasernden Ersatz QX für X . Dual gibt es immer einen fasernden Ersatz RX für X .

Prop. Seien $q : QX \xrightarrow{\sim} X$ und $q' : Q'X \xrightarrow{\sim} X$ zwei kofasernde Approximationen von X . Dann existiert eine schwache Äquivalenz $\xi : QX \xrightarrow{\sim} Q'X$ mit $q' \circ \xi = q$.

Def. Ein Obj. X heißt **bifasernd**, falls es fasernd und kofasernd ist.

Prop. Für alle $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$ sind RQX und QRX schwach äquivalent und beide bifasernd.

Lem (Ken Brown). Sei $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ ein Funktor, \mathcal{M} eine Modellkategorie, \mathcal{N} besitze eine Unterkat. \mathcal{W}' schwacher Äquivalenzen. Wenn F azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten nach \mathcal{W}' abbildet, so bildet F alle schwachen Äquivalenzen zwischen kofasernden Objekten nach \mathcal{W}' ab.

Def. Ein **Zylinderobjekt** $X \times I$ zu einem $X \in \text{Ob}(\mathcal{M})$, \mathcal{M} Modellkategorie ist ein Objekt zusammen mit Morphismen wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow i_0 \sim & & \searrow \text{id} & \\ & & X \times I & \xrightarrow{p} & X \\ & \nearrow i_1 \sim & & \nearrow \text{id} & \\ X & & & & \end{array}$$

Das Zylinderobjekt $X \times I$ heißt **gut**, falls $X \amalg X \rightarrow X \times I$ eine Kofaserung ist. Ein guter Zylinder heißt **sehr gut**, falls $X \times I \xrightarrow{p} X$ eine azyklische Faserung ist.

Bsp. Sei $\nabla : X \amalg X \rightarrow X$ die Kodiagonale. Faktorisiere wir diese wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ & \searrow & \\ & & X \amalg X \hookrightarrow X \times I \xrightarrow{\sim} X \\ & \nearrow & \\ X & & \end{array}$$

Dann erhalten wir ein Zylinderobjekt $X \times I$ für X . Dieses ist sehr gut, wenn X kofasernd ist.

Def. Zwei Morphismen $f, g : X \rightarrow Y$ in \mathcal{M} heißen **links-homotop** (geschrieben $f \sim^l g$), falls ein Zylinder $X \times I$ und ein Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow \sim & & \searrow f & \\ & & X \times I & \xrightarrow{h} & Y \\ & \nearrow \sim & & \nearrow g & \\ X & & & & \end{array}$$

existiert. Wir definieren $\pi^l(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y) / \langle \sim^l \rangle$.