Zusammenfassung Funktionalanalysis

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Notation. Sei im Folgenden $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition. Ein **Prä-Hilbertraum** ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **Fréchet-Metrik** ist eine Funktion $\rho : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für $x, y \in V$ gilt:

- $\rho(x) = \rho(-x)$
- $\rho(x) = 0 \iff x = 0$
- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A_1, A_2 \subset X$, so ist

$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) := \inf\{d(x, y) \,|\, x \in A_1, y \in A_2\}$$

der **Abstand** zwischen A_1 und A_2.

Definition. Ein **topologischer Raum** ist ein paar (X, τ), wobei X eine Menge und $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von offenen Mengen, sodass gilt:

- $\emptyset \in \tau$
- $\tilde{\tau} \subset \tau \implies \bigcup\limits_{U \in \tilde{\tau}} U \in \tau$
- $U_1, U_2 \in \tau \implies U_1 \cap U_2 \in \tau$

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **Haussdorff-Raum**, wenn folgendes Trennungsaxiom erfüllt ist:

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : \exists U_1, U_2 \in \tau : x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \tau$, also das Komplement offen ist.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißen

$$A^\circ := \{x \in X \,|\, \exists U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ und } U \subset A\}$$
$$\overline{A} := \{x \in X \,|\, \forall U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$$

Abschluss bzw. **Inneres** von A.

Definition. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$, dann ist auch (A, τ_A) ein topologischer Raum mit der *Relativtopologie* $\tau_A := \{U \cap A \,|\, U \in \tau\}$.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **dicht** in X, falls $\overline{A} = X$.

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **separabel**, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt separabel, falls (A, τ_A) separabel ist.

Definition. Seien τ_1, τ_2 zwei Topologien auf einer Menge X. Dann heißt τ_2 **stärker** (oder feiner) als τ_1 bzw. τ_1 **schwächer** (oder gröber) als τ_2, falls $\tau_1 \subset \tau_2$.

Definition. Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X und τ_1 und τ_2 die induzierten Topologien. Dann heißt d_1 stärker als d_2, falls τ_1 stärker ist als τ_2.

Satz. Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann gilt:

- $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1 \iff \exists\, C > 0 : \forall\, x \in X : \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$
- $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent $\iff \exists\, c, C > 0 : \forall\, x \in X : c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$

Definition. Die **p-Norm** auf dem $\mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_\infty := \|x\|_max := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Bemerkung. Alle p-Normen sind zueinander äquivalent.

Definition. Seien $S \subset X$ eine Menge, (X, τ_X) und (Y, τ_Y) Hausdorff-Räume sowie $x_0 \in S$. Eine Funktion $f : S \to Y$ heißt **stetig** in x_0, falls gilt:

$$\forall\, V \in \tau_Y : f(x_0) \in V \implies \exists\, U \in \tau_X \text{ mit } x_0 \in U \wedge f(U \cap S) \subset V$$

Ist $X = S$, so heißt $f : X \to Y$ stetige Abbildung, falls f stetig in allen Punkten $x_0 \in X$ ist, d. h. $V \in \tau_Y \implies f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Bemerkung. In metrischen Räumen ist diese Definition äquivalent zur üblichen Folgendefinition.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls $d(x_k, x_l) \xrightarrow{k,l \to \infty} 0$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Folge, falls es eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ gibt mit $x_{k_i} - x \xrightarrow{i \to \infty} 0$.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.

Definition. Ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt **Banachraum**, falls er vollständig bzgl. der induzierten Metrik ist.

Definition. Ein Banachraum heißt **Banach-Algebra**, falls er eine Algebra ist mit $\|x \cdot y\|_X \leq \|x\|_x \cdot \|y\|_X$.

Definition. Ein **Hilbertraum** ist ein Prähilbertraum, der vollständig bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm ist.

Bemerkung. Ein normierter Raum ist genau dann ein Prähilbertraum, falls die Parallelogrammidentität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

gilt. Folglich ist ein Banachraum genau dann ein Hilbertraum, falls die Parallelogrammidentität gilt.

Definition. Sei $\mathbb{K}^\mathbb{N} := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,|\, \forall\, i \in \mathbb{N} : x_i \in \mathbb{K}\}$ die Menge aller Folgen in $\mathbb{K}$. Mit der Fréchet-Metrik

$$\rho(x) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|x_i|}{1 + |x_i|} < 1$$

wird der **Folgenraum** $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ zu einem Banachraum.

Satz. Sind $(x^k) = (x_i^k)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ und $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$, so gilt

$$\rho(x^k - x) \xrightarrow{k \to \infty} 0 \iff \forall\, i \in \mathbb{N} : x_i^k \xrightarrow{k \to \infty} x_i.$$

Definition. Die Norm

$$\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty], \text{ für } 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \in [0, \infty]$$

heißt **ℓ^p-Norm** auf dem Raum $\ell^p(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \,|\, \|x\|_{\ell^p} < \infty\}$.

Satz. Der Raum $\ell^p(\mathbb{K})$ ist vollständig, also ein Banachraum.

Bemerkung. Im Fall $p = 2$ wird $\ell^2(\mathbb{K})$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle_{\ell^2} := \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$.

Definition (Vervollständigung)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Betrachte die Menge $X^\mathbb{N}$ aller Folgen in X und definiere

$$\tilde{X} := \{x \in X^\mathbb{N} \,|\, x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\} / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \text{ in } \tilde{X} \iff d(x_j, y_j) \xrightarrow{j \to \infty} 0.$$

Diese Menge wird mit der Metrik

$$\tilde{d}(x, y) := \lim_{i \to \infty} d(x_i, y_i)$$

zu einem vollständigen metrischen Raum. Die injektive Abbildung $J : X \to \tilde{X}$, welche $x \in X$ auf die konstante Folge $(x)_{i \in \mathbb{N}}$, ist isometrisch, d. h. sie erhält. Wir können also X als einen dichten Unterraum von $\tilde{X}$ auffassen. Man nennt $\tilde{X}$ **Vervollständigung** von X.

Definition (**Raum der beschränkten Funktionen**)**.** Sei S eine Menge und Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$ mit Norm $y \mapsto |y|$. Dann ist

$$B(S; Y) := \{f : S \to Y \,|\, f(S) \text{ ist eine beschränkte Teilmenge von } Y\}$$

die Menge der beschränkten Funktionen von B nach Y. Diese Menge ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und wird mit der Supremumsnorm $\|f\|_{B(S)} := \sup\limits_{x \in S} |f(x)|$ zu einem Banachraum.

Satz. Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $Y \subset X$ abgeschlossen, so ist auch (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum.

Definition (**Raum stetiger Funktionen auf einem Kompaktum**)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen (d. h. kompakt) und Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$ mit Norm $y \mapsto |y|$, so ist

$$\mathcal{C}^0(S; Y) := \mathcal{C}(S; Y) := \{f : S \to Y \,|\, f \text{ ist stetig }\}$$

die Menge der stetigen Funktionen von S nach Y. Sie ist ein abgeschlossener Unterraum von $B(S; Y)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(S;Y)} = \|\cdot\|_{B(S;Y)}$, also ein Banachraum.

Bemerkung. Für $Y = \mathbb{K}$ ist $\mathcal{C}^0(S; \mathbb{K}) = \mathcal{C}(S)$ eine kommutative Banach-Algebra mit dem Produkt $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **präkompakt**, falls es für jedes $\epsilon > 0$ eine Überdeckung von A mit endlich vielen ϵ-Kugeln $A \subset B_\epsilon(x_1) \cup ... \cup B_\epsilon(x_{n_\epsilon})$ mit $x_1, x_{n_\epsilon} \in X$ gibt.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **kompakt**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedinungen erfüllt ist:

- A ist **überdeckungskompakt**: Für jede Überdeckung $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ mit $A_i \Subset X$, gibt es eine endl. Teilmenge $J \subset I$ mit $A \subset \bigcup\limits_{i \in J} A_i$.
- A ist **folgenkompakt**: Jede Folge in A besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A.
- $(A, d|_A)$ ist vollständig und A ist **präkompakt**.

Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

- A präkompakt $\implies$ A beschränkt,
- A kompakt $\implies$ A abgeschlossen und präkompakt,
- Falls X vollständig, dann A präkompakt $\iff$ $\overline{A}$ kompakt.

Satz. Sei $A \subset \mathbb{K}^n$. Dann gilt:

- A präkompakt $\iff$ A beschränkt,
- A kompakt $\iff$ A abgeschlossen und beschränkt (Heine-Borel).

Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ kompakt. Dann gibt es zu $x \in X$ ein $a \in A$ mit $d(x, a) = \mathrm{dist}(x, A)$.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt (K_n) eine **Ausschöpfung** von S, falls

- $S = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$,
- $\emptyset \neq K_i \subset K_{i+1} \subset S$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und
- für alle $x \in S$ gibt es ein $\delta > 0$ und $i \in \mathbb{N}$, sodass $B_\delta(x) \subset K_i$.

Bemerkung. Zu $S \Subset \mathbb{R}^n$ und $S \mathrel{\Subset\!\!\!\!\bullet} \mathbb{R}^n$ existiert eine Ausschöpfung.

Definition (Raum stetiger Funktionen auf Menge mit Ausschöpfung). Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ so, dass eine Ausschöpfung $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von S existiert und Y ein Banachraum. Dann bildet die Menge aller stetigen Funktionen

$$C^0(S; Y) := \{f : S \to Y \,|\, f \text{ ist stetig auf } S\}$$

einen K-Vektorraum und wird mit der Fréchet-Norm

$$\varrho(f) := \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \frac{\|f\|_{C^0(K_i)}}{1 + \|f\|_{C^0(K_i)}}$$

zu einem vollständigen metrischen Raum.

Bemerkung.
- Die von dieser Metrik erzeugte Topologie ist unabhängig von der Wahl der Ausschöpfung.
- Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so stimmt die Topologie mit der von $\|\cdot\|_{B(s)}$ überein.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Für $f : S \to Y$ heißt

$$\mathrm{supp} f := \{x \in S \,|\, f(x) \neq 0\}$$

Träger (engl. support) von f.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Dann ist

$$\mathcal{C}^0_0(S; Y) := \{f \in \mathcal{C}^0(S; Y) \,|\, \mathrm{supp} f \text{ ist kompakt in } S\}$$

die Menge der stetigen Fktn. mit kompaktem Träger von S nach Y.

Definition (Raum differenzierbarer Funktionen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge der differenzierbaren Funktionen von Ω nach Y

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}, Y) := \{f : \Omega \to Y \,|\, & f \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar in } \Omega \\ & \text{und für } k \leq m \text{ und } s_1, ..., s_k \in \{1, ..., n\} \\ & \text{ist } \partial_{s_1} ... \partial_{s_k} f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar } \} \end{aligned}$$

ein Vektorraum und mit folgender Norm ein Banachraum:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}$$

Bemerkung. In obiger Norm wird die Summe über alle k-fache partielle Ableitungen mit $k \leq m$ gebildet.

Satz. Sei X ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener echter Teilraum. Für $0 < \Theta < 1$ (falls X Hilbertraum, geht auch $\Theta = 1$) gibt es ein $x_\Theta \in X$ mit

$$\|x_0\| = 1 \quad \text{und} \Theta \leq \mathrm{dist}(x_\Theta, Y) \leq 1.$$

Satz. Für jeden normierten Raum X gilt:

$$\overline{B_1(0)} \text{ kompakt} \iff \dim(X) < \infty.$$

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, Y ein Banachraum und $A \subset \mathcal{C}^0(S, Y)$. Dann heißt A **gleichgradig stetig**, falls

$$\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \xrightarrow{|x-y| \to 0} 0.$$

Definition (Arzelà-Ascoli)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, Y ein endlichdimensionaler Banachraum und $A \subset \mathcal{C}^0(S, Y)$. Dann gilt

$$A \text{ präkompakt} \iff A \text{ ist beschränkt und gleichgradig stetig.}$$

Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Für $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, Y)$ sind dann äquivalent:

- Für alle $\xi \in \mathcal{C}^\infty_0$ gilt $\int\limits_\Omega (\xi \cdot g) \,\mathrm{d}x = 0$.
- Für alle beschränkten $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ mit $\overline{E} \subset \Omega$ gilt $\int\limits_E g \,\mathrm{d}x = 0$.
- Es gilt $g \overset{\text{f.ü.}}{=} 0$ in Ω.

Satz. Sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen X und Y. Dann sind äquivalent:

- T ist stetig.
- T ist stetig in 0.
- $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$.
- $\exists C > 0 : \forall x \in X : \|Tx\| \leq C \cdot \|x\|$.

Definition. Seien X, Y Vektorräume mit einer Topologie. Dann ist

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y \,|\, X \text{ ist linear und stetig }\}$$

die Menge aller **linearen Operatoren** zwischen X und Y. Falls die Stetigkeit nicht nur topologisch, sondern bezüglich einer Norm gilt, so redet man von **beschränkten Operatoren**.

Satz. Seien $X \neq \{0\}$, $Y \neq \{0\}$ Banachräume und $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt: Falls T invertierbar ist und $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, dann ist auch S invertierbar.

Bemerkung. Die Menge aller invertierbaren Operatoren in $\mathcal{L}(X, Y)$ ist somit eine offene Teilmenge.

Definition. Seien X und Y Banachräume über $\mathbb{K}$. Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ heißt **kompakter (linearer) Operator**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- $\overline{T(B_1(0))}$ ist kompakt.
- $T(B_1(0))$ ist präkompakt.
- Für alle beschränkten $M \subset X$ ist $T(M) \subset Y$ präkompakt.
- Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X besitzt $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in Y konvergente Teilfolge.

Definition. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dann ist $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ der **Dualraum** von X. Elemente von X' werden **lineare Funktionale** genannt.

Satz (Rieszscher Darstellungssatz)**.** Ist X ein Hilbertraum, so ist

$$J : X \to X', \quad x \mapsto y \mapsto (y, x)_X$$

ein isometrischer konjugiert linearer Isomorphismus.

Satz (Lax-Milgram)**.** Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $a : X \times X \to \mathbb{K}$ sesquilinear. Es gebe Konstanten c_0 und C_0 mit $0 < c_0 \leq C_0 < \infty$, sodass für alle $x, y \in X$ gilt:

- $|a(x, y)| \leq C_0 \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ (Stetigkeit)
- $Rea(x, x) \geq c_0 \cdot \|x\|^2$ (Koerzivität)

Dann existiert genau eine Abbildung $A : X \to X$ mit

$$a(y, x) = (y, Ax) \text{ für alle } x, y \in X.$$

Außerdem gilt: $A \in \mathcal{L}(X)$ ist ein invertierbarer Operator mit

$$\|A\| \leq C_0 \quad \text{und} \quad \|A^{-1}\| \leq \tfrac{1}{c_0}.$$

Satz. (Hahn-Banach) Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $Y \subset X$ ein Unterraum, $p : X \to \mathbb{R}$ linear und $f : Y \to \mathbb{R}$ linear, sodass $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in Y$. Dann existiert eine lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$ mit $f = F|_Y$ und $F \leq p$.

Satz. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Unterraum. Dann gibt es zu $y \in Y'$ ein $x' \in X'$ mit $x'|_Y = y'$ und $\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}$.

Satz. Sei Y abgeschlossener Unterraum des normierten Raumes X und $x_0 \in X \setminus Y$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ mit $x'|_Y = 0$, $\|x'\|_{X'} = 1$, $\langle x', x_0 \rangle = \mathrm{dist}(x_0, Y)$.

Bemerkung. Dann gibt es auch ein $x' \in X'$ mit $x'|_Y = 0$,

$$\|x'\|_{X'} = (\mathrm{dist}(x_0, Y))^{-1} \quad \text{und} \quad \langle x', x_0 \rangle = 1.$$

Satz. Seien X normierter Raum und $x_0 \in X$. Dann gilt

- Ist $x_0 \neq 0$, so gibt es $x'_0 \in X'$ mit $\|x'_0\|_{X'} = 1$ und $\langle x'_0, x_0 \rangle_{X' \times X} = \|x_0\|_X$.

- Ist $\langle x', x_0\rangle_{X'\times X} = 0$ für alle $x' \in X'$, so ist $x_0 = 0$.
- Durch $Tx' = \langle x', x_0\rangle_{X'\times X}$ für $x' \in X'$ ist ein $T \in \mathcal{L}(X', \mathbb{K}) = X''$, dem Bidualraum, definiert mit $\|T\| = \|x_0\|_X$.

Satz (Baire'scher Kategoriensatz)**.** Es sei $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum und $X = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mit abgeschlossenen Mengen $A_k \subset X$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int}(A_{k_0}) \neq \emptyset$.

Satz. Jede Basis eines unendlichdimesinoalen Banachraumes ist überabzählbar.

Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** Es sei X ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und Y ein normierter Raum. Gegeben sei eine Menge von Funktionen $F \subset \mathcal{C}^0(X,Y)$ mit $\forall x \in X : \sup\limits_{f\in F} \|f(x)\|_Y < \infty$. Dann gibt es ein $x_0 \in X$ und ein $\epsilon > 0$, sodass $\sup\limits_{B_\epsilon(x_0)} \sup\limits_{f\in F} \|f(x)\|_Y < \infty$.

Satz (Banach-Steinhaus)**.** Es sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum, $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\forall x \in X : \sup\limits_{T\in\mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty$. DAnn ist $\mathcal{T}$ eine beschränkte Menge in $\mathcal{L}(X,Y)$, d. h. $\sup\limits_{T\in\mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Definition. Seien X und Y topologische Räume, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ **offen**, falls für alle offenen $U \Subset X$ das Bild $f(U) \Subset Y$ offen ist.

Bemerkung. Ist f bijektiv, so ist f genau dann offen, wenn f^{-1} stetig ist. Sind X, Y normierte Räume und ist $T : X \to Y$ linear, so gilt: T ist offen $\iff \exists \delta > 0 : B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$.

Satz (von der offenen Abbildung)**.** Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann ist T genau dann surjektiv, wenn T offen ist.

Satz (von der inversen Abbildung)**.** Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ bijektiv, so ist T^{-1} stetig, also $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Satz (vom abgeschlossenen Graphen)**.** Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear. Dann ist $\operatorname{Graph}(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$ genau dann abgeschlossen, wenn T stetig ist. Dabei ist $\operatorname{Graph}(T) \subset X \times Y$ mit der **Graphennorm** $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Definition. Sei X ein Banachraum.

- Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X **konvergiert schwach** gegen $x \in X$ (notiert $x_k \xrightarrow[]{k\to\infty} x$), falls für alle $x' \in X'$ gilt:
$$\langle x', x_k\rangle_{X'\times X} \xrightarrow{k\to\infty} \langle x', x\rangle_{X'\times X}$$
- Eine Folge $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X' **konvergiert schwach*** gegen $x' \in X'$ (notiert $x'_k \xrightarrow[*]{k\to\infty} x'$), falls für alle $x \in X$ gilt:
$$\langle x'_k, x\rangle_{X'\times X} \xrightarrow{k\to\infty} \langle x', x\rangle_{X'\times X}$$
- Analog sind **schwache** und **schwache* Cauchyfolgen** definiert.
- Eine Menge $M \subset X$ (bzw. $M \subset X'$) heißt **schwach folgenkompakt** bzw. **schwach* folgenkompakt**, falls jede Folge in der Menge M eine schwach (bzw. schwach*) konvergente Teilfolge besitzt deren Grenzwert wieder in M liegt.

Bemerkung. Der schwache bzw. schwache* Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt. Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

Satz. Es gilt für $x, x_k \in X$, $x', x'_k \in X'$:
$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \text{ in } X \iff J_x x_k \xrightarrow[*]{k\to\infty} J_x x \text{ in } X''$$
$$x'_k \xrightarrow{k\to\infty} x' \text{ in } X' \implies x'_k \xrightarrow[*]{k\to\infty} x' \text{ in } X'$$

Lemma.
- Aus $x'_k \xrightarrow[*]{k\to\infty} x'$ in X' folgt $\|x'\|_{X'} \leq \liminf\limits_{k\to\infty} \|x'_k\|_{X'}$, aus $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ in X folgt $\|x\|_X \leq \liminf\limits_{k\to\infty} \|x_k\|_X$.
- Schwach bzw. schwach* konvergente Folgen sind beschränkt.
- Aus $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ in X und $x'_k \xrightarrow[*]{k\to\infty} x'$ in X' folgt $\langle x'_k, x_k\rangle_{X'\times X} \xrightarrow{k\to\infty} \langle x', x\rangle_{X'\times X}$. Dasselbe folgt mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ in X und $x'_k \xrightarrow{k\to\infty} x'$ in X'.

Achtung. In der letzten Behauptung müssen wir vorraussetzen, dass mindestens eine Folge stark konvergiert. Für beidesmal schwache/schwache* Konvergenz ist die Aussage i. A. falsch.

Satz (Banach-Alaoglu)**.** Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist die abgeschl. Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X'$ schwach folgenkompakt, d. h. jede beschränkte Folge in X' enthält eine schwach* konvergente Teilfolge.

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Dann ist $L^1(\Omega)$ separabel (Approximation durch Treppenfunktionen und der Satz besagt: Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^\infty(\Omega)$ beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein $f \in L^\infty(\Omega)$, sodass
$$\int_\Omega f_{k_l} x \cdot \overline{g}\, \mathrm{d} \xrightarrow{l\to\infty} \int_\Omega f \cdot \overline{g}\, \mathrm{d}x \quad \text{für alle } g \in L^1(\Omega)$$

Bemerkung. Schwach*-Konvergenz impliziert eine sogenannte Schwach*-Topologie in dem Sinne, dass man sagt, eine Folge $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X' ist bzgl. dieser Topologie konvergent, wenn sie punktweise für alle $x \in X$ konvergiert.

Definition. Sei X ein Banachraum und J_X die Isometrie bzgl. des Bidualraumes. Dann heißt X **reflexiv**, falls J_X surjektiv ist.

Lemma.
- Ist X reflexiv, so stimmen schwache* und schwache konvergenz in X' überein.
- Ist X reflexiv, so ist jeder abgeschlossene Unterraum von X reflexiv.
- Ist $T : X \to Y$ ein Isomorphismus, so gilt:
$$X \text{ reflexiv} \iff Y \text{ reflexiv}$$
- Es gilt: X reflexiv $\iff X'$ reflexiv.

Lemma. Für jeden Banachraum X gilt: X' separabel $\implies X$ separabel.

Bemerkung. Die Umkehrung gilt i. A. nicht! Gegenbeispiel: $X = L^1$.

Satz (Eberlein-Shmulyan)**.** Sei X reflexiver Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.

Beispiel.
- Hilberträume X sind reflexiv (folgt direkt aus dem Riesz'schen Darstellungssatz; im Reellen $J_X = (R_X R_{X'})^{-1}$, wobei $R_X : X \to X'$ der zugehörige isomorphismus). Daher: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X, so existiert eine Teilfolge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und $x \in X$, sodass
$$(y|x_{k_l})_X \xrightarrow{l\to\infty} (y|x)_X$$
für alle $y \in X$.
- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann ist $L^p(\Omega)$ reflexiv.
- L^1 und L^∞ sind genau dann nicht reflexiv, wenn sie unendlich-dimensional sind.

Bemerkung. Analog zur schwach*-Topologie kann man auch eine schwache Topologie einführen.

Satz (Trennungssatz)**.** Seien X ein normierter Raum, $M \subset X$ nicht leer, abgeschlossen, konvex und $x_0 \in X \setminus M$. Dann gibt es ein $x' \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit
$$Re\langle x', x\rangle_{X'\times X} \leq \alpha$$
für $x \in M$ und $Re\langle x', x_0\rangle_{X'\times X} > \alpha$.

Bemerkung. Es folgt $x' \neq 0$, also ist $\{x \in X \mid Re\langle x', x\rangle_{X'\times X} = \alpha\}$