Dyn. Systeme in der Zahlentheorie

Def. Ein **dynamisches System** ist ein kompakter metrischer Raum X mit einer Gruppen-Wirkung $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(X)$, $g \mapsto T_g$ oder einer Monoid-Wirkung $\rho : M \to \mathrm{End}(X)$, $m \mapsto T_m$.

Bem. Falls $G = \mathbb{Z}$ oder $M = \mathbb{N}$, dann bezeichnen wir mit $T \coloneqq T_1$ den Erzeuger der Aktion und nennen (X, T) ein **zykl. System**.

Def. Sei X ein topol. Raum, $T : X \to X$ stetig. Ein Punkt $x \in X$ heißt **wiederkehrend**, falls für für alle Umgebungen $V \subset X$ von x ein $n \geq 1$ existiert mit $T^n(x) \in V$.

Bem. Sei X sogar ein metrischer Raum, $x \in X$ wiederkehrend. Dann gibt es eine Folge (n_k) mit $d(T^{n_k}(x), x) \to 0$ für $k \to \infty$.

Def. Sei X ein topol. Raum, $T : X \to X$ stetig. Dann heißt

$$Q(x) \coloneqq \overline{\{T^n x \mid n \geq 1\}} \subseteq X$$

abgeschlossener Vorwärtsorbit von $x \in X$.

Lemma.
- $x \in X$ ist wiederkehrend $\iff$ $x \in Q(x)$
- $x \in Q(y) \implies T(x) \in Q(y) \iff Q(x) \subseteq Q(y)$
- Die Relation $xRy :\iff x \in Q(y)$ ist transitiv.

Thm. Sei X ein kompakter topol. Raum, $T : X \to X$ stetig. Dann gibt es einen wiederkehrenden Punkt $x \in X$.

Def. Sei K eine kompakte Gruppe, $a \in K$ und $T(x) \coloneqq ax$. Dann heißt (K, T) ein **Kronecker-System**.

Thm. In einem Kronecker-System sind alle $x \in K$ wiederkehrend.

Def. Ein Homomorphismus zwischen zwei dyn. Systemen (X, G) und (X', G) (zweimal die gleiche Gruppe oder Monoid G) ist eine G-äquivariante stetige Abbildung $\phi : X \to X'$.

Def. Ein dyn. System (Y, G) ist **Faktor** eines dyn. System (X, G), wenn es einen surjektiven Homomorphismus $(X, G) \to (Y, G)$ gibt. Man nennt (X, G) dann eine **Erweiterung** von (Y, G).

Bem. Sei $\phi : X \to Y$ surjektiv. Dann kann man Y mit der Menge der Fasern von ϕ identifizieren.

Thm. Sei $\phi : (X, T) \to (Y, T)$ ein Morphismus von zyklischen Systemen. Wenn $x \in X$ wiederkehrend ist, dann auch $\phi(x)$. Allgemeiner: $x \in Q(y) \implies \phi(x) \in Q(\phi(y))$

Def. Sei $(Y, T : Y \to Y)$ ein zyklisches System, K eine kompakte Gruppe und $\psi : Y \to K$ stetig. Setze

$$X \coloneqq Y \times K, \quad T : X \to X, \ (y, k) \mapsto (Ty, \psi(y)k).$$

Das System (X, T) wird **Gruppenerweiterung** von (Y, T) mit K oder **Schiefprodukt** von (Y, T) mit K genannt.

Bem. Die Gr. K wirkt auf $(X, T) = (Y \times K, T)$ durch Rechtstransl.:

$$R : K \to \mathrm{Aut}(X), \ k \mapsto R_k, \quad R_k(y, k') \coloneqq (y, k'k).$$

Die Homöomorphismen R_k kommutieren mit T, sind also Automorphismen des dyn. Systems (X, T).

Thm. Sei $(X = Y \times K, T)$ eine Gruppenerw. von (Y, T) und $y_0 \in Y$ wiederkehrend. Dann sind die Pkte $\{(y_0, k) \mid k \in K\}$ wiederkehrend.