Zusammenfassung Homologische Algebra

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker
(cc) (BY)

Dies ist eine übersetzte, korrigierte Zusammenfassung des Buches „Methods of Homological Algebra“ von S. I. Gelfand und Y. I. Manin.

Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie.

Konvention. Man übersetzt ein Diagramm folgendermaßen in eine Proposition: Es wird über Objekte und über Morphismen, die als durchgezogener Pfeil dargestellt werden, allquantifiziert, sofern das Obj. oder der Morph. noch nicht eingeführt wurde. Die Behauptung ist dann die Existenz der gestrichelten Morphismen, die das Diagramm kommutativ machen. Wenn der Morphismus mit einem Ausrufezeichen markiert ist, so wird eindeutige Existenz gefordert.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **lokal klein**, wenn $\mathrm{Hom}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge (keine echte Klasse) ist. Sie heißt **klein**, wenn auch die Klasse ihrer Objekte eine Menge ist. Sie heißt **endlich**, wenn Objekt- und Hom-Mengen sogar nur endlich sind.

Def. Funktoren $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ mit $\mathcal{J}$ klein heißen **Diagramme** in $\mathcal{C}$.

Def. Sei **Cat** die Kategorie mit kleinen Kategorien als Objekten und Funktoren als Morphismen.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{D}$ heißt **Unterkategorie** einer Kategorie $\mathcal{C}$ (notiert $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$), wenn für alle geeigneten X, Y, f, g gilt:

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \quad \text{und} \quad f \circ_{\mathcal{D}} g = f \circ_{\mathcal{C}} g.$$

Def. Eine Unterkategorie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **voll**, wenn

$$\forall\, X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \,:\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt ...

- ... **treu**, wenn für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ die Abbildung $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ injektiv ist.
- ... **voll**, wenn diese Abb. für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ surjektiv ist.

Bem. Die Einbettung einer (vollen) Unterkategorie ist ein (voll-)treuer Funktor.

Def.
- Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **initiales Objekt**, falls für alle $Y \in \mathrm{Ob}(Y)$ genau ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ existiert.
- Ein Objekt $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **terminales Objekt**, falls für alle $Y \in \mathrm{Ob}(Y)$ genau ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ existiert.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **punktiert**, falls initiales und terminales Objekt in $\mathcal{C}$ existieren und zusammenfallen.

Bspe. **Ab** und die Kat. der punktierten top. Räume sind punktiert.

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist ein **Kategorienäquivalenz**, falls es einen Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ mit $F \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ und $G \circ F \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt. Die Funktoren F und G heißen dann zueinander **quasiinvers** und die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ äquivalent.

Prop. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist genau dann eine Kategorienäquivalenz, wenn:
- F ist volltreu,
- $\forall\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \,:\, \exists\, X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \,:\, Y \cong F(X)$

Bsp. Sei B ein lokal wegzshgder, semi-lokal einfach zshgder topol. Raum. Dann ist die Kategorie $\mathrm{Cov}(B)$ der Überlagerungen von B äquivalent zur Kategorie $[\pi(B), \mathbf{Set}]$ der mengenwertigen Funktoren auf dem Fundamentalgruppoid von B. Dabei ist

$$F : \mathrm{Cov}(B) \to [\pi(B), \mathbf{Set}], \quad F(p : \tilde{B} \to B) \coloneqq G_{\tilde{B},p},$$
$$G_{\tilde{B},p}(b \in B) \coloneqq p^{-1}(b), \quad G_{\tilde{B},p}(\gamma : [0,1] \to B)(\tilde{b} \in p^{-1}(\gamma(0))) \coloneqq \tilde{\gamma}(1),$$
$$\text{mit } \tilde{\gamma} \text{ Liftung von } \gamma \text{ mit } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{b}.$$

Def. Zwei Ringe A und B heißen **Morita-äquivalent**, wenn ihre Kategorien der (Links/Rechts)-Moduln äquivalent sind.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Der **kontravariante Hom-Funktor** $h_X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ist definiert durch

$$h_X(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}(Y, X), \quad h_X(h : Y' \to Y)(g : Y \to X) \coloneqq g \circ h.$$

Allgemeiner gibt es den Funktor $\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ mit

$$\mathrm{Hom}(h : Y' \to Y, f : X \to X')(g : Y \to X) \coloneqq f \circ g \circ h.$$

Notation. $\hat{\mathcal{C}} \coloneqq [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$

Def. Ein Element $x \in X(Y) \coloneqq \mathrm{Hom}(Y, X)$ heißt **Y-Element** von X.

Def. Ein Funktor $F \in \mathrm{Ob}(\hat{\mathcal{C}})$ wird **dargestellt** durch $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, falls $F \cong h_X$. Er heißt **darstellbar**, falls ein solches X existiert.

Bsp. Sei k ein Körper. Für jede k-Algebra A ist dann

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[X], A), A), \quad \varphi \mapsto \varphi(X)$$

eine in A natürliche Bijektion. Somit stellt $k[X] \in \mathrm{Ob}(k\text{-}\mathbf{Alg})$ den Vergissfunktor $V : k\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$ (ko-)dar.

Def. Die **Yoneda-Einbettung** ist der Funktor

$$Y : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}, \quad X \mapsto h_X, \quad \phi \mapsto (\phi \circ - : X(Y) \to X'(Y))_{Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}.$$

Lem. Sei $F \in \hat{\mathcal{C}}$, $Y \in \mathcal{C}$. Ist dann $s \in F(Y)$, so existiert genau eine natürliche Transformation $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y) \to F$ mit $\eta(Y)(\mathrm{id}_Y) = s$. Ist η ein Isomorphismus, stellt also Y den Funktor F vermöge η dar, so heißt s die **universelle Familie**.

Kor (**Yoneda-Lemma**). Es gibt eine natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, F) \cong F(X) \quad \text{für alle } X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ F \in \hat{\mathcal{C}}.$$

Kor. Die Yoneda-Einbettung ist volltreu und liefert eine Kat'en-Äquivalenz von $\mathcal{C}$ und der vollen Unterkat. der darstellb. Funkt. in $\hat{\mathcal{C}}$.

Kor. Stellen Y und Y' beide den Funktor F dar (mittels natürlichen Transformationen α, β), so existiert genau ein Isomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(Y, Y')$, sodass $\alpha = \beta \circ \mathrm{Hom}(-, \varphi)$.

Def. Das **Produkt** von $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist ein Obj. $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, das $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, $U \mapsto X(U) \times Y(U)$, $\phi \mapsto ((- \circ \phi) \times (- \circ \phi))$ darstellt.

Bem. Diese Definition ist äquivalent zur folgenden:
Das Produkt von X, Y ist ein Objekt $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $p_X : Z \to X$ und $p_Y : Z \to Y$, falls

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl] \arrow[d, dashed, "!"] \arrow[dr] & \\ X & Z \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y. \end{tikzcd}$$

Def. Seien $\phi : X \to S$ und $\psi : Y \to S$ Abb. von Mengen.
Das Faserprodukt von X und Y über S ist

$$X \times_S Y \coloneqq \{(x, y) \in X \times Y \mid \phi(x) = \psi(y)\}.$$

Def. Sei $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, S)$.
Das **Faserprodukt** von X und Y über S ist ein Obj. in $\mathcal{C}$, das den Funktor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, $U \mapsto X(U) \times_{S(U)} Y(U)$ darstellt.

Bem. Das Faserprodukt von X und Y über S ist das Produkt von $X \xrightarrow{\phi} S$ und $Y \xrightarrow{\psi} S$ in der Scheibenkategorie $\mathcal{C}/S$.

Def. Eine **Gruppenstruktur** auf einem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist gegeben durch Gruppenstrukturen auf $\mathrm{Hom}(Y, X)$ für alle $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Gruppenmorphismen $\mathrm{Hom}(Y, X) \to \mathrm{Hom}(Y', X)$ für jeden Morphismus $\phi : Y' \to Y$ (die die offensichtlichen Axiome erfüllen).

Bem. Falls $\mathcal{C}$ ein term. Obj. 1 und die Produkte $X \times X$ und $X \times X \times X$ besitzt, dann ist eine Gruppenstr. auf X geg. durch Morphismen

$$m : X \times X \to X \text{ (Mult.)}, \quad i : X \to X \text{ (Inv.)}, \quad e : 1 \to X \text{ (Einheit)},$$

die die offensichtlichen Axiome erfüllen.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ heißt
- **Monomorphismus** ($f : X \hookrightarrow Y$), wenn f linkskürzbar ist, d. h.
$$\forall\, X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \,:\, \forall\, g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X) \,:\, f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$
- **Epimorphismus** ($f : Y \twoheadrightarrow Y$), wenn f rechtskürzbar ist, d. h.
$$\forall\, Y' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \,:\, \forall\, g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y') \,:\, g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Def. Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt. Auf der Klasse der Monomorphismen $(i : U \to X) \in \mathcal{C}$ von einem Objekt $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ nach X ist durch

$$(U, i) \leq (U', i') \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, f : U' \to U \,:\, i' = i \circ f$$

eine Präordnung definiert. Ein **Unterobjekt** von X ist eine Äquivalenzklasse dieser Präordnung, also von der Äq'relation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x \leq y \wedge y \leq x.$$

Def. Eine Kategorie heißt **well-powered**, wenn die Präordnung der Unterobjekte von jedem Obj. eine Menge (nicht nur eine Klasse) ist.

(Ko-)Limiten

Def. Seien $\mathcal{J}$, $\mathcal{C}$ Kat'en. Der **Diagonal-Funktor** $\Delta:\mathcal{C}\to[\mathcal{J},\mathcal{C}]$ ist

$$(\Delta X)(J\in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})) := X,\quad (\Delta X)(\phi) := \mathrm{id}_X,\quad (\Delta f)_{J\in\mathrm{Ob}(\mathcal{J})} := f.$$

Def. Seien $\mathcal{J}$, $\mathcal{C}$ Kategorien, $\mathcal{J}$ klein. Der **Limes** eines Funktors $F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ ist ein Objekt $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, das den Funktor

$$G\in\hat{\mathcal{C}},\quad G(Y) := \mathrm{Hom}_{[\mathcal{J},\mathcal{C}]}(\Delta Y, F),\quad G(f)(\eta) := \eta\circ\Delta f$$

darstellt. Man notiert $X = \lim F = \lim\limits_{j\in\mathcal{J}} F(j)$.

Def. Ein **Kegel** o. **Möchtegern-Limes** eines Funktors $F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ ist ein Objekt $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ mit Projektionsabb. $f_J : X\to F(J)$ für alle $J\in\mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, sodass $\forall\, h\in\mathrm{Hom}_\mathcal{J}(J,I)\ :\ f_I = F(h)\circ f_J$.
Ein Kokegel von F ist ein Kegel von $F^{\mathrm{op}}:\mathcal{J}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Bem. Der Limes X ist durch folgende **universelle Eigenschaft** charakterisiert: Er ist ein terminales Objekt in der Kategorie der Kegel über F, d. h. er ist ein Kegel und für jeden weiteren Kegel X' gibt es genau ein $g\in\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X',X)$ mit $\forall\, J\in\mathrm{Ob}(\mathcal{J})\ :\ f'_J = f_J\circ g$.

Bem. Die univ. Eigenschaft zeigt: Der Limes ist funktoriell, d. h. wenn in $\mathcal{C}$ alle $\mathcal{J}$-Limiten (d. h. Limiten von Funktoren $\mathcal{J}\to\mathcal{C}$) existieren, dann gibt es einen Funktor $\lim : [\mathcal{J},\mathcal{C}]\to\mathcal{C}$.

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **filtriert**, falls für alle Funktoren $F:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ mit endl. Quellkat. $\mathcal{I}$ ein Kokegel von F existiert.
Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **kofiltriert**, falls $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ filtriert ist.

Def. Eine **(ko-)gerichtete Menge** ist eine Menge mit einer Präordnung, deren Präordnungskategorie (ko-)filtriert ist.

Def. Der Limes eines Funktors $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ heißt

- **projektiver** oder **inverser Limes**, wenn $\mathcal{C}$ die Präordnungskategorie einer kogerichteten Menge ist. Man notiert $\varprojlim F$.
- **filtriert**, wenn $\mathcal{C}$ kofiltriert ist.

Bem. Folgende Konzepte lassen sich als Spezialfall des Limes über eine spezielle Indexkategorie $\mathcal{J}$ auffassen:

Konzept	Indexkategorie $\mathcal{J}$
Terminales Objekt	$\emptyset$ (leere Kategorie)
(binäres) Produkt	$\mathbf{2} := \{0,1\}$ (kein nichttrivialer Morphismus)
(endl.) **Produkt**	(endliche) Menge, aufgefasst als Kategorie
Faserprodukt	$1\to 0\leftarrow 2$ (zwei nichttriviale Morphismen)
Differenzkern	$0\rightrightarrows 1$ (zwei nichttriviale Morphismen)

Bem. Insbesondere sind terminale Objekte leere Produkte.

Lem. Sei K ein Differenzkern von $(X\rightrightarrows Y)\in\mathcal{C}$.
Dann ist der Morphismus $i:K\to X$ ein Monomorphismus.

Def. Sei $\mathcal{J}$ klein. Der **Kolimes** eines Funktors $F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ ist ein Objekt $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, das den Funktor

$$G\in\widehat{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} = [\mathcal{C},\mathbf{Set}],\quad G(Y) := \mathrm{Hom}_{[\mathcal{J},\mathcal{C}]}(F,\Delta Y),\quad G(f)(\eta) := \Delta f\circ\eta$$

darstellt. Man notiert $X = \operatorname{colim} F = \operatorname{colim}_{j\in\mathcal{J}} F(j)$.

Bem. Der Kolimes von $F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ ist der Limes von $F^{\mathrm{op}}:\mathcal{J}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Bem. Wenn in $\mathcal{C}$ alle $\mathcal{J}$-Kolimiten existieren, dann gibt es einen Funktor $\operatorname{colim} : [\mathcal{J},\mathcal{C}]\to\mathcal{C}$.

Bem. Folgende Konzepte sind ein Spezialfall des Kolimes:

Konzept	Indexkategorie $\mathcal{J}$
Initiales Objekt	$\emptyset$ (leere Kategorie)
(bin.) **Koprodukt**	$\mathbf{2} := \{0,1\}$ (kein nichttrivialer Morphismus)
(endl.) Koprodukt	(endliche) Menge, aufgefasst als Kategorie
Kofaserprodukt	$1\to 0\leftarrow 2$ (zwei nichttriviale Morphismen)
Kodifferenzkern	$0\rightrightarrows 1$ (zwei nichttriviale Morphismen)

Bem. Initiale Objekte sind leere Koprodukte.

Def. Der Kolimes eines Funktors $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ heißt

- **induktiver** oder **direkter Limes**, wenn $\mathcal{C}$ die Präordnungskategorie einer gerichteten Menge ist. Man notiert $\varinjlim F$.
- **filtrierter Kolimes**, wenn $\mathcal{C}$ filtriert ist.

Def.
- Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **(ko-)vollständig**, wenn alle Diagramme $F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ einen (Ko-)Limes in $\mathcal{C}$ besitzen.
- Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **endlich (ko-)vollständig**, wenn alle endlichen (Ko-)Limiten in $\mathcal{C}$ existieren.

Bspe. Vollständig sind: • **Set**, • **Grp**, • **Ab**, • **Top**, • k-**Vect**.

Lem. Eine Kategorie enthält endliche Produkte, wenn sie ein terminales Objekt und binäre Produkte besitzt. Duales gilt für Koprodukte mit initialem statt terminalen Objekt.

Satz. Angenommen, eine Kategorie $\mathcal{C}$ enthält (Ko-)Differenzkerne und (endliche) Produkte. Dann ist $\mathcal{C}$ (endlich) (ko-)vollständig.

Bem. Angenommen, in $\mathcal{C}$ existieren alle $\mathcal{J}$-Limiten. Sei $\mathcal{I}$ eine bel. Kategorie. Dann ex. alle $\mathcal{J}$-Limiten in $[\mathcal{I},\mathcal{C}]$ und die Limiten werden objektweise berechnet: Sei $F:\mathcal{J}\to[\mathcal{I},\mathcal{C}]$ ein Funktor, dann ist

$$(\lim F)(I) = \lim(F(-)(I)),\quad (\lim F)(f) = \lim(F(-)(f)).$$

Def. Ein Funktor $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ heißt **stetig**, wenn er **Limiten bewahrt**, d. h. für alle Funktoren $D:\mathcal{J}\to\mathcal{D}$ (mit $\mathcal{J}$ klein) mit $\lim D\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ex. auch der Limes von $F\circ G$ in $\mathcal{D}$ und es gilt

$$\lim(F\circ D)\cong F(\lim D).$$

Ein Funktor F heißt **kostetig**, wenn er **Kolimiten bewahrt**.

Satz. Sei $F:I\times J\to\mathcal{C}$ ein Diagramm. Wenn einer der folgenden Limiten existiert, dann alle, und sie sind natürlich isomorph:

$$\lim_i\lim_j F(i,j)\cong\lim_j\lim_i F(i,j)\cong\lim_{i,j}F(i,j).$$

Adjunktionen

Def. Ein Funktor $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ heißt **linksadjungiert** zum Funktor $G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, wenn es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(-),-)\cong\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(-,G(-))$$

gibt (dabei sind beide Seiten Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{D}\to\mathbf{Set}$).
Dann heißt G auch **rechtsadjungiert** zu F. Man notiert $F\dashv G$ oder sagt, es bestehe eine Adjunktion $F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$.

Bem. Sei $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ ein Funktor. Dann besitzt F genau dann einen Rechtsadjungierten $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$, wenn für alle $Y\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ der Funktor

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set},\quad X\mapsto\mathrm{Hom}_\mathcal{D}(FX,Y),\quad f\mapsto(-\circ F(f))$$

darstellbar ist, d. h. es existiert $GY\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Isomorphismen

$$a^Y_X : \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(FX,Y)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X,GY)$$

mit $\forall\,\phi\in\mathrm{Hom}(X',X)\ :\ a^Y_{X'}(-\circ F(\phi)) = a^Y_X(-)\circ\phi$.
Dann ist G auf Morphismen definiert durch

$$G(f\in\mathrm{Hom}_\mathcal{D}(Y,Y')) := a^{Y'}_{GY}\left(f\circ\left(a^Y_{GY}\right)^{-1}(\mathrm{id}_{GY})\right).$$

Bem. Sei $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$. Setze

$$\eta_X := a^{FX}_X(\mathrm{id}_{FX}) : X\to GFX,$$
$$\epsilon_Y := (a^Y_{GY})^{-1}(\mathrm{id}_{GY}) : FGY\to Y.$$

Dann sind $\eta:\mathrm{Id}_\mathcal{C}\to G\circ F$ (genannt **Einheit**) und $\epsilon:F\circ G\to\mathrm{Id}_\mathcal{C}$ (genannt **Koeinheit**) natürliche Transformationen und es gilt

$$(G\xrightarrow{\eta G}GFG\xrightarrow{G\epsilon}G) = \mathrm{id}_G,\quad (F\xrightarrow{\epsilon F}FGF\xrightarrow{F\eta}F) = \mathrm{id}_F\,.$$

Umgekehrt definieren zwei solche nat. Transf. η und ϵ, die diese Gleichungen erfüllen, eine Adj. zwischen F und G. Dabei ist η_X univ. unter den Morphismen von $X\in\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ zu einem Obj. der Form GY: Für alle $f\in\mathrm{Hom}_\mathcal{D}(X,GY)$ gibt es genau ein $h\in\mathrm{Hom}(FX,Y)$ mit $f = G(h)\circ\eta_X$, und zwar $h = (a^Y_X)^{-1}(f)$. Duales gilt für ϵ_Y.

Lem (Verknüpfung von Adjunktionen)**.**
Sei $F_1:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ zu $G_1:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ und $F_2:\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ zu $G_2:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$ linksadj.
Dann ist $F_2\circ F_1:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$ zu $G_1\circ G_2:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$ linksadjungiert.

Lem (Eindeutigkeit des adjungierten Funktors)**.**

- Gelte $F\dashv G_1$ und $F\dashv G_2$. Dann sind G_1 und G_2 nat. isomorph.
- Gelte $F_1\dashv G$ und $F_2\dashv G$. Dann sind F_1 und F_2 nat. isomorph.

Bem. Sei $F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$ eine Adjunktion und $\mathcal{J}$ klein.
Dann gibt es eine ind. Adjunktion $(F\circ -):[\mathcal{J},\mathcal{C}]\rightleftarrows[\mathcal{J},\mathcal{D}]:(G\circ -)$.

Bspe.
- Angenommen, in $\mathcal{C}$ existieren $\mathcal{J}$-Limiten bzw. $\mathcal{J}$-Kolimiten. Dann gibt es eine Adj. $\Delta\dashv\lim$ bzw. $\operatorname{colim}\dashv\Delta$.
- Sei $F:\mathbf{Set}\to\mathbf{Grp}$ der Funktor, der die freie Gruppe über einer Menge bastelt und $V:\mathbf{Grp}\to\mathbf{Set}$ der Vergiss- funktor. Dann gilt $F\dashv V$. Gleiches gilt für viele weitere „freie“ Konstruktionen.
- Sei **KHaus** die Kat. der kompakten Hausdorfräume und $K:\mathbf{Top}\to\mathbf{KHaus}$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung und $I:\mathbf{KHaus}\to\mathbf{Top}$ die Inklusion. Dann gilt $K\dashv I$.

Def. Im Spezialfall, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Präordnungskategorien sind, wird ein Paar von adjungierten Funktoren (d. h. monotonen Abbildungen) zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ auch **Galoisverbindung** genannt.

Bspe. • $(\lceil - \rceil:\mathbb{R}\to\mathbb{Z})\dashv(i:\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{R})\dashv(\lfloor - \rfloor:\mathbb{R}\to\mathbb{Z})$

- Sei $L \supset K$ eine endl. Körpererweiterung. Für eine Zwischenerw. $L \supseteq M \supseteq K$ sei $\mathrm{Gal}(L,M) := \{f \in \mathrm{Aut}(L) \,|\, f|_M = \mathrm{id}_M\}$ die Galoisgruppe von L über M. Dann ist
$$\begin{aligned}\{\,\text{Untergruppen von } \mathrm{Gal}(L,K)\,\} &\leftrightarrow \{\,\text{Zwischenerw. } L \supseteq M \supseteq K\,\}\\ G &\mapsto \{x \in L \,|\, \forall \sigma \in G \,:\, \sigma(x) = x\}\\ \mathrm{Gal}(L,M) &\mapsfrom M\end{aligned}$$
eine Galoisverbindung (dabei sind Untergruppen durch Inklusion und Zwischenerweiterungen umgekehrt durch Inklusion geordnet).

Lem. Sei $F \dashv G$ eine Adjunktion. Dann gilt:

- F bewahrt Kolimiten (**LAPC**, left-adjoints preserve colimits).
- G bewahrt Limiten (**RAPL**, right-adjoints preserve limits).

Beweis (RAPL)**.** Sei $\mathcal{J}$ eine kleine Indexkategorie. Es gilt:
$$\begin{aligned}(F \circ -) \circ (\Delta : \mathcal{C} \to [\mathcal{J}, \mathcal{C}]) &\dashv (\lim : [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \to \mathcal{C}) \circ (G \circ -),\\ (\Delta : \mathcal{D} \to [\mathcal{J}, \mathcal{D}]) \circ F &\dashv G \circ (\lim : [\mathcal{J}, \mathcal{D}] \to \mathcal{D}).\end{aligned}$$
Da $(F \circ -) \circ \Delta \equiv \Delta \circ F$, folgt aus der Eindeutigkeit des Rechtsadjungierten $\lim(G \circ D) \cong G(\lim D)$ natürlich in D.

Bem. Sei umgekehrt $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein stetiger Funktor. Unter gewissen Bedingungen an die Größe der Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ besitzt dann G einen Linksadjungierten:

Def.
- Ein **Koerzeuger** einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, für das der Funktor $h_S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ treu ist.
- Eine **koerzeugende Menge** von $\mathcal{C}$ ist eine Teil*menge* $\mathcal{S}$ von $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, für die der Funktor $h_{\mathcal{S}} := \prod_{S \in \mathcal{S}} h_S$ treu ist.

Lem. Ein stetiger Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ hat einen Linksadj, wenn:

- General Adjoint Functor Theorem: $\mathcal{D}$ ist vollständig und lokal klein und G erfüllt die Lösungsmengen-Bedingung:
$$\begin{aligned}&\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \;:\; \exists I \text{ Menge} \;:\; \exists (f_i : X \to G(Y_i))_{i \in I} \;:\\ &\forall (g : X \to Z) \in \mathcal{C} \;:\; \exists i \in I,\, h : G(Y_i) \to Z \;:\; g = h \circ f_i.\end{aligned}$$
- Special Adjoint Functor Theorem (**SAFT**): $\mathcal{D}$ ist vollständig, well-powered (damit automatisch lokal klein), besitzt eine kleine koerzeugende Menge und $\mathcal{C}$ ist lokal klein.

Def. Eine **monoidale Kategorie** $\mathcal{C}$ besitzt einen Funktor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (genannt Tensorprodukt), ein Objekt $1 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und natürliche Isomorphismen (die zwei Kohärenzbedingungen erfüllen)
$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \cong X \otimes (Y \otimes Z), \quad \lambda_X : 1 \otimes X \cong X, \quad \rho_X : X \otimes 1 \cong X.$$

Def. Sei $(\mathcal{C}, \otimes)$ eine monoidale Kategorie. Ein **interner Hom-Funktor** ist ein Funktor $[-,-] : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, für den gilt: für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ der Funktor $- \otimes X$ linksadjungiert zu $[X,-]$ ist, d. h.
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes X, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, [X, Z]).$$

Notation. $[X, Y] =: Y^X$ heißt auch **Exponentialobjekt**.

Def. Eine monoidale Kategorie heißt **kartesisch abgeschlossen**, wenn sie einen internen Hom-Funktor besitzt.

Bspe. **Set**, **Ab**, k-**Vect** und **Cat** sind kartesisch abgeschlossen.

Abelsche und additive Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A1**, wenn sie über **Ab** angereichert ist, d. h. die Morphismenmengen sind ab. Gruppen und die Verknüpfung
$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$
ist für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ bilinear.

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A2**, wenn es ein **Nullobjekt** $0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt mit
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0) = \text{Nullgruppe} = \{\mathrm{id}_0\}.$$

Bem. Dann ist auch $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0) = \mathrm{Hom}(0, X) = 0$ für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Somit ist 0 initiales und terminales Objekt, und folglich $\mathcal{C}$ punktiert.

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A3**, wenn es für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt $X \oplus Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (genannt **direkte Summe**) und Morphismen
$$X \underset{i_X}{\overset{p_X}{\leftrightarrows}} X \oplus Y \underset{i_Y}{\overset{p_Y}{\rightleftarrows}} Y$$
gibt mit • $p_X \circ i_X = \mathrm{id}_X$, • $p_Y \circ i_Y = \mathrm{id}_Y$, • $p_Y \circ i_X = 0$, • $p_X \circ i_Y = 0$, • $(i_X \circ p_X) + (i_Y \circ p_Y) = \mathrm{id}_{X \oplus Y}$.

Bem. $X \oplus Y$ ist sowohl Produkt als auch Koprodukt von X und Y.

Def. Der **Kern** $\ker \varphi$ eines Morphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ist ein Paar $(K \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K, X))$ mit sodass $\varphi \circ k = 0$, sodass es für alle $k' \in \mathrm{Hom}(K', X)$ mit $\varphi \circ k'$ einen eindeutigen Morphismus $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K', K)$ mit $k' = k \circ h$ gibt.

Bem. Die Definition des Kerns ist äquivalent zur folgenden: Der Kern von φ ist das darstellende Obj. $K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ab})$ des Funktors
$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}, \quad Z \mapsto \ker(\varphi \circ - : X(Z) \to Y(Z)), \quad f \mapsto (- \circ f).$$

Def. Der **Kokern** $\mathrm{coker}\, \varphi$ eines Morphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ist ein Paar $(C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C))$ mit $c \circ \varphi = 0$, sodass es für alle $c' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C')$ mit $c' \circ \varphi = 0$ einen eindeutigen Morphismus $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ mit $c' = h \circ c$ gibt.

Bem. Die Definition des Kokerns ist äquivalent zur folgenden: Der Kern von φ ist ein Morphismus $c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, C)$, sodass
$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Z) \xrightarrow{c \circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{\varphi \circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \to 0$$
für alle $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ exakt ist.

Achtung. Der Kokern ist *nicht* das darstellende Obj. des Funktors
$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}, \quad Z \mapsto \mathrm{coker}(\varphi \circ - : X(Z) \to Y(Z)), \quad f \mapsto (- \circ f).$$

Bem. Kern und Kokern sind eindeutig bis auf Isomorphismus.

Def. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Dann heißt

- $\mathrm{im}\, \varphi := \ker(\mathrm{coker}\, \varphi)$ **Bild** von φ,
- $\mathrm{coim}\, \varphi := \mathrm{coker}(\ker \varphi)$ **Kobild** von φ.

Lem. Kerne sind monomorph, Kokerne epimorph.

Lem. Sei (K, k) der Kern, (C, c) der Kokern von φ. Dann gilt
$$\begin{aligned}\varphi \text{ ist ein Monomorphismus} &\iff K \cong 0,\\ \varphi \text{ ist ein Epimorphismus} &\iff C \cong 0.\end{aligned}$$

Axiom. $\mathcal{C}$ erfüllt **A4**, wenn für alle $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ eine Sequenz
$$K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} C$$
existiert mit folgenden Eigenschaften: • $\varphi = j \circ i$

- (K, k) ist der Kern, (C, c) der Kokern von φ,
- (I, i) ist der Kokern von k, (I, j) der Kern von c.

Diese Sequenz heißt **kanonische Zerlegung** von φ.

Bem. Die kanonische Zerlegung ist eindeutig bis auf eindeutigen Iso.

Bem. Angenommen, $\mathcal{C}$ besitzt Kerne und Kokerne. Dann gibt es für alle $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ die Diagramme
$$\ker \varphi \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} \mathrm{coim}\, \varphi, \qquad \mathrm{im}\, \varphi \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} \mathrm{coker}\, \varphi.$$
Aus den univ. Eigenschaften von Kern u. Kokern folgt die Existenz eines Morphismus $l \in \mathrm{Hom}(\mathrm{coim}\, \varphi, \mathrm{im}\, \varphi)$ mit $j \circ l \circ i = \varphi$. Das Ax. **A4** gilt genau dann, wenn l für alle φ ein Isomorphismus ist.

Def. • Eine **präadditive** Kategorie erfüllt das Axiom **A1**.

- Eine **additive** Kategorie erfüllt die Axiome **A1-A3**.
- Eine **präab.** Kategorie ist additiv und besitzt Kerne und Kokerne.
- Eine **abelsche** Kategorie erfüllt die Axiome **A1-A4**.

Bem. Die Axiome **A1-A4** sind selbstdual, d. h. eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist genau dann (prä-)additiv / (prä-)abelsch, wenn $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ es auch ist.

Bspe. Ab. Kategorien sind: • **Ab**, • R-**Mod**, • **PAb**(X).

Def. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **balanciert**, falls $\forall (f : X \to Y) \in \mathcal{C}$ gilt:
$$f \text{ ist epi und mono} \iff f \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

Prop. Abelsche Kategorien sind balanciert.

Def.
- Ein Mono- / Epimorphismus heißt **normal** / **konormal**, wenn er Kern / Kokern eines Morphismus ist.
- Eine präadd. Kategorie $\mathcal{A}$ heißt normal / konormal wenn jeder Mono- / Epimorphismus in $\mathcal{A}$ normal / konormal ist.

Lem. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

- Sei $X \xrightarrow{\varphi} Y \in \mathcal{A}$ ein Monomorphismus und (C, c) dessen Kokern. Dann ist (X, φ) der Kern von c.
- Sei $X \xrightarrow{\varphi} Y \in \mathcal{A}$ ein Epimorphismus und (K, k) dessen Kern. Dann ist (Y, φ) der Kokern von k.

Kor. Ab. Kategorien sind binormal, d. h. normal und konormal.

Bem. Der (Ko-)Differenzkern von Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ ist der (Ko-)Kern der Differenz $f - g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$.

Kor. Abelsche Kategorien sind endlich bivollständig.

Verklebedaten und simpliziale Mengen

Def. **Verklebedaten** sind gegeben durch einen Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}}_{\mathrm{strikt}} \to \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ_{strikt} die Kategorie mit den Mengen $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und streng monotonen Abbildungen.

Notation. $X_{(n)} := X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes.

Def. Das **Standard-n-Simplex** $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die von den $(n{+}1)$ Standardbasisvektoren aufgespannte affinlineare Hülle. Eine streng monotone Abb $f : [n] \to [m]$ induziert durch Abbilden des i-ten Basisvektors auf den $f(i)$-ten eine Inklusion $\Delta_f : \Delta_n \to \Delta_m$,

Def. Die **geometrische Realisierung** von Verklebedaten X ist der topologische Raum

$$|X| := \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R$$

Dabei ist $X_{(n)}$ diskret. Die Äquivalenzrelation R wird erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\ x \in X_{(n)},\ f : [m] {\to} [n] \text{ s.m.s.}$$

Def. Das **k-Skelett** $\mathrm{sk}_k\, X$ von Verklebedaten X ist definiert durch

$$(\mathrm{sk}_k\, X)_{(n)} := \{x \in X_{(n)} \,|\, n \leq k\},\ \ (\mathrm{sk}_k\, X)(f) := X(f) \text{ sofern möglich}$$

Def. Der **Kegel** CX über Verklebedaten X ist definiert durch

$$(CX)_{(0)} := X_{(0)} \amalg \{\star\}, \quad (CX)_{(n)} := X_{(n)} \amalg (X_{(n-1)} \times \{\star\}),$$
$$(CX)(f)(x) := X(f)(x),$$
$$(CX)(f)(x, *) := \begin{cases} X(i \mapsto f(i) - 1)(x), & \text{wenn } f(0) > 0, \\ (X(i \mapsto f(i{+}1) - 1)(x), *), & \text{wenn } f(0) = 0. \end{cases}$$

Def. Eine **simpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ die Kategorie mit den Mengen $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und monotonen Abbildungen.

Notation. $X_n := X([n])$ heißt Menge der n-Simplizes.

Def. Eine **simpliziale Abbildung** zw. simpl. Mengen X und Y ist eine nat. Transformation zwischen den Funktoren $X, Y : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

Def. Die Kategorie der simplizialen Mengen ist $\mathbf{sSet} := [\Delta^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$.

Def. Die **geometrische Realisierung** einer simplizialen Menge X ist der topologische Raum

$$|X| := \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n) \right) / R$$

Die Äquivalenzrelation R wird dabei erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \text{ mit } t \in \Delta_m,\ x \in X_n \text{ u. } f \in \mathrm{Hom}_\Delta([m], [n]).$$

Def. Ein topologischer Raum heißt **trianguliert**, wenn er die Realisierung von Verklebedaten ist.

Def. Der **Nerv** einer Überdeckung $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ eines topologischen Raumes ist die simpliziale Menge

$$X_n := \{(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in A^{n+1} \,|\, U_{\alpha_0} \cap ... \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\}$$
$$X(f)(\alpha_0, ..., \alpha_n) := (\alpha_{f(0)}, ..., \alpha_{f(m)}) \quad \text{für } f : [m] \to [n].$$

Bem. Falls die Überdeckung lokal endlich ist und alle nichtleeren, endlichen Schnitte $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$ zusammenziehbar sind, so ist die geom. Realisierung des Nerves der Überdeckung homotopieäq. zu X.

Def. Sei Y ein topologischer Raum. Die simpliziale Menge X der **singulären Simplizes** in Y ist

$$X_n := \{\text{stetige Abb. } \sigma : \Delta_n \to Y\}, \quad X_n(f)(\sigma) := \sigma \circ \Delta_f.$$

Bem. Diese Konstruktion stiftet eine Funktor $\mathrm{Sing} : \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$. Es besteht die Adjunktion $|{-}| : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \mathrm{Sing}$.

Def. $\Delta[p]_n := \{g : [n] \to [p] \text{ monoton steigend}\}$, $\Delta[p](f)(g) := g \circ f$

Def. Der **klassifizierende Raum** einer Gruppe G ist gegeben durch die Realisierung der simpl. Menge BG mit $(BG)_n := G^n$ und

$$BG(f : [m] \to [n])(g_1, \dots, g_n) := (h_1, \dots, h_m), \quad h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j.$$

Def. Ein n-Simplex $x \in X_n$ heißt **degeneriert**, falls eine monotone surjektive Abbildung $f : [n] \to [m]$, $n > m$ und ein Element $y \in X_m$ existiert mit $x = X(f)(y)$.

Def. Seien X Verklebedaten. Wir konstruieren eine dazugehörende simpliziale Menge $\tilde{X}$ wie folgt:

$$\tilde{X}_n := \{(x, g) \,|\, x \in X_{(k)}, g : [n] \to [k] \text{ monoton und surjektiv}\},$$

Für eine monotone Abbildung $f : [m] \to [n]$ und $(x, g) \in \tilde{X}_n$ schreiben wir zunächst $g \circ f = f_1 \circ f_2$ mit einer Injektion f_1 und einer Surjektion f_2 und setzen $\tilde{X}(f)(x, g) := (X(f)(x), f_2)$.

Prop. Eine simpliziale Menge $\tilde{X}$ kann genau dann aus (dann eindeutigen) Verklebedaten gewonnen werden, falls für alle nicht-degenerierten Simplizes $x \in \tilde{X}_n$ und streng monotonen Abbildungen $f : [m] \to [n]$ auch $\tilde{X}(f)(x) \in \tilde{X}_m$ nicht degeneriert ist.

Prop. Seien X Verklebedaten, $\tilde{X}$ die entsprechende simpliziale Menge. Dann gilt $|X| \approx |\tilde{X}|$.

Def. Das **k-Skelett** $\mathrm{sk}_k\, X$ einer simplizialen Menge X ist geg. durch

$$(\mathrm{sk}_k\, X)_n := \{X(f)(x) \,|\, p \leq k, f : [n] \to [p] \text{ monoton}, x \in X_p\}.$$

Def. Eine simpliziale Menge X hat **Dimension** n, falls $X = \mathrm{sk}_n\, X$.

Prop. Geom. Realisierung ist ein Funktor $|{-}| : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$.

Bspe. • Eine Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eines topologischen Raumes ist Verfeinerung von $(V_\beta)_{\beta \in B}$, wenn es eine Abbildung $\psi : A \to B$ gibt, sodass $U_\alpha \subset V_{\psi(\alpha)}$ für alle $\alpha \in A$. Dies induziert eine simpliziale Abb. zwischen den Nerven der Überdeckungen durch

$$F_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n) := (\psi(\alpha_0), \dots, \psi(\alpha_n)).$$

- Ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$ stiftet eine Abbildung $BG \to BH$ zwischen den klassifizierenden Räumen durch

$$F(g_1, \dots, g_n) := (\phi(g_1), \dots, \phi(g_n)).$$

Def. Ein **simplizialer topologischer Raum** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Top}.$$

Bem. Die geometrische Realisierung eines simplizialen topol. Raumes ist definiert wie die einer simplizialen Menge mit dem Unterschied, dass X_n im Allg. nicht die diskrete Topologie trägt.

Def. Eine **bisimpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}.$$

Notation. $X_{nm} := X([n], [m])$

Bsp. Das **direkte Produkt** von simplizialen Mengen X und Y ist die bisimpliziale Menge

$$(X \times Y)_n := X_n \times Y_n, \quad (X \times Y)(f, g)(x, y) := (f(x), g(y)).$$

Def. Die **Diagonale** DX einer bisimplizialen Menge X ist die simpliziale Menge mit $(DX)_n := X_{nn}$ und $DX(f) := X(f, f)$.

Def. Sei X eine bisimpliziale Menge.
- Setze $|X|^D := |DX|$.
- Definiere einen simplizialen topologischen Raum X^I durch

$$X^I_n := |X_{\bullet n}|, \quad X^I(g) := |X(\mathrm{id}, g)|.$$

  Setze $|X|^{I,II} := |II, I|$.
- Definiere analog $|X|^{II,I}$.

Satz (**Eilenberg-Zilber**). $|X|^D \cong |X|^{I,II} \cong |X|^{II,I}$ kanonisch.

Def. Der **Nerv** $\mathcal{NC}$ einer kleinen Kategorie $\mathcal{C}$ ist die simpl. Menge

$$\mathcal{NC}_n := \left\{ \text{Diagramme } X_0 \xrightarrow{\varphi_1} X_1 \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_n} X_n \text{ in } \mathcal{C} \right\}$$
$$\mathcal{NC}(f : [m] \to [n])(X_0 \xrightarrow{\varphi_1} \ldots \xrightarrow{\varphi_n} X_n) := (Y_0 \xrightarrow{\psi_1} \ldots \xrightarrow{\psi_m} Y_m)$$
$$\text{mit } Y_i := X_{f(i)}, \quad \psi_i := \varphi_{f(i)} \circ ... \circ \varphi_{f(i-1)+1}$$

Bsp. $\Delta[n] = \mathcal{NC}(\text{Präordnungskategorie mit Objekten } \{0, \dots, n\})$

Bem. • Der Nerv ist volltreuer Funktor $\mathcal{NC} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{sSet}$.
- Jede kleine Kat. kann aus ihrem Nerv zurückgewonnen werden.
- $\mathcal{N}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = D(\mathcal{NC} \times \mathcal{ND})$

Bem. Mit $X * Y := D(X \times Y)$ ist $\mathbf{sSet}$ eine monoidale Kategorie.

Prop. $\mathbf{sSet}$ ist kartesisch abgeschlossen. Dabei ist

$$[X, Y]_n = (Y^X)_n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n] * X, Y).$$

Prop. Der Nervfunktor ist verträglich mit dem internen Hom: Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kleine Kategorien. Dann ist

$$\mathcal{N}([\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\mathbf{Cat}}) \cong [\mathcal{NC}, \mathcal{ND}]_{\mathbf{sSet}}.$$

Garben

Def.
- Eine mengenwertige **Prägarbe** $\mathcal{F}$ auf einem topol. Raum X ist ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Dabei ist $\mathbf{Ouv}(X)$ die Präordnungs-Kat. der off. Teilmengen von X geordnet durch $\subseteq$.
- Allgemeiner ist eine $\mathcal{C}$-wertige Prägarbe ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ (z. B. $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}, \mathbf{R\text{-}Mod}, \mathbf{Top}$).
- Ein Morphismus zwischen Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf demselben topol. Raum ist eine natürliche Transformation zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Notation. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe
- $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$ heißt Menge der **Schnitte** von $\mathcal{F}$ über U.
- $r_{UV} := \mathcal{F}(V \subseteq U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ heißt **Restriktionsabb.**
- $x|_V := r_{UV}(x)$ für $V \subseteq U$ und $x \in \mathcal{F}(U)$ heißt **Einschränkung** von x auf V.

Def. Eine **Garbe** auf einem topol. Raum X ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$, für die gilt: Für alle Familien $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Teilmengen und Schnitten $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$, die miteinander kompatibel sind, d. h.

$$\forall\, i, j \in I \, : \, s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j},$$

gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(\cup_{i\in I} U_i)$ mit $\forall\, i \in I \, : \, s_i = s|_{U_i}$.
Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismen zw. den Prägarben.

Def. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topol. Raum X heißt **separiert**, wenn zwei Schnitte $s, t \in \mathcal{F}(U)$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$ genau dann übereinstimmen, wenn sie lokal übereinstimmen, d. h.

$$s = t \iff \forall\, x \in U : \exists\, V_x \subset U \text{ offene Umgebung von } x : s|_{V_x} = t|_{V_x}.$$

Bem. Das entspricht dem Eindeutigkeitsteil im Garbenaxiom.

Bem. Sei $\mathcal{F}$ eine (Prä-)Garbe auf X und $U \subseteq X$ offen. Dann definiert $(\mathcal{F}|U)(V) := \mathcal{F}(U \cap V)$ eine (Prä-)Garbe auf U.

Notation. Die Kategorien der Prägarben von Mengen bzw. von abelschen Gruppen auf einem topol. Raum X werden bezeichnet mit

$$\mathbf{PSh}(X) := [\mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{PAb}(X) := [\mathbf{Ouv}(X)^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}].$$

Die volle Unterkategorie der Garben ist

$$\mathbf{Sh}(X) \subset \mathbf{PSh}(X) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Ab}(X) \subset \mathbf{PAb}(X).$$

Lem. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie von X.
- Sei $(\mathcal{F}(U))_{U\in\mathcal{B}}$ eine Familie von Mengen bzw. ab. Gruppen und $r_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ Einschränkungsabb. mit $r_{VW} \circ r_{UV} = r_{UW}$ für alle $U, V, W \in \mathcal{B}$ mit $W \subseteq V \subseteq U$. Angenommen, für alle Familien $(s_U \in \mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{C}}$ mit $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ und $A := \bigcup_{U\in\mathcal{C}} U \in \mathcal{B}$, sodass $r_{UW}(s_U) = r_{VW}(s_V)$ für alle $W \in \mathcal{B}$, $W \subset U \cap V$, gibt es genau ein $s_A \in \mathcal{F}(A)$ mit $r_{AU}(s_A) = s_U$ für alle $U \in \mathcal{C}$.
  Dann lässt sich $\mathcal{F}$ eindeutig zu einer Garbe auf X fortsetzen.
- Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf X und $(\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))_{U\in\mathcal{B}}$ eine Fam. von mit Einschränkung vertr. Abbildungen. Dann gibt es genau einen Garbenmorphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ mit $\varphi(U) = \varphi_U$.

Def. Eine Sequenz $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ von (Prä-)Garben abelscher Gruppen auf X heißt **exakt** bei $\mathcal{G}$, falls für alle offenen $U \subset X$ die Sequenz $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ exakt bei $\mathcal{G}(U)$ ist.

Def. Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben auf X. Definiere Prägarben $\mathcal{K}$ und $\mathcal{C}$ auf X durch

$$\mathcal{K}(U) := \ker(f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)), \quad \mathcal{C}(U) := \mathcal{G}(U)/\operatorname{im}(f_U).$$

Prop. Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sogar ein Morphismus von Garben. Dann ist auch $\mathcal{K}$ eine Garbe.

Achtung. Aber $\mathcal{C}$ ist im Allgemeinen keine Garbe!

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Der **Halm** von $\mathcal{F}$ in $x \in X$ ist

$$\mathcal{F}_y := \{(U, s) \mid U \subseteq X \text{offen}, x \in U, s \in \mathcal{F}(U)\}/\!\sim,$$
$$(U, s) \sim (V, t) \;:\iff\; \exists\, W \subset U \cap V \text{ offen}, y \in W \;:\; s|_W = t|_W.$$

Notation. $s_x := [(U, s)]$ für $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $x \in U$.

Sprechweise. Elemente $[t] \in \mathcal{F}_x$ heißen **Keime** in x.

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $Z \subseteq X$ beliebig. Definiere

$$\Gamma(Z, \mathcal{F}) := \operatorname{colim} \Gamma(U, \mathcal{F}),$$

wobei der Limes über alle offenen $U \subset X$ mit $Z \subseteq U$ läuft.

Beob. $\mathcal{F}_x = \Gamma(\{x\}, \mathcal{F})$

Def. Der **Totalraum** F einer Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X ist

$$F := \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

mit der Topologie erzeugt durch die Mengen

$$\{s_x \mid x \in U\} \quad \text{für } U \subseteq X \text{ offen, } s \in \mathcal{F}(U).$$

Bem. Mit dieser Topologie ist die Projektion $\pi : F \to X$ stetig und ein lokaler Homöomorphismus.

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf Y. Die **Garbifizierung** $\mathcal{F}^+$ von $\mathcal{F}$ ist die Garbe der stetigen Schnitte von $\pi : F \to X$, also

$$\mathcal{F}^+(U) := \{f : U \to F \mid \pi \circ f = (i : U \hookrightarrow X)\}.$$

Bem. Garbifizierung ist ein Funktor $s : \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$.

Prop. Es ex. ein kanonischer Morphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ def. durch

$$s \in \mathcal{F}(U) \quad \mapsto \quad (x \mapsto s_x : U \to F).$$

Wenn $\mathcal{F}$ schon eine Garbe ist, dann ist f ein Isomorphismus.

Def. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X.
Eine Familie $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i\in I}$ von Schnitten auf offenen Teilmengen von X heißt **lokal kompatibel**, falls für alle $i, j \in I$ und $x \in U_i \cap U_j$ eine Umgebung $V \subset U_i \cap U_j$ von x mit $s_i|_V = s_j|_V$ existiert.

Def. Der **Garbifizierungsfunktor** $s : \mathbf{PAb}(X) \to \mathbf{Ab}(X)$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$ ist def. auf Prägarben abelscher Gruppen $\mathcal{F}$ und $U \subset X$ offen durch

$$s(\mathcal{F})(U) := \{\, \text{Familien } (s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i\in I} \text{ von lokal kompatiblen Schnitten auf offenen Teilmengen mit } U = \textstyle\bigcup_{i\in I} U_i \,\}/\!\sim$$

$$(s_i)_{i\in I} \sim (t_j)_{j\in J} \;:\iff\; \exists \text{ offene Überdeckung } (W_k)_{k\in K} \text{ von U} \;: \; \forall\, i, j, k : s_i|(U_i \cap V_j \cap W_k) = t_j|(U_i \cap V_j \cap W_k).$$

Thm. Es besteht die Adjunktion $s : \mathbf{PAb}(X) \rightleftarrows \mathbf{Ab}(X) : i$.
Die Koeinheit $\epsilon : s \circ i \to \mathrm{Id}_{\mathbf{Ab}(X)}$ ist ein Isomorphismus.

Bem (Universelle Eigenschaft der Garbifizierung). Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Sei $\mathcal{G}$ sogar eine Garbe. Dann gibt es einen einen eindeutigen Morphismus $\alpha^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ mit $\alpha = \alpha^+ \circ \eta_{\mathcal{F}}$.

Def. Sei A eine Menge (oder ab. Gruppe, ...), X ein topol. Raum.
- Die **konstante Prägarbe** $\mathbf{A}$ mit Faser A auf X ist def. durch

$$\mathbf{A}(U) := A, \quad r_{UV} := \mathrm{id}_A \quad \text{für alle } V \subseteq U \subseteq X.$$

- Die **konstante Garbe** mit Faser A ist die Garbifizierung $\underline{A} := A_X := \mathbf{A}^+$ von $\mathbf{A}$.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X heißt **lokal konstant**, falls jeder Punkt in X eine offene Umgebung U besitzt, sodass $F|_U$ isomorph zu einer konstanten Garbe ist.

Def. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ (Prä-)Garben auf X. Dann ist auch

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$$

eine (Prä-)Garbe auf X, die sogenannte **Hom-(Prä-)Garbe**.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt ...
- ... **welk** (flabby, flasque), wenn die Einschränkungsabbildungen

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$$

für alle *offenenen* $U \subseteq X$ surjektiv sind.
- ... **weich** (soft, mou), wenn die Einschränkungsabbildungen

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(A, \mathcal{F})$$

für alle *abgeschlossenen* $A \subseteq X$ surjektiv sind.

Lem. Welke Garben sind immer auch weich.

Def. Eine Garbe $\mathcal{F}$ ab. Gruppen auf einem topol. Raum X heißt **fein** (fine, fin), wenn für je zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ existiert, sodass α auf einer offenen Umgebung von A_1 Null und auf einer offenen Umgebung von A_2 die Identität ist.

Lem.
- Eine Garbe $\mathcal{F}$ ab. Gruppen auf einem parakompakten Hausdorffraum ist genau dann fein, wenn $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ welk ist.
- Feine Garben auf parakompakten Hausdorffräumen sind weich.

(Lokal) geringte Räume

Def. Eine topol. / glatte **Mannigfaltigkeit** ist ein Paar $(M, \mathcal{O}_M)$, wobei M ein Hausdorffraum und $\mathcal{O}_M$ eine Garbe auf M ist, sodass jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, sodass $\mathcal{O}_M|U$ isomorph zu einer Garbe von stetigen / glatten Funktionen auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Def. Ein Morphismus $\Phi : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ zwischen topol. / glatten Mften. ist geg. durch eine stetige Abb. $\phi : M \to N$, sodass

$$\forall\, U \subseteq N \text{ offen} \, : \, \forall\, f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_N) \, : \, f \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_M).$$

Bem. Diese Definitionen sind äquivalent zu den üblichen Alte-Römer-Definitionen von Mannigfaltigkeiten über Atlanten.

Def. Ein **geringter Raum** ist ein Paar $(M, \mathcal{O}_M)$, wobei M ein topol. Raum und $\mathcal{O}_M$ eine Ringgarbe auf M ist.
Ein Morphismus $\Phi : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ zwischen geringten Räumen ist ein Paar (φ, θ), wobei $\varphi : M \to N$ stetig und

$$\theta = (\theta_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_N) \to \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_M))_{U \Subset N \text{ offen}}$$

eine Familie von Ringhomomorphismen ist, sodass

$$\forall\, V \Subset U \Subset N \;:\; \theta_U(-)|_{\varphi^{-1}(V)} = \theta_V(-|_V).$$

Sprechweise. $\mathcal{O}_M$ heißt **Strukturgarbe**.

Bem. Man kann θ als Garbenmorph. $\theta : \mathcal{O}_N \to \varphi_\bullet(\mathcal{O}_M)$ auffassen.

Def. Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ ein geringter Raum. Eine **(Prä-)Garbe von $\mathcal{O}_M$-Moduln** ist eine mengenwertige (Prä-)Garbe $\mathcal{F}$ auf M, sodass $\mathcal{F}(U)$ ein $\mathcal{O}_M(U)$-Modul für alle offenen $U \subset M$ ist. Desweiteren soll die Skalarmultiplikation mit Einschränkungen verträglich sein:

$$\forall\, V \Subset U \Subset M \;:\; \forall\, z \in \mathcal{O}_M(U),\, r \in \mathcal{F}(U) \;:\; (z \cdot r)|_V = (z|_V) \cdot (r|_V).$$

Bsp. Sei $(M, \mathcal{O}_M)$ eine glatte Mft. Sei $\mathcal{D}_M$ die Garbe der linearen, derivativen Operatoren, also

$$\mathcal{D}_M(U) := \{\, P : \mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U),\; P = \sum f_I(z) \tfrac{\partial^I}{\partial z^I} \text{ in lok. Koord.} \,\}.$$

Dann ist $(M, \mathcal{D}_M)$ ein geringter Raum.

Def. Sei A ein komm. Ring. Das **Spektrum** von A ist

$$\operatorname{Spec}(A) := \{\, \text{Primideale } \mathfrak{p} \subsetneq A \,\}$$

mit der sogenannten **Zariski-Topologie** mit offenen Mengen

$$\mathcal{T} := \{ D(S) \mid S \subseteq A \} \subset \mathcal{P}(\operatorname{Spec}(A)), \quad D(S) := \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid S \not\subseteq \mathfrak{p} \}.$$

Die abgeschlossenen Mengen sind von der Form $V(S)$ für $S \subseteq A$ mit

$$V(S) := \operatorname{Spec}(A) \setminus D(S) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid S \subseteq \mathfrak{p} \}.$$

Für $U \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ offen sei $\Delta(U)$ das Komplement der Vereinigung der Ideale in U. Da $\Delta(U)$ multiplikativ abgeschlossen ist und $V \subseteq U \implies \Delta(V) \subseteq \Delta(U)$ gilt, können wir eine Prägarbe komm. Ringe $\mathcal{O}'$ auf $\operatorname{Spec}(A)$ wie folgt definieren:

$$\mathcal{O}'(U) := (\Delta(U))^{-1} A, \quad r_{UV}([\tfrac{s}{t}]) := [\tfrac{s}{t}].$$

Sei $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)} := (\mathcal{O}')^+$ die Garbifizierung von $\mathcal{O}'$.
Der geringte Raum $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O})$ heißt **affines Schema** von A.

Bem. Sei A ein Integritätsbereich. Dann ist das Nullideal $(0) \in \operatorname{Spec}(A)$ ein generischer Punkt, d. h. $\overline{(0)} = \operatorname{Spec}(A)$.

Lem. $(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p} := \Delta(\mathfrak{p})^{-1} A$ für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$

Def. Ein Ring R heißt **lokal**, wenn er eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. Er besitzt genau ein maximales a) Linksideal b) Rechtsideal.
2. Wenn eine endliche (evtl. leere) Summe von Ringelementen eine Einheit ist, dann auch einer der Summanden (insb. gilt $0 \neq 1$).
3. $\operatorname{Spec}(R)$ hat genau einen abgeschl. Punkt (das maximale Ideal).

Bem. In lok. Ringen stimmen max. Links- und Rechtsideal überein.

Def. Seien R und S lokale Ringe mit max. Idealen $\mathfrak{m} \subset R$ und $\mathfrak{n} \subset S$. Ein **lokaler Ringhomomorphismus** zwischen R und S ist ein Ringhomomorphismus $f : R \to S$ mit $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$.

Def. Ein geringter Raum $(M, \mathcal{O}_M)$ heißt **lokal geringt**, wenn die Fasern $\mathcal{O}_{M,x}$ für alle $x \in M$ lokale Ringe sind.
Ein Morphismus $\Phi = (\varphi, \theta) : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ heißt **Morph. von lokal geringten Räumen**, wenn für alle $x \in M$ die ind. Abb.

$$\theta_x : \mathcal{O}_{N,y} \to \mathcal{O}_{M,x}$$

ein lokaler Homomorphismus von lokalen Ringen ist.

Bspe. Affine Schemata und Mften sind lokal geringte Räume.

Def. Ein **Schema** ist ein lokal geringter Raum $(S, \mathcal{O}_S)$, der lokal isomorph zum affinen Spektrum eines Ringes ist, d. h. jedes $x \in S$ besitzt eine offene Umgebung U, sodass $(U, \mathcal{O}_S|U)$ als lokal geringter Raum isomorph zum affinen Schema eines komm. Ringes ist.

Direktes und inverses Bild

Def. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Das **direkte Bild** (oder Pushforward) einer (Prä-)Garbe $\mathcal{F}$ auf X ist die (Prä-)Garbe $f_\bullet(\mathcal{F})$ auf Y mit

$$f_\bullet(\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \quad \text{für } U \subset Y \text{ offen.}$$

Bem.
- $f_\bullet$ ist ein Funktor $f_\bullet : (\mathbf{P})\mathbf{Sh}(X) \to (\mathbf{P})\mathbf{Sh}(Y)$.
- $(-)_\bullet$ ist selbst funktoriell: $f_\bullet \circ g_\bullet = (f \circ g)_\bullet$, $\mathrm{id}_\bullet = \mathrm{Id}$.
- Die Konstruktion funktioniert für (Prä-)Garben von Mengen, ab. Gruppen, A-Linksmoduln und auch für $\mathcal{O}_X$-Modulgarben, wenn $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von geringten Räumen ist.

Def. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topol. Räumen. Das **inverse Bild** (Pullback) ist der Funktor $f^\bullet : \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(X)$, der für Garben $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Y)$ und $U \subset X$ offen definiert ist durch

$$\begin{aligned} f^\bullet(\mathcal{F})(U) := \{\, &\text{Familien } (s_x \in \mathcal{F}_{f(x)})_{x \in U} \text{ von Keimen, für die gilt:} \\ &\text{Für alle } x \in X \text{ gibt es eine Umgebung } V \subset X \text{ von } f(x), \\ &\text{eine Umgebung } W \subset U \cap f^{-1}(V) \text{ von } x \text{ und einen} \\ &\text{Schnitt } t \in \mathcal{F}(V) \text{ mit } \forall\, x \in W \;:\; t_x = s_x \,\}. \end{aligned}$$

Prop. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abb. zwischen topol. Räumen. Dann besteht die Adjunktion $\quad f^\bullet : \mathbf{Sh}(Y) \rightleftarrows \mathbf{Sh}(X) : f_\bullet$.

Bem.
- $(-)^\bullet$ ist kontravar. funktoriell: $g^\bullet \circ f^\bullet = (f \circ g)^\bullet$, $\mathrm{id}^\bullet = \mathrm{Id}$.
- Alternative Definition: $f^\bullet(\mathcal{F}) := (U \mapsto \Gamma(f(U), \mathcal{F}))^+$
- Es gilt $f^\bullet(\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_{f(x)}$ für alle $x \in X$.
- Die Konstruktion funktioniert für (Prä-)Garben von Mengen, ab. Gruppen, A-Linksmoduln, aber *nicht* für $\mathcal{O}_X$-Modulgarben, wenn $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von geringten Räumen ist.
- Sei $f : X \to \{\,\mathrm{pt}\,\}$ und $\mathcal{F}$ die Garbe auf $\{\,\mathrm{pt}\,\}$ mit $\mathcal{F}(\{\,\mathrm{pt}\,\}) = A$. Dann ist $f^\bullet(A) \cong \underline{A}$ die konstante Garbe auf X mit Faser A.

Garben auf Siten

Def. Sei $\mathcal{S}$ eine Kategorie. Ein **Sieb** auf $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ ist eine Menge $\Phi = \{ \varphi_i \in \mathrm{Hom}_\mathcal{S}(U_i, U) \mid i \in I \}$ von Morphismen nach U, sodass gilt:

$$\forall\, V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}),\; i \in I,\; \psi \in \mathrm{Hom}_\mathcal{S}(V, U_i) \;:\; \varphi_i \circ \psi \in \Phi.$$

Bem. Sei Φ ein Sieb auf U, $f \in \mathrm{Hom}(V, U)$. Dann ist

$$f^*(\Phi) := \{ \varphi \in \mathrm{Hom}_\mathcal{S}(W, V) \mid W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}), f \circ \varphi \in \Phi \}$$

ein Sieb auf V, die **Einschränkung** von Φ auf V (über f).

Def. Eine **Grothendieck-Topologie** auf einer Kategorie $\mathcal{S}$ ist gegeben durch eine Menge $C(U)$ von Sieben auf U für jedes $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ (den sogenannten **überdeckenden Sieben**), sodass gilt:

- Für alle $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$ ist das Sieb aller Abb. nach U in $C(U)$.
- Die Einschränkung $f^*(\Phi)$ eines Siebes $\Phi \in C(U)$ über $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{S}(V, U)$ ist in $C(U)$.
- Die Überdeckungseigenschaft lässt sich lokal testen:
  Für Ψ ein bel. Sieb auf U und $\Phi \in C(U)$ überdeckend. Angenommen, für alle $(\varphi_i : U_i \to U) \in \Phi$ ist die Einschränkung von Ψ über φ_i überdeckend, also $\varphi_i^*(\Psi) \in C(U_i)$. Dann ist auch $\Psi \in C(U)$.

Def. Ein **Situs** ist eine Kategorie $\mathcal{S}$ mit Grothendieck-Topologie.

Def. Sei X ein topol. Raum. Dann ist $\mathbf{Ouv}(X)$ ein Situs mit

$$C(U) := \{ \text{von offenen Überdeckungen von } U \text{ erzeugte Siebe} \}.$$

Def.
- Eine $\mathcal{C}$-wertige Prägarbe ist ein Funktor $\mathcal{F} : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ (z. B. $\mathcal{C} = \mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, \mathbf{R\text{-}Mod}, \mathbf{Top}$).
- Ein Morphismus zwischen Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf demselben Situs ist eine natürliche Transformation zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$.

Def. Eine **Garbe** auf einem Situs $\mathcal{S}$ ist eine Prägarbe $\mathcal{F}$, für die gilt: Für alle überdeckenden Siebe $\Phi \in C(U)$ und Familien von Schnitten $(s_\varphi \in \mathcal{F}(V))_{(\varphi : V \to U) \in \Phi}$, die miteinander vertr. sind, d. h.

$$\forall\, (\varphi : V \to U) \in \Phi \;:\; \forall\, \psi : W \to V \;:\; s_{\varphi \circ \psi} = s_\varphi|_W := \mathcal{F}(\psi)(s_\varphi),$$

gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ mit

$$\forall\, (\varphi : V \to U) \in \Phi \;:\; s_\varphi = s|_V := \mathcal{F}(\varphi)(s).$$

Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismen zw. den Prägarben.

Bem. Die Notationen und Sprechw. für (Prä-)Garben auf topol. Räumen werden auch für Garben auf Siten verwendet. Man notiert auch $s|_V := \mathcal{G}(f)(s)$ für die Einschränkung eines Schnittes $s \in \mathcal{G}(U)$ über $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{S}(V, U)$, wohlwissend, dass sie auch von f abhängt.

Bsp. Sei G eine Gruppe und $\mathcal{S}_G$ die Kategorie der Mengen mit G-Wirkung und äquivarianten Abbildungen. Man nennt ein Sieb Φ über $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}_G)$ überdeckend, wenn $U = \cup_{(\varphi : V \to U) \in \Phi}\, \varphi(V)$.
Sei $\mathbf{Sh}_G$ die Kategorie der Garben von Mengen auf dem Situs $\mathcal{S}_G$.
Sei $G_l := G \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}_G)$ mit der Linkswirkung $g.h := gh$.
Es gibt einen Funktor $\alpha : \mathbf{Sh}_G \to \mathcal{S}_G$ mit $\alpha(F) := F(G_l) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}_G)$, wobei G auf $F(G_l)$ durch $g.x := F(h \mapsto hg)(x)$ für $x \in F(G_l)$ wirkt.

Prop. $\alpha : \mathbf{Sh}_G \to \mathcal{S}_G$ ist eine Kategorienäquivalenz.

Komplexe und (Ko-)Homologie

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Def. • Ein **Kettenkomplex** $C_\bullet$ ist eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Obj. aus $\mathcal{A}$ und Morphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ mit $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.
- Ein **Kokettenkomplex** $C^\bullet$ ist eine Folge $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Objekten aus $\mathcal{A}$ und Morphismen $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ mit $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Def. Sei $C_\bullet$ ein Kettenkomplex.

- C_n heißt Objekt der **n-Ketten**,
- $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ heißt **Randabbildung** oder **Differential**,
- $Z_n(C_\bullet) := \ker \partial_n \hookrightarrow C_n(C_\bullet)$ heißt Objekt der **n-Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) := \operatorname{im} \partial_{n+1} \hookrightarrow Z_n(C_\bullet)$ heißt Objekt der **n-Ränder**.

Analog nennt man für einen Kokettenkomplex $C^\bullet$

- δ^n **Korandabbildung**,
- C^n **n-Koketten**,
- $Z^n := \ker \delta^n$ **n-Kozykel**,
- $B^n := \operatorname{im} \delta^{n-1}$ **n-Koränder**.

Bem. Kettenkomplexe und Kokettenkomplexe unterscheiden sich nur in Notation und Terminologie.

Lem. Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \in \mathcal{A}$ mit $g \circ f = 0$. Sei (K, k) der Kern von g und (C, c) der Kokern von f. Deren universelle Eigenschaften induzieren Morphismen $a : X \to K$ und $b : C \to Z$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dr, "b"] & \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "a"'] & Y \arrow[u, "c"'] \arrow[r, "g"] & Z \\
 & K \arrow[u, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus $\operatorname{coker} a \cong \ker b$.

Def. Die **n-te Homologie** $H_n(C_\bullet)$ eines Kettenkomplexes $C_\bullet$ aus $\mathcal{A}$ ist der Kokern der Abbildung $a_n : C_{n+1} \to \ker \partial_n$, die durch die universelle Eigenschaft des Kerns induziert wird.

Bem. • Das letzte Lemma besagt, dass $H_n(C_\bullet)$ isomorph zum Kern der Abbildung $b_n : \operatorname{coker} \partial_{n+1} \to C_{n-1}$, die durch die universelle Eigenschaft des Kokerns induziert wird, ist.
- Äquivalent ist $H_n(C_\bullet)$ der Kokern der induzierten Abbildung $B_n(C_\bullet) \hookrightarrow Z_n(C_\bullet)$, kurz geschrieben $H_n(C_\bullet) \cong Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$.

Def. Analog ist die **n-te Kohomologie** eines Kokomplexes $C^\bullet$

$$\begin{aligned} H^n(C^\bullet) &:= \operatorname{coker}(a^n : C^{n-1} \to \ker \delta^n) \\ &\cong \ker(b^n : \operatorname{coker} \delta^{n-1} \to C^{n+1}) \cong Z^n/B^n. \end{aligned}$$

Def. Ein (Ko-)Kettenkomplex heißt **exakt** oder **azyklisch**, wenn

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} : H_n(C_\bullet) \cong 0 \quad (\text{bzw. } H^n(C_\bullet) \cong 0).$$

Def. Ein (Ko-)Kettenkomplex heißt **zyklisch** wenn seine Differentiale alle Null sind.

Def. Eine Morphismus $f : C_\bullet \to D_\bullet$ (bzw. $f : C^\bullet \to D^\bullet$) zwischen (Ko-)Kettenkomplexen ist eine Familie von Homomorphismen

$$(f_n : C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\text{bzw. } (f^n : C^n \to D^n)_{n\in\mathbb{N}}),$$

die mit den Randabbildungen verträglich sind, d. h.

$$f_{n-1} \circ \partial_n^C = \partial_n^D \circ f_n \quad (\text{bzw. } f^{n+1} \circ \delta_C^n = \delta_D^n \circ f^n) \quad \text{für alle } n.$$

Def. Die **Kategorie der (Ko-)Komplexe** in $\mathcal{A}$ ist $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$. Die Unterkat. der zyklischen Komplexe ist $\mathbf{Kom}_0(\mathcal{A}) \subset \mathbf{Kom}(\mathcal{A})$.

Def. Die Kategorien der (nach links/rechts) beschränkten Kettenkomplexe sind die vollen Unterkategorien von $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{Ob}(\mathbf{Kom}^+(\mathcal{A})) &:= \{K_\bullet \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Kom}(\mathcal{A})) \mid \exists\, i_0 \in \mathbb{Z} : \forall\, i \leq i_0 : K_i = 0\}, \\ \operatorname{Ob}(\mathbf{Kom}^-(\mathcal{A})) &:= \{K_\bullet \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Kom}(\mathcal{A})) \mid \exists\, i_0 \in \mathbb{Z} : \forall\, i \geq i_0 : K_i = 0\}, \\ \operatorname{Ob}(\mathbf{Kom}^b(\mathcal{A})) &:= \operatorname{Ob}(\mathbf{Kom}^+(\mathcal{A})) \cap \operatorname{Ob}(\mathbf{Kom}^+(\mathcal{A})). \end{aligned}$$

Prop. (Ko-)Homologie ist ein Funktor $H_n, H^n : \mathbf{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ beziehungsweise $H_\bullet, H^\bullet : \mathbf{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Kom}_0(\mathcal{A})$.

Def. Eine **Kettenhomotopie** zw. Morphismen $f, g : C_\bullet \to D_\bullet$ von Kettenkomplexen ist eine Folge von Homomorphismen $k_n : C_n \to D_{n+1}$ mit $\forall\, n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1}^D \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n^C = f_n - g_n$.

Notation. $f \simeq g$ für kettenhomotope $f, g : C_\bullet \to D_\bullet$

Bem. Kettenhomotopien lassen sich verknüpfen:

$$f_1 \simeq f_2,\ g_1 \simeq g_2 \implies g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$$

Lem. Kettenhomotope Abb. ind. dieselbe Abb. in (Ko-)Homologie: Seien $f, g : C_\bullet \to D_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt $H_\bullet(f) = H_\bullet(g)$.

(Ko-)Homologie von simplizialen Mengen und topologischen Räumen

Def. Sei X eine simpl. Menge. Sei $C_n(X)$ die von den n-Simplizes X_n erzeugte abelsche Gruppe (d. h. die Gruppe der endl. formalen Linearkombinationen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). Sei $\delta_n^i : [n-1] \to [n]$ diejenige streng monotone Abb. mit $i \notin \operatorname{im} \delta_n^i$. Definiere

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X), \qquad \sum_{\sigma\in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma\in X_n} \lambda_\sigma \sum_{i=0}^n (-1)^i X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Prop. $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ ist ein Kettenkomplex (d. h. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$)

Def. Sei X eine simpliziale Menge und A eine abelsche Gruppe.

- Der **Komplex** $(C_\bullet(X; A), \partial_\bullet)$ von X **mit Koeff.** in A ist
$$C_n(X; A) := C_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad \partial_n := \partial_n \otimes \mathrm{id} : C_n(X; A) \to C_{n-1}(X; A).$$
- Der **Kokomplex** $(C^\bullet(X; A), \delta^\bullet)$ von X mit **Koeff.** in A ist
$$\begin{aligned} C^n(X; A) &:= \operatorname{Hom}(C^n(X), A), \\ \delta^n : C^n(X; A) &\to C^{n+1}(X; A), \quad f \mapsto f \circ \delta_{n+1}. \end{aligned}$$

Def. Für Verklebedaten X ist der zugeh. (Ko-)Kettenkomplex (mit Koeffizienten) genauso definiert wie für simpliziale Mengen.

Beob. $C_n(X; \mathbb{Z}) = C_n(X)$

Notation. Sei X eine simpliziale Menge. Setze

- $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$,
- $H^n(X) := H^n(C^\bullet(X; \mathbb{Z}))$,
- $H_n(X; A) := H_n(C_\bullet(X; A))$,
- $H^n(X; A) := H^n(C^\bullet(X; A))$.

Prop. Für jede simpl. Menge X ex. ein kanonischer Isomorphismus

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \text{freie ab. Gr. erzeugt von Zshgskomponenten von } |X|.$$

Prop. Sei CX der Kegel über Verklebedaten X. Es gilt

$$H_0(CX) = \mathbb{Z}, \ H_{>0}(CX) = 0.$$

Def. Sei X eine simpliziale Menge.

- Ein **homol. Koeffizientensystem** $\mathcal{A}$ auf X ist ein Funktor
$$\mathcal{A} : (1 \downarrow X) \to \mathbf{Ab}.$$
Dabei ist $1 : \mathbf{1} \to \mathbf{Set}$ der Funktor, der konstant $\{\star\}$ ist (und $\mathbf{1}$ die Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismus).
Expliziter besteht ein Koeffizientensystem aus einer abelschen Gruppe $\mathcal{A}_\sigma$ für jedes n-Simplex $\sigma \in X_n$ und Abbildungen $\mathcal{A}(f, \sigma) : \mathcal{A}_\sigma \to \mathcal{A}_{X(f)(\sigma)}$ für alle $\sigma \in X_n$, $f \in \operatorname{Hom}_\Delta([m], [n])$ mit
$$\mathcal{A}(\mathrm{id}, \sigma) = \mathrm{id}, \quad \mathcal{A}(f \circ g, \sigma) = \mathcal{A}(g, X(f)(\sigma)) \circ \mathcal{A}(f, \sigma).$$
- Ein **kohomol. Koeffizientensystem** $\mathcal{B}$ auf X ist ein Funktor
$$\mathcal{B} : (1 \downarrow X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}.$$
- Ein Morphismus zw. (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf derselben simpl. Menge ist eine natürliche Transformation.

Bsp. Sei Y ein topologischer Raum, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung und X deren Nerv. Dann definiert

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n} &:= \{U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}, \\ \mathcal{F}(f, (\alpha_0, \ldots, \alpha_n))(\phi) &:= \text{passende Einschränkung von } \phi. \end{aligned}$$

ein kohomologisches Koeffizientensystem auf X.

Def. Sei $\mathcal{A}$ ein homologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X. Wir setzen

$$C_n(X; \mathcal{A}) := \{ \text{ formale endl. Linearkomb. } \sum_{\sigma\in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \text{ mit } \lambda_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma \}$$

und definieren $\partial_n : C_n(X; \mathcal{A}) \to C_{n-1}(X; \mathcal{A})$ durch

$$\sum_{\sigma\in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \quad \mapsto \sum_{\sigma\in X_n} \sum_{i=0}^n (-1)^i \mathcal{A}(\partial_n^i, \sigma)(\lambda_\sigma) \cdot X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Die Homologiegruppen des so def. Kettenkomplexes $C_\bullet(X; \mathcal{A})$ heißen **Homologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in $\mathcal{A}$**.

Def. Sei $\mathcal{B}$ ein kohomologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X. Wir setzen

$$C^n(X;\mathcal{B}) := \{ \text{ Funktionen } f : (\sigma \in X_n) \to \mathcal{B}_\sigma \}$$

und definieren $\delta_n : C^n(X;\mathcal{B}) \to C_{n+1}(X;\mathcal{B})$ durch

$$\delta^n(f)(\sigma) := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \mathcal{B}(\partial^i_{n+1}, \sigma)(f(X(\partial^i_{n+1})(\sigma))).$$

Die Kohomologiegruppen des so def. Kokettenkomplexes $C^\bullet(X;\mathcal{B})$ heißen **Kohomologiegruppen** von X **mit Koeffizienten in** $\mathcal{B}$.

Bsp. Sei Y ein topologischer Raum, $U = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$, X und $\mathcal{F}$ wie im letzten Beispiel. Die Homologiegruppen $H^n(X,\mathcal{F})$ werden **Čech-Kohomologiegruppen** der Garbe der stetigen Funktionen auf Y bzgl. der Überdeckung U genannt.

Def. Sei Y ein topol. Raum und X dessen simpl. Menge der singulären Simplizes. Die Homologiegruppen von $C_\bullet(X;A)$ heißen **singuläre Homologiegruppen** $H_n(Y;A)$ von Y mit Koeff. A.

Prop. Seien $\phi, \psi : X \to Y$ homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Dann sind die induzierten Abbildungen $\phi_*, \psi_* : C_\bullet(X;A) \to C_\bullet(Y;A)$ kettenhomotop.

Kor. Homotopieäquivalente Räume besitzen isomorphe singuläre Homologiegruppen.

Weitere Beispiele für (Ko-)Homologie

Def. Eine **simpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$.

Def. Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe.
Dann ist $(A_\bullet, \partial)$ ein Kettenkomplex mit

$$\partial_n : A_n \to A_{n-1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A(\partial^i_n)(a).$$

Def. Eine **kosimpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A : \Delta \to \mathbf{Ab}$.

Def. Sei A eine kosimpliziale abelsche Gruppe.
Dann ist $(A^\bullet, \delta)$ ein Kokettenkomplex mit

$$\delta^n : A^n \to A^{n+1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A(\partial^i_{n+1})(a).$$

Def. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine (nicht unbedingt offene) Überdeckung von Y und $\mathcal{F}$ eine Garbe ab. Gruppen auf Y. Die kosimpliziale abelsche Gruppe $\check{C}(U,\mathcal{F})$ der **Čech-Koketten** ist

$$\check{C}^m(U,\mathcal{F}) := \prod_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m \in A} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}),$$

$$\check{C}(U,\mathcal{F})(f : [m] \to [n])((f_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m})_{\alpha_0,\ldots,\alpha_m}) := (f_{g(0),\ldots,g(m)}|U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n})_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}.$$

Bem. Die Randabb. im zugeh. Kokettenkomplex ist gegeben durch

$$(\delta^n \phi)_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n+1}} := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \phi_{\alpha_0,\ldots,\hat{\alpha_i},\ldots,\alpha_{n+1}}.$$

Def. Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes heißen **Čech-Homologiegruppen** von $\mathcal{F}$ bzgl. der Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Bem. $\check{H}(U,\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F})$ hängt nicht von der Überdeckung ab.

Def. Sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mft, $\Omega^k(M)$ das $C^\infty(M)$-Modul der k-Formen auf M. Die **äußere Ableitung** $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ ist in lokalen Koordinaten $(x^1,\ldots,x^n)$ definiert durch

$$\mathrm{d}\left(\sum_{|I|=k} f_I \mathrm{d}x^I\right) = \sum_{|I|=k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^I.$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Komplexes $\Omega^\bullet(M)$ heißen **De-Rham-Kohomologiegruppen**.

Prop. Seien $\phi, \psi : M \to N$ zwei glatt homotope Abbildungen von $\mathcal{C}^\infty$-Mften. Dann sind $\phi^*, \psi^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ kettenhomotop.

Def. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und A ein $\mathfrak{g}$-Modul. Setze $C^k(\mathfrak{g},A) := L(\wedge^k \mathfrak{g}, A)$ und definiere $\mathrm{d} : C^k(\mathfrak{g},A) \to C^{k+1}(\mathfrak{g},A)$ durch eine allgemeine Cartan-Formel

$$(\mathrm{d}c)(g_1,\ldots,g_{k+1}) := \sum_{1\le j<l\le k+1} (-1)^{j+l-1} c([g_j,g_l], g_1, \ldots, \hat{g_j}, \ldots, \hat{g_l}, \ldots, g_{k+1}) + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j g_j c(g_1, \ldots, \hat{g_j}, \ldots, g_{k+1}).$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Kokettenkomplexes werden mit $H^\bullet(\mathfrak{g}, A)$ bezeichnet.

Exakte Sequenzen

Def. Eine (lange) **exakte Sequenz** ist ein (Ko-)Kettenkomplex mit verschwindender Homologie.

Def. Eine **kurze ex. Sequenz** (k. e. S.) ist eine ex. Seq. der Form

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Lem. Jede k. e. S. $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ in einer abelschen Kategorie ist kanonisch isomorph zur Sequenz

$$0 \to \ker g \to Y \to \operatorname{coker} f \to 0.$$

Def. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0 \in \mathcal{A}$ eine k. e. S. Die Sequenz heißt **spaltend**, falls sie isomorph zur k. e. S. $0 \to A \to A \oplus C \to C$ ist.

Prop. Für eine k. e. S. $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \in \mathcal{A}$ sind äquivalent:

- Die Sequenz spaltet.
- Es existiert eine Retraktion $r : B \to A$ mit $r \circ f = \mathrm{id}_A$.
- Es existiert ein Schnitt $s : C \to B$ mit $g \circ s = \mathrm{id}_C$.

Def. Die abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **halbeinfach**, wenn alle kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{A}$ spalten.

Bsp. Die Kategorie der VR über einem Körper ist halbeinfach.

Bem. Jede (lange) exakte Sequenz lässt sich in k. e. S. zerlegen:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & \\
& & C_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & C_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
\ldots \arrow[r] & L_{n+1} \arrow[ur] \arrow[rr, "\partial_{n+1}"] & & L_n \arrow[rr, "\partial_n"] \arrow[dr] & & L_{n-1} \arrow[rr, "\partial_{n-1}"] \arrow[ur] & & L_{n-2} \arrow[r] & \ldots \\
& & & & C_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $C_i := \ker \partial_{i-1} \cong \operatorname{coker} \partial_{i+1}$. Umgekehrt lässt sich aus solch diagonal verknüpften kurzen exakten Sequenzen eine l. e. S. bauen.

Def. Eine Sequenz $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ von Komplexen heißt **exakt**, wenn für alle n die Seq. $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ exakt ist.

Prop. Eine kurze exakte Sequenz $0 \to A^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C^\bullet \to 0$ von Kokettenkomplexen induziert eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^\bullet)} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{H^n(p^\bullet)} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A^\bullet) \to \ldots$$

Lem. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann sind ebenfalls exakt:

$$0 \to C_\bullet(X;A) \to C_\bullet(X;B) \to C_\bullet(X;C) \to 0,$$
$$0 \to C^\bullet(X;A) \to C^\bullet(X;B) \to C^\bullet(X;C) \to 0.$$

Kor. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann existieren lange exakte Sequenzen

$$\ldots \to H_n(X;A) \to H_n(X;B) \to H_n(C) \to H_{n-1}(X;A) \to \ldots$$
$$\ldots \to H^n(X;A) \to H^n(X;B) \to H^n(C) \to H^{n+1}(X;A) \to \ldots$$

Def. Eine Sequenz $0 \to \mathcal{B}' \to \mathcal{B} \to \mathcal{B}'' \to 0$ von (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf einer simpl. Menge X heißt **exakt**, falls

$$0 \to \mathcal{B}'_\sigma \to \mathcal{B}_\sigma \to \mathcal{B}''_\sigma \to 0 \qquad \text{für alle } \sigma \in X_n \text{ exakt ist.}$$

Lem. Eine kurze exakte Sequenz $0 \to \mathcal{B}' \to \mathcal{B} \to \mathcal{B}'' \to 0$ von (ko-)homologischen Koeff'systemen induziert kurze ex. Sequenzen

$$0 \to C_\bullet(X;\mathcal{B}') \to C_\bullet(X;\mathcal{B}) \to C_\bullet(X;\mathcal{B}'') \to 0,$$
$$0 \to C^\bullet(X;\mathcal{B}') \to C^\bullet(X;\mathcal{B}) \to C^\bullet(X;\mathcal{B}'') \to 0$$

und damit auch entsprechende lange exakte Sequenzen.

Lem (Viererlemmata)**.** Sei folgendes kommutatives Diagramm in einer abelschen Kategorie mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[d, hook, "\delta"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D'
\end{tikzcd}$$

Sei α epimorph und δ monomorph.
• Ist γ epimorph, so auch β. • Ist β monomorph, so auch γ.

Bem. Die Aussagen der beiden Viererlemmata sind zueinander dual.

Kor (**Fünferlemma**)**.** Sei folgendes kommutatives Diagramm in einer abelschen Kategorie mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

Sind α, β, δ und ϵ Isomorphismen, dann auch γ.

Lem (**Schlangenlemma**)**.** Sei folgendes kommutatives Diagramm in einer abelschen Kategorie mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' &
\end{tikzcd}$$

Dann gibt es einen Verbindungshomomorphismus $\delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$, mit dem folgende Sequenz exakt ist:

$$\ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma.$$

Def. Die **K-Theorie** $K(\mathcal{A})$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist die abelsche Gruppe (bzw. das Klassen-Äquivalent einer ab. Gruppe) erzeugt von $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ modulo der Äquivalenzrelation erzeugt von $X + Z = Y$ für alle kurzen ex. Seq. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ in $\mathcal{A}$.

Bspe. • $K(k\text{-}\mathbf{Vect}_{\mathrm{fin}}) \cong \mathbb{Z}$ • $K(k\text{-}\mathbf{Vect}) \cong 0$

Exakte Sequenzen von Garben

Lem. Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben, (K, k) dessen Kern und (C, c) dessen Kokern. Dann ist (sK, sk) der Kern und (sC, sc) der Kokern von $s\varphi : s\mathcal{F} \to s\mathcal{G}$.

Prop. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben über einem topologischen Raum X, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben und

$$\mathcal{H} \xrightarrow{k} i\mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{H} \xrightarrow{j} i\mathcal{G} \xrightarrow{c} \mathcal{H}$$

dessen kanonische Zerlegung von $i\varphi$ in $\mathbf{PAb}(X)$. Dann ist

$$s\mathcal{H} \xrightarrow{s(k)} si\mathcal{F} \cong \mathcal{F} \xrightarrow{s(i)} s\mathcal{H} \xrightarrow{s(j)} \mathcal{G} \cong si\mathcal{G} \xrightarrow{s(c)} s\mathcal{H}$$

eine kanonische Zerlegung von $si\varphi \cong \varphi$.

Kor. $\mathbf{Ab}(X)$ ist eine abelsche Kategorie.

Bem. Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ eine Sequenz von Prägarben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X.

- Die Sequenz ist eine exakte Sequenz von Prägarben, wenn für alle offenen $U \subseteq X$ gilt: $\operatorname{im} f_U = \ker g_U$.
- Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sogar Garben. Dann ist die Seq. eine ex. Seq. von Garben, wenn für alle offenen $U \subseteq X$ gilt, dass $\operatorname{im} f_U \subseteq \ker g_U$ und jeder Schnitt $t \in \ker g_U$ lokal Urbilder besitzt, d. h. es existiert eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und eine Familie von Schnitten $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$ mit $\forall i \in I : f_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$.

Lem. • Eine Sequenz $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ von Garben ab. Gruppen ist genau dann exakt, wenn sie halmweise exakt ist, d. h. für alle $x \in X$ ist die induzierte Sequenz $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ exakt.
- Wenn eine Sequenz von Garben aufgefasst als Sequenz von Prägarben exakt ist, dann ist sie es auch als Sequenz von Garben.
- Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine *k. e. S.* von Prägarben auf einem topol. Raum und $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ sogar Garben. Dann ist auch $\mathcal{G}$ eine Garbe.

Lem. Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{O} \in \mathbf{Ab}(X)$ eine k. e. S. von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X.

- Sei $\mathcal{F}$ welk und $U \subseteq X$ offen. Dann ist auch
$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{G}) \to \Gamma(U, \mathcal{H}) \to 0 \quad \text{exakt.}$$
- Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ welk, dann auch $\mathcal{H}$.

Lem. Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to \mathcal{O} \in \mathbf{Ab}(X)$ eine k. e. S. von Garben abelscher Gruppen auf einem parakompakten Hausdorffraum X.

- Sei $\mathcal{F}$ weich und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist auch
$$0 \to \Gamma(A, \mathcal{F}) \to \Gamma(A, \mathcal{G}) \to \Gamma(A, \mathcal{H}) \to 0 \quad \text{exakt.}$$
- Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ weich, dann auch $\mathcal{H}$.

Funktoren zwischen abelschen Kategorien

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zw. additiven Kategorien heißt **additiv**, falls für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ die Abb. $F : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(FX, FY)$ ein Morphismus von abelschen Gruppen ist.

Def. Ein additiver Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zw. ab. Kategorien heißt a) **exakt**, b) **links-exakt**, c) **rechts-exakt**, falls für alle k. e. S. $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ aus $\mathcal{A}$ auch folgende Seq. in $\mathcal{B}$ exakt ist:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \ 0 \to FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \to 0 \\
&\text{b)}\ \ 0 \to FX \longrightarrow FY \longrightarrow FZ \\
&\text{c)}\ \ \phantom{0 \to{}} FX \longrightarrow FY \longrightarrow FZ \to 0.
\end{aligned}$$

Def. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ eine zerfallende k. e. S. in $\mathcal{A}$. Dann ist auch $0 \to FX \to FY \to FZ \to 0$ eine zerfallende k. e. S.

Prop. Sei X ein topologischer Raum, $U \subseteq X$ offen. Der Funktor

$$\Gamma(U, -) : \mathbf{Ab}(X) \to \mathbf{Ab}, \ \ \mathcal{F} \mapsto \Gamma(U, \mathcal{F})$$

ist links-exakt.

Bem. Die Prop gilt auch für Garben abelscher Gruppen auf Siten.

Prop. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Dann sind die Funktoren

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}, && Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) && (X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \text{ fest}), \\
&\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}, && X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) && (Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \text{ fest})
\end{aligned}$$

beide links-exakt.

Def. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt

- $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ heißt **projektiv**, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -)$ exakt ist.
- $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ heißt **injektiv**, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$ exakt ist.

Bem. Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ist genau dann projektiv, wenn $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ injektiv ist und umgekehrt.

Prop. Sei A ein Ring, A-$\mathbf{Mod}$ und $\mathbf{Mod}$-A die Kategorien der A-Links- bzw. A-Rechtsmoduln. Dann sind die Funktoren

$$\begin{aligned}
&A\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}, \ Y \mapsto X \otimes_A Y && (X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Mod}\text{-}A) \text{ fest}), \\
&\mathbf{Mod}\text{-}A \to \mathbf{Ab}, \ X \mapsto X \otimes_A Y && (Y \in \mathrm{Ob}(A\text{-}\mathbf{Mod}) \text{ fest})
\end{aligned}$$

beide rechts-exakt.

Def. Sei A ein Ring. Ein Modul $X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Mod}\text{-}A$ / $Y \in \mathrm{Ob}\,A\text{-}\mathbf{Mod}$ heißt **flach**, falls der Funktor $Y \mapsto X \otimes_A Y$ / $X \mapsto X \otimes_A Y$ exakt ist.

Konvention. Falls in einem Diagramm in einer Zeile das Nullobjekt vorkommt, so wird diese Zeile als exakt angenommen.

Bem. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ bzw. $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ist genau dann projektiv bzw. injektiv, wenn

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & & \\ Y \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{bzw.} \quad \begin{tikzcd} Y & & \\ X \arrow[u, dashed, "\psi"] & X' \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[ul, "\varphi"'] & 0. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(Projektivitätsdiagramm) (Injektivitätsdiagramm)

Lem. Direkte Summanden von injektiven bzw. projektiven Objekten sind selbst injektiv bzw. projektiv.

Lem. Ein A-Modul X ist genau dann projektiv, wenn er ein direkter Summand eines freien A-Moduls ist, d. h. wenn ein A-Modul Y existiert, sodass $X \oplus Y$ frei ist.

Lem (Baer-Kriterium)**.** Ein A-Linksmodul X ist genau dann injektiv, wenn für alle A-Linksideale $I \subset X$ und Modul-Morphismen $q : I \to Q$ eine Fortsetzung $\tilde{q} : Q \to Q$ mit $q = \tilde{q}|_I$ existiert.

Lem. Eine ab. Gruppe X ist genau dann als $\mathbb{Z}$-Modul injektiv, wenn man in A durch ganze Zahlen teilen kann, d. h.

$$\forall\, a \in X, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \,:\, \exists\, b \in X \,:\, nb = a.$$

Bspe. Es sind injektive abelsche Gruppen: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}_{(p)}/\mathbb{Z}$

Def. Sei X ein A-Rechtsmodul. Eine **Relation in A** von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in X$ ist ein Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ mit $\sum x_i a_i = 0 \in X$. Allgemeiner ist eine **Relation in einem A-Linksmodul Y** von $x_1, ..., x_n \in X$ ein Tupel $(y_1, ..., y_n) \in Y^n$ mit $\sum x_i \otimes y_i = 0 \in X \otimes Y$.

Bem. Sei X ein A-Rechts-, Y ein A-Linksmodul und $x_1, ..., x_n \in X$. Für $j = 1, \ldots, m$ sei $y^{(j)} \in Y$ beliebig und $(a_1^{(j)}, ..., a_n^{(j)}) \in A^n$ eine Relation von den x_i in A. Dann ist $(y_1, ..., y_n) \in Y^n$ mit $y_i := \sum a_i^{(j)} y^{(j)}$ eine Relation von den x_i in Y.

Lem. Für einen A-Linksmodul Y sind äquivalent:

- Y ist flach (d. h. $X \mapsto X \otimes_A Y$ ist exakt).
- Alle Relationen von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in X$ in einem A-Rechtsmodul X erhält man durch die eben beschriebene Konstruktion.
- Y ist filtrierter Kolimes von freien Moduln (Lazards Kriterium).

Lem.
- Freie Moduln sind flach.
- Direkte Summanden von flachen Moduln sind flach.
- Induktive Limiten von flachen Moduln sind flach.

Lem. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ein add. Funktor zw. ab. Kategorien. Dann gilt:

$$F \text{ ist linksexakt} \iff F \text{ bewahrt endliche Limiten}$$
$$F \text{ ist rechtsexakt} \iff F \text{ bewahrt endliche Kolimiten}$$

Kor. Mit RAPL bzw. LAPC folgt: Rechtsadjungierte additive Funktoren sind linksexakt, linksadjungierte rechtsexakt.

Bem. Es folgt: $f_\bullet$ ist rechts- und $f^\bullet$ linksexakt. Es gilt sogar:

Lem. Das inverse Bild $f^\bullet$ ist exakt.

Abgeleitete Kategorien

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Def. Eine **projektive Auflösung** $F_\bullet \xrightarrow{\epsilon} E$ eines Obj. $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ist ein Kettenkomplex $F_\bullet$ bestehend aus projektiven Objekten in $\mathcal{A}$ und ein Augmentierungsmorphismus $\epsilon : F_0 \to E$, sodass

$$\ldots \to F_3 \to F_2 \to F_1 \to F_0 \xrightarrow{\epsilon} E \to 0$$

azyklisch ist. Entsprechend besteht bei einer **freien Auflösung** eines Obj. aus $\mathcal{A} = A$-**Mod** der Komplex $F_\bullet$ aus freien A-Moduln. Eine **injektive Auflösung** von E ist eine proj. Auflösung in $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$.

Lem. Seien $P_\bullet \xrightarrow{\epsilon_X} X$ und $Q_\bullet \xrightarrow{\epsilon_Y} Y$ projektive Auflösungen von Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ ein Morphismus.

- Dann existiert ein Morphismus von Auflösungen $R(f) : P_\bullet \to Q_\bullet$ der f fortsetzt, d. h. $R(f)$ ist ein Morphismen von Komplexen und es gilt $\epsilon_Y \circ R(f)_0 = f \circ \epsilon_X$.
- Die Fortsetzung ist eindeutig bis auf Kettenhomotopie.

Kor. Seien $P_\bullet \to X$ und $P_\bullet \to X$ projektive Auflösungen desselben Obj. $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Dann gibt es Morphismen von Auflösungen $f : P_\bullet \to Q_\bullet$ und $g : Q_\bullet \to P_\bullet$ mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}$.

Bem. Duale Aussagen gelten für injektive Auflösungen.

Def. Ein Morphismus $f : K_\bullet \to L_\bullet$ zwischen Kettenkomplexen heißt **Quasiisomorphismus** (Qis), falls $H_\bullet(f) : H_\bullet(K) \to H_\bullet(L)$ ein Isomorphismus ist.

Bem.
- Zwei proj. Auflösungen desselben Obj. sind quasiisomorph.
- Ein Komplex $K_\bullet$ ist genau dann azyklisch, wenn $K_\bullet \to 0_\bullet$ ($0_\bullet$ ist der Nullkomplex) ein Quasiisomorphismus ist.
- Jede projektive Auflösung $P_\bullet \xrightarrow{\epsilon} X$ induziert einen Qis

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

Def. Die **Lokalisierung** einer Kat. $\mathcal{C}$ an einer Klasse $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ von Morphismen ist die Kat. $\mathcal{C}[S^{-1}]$ mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}[S^{-1}]) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y) := \left\{ \begin{array}{l} \text{Ketten in } \mathcal{C}\text{, bestehend aus Morphismen aus } \mathcal{C} \\ \text{und formalen Inversen von Morphismen in } S\text{,} \\ \text{die bei } X \text{ beginnen und bei } Y \text{ enden} \end{array} \right\} / \sim .$$

Dabei wird die Kongruenzrelation $\sim$ erzeugt von

$$(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) \sim (X \xrightarrow{g \circ f} Z), \quad (X \xrightarrow{\mathrm{id}} X) \sim \text{leere Kette},$$
$$(S \xrightarrow{s} T \xleftarrow{s} S) \sim (S \xrightarrow{\mathrm{id}} S), \quad (T \xleftarrow{s} S \xrightarrow{s} T) \sim (T \xrightarrow{\mathrm{id}} T)$$

für Morphismen $(X \xrightarrow{f} Y), (Y \xrightarrow{g} Z) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ und $(S \xrightarrow{s} T) \in S$.

Bem. Es gibt einen kanonischen Funktor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$, der die Morphismen aus S auf Isomorphismen abbildet.

Lem. Die Lokalisierung erfüllt folgende universelle Eigenschaft: Jeder andere Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, der die Morphismen aus S auf Isomorphismen abbildet, faktorisiert eindeutig über Q, d. h. es gibt genau einen Funktor $G : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$ mit $F = G \circ Q$.

Bspe.
- Die Lokalisierung der Kategorie der metrischen Räume an der Klasse der Bilipschitzabbildungen mit dichtem Bild ist äquivalent zur Kategorie der vollständigen metrischen Räume.
- Die Lokalisierung der Kategorie der Garben auf einem topol. Raum X an der Klasse der Morphismen, die halmweise Isomorphismen sind, ist äquivalent zur Kategorie der Garben auf X.

Def. Die **abgeleitete Kategorie** $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ der abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist die Lokalisierung $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})[S^{-1}]$ von $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ an der Klasse $S \subset \mathrm{Mor}(\mathbf{Kom}(\mathcal{A}))$ der Quasiisomorphismen.

Bem. Der Homologiefunktor $H_\bullet : \mathbf{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Kom}_0(\mathcal{A})$ bildet Quasiisomorphismen auf Isomorphismen ab. Somit gibt es einen Funktor $k : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Kom}_0(\mathcal{A})$ mit $H_\bullet = k \circ Q$.

Prop. Wenn die abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ halbeinfach ist, dann ist $k : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Kom}_0(\mathcal{A})$ eine Kategorienäquivalenz.

Def. Die Lokalisierungen der Kategorien der (nach links/rechts) beschränkten Komplexe an der Klasse der Quasiisomorphismen werden mit $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ bezeichnet.

Bem. Das Problem mit der bisherigen Definition der abgeleiteten Kategorie ist, dass es schwierig ist, sie gut zu verstehen, da ihre Morphismenmengen schwer zu begreifen sind.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Eine Klasse $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ von Morphismen heißt **(links-)lokalisierend**, wenn

1. S ist abgeschlossen unter Kompositionen: $\mathrm{id}_X \in S$ für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und $s \circ t \in S$ für alle passenden $s, t \in S$.
2. Erweiterungsbedingung: Für alle $(X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{s \in S} Z) \in \mathcal{C}$ gibt es $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $(W \xrightarrow{s' \in S} X)$ und $(W \xrightarrow{f'} Z) \in \mathcal{C}$ mit $f \circ s' = s \circ f'$.
3. Für parallele Morphismen $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ gilt
$$\exists\, s \in S \,:\, s \circ f = s \circ g \implies \exists\, t \in S \,:\, f \circ t = g \circ t.$$

Bem. Man kann zeigen: Wenn in Bedingung 2 auch $f \in S$ gilt, dann findet man ein passendes f' auch in S.

Bem. Die Bedingung 2 ermöglicht eine vereinfachte Darstellung der Elemente von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$: Nämlich kann man in den formalen Ketten alle künstlichen Inversen auf die linke Seite verfrachten. Die Bedingung 1 erlaubt das Zusammenfassen von künstl. Inversen.

Bem. Die Klasse der Qis ist i. A. (leider) nicht lokalisierend. :-(

Lem. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie, $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ lokalisierend. Dann gibt es folgende äquivalente Konstruktion von $\mathcal{C}[S^{-1}]$:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}[S^{-1}]) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- Morphismen von X nach Y in $\mathcal{C}[S^{-1}]$ sind Äquivalenzklassen von **Dächern**, das sind Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s \in S"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

- Zwei Dächer (mit Spitzen X' und X'') heißen äquivalent, wenn es ein kommutatives Diagramm von folgender Form gibt:

$$\begin{tikzcd}
& & X''' \arrow[dl, "r\in S"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& X' \arrow[dl, "s\in S"'] \arrow[drrr, "f"] & & X'' \arrow[dlll, "t\in S"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & & & Y
\end{tikzcd}$$

Man kann Dächer auch als Brüche mit Nenner $s \in S$ und Zähler f auffassen. Die Äquivalenzrelation macht es möglich, parallele Dächer auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen.

- Der Identitätsmorphismus auf X ist das Dach $X \xleftarrow{\mathrm{id}_X} X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$.
- Mit Bedingung 2a kann man Morphismen verknüpfen:

$$\begin{tikzcd}
& & X'' \arrow[dl, dashed, "t'\in S"'] \arrow[dr, dashed, "f'"] & & \\
& X' \arrow[dl, "s\in S"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t\in S"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

- Der Funktor $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ ist gegeben durch

$$(X \xrightarrow{f} Y) \mapsto [X \xleftarrow{\mathrm{id}_X} X \xrightarrow{f} Y].$$

- Diese Definition der Lokalisierung erfüllt dieselbe universelle Eigenschaft und ist daher äquivalent zur bisherigen.

Bem. Wenn $\mathcal{C}$ präadditiv ist, dann auch $\mathcal{C}[S^{-1}]$: Man addiert Dächer, indem man sie zunächst auf einen gemeinsamen Nenner bringt und dann die Zähler (die rechten Morphismen) addiert.

Bem. Statt Linksdächern kann man auch Rechtsdächer der Form $(X \xrightarrow{f} X' \xleftarrow{s\in S} Y)$ verwenden. Dazu muss S rechtslokalisierend sein, d. h. die dualen Bedingungen zu 1-3 erfüllen.

Prop. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie, $S \subset \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ lokalisierend und $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie, sodass $S_{\mathcal{B}} := S \cap \mathrm{Mor}(\mathcal{B})$ lokalisierend in $\mathcal{B}$ ist. Der kanonische Funktor $\mathcal{B}[S_{\mathcal{B}}^{-1}] \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ ist volltreu, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- Für alle $(X' \xrightarrow{s\in S} X)$ mit $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ gibt es einen Morphismus $(X'' \xrightarrow{f} X') \in \mathcal{C}$ mit $s \circ f \in S$ und $X'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$.
- Die duale Bedingung.

Def. Sei $K^\bullet \in \mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ ein Kokettenkomplex.
Die **Verschiebung** $K[n]^\bullet$ von $K^\bullet$ um $n \in \mathbb{Z}$ ist der Kokomplex mit

$$K[n]^i := K^{n+i}, \quad \delta^i_{K[n]} := (-1)^i \delta_K^{n+i}.$$

Bem. Verschiebung um n ist eine Autoäquivalenz ($* \in \{+,-,b\}$)

$$T^n : \mathbf{Kom}^{(*)}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Kom}^{(*)}(\mathcal{A}), \quad K^\bullet \mapsto K[n]^\bullet.$$

Def. Sei $f : K^\bullet \to L^\bullet$ ein Morphismus von Komplexen.

- Der **Kegel** von f ist der Komplex $C(f)$ mit

$$C(f)^i := K[1]^i \oplus L^i, \quad \delta_{C(f)}(k^{i+1}, l^i) := (-\delta_K k^{i+1}, f(k^{i+1}) + \delta_L l^i).$$

- Der **Zylinder** von f ist der Komplex $\mathrm{Cyl}(f)$ mit

$$\mathrm{Cyl}(f)^i := K^i \oplus K[1]^i \oplus L^i,$$
$$\delta^i_{\mathrm{Cyl}(f)}(k^i, k^{i+1}, l^i) := (\delta_K k^i - k^{i+1}, -\delta_K k^{i+1}, f(k^{i+1}) + \delta_L l^i).$$

Bem. Der Zylinder von f ist der Kegel $C(g)$ von

$$g : C(-\mathrm{id}_K)[-1] \to L, \quad (k^{i+1}, k^i) \mapsto f(k^{i+1}).$$

Lem. Sei $f : K^\bullet \to L^\bullet$ ein Morphismus von Kokomplexen. Dann existiert das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] & L^\bullet \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, "\alpha"] & C(f) \arrow[r, "\delta=\delta(f)"] \arrow[d, equal] & K[1]^\bullet \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^\bullet \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & C(f) \arrow[r] & 0 & \\
& K^\bullet \arrow[r, "f"] & L^\bullet & & &
\end{tikzcd}$$

Dabei sind α und β Quasiisomorphismen mit $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_L$ und $\alpha \circ \beta \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Cyl}(f)}$. Desweiteren ist die Konstruktion funktoriell in f.

Kor. $C(f)$ ist genau dann azyklisch, wenn f ein Qis ist.

Def.
- Ein **Dreieck** (Δ) in einer Kategorie von Komplexen (z. B. **Kom**, D, D^+, etc.) ist ein Diagramm der Form

$$K^\bullet \xrightarrow{u} L^\bullet \xrightarrow{v} M^\bullet \xrightarrow{w} K[1]^\bullet$$

- Es heißt **ausgezeichnet**, wenn es isomorph zur mittleren Zeile

$$K^\bullet \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} C(f) \xrightarrow{\delta} K[1]^\bullet$$

  eines Diagramms mit der Form wie im letzten Lemma ist.
- Ein Morphismus von Dreiecken ist dabei ein komm. Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & L^\bullet \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & M^\bullet \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & K[1]^\bullet \arrow[d, "f[1]"] \\
\tilde{K}^\bullet \arrow[r, "\tilde{u}"] & \tilde{L}^\bullet \arrow[r, "\tilde{v}"] & \tilde{M}^\bullet \arrow[r, "\tilde{w}"] & \tilde{K}[1]^\bullet
\end{tikzcd}$$

  Er heißt (Quasi-)Isomorphismus, wenn f, g und h (Quasi-)Isomorphismen in der entsprechenden Kategorie sind.

Prop. Jede kurze exakte Sequenz $0 \to K^\bullet \xrightarrow{f} L^\bullet \to M^\bullet \to 0$ von Komplexen in $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ ist isomorph zur mittleren Zeile

$$0 \to K^\bullet \xrightarrow{\overline{f}} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} C(f) \to 0$$

des Diagramms aus dem letzten Lemma.

Thm. Sei $K^\bullet \to L^\bullet \to M^\bullet \to K[1]^\bullet$ ein ausgezeichnetes Dreieck. Dann ist die induzierte lange Sequenz exakt:

$$\ldots \to H^i(K^\bullet) \to H^i(L^\bullet) \to H^i(M^\bullet) \to H^i(K[1]^\bullet) = H^{i+1}(K^\bullet) \to \ldots$$

Beweisidee. Die Kohomologiesequenz, die vom ausgezeichneten Δ induziert wird, ist genau die l. e. S. zur mittleren Zeile im Lemma.

Def. Sei $\mathcal{A}$ eine ab. Kategorie. Die **Homotopie-Kategorie** $K(\mathcal{A})$ der Komplexe in $\mathcal{A}$ ist $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})/\simeq$ (d. h. Objekte sind Komplexe, homotope Morphismen von Komplexen werden identifiziert).
Die vollen Unterkategorien der (nach links/rechts) beschränkten Komplexe sind $K^+(\mathcal{A})$, $K^-(\mathcal{A})$ bzw. $K^b(\mathcal{A})$.

Bem. Jeder additive Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bewahrt Homotopie und ind. daher einen Funktor $K^*(F) : K^*(\mathcal{A}) \to K^*(\mathcal{B})$, $* \in \{\emptyset, +, -, b\}$.

Bem. Da homotope Abbildungen auf Kohomologie identisch werden, ist $H^\bullet : K(\mathcal{A}) \to \mathbf{Kom}_0(\mathcal{A})$, $[f] \mapsto H^*(f)$ wohldefiniert. Somit kann man auch in $K(\mathcal{A})$ von Quasiisomorphismen sprechen.

Lem. Seien $f, g : K^\bullet \to L^\bullet$ homotop. Dann ist $Q(f) = Q(g)$ in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Prop. Sei $S \subset \mathrm{Mor}(K(\mathcal{A}))$ die Klasse der Quasiisomorphismen. Dann gilt $K(\mathcal{A})[S^{-1}] \simeq \mathcal{D}(\mathcal{A})$ kanonisch.

Bem. Analoges gilt für $K^*(\mathcal{A})$ und $D^*(\mathcal{A})$ mit $* \in \{+,-,b\}$.

Thm. Die Klasse $S \subset \mathrm{Mor}(K^{(*)}(\mathcal{A}))$ der Qis ist lokalisierend.

Def. Ein Komplex $K^\bullet$ heißt ***i*-Komplex** falls $K^k = 0$ und **H^i-Komplex**, falls $H^k(K^\bullet) = 0$ für $i \neq k$.

Def. Die **schlechte Abschneidung** eines Komplexes $K^\bullet$ ist

$$(\sigma_{\geq n} K^\bullet)^i := \begin{cases} 0 & \text{für } i < n, \\ K^i & \text{für } i \geq n. \end{cases}$$

Def. Die **gute Abschneidung** eines Komplexes $K^\bullet$ ist

$$(\tau_{\leq n} K^\bullet)^i := \begin{cases} K^i & \text{für } i < n, \\ \ker(\delta^n : K^n \to K^{n+1}) & \text{für } i = n, \\ 0 & \text{für } i > n. \end{cases}$$

Bem. Es gilt

$$H^i(\sigma_{\geq n} K^\bullet) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } i < n, \\ \ker(\delta^n : K^n \to K^{n+1}) & \text{für } i = n, \\ H^i(K^\bullet) & \text{für } i > n. \end{cases}$$

$$H^i(\tau_{\leq n} K^\bullet) \cong \begin{cases} H^i(K^\bullet) & \text{für } i \leq n, \\ 0 & \text{für } i > n. \end{cases}$$

Bem. Jeder H^0-Kompl. $K^\bullet$ ist in $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ isom. zu einem 0-Komplex:

$$K^\bullet \xleftarrow{Qis} \tau_{\leq 0} K^\bullet \xrightarrow{Qis} H^0(K^\bullet)[0]$$

Prop. Der Funktor $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ liefert eine Kategorienäquivalenz von $\mathcal{A}$ mit der vollen Unterkat. der H^0-Komplexe in $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$.

Def. $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X[0], Y[i])$ heißt **Ext-Gruppe**.

Bem.
- $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X[k], Y[i+k])$ für alle $i \in \mathbb{Z}$
- Komposition von Morphismen zwischen passend verschobenen Komplexen liefert eine bilineare Multiplikation

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) \times \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(Y, Z) \to \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{A}}(X, Z).$$

- Funktorialität: $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$

- Eine k. e. S. $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ ind. l. e. Sequenzen

$$\ldots \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X'',Y) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X',Y) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(X'',Y) \to \ldots$$
$$\ldots \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(Y,X') \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(Y,X) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(Y,X'') \to$$
$$\to \operatorname{Ext}^{i+1}_{\mathcal{A}}(Y,X') \to \ldots$$

Lem. • $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y) = 0$ für $i < 0$ • $\operatorname{Ext}^0_{\mathcal{A}}(X,Y) \cong \operatorname{Hom}(X,Y)$

Konstruktion (**Yoneda**). Man kann Elemente von $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y)$ wie folgt konstruieren: Sei $K^\bullet$ ein azyklischer Komplex der Form

$$K^\bullet: \ \ldots \to 0 \to K^{-i} = Y \to K^{-i+1} \to \ldots \to K^0 \to K^1 = X \to 0 \to \ldots$$

Sei dann $y(K^\bullet) \in \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y)$ die Äquivalenzklasse des Daches

$$\begin{tikzcd} & \tilde{K} \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X[0] & & Y[i] \end{tikzcd}$$

wobei $\tilde{K}^j = K^j$ für $-i \le j \le 0$ und 0 sonst ist und s und f die kanonischen Abb. sind. Sei $L^\bullet$ ein azyklischer Komplex der Form

$$L^\bullet: \ \ldots \to 0 \to L^{-j} = Z \to K^{-j+1} \to \ldots \to L^0 \to L^1 = Y \to 0 \to \ldots$$

Dann kann man $K^\bullet$ und $L^\bullet$ zu einem azyklischen Komplex $L^\bullet \circ K^\bullet := M^\bullet$ zusammenfügen:

$$\begin{tikzcd} & & Z \arrow[d, equal] & L^{-j+1} \arrow[d, equal] & & L^0 \arrow[d, equal] & L^1 = Y = K^{-i} \arrow[dr] & K^{-i+1} \arrow[d, equal] & \\ \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M^{-i-j} \arrow[r] & M^{-i-j+1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & M^{-i} \arrow[ur] \arrow[rr] & & M^{-i+1} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & M^{-i+2} \arrow[d, equal] \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & M^0 \arrow[d, equal] \arrow[r] & M^1 \arrow[d, equal] \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots \\ & K^{-i+2} & & K^0 & X & & \end{tikzcd}$$

Lem. • Die Yoneda-Konstruktion ist surjektiv: Jedes Element aus $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y)$ ist von der Form $y(K^\bullet)$ für einen azyk. Komplex $K^\bullet$.
- Es gilt $y(L^\bullet \circ K^\bullet) = y(L^\bullet) \cdot y(K^\bullet)$

Def. Die **homologische Dimension** einer ab. Kategorie $\mathcal{A}$ ist

$$\operatorname{dh}(\mathcal{A}) := \sup\{p \in \mathbb{N} \mid \exists X, Y \in \mathcal{A} : \operatorname{Ext}^p_{\mathcal{A}}(X,Y) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Bspe. $\operatorname{dh}(\mathbf{Ab}) = \operatorname{dh}(k[x]\text{-}\mathbf{Mod}) = 1$ (k ein Körper)

Prop. Es sind äquivalent: • $\mathcal{A}$ ist halbeinfach • $\operatorname{dh}(\mathcal{A}) = 0$
- $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,Y) = 0$ für alle $X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$

Def. Die **projektive** bzw. **injektive Dim.** von $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ ist

$$\operatorname{dhp}(X) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}) : \operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \neq 0\},$$
$$\operatorname{dhi}(X) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \exists Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}) : \operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(Y,X) \neq 0\}.$$

Lem. p) Für $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ sind äquivalent: • X ist projektiv
- $\operatorname{Ext}^1(X,Y) = 0$ für alle $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ • $\operatorname{dhp}(X) = 0$

i) Für $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ sind äquivalent: • X ist injektiv
- $\operatorname{Ext}^1(Y,X) = 0$ für alle $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ • $\operatorname{dhi}(X) = 0$

Prop. Sei ein azyklischer Komplex von folgender Form gegeben:

$$\ldots \to 0 \to X' \to L^0 \to L^1 \to \ldots \to L^k \to X \to 0 \to \ldots$$

p) Angenommen, alle L^i sind projektiv. Dann ist

$$\operatorname{dhp} X' = \max(\operatorname{dhp} X - k - 1, 0).$$

i) Angenommen, alle L^i sind injektiv. Dann ist

$$\operatorname{dhi} X = \max(\operatorname{dhp} X' - k - 1, 0).$$

Def. p) Eine ab. Kat. besitzt **genug projektive Objekte**, wenn jedes Objekt Quotient eines projektiven Objektes ist.
i) Sie besitzt **genug injektive Objekte**, falls jedes Objekt ein Unterobjekt eines injektiven Objektes ist.

Kor. p) Wenn $\mathcal{A}$ genug proj. Obj. besitzt, dann sind äquivalent:
- $\operatorname{dhp}(X) \le k$ • $\exists$ projektive Auflösung von X der Länge $\le k+1$

i) Wenn $\mathcal{A}$ genug inj. Obj. besitzt, dann sind äquivalent:
- $\operatorname{dhi}(X) \le k$ • $\exists$ injektive Auflösung von X der Länge $\le k+1$

Def. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Dann ist $\mathcal{A}[T]$ die Kategorie mit

$$\operatorname{Ob}(\mathcal{A}[T]) := \{\text{Paare } (X,t) \text{ mit } X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}) \text{ u. } t \in \operatorname{End}_{\mathcal{A}}(X)\},$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}[T]}((X,t),(X',t')) := \{f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,X') \mid t' \circ f = f \circ t\}.$$

Thm. $\mathcal{A}[T]$ ist eine abelsche Kategorie.

Lem. Besitze $\mathcal{A}$ genug projektive Objekte.
- Dann besitzt $\mathcal{A}[T]$ ebenfalls genug projektive Objekte.
- Angenommen, $\mathcal{A}$ enthält unendliche direkte Summen. Dann gilt für alle $(X,t) \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A}[T])$: $\operatorname{dhp}_{\mathcal{A}[T]}(X,t) \le \operatorname{dhp}_{\mathcal{A}}(X) + 1$. Außerdem gilt $\operatorname{dhp}_{\mathcal{A}[T]}(X,0) = \operatorname{dhp}_{\mathcal{A}}(X) + 1$.

Thm (Hilbert)**.** Sei k ein Körper. Es ist $\operatorname{dh}(k[t_1,\ldots,t_n]\text{-}\mathbf{Mod}) = n$.

Beweisidee. Sei $\mathcal{A}_r$ die Kategorie der $k[t_1,\ldots,t_r]$-Moduln.
Es gibt eine Kategorienäquivalenz zwischen $\mathcal{A}_r[T]$ und $\mathcal{A}_{r+1}$.
Die Aussage folgt dann induktiv mit $\operatorname{dh}(\mathcal{A}_0) = \operatorname{dh}(k\text{-}\mathbf{Mod}) = 0$ und

$$\operatorname{dh}(\mathcal{A}_{r+1}) = \operatorname{dh}(\mathcal{A}_r[T]) = \operatorname{dh}(\mathcal{A}_r) + 1 = r + 1.$$

Thm. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.
p) Sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ die volle Unterkategorie der projektiven Objekte und $K^-(\mathcal{P}) \subset K^-(\mathcal{A})$ die Homotopie-Kategorie der nach rechts beschränkten Komplexe bestehend aus projektiven Objekten.
- Der kanonische Funktor $F : K^-(\mathcal{P}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ ist eine Äquivalenz von $K^-(\mathcal{P})$ und einer vollen Unterkategorie von $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$.
- Wenn $\mathcal{A}$ genug projektive Objekte besitzt, dann ist F wesentlich surjektiv und somit eine Kategorienäquivalenz.

i) Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ die volle Unterkategorie der injektiven Objekte und $K^+(\mathcal{I}) \subset K^+(\mathcal{A})$ die Homotopie-Kategorie der nach links beschränkten Komplexe bestehend aus injektiven Objekten.
- Der kanonische Funktor $F : K^+(\mathcal{I}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ ist eine Äquivalenz von $K^+(\mathcal{I})$ und einer vollen Unterkategorie von $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$.
- Wenn $\mathcal{A}$ genug injektive Objekte besitzt, dann ist F wesentlich surjektiv und somit eine Kategorienäquivalenz.

Beweisidee. • Qis bilden ein lokal. System $S_{\mathcal{I}} \subset \operatorname{Mor}(K^+(\mathcal{I}))$.
- $K^+(\mathcal{I})[S_{\mathcal{I}}^{-1}]$ ist eine volle Unterkat. von $K^+(\mathcal{A})[S^{-1}] = \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$. Verwende dazu die Proposition über Lokalisierung von Unterkategorien und folgendes Lemma.
- $S_{\mathcal{I}}$ besteht nur aus Isomorphismen. Somit $K^+(\mathcal{I})[S_{\mathcal{I}}^{-1}] = K^+(\mathcal{I})$.

Lem. Sei $s : I^\bullet \to K^\bullet$ ein Qis zwischen $I^\bullet \in \mathbf{Kom}^+(\mathcal{I})$ und $K^\bullet \in \mathbf{Kom}^+(\mathcal{A})$. Dann gibt es $t : K^\bullet \to I^\bullet$ mit $t \circ s \simeq \operatorname{id}_{I^\bullet}$.

Kor. Der Morphismus $\operatorname{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ ist ein Isomorphismus, wenn
p) $X^\bullet \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Kom}^-(\mathcal{P}))$ oder i) $Y^\bullet \in \operatorname{Ob}(\mathbf{Kom}^+(\mathcal{I}))$

Bem. Mit dem Korollar lassen sich folgende Verfahren zur Berechnung von Ext-Gruppen herleiten:
p) Sei $\ldots \to P^{-1} \to P^0 \to X \to 0$ eine proj. Auflösung von X. Dann:

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \cong H^n(0 \to \operatorname{Hom}(P^0,Y) \to \operatorname{Hom}(P^{-1},Y) \to \ldots).$$

i) Sei $0 \to Y \to I^0 \to I^1 \to \ldots$ eine inj. Auflösung von Y. Dann:

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X,Y) \cong H^n(0 \to \operatorname{Hom}(X,I^0) \to \operatorname{Hom}(X,I^1) \to \ldots).$$

Abgeleitete Funktoren

Ziel. Viele wichtige Funktoren (z. B. Hom, $\otimes$ und Γ) sind nicht exakt. Um Exaktheit herzustellen, müssen sie abgeleitet werden: Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor zw. abelschen Kategorien. Wir definieren dann einen Funktor $RF : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$, die **Rechtsableitung** von F, der exakt in folgendem Sinne ist:

Def. Ein add. Funktor zw. triangulierten Kat. heißt **exakt**, wenn:

- Er vertauscht mit Verschiebung
- Er bildet ausgezeichnete Dreiecke auf ausgezeichnete Dreiecke ab.

Bem. Für rechtsexakte Funktoren $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definiert man die **Linksableitung** $LF : \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$.

Prop. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein exakter Funktor.

- $K^*(F)$ erhält Quasiisomorphismen (d. h. Qis werden auf Qis abgebildet) und induziert daher einen Funktor
$$D^*(F) : D^*(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{B}), \quad * \in \{\emptyset, +, -, b\}.$$
- $K^*(F)$ ist exakt in obigem Sinne.

Beweisidee. f ist Qis $\iff$ $\mathrm{Cyl}(f)$ ist azyklisch $\implies$ $F(\mathrm{Cyl}(f)) = \mathrm{Cyl}(F(f))$ ist azyklisch $\iff$ $F(f)$ ist Qis

Def. Sei $\mathcal{R} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ eine Klasse, die unter $\oplus$ abgeschlossen ist.

- $\mathcal{R}$ heißt **angepasst** an einen linksex. Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, falls
  a) F azyklische Komplexe aus $\mathbf{Kom}^+(\mathcal{R})$ auf azyklische Komplexe abbildet und
  b) jedes Objekt in $\mathcal{A}$ Unterobjekt eines Objekts aus $\mathcal{R}$ ist.
- $\mathcal{R}$ heißt **angepasst** an einen rechtsex. Funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, falls
  a) G azyklische Komplexe aus $\mathbf{Kom}^-(\mathcal{R})$ auf azyklische Komplexe abbildet und
  b) jedes Objekt in $\mathcal{A}$ Quotient eines Objekts aus $\mathcal{R}$ ist.

Prop. Sei $\mathcal{R} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ angepasst an irgendeinen linksexakten Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (bzw. einen bel. rechtsex. Funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$) und $S_\mathcal{R} \subset \mathrm{Mor}(K^+(\mathcal{R}))$ (bzw. $S_\mathcal{R} \subset \mathrm{Mor}(K^-(\mathcal{R}))$) die Klasse der Quasiisomorphismen. Dann ist $S_\mathcal{R}$ lokalisierend und der Funktor
$$K^+(\mathcal{R})[S_\mathcal{R}^{-1}] \to \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \quad (\text{bzw. } K^-(\mathcal{R})[S_\mathcal{R}^{-1}] \to \mathcal{D}^-(\mathcal{A}))$$
eine Kategorienäquivalenz.

Def. Der **abgeleitete Funktor** eines linksexakten Funktors $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist ein Paar (RF, ϵ_F) bestehend aus einem exakten Funktor $RF : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ und einer natürlichen Transformation $\epsilon_F : Q_\mathcal{B} \circ K^+(F) \Rightarrow RF \circ Q_\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[d, "Q_\mathcal{A}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[d, "Q_\mathcal{B}"] \arrow[dl, Rightarrow, "\epsilon"] \\
\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "RF"'] & \mathcal{D}^+(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

der folgende univ. Eigenschaft erfüllt: Für jeden exakten Funktor $F : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ und alle $\epsilon : Q_\mathcal{B} \circ K^+(F) \Rightarrow G \circ Q_\mathcal{A}$ gibt es ein eindeutiges $\eta : RF \Rightarrow G$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & Q_\mathcal{B} \circ K^+(F) \arrow[dl, "\epsilon_F"'] \arrow[dr, "\epsilon"] & \\
RF \circ Q_\mathcal{A} \arrow[rr, "\eta Q_\mathcal{A}"] & & G \circ Q_\mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

Dual ist der abgeleitete Funktor eines rechtsex. Funktors $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Paar (LF, ϵ_F) mit einem exakten Funktor $F : \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ und einer nat. Transformation $\epsilon_F : LF \circ Q_\mathcal{A} \Rightarrow Q_\mathcal{B} \circ K^-(F)$, die eine duale universelle Eigenschaft erfüllt.

Bem. Wenn das zweite „exakt" in der Def. nicht wäre, so wäre eine Rechtsableitung eine Links-Kan-Erw. von $Q_\mathcal{B} \circ K^+(F)$ längs $Q_\mathcal{A}$.

Bem. Abgeleitete Funktoren sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie (sofern sie existieren).

Konstruktion. Der **abgeleitete Funktor** eines linksexakten Funktors $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mit angepassten Objekten $\mathcal{R} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ist

$$\begin{array}{rrcl}
RF: & \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \simeq K^+(\mathcal{R})[S_\mathcal{R}^{-1}] & \to & \mathcal{D}^+(\mathcal{B}) \\
 & K^\bullet = (K^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}(K^+(\mathcal{R})[S_\mathcal{R}^{-1}]) & \mapsto & F(K^\bullet) := (F(K^i))_{i\in\mathbb{Z}} \\
 & [f = (f^i : K^i \to L^i)_{i\in\mathbb{Z}}] & \mapsto & [F(f) := (F(f^i))_{i\in\mathbb{Z}}]
\end{array}$$

Analog ist der abgel. Funktor $LG : \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \simeq K^-(\mathcal{R})[S_\mathcal{R}^{-1}] \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ eines rechtsex. Funkt. $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mit $\mathcal{R} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ angepasst definiert.

Thm. Die Konstruktion erfüllt die Definition von exakter Funktor.

Thm. p) Wenn $\mathcal{A}$ genug projektive Objekte enthält, dann ist deren Klasse $\mathcal{P}$ angepasst an jeden rechts-exakten Funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
i) Wenn $\mathcal{A}$ genug injektive Objekte enthält, dann ist deren Klasse $\mathcal{I}$ angepasst an jeden links-exakten Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Def. Angenommen, der abgeleitete Funktor RF eines linksexakten Funktors $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ existiert. Ein Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ heißt **F-azyklisch**, falls $R^iF(X) = 0$ für alle $i \neq 0$.

Thm. Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor, der eine Rechtsableitung besitzt, $\mathcal{Z} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ die Klasse der F-azyklischen Objekte.

- Eine an F angepasste Klasse von Objekten existiert genau dann, wenn $\mathcal{Z}$ groß genug ist, d. h. jedes Objekt aus $\mathcal{A}$ Unterobjekt eines Objektes aus $\mathcal{Z}$ ist.
- Wenn $\mathcal{Z}$ groß genug ist, dann sind an F angepasste Klassen dasselbe wie Unterklassen von $\mathcal{Z}$, die groß genug sind.
- Wenn $\mathcal{Z}$ groß genug ist, dann enthält $\mathcal{Z}$ alle injektiven Objekte.

Def. Ein Funktor H von einer abgeleiteten Kat. oder Homotopie-Kategorie in eine abelsche Kategorie heißt **kohomologisch**, falls für jedes ausgezeichnete Dreieck $X \to Y \to Z \to X[1]$ die Sequenz
$$\ldots \to H(T^iX) \to H(T^iY) \to H(T^iZ) \to H(T^{i+1}X) \to \ldots$$
exakt ist.

Bsp. H^j ist ein ein kohomologischer Funktor.

Def. Die **klassischen abgeleiteten Funktoren** sind
$$R^iF := H^i \circ RF = H^0 \circ T^i \circ RF \qquad \text{bzw.}$$
$$L^iG := H^i \circ LG = H^0 \circ T^i \circ LG.$$

Bem. Es gilt $R^iF = 0$ für $i < 0$ und $R^0F = F$.

Bem. Aus einer k.e.S. $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$ erhält man eine l.e.S.
$$\ldots \to R^iF(A) \to R^iF(B) \to R^iF(C) \to R^{i+1}F(A) \to \ldots \quad \text{bzw.}$$
$$\ldots \to L^iG(A) \to L^iG(B) \to L^iG(C) \to L^{i+1}G(A) \to \ldots$$

Def. Seien $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Kom}(\mathcal{A}))$. Das **innere Hom-Objekt** $\mathrm{Hom}^\bullet(A^\bullet, B^\bullet) \in \mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ ist definiert durch
$$\mathrm{Hom}^n(A^\bullet, B^\bullet) := \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(A^i, B^{i+n})$$
$$\partial^n(f_i)_{i\in\mathbb{Z}} := (\partial_B^{i+n} \circ f_i - (-1)^n f_{i+1} \circ \partial_A^i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

Bem. Zykel, Ränder und Kohomologie sind wie folgt:
$$Z^j\mathrm{Hom}^\bullet(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Kom}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet[j]),$$
$$B^j\mathrm{Hom}^\bullet(A^\bullet, B^\bullet) \cong \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Kom}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet[j]) \mid f \simeq 0\},$$
$$H^j\mathrm{Hom}^\bullet(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet[j]).$$

Bem. p) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug projektiven Objekten, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Dann ist $\mathrm{Ext}^i(-, Y) \cong R^i\,\mathrm{Hom}(-, Y)$.
i) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genug injektiven Objekten, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Dann ist $\mathrm{Ext}^i(X, -) \cong R^i\,\mathrm{Hom}(X, -)$.

Def. Sei R ein assoziativer Ring mit Einheit, N ein Links-R-Modul. Der Funktor $- \otimes_r N : \mathbf{Mod}\text{-}R \to \mathbf{Ab}$ ist rechtsexakt und flache Objekte bilden eine an ihn angepasste Klasse. Der abgeleitete Funktor wird mit $- \otimes^L N$ bezeichnet. Die **Tor-Gruppen** sind die klassischen abgeleiteten Funktoren
$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) := H^{-i}(M \otimes^L N).$$

Der abgeleitete Funktor der Komposition

Situation. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ linksexakte Funktoren. Sei $\mathcal{R}_\mathcal{A} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ an F und $\mathcal{R}_\mathcal{B} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ an G angepasst. Gelte $F(\mathcal{R}_\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{R}_\mathcal{B}$.

Thm. In dieser Situation existieren RF, RG und $R(G \circ F)$ und die von der universellen Eigenschaft von $R(G \circ F)$ induzierte natürliche Transformation $R(G \circ F) \Rightarrow RG \circ RF$ ist ein Isomorphismus.

Bem. Eine analoge Aussage gilt für rechtsexakte Funktoren.

Frage. Was ist der Zusammenhang des klassischen abgeleiteten Funktors $R^n(G \circ F)(X)$ mit $R^pG(R^qF(X))$? Lässt sich ersteres Objekt durch die letzteren Objekte berechnen?

Ref. Zur Formulierung der Antwort werden Spektralsequenzen benötigt. Zu ihnen gibt es eine separate Zusammenfassung, in der auch Doppelkomplexe definiert werden.

Def. Eine (injektive) **Cartan-Eilenberg-Auflösung** eines Komplexes $K^\bullet$ ist ein Doppelkomplex $L^{\bullet\bullet}$, bestehend aus injektiven Objekten, der in der unteren Halbebene lebt (d. h. $L^{pq} = 0$ für $q < 0$) zusammen mit einem Morphismus $\epsilon : K^\bullet \to L^{\bullet,0}$ sodass gilt:
Für alle $p \in \mathbb{Z}$ sind folgende (ind.) Komplexe injektive Auflösungen

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow K^p \xrightarrow{\epsilon} L^{p,0} \xrightarrow{d_{II}} L^{p,1} \longrightarrow \ldots \\
0 \longrightarrow B^p(K^\bullet) \xrightarrow{\epsilon_*} B_I^{p,0}(L^{\bullet\bullet}) \xrightarrow{d_{II*}} B_I^{p,1}(L^{\bullet\bullet}) \longrightarrow \ldots \\
0 \longrightarrow Z^p(K^\bullet) \xrightarrow{\epsilon_*} Z_I^{p,0}(L^{\bullet\bullet}) \xrightarrow{d_{II*}} Z_I^{p,1}(L^{\bullet\bullet}) \longrightarrow \ldots \\
0 \longrightarrow H^p(K^\bullet) \xrightarrow{\epsilon_*} H_I^{p,0}(L^{\bullet\bullet}) \xrightarrow{d_{II*}} H_I^{p,1}(L^{\bullet\bullet}) \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

von dem obigen $\uparrow$ Objekt und außerdem gilt $L^{pq} = 0$ falls $K^p = 0$.

Lem (Hufeisenlemma)**.** Sei $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ eine k. e. S. in einer ab. Kat. und $0 \to X' \to I_{X'}{}^\bullet$ und $0 \to X'' \to I_{X'}{}^\bullet$ injektive Auflösungen. Dann gibt es eine inj. Auflösung $0 \to X \to I_X{}^\bullet$ von X und eine k. e. S. $0 \to I_{X'}{}^\bullet \to I_X{}^\bullet \to I_{X''}{}^\bullet \to 0$, sodass

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I^0_{X'} & \longrightarrow & I^0_X & \longrightarrow & I^0_{X''} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

kommutiert. Außerdem gilt $I^n_X \cong I^n_{X'} \oplus I^n_{X''}$ für alle n.

Lem. Angenommen, $\mathcal{A}$ besitzt genug injektive Objekte.

- Jeder nach links beschränkte Komplex $K^\bullet \in \mathbf{Kom}^+(\mathcal{A})$ besitzt eine CE-Auflösung.
- Jeder Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Kom}^+(\mathcal{A})}(K^\bullet, L^\bullet)$ kann auf beliebige CE-Auflösungen der Komplexe fortgesetzt werden.
- Wenn zwei Morphismen zwischen zwei Komplexen homotop sind, so sind es auch zwei beliebige Fortsetzungen auf beliebige CE-Auflösungen der Komplexe.

Bem. Zusammengefasst: CE-Auflösung stiftet einen Funktor

$$\mathrm{CE} : K^+(\mathcal{A}) \to K^{++}(\mathcal{I}_\mathcal{A}),$$

wobei $K^{++}(\mathcal{I}_\mathcal{A})$ die Homotopiekategorie der nach links und oben beschr. Doppelkomplexe bestehend aus inj. Objekten aus $\mathcal{A}$ ist.

Lem. Sei $K^\bullet$ ein Komplex, $L^{\bullet\bullet}$ ein Doppelkomplex und $\epsilon : K^\bullet \to L^{\bullet,0}$ ein Morphismus von Komplexen mit $d_{II} \circ \epsilon = 0$. Dann kann man $K^\bullet$ als in der 0-ten Zeile konzentr. Doppelkomplex und ϵ als Mor. von Doppelkomplexen auffassen. Angenommen, die Komplexe $0 \to K^p \to L^{p0} \to L^{p1} \to \ldots$ sind azyklisch für alle p. Dann ist der Morphismus $S(\epsilon) : K^\bullet = (SK)^\bullet \to (SL)^\bullet$ ein Qis.

Thm. Angenommen, in Situation vom Anfang des Abschnitts ist $\mathcal{R}_\mathcal{A}$ gerade die Klasse $\mathcal{I}_\mathcal{A}$ der injektiven Objekte in $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ ist groß genug. Dann gibt es für alle $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ eine Spektralseq. mit

$$E_2^{pq} = R^pG(R^qF(X)),$$

die gegen $R^*(G \circ F)(X)$ konvergiert. Außerdem ist die Konstruktion funktoriell in X.

Def. Diese Spektralseq. heißt **Grothendieck-Spektralsequenz**.

Beweis. Sei $0 \to X \to I_X^\bullet$ eine injektive Auflösung von X und $L^{\bullet\bullet}$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung von $F(I_X^\bullet)$. Setze $D^{\bullet\bullet} := G(L^{\bullet\bullet})$. Aus dem letzten Lemma folgt

$$R^n(G \circ F)(X) = H^n(G(F(I_X^\bullet))) \cong H^n(G((SL)^\bullet)) \cong H^n((SD)^\bullet).$$

Sei ${}^{II}E$ die Spektralsequenz, die durch die vertikale Filtrierung von $SD^\bullet$ induziert wird. Diese konv. gegen $H^*((SD)^\bullet)$ und es gilt:

$${}^{II}E_2^{pq} \cong H^p_{II}(H_I^{q,\bullet}(D^{\bullet\bullet})) \cong H^p_{II}(G(H_I^{q,\bullet}(L^{\bullet\bullet}))) \cong R^pG(R^qF(X)),$$

wobei die zweite Isomorphie daraus folgt, dass

$$\begin{array}{ll}
0 \to Z_I^{qp}(L^{\bullet\bullet}) \to L^{qp} \to B_I^{q+1,p}(L^{\bullet\bullet}) \to 0 & \text{und} \\
0 \to B_I^{qp}(L^{\bullet\bullet}) \to Z_I^{qp}(L^{\bullet\bullet}) \to H_I^{qp}(L^{\bullet\bullet}) \to 0 &
\end{array}$$

kurze ex. Sequenzen bestehend aus inj. Obj. sind und somit von G auf k. e. S. abgebildet werden und die dritte Isomorphie gilt, da $0 \to H^q(I_X^\bullet) \to H_I^{q,\bullet}(L^{\bullet\bullet})$ eine inj. Aufl. von $R^qF(X) \cong H^q(I_X^\bullet)$ ist.

Def. Angenommen, $\mathcal{I}_\mathcal{B}$ ist groß genug. Sei $K^\bullet \in \mathbf{Kom}^+(\mathcal{B})$ ein nach links beschränkter Komplex. Dann heißt $R^*G(K_\bullet)$ **Hyperkohomologie** des Funktors G bezüglich $K^\bullet$.

Bem. Sei in dieser Situation $L^\bullet$ eine CE-Auflösung von $K^\bullet$. Es gilt dann $R^nG(K_\bullet) \cong H^n(G((SL)^\bullet))$. Sei ${}^{II}E$ die SS zur vertikalen Filtration von $G((SL)^\bullet) \cong (SG(L))^\bullet$. Diese konvergiert gegen die Hyperkohomologie von G bzgl. $K^\bullet$ und ähnlich wie oben gilt

$${}^{II}E_2^{pq} \cong R^pG(H^q(K^\bullet)).$$