Zusammenfassung Platzeffiziente Alg.

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Ziel. Algorithmen entwerfen, die wenig Speicherplatz und Speicherzugriffe benötigen, aber trotzdem schnell sind.

Problem (Erreichbarkeit)**.** Gegeben sei ein gerichteter oder ungerichteter Graph, ein Startknoten und ein Zielknoten darin. Frage: Ist der Zielknoten vom Startknoten erreichbar?

Algorithmus. Algorithmen, mit denen man Problem lösen kann, sind Breiten- und Tiefensuche.

Lem. Es sei ein Graph mit n Knoten und m Kanten gegeben. Tiefensuche benötigt $\Theta(n+m)$ Zeit und $\Theta(n \log n)$ Speicherplatz.

Algorithmus (Savitch)**.**

```
function sReachable(u, v, k)
    if u = v then return true
    if k = 0 then return false
    if (u, v) ∈ E then return true
    if k = 1 then return false
    for x ∈ V do
        if sReachable(u, x, ⌊k/2⌋) ∧ sReachable(x, v, ⌈k/2⌉) then
            return true
    return false
return sReachable(s,t,n-1)
```

Lem. Savitch's Algorithmus löst das Erreichbarkeits-Problem in $\mathcal{O}((\log n)^2)$ Speicherplatz.

Bem. Die Laufzeit von Savitch's Alg. ist allerdings sehr schlecht, im schlechtesten Fall $O(n \cdot \log n)$.

Bem. Eine Darstellung eines Graphen als Adjazenzmatrix benötigt $O(n^2)$, eine Darstellung als Adjazenzliste/-array $O(m \cdot \log n)$ Bits. Manchmal ist es nützlich, zusätzlich Rückwärtskanten oder Aus- und Ingrad von Knoten zu speichern, um diese Informationen nicht mehrmals berechnen zu müssen. Bei bestimmten Algorithmen werden sie auch als gegeben angenommen.

Konvention. Wir werden folgende Graphfunktionen benutzen:

Funktion	Ergebnis
$\mathrm{adjfirst} : V \to P$	ersten Eintrag in der Adjazenzliste
$\mathrm{adjhead} : P \to V$	Knoten zum Eintrag in der Adjazenzliste
$\mathrm{adjnext} : P \to P$	nächsten Eintrag in der Adjazenzliste
$\mathrm{deg} : V \to \mathbb{N}$	Ausgrad eines Knoten
$\mathrm{head} : A \to V$	den k-ten Nachbar eines Knoten
$\mathrm{tail} : B \to V$	den k-ten In-Nachbar eines Knoten
$\mathrm{mate} : A \to A$	den „Mate“ einer Kante (bei unger. Graphen)

$$\text{wobei} \quad A \coloneqq \{(v,k) \in V \times \mathbb{N} \mid 1 \le k \le \deg(v)\}$$
$$B \coloneqq \{(v,k) \in V \times \mathbb{N} \mid 1 \le k \le \mathrm{indeg}(v)\}$$

Algorithmus. Bei einer Tiefensuche in einem Graphen wird am meisten Platz für den Laufzeitstack verbraucht. Um diesen Platz zu optimieren, ist es geschickt, zunächst den Algorithmus mit explizitem Keller aufzuschreiben:

```
function process(u)
    S ⇐ (u, adjfirst(u))
    while S ≠ ∅ do
        (u, p) ⇐ S
        if color[u] = white then
            color[u] := gray
            preprocess(u)
        if p ≠ null then
            S ⇐ (u, adjnext(p))
            v := adjhead(u, p)
            preexplore(u, v, color[v])
            if color[v] = white then
                S ⇐ (v, adjfirst(v))
            else
                postexplore(u, v)
        else
            postprocess(u)
            if S ≠ ∅ then
                (w, –) := peek(S)
                postexplore(w, u)
            color[u] := black
```