Zusammenfassung Numerik von PDEs

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine DGL der Form

$$F(x, u, Du, \ldots, D^k u) = 0$$

heißt **partielle DGL/PDE** der Ordnung $k \geq 1$, wobei

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$$

eine gegebene Funktion und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gesucht ist.

Def (Klassifikation von PDEs).

- Die PDE heißt **linear**, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$
mit Funktionen $a_\alpha, f : \Omega \to \mathbb{R}$ besitzt.
- Die PDE heißt **semilinear**, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(x, u, D_u, \ldots, D^{k-1}u) = 0$$
besitzt, wobei $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ und $a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$ gegeben sind.
- Die PDE heißt **quasilinear**, wenn sie die Form
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u, Du, \ldots, D^{k-1}u) D^\alpha u + a_0(x, u, D_u, \ldots, D^{k-1}u) = 0$$
hat, wobei $a_\alpha, a_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^{n^k}$ gegeben sind.
- Die PDE heißt **nichtlinear**, falls die Ableitungen der höchsten Ordnung nicht linear vorkommen.

Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Eine PDE der Form

$$F(x, u, \partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1}\partial_{x_1} u, \ldots, \partial x_1 \partial_{x_n} u, \ldots, \partial_{x_n}\partial_{x_n} u) = 0$$

heißt **PDE zweiter Ordnung**.

Notation. $p_i := \partial_{x_i} u$, $p_{ij} := \partial^2_{x_i x_j} u$

$$M(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_{11}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial p_{n1}} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_{nn}} \end{pmatrix} = M(x)^T.$$

Def (Typeneinteilung für PDEs der 2. Ordnung). Obige PDE zweiter Ordnung heißt

- **elliptisch** in x, falls die Matrix $M(x)$ positiv o. definit ist.
- **parabolisch** in x, falls genau ein EW von $M(x)$ gleich null ist und alle anderen dasselbe Vorzeichen haben.
- **hyperbolisch** in x, falls genau ein EW ein anderes Vorzeichen als die anderen EWe hat.

Lösungstheorie elliptischer PDEs

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt.

- $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m \mid u \text{ stetig}\}$, $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) := \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, mit Norm
$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|u(x)\|. \qquad \text{(Supremumsnorm)}$$
- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{N}$ ist der Raum aller auf Ω k-mal stetig diff'baren Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden können.
$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)}$$
- Sei $\alpha \in [0, 1)$. $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid H_\alpha(u, \overline{\Omega}) < \infty\}$ mit
$$H_\alpha(u, \overline{\Omega}) := \sup_{x,y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \frac{\|u(x)-u(y)\|}{\|x-y\|^\alpha} \qquad \text{(Hölder-Koeffizient)}$$
heißt **Raum der glm. Hölder-stetigen Fktn** zum Exponent α. Der Hölder-Koeffizient ist dabei eine Seminorm auf $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$.
- $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) := \{u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m) \mid \forall |\gamma| = k : D^\gamma u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)\}$ heißt **Hölder-Raum**. Eine Norm ist gegeben durch
$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} := \|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)} + \sum_{|\gamma|=k} H_\alpha(D^\gamma u, \overline{\Omega}).$$

Bem.
- Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
- $\mathcal{C}^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ heißt **Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen**.
- $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^k$ und $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ sind Banach-Räume mit den jeweiligen Normen.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Das Gebiet Ω gehört zur **Klasse $\mathcal{C}^{k,\alpha}$**, wenn in jedem Punkt $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung in $\partial\Omega$ existiert, die sich in einem geeigneten Koordinatensystem als ein Graph einer Funktion aus $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ darstellen lässt und Ω lokal immer auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.

Satz (Gauß'scher Integralsatz). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet und $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n u_i \nu_i \,\mathrm{d}\rho(x) = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu \,\mathrm{d}\rho(x),$$

wobei ν der äußere Normalenvektor an an den Rand von Ω ist.

Problem. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\text{(RWP)} \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega \quad \text{(PDE)} \\ \mathcal{R}u = g & \text{auf } \partial\Omega \quad \text{(Randbedingung)} \end{cases}$$

wobei $\mathcal{L}$ der lineare Differentialoperator

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

mit Fktn $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ist, sodass $A(x) := (a_{ij}(x))$ symmetrisch ist. Als Randbedingung (RB) verlangen wir:

$$\begin{aligned} &\textbf{Dirichlet-RB}: & u &= g & &\text{auf } \partial\Omega, \\ &\textbf{Neumann-RB}: & (A(x)\nabla u) \cdot \nu &= g & &\text{auf } \partial\Omega \text{ oder} \\ &\textbf{Robin-RB}: & (A(x)\nabla u) \cdot \nu + \delta u &= g & &\text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Bem. Man kann auch auf verschiedenen Teilstücken des Randes verschiedene Bedingungen stellen.

Bem. Falls die Funktionen a_{ij} differenzierbar sind, so kann $\mathcal{L}$ in **Divergenzform** geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x)\right) + b_i(x) \right)}_{\tilde{b}(x) :=} \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \\ &= -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \tilde{b}(x) \cdot \nabla u + c(x)u \end{aligned}$$

Voraussetzung. Wir nehmen im Folgenden an:

- $\mathcal{L}$ ist **gleichmäßig elliptisch**, d. h.
$$\exists \lambda_0 > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \Omega : \xi^T A(x) \xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2$$
Dabei heißt λ_0 **Elliptizitätskonstante**.
- $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$

Bem. $\mathcal{L} = f$ ist elliptisch auf $\Omega \iff A(x) > 0$ (spd) für alle $x \in \Omega$

Def. Eine Fkt $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ heißt **klassische Lsg** vom (RWP) mit $\mathcal{R}u := u$, wenn die beiden Gleichungen in (RWP) in jedem Punkt von Ω bzw. des Randes $\partial\Omega$ erfüllt sind.

Satz (Maximumsprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, zshgd u. beschränkt. Sei $u \in \mathcal{C}^2(\omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ eine Lösung vom (RWP), $f \leq 0$ in Ω und $c \equiv 0$. Dann nimmt u sein Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an, d. h.

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} g(x)$$

Kor. Sei $c \geq 0$ und $f \leq 0$. Dann gilt $\sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max\{\sup_{x \in \partial\Omega} u(x), 0\}$.

Kor (Vergleichsprinzip). Für $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ und $c \geq 0$ gelte $\mathcal{L}u_1 \leq \mathcal{L}u_2$ in Ω und $u_1 \leq u_2$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $u_1 \leq u_2$ auf $\overline{\Omega}$.

Kor (Eindeutigkeit). Sei $c \geq 0$. Dann hat (RWP) höchstens eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Satz. Sei Ω ein beschr. Lipschitz-Gebiet, $a_{ij}, b_i, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $c \geq 0$, $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Dann besitzt (RWP) genau eine Lsg $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Achtung. Es muss aber nicht $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ gelten!

Differenzenverfahren

Verfahren (DV). Am Beispiel des Poisson-Problems

$$(\mathrm{RWP}_1)\ \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega = (0,1) \\ u(0) = g_0, u(1) = g_1 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Wir führen folgende Schritte durch:

1. Diskretisierung: Wähle $n \in \mathbb{N}$, setze $h := \frac{1}{n}$ und
$$\Omega_h := \{x_i := ih \mid i = 1, \ldots, n-1\} \quad \text{(innere Gitterpunkte)}$$
$$\partial\Omega_h := \{x_0 = 0, x_n = 1\} \quad \text{(Randpunkte)}$$
2. Approx. der Ableitungen durch Differenzenquotienten (DQ)
$$u'(x_i) \approx \tfrac{1}{h}\left(u(x_i+h) - u(x_i)\right) \quad \textbf{(Vorwärts-DQ)}$$
$$u'(x_i) \approx \tfrac{1}{h}\left(u(x_i) - u(x_i-h)\right) \quad \textbf{(Rückwärts-DQ)}$$
$$u'(x_i) \approx \tfrac{1}{2h}\left(u(x_i+h) - u(x_i-h)\right) \quad \textbf{(zentraler DQ)}$$
Für die zweite Ableitung ergibt sich
$$\begin{aligned} u''(x_i) = (u'(x_i))' &\approx \tfrac{1}{h}\left(u'(x_i+h) - u'(x_i)\right) \approx \\ &\approx \tfrac{1}{h}\cdot\left(\tfrac{1}{h}\left(u(x_i+h) - u(x_i)\right) - \tfrac{1}{h}\left(u(x_i) - u(x_i-h)\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{h^2}\left(u(x_i+h) - 2\cdot u(x_i) + u(x_i-h)\right) =: \Delta_h u \end{aligned}$$
Dabei heißt Δ_h der diskrete eindim. Laplace-Operator. Das diskretisierte Randwertproblem ist nun
$$(\mathrm{RWP}_1)_\mathrm{h}\ \begin{cases} -\Delta_h u_h = f & \text{in } \Omega_h, \\ u_h(0) = g_0, u_h(1) = g_1 & \text{auf } \partial\Omega_h. \end{cases}$$
3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems
$$\tfrac{1}{h^2}\left(2u_h(x_1) - u_h(x_2)\right) = f(x_1) + \tfrac{g_0}{h^2} \qquad (i{=}1)$$
$$\tfrac{1}{h^2}\left(-u_h(x_{i-1}) + u_h(x_i) - u_h(x_{i+1})\right) = f(x_i) \qquad (i = 2, ..., n-2)$$
$$\tfrac{1}{h^2}\left(-u_h(x_{n-2}) + 2u_h(x_{n-1})\right) = f(x_{n-1}) + \tfrac{g_1}{h^2} \qquad (i{=}n{-}1)$$
Als lineares Gleichungssystem: $-\tilde{\Delta}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$ mit
$$-\tilde{\Delta}_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)},$$
$$\tilde{u}_h = \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ \vdots \\ u_h(x_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + \frac{g_1}{h^2} \end{pmatrix}$$

Ziel. Herausfinden, was die Lösung u_h von $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ (die man durch Lösen von (LGS) erhält) mit der Lösung u zum ursprünglichen Problem (RWP) zu tun hat. Ist etwa u_h die Einschränkung von u, oder zumindest annäherungsweise? Wenn ja, wie klein muss man h wählen, damit die Approximation gut wird?

$$(\mathrm{RWP})\ \begin{cases} -\mathcal{L}u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}\ \begin{cases} -\mathcal{L}_h u = f_h & \text{in } \Omega_h, \\ u_h = g_h & \text{auf } \partial\Omega_h \end{cases}$$

$$(\mathrm{LGS})\ \tilde{\mathcal{L}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$$

Notation. $U_h := \{\Omega_h \to \mathbb{R}\}, \quad R_h : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \to U_h, \ u \mapsto u|_{\Omega_h}$

Def. Das Differenzenverfahren $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ heißt

- **konvergent** von der Ordnung p, falls $C > 0$, $h_0 > 0$ existieren, sodass für die Lösung u von (RWP) und die Lösung u_h von $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ gilt:
$$\|u_h - R_h u\|_h \le Ch^p \quad \text{für alle } 0 < h \le h_0,$$
wobei $\|{-}\|_h$ eine Norm zu U_h ist, wie z. B. $\|u_h\|_h := \max_{x\in\Omega_h} |u_h(x)|$.
- **konsistent** von der Ordnung p, falls
$$\|\mathcal{L}_h R_h u - R_h \mathcal{L} u\|_h \le ch^p \|u\|_{\mathcal{C}^{p+2}(\overline{\Omega})} \quad \forall u \in \mathcal{C}^{p+2}(\overline{\Omega}).$$
- **stabil**, falls $\tilde{L}_h$ invertierbar ist und ein $h_0 > 0$ existiert mit
$$\sup_{0<h\le h_0} \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h < \infty, \quad \text{wobei } \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h := \sup_{f\ne 0} \frac{\|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1} f\|_h}{\|f\|_h}.$$

Bem. Die ind. Matrixnorm ist $\|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h = \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |l_{ij}|$.

Satz. Ist das DV $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ konsistent und stabil, so auch konvergent. Genauer gilt: Ist $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ stabil und konsistent von der Ordnung p und $u \in \mathcal{C}^{p+2}(\overline{\Omega})$, dann ist $(\mathrm{RWP})_\mathrm{h}$ konvergent von der Ordnung p.

Beweis. Setze $w_h := u_h - R_h u$. Für $x \in \partial\Omega_h$ gilt dann $w_h(x) = 0$ und für $x \in \Omega_h$ gilt
$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_h w_h(x) = \mathcal{L}_h w_h(x) &= \mathcal{L}_h u_h(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \\ &= f_h(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) = R_h f(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \\ &= R_h \mathcal{L} u(x) - \mathcal{L}_h R_h u(x) \end{aligned}$$
Somit gilt $w_h = \tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\left(R_h \mathcal{L} u - \mathcal{L}_h R_h u\right)$ in Ω_h, also
$$\begin{aligned} \|w_h\|_h = \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\left(R_h\mathcal{L}u - \mathcal{L}_h R_h u\right)\| &\le \|\tilde{\mathcal{L}}_h^{-1}\|_h \cdot \|R_h \mathcal{L} u - \mathcal{L}_h R_h u\|_h \\ &\le c_1 \cdot c_2 \cdot h^p \cdot \|u\|_{\mathcal{C}^{p+2}(\overline{\Omega})} \le Ch^p \qquad \text{für } 0 < h \le h_0. \end{aligned}$$
□

Lem. Das DV $(\mathrm{RWP}_1)_\mathrm{h}$ ist konsistent von der Ordnung 2. Es gilt
$$\|\Delta_h R_h u - R_h \Delta u\|_h \le \tfrac{1}{12}\|u\|_{\mathcal{C}^4(\overline{\Omega})} h^2 \quad \forall u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega}).$$

Bem. Um zu zeigen, dass $(\mathrm{RWP}_1)_\mathrm{h}$ konvergent ist, müssen wir noch zeigen, dass $\tilde{L}_h = -\tilde{\Delta}_h$ invertierbar ist und $\sup_{0<h\le h_0} \|\tilde{\Delta}_h\| < \infty$.

Def. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **M-Matrix**, falls
a) $a_{ii} > 0$ für $i = 1, \ldots, n$, b) $a_{ij} \le 0$ für $i \ne j$, $i, j = 1, \ldots, n$,
c) A invertierbar ist und d) für $A^{-1} =: B = (b_{ij})$ gilt $b_{ij} \ge 0$.

Lem. Erfülle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Bedingungen a) und b). Zerlege $A = D + L + R$ in eine Diagonalmatrix und strikte untere/obere Dreiecksmatrizen. Dann ist A genau dann eine M-Matrix wenn
$$\rho(D^{-1}(L+R)) < 1.$$

Bem. Es gilt folgende Monotonie-Eigenschaft für M-Matrizen:
$$x \le y \implies A^{-1}x \le A^{-1}y.$$

Def. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **reduzibel** (oder zerlegbar), wenn es eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodass
$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } A_{11} \in R^{k\times k},\ 0 < k < n.$$

Lem (Gerschgorin). Alle EWe einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ liegen in der Menge
$$\bigcup_{i=1}^n \overline{B_{r_i}(a_{ii})} \quad \text{mit} \quad r_i := \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$
Falls A irreduzibel ist, so liegen sie sogar in
$$\left(\bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(a_{ii})\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n \partial B_{r_i}(a_{ii})\right)$$

Def. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix.

- A heißt **schwach diagonaldominant**, falls
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^n |a_{ij}| \le |a_{ii}| \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$
und ein i_0 existiert, sodass die Ungleichung strikt ist.
- A heißt **diagonaldominant**, falls
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$
- A heißt **irreduzibel diagonaldominant**, falls A irreduzibel und schwach diagonaldominant ist.

Lem. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$ und $a_{ij} \le 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \ne j$, die diagonaldominant oder irreduzibel diagonaldominant ist. Dann ist A eine M-Matrix.

Bem. $-\tilde{\Delta}_h$ ist irreduzibel diagonaldominant, also eine M-Matrix.

Lem. Sei A eine irreduzible M-Matrix. Dann gilt $A^{-1} > 0$.

Lem. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine M-Matrix und es existiere ein Vektor v, sodass $(Av)_j \ge 1$, $j = 1, \ldots, n$. Dann gilt $\|A^{-1}\|_\infty \le \|v\|_\infty$.

Lem. $\|\tilde{\Delta}_h^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{8}$

Satz. Das DV $(\mathrm{RWP}_1)_\mathrm{h}$ ist konvergent von der Ordnung 2, falls die Lösung von (RWP_1) zu $\mathcal{C}^4([0,1])$ gehört. Es gilt die Abschätzung
$$\|u_h - R_h u\|_\infty \le \tfrac{h^2}{96}\|u\|_{\mathcal{C}^4([0,1])}.$$

Problem. Wir betrachten nun
$$(\mathrm{RWP}_2)\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

1. Diskretisierung: Setze $h := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ und
$$\begin{aligned}\Omega_h &:= \{(x,y) \in \Omega \,|\, x = ih, y = jh, i,j = 1,\dots,n-1\}\\ \partial\Omega_h &:= \{(x,y) \in \partial\Omega \,|\, x = ih, y = jh, i,j = 1,\dots,n-1\}\end{aligned}$$
2. Approximation der Ableitungen
$$\begin{aligned}-\Delta u(x,y) &= -\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\\ &\approx -\tfrac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2} - \tfrac{u(x,y+h)-2u(x,y)+u(x,y-h)}{h^2}\\ &= -\tfrac{u(x+h,y)+u(x-h,y)-4u(x,y)+u(x,y+h)+u(x,y-h)}{h^2} =: -\Delta_h u\end{aligned}$$
Dabei hat der diskrete Laplace-Operator Δ_h die Form eines Differenzensterns. Gesucht ist die Lsg $u_h : \Omega_h \cup \partial\Omega_h \to \mathbb{R}$ von
$$(\mathrm{RWP}_2)_\mathrm{h} \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta_h u_h &=& f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h &=& g & \text{auf } \partial\Omega_h. \end{array}\right.$$
3. Aufstellen des linearen Gleichungssystems $-\tilde{\Delta}_h \tilde{u}_h = f_h$:
$$\tilde{u}_h = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{n-1,n-2} \\ u_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2},$$
$$-\tilde{\Delta}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} A & -I & & & 0 \\ -I & A & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & A & -I \\ 0 & & & -I & A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n-1)^2},$$
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$$

Lem. Das DV $(\mathrm{RWP}_2)_\mathrm{h}$ ist konsistent von der Ordnung 2. Es gilt
$$\|\Delta_h R_h u - R_h \Delta u\|_h \leq \tfrac{1}{6} \|u\|_{\mathcal{C}^r(\overline{\Omega})} h^2.$$

Lem. Das DV $(\mathrm{RWP}_2)_\mathrm{h}$ ist stabil. Es gilt $\|\tilde{D}_h^{-1}\|_\infty \leq {}^1\!/\!_8$.

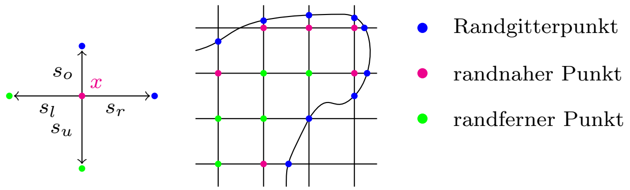
Satz. Das DV $(\mathrm{RWP}_2)_\mathrm{h}$ ist konvergent von der Ordnung 2, falls die Lösung von (RWP_2) zu $\mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$ gehört. Es gilt
$$\|u_h - R_h u\|_h \leq {}^1\!/\!_{48} \|u\|$$

Bem. Durch die Einbeziehung weiterer Gitterpunkte zur Approximation des Differentialoperators lässt sich die Konvergenzordnung erhöhen:
$$\begin{aligned}-\Delta_h^{(9)} u(x,y) = \tfrac{1}{12h^2}\,&(u(x-2h,y) - 16u(x-h,y) + 30u(x,y)\\ &-16u(x+h,y) + u(x+2h,y) + u(x,y-2h) - 16u(x,y-h)\\ &+30u(x,y) - 16u(x,y+h) + u(x,y+2h)) \approx -\Delta u(x,y)\end{aligned}$$
Damit erreicht man die Konsistenzordnung 4.

Situation. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt.

Def. • $\Omega_h := \{x,y \in \Omega \,|\, {}^x\!/\!_h, {}^y\!/\!_h \in \mathbb{Z}\}$ heißen **innere Gitterpkte**.
- Ein Punkt $z_R \in \partial\Omega$ heißt **Randgitterpunkt** (notiert $z_R \in \partial\Omega_h$), falls es einen inneren Gitterpunkt $z \in \Omega_h$ gibt, sodass $z_R = r + \alpha h e_1$ oder $z_R = z + \alpha h e_2$ mit $|\alpha| \leq 1$. Die Nachbarn $N(x,y)$ eines Punktes (x,y) sind $(x + s_r h, y)$, $(x - s_l h, y)$, $(x, y + y_o h)$, $(x, y - s_u h)$, falls $s_r, s_l, s_o, s_u \in (0,1]$ und die Verbindungsstrecken zu (x,y) in Ω liegen.
- Ein Punkt $(x,y) \in \Omega_h$ heißt **randnah**, falls (x,y) die Nachbarn $(x - s_l h, y)$, $(x + s_r h, y)$, $(x, y - s_u h)$, $(x, y + s_o h)$ hat mit mindestens einem $s_i < 1$. Ansonsten heißt (x,y) **randfern**.

Notation. Wir haben eine Einteilung $\Omega_h = \Omega_h^{\mathrm{rn}} \sqcup \Omega_h^{\mathrm{rf}}$ der Gitterpunkte in randnahe und randferne Punkte.



Lem (**Dividierte Differenzen von Newton**).
Für $u \in \mathcal{C}^3([x_l, x_r])$, $x \in (x_l, x_r)$ gilt
$$u''(x) = \underbrace{\frac{2}{x_r - x_l}\left(\frac{u(x_r) - u(x)}{x_r - x} - \frac{u(x) - u(x_l)}{x - x_l}\right)}_{= \frac{2}{x_r - x_l}\left(\frac{1}{x_r - x}u(x_r) + \frac{1}{x - x_l}u(x_l)\right) - \frac{2}{(x_r - x)(x - x_l)}u(x)} + \mathcal{O}(x_r - x_l)$$

Verfahren (**Shortley-Weller-Diskretisierung**).
Dadurch inspiriert approximieren wir den Laplace-Operator durch
$$\begin{aligned}\mathcal{D}_h u(x,y) = \frac{1}{h^2}\Bigg(&\frac{2u(x - s_l h, y)}{s_l(s_r + s_l)} + \frac{2u(x + s_r h, y)}{s_r(s_r + s_l)}\\ &+ \frac{2u(x, y - s_u h)}{s_u(s_o + s_u)} + \frac{2u(x, y + s_o h)}{s_o(s_o + s_u)} - \left(\frac{2}{s_l s_r} + \frac{2}{s_o s_u}\right) u(x,y)\Bigg)\end{aligned}$$
wobei $x_r - x = s_r h$, $x - x_l = s_l h$, $y_o - y = s_o h$, $y - y_u = s_u h$.
Wir betrachten nun
$$(\mathrm{RWP}_2)\text{'}_\mathrm{h} \left\{ \begin{array}{rcll} -\mathcal{D}_h u_h &=& f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h &=& g & \text{auf } \partial\Omega_h \end{array}\right.$$
$$(\mathrm{LGS}_2)\text{'} \left\{ \begin{array}{rcl} -\tilde{\mathcal{D}}_h \tilde{u}_h &=& \tilde{f}_h \\ \tilde{f}_h &=& f_h + g_h \end{array}\right.$$
$$\text{mit} \quad g_h(x,y) = {}^1\!/\!_{h^2} \sum_{(x_N, y_N) \in N(x,y) \cap \partial\Omega_h} S_{x_N, y_N}\, g(x_N, y_N)$$
wobei
$$S_{x_N, y_N} := \begin{cases} {}^2\!/\!_{s_l(s_l + s_r)} & \text{falls } (x_N, y_N) = (x - s_l h, y), \\ {}^2\!/\!_{s_r(s_l + s_r)} & \text{falls } (x_N, y_N) = (x + s_r h, y), \\ {}^2\!/\!_{s_o(s_o + s_u)} & \text{falls } (x_N, y_N) = (x, y + s_o h), \\ {}^2\!/\!_{s_u(s_o + s_u)} & \text{falls } (x_N, y_N) = (x, y - s_u h), \end{cases}$$
$$-\tilde{\mathcal{D}}_h = (d_{ij}) \quad \text{mit} \quad d_{ii} = {}^1\!/\!_{h^2}\left(\tfrac{2}{s_{il} s_{ir}} + \tfrac{2}{s_{iu} s_{io}}\right) \quad \text{und}$$
$$d_{ij} = {}^1\!/\!_{h^2} \begin{cases} -{}^2\!/\!_{s_{il}(s_{il} + s_{ir})} & \text{falls } j \text{ der linke Nachbar von } i \text{ ist}, \\ -{}^2\!/\!_{s_{ir}(s_{il} + s_{ir})} & \text{falls } j \text{ der rechte Nachbar von } i \text{ ist}, \\ -{}^2\!/\!_{s_{iu}(s_{iu} + s_{io})} & \text{falls } j \text{ der untere Nachbar von } i \text{ ist}, \\ -{}^2\!/\!_{s_{io}(s_{iu} + s_{io})} & \text{falls } j \text{ der obere Nachbar von } i \text{ ist}. \end{cases}$$

Lem. • Die Matrix $-\tilde{\mathcal{D}}_h$ ist eine M-Matrix.
- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und gehöre zu dem Streifen $(x_0, x_0 + d) \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R} \times (y_0, y_0 + d)$. Dann gilt $\|\tilde{D}_h^{-1}\| \leq {}^{d^2}\!/\!_8$.

Bem. Das DV $(\mathrm{RWP}_2)\text{'}_\mathrm{h}$ hat in den randnahen Punkten nur die Konsistenzordnung 1. Dennoch gilt:

Satz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und Teilmenge des Streifens $(x_0, x_0 + d) \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R} \times (y_0, y_0 + d)$. Dann ist das Verfahren $(\mathrm{RWP}_2)\text{'}_\mathrm{h}$ konvergent von der Ordnung 2. Es gilt
$$\|u_h - R_h u\|_h \leq \left({}^1\!/\!_3 h^3 + {}^{d^2}\!/\!_{48} h^2\right) \|u\|_{\mathcal{C}^4(\overline{\Omega})}.$$

Idee. Bestimme den Wert von u bei randnahen Punkten (x,y) durch lineare Interpolation:
- $u(x,y) \approx \dfrac{s_r}{s_r + s_l} u(x - s_l h, y) + \dfrac{s_l}{s_r + s_l} u(x + s_r h, y)$
- $u(x,y) \approx \dfrac{s_o}{s_u + s_o} u(x, y - s_u h) + \dfrac{s_u}{s_u + s_o} u(x, y + s_o h)$

$$(\mathrm{RWP}_2)\text{''}_\mathrm{h} \left\{ \begin{array}{rcll} -\mathcal{D}_h u &=& f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h &=& g & \text{auf } \partial\Omega_h \end{array}\right.$$
$$(\mathrm{LGS}_2)\text{''} \quad -\tilde{\mathcal{D}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$$

Lem. Dieses Verfahren besitzt Konsistenzordnung (und somit Konvergenzordnung) 2.

Problem. Wir betrachten nun
$$(\mathrm{RWP}_3) \left\{ \begin{array}{rcll} -\mathcal{L}u &=& f & \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u &=& g & \text{auf } \partial\Omega \end{array}\right.$$
mit
$$\begin{aligned}-\mathcal{L}u = &-(a_{11}(x,y) u_{xx} + 2a_{12}(x,y) u_{xy} + a_{22}(x,y) u_{yy})\\ &+ b_1(x,y) u_x + b_2(x,y) u_y + c(x,y) u\end{aligned}$$
wobei $c(x,y) \leq 0$, $\xi^T A(x,y) \xi \geq \lambda_0 \|\xi\|^2$, $\lambda_0 > 0$ und
$$A(x,y) = \begin{pmatrix} a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y) \\ a_{21}(x,y) & a_{22}(x,y) \end{pmatrix}$$

Verfahren. 1. Diskretisierung: $h = {}^1\!/\!_n$, Ω_h, $\partial\Omega_h$ wie früher.

2. Approximation:

$$u_x(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-u(x-h,y)}{2h}, \qquad u_y(x,y) \approx \dots$$
$$u_{xx}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)}{h^2}, \quad u_{yy}(x,y) \approx \dots$$

Für die Approx. von u_{xy} haben wir mehrere Möglichkeiten: Wir könnten etwa den zentralen DQ in x- und y-Richrung verwenden und erhalten

$$\begin{aligned} u_{xy}(x,y) \approx \tfrac{1}{4h^2}\,(& u(x+h,y+h) - u(x+h,y-h) \\ & -u(x-h,y+h) + u(x-h,y-h)) \end{aligned}$$

Diese Annäherung hat allerdings den Nachteil, dass sie zu keiner M-Matrix führt. Stattdessen nehmen wir

$$u_{xy}(x,y) \approx \quad \underset{\text{für } a_{12} \geq 0}{\frac{1}{2h^2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{für } a_{12} < 0.}{\frac{1}{2h^2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Wir fassen diese Approx. in folgendem 7-Stern zusammen:

$$-\mathcal{L}_h u := \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} a_{12}^- & |a_{12}| - a_{22} & a_{12}^+ \\ |a_{12}| - a_{11} & 2(a_{11} + a_{22} - |a_{12}|) & |a_{12}| - a_{11} \\ -a_{12}^+ & |a_{12}| - a_{22} & a_{12} \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{h}\begin{pmatrix} & -b_2 & \\ -b_1 & 0 & b_1 \\ & b_2 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ & c & \\ & & \end{pmatrix}$$

Dabei ist $a_{ij}^+ := \max(a_{ij}, 0)$ und $a_{ij}^- := \min(a_{ij}, 0)$.

$$(\mathrm{RWP}_3)_\mathrm{h} \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -\mathcal{L}_h u_h & = & f_h & \text{in } \Omega_h \\ u_h & = & g & \text{auf } \partial\Omega_h \end{array} \right.$$
$$(\mathrm{LGS}_3) \quad -\tilde{\mathcal{L}}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h$$

Satz. Sei $|a_{12}| \leq \min(a_{11}, a_{22})$, $c \geq 0$ in Ω, $\mathcal{L}$ gleichmäßig elliptisch. Falls $a_{ii} > |a_{12}| + \frac{h}{2}|b_i|$ für $i = 1, 2$ in Ω und $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$, so ist das DV $(\mathrm{RWP}_3)_\mathrm{h}$ konvergent von der Ordnung 2.

Problem.

$$(\mathrm{RWP}_4) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) & = & f(x,t) & \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) & = & g(x) & \text{für } x \in (0,1) \\ u(0,t) & = & g_0(t) & \text{für } t \in [0,T] \\ u(1,t) & = & g_1(t) & \text{für } t \in [0,T] \end{array} \right.$$

Verfahren. 1. Diskretisierung mit n Raum- und m Zeitschritten:

$$x_i = ih, \;\; h = 1/n, \;\; t_k = k\tau, \;\; \tau = T/m, \;\; u(x_i, t_k) \approx u_i^k$$

2. Approximation der Ableitungen:

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{1}{h^2}\left(u(x-h,t) - 2u(x,t) + u(x+h,t)\right) =: \Delta_h u(x,t)$$

Wir wollen nun eine Lösung von

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u}_h(t) - \tilde{\Delta}_h u_h(t) & = & f_h(t) \\ u_h(0) & = & g_h \end{array} \right.$$

für alle Zeiten t mit

$$u_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(h,t) \\ u_h(2h,t) \\ \vdots \\ u_h(1-h,t) \end{pmatrix}, \quad f_h(t) = \begin{pmatrix} f(h,t) + \frac{1}{h^2} g_0(t) \\ f(2h,t) \\ \vdots \\ f(1-h,t) + \frac{1}{h^2} g_1(t) \end{pmatrix}$$

berechnen. Dazu verwenden wir ein Einschrittverfahren, wie das expl./impl. Gauß-Verfahren oder das Crank-Nicolson-Verfahren:

$$(\mathrm{EEV}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{\tau}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \tilde{\Delta}_h u_i^k & = & f_i^k \\ u_i^0 & = & g_h \end{array} \right.$$
$$(\mathrm{IEV}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{\tau}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \tilde{\Delta}_h u_i^{k+1} & = & f_i^{k+1} \\ u_i^0 & = & g_h \end{array} \right.$$
$$(\mathrm{CNV}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{\tau}(u_i^{k+1} - u_i^k) - \frac{1}{2}\tilde{\Delta}_h(u_i^k + u_i^{k+1}) & = & f(x_i, t_k + \frac{\tau}{2}) \\ u_i^0 & = & g_h \end{array} \right.$$

Lem. Sei $f(x,-) \in \mathcal{C}^1([0,T])$ für alle $x \in [0,1]$. Dann gilt für die Approximation von (RWP_4):

- Die Verfahren (EEV) und (IEV) besitzen einen Konsistenzfehler von $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$, falls $u \in \mathcal{C}^4([0,1] \times [0,T])$
- Das Verfahren (CNV) besitzt einen Konsistenzfehler von $\mathcal{O}(h^2 + \tau^2)$, falls $u \in \mathcal{C}^4([0,1] \times [0,T])$.