

# Zusammenfassung Lineare Algebra II

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Notation.** Sofern nicht anders angegeben, bezeichne  $K$  im folgenden einen beliebigen Körper,  $V$  einen (möglicherweise unendlichdim.)  $K$ -Vektorraum und  $f$  einen Endomorphismus  $V \rightarrow V$ .

**Def.** Zwei Matrizen  $A, B \in K^{n \times n}$  heißen zueinander **ähnlich**, falls es eine Matrix  $S \in \text{GL}(n, K)$  gibt mit  $B = SAS^{-1}$ .

**Bem.** Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf  $K^{n \times n}$ .

**Def.** Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$

- ist in **Diagonalform**, wenn  $A$  nur auf der Diagonalen von Null verschiedene Einträge besitzt.
- ist in **Triagonalform**, wenn  $A$  nur auf und oberhalb der Diagonalen von Null verschiedene Einträge besitzt.
- heißt **diagonalisierbar** bzw. **triagonalisierbar**, wenn  $A$  ähnlich zu einer Diagonal- bzw. Triagonalmatrix ist.

Ein Endomorphismus  $f \in \text{End}(V)$  heißt **diagonalisierbar** bzw. **triagonalisierbar**, wenn es eine Basis von  $V$  gibt, sodass die darstellende Matrix von  $f$  bzgl. dieser Basis eine Diagonalmatrix ist.

**Satz.** Es sei  $A \in K^{n \times n}$ . Dann ist  $A$  als Matrix genau dann diagonalisierbar (triagonalisierbar), wenn der durch  $A$  beschriebene Endomorphismus  $K^n \rightarrow K^n$  diagonalisierbar (triagonalisierbar) ist.

**Def.** Sei  $f \in \text{End}(V)$ . Falls es ein  $\lambda \in K$  und einen Vektor  $v \in V \setminus \{0\}$  gibt, sodass  $f(v) = \lambda v$ , so heißt  $\lambda$  **Eigenwert** von  $f$  zum **Eigenvektor**  $v$ .

**Satz.** Sei  $f \in \text{End}(V)$  und  $(v_i)_{i \in I}$  eine Familie von Eigenvektoren von  $f$  zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Dann ist diese Familie linear unabhängig.

**Def.** Ist  $\lambda \in K$ , so setzen wir

$$\begin{aligned}\text{Eig}(f; \lambda) &:= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \\ &= \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_V).\end{aligned}$$

Dies ist der zu  $\lambda$  gehörende **Eigenraum**, ein UVR von  $V$ .

**Satz.** Sei  $V$  endlichdim. und  $f \in \text{End}(V)$  mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Dann ist  $f$  genau dann diagonalisierbar, wenn

$$\dim \text{Eig}(f; \lambda_1) + \dots + \dim \text{Eig}(f; \lambda_k) = \dim V.$$

**Satz.**  $\lambda \in K$  ist ein EW von  $f \iff \det(f - \lambda \text{id}_V) = 0$ .

**Def.** Sei  $A \in K^{n \times n}$ . Das Polynom  $P_A(X) = \chi_A(X) := \det(A - X \cdot E_n) \in K[X]$  heißt **charakteristisches Polynom** von  $A$ . Für die darstellende Matrix  $A$  von  $f$  bzgl. einer beliebigen Basis von  $V$  setzen wir

$$P_f(X) := P_A(X) \in K[X].$$

Dieses Polynom ist von der gewählten Basis von  $V$  unabhängig.

**Satz.**  $\lambda \in K$  ist ein EW von  $f \iff \lambda$  ist Nullstelle von  $P_f \in K[X]$

**Verfahren** (Bestimmung von Eigenwerten und Eigenräumen). Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine (darstellende) Matrix

1. Berechne das charakteristische Polynom  $P_A$  und bestimme dessen Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .
2. Für jedes  $\lambda_i$ , berechne  $\ker(A - \lambda_i \cdot E_n)$  mit dem Gauß-Verfahren.

**Def.** Sei  $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ . Dann heißt

$$\text{spur}(A) := \sum_{k=1}^n a_{kk} \in K \quad \text{Spur von } A.$$

**Satz.** Seien  $A, B \in K^{n \times n}$ . Dann gilt  $\text{spur}(AB) = \text{spur}(BA)$ .

**Korollar.** Ähnliche Matrizen haben die gleiche Spur.

**Satz.** Für diagonalisierbare  $f \in \text{End}(V)$  zerfällt  $P_f$  in Linearfaktoren. Zerfalle umgekehrt  $P_f$  in Linearfaktoren, wobei jede Nullstelle nur mit Vielfachheit 1 auftritt. Dann ist  $f$  diagonalisierbar.

**Def.** Sei  $\lambda$  ein EW von  $f$ .

- Dann heißt die Ordnung der Nullstelle  $\lambda$  von  $P_f$  **algebraische Vielfachheit** von  $\lambda$  (wird bezeichnet mit  $\mu(f; \lambda)$ ).
- Die Dimension  $d(f; \lambda) := \dim \text{Eig}(f; \lambda)$  heißt **geometrische Vielfachheit** von  $\lambda$ .

**Satz.** Für alle EW  $\lambda \in K$  von  $f$  gilt

$$1 \leq \dim \text{Eig}(f; \lambda) \leq \mu(f; \lambda).$$

**Def.** Der **Jordanblock** der Größe  $n$  zum EW  $\lambda$  ist die Matrix

$$J(\lambda, n) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Bem.** Es gilt  $P_{J(\lambda, n)} = (\lambda - X)^n$  aber nur  $\text{Eig}(f; \lambda) = \langle e_1 \rangle$ .

**Satz.** Es sind äquivalent:

- $f$  ist diagonalisierbar
- $P_f$  zerfällt in Linearfaktoren und für alle Nullstellen  $\lambda$  von  $P_f$  gilt  $\mu(f; \lambda) = \dim \text{Eig}(f; \lambda)$ .
- Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweise verschiedenen EW von  $f$ , so gilt

$$V = \text{Eig}(f; \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(f; \lambda_k).$$

**Verfahren** (Ist ein gegebener Endomorphismus diagonalisierbar?). 1. Berechne das charakteristische Polynom, falls dieses nicht in Linearfaktoren zerfällt, so ist  $f$  nicht diagonalisierbar.

2. Falls das char. Polynom in Linearfaktoren zerfällt, so berechne für jede Nullstelle den Eigenraum. Wenn für eine Nullstelle algebraische und geometrische Dimension nicht übereinstimmen, so ist  $f$  nicht diagonalisierbar.

**Satz.**  $P_f$  zerfällt in Linearfaktoren  $\iff f$  ist trigonalisierbar

**Korollar.** Jeder Endomorphismus eines endlichdim. C-VR ist trigonalisierbar (Fundamentalsatz der Algebra).

**Satz** (Cayley-Hamilton). Sei  $V$  endlichdim. und  $f \in \text{End}(V)$  mit charakteristischem Polynom  $P_f(X) \in K[X]$ . Dann gilt  $P_f(f) = 0$ .

**Def.** Sei  $\lambda \in K$  ein EW von  $f$  mit alg. Vielfachheit  $\mu := \mu(P_f, \lambda)$ . Dann heißt

$$\text{VEig}(f, \lambda) := \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_V)^\mu$$

der **verallgemeinerte Eigenraum** zum EW  $\lambda$ .

**Satz.** Es zerfalle  $P_f$  in Linearfaktoren, also

$$P_f = \pm (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (X - \lambda_k)^{\mu_k}.$$

Dann gilt

$$V = \text{VEig}(f, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{VEig}(f, \lambda_k).$$

**Notation.** Es bezeichne  $R$  einen kommutativen Ring mit 1.

**Def.** Eine Teilmenge  $I \subset R$  heißt **Ideal**, falls  $I$  eine additive Untergruppe von  $R$  ist und für alle  $r \in R$  und  $x \in I$  gilt, dass  $r \cdot x \in I$ .

**Def.** Ist  $S \subset R$  eine Teilmenge, so ist die Menge

$$\{r_1 s_1 + \dots + r_k s_k \mid k \geq 0, s_1, \dots, s_k \in S, r_1, \dots, r_k \in R\}$$

ein Ideal in  $R$  und wird **von  $S$  erzeugtes Ideal** genannt.

**Def.** Ein Ideal  $I \subset R$  heißt **Hauptideal**, falls  $I$  von einem einzigen Element erzeugt wird. Ein Ring, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, heißt **Hauptidealring**.

**Satz.** Für jeden Körper  $K$  ist  $K[X]$  ein Hauptidealring.

**Satz.** Es sei  $R$  ein Hauptidealring und  $a_1, \dots, a_k \in R$ . Dann existiert ein ggT von  $a_1, \dots, a_k$ .

**Satz** (Jordan-Chevalley-Zerlegung). Sei  $V$  endlichdim. und zerfalle  $P_f$  in Linearfaktoren. Dann gibt es einen diagonalisierbaren Endomorphismus  $D : V \rightarrow V$  und einen nilpotenten Endomorphismus  $N : V \rightarrow V$  mit

- $f = D + N$
- $D \circ N = N \circ D$

**Verfahren.** Berechne die erweiterten Eigenräume, triagonalisiere jeweils  $f$  eingeschränkt auf den erweiterten Eigenraum, und pack sie in eine Matrix.

**Satz.** Zerfalle  $P_f$  in Linearfaktoren. Für alle EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  gilt dann:

$$\dim \text{VEig}(f, \lambda_i) = \mu(f, \lambda_i).$$

**Satz** (Normalform nilpotenter Matrizen). Sei  $N \in K^{n \times n}$  nilpotent. Dann ist  $N$  ähnlich zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} J(0, n_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J(0, n_2) & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & J(0, n_r) \end{pmatrix}$$

**Satz** (Jordansche Normalform). Sei  $V$  endlichdim. und zerfalle  $P_f$  in Linearfaktoren. Dann gibt es eine Basis von  $V$ , sodass die darstellende Matrix von  $f$  folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1, m_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2, m_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_q, m_q) \end{pmatrix}$$

Dabei sind  $m_1, \dots, m_q \in \mathbb{N}$  mit  $m_1 + \dots + m_q = \dim V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  EWe von  $f$  (mit Vielfachheiten).

**Verfahren** (JNF). 1. Berechne das charakteristische Polynom der Matrix / des Endomorphismus.

2. Führe für jeden Eigenwert  $\lambda_i$  folgende Schritte durch:

- Berechne  $\ker(A - \lambda_i \cdot E_n)^l$  für  $l = 1, \dots, m$  bis  $\dim \ker(A - \lambda_i \cdot E_n)^m = \mu(f, \lambda_i)$ .
- Bestimme absteigend von  $m$  die Vektorräume  $V_l$ , sodass  $V_l \oplus \ker(A - \lambda_i \cdot E_n)^{l-1} = \ker(A - \lambda_i \cdot E_n)^l$  und davon eine Basis. Wende auf die Vektoren der Basis die Abbildung  $(A - \lambda_i \cdot E_n)$  an und berücksichtige diese Vektoren im nächsten Schritt.

3. ...

**Def.** • **Euklidische Norm:** Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  setzen wir  $\|x\| := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$

• **Operatornorm:** Für  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  setzen wir  $\|A\| := \max\{\|Av\| \mid v \in \mathbb{C}^n, \|v\| = 1\}$

**Satz.** Für alle  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot A^k$$

absolut.

**Def.** Die Funktion

$$\exp : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, \quad A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot A^k$$

heißt **Exponentialfunktion** für Matrizen.

*Bem.* Es gilt:

- $\exp(0) = E_n$
- $\exp(\lambda \cdot E_n) = e^\lambda \cdot E_n$  für  $\lambda \in \mathbb{C}$
- $\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$
- $\exp$  ist stetig.

**Satz.** Für zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $AB = BA$  gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

**Def.** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sei

$$\phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, \quad t \mapsto \exp(t \cdot A)$$

**Satz.** Die Abbildung  $\phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  ist differenzierbar mit Ableitung

$$\phi'_A(t) = A \cdot \phi_A(t).$$

**Satz.** Es gilt:

$$\exp(t \cdot J(\lambda, n)) = \exp(t\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Def.** Für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  definieren wir

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Dies ist das **Skalarprodukt** im  $\mathbb{R}^n$ .

**Def.** Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

definieren wir die **transponierte Matrix** durch

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}.$$

**Def.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -VR. Eine **Bilinearform** auf  $V$  ist eine Abbildung

$$\gamma : V \times V \rightarrow K,$$

sodass  $\gamma$  linear in jedem Argument, d. h. die Abbildungen

$$\gamma(v, -) : V \rightarrow K, \quad w \mapsto \gamma(v, w)$$

$$\gamma(-, w) : V \rightarrow K, \quad v \mapsto \gamma(v, w)$$

für beliebige  $v, w \in V$  linear sind.

**Def.** Für eine Bilinearform  $\gamma$  auf einem Vektorraum  $V$  und eine Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  von  $V$  definieren wir die **darstellende Matrix** von  $\gamma$  bzgl.  $\mathcal{B}$  durch

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma)_{ij} := \gamma(b_i, b_j).$$

**Satz.** Sei  $A \in K^{n \times n}$  die darstellende Matrix einer Bilinearform  $\gamma$  bezüglich einer Basis  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ . Für  $v, w \in V$  mit Koordinatenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

gilt

$$\gamma(v, w) = x^T A y.$$

**Korollar.** Sind  $\gamma$  und  $\gamma'$  zwei Bilinearformen mit  $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = M_{\mathcal{B}}(\gamma')$ , so gilt  $\gamma = \gamma'$ .

**Satz.** Sei  $\mathcal{C}$  eine weitere Basis von  $V$  und  $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  die Koordinatentransformations von  $\mathcal{B}$  nach  $\mathcal{C}$ . Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^T \cdot M_{\mathcal{C}}(\gamma) \cdot T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}.$$

**Def.** Eine Bilinearform  $\gamma : V \times V \rightarrow K$  heißt symmetrisch, falls  $\gamma(v, w) = \gamma(w, v)$  für alle  $v, w \in V$  gilt. Äquivalent dazu ist eine Bilinearform auf einem endlichdim. VR  $V$  symmetrisch, wenn  $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  gilt.

**Def.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

- Eine symmetrische Bilinearform  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **positiv definit**, falls  $\gamma(v, v) > 0$  für alle  $v \in V \setminus \{0\}$  gilt.
- Eine symmetrische, positive definite Bilinearform auf einem  $\mathbb{R}$ -VR heißt **(euklidisches) Skalarprodukt**.
- Ein  $\mathbb{R}$ -VR, auf dem ein euklidisches Skalarprodukt definiert ist, heißt **(euklidischer) Vektorraum**.

**Def.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

- Eine Abbildung  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **Sesquilinearform**, falls  $\gamma$  linear im ersten Argument, jedoch konjugiert-linear im zweiten Argument ist, d. h. für alle  $v, w_1, w_2 \in V$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  gilt

$$\gamma(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \overline{\lambda_1} \gamma(v, w_1) + \overline{\lambda_2} \gamma(v, w_2).$$

- Eine Sesquilinearform  $\gamma$  heißt **hermitesch**, falls

$$\gamma(v, w) = \overline{\gamma(w, v)}$$

für alle  $v, w \in V$ . Für alle  $v \in V$  gilt dann  $\gamma(v, v) = \overline{\gamma(v, v)}$ , also  $\gamma(v, v) \in \mathbb{R}$ .

- Eine hermitesche Sesquilinearform  $\gamma$  heißt **(unitäres) Skalarprodukt**, falls  $\gamma$  positiv definit ist, d. h.  $\gamma(v, v) > 0$  für alle  $v \in V$  ist.

**Def.** Sei  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  eine Sesquilinearform auf einem  $\mathbb{C}$ -VR  $V$  und  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$ . Dann ist die **darstellende Matrix** von  $\gamma$

$$(M_{\mathcal{B}})_{ij} := \gamma(b_i, b_j).$$

*Bem.* Eine Bilinearform auf einem endlichdim.  $\mathbb{C}$ -VR ist genau dann hermitesch, wenn  $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = \overline{M_{\mathcal{B}}(\gamma)}$  gilt.

**Def.** Für euklidische bzw. euklidische VR  $V$  und  $v \in V$  setzen wir

$$\|v\| := \sqrt{\gamma(v, v)}.$$

**Def.** Sei  $V$  ein euklidischer/unitärer VR.

- Zwei Vektoren  $v, w \in V$  heißen **orthogonal** (geschrieben  $v \perp w$ ), falls  $\langle v, w \rangle = 0$  gilt.
- Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  von Vektoren heißt **orthogonal**, falls  $v_i \perp v_j$  für alle  $i, j \in I$  mit  $i \neq j$  gilt.
- Eine Familie  $(v_i)_{i \in I}$  heißt **orthonormal**, falls sie orthogonal ist und zusätzlich  $\|v_i\| = 1$  für alle  $i \in I$  erfüllt.
- Eine orthogonale Familie, die eine Basis von  $V$  ist, heißt **Orthonormalbasis**.

**Satz.** Für  $v, w \in V$  mit  $v \perp w$  gilt  $\|v + w\|^2 = v^2 + w^2$ .

**Satz** (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Es sei  $V$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Dann gilt für alle  $v, w \in V$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

**Satz.** Sei  $V$  ein euklidischer/unitärer VR. Dann definiert die Funktion

$$\|-\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm auf  $V$ .

**Satz.** Sei  $V$  ein euklidischer/unitärer VR,  $(v_i)_{i \in I}$  eine orthogonale Familie und  $v_i \neq 0$  für alle  $i \in I$ . Dann ist die Familie  $(v_i)$  linear unabhängig.

**Def.** Zwei UVR  $U, W \subset V$  heißen **orthogonal** (geschrieben  $U \perp W$ ), falls  $u \perp w$  für alle  $u \in U$  und  $w \in W$  gilt.

**Def.** Ist  $U \subset V$  ein UVR, so ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid v \perp u \text{ für alle } u \in U\}$$

ein UVR von  $V$  und heißt das **orthogonale Komplement** von  $U$  in  $V$

*Bem.* Es gilt:  $U \perp U^\perp$ .

**Satz.** Jeder endlichdimensionale euklidische/unitäre VR besitzt eine Orthonormalbasis.

**Korollar.** Sei  $V$  ein euklidischer/unitärer VR und  $W \subset V$  ein endlichdim. UVR. Dann gilt

$$V = W \oplus W^\perp.$$

**Def.** Sei  $V$  ein euklidischer VR und  $(v_1, \dots, v_k)$  eine endliche Familie von Vektoren in  $V$ . Dann ist

$$\text{Gram}(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_k, v_k \rangle \end{pmatrix}$$

die **Gramsche Determinante** von  $(v_1, \dots, v_k)$ .

**Satz.** Es gilt  $\text{Gram}(v_1, \dots, v_k) \geq 0$ , wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $(v_1, \dots, v_k)$  linear abhängig sind.

**Def.** Wir definieren den von der Familie  $(v_1, \dots, v_k)$  aufgespannten **Spat** als

$$\text{Spat}(v_1, \dots, v_k) := \{t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \mid 0 \leq t_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, k\}$$

und dessen  $k$ -dimensionales Volumen als

$$\text{Vol}(\text{Spat}(v_1, \dots, v_k)) := \sqrt{\text{Gram}(v_1, \dots, v_k)}.$$

**Def.** Es sei  $V$  ein  $K$ -VR. Der Vektorraum  $\text{Hom}_K(V, K)$  der  $K$ -linearen Abbildungen  $V \rightarrow K$  heißt der zu  $V$  **duale Vektorraum** und wird mit  $V^*$  bezeichnet. Die Elemente von  $V^*$  heißen **Linearformen** auf  $V$ .

*Bem.* Eine Linearform ist bereits eindeutig dadurch bestimmt, was sie mit den Vektoren einer Basis von  $V$  anstellt.

**Satz.** Sei  $V$  endlichdimensional und  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k)$  eine Basis von  $V$ . Wir definieren für  $j \in \{1, \dots, k\}$  die Linearform  $v_j^* : V \rightarrow K$  durch

$$v_j^*(v_i) := \delta_{ij}.$$

Dann ist  $(v_1^*, \dots, v_k^*)$  eine Basis von  $V^*$  und die Abbildung  $v_i \mapsto v_i^*$  ein Isomorphismus  $\phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow V^*$ .

**Korollar.** Für endlichdim. VR  $V$  gilt:  $\dim V = \dim V^*$ .

**Def.** Sei  $f : V \rightarrow W$  linear. Dann heißt die lineare Abbildung

$$f^* : W^* \rightarrow V^*, \quad \phi \mapsto \phi \circ f$$

zu  $f$  **duale Abbildung**.

**Satz.** Seien  $V, W$  endlichdim. VR mit Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  und  $f : V \rightarrow W$  linear. Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(f^*) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)^T$$

**Def.** Ist  $v \in V$ , so definiert die Auswertung bei  $v$

$$\iota_v : V^* \rightarrow K, \quad \phi \mapsto \phi(v)$$

ein Element in  $V^{**}$ .

**Satz.** Sei  $V$  endlichdim. Dann ist die Abbildung  $\iota : V \rightarrow V^{**}, v \mapsto \iota_v$  ein (natürlicher) Isomorphismus und stimmt mit der Verknüpfung der bzgl. einer Basis  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}^*$  definierten Isomorphismen  $V \rightarrow V^*$  und  $V^* \rightarrow V^{**}$  überein.

**Def.** Sei  $V$  ein  $K$ -VR. Ein Bilinearform  $\gamma : V \times V \rightarrow K$  heißt **nicht ausgeartet**, falls die lineare Abbildung

$$\Phi : V \rightarrow V^*, \quad w \mapsto \gamma(-, w)$$

injektiv ist, d. h. für alle  $w \neq 0$  existiert ein  $v \in V$  mit  $\gamma(v, w) \neq 0$ .

*Bem.* Euklidische und unitäre Skalarprodukte sind immer nicht ausgeartet. Eine Bilinearform ist genau dann nicht ausgeartet, wenn ihre darstellende Matrix (bzgl. einer beliebigen Basis) invertierbar ist.

**Satz.** Sei  $V$  ein endlichdim. VR und die Bilinearform  $\gamma : V \times V \rightarrow K$  nicht ausgeartet. Dann sind die Abbildungen

$$\Phi : V \rightarrow V^*, \quad w \mapsto \gamma(-, w)$$

$$\Psi : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \gamma(v, -)$$

Isomorphismen.

**Satz.** Es gibt eine eindeutige Entsprechung zwischen

- Isomorphismen  $V \rightarrow V^*$
- nicht-ausgearteten Bilinearformen  $V \times V \rightarrow K$

Dabei ordnen wir einem Isomorphismus  $\Psi : V \rightarrow V^*$  die Bilinearform  $(v, w) \mapsto \Psi(v)(w)$  zu.

Andersrum ist für einen endlichdim. euklidischen VR  $(V, \langle -, - \rangle)$  die Abbildung

$$\Psi : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle v, - \rangle$$

ein Isomorphismus.

**Def.** Sei  $V$  ein  $K$ -VR und  $W \subset V$  ein UVR. Dann heißt der UVR

$$W^0 := \{f \in V^* \mid f|_W = 0\}$$

**Annulator** von  $W$  in  $V^*$ .

*Bem.* Ist  $\dim V < \infty$ , so gilt  $\dim W^0 = \dim V - \dim W$ .

**Satz.** Sei  $V$  endlichdimensional und  $W \subset V$  ein UVR. Dann gilt

$$\Psi(W^\perp) = W^0.$$

**Def.** Sei  $W \subset V$  ein UVR. Wir definieren die Relation  $\sim$  wie folgt:

$$v_1 \sim v_2 : \iff v_1 - v_2 \in W.$$

Dann ist die Äquivalenzklasse  $[v]$  gleich dem affinen Teilraum

$$v + W = \{v + w \mid w \in W\}.$$

Durch die Setzung

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) := (v_1 + v_2) + W \quad \lambda \cdot (v + W) := \lambda v_1 + W$$

wird  $V/W$  zu einem  $K$ -Vektorraum, genannt **Quotientenraum** von  $V$  nach  $W$ .

**Satz.** Sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer/unitärer VR und  $W \subset V$  ein endlichdimensionaler UVR. Dann ist die Abbildung

$$\chi : W^\perp \rightarrow V/W, \quad v \mapsto [v]$$

ein Vektorraumisomorphismus.

**Korollar.** Für endlichdimensionale  $V$  gilt:  $\dim V/W = \dim W^\perp = \dim V - \dim W$ .

**Def.** Seien  $V, W$  euklidische/unitäre VR. Eine  $\mathbb{R}$ - bzw.  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt **orthogonal** bzw. **unitär**, falls für alle  $v, w \in V$  gilt:

$$\langle f(v), f(w) \rangle_W = \langle v, w \rangle_V.$$

*Bem.* Orthogonale/unitäre Abbildungen sind längenerhaltend (und somit injektiv) und bilden orthogonale Familien wieder auf orthogonale Familien ab. Die Umkehrung gilt auch:

**Satz.** Sei  $f : V \rightarrow W$  linear und längenerhaltend. Dann ist  $f$  orthogonal bzw. unitär.

**Def.** Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  bzw.  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  heißt **orthogonal** bzw. **unitär**, falls sie bzgl. der Standardskalarprodukte eine orthogonale bzw. unitäre Abbildung beschreibt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass

$$(Ax)^T (Ay) = x^T A^T A y = x^T y$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^m$ , also

$$A^T A = E_m$$

im euklidischen und

$$A^T \overline{A} = E_m$$

im unitären Fall.

**Satz.** Seien  $V$  und  $W$  endlichdim. euklidisch/unitär. Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  ist genau dann orthogonal/unitär, wenn gilt: Bezüglich Orthonormalbasen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  von  $V$  und  $W$  ist die darstellende Matrix  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  orthogonal/unitär.

**Satz.** Sei  $V$  endlichdim. euklidisch/unitär und  $f : V \rightarrow V$  ein orthogonaler/unitärer Endomorphismus. Dann gilt:

- $f$  ist ein Isomorphismus.
- $f^{-1}$  ist ebenfalls orthogonal/unitär
- alle EW von  $f$  haben den Betrag 1
- Eigenvektoren zu unterschiedlichen EW sind orthogonal

**Bem.** Für Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (bzw.  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ) sind äquivalent:

- $A$  ist orthogonal (unitär)
- Die Spalten von  $A$  bilden eine ONB.
- Die Zeilen von  $A$  bilden eine ONB.
- $A^{-1} = A^T$  (bzw.  $\overline{A}^{-1} = A^T$ )

**Def.** Die Untergruppen

$$O(n) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A \text{ orthogonal}\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$O(n) := \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid A \text{ unitär}\} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$$

der multiplikativen Gruppen  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  bzw.  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  heißen **Gruppen der orthogonalen bzw. unitären Matrizen**.

**Bem.** Für alle  $A \in O(n)$  und  $A \in U(n)$  gilt  $|\det A| = 1$ .

**Def.** Sei  $V$  ein endlichdim.  $\mathbb{R}$ -VR.

- Zwei Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  von  $V$  heißen **gleich orientiert**, falls gilt:  $\det M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} > 0$ .
- Die Äquivalenzklassen der so definierten Relation heißen **Orientierungen** von  $V$ . Zwei Basen in derselben Äquivalenzklasse heißen **positiv**, Basen in unterschiedlichen Äquivalenzklassen **negativ orientiert**.
- Es seien  $V, W$  endlichdim. und orientierte VR, d. h. mit Äquivalenzklassen gleich orientierter Basen versehen. Ein Isomorphismus  $V \rightarrow W$  heißt **orientierungserhaltend**, falls  $f$  eine positiv orientierte Basis von  $V$  auf eine positiv orientierte Basis von  $W$  abbildet.
- Für  $V = \mathbb{R}^n$  heißt die Orientierungsklasse der Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  **Standardorientierung** oder **kanonische Orientierung** von  $\mathbb{R}^n$ .

**Def.** Die Gruppen

$$SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$$

$$SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

heißen **spezielle orthogonale/unitäre Gruppe**.

**Bem.** Die spezielle orthogonale Gruppe enthält genau die richtungserhaltenden, orthogonalen Endomorphismen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Satz.** Sei  $A \in O(2)$ . Dann ist  $\det A \in \{-1, 1\}$ .

- Falls  $\det A = 1$ , gibt es genau ein  $\phi \in [0, 2\pi)$ , sodass

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

- Falls  $\det A = -1$ , gibt es genau ein  $\phi \in [0, 2\pi)$ , sodass

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

**Satz.** Sei  $V$  ein endlichdim., unitärer VR und  $f : V \rightarrow V$  ein unitärer Endomorphismus. Dann gilt:

- $f$  ist diagonalisierbar
- $V$  hat eine ONB aus Eigenvektoren von  $f$

**Verfahren.** Eine ONB aus Eigenvektoren von  $f$  bestimmt man, indem man mittel Gram-Schmidt ONB von den Eigenräumen von  $f$  berechnet und diese zu einer Basis zusammensetzt.

**Korollar.** Ist  $A \in U(n)$ , so gibt es ein  $S \in U(n)$ , sodass

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  mit Betrag 1.

**Satz.** Es sei  $V$  ein endlichdim. euklidischer VR und  $f : V \rightarrow V$  ein orthogonaler Endomorphismus. Dann existiert eine ONB von  $V$ , bezüglich der  $f$  durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 & A_1 \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

dargestellt wird, wobei  $A_1, \dots, A_k \in SO(2)$  Drehmatrizen der Form

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

mit  $\theta_i \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  sind.

**Satz.** Sei  $A \in SO(3)$  mit  $A \neq E_3$ . Dann existiert eine ONB  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  von  $\mathbb{R}^3$ , bezüglich der die Abbildung  $A$  durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

dargestellt wird, wobei  $\phi \in [0, 2\pi]$ . Wir können uns daher  $A$  als Drehung mit Drehachse  $\text{span}(v_1) \subset \mathbb{R}^3$  um den Winkel  $\phi$  vorstellen. Die Drehachse und der Winkel  $\phi$  sind durch  $A$  eindeutig bestimmt.

**Satz.** Es gilt:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} w & -\bar{z} \\ z & \bar{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C}, |w|^2 + |z|^2 = 1 \right\}$$

**Def.**

$$\mathbb{H} := \text{span}_{\mathbb{R}} SU(2) \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

**Satz.** Die Matrizen

$$\eta_0 := E_2, \quad \eta_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\eta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis der reellen VR  $\mathbb{H}$ .

**Satz.**  $\mathbb{H}$  ist ein (nicht-kommutativer) Ring mit  $1 = \eta_0$ . Jedes Element  $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  besitzt ein multiplikatives Inverses. Damit ist  $\mathbb{H} \setminus \{0\}$  bezüglich der Multiplikation eine Gruppe und  $\mathbb{H}$  ein Schiefkörper.

**Def.** Setzen wir  $I := \eta_1, J := \eta_2, K := \eta_3$ , dann gilt

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

**Satz.** Es gilt

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ z & w \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{R}, w^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

**Def.** Sei  $G := \text{GL}(n, \mathbb{R})$  oder  $G := \text{GL}(n, \mathbb{C})$ . Eine **Einparametergruppe** in  $G$  ist eine differenzierbare Abbildung  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ , die außerdem ein Gruppenhomomorphismus  $(\mathbb{R}, +, 0) \rightarrow (G, \cdot, E_n)$  ist. Für die Differenzierbarkeit fassen wir  $G$  als offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n \times n}$  bzw.  $\mathbb{C}^{n \times n}$  und  $\phi$  als Zusammenfassung von Komponentenfunktionen auf.

**Satz.** Für alle  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  bzw.  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$  definiert

$$\phi_A : \mathbb{R} \rightarrow G, \quad t \mapsto \exp(t \cdot A)$$

eine Einparametergruppe in  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  bzw. in  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ .

**Satz.** Es gilt im  $\phi_A \subset O(n) \iff A^T = -A$ .

**Bem.** Es gilt für alle  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  bzw.  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\frac{d}{dt} \phi_A(t) \big|_{t=0} = A.$$

Daher heißt  $A$  **infinitesimaler Erzeuger** der Einparametergruppe  $\phi_A$ .

**Def.** Der Vektorraum

$$\mathfrak{o}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = -A\}$$

heißt **Vektorraum der infinitesimalen Erzeuger von  $O(n)$** .

**Bem.** Wegen

$$\det(\exp(tA)) = \exp(t \cdot \text{spur}(A))$$

gilt  $(\forall t \in \mathbb{R} : \det \phi_A(t) = 1) \iff \text{spur } A = 0$ .

**Def.** Der Vektorraum

$$\mathfrak{so}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = -A, \text{ spur } A = 0\}$$

heißt **Vektorraum der infinitesimalen Erzeuger von  $SO(n)$** .

**Satz.** Es gilt  $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$ .

**Def.** Sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer/unitärer Vektorraum. ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  heißt **selbstadjungiert**, wenn

$$\langle v, f(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

**Satz.** Sei  $V$  endlichdim. euklidisch/unitär und  $f \in \text{End}(V)$ . Dann ist  $f$  genau dann selbstadjungiert, wenn folgendes gilt: Es sei  $\mathcal{B}$  eine ONB von  $V$  und  $A = M_{\mathcal{B}}(f)$  die darstellende Matrix von  $f$  bzgl.  $\mathcal{B}$ . Dann ist  $\overline{A}^T = A$ , d. h.  $A$  ist hermitesch bzw. symmetrisch.

**Satz.** Sei  $f : V \rightarrow V$  selbstadjungiert. Dann sind alle EW von  $f$  reell und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

**Satz** (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren). Sei  $V$  ein endlichdim. euklidischer/unitärer VR und  $f : V \rightarrow V$  selbstadjungiert. Dann besitzt  $V$  eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von  $f$ .

**Korollar.** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  hermitesch bzw.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch. Dann ist  $A$  diagonalisierbar. Es existiert eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von  $A$ .

**Def.** Sei ein  $V$  endlichdim. euklidisch/unitärer VR und  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die (paarweise verschiedenen) reellen EWe eines selbstadjungierten Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$ . Setzen wir  $W_i := \text{Eig}(f; \lambda_i)$ , so haben wir nach den bisher bewiesenen Aussagen eine Summenzerlegung

$$f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \text{pr}_{W_i}^\perp$$

von  $f$  als Linearkombination von selbstadjungierten Projektionen. Diese Zerlegung nennt man **Spektralzerlegung** von  $f$ .

*Bem.* Es ist nicht sinnvoll, von EWe einer symmetrischen Bilinearform  $\gamma : V \times V \rightarrow K$  zu sprechen!

**Satz.** Sei  $V$  ein endlichdim.  $\mathbb{R}$ -VR und  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , sodass  $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  eine Diagonalmatrix ist.

**Def.** Eine **quadratische Form** vom Rang  $n$  über einem Körper  $K$  ist ein Polynom  $Q \in K[X_1, \dots, X_n]$  der Form

$$Q = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} X_i X_j$$

mit  $\alpha_{ij} \in K$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Man sagt auch,  $Q$  ist ein **homogenes Polynom vom Grad 2**.

*Bem.* Ist  $Q$  eine quadratische Form, so definiert  $Q$  eine Abbildung  $\phi_Q : K^n \rightarrow K$ , gegeben durch

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto Q(x_1, \dots, x_n)$$

also durch Einsetzen der Körperelemente für die Unbestimmten. Wenn wir die Koeffizienten in einer Matrix  $A := (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in K^{n \times n}$  zusammenfassen, so sehen wir, dass

$$\phi_Q(x) = x^T A x.$$

**Satz.** Wir können aus  $\phi_Q$  die Matrix  $A$  zurückgewinnen (falls  $0 \neq 2$  in  $K$  gilt).

**Def.** Eine **affine Quadrik** im  $\mathbb{R}^n$  ist eine Teilmenge der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x + \langle b, x \rangle + c = 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei wir  $A$  ohne Einschränkung als symmetrisch annehmen dürfen,  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$ .

**Def.** Eine affine Quadrik im  $\mathbb{R}^2$  nennt man einen **Kegelschnitt**.

**Satz** (Trägheitssatz von Sylvester). Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und

$$\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

eine symmetrische Bilinearform. Es seien  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  zwei Basen von  $V$  und  $S := M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  und  $T := M_{\mathcal{C}}(\gamma)$  die entsprechenden darstellenden Matrizen. Es seien  $s_+$  und  $s_-$  die Anzahlen der positiven, bzw. negativen Eigenwerte von  $S$ . Entsprechend definieren wir  $t_+$  und  $t_-$ . Dann gilt

$$s_+ = t_+, s_- = t_-.$$

**Korollar** (Normalform für reelle symmetrische Bilinearformen). Sei  $V$  ein endlichdim.  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension  $n$  und  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform der Signatur  $(r_+, r_-)$ . Dann existiert eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$ , sodass

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die 0 unten rechts die Nullmatrix in  $\mathbb{R}^{r_0 \times r_0}$  bezeichnet.

**Def.** Sei  $V$  ein endlichdim.  $\mathbb{R}$ -VR und  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform. Wir nennen  $\gamma$

- **positiv definit**, falls  $\gamma(v, v) > 0$  für alle  $v \in V \setminus \{0\}$ ,
- **positiv semidefinit**, falls  $\gamma(v, v) \geq 0$  für alle  $v \in V$ ,
- **negativ definit**, falls  $\gamma(v, v) < 0$  für alle  $v \in V \setminus \{0\}$ ,
- **negativ semidefinit**, falls  $\gamma(v, v) \leq 0$  für alle  $v \in V$ ,
- **indefinit**, falls es  $v, w \in V$  gibt mit  $\gamma(v, v) < 0$  und  $\gamma(w, w) > 0$ .

*Bem.* Positiv definite symmetrische Bilinearformen auf reellen Vektorräumen werden Skalarprodukt genannt.

**Satz.** Sei  $V$  ein endlichdim.  $\mathbb{R}$ -VR und  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform der Signatur  $(r_+, r_-)$ . Dann gilt:

- $\gamma$  ist genau dann positiv definit, falls  $r_+ = n$ .
- $\gamma$  ist genau dann positiv semidefinit, falls  $r_- = 0$ .
- $\gamma$  ist genau dann indefinit, falls  $r_+ > 0$  und  $r_- > 0$ .

**Satz** (Hauptminoren-Kriterium). Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix. Für  $k = 1, \dots, n$  bezeichnen wir mit  $H_k \in \mathbb{R}$  die Determinante der linken oberen  $(k \times k)$ -Teilmatrix  $A_k$  von  $A$  (auch  $k$ -ter Hauptminor genannt). Dann sind äquivalent:

- $A$  ist positiv definit.
- $H_k > 0$  für alle  $k = 1, \dots, n$ .