

# Zusammenfassung Gewöhnliche DGLn

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

**Def** (Klassifikation von DGLn).

- (I) **Gewöhnliche** DGL: Gesucht ist Funktion in einer Variable  
**Partielle** DGL: Gesucht ist Funktion in mehreren Variablen
- (II) **Ordnung** einer DGL: Höchste Ableitung der gesuchten Funktion, die in Gleichung vorkommt
- (III) **Explizite** DGL: Gleichung der Form  $y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)})$   
**Implizite** DGL: Allgemeiner Form  $F(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0$
- (IV) **Skalare** DGL: Gesucht ist Funktion mit Wert in  $\mathbb{R}$   
**n-dimensionale** DGL: Gesuchte Funktion hat Wert in  $\mathbb{R}^n$
- (V) **Lineare** DGL: Gleichung hat die Form
$$a_k(t)y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = 0$$
- (VI) **Autonome** DGL: Gleichung der Form  $F(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0$  (keine Abhängigkeit von  $t$ , Zeitinvarianz)

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Dann ist ein **Anfangswertproblem** (AWP) gegeben durch die Gleichungen

$$(1.1) \begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

**Notation.** Seien im Folgenden  $I$  und  $J$  stets Intervalle in  $\mathbb{R}$ .

- Def.** • Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Eine differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Lösung** von  $\dot{y} = f(t, y)$ , falls für alle  $t \in I$  gilt:  $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ .
- Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Eine  $k$ -mal differenzierbare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Lösung** von

$$y^{(k)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k-1)}), \quad (1.2)$$

falls für alle  $t \in I$  gilt:  $y^{(k)}(t) = f(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$

**Satz.** • Ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.2), dann ist

$$(y_1, \dots, y_k) : I \rightarrow \mathbb{R}^{kn}, \quad t \mapsto (y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$$

eine Lösung des Systems von Gleichungen

$$(1.3) \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{k-1} = y_k \\ \dot{y}_k = f(t, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k) \end{cases}$$

- Ist umgekehrt  $(y_1, \dots, y_k) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.3), dann ist  $y = y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.2).

**Satz.** • Ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von AWP (1.1), dann ist

$$(y_1, y_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \mapsto (y_1(t), y_2(t)) = (t, y(t))$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.4) \begin{cases} \dot{y}_1(t) = 1, & y_1(t_0) = t_0 \\ \dot{y}_2(t) = f(y_1(t), y_2(t)), & y_2(t_0) = y_0 \end{cases}$$

- Ist  $(y_1, y_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  eine Lösung von (1.4), dann ist  $y = y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (1.1).

**Problem.** Gesucht ist eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  der linearen, skalaren, expliziten DGL 1. Ordnung (mit  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig)

$$\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \quad (1.5)$$

**Satz.** Die allgemeine Lösung der Gleichung  $\dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t)$  ist

gegeben durch  $y_h(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

**Satz.** Sei  $y_p : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine partikuläre Lösung von (1.5). Dann ist die Menge aller Lösungen von (1.5) gegeben durch

$$\{y_p + y_h \mid y_h : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist Lösung von } \dot{y}_h(t) = a(t) \cdot y_h(t)\}$$

**Bemerkung.** Der Ansatz mit **Variation der Konstanten**

$y_p(t) = c(t) \cdot y_h(t)$  für (1.5) führt zu

$$c(t) = \frac{1}{c_0 t_0} \int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau$$
$$\Rightarrow y_p(t) = \left(\int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

**Korollar.** Die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1.6) \begin{cases} \dot{y}(t) = a(t) \cdot y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mit  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $t_0 \in I$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$y(t) = \left(y_0 + \int_{t_0}^t b(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds\right) d\tau\right) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

**Problem.** Ges. ist Lösung der DGL mit **getrennten Variablen**

$$\dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y) \quad (1.7)$$

mit  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

**Lsg.** 1. Fall:  $h(y_0) = 0$  für ein  $y_0 \in J$ . Dann ist  $y(t) = y_0$  eine Lsg.

2. Fall: Es gibt kein  $y_0 \in J$  mit  $h(y_0) = 0$ . Sei  $H$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{h}$  und  $G$  eine Stammfunktion von  $g$ . Da  $h$  stetig und nirgends null ist, ist  $h$  entweder strikt positiv oder strikt negativ. Somit ist  $H$  streng monoton steigend/fallend und somit umkehrbar. Eine Lösung von (1.7) ist nun gegeben durch

$$y(t) = H^{-1}(G(t) + c_0) \quad \text{mit } c_0 \in \mathbb{R}.$$

**Problem.** Gesucht ist Lösung des AWP mit getrennten Variablen

$$(1.8) \begin{cases} \dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

**Lsg.** 1. Fall:  $h(y_0) = 0$ . Dann ist  $y(t) = y_0$  eine Lösung.

2. Fall:  $h(y_0) \neq 0$ . Dann ist  $h$  in einer Umgebung von  $y_0$  strikt positiv/negativ. Setze

$$H_1(y) := \int_{y(t_0)}^y \frac{1}{h(s)} ds, \quad G_1(t) := \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

Dann ist  $H_1$  in einer Umgebung von  $y_0$  invertierbar und eine Lösung von (1.8) ist gegeben durch

$$y(t) = H_1^{-1}(G_1(t)).$$

**Technik** (Transformation). Manchmal lässt sich eine DGL durch **Substitution** eines Termes in eine einfachere DGL überführen, deren Lösung mit bekannten Methoden gefunden werden kann. Die Lösung der ursprünglichen DGL ergibt sich durch Rücksubstitution.

**Bsp.** Gegeben sei die DGL  $\dot{y} = f(\alpha t + \beta y + \gamma)$  mit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Substituiere  $z(t) = \alpha t + \beta y(t) + \gamma$ . Es ergibt sich die neue DGL  $\dot{z}(t) = \beta f(z(t)) + \alpha$ , die sich durch Trennung der Variablen lösen lässt.

**Bsp** (Bernoulli-DGL). Gegeben sei die DGL  $\dot{y}(t) = \alpha(t) \cdot y(t) + \beta(t) \cdot (y(t))^\delta$  mit  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Multiplikation mit  $(1 - \delta)y^{-\delta}$  und Substitution mit  $z(t) = (y(t))^{1-\delta}$  führt zur skalaren linearen DGL 1. Ordnung

$$\dot{z}(t) = (1 - \delta)\alpha(t)z(t) + (1 - \delta)\beta(t).$$

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Abb.  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **stetig in  $x_0 \in \mathcal{D}$** , falls

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{D} : \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

Die Abb. heißt **stetig** in  $\mathcal{D}$ , falls sie in jedem Punkt in  $\mathcal{D}$  stetig ist.

**Notation.**  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig}\}$ ,  $\|f\|_\infty := \sup_{t \in I} \|f(t)\|$

**Bemerkung.**  $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  ist ein Banachraum.

**Def.** Eine Teilmenge  $A \subset X$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluss  $\bar{A}$  kompakt in  $X$  ist.

**Def.** Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banachräume. Sei  $\mathcal{D} \subset X$ . Eine Abbildung  $T : \mathcal{D} \rightarrow Y$  heißt

- **stetig in  $x \in \mathcal{D}$** , falls  $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx$  in  $Y$  für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  in  $\mathcal{D}$  gilt.
- **Lipschitz-stetig** in  $\mathcal{D}$ , falls eine Konstante  $\alpha > 0$  existiert mit

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D} : \|Tx_1 - Tx_2\|_Y \leq \alpha \cdot \|x_1 - x_2\|_X.$$

- **kontraktiv**, falls  $T$  Lipschitz-stetig mit  $\alpha < 1$  ist.
- **kompakt**, falls  $T$  stetig ist und beschränkte Mengen in  $X$  auf relativ kompakte Mengen in  $Y$  abgebildet werden, d. h. für jede beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}$  besitzt die Folge  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge.

*Bemerkung.* Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig, die Umkehrung gilt aber nicht.

**Satz** (Arzelà-Ascoli). Sei  $I \subset \mathbb{R}$  kompakt. Eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$  ist genau dann relativ kompakt, wenn

- $\mathcal{F}$  ist **punktwise beschränkt**, d. h.

$$\forall t \in I : \exists M : \forall f \in \mathcal{F} : \|f(t)\| \leq M$$

- $\mathcal{F}$  ist **gleichgradig stetig**, d. h.

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in I, f \in \mathcal{F} : \|t_1 - t_2\| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| < \epsilon$$

**Satz** (Fixpunktsatz von Banach). Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein Banachraum,  $\mathcal{D} \subset X$  nichtleer, abgeschlossen. Sei  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  eine Kontraktion. Dann besitzt die Fixpunktgleichung  $y = Ty$  genau eine Lösung in  $\mathcal{D}$ .

**Satz** (Fixpunktsatz von Schauder). Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein Banachraum, sei  $\mathcal{D} \subset X$  nichtleer, abgeschlossen, beschränkt, konvex. Sei  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  eine kompakte Abbildung. Dann besitzt die Fixpunktgleichung  $y = Ty$  mindestens eine Lösung in  $\mathcal{D}$ .

**Satz.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Dann ist das AWP (1.1) lokal lösbar, d. h. es existiert ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $t_0 \in I$  und eine stetig diff'bare Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die das AWP (1.1) erfüllt.

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung des AWP (1.1).

- Eine Lösung  $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **Fortsetzung** (bzw. **echte Fortsetzung**) der Lösung  $y$ , falls  $I \subset J$  (bzw.  $I \subsetneq J$ ) und  $u|_I = y$ .
- Die Lösung  $y$  heißt **maximale Lösung** des AWP (1.1), falls keine echte Fortsetzung von  $y$  existiert. Das Intervall  $I$  heißt dann **maximales Existenzintervall**.

**Satz.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ .

- Jede lokale Lösung des AWP (1.1) kann zu einer maximalen Lösung fortgesetzt werden.
- Sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine max. Lsg. des AWP (1.1). Dann ist  $I$  offen.

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

- Die Funktion  $f$  heißt **Lipschitz-stetig bzgl.  $y$**  auf  $\mathcal{D}$ , falls eine Konstante  $\mathcal{L} > 0$  existiert, sodass

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in \mathcal{D} : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \mathcal{L} \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

- Wenn für alle  $(t, y) \in \mathcal{D}$  eine Umgebung  $U_{(t,y)} \subset \mathcal{D}$  existiert, sodass  $f|_{U_{(t,y)}}$  Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  ist, so heißt  $f$  **lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$**  auf  $\mathcal{D}$ .

**Lemma.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und stetig diff'bar nach  $y$  in  $\mathcal{D}$ . Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$ .

**Satz** (Picard-Lindelöf, lokal quantitativ). Seien  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$  und  $R_{a,b} := [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}_b(y_0) \subset \mathcal{D}$ . Sei  $f$  Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $R_{a,b}$ . Dann besitzt das AWP (1.1) im Rechteck  $R_{a,b}$  genau eine Lösung  $y : I_y \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf  $I_y := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$  mit  $\gamma = \min(a, \frac{b}{M})$  und  $M = \sup_{(t,y) \in R_{a,b}} \|f(t, y)\|$ .

*Bemerkung.* Im Beweis des Satzes definiert man die Picard-Iterierten  $u_j : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  für  $j \in \mathbb{N}$  durch

$$u_0(t) := y_0, \quad u_{j+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_j(\tau)) d\tau.$$

Man zeigt: Die Funktionenfolge  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen eine Lösung  $u_\infty : I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$  des AWP.

**Satz** (Picard-Lindelöf, lokal qualitativ). Seien  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $\mathcal{D}$ ,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Dann besitzt das AWP (1.1) eine eindeutige lokale Lösung, d. h. es existiert  $\gamma = \gamma(t_0, y_0) > 0$ , sodass das AWP (1.1) auf  $I_\gamma := [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$  genau eine Lösung besitzt.

**Satz** (Picard-Lindelöf, global). Seien  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $\mathcal{D}$ ,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall  $I = (a_-, a_+)$  mit  $t_0 \in I$  und

- Das AWP (1.1) besitzt genau eine Lösung  $\gamma$  auf  $I$ .
- Ist  $\tilde{z} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine beliebige Lösung von (1.1) mit  $t_0 \in \tilde{I}$ , so gilt  $\tilde{I} \subseteq I$  und  $z = y|_{\tilde{I}}$ .

**Satz.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ . Falls  $f$  für jedes kompakte Intervall  $\tilde{I} \subset I$  global Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $\tilde{I} \times \mathbb{R}^n$  ist, dann hat das AWP (1.1) genau eine globale Lösung  $y$  auf  $I$ .

**Satz.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  offen,  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $I \times \mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ . Ist das Wachstum von  $f$  linear beschränkt in  $y$  auf  $I \times \mathbb{R}^n$ , d. h. gibt es stetige Funktionen  $a, b : I \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\|f(t, y)\| \leq a(t)\|y\| + b(t)$  für alle  $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$ , dann besitzt das AWP (1.1) eine eindeutige Lösung auf  $I$ .

**Satz** (Randverhalten maximaler Lösungen). Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  offen,  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$  und  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$ . Sei  $y : (a_-, a_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine maximale Lösung des AWP (1.1).

- Ist  $a_+ < \infty$ , so ist  $y$  auf  $[t_0, a_+)$  unbeschränkt oder der Rand  $\partial\mathcal{D}$  ist nicht leer und  $\lim_{t \uparrow a_+} \text{dist}((t, y(t)), \partial\mathcal{D}) = 0$ .
- Ist  $a_- > -\infty$ , so ist  $y$  auf  $(a_-, t_0]$  unbeschränkt oder der Rand  $\partial\mathcal{D}$  ist nicht leer und  $\lim_{t \downarrow a_-} \text{dist}((t, y(t)), \partial\mathcal{D}) = 0$ .

**Problem.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  und  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Für  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  betrachten wir das AWP

$$(3.1) \begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y + f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

**Satz.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ . Dann besitzt das AWP (3.1) eine eindeutige (globale) Lösung auf  $I$ .

**Notation.**  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) := \{u : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \text{ stetig}\}$

**Def.** Eine Teilmenge  $M \subset V$  eines Vektorraums  $V$  heißt **affiner Teilraum**, wenn es ein  $y \in V$  und einen Unterraum  $U \subset V$  mit  $M = y + U := \{y + U \mid u \in U\}$  gibt.

**Satz.** Seien  $I \subset \mathbb{R}$  offen,  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig. Setze

$$U_h := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \text{ auf } I\}.$$

Dann ist  $U_h$  ein  $n$ -dimensionaler UVR von  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$  und für Funktionen  $y_1, \dots, y_m \in U_h$  sind äquivalent:

- $y_1, \dots, y_m$  sind linear unabhängig in  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ .
- Es gibt  $t^* \in I$ , sodass  $y_1(t^*), \dots, y_m(t^*)$  linear unabh. in  $\mathbb{R}^n$  sind.
- Für alle  $t \in I$  sind  $y_1(t), \dots, y_m(t)$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^n$ .

**Def.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig. Eine Menge  $y_1, \dots, y_n$  von linear unabhängigen Lösungen von  $\dot{y} = A(t) \cdot y$  heißt ein **Fundamentalsystem** und  $(y_1, \dots, y_n)$  **Fundamentalmatrix** der DGL.

**Satz.** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig.

- Jede Fundamentalmatrix von  $\dot{y} = A(t)y$  ist invertierbar f. a.  $t \in I$ .
- Jede Fundamentalmatrix  $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  ist stetig differenzierbar.
- Die globale eindeutige Lösung von

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A(t) \cdot y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ist gegeben durch  $y(t) = Y(t)(Y(t_0))^{-1}y_0$ .

**Satz.** Seien  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A : \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $U_h$  wie oben und  $U := \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \mid \dot{y} = A(t)y + f\}$ . Dann gilt:

- $U$  ist nicht leer.
- Ist  $y_p \in U$  eine partikuläre Lösung, dann ist  $U = y_p + U_h$ , d. h.  $U$  ist affiner Unterraum von  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ .
- Sei  $y_p, \tilde{y}_p \in U$ , dann ist  $y_p - \tilde{y}_p \in U_h$ .

**Satz** (Variation der Konstanten). Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Sei  $Y(t)$  die Fundamentalmatrix. Dann gilt:

- Eine partikuläre Lösung von  $\dot{y} = A(t)y + f(t)$  ist gegeben durch

$$y_p(t) := \int_{t_0}^t Y(t)(Y(s))^{-1}f(s)ds, \quad t_0 \in I.$$

- Es gilt  $U = \left\{ \int_{t_0}^t Y(t)(Y(s))^{-1}f(s)ds + Y(t)c \mid c \in \mathbb{R}^n \right\}$

- Die globale eindeutige Lsg vom AWP (3.1) ist gegeben durch

$$y(t) := Y(t)(Y(t_0))^{-1}y_0 + \int_{t_0}^t Y(t)(Y(s))^{-1}f(s)ds, \quad t \in I.$$

**Def.** Die Matrix-Exponentialfunktion ist definiert als

$$\exp : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A \mapsto e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

**Satz.** Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann gilt:

- Falls  $A$  und  $B$  kommutieren, d. h.  $AB = BA$ , dann gilt

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A.$$

- Aus  $e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  folgt  $AB = BA$ .
- $e^A$  ist invertierbar mit  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .
- Wenn  $B$  invertierbar ist, dann gilt  $e^{B^{-1}AB} = B^{-1}e^AB$ .

- Ist  $A$  eine Diagonalmatrix mit Einträgen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so gilt

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$  •  $e^{t(A+\lambda I)} = e^{\lambda t} \cdot e^{tA}$

**Satz.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalisierbar, d. h. es existiere eine Basis aus Eigenvektoren  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}^n$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  sodass  $S^{-1}AS =: D$  mit  $S := (s_1, \dots, s_n)$  diagonal mit Einträgen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ist. Dann gilt

$$e^{tA} = S e^{tD} S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}$$

*Bemerkung.* Wenn  $e^{tA}$  eine Fundamentalmatrix ist, dann ist auch  $e^{tA}S = Se^{tD}$  eine Fundamentalmatrix.

**Def.** Der **Jordanblock** der Größe  $n$  zum EW  $\lambda$  ist die Matrix

$$J(\lambda, n) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

*Bemerkung* (Jordan-Normalform). Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix, für die gilt:

$$P_A(\lambda) = (-1)^N (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  paarweise verschiedene komplexe Eigenwerte mit algebraischen Vielfachheiten  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sind. Dann gibt es eine Matrix  $S \in GL_n(\mathbb{C})$  mit

$$S^{-1}AS = J_A := \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}, \quad \text{wobei}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} J(\lambda_j, p_{j1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J(\lambda_j, p_{jg_j}) \end{pmatrix}$$

**Prop.** Für  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  gilt:

$$e^{t \cdot J(\lambda, p)} = e^{t\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Satz.** Sei  $S^{-1}AS = J_A$  in Jordan-NF. Dann gilt:

$$e^{At} = S e^{J_A t} S^{-1} \quad \text{mit} \quad e^{J_A} = \begin{pmatrix} e^{A_{11}t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{A_{kk}t} \end{pmatrix} \quad \text{wobei}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} e^{tJ(\lambda_j, p_{j1})} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{tJ(\lambda_j, p_{jg_j})} \end{pmatrix}.$$

**Satz.** Kommutieren die Matrizen  $(A(t))_{t \in I}$  miteinander, d. h.

$$A(t) \cdot A(s) = A(s) \cdot A(t) \quad \text{für alle } t, s \in I,$$

so ist eine Fundamentalmatrix von  $\dot{y} = A(t)y + f(t)$  gegeben durch

$$Y(t) := \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right) \quad \text{für alle } t \in I.$$

**Problem.** Gegeben seien  $f, a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{I}$ ,  $t_0 \in I$  und  $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Betrachte die lineare skalare DGL höherer Ordnung

$$(3.1) \quad \begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\dot{y}(t) + a_0(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = z_0, \quad \dot{y}(t_0) = z_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}. \end{cases}$$

*Bemerkung.* Nach Satz 1.1 ist dieses Problem äquivalent zum AWP

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}. \quad \text{Korresp. der Lsgn:} \quad \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

**Satz.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $t_0 \in I$ ,  $z = (z_0, \dots, z_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ . Dann besitzt das AWP (3.1) eine eindeutige globale Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Satz.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  offen,  $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Setze

$$U_{h,n} := \{y \in C^n(I, \mathbb{R}) \mid y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = 0\},$$

$$U_n := \{y \in C^n(I, \mathbb{R}) \mid y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = f(t)\}.$$

Dann ist  $U_{h,n}$  ein  $n$ -dimensionaler UVR von  $C^n(I, \mathbb{R})$  und für Funktionen  $x_1, \dots, x_m \in U_{h,n}$  sind äquivalent:

- $x_1, \dots, x_n$  sind linear unabhängig in  $C^n(I, \mathbb{R})$ .
- $(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)}), \dots, (x_m, \dot{x}_m, \dots, x_m^{(n-1)})$  sind linear unabhängig in  $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ .
- $(x_1(t^*), \dot{x}_1(t^*), \dots, x_1^{(n-1)}(t^*)), \dots, (x_m(t^*), \dot{x}_m(t^*), \dots, x_m^{(n-1)}(t^*))$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}^n$  für ein  $t^* \in I$ .
- $(x_1(t), \dot{x}_1(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)), \dots, (x_m(t), \dot{x}_m(t), \dots, x_m^{(n-1)}(t))$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}^n$  für alle  $t \in I$ .

Bezeichnen wir als Fundamentalsystem der DGL in (3.1) eine Menge von  $n$  global linear unabhängigen Lösungen der DGL in (3.1) mit  $f(t) \equiv 0$ , dann gilt:

- Ist  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ein Fundamentalsystem, so ist

$$U_{h,n} = \{c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}.$$

- $U_n \neq \emptyset$  und für eine partikuläre Lösung  $y_p \in U_n$  der DGL (3.1) ist  $U_n = y_p + U_{h,n}$  ein affiner Unterraum von  $C^n(I, \mathbb{R})$ .

*Bemerkung.* Funktionen  $x_1, \dots, x_n \in U_{h,n}$  bilden ein Fundamentalsystem genau dann, wenn

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{(n-1)}(t) & \dots & x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0.$$

*Bemerkung.* Seien die Funktionen  $a_j(t) \equiv a_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, \dots, n-1$  konstant. Dann heißt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

**Begleitmatrix** und es gilt

$$P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0).$$

Angenommen, es zerfällt  $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$  wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Nullstellen mit algebraischen Vielfachheiten  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Falls  $k = n$  (bzw.  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 1$ ), so ist  $\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}\}$  ein Fundamentalsystem von (3.1). Ansonsten ist

$$\tilde{F} := \tilde{F}_1 \cup \dots \cup \tilde{F}_k \quad \text{mit} \quad \tilde{F}_j := \{e^{\lambda_j t}, e^{\lambda_j t} t, \dots, e^{\lambda_j t} t^{\alpha_j - 1}\}$$

ein Fundamentalsystem von (3.1).

*Bemerkung.* Um den Lösungsraum von (3.1) zu bestimmen, benötigen wir noch eine partikuläre Lösung  $y_p$ . Diese kann zum einen durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} y_{1,p}(t) \\ \vdots \\ y_{n,p}(t) \end{pmatrix} := \int_t^{t_0} Y(t) \cdot Y(s)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds, \quad y_p := y_{1,p}.$$

bestimmt werden. Falls  $f$  elementaransatzfähig ist, d. h.

$$f(t) = g(t) \cdot e^{\mu t} \cos(\omega t) + q(t) \cdot e^{\mu t} \sin(\omega t)$$

für Polynome  $g(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]$  und  $\omega, \mu \in \mathbb{R}$  gilt, dann gibt es eine Lösung der Form

$$y_p(t) = t^\nu (\gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_m t^m) e^{\mu t} \cos(\omega t) + t^\nu (\beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_m t^m) e^{\mu t} \sin(\omega t).$$

Dabei ist  $m := \max(\deg g, \deg q)$  und

$$\nu := \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu + i\omega \text{ keine Nullstelle von } P_A(\lambda) \text{ ist,} \\ k, & \text{falls } \mu + i\omega \text{ eine } k\text{-fache Nullstelle von } P_A(\lambda) \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Zahlen  $\gamma_0, \dots, \gamma_m, \beta_0, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$  sind noch zu bestimmen.

**Bsp.** Das AWP

$$\begin{cases} \ddot{y} + \Theta^2 y = \cos(\omega t) \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2 - \Theta^2} \cos(\Theta t) + \frac{1}{\Theta^2 - \omega^2} \cos(\omega t), & \text{falls } \omega^2 \neq \Theta^2, \\ \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t), & \text{falls } \omega^2 = \Theta^2. \end{cases}$$

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $y$  auf  $\mathcal{D}$ . Eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $\dot{y} = f(t, y)$  und  $y(t_0) = y_0$  auf einem Intervall  $[t_0, \infty)$  für ein  $t_0 \in \mathbb{R}$  heißt

- **(Lyapunov-) stabil** auf  $[t_0, \infty)$ , wenn es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodass für alle  $(t_0, z_0) \in \mathcal{D}$  und  $\|y_0 - z_0\| < \delta$  das AWP

$$(\dagger) \begin{cases} \dot{z} = f(t, z), \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

eine Lösung  $z$  auf  $[t_0, \infty)$  besitzt, welche die Ungleichung  $\|y(t) - z(t)\| < \epsilon$  für alle  $t \geq t_0$  erfüllt.

- **attraktiv**, wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, sodass für alle  $(t_0, z_0) \in \mathcal{D}$  mit  $\|y_0 - z_0\| < \delta$  das AWP  $(\dagger)$  eine Lösung  $z$  auf  $[t_0, \infty)$  besitzt mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - z(t)\| = 0.$$

- **asymptotisch stabil**, falls  $y$  stabil und attraktiv ist.
- **exponentiell stabil**, wenn  $\delta, \alpha, \omega > 0$  existieren, sodass für alle  $(t_0, z_0) \in \mathcal{D}$  mit  $\|y_0 - z_0\| < \delta$  das AWP  $(\dagger)$  eine Lsg  $z$  besitzt mit

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \alpha \|y_0 - z_0\| e^{-\omega(t-t_0)}.$$

*Bemerkung.* exponentiell stabil  $\Rightarrow$  asymptotisch stabil

**Bsp.** Eine Lösung  $y$  des AWP  $\dot{y} = \alpha y$ ,  $y(t_0) = y_0$  ist

- exponentiell stabil, falls  $\alpha < 0$ ,
- stabil, falls  $\alpha = 0$  und
- instabil (d. h. weder stabil noch attraktiv), falls  $\alpha > 0$ .

**Satz.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig.

- Die DGL  $\dot{y} = f(y)$  ist translationsinvariant, d. h. ist  $y$  eine Lösung von  $\dot{y} = f(y)$  auf  $[t_0, \infty)$ , dann ist  $z(t) := y(t_0 + t)$  eine Lösung von  $\dot{z} = f(z)$  auf  $[0, \infty)$ .
- Die Lösung  $y$  ist genau dann (exponentiell/asymptotisch) stabil, wenn  $z$  (exponentiell/asymptotisch) stabil ist.
- Eine Lösung von  $\dot{y} = f(y)$  ist genau dann konstant, also  $y(t) \equiv c \in \mathbb{R}^n$ , wenn  $f(c) = 0$ .

**Sprechweise.** Konstante Lösungen werden auch stationäre Lösungen oder zeitinvariante Lösungen genannt.

**Def.** Seien  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig auf  $\mathcal{D}$ . Jede Nullstelle von  $f$  heißt **Ruhelage** (Gleichgewichtspunkt, kritischer Punkt) von  $f$ .

*Bemerkung.* Eine Lösung  $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  der Gleichung

$$\dot{y} = Ay, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist genau dann (exponentiell/asymptotisch) stabil, wenn es die konstante Lösung  $y(t) \equiv 0$  ist.

**Satz.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  invertierbar. Das GGW  $y_* \equiv 0$  der DGL  $\dot{y} = Ay$  ist genau dann (exp/asympt) stabil, wenn das GGW  $z_* \equiv 0$  der DGL  $\dot{z} = S^{-1}AS$  (exp/asympt) stabil ist.

**Satz** (Stabilität von linearen, autonomen DGLn). Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  die Eigenwerte von  $A$ . Das GGW  $y_* \equiv 0$  von  $\dot{y} = Ay$  ist genau dann

- stabil, wenn für alle EWe  $\Re(\lambda_j) \leq 0$  gilt und alle EWe mit  $\Re(\lambda_j) = 0$  halbeinfach sind, d. h. die geometrische Vielfachheit mit der algebraischen übereinstimmt,
- exponentiell stabil, wenn für alle EWe  $\Re(\lambda_j) < 0$  gilt,
- ansonsten instabil.

*Bemerkung.* Falls  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  von  $t$  abhängig, so gibt es kein Kriterium mit Eigenwerten von  $A(t)$ , um Stabilität der Lösung  $y \equiv 0$  von  $\dot{y} = A(t) \cdot y$  zu überprüfen.

**Lemma.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig. Ist  $y$  eine Lsg von  $\dot{y} = f(y)$  auf  $[0, \infty)$  mit  $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ , dann ist  $y_\infty$  eine Ruhelage von  $f$ , d. h.  $f(y_\infty) = 0$ .

**Satz.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Sei  $y_s(t) \equiv y_* \in \mathbb{R}^n$  eine stationäre Lsg von  $\dot{y} = f(y)$ , d. h.  $f(y_*) = 0$ . Sei

$$J_f(y_*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y_*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(y_*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(y_*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y_*) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von  $f$  in  $y_*$ . Dann gilt:

- Wenn jeder EW von  $J_f(y_*)$  Realteil  $< 0$  besitzt, dann ist  $y_s \equiv y_*$  asymptotisch stabil.
- Hat  $J_f(y_*)$  mind. einen EW mit Realteil  $> 0$ , dann ist  $y_s$  instabil.

*Bemerkung.* Im Fall von EWe  $< 0$  und mind. einem EW  $= 0$  ist keine Aussage möglich.

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig. eine stetig differenzierbare Funktion  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **erstes Integral** von  $\dot{y} = f(y)$ , wenn gilt:  $\forall y \in \mathcal{D} : (\nabla \mathcal{E}(y) | f(y)) = 0$ .

**Bsp.** Sei  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Hamiltonische Funktion. Das zugehörige Hamiltonische System ist

$$\begin{cases} \dot{y} &= \frac{\partial}{\partial z} H(y, z) \\ \dot{z} &= -\frac{\partial}{\partial y} H(y, z). \end{cases}$$

Dann ist  $\mathcal{E}(y, z) := H(y, z)$  ein erstes Integral.

**Bsp.** Das Räuber-Beute-Modell mit Parametern  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

$$\begin{cases} \dot{y} &= y(\alpha - \beta z) \\ \dot{z} &= z(\delta y - \gamma) \end{cases}$$

ist nicht hamiltonisch, aber besitzt das erste Integral

$$E(y, z) := \alpha \ln|z| - \beta z + \gamma \ln|y| - \delta y \quad \text{auf } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}.$$

**Def.** Seien  $h, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Die DGL  $\dot{y}g(t, y) - h(t, y) = 0$  heißt **exakt**, falls es eine Stammfunktion  $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, d. h.  $S \in C^1(\mathcal{D})$  und

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, y) = h(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial y}(t, y) = g(t, y).$$

*Bemerkung.* Dann gilt für jede Lösung  $y : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}$  der DGL:

$$\frac{d}{dt} E(t, y(t)) = \frac{\partial E}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial E}{\partial y}(t, y(t)) \cdot \dot{y}(t) = 0$$

**Def.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig auf  $\mathcal{D}$ ,  $y_*$  eine Ruhelage von  $f$ ,  $y_s(t) \equiv y_*$  die zugeh. stationäre Lösung,  $U_{y_*}$  eine offene Umgebung von  $y_*$ . Eine stetig diff'bare Funktion  $V : U_{y_*} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

- **schwache Lyapunov-Funktion** der DGL  $\dot{y} = f(y)$  für  $y_*$ , wenn  $(\nabla V(y) | f(y)) \leq 0$  für alle  $y \in U_{y_*}$ .
- **starke Lyapunov-Funktion** der DGL  $\dot{y} = f(y)$  für  $y_*$ , wenn  $(\nabla V(y) | f(y)) < 0$  für alle  $y \in U_{y_*} \setminus \{y_*\}$ .

**Satz.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig auf  $\mathcal{D}$ ,  $y_*$  eine Ruhelage von  $f$ ,  $y_s(t) \equiv y_*$  die zugeh. stationäre Lösung.

- Sei  $V : U_{y_*} \rightarrow \mathbb{R}$  eine *schwache* Lyapunov-Funktion der DGL  $\dot{y} = f(y)$  für  $y_* \in U_{y_*}$  und es gelte  $\forall y \in U_{y_*} \setminus \{y_*\} : V(y_*) < V(y)$ , d. h.  $V$  hat in  $y_*$  ein isoliertes lokales Minimum. Dann ist  $y_s(t)$  stabil.
- Wenn  $V$  sogar eine *starke* Lyapunov-Funktion ist, so ist  $y_s(t)$  asymptotisch stabil.

**Def.** Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^n$  heißt

$$\begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases} \text{ definit, falls } v^T A v \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

*Bemerkung.* Eine  $(2 \times 2)$ -Matrix ist genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante und ihre Spur positiv sind.

*Bemerkung.* Die Funktion  $V$  hat in  $y_*$  ein isoliertes lokales Minimum, wenn die Hesse-Matrix  $H := (\text{Hess } f)(y_*)$  positiv definit ist, d. h.  $\forall v \neq 0 : v^T H v > 0$ .

**Satz.** Seien  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, lokal Lipschitz-stetig,  $y_*$  eine Ruhelage von  $f$ ,  $y_s(t) \equiv y_*$ . Sei  $v : U_{y_*} \rightarrow \mathbb{R}$  eine starke Lyapunov-Funktion von  $\dot{y} = f(y)$  für  $y_* \in U_{y_*}$ . Gibt es in jeder Umgebung  $\widehat{U}_{y_*} \subset U_{y_*}$  von  $y_*$  einen Punkt  $\hat{y} \in \widehat{U}_{y_*}$  mit  $V(\hat{y}) < V(y_*)$ , so ist  $y_s(t)$  instabil.

**Satz.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Falls eine positiv definite Matrix  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt, sodass die Matrix  $A^T P + P A$  negativ definit ist. Dann ist  $V(y) := y^T P y$  eine starke Lyapunov-Funktion von  $\dot{y} = Ay$  für  $y_* = 0$  mit der Eigenschaft  $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : 0 = V(y_*) < V(y)$ .

**Satz.** Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und eine positiv definite Matrix  $Q$  hat die Lyapunov-Gleichung  $A^T P + P A = Q$  genau dann eine eindt. positiv definite Lsg, wenn alle EWe von  $A$  negativen Realteil haben.

**Korollar.** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Die stationäre Lsg  $y_s(t) \equiv 0$  von  $\dot{y} = Ay$  ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Lyapunov-Gleichung  $A^T P + P A = -Q$  mit einer pos. definiten Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine (eindeutige) Lösung  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  besitzt.

**Satz.** Sei  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine pos. definite Lsg von  $A^T P + P A = -I$ . Dann gilt

$$\text{Spec}(A) = \{ \text{Eigenwerte von } A \} \subset \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) \leq -\frac{1}{2\|P\|}\}.$$

**Problem.** Sei  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $p, q : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Betrachte

$$\dot{y}p(t,y) + q(t,y) = 0 \tag{5.1}$$

**Def.** Die DGL (5.1) heißt **exakt** auf  $\mathcal{D}$ , falls es eine stetig diff'bare Funktion  $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,y) = q(t,y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial y}(t,y) = p(t,y).$$

**Satz.** Die DGL (5.1) sei exakt mit Stammfunktion  $S$ . Dann erfüllt die Lösung  $y$  von (5.1) mit Anfangswert  $y(t_0) = y_0$  die Gleichung

$$S(t,y(t)) \equiv S(t_0,y_0).$$

*Bemerkung.* Falls  $\frac{\partial S}{\partial y}(t_0,y_0) = p(t_0,y_0) \neq 0$ , so kann man nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung  $S(t,y) = S(t_0,y_0)$  nach  $y$  auflösen und erhält so eine lokale Lösung von (5.1).

**Satz.** Sei  $\mathcal{D} = (a,b) \times (c,d) \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $-\infty \leq c < d \leq \infty$ . Dann ist die Gleichung (5.1) genau dann exakt, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial q}{\partial y}(t,y)$$

für alle  $(t,y) \in \mathcal{D}$  erfüllt ist. Die Stammfunktion ist dann

$$S(t,y) := \int_{t_0}^t q(s,y) \, ds + \int_{y_0}^y p(t_0,z) \, dz.$$

**Def.** Sei die DGL (5.1) gegeben. Eine stetige und bzgl.  $y$  Lipschitz-stetige Funktion  $m : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **integrierender Faktor**, falls  $m(t,y) \neq 0$  auf  $\mathcal{D}$  und die DGL

$$\dot{y} \cdot (p(t,y) \cdot m(t,y)) + (q(t,y) \cdot m(t,y)) = 0 \tag{5.2}$$

exakt ist.

*Bemerkung.* Da  $m \not\equiv 0$  auf  $\mathcal{D}$  nach Definition, hat (5.2) dieselben Lösungen wie (5.1).