Zusammenfassung Algebr. Topologie

Def. Ein **affines n-Simplex** ist die konvexe Hülle von $n+1$ affin unabhängigen Punkten $p_0, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{R}^N$. Die konvexe Hülle von einer Teilmenge dieser Eckpunkte wird **Seite** genannt.
Das **Standard-n-Simplex** Δ_n ist das von den $n+1$ Standard-Basisvektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$ aufgespannte Simplex.

Def. Ein (endlicher) **geometrischer Simplizialkomplex** ist eine (endliche) Menge $\mathcal{S}$ endlich vieler affiner Simplizes im $\mathbb{R}^N$, sodass:

- Ist $K \in \mathcal{S}$ und $T \subset K$ eine Seite von K, dann ist auch $T \in \mathcal{S}$.
- Für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$ ist $K_1 \cap K_2$ entweder eine Seite von K_1 und K_2 oder leer.

Def. Jeder Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ ist eine **Triangulierung** seines **Polyeders**, dem topologischen Raum $|\mathcal{S}| := \bigcup\limits_{K \in \mathcal{S}} K$.

Def. Ein geometrischer Simplizialkomplex mit einer Totalordnung auf der Menge der Eckpunkte heißt **geordnet**.

Notation. Ein n-Simplex mit Eckpunkten $v_0, \ldots, v_n$ in einem geordneten geom. Simplizialkomplex wird mit $\langle v_0, \ldots, v_n \rangle$ bezeichnet, falls $v_0 < v_1 < \ldots < v_n$.

Notation. $\mathcal{S}_n := \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \sigma \text{ ist geordneter } n\text{-Simplex}\}$

Def. Eine **simpliziale n-Kette** in einem geordneten geom. Simplizialkomplex ist eine endliche formale Linearkombination

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma,$$

wobei $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}$. Die Menge solcher Linearkombinationen ist $C_n(\mathcal{S})$. Sie ist die freie abelsche Gruppen über der Menge der Simplizes.

Bem. $C_n(\mathcal{S})$ ist eine Gruppe.

Def. Der Rand eines orientierten n-Simplex $\langle v_0, \ldots, v_n \rangle \in \mathcal{S}$ ist

$$\delta \langle v_0, \ldots, v_n \rangle := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n \rangle.$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Gruppenhomo $\partial_n : C_n(\mathcal{S}) \to C_{n-1}(\mathcal{S})$.

Def. Ein **Kettenkomplex** $C_\bullet$ ist eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ mit der Eigenschaft $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Def. Sei $C_\bullet$ ein Kettenkomplex.

- $C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Ketten**,
- $Z_n(C_\bullet) := \ker \partial_n \subset C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) := \operatorname{im} \partial_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n-Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$ heißt **n-te Homologiegruppe**.

Prop. Für $n \geq 1$ gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Die simplizialen n-Ketten bilden also einen Kettenkomplex.

Def. Ein **singuläres n-Simplex** in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta^n \to X$. Wir bezeichnen mit $\Delta_n(X)$ die Menge der singulären n-Simplizes in X und mit $C_n(X)$ die freie abelsche Gruppe über $\Delta_n(X)$. Wir definieren

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X), \quad \sigma \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{\langle e_0, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_n \rangle}.$$

Analog zu oben gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, man erhält also einen Komplex $C_\bullet(X)$ der singulären Ketten in X. Dessen Homologiegruppen heißen **singuläre Homologiegruppen** $H_n(X)$.

Def. Eine **Kettenabbildung** zwischen Kettenkomplexen $C_\bullet$ und $D_\bullet$ ist eine Familie $(f_n : C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Gruppenhomomorphismen, welche mit dem Differential verträglich sind, d. h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \partial_n^{(D)} \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n^{(C)}.$$

Aus einer solchen Abbildung erhält man wiederum eine Abbildung $H_n(f) : H_n(C_\bullet) \to H_n(C_\bullet)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit definiert H_n einen Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe nach $\mathbf{Ab}$.

Def. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen erhalten wir eine Abbildung $f_* : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ definiert durch $f_*(\sigma) := f \circ \sigma$ für ein n-Simplex $\sigma : \Delta_n \to X$. Die Zuordnung $f \mapsto f_*$ erfüllt die Funktorialitätsaxiome. Somit definiert H_n für alle $n \in \mathbb{N}$ einen Funktor $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$.

Kor. Homöomorphe Räume besitzen isomorphe singuläre Homologiegruppen.

Prop. Sei $\pi_0(X)$ die Menge der Wegekomponenten von X. Die Inklusionen $A \hookrightarrow X$ (für $A \in \pi_0(X)$) induzieren einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{A \in \pi_0(X)} H_*(A) \cong H_*(X).$$

Prop. Sei $X \neq \emptyset$ wegzusammenhängend. Dann ist $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Def. Eine **Kettenhomotopie** zw. Kettenabb. $\phi_*, \psi_* : C_\bullet \to D_\bullet$ ist eine Folge von Homomorphismen $P_n : C_n \to D_{n+1}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n = \phi_n - \psi_n.$$

Prop. Seien $\phi_*, \psi_* : C_\bullet \to D_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt

$$H_*(\phi_*) = H_*(\psi_*) : H(C_\bullet) \to H(D_\bullet).$$

Satz. Seien $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen.
Dann sind $f_*, g_* : X_\bullet \to Y_\bullet$ kettenhomotop.

Kor.
- Seien $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen. Dann gilt
$$f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y).$$
- Homotopieäquivalente Räume besitzen isomorphe Homologiegruppen.

Def. Ein **Unterkomplex** $D_\bullet$ von $C_\bullet$ ist eine Folge von Untergruppen $D_n \subset C_n$, sodass gilt: $\partial D_n \subset D_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

Def. Ist $D_\bullet \subset C_\bullet$ ein Unterkomplex, so ist der **Quotientenkomplex** $C_\bullet/D_\bullet$ definiert durch

$$(C_\bullet/D_\bullet)_n := C_n/D_n, \quad \partial_n^{C/D}[c] := [\partial_n^C(c)].$$

Def. Sei (X, A) ein Raumpaar. Der **relative singuläre Kettenkomplex** $C_\bullet(X, A)$ ist definiert als Quotientenkomplex $X_\bullet/A_\bullet$. Dessen Homologiegruppen heißen **relative singuläre Homologiegruppen** $H_n(X, A)$.

Bem. H_n ist ein Funktor $\mathbf{Top}(2) \to \mathbf{Ab}$.

Def. Eine Homotopie zwischen Abbildungen von Raumpaaren $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ ist eine Homotopie $H : [0, 1] \times X \to Y$ zwischen f und g mit $H([0, 1] \times A) \subset Y$.

Prop. Homotope Abbildungen von Raumpaaren induzieren dieselbe Abbildung in relativer Homologie.

Def. Ein Kettenkomplex heißt **exakt** (oder **azyklisch**), falls seine Homologiegruppen alle Null sind, d. h. $\forall n \in \mathbb{N} : \operatorname{im} \partial_{n+1} = \ker \partial_n$.

Def. Eine **kurze exakte Sequenz** (k. e. S.) ist ein exakter Kettenkomplex der Gestalt

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Def. Eine **kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen** ist ein Diagramm der Form $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$, welche in jedem Grad eine kurze exakte Sequenz $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ ist.

Bem. Ist (X, A) ein Raumpaar, so erhält man eine kurze ex. Sequenz

$$0 \to C_\bullet(A) \to C_\bullet(X) \to C_\bullet(X, A) \to 0.$$

Für ein Raumtripel (X, A, U) erhält man eine k. e. S.

$$0 \to C_\bullet(A, U) \to C_\bullet(X, U) \to C_\bullet(X, A) \to 0.$$

Prop. Die ex. Sequenz $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$ induziert in jedem Grad einen sogenannten **verbindenden Homomorphismus** $\partial_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$, sodass die Sequenz

$$\ldots \to H_n(A) \to H_n(B) \to H_n(C) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(B) \to \ldots$$

exakt ist. Diese Sequenz wird **lange exakte Sequenz** genannt.

Kor. Sei (X, A) ein Raumpaar. Dann gibt es Homomorphis- men $\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$, sodass die Sequenz

$$\ldots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \to \ldots \quad \text{exakt ist.}$$

Für ein Raumtripel (X, A, U) erhält man eine l. e. S.

$$\ldots \to H_n(A, U) \to H_n(X, U) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, U) \to \ldots$$

Def. Die **reduzierte Homologie** $\tilde{H}_*(X)$ eines topologischen Raumes X ist die Homologie des Kettenkomplexes

$$\ldots \to C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0,$$

wobei ϵ der sogenannte **Augmentierungshomomorphismus** ist:

$$\epsilon : \sum_{\sigma \in \Delta_0(X)} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_\sigma \lambda_\sigma \in \mathbb{Z}.$$

Prop.
- $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ für $n \geq 1$

- Ist $X = \emptyset$, so ist $\tilde{H}_n(X) = 0$ für $n \geq 0$ und $\tilde{H}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$.
- Ist $X \neq \emptyset$, so ist $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus \mathbb{Z}$, jedoch nicht kanonisch.
- Ist X kontrahierbar, so gilt $\tilde{H}_n(X) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Ist (X, A) ein Raumpaar, so gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \tilde{H}_0(A) \to \tilde{H}_0(X) \to \tilde{H}_0(X, A) \to \tilde{H}_{-1}(A) \to \tilde{H}_{-1}(X) \to 0$$

Satz. Sei (X, A) ein Raumpaar, $U \subset A$ mit $\overline{U} \subset \operatorname{int} A$. Dann induziert die Inklusion $(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen

$$H_n(X - U, A - U) \to H_n(X, A) \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Bem. Eine äquivalente Aussage zum Ausschneidungssatz ist: Seien $A, B \subset X$ mit $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$. Dann induziert die Inklusion $(B, A \cap B) \to (X, A)$ Isomorphismen in Homologie.

Def (**Eilenberg-Steenrod-Axiome**).
Eine **Homologietheorie** ist eine Folge von Funktoren

$$H_n : \mathbf{Top}(2) \to \mathbf{Ab},$$

und natürlichen Transformationen

$$\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, \emptyset)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- **Homotopieinvarianz**: Seien $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotop als Abb. von Raumpaaren. Dann gilt $f_* = g_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.
- **Lange exakte Sequenz**: Die Inklusionen $A \hookrightarrow X$ und $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ induzieren eine l.e.S.

$$\ldots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \to \ldots$$

- **Ausschneidung**: Ist $U \subset A$ mit $\overline{U} \subset \operatorname{int}(A)$, dann induziert die Inklusion $(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ Isomorphismen

$$H_n(X - U, A - U) \to H_n(X, A).$$

Def. Die **Koeffizienten** einer Homologietheorie sind die Homologiegruppen $H_n(pt)$ des einpunktigen Raums. Eine Homologietheorie heißt **gewöhnlich**, falls $H_n(pt) = 0$ für $n > 0$.

Bem. Manchmal fordert man auch das Summenaxiom: Für eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von topologischen Räumen induzieren die Inklusionen $X_i \hookrightarrow X$ in die disjunkte Summe X aller X_i einen Iso

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) \xrightarrow{\cong} H_n(X).$$

Bem. Die singuläre Homologie ist eine gewöhnliche Homologietheorie, die das Summenaxiom erfüllt.

Def. Ein Raumpaar (X, A) heißt **gut**, falls $A \neq \emptyset$, abgeschlossen und starker Deformationsretrakt einer offenen Umgebung ist.

Prop. Sei (X, A) ein gutes Raumpaar. Dann induziert $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ Isomorphismen

$$H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) = \tilde{H}_n(X/A) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Satz. Für $n \geq 0$ ist S^n kein Retrakt von D^{n+1}.

Kor (**Brouwerscher Fixpunktsatz**).
Jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ hat einen Fixpunkt.

Satz (Topologische Invarianz der Dimension).
Seien $U \overset{\circ}{\subset} R^n$ und $V \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R}^m$ homöomorph. Dann gilt $n = m$.

Def. Sei $f : S^n \to S^n$ stetig. In Homologie induziert f eine Abbildung $H_n(f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben ist. Diese Zahl heißt **Abbildungsgrad** $\deg f$ von f.

Beob.
- $\deg(f \circ g) = (\deg f) \cdot (\deg g)$.
- $H_n(f : S^n \to S^n)$ ist genau dann ein Iso, wenn $\deg(f) = \pm 1$.

Prop. Sei $f : S^n \to S^n$ die Spiegelung an einer Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt $\deg f = -1$.

Def. Ein **Vektorfeld** über S^n ist eine stetige Abbildung $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, sodass $v(x) \perp x$ für alle $x \in S^n$.

Satz. Die Sphäre S^n, $n \geq 1$ hat genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.

Satz. Sei n gerade und wirke eine Gruppe G frei auf S^n. Dann ist entweder $G = \{e\}$ oder $G \cong \mathbb{Z}_2$.

Def. Sei $f : S^n \to S^n$ stetig, $x \in S^n$, sodass eine Umgebung U von x existiert mit $U \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Mit Ausschneidung und der l.e.S. erhält man Isomorphismen

$$H_k(U, U - \{x\}) \cong H_k(S^n, S^n - \{x\}) \cong \tilde{H}_k(S^n) \cong \mathbb{Z}.$$

Die induzierte Abb. $f_* : H_n(U, U - \{x\}) \to H_n(S^n, S^n - \{f(x)\})$ ist gegeben durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl. Diese heißt **lokaler Abbildungsgrad** $(\deg f|x)$ von f bei x.

Prop. Sei $f : S^n \to S^n$ stetig und $y \in S^n$ mit $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann ist $\deg f|x_i$ definiert für $i = 1, \ldots, n$ und es gilt

$$\deg f = \sum_{i=1}^{n} \deg f|x_i.$$

Prop. Für $f : S^n \to S^n$ stetig gilt $\deg f = \deg(\Sigma f : \Sigma S^n \to \Sigma S^n)$.

Prop. Seien $A, B \subset X$ mit $X = A \cup B$. Angenommen, es gibt Umgebungen U von A und V von B, sodass die Inklusionen $A \hookrightarrow U$, $B \hookrightarrow V$ und $A \cap B \hookrightarrow U \cap V$ Homotopieäquivalenzen sind. Dann existiert die **Mayer-Vietoris-Sequenz**

$$\ldots \to H_*(A \cap B) \to H_*(A) \oplus H_*(B) \to H_*(X) \to$$
$$\to H_{*-1}(A \cap B) \to \ldots$$

Prop (Verallg. Jordanscher Kurvensatz). Sei $S \subset S^n$ ein Teilraum, der zu einer Sphäre $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ homöomorph ist. Dann ist $k \leq n$ und

$$\tilde{H}_i(S^n - S) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } i = n - k - 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kor (Jordanscher Kurvensatz).
Sei $\phi : S^1 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Einbettung. Dann besteht $\mathbb{R}^2 - \phi(S^1)$ aus zwei Komponenten, von denen genau eine beschränkt ist.

Satz (Invarianz des Gebietes). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und ein Homöomorphismus auf das Bild. Dann ist $\phi(U)$ offen.

Def. Ein Δ-Komplex ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Familie $(\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \to X)_{\alpha \in I}$ von stetigen Abbildungen (genannt **charakteristische Abbildungen**), sodass:

- Die Restriktionen $\sigma_\alpha|\operatorname{int}(\Delta^{n(\alpha)}) : \operatorname{int}(\Delta^{n(\alpha)}) \to X$ sind injektiv und jeder Punkt $x \in X$ liegt im Bild (genannt **offenes Simplex**) von genau einer solchen Restriktion.
- Ist $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \to X$ eine char. Abb. und $\tau \subset \Delta^{n(\alpha)}$ eine $(n(\alpha) - 1)$-dimensionale Seite, dann ist $\sigma_\alpha|\tau : \Delta^{n(\alpha)-1} \to X$ wieder eine charakteristische Abbildung.
- $A \subset X$ ist offen $\iff$ alle $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ sind offen in $\Delta^{n(\alpha)}$.

Bem. Jeder endliche geordnete Simplizialkomplex trägt die Struktur eines Δ-Komplexes.

Bem. Alternativ ist ein Δ-Komplex ein kontravarianter Funktor von der Kategorie Δ der endlichen total geordneten Mengen mit streng monotonen Abbildungen in die Kategorie der Mengen.

Def. Für einen Δ-Komplex X sei $C_n^\Delta(X)$, die freie abelsche Gruppe erzeugt von den Abbildungen $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \to X$ mit $n(\alpha) = n$. Diese Gruppen bilden einen Simplizialkomplex. Die Homologiegruppen dieses Komplexes heißen **simpliziale Homologiegruppen** $H_*^\Delta(X)$.

Def. Ein **Teilkomplex** eines Δ-Komplexes ist eine Teilmenge der charakteristischen Abbildungen (zusammen mit der Vereinigung der Bilder dieser Abbildungen als topologischer Raum), die selbst die Axiome für einen Delta-Komplex erfüllt.

Def. Das **k-Skelett** eine Δ-Komplexes ist der Teilkomplex, der aus den Bildern aller i-Simplizes besteht, wobei $i \leq k$.

Def. Die **relative Homologie** $H_n^\Delta(X, A)$ des Δ-Komplexes X bezüglich eines Teilkomplexes A ist die Homologie des Quotientenkomplexes $C_n^\Delta(X)/C_n^\Delta(A)$.

Satz. Sei X ein Δ-Komplex und $A \subset X$ ein Unterkomplex. Dann induziert die Inklusion $C_*^\Delta(X, A) \hookrightarrow C_*(X, A)$ Isos in Homologie.

Lem. Für $n \geq 0$ gilt

$$H_i^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong H_i(\Delta^n, \partial\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{für } i = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und die Homologieklasse von $\mathrm{id} : \Delta^n \to \Delta^n$ erzeugt sowohl $H_n^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ als auch $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$

Lem (**Fünferlemma**). Sei folgendes kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Angenommen, α, β, δ und ϵ sind Isomorphismen.
Dann ist auch γ ein Isomorphismus.

Def. Ein **CW-Komplex** ist ein topologischer Raum X mit einer Folge von abgeschlossenen Unterräumen

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots \subset X, \quad \bigcup_{i \geq 0} X^i = X,$$

genannt **i-Skelette** X^i, sodass gilt:

- X^0 ist eine diskrete Menge von Punkten.
- Für alle $n \geq 1$ gibt es eine Familie von **Anheftungsabb'en** $(\phi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{n-1})_{\alpha \in I(n)}$ (dabei ist D^n_α eine Kopie von D^n), sodass
$$X^n = X^{n-1} \cup_{(\phi_\alpha)_{\alpha \in I(n)}} \coprod_{\alpha \in I(n)} D^n_\alpha.$$
- X trägt die Finaltopologie bzgl. obiger Filtrierung, d. h. $A \subset X$ ist abgeschlossen $\iff$ alle $A \cap X^i$ sind abgeschlossen.

Def. Ein CW-Komplex heißt **endlich-dimensional**, falls $X^i = X$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Er heißt **endlich**, falls er insgesamt nur endlich viele Anheftungsabb'en besitzt (dann ist er insbesondere endlich-dim).

Prop. CW-Komplexe sind normal (und damit Hausdorffsch).

Def. Die Anheftungsabb'en $\phi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{n-1}$ lassen sich kan. fortsetzen zu **charakteristischen Abb'en** $\Phi_\alpha : D^n_\alpha \to X^n \subset X$. Die Bilder dieser Abb'en werden **abgeschlossene Zellen** genannt. Die Bilder der Einschränkungen $\Phi_\alpha|\operatorname{int}(D^n_\alpha)$ heißen **Zellen** von X und werden mit e^n_α bezeichnet.

Prop.
- $\Phi_\alpha|\operatorname{int}(D^n_\alpha) : \operatorname{int}(D^n_\alpha) \to X^n$ ist eine topologische Einbettung (d. h. ein Homöo auf das Bild).
- Jeder Punkt aus X liegt in genau einer Zelle.
- Der Abschluss einer Zelle ist eine abgeschlossene Zelle.
- Jede abgeschlossene Zelle trifft nur endlich viele Zellen.

Def. Ein **Unterkomplex** eines CW-Komplexes ist eine Teilmenge $A \subset X$, die selbst ein CW-Komplex ist, und zwar so, dass alle anheftenden Abb'en von A auch anheftende Abb'en von X sind.

Def. Ein **CW-Paar** ist ein Raumpaar (X, A), wobei X ein CW-Komplex und A ein Unterkomplex von X ist.

Prop.
- X^n ist ein Unterkomplex von X und von X^m für $m \geq n$.
- CW-Raumpaare sind gute Raumpaare.
- Jede Zelle eines CW-Komplexes ist in einem endlichen Unterkomplex enthalten.

Def. Die **Einpunktvereinigung** einer Familie $(X_i, x_i)_{i \in I}$ von punktierten Räumen ist

$$\bigvee_{i \in I} X_i := \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) / \{x_i \,|\, i \in I\}.$$

Man erhält Projektionen $q_j : \vee_i X_i \to X_j$ durch Abbilden aller Punkte aus X_i, $i \neq j$. auf den Basispunkt x_j.

Prop. Sei $(X_i, x_i)_{i \in I}$ eine Familie von punktierten Räumen, sodass alle Raumpaare $(X_i, \{x_i\})$ gut sind. Dann induzieren die Inklusionen $X_i \hookrightarrow \vee_i X_i$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \tilde{H}_n(X_i) \cong \tilde{H}_n(\vee_i X_i) \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Lem. Sei X ein CW-Komplex. Dann gilt

$$X^n / X^{n-1} \approx \vee_{i \in I(n)} S^n.$$

Kor. • $H_n(X^n/X^{n-1}) = \oplus_{i \in I(n)} \mathbb{Z}$, • $H_{\neq n}(X^n/X^{n-1}) = 0$

Prop. • $H_{>n}(X^n) = 0$, • Für $k < n$ induziert die Inklusion $X^n \hookrightarrow X$ Isomorphismen $H_k(X^n) \cong H_k(X)$.

Def. Der **zelluläre Kettenkomplex** eines CW-Komplexes X ist

$$C^{\text{cell}}_n(X) := H_n(X^n, X^{n-1})$$

mit dem verbindenden Homomorphismus

$$\partial_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

aus der l. e. S. des Raumtripels (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) als Randabb. Dabei setzt man $X^{-2} := \emptyset$ und $\partial_0 = 0$.
Die Homologiegr. dieses Komplexes werden mit $H^{\text{cell}}_*(X)$ bezeichnet.

Prop. Für jeden CW-Komplex X gilt $H^{\text{cell}}_*(X) \cong H_*(X)$.

Kor. Hat der CW-Komplex X keine n-Zellen so ist $H_n(X) = 0$. Wenn X k-viele n-Zellen besitzt, dann wird $H_n(X)$ von höchstens k Elementen erzeugt.

Bem. Wir wählen Erzeuger t_n von $H_n(D^n, \partial D^n)$ und s_n von $\tilde{H}_n(S^n)$ wie folgt: Für $n = 0$ wählen wir einen beliebigen Erzeuger von $H_0(S^0)$. Angenommen, wir haben einen Erzeuger von $s_i \in H_i(S^i)$ bereits definiert. Der verbindende Homomorphismus $\partial_i : H_{i+1}(D^{i+1}, S^i) \to H_i(S^i)$ aus der l. e. S. des Raumpaares (D^{i+1}, S^i) ist ein Isomorphismus. Sei der Erzeuger t_{i+1} von $H_{i+1}(S^{i+1})$ das Urbild von s_i unter ∂_i. Wir wählen s_{i+1} als das Bild von t_{i+1} unter dem Isomorphismus

$$H_{i+1}(D^{i+1}, S^i) \cong H_{i+1}(D^{i+1}/S^i) \cong H_{i+1}(S^{i+1})$$

Dabei seien die Homöomorphismen $D^{i+1}/S^i \approx S^{i+1}$ fest gewählt. Wir erhalten Isomorphismen

$$C^{\text{cell}}_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \bigoplus_{I(n)} H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \bigoplus_{I(n)} \mathbb{Z}.$$

Sei nun e^n_α eine n-Zelle mit anheftender Abb. $\phi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$ und e^{n-1}_β eine $(n{-}1)$-Zelle von X. Sei $d_{\alpha\beta}$ der Abbildungsgrad von

$$S^{n-1} \xrightarrow{\phi_\alpha} X^{n-1} \to X^{n-1}/X^{n-2} \cong \vee_{i \in I(n)} S^{n-1} \xrightarrow{q_\beta} S^{n-1}.$$

Bezeichne mit e^n_α den α-ten Erzeuger von $C^{\text{cell}}_n(X)$ (mit $\alpha \in I(n)$). Dann haben wir:

Prop. Der zelluläre Randoperator ist gegeben durch

$$\partial_n(e^n_\alpha) = \sum_{\beta \in I(n-1)} d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta.$$

Die Summe ist dabei endlich.

Def. Der singuläre Kettenkomplex mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe G eines topologischen Raumes X ist def. durch

$$C_n(X; G) := \{ \text{ formale endl. Linearkomb. } \sum_{\sigma \in \Delta_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \text{ mit } \lambda_\sigma \in G \}$$

Die Randabbildung ist ganz wie beim gewöhnlichen Kettenkomplex ($G = \mathbb{Z}$) definiert. Die Homologie dieses Komplexes heißt **singuläre Homologie mit Koeffizienten in G**. Sie ist eine gewöhnliche Homologietheorie im Sinne von Eilenberg und Steenrod. Man erhält **reduzierte Homologie mit Koeffizienten in G**, indem man die Komplex von dem mit dem Augmentierungshomomorphismus

$$\epsilon : C_0(X; G) \to G, \quad \sum_{\sigma \in \Delta_0(X)} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in \Delta_0(X)} \lambda_\sigma$$

erweiterten Kettenkomplex mit Koeffizienten in G nimmt.

Prop. Ist $f : S^n \to S^n$ stetig vom Grad n, so ist

$$f_* : \tilde{H}_n(S^n; G) \to \tilde{H}_n(S^n; G)$$

durch Multiplikation mit n gegeben.

Def. Ist X ein CW-Komplex, so ist der zelluläre Kettenkomplex mit Koeffizienten in G definiert durch

$$C^{\text{cell}}_n(X) := H_n(X^n, X^{n-1}; G).$$

Die Randabbildung ∂^{cell}_n ist der verbindende Homomorphismus in der l. e. S. zum Raumtripel (X^n, X^{n-1}, X^{n-2}) mit Koeff. in G.
Es gilt nach Wahl von passenden Erzeugern:

$$\partial^{\text{cell}}_n(e^n_\alpha) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e^{n-1}_\beta.$$

Def. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine endliche Überlagerung mit Blätterzahl k. Sei $\tau_n : C_n(X) \to C_n(\tilde{X})$ die Abbildung, die jedes n-Simplex auf die Summe seiner k möglichen Lifte abbildet. Dann bildet τ_* eine Kettenabbildung und $p_* \circ \tau_* : C_*(X) \to C_*(X)$ ist durch Multiplikation mit k gegeben. Die von τ induzierte Abbildung $\tau_* : H_n(X) \to H_n(\tilde{X})$ heißt **Transferhomomorphismus**.

Def. Ist nun $k = 2$ so gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to C_*(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} C_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} C_*(X; \mathbb{Z}_2) \to 0.$$

Die davon induzierte lange exakte Sequenz ist die **Transfersequenz**

$$\ldots \to H_*(X; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_*} H_*(X; \mathbb{Z}_2) \to H_{*-1}(X; \mathbb{Z}_2) \to \ldots$$

Def. Eine Abbildung $f : S^n \to S^n$ heißt **gerade** / **ungerade**, falls

$$\forall\, x \in S^n \;:\; f(-x) = f(x) \;\;/\;\; f(-x) = -f(x).$$

Prop. Jede (un)gerade Abbildung hat (un)geraden Abbildungsgrad.

Satz (**Borsuk-Ulam**)**.** Sei $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gibt es $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

Satz (Ham-Sandwich-Theorem)**.**
Seien $K_1, \ldots, K_n \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguemessbar und beschränkt. Dann gibt es eine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$, die jeden Teilraum genau halbiert.

Def. Die n-te **Bettizahl** $b_n(X)$ eines topologischen Raumes X ist der Rang von $H_n(X)$ (falls dieser endlich ist).

Def. Sei X ein CW-Komplex. Für $n \geq 0$ sei c_n die Anzahl der n-Zellen in X. Dann heißt

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \quad \textbf{Eulercharakteristik} \text{ von } X.$$

Satz. Es gilt $\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n(X)$.

Bsp. Die **orientierte Fläche vom Geschlecht** g, Σ_g, entsteht durch Verkleben der Randsegmente

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \ldots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$$

eines $4g$-Eckes. Es gilt $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$.

Kor (Eulersche Polyederformel)**.** Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ ein konvexes Polyeder. Sei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen. Dann ist $e - k + f = 2$.

Bem. Sind X und Y CW-Komplexe, X oder Y lokal kompakt, dann ist auch $X \times Y$ ein endlich-dimensionaler CW-Komplex. Ist weder X noch Y lokal kompakt, so gibt es auch einen Produktkomplex, doch hat dieser eine i. A. feinere Topologie als der Produktraum $X \times Y$.

Prop. Seien X und Y endliche CW-Komplexe. Dann gilt

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

Def. Sei X ein endlicher Simplizialkomplex und $f : X \to X$ stetig. Wir erhalten für alle $n \geq 0$ eine induzierte Abbildung

$$f_n : H_n(X)/\text{Torsion} \to H_n(X)/\text{Torsion}.$$

Die **Lefschetzzahl** von f ist definiert als Summe

$$L(f) := \sum (-1)^n \operatorname{tr} f_n.$$

Bsp. $L(\mathrm{id}_X) = \chi(X)$

Satz (**Lefschetzer Fixpunktsatz**)**.**
Wenn $L(f) \neq 0$, dann hat f einen Fixpunkt.

Def. Eine n-dimensionale topologische **Mannigfaltigkeit** ist ein Hausdorffraum M, sodass jeder Punkt in M eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist.

Bem. Man fordert oft zusätzlich, dass M das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Def. Eine kompakte (randlose) Mft heißt **geschlossen**.

Def. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißt

$$H_n(X|A) := H_n(X, X - A)$$

lokale Homologie von X bei A.

Def. Sei M eine n-Mannigfaltigkeit. Eine **lokale Orientierung** von M bei $x \in M$ ist gegeben durch Wahl eines Erzeugers

$$\mu_x \in H_n(M|x) \cong \mathbb{Z}.$$

Lem. Eine Wahl einer lokalen Orientierung bei $x \in \mathbb{R}^n$ legt eindeutig eine lokale Orientierung für alle $y \in \mathbb{R}^n$ fest.

Def. Sei M eine Mft. Eine **Orientierung** von M ist eine Abbildung

$$x \in M \quad \mapsto \quad \mu_x \in H_n(M|x),$$

sodass für alle $x \in M$ eine offene Kugel U um x und ein Erzeuger $\mu_U \in H_n(X|U)$ existiert, sodass für alle $y \in U$ die lokale Orientierung μ_y durch Einschränkung von μ_U gegeben ist.

Def. Eine Mft heißt **orientierbar**, wenn eine Orientierung existiert.

Prop. Eine zshgde orientierbare Mft hat genau zwei Orientierungen.

Def. Sei M eine n-Mft. Setze

$$\tilde{M} := \{\mu_x \mid x \in M \text{ und } \mu_x \in H_n(M|x) \text{ ist lokale Orientierung an } x.\}$$

Die Topologie auf $\tilde{M}$ wird erzeugt von folgenden Mengen:

$$\{\mu_U|_y \mid y \in U\} \subset \tilde{M} \quad \text{mit } U \subset M \text{ offen, } \mu_U \in H_n(M|U)$$

ist offen. Dies definiert eine zweiblättrige Überlagerung $\tilde{M}$ von M.

Prop. $\tilde{M}$ ist orientierbar.

Prop. Sei M eine Mft. Dann ist M genau dann orientierbar, wenn $\tilde{M} \to M$ eine triviale Überlagerung ist.

Kor. Ist M eine zshgde Mft und besitzt $\pi_1(M)$ keine Untergruppe vom Index 2, so ist M orientierbar.

Prop. Sei M eine kompakte zshgde n-Mft.

- Falls M orientierbar ist, dann ist für alle $x \in M$ die kanonische Abb. $H_n(M) \to H_n(M|x)$ ein Iso. Insbesondere gilt $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$.
- Falls M nicht orientierbar ist, gilt $H_n(M) = 0$.
- $H_n(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ unabhängig von Orientierbarkeit.
- $H_i(M) = 0$ für $i > n$.

Def. Sei M ein n-Mft und G eine abelsche Gruppe.
Eine **verallgemeinerte G-Orientierung** ist eine Zuordnung

$$x \in M \quad \mapsto \quad \mu_x \in H_n(M|x; G),$$

sodass für alle $x \in M$ eine offene Kugel U um x und ein Element $\mu_U \in H_n(X|U)$ existiert, sodass für alle $y \in U$ die lokale Orientierung μ_y durch Einschränkung von μ_U gegeben ist.

Prop. Sei M eine zshgde n-Mft. Dann ist M genau dann orientierbar, wenn es eine verallgemeinerte $\mathbb{Z}$-Orientierung von M gibt, die an einem Punkt von 0 verschieden ist.

Lem. Sei M eine n-Mft, G eine ab. Gruppe und $A \subset M$ kompakt.

- Ist $x \mapsto \mu_x$ eine verallgemeinerte G-Orientierung von M, so gibt es genau eine Klasse $\alpha_A \in H_n(M|A; G)$, deren Bild in $H_n(M|x; G)$ für alle $x \in M$ mit μ_x übereinstimmt.
- $H_i(M|A; G) = 0$ für $i > n$.

Kor. Sei M eine zshgde kompakte n-Mft. Dann ist M genau dann orientierbar, wenn $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$. Dann entspricht jeder Erzeuger von $H_n(M)$ einer Orientierung von M. Andernfalls gilt $H_n(M) = 0$.

Def. Sei M eine zshgde, kompakte, orientierte n-Mft. Dann wird der gewählte Erzeuger $[M] \in H_n(M)$ **Fundamentalklasse** genannt.

Prop. Sei M eine zshgde nichtkompakte n-Mft. Dann ist $H_{\geq n}(M; G) = 0$ für beliebige Koeffizienten G.

Satz. Sei M eine kompakte n-Mft. Dann ist $H_*(M; \mathbb{Z})$ in allen Graden endlich erzeugt und $H_{>n}(M; \mathbb{Z}) = 0$.

Def. Die **Eulercharakteristik** einer kompakten n-Mft ist

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^{n} \operatorname{rk} H_i(M; \mathbb{Z}) = \sum_{i=0}^{n} b_i.$$

Def. Ein topol. Raum X heißt **lokal zusammenziehbar**, falls für jede Umgebung $U \subset X$ eines beliebigen Punktes $x \in U$ eine weitere Umgebung $V \subset U$ von x existiert, sodass die Inklusion $V \hookrightarrow U$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

Lem. Mannigfaltigkeiten sind lokal zusammenziehbar.

Satz. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ lokal zusammenziehbar und abgeschlossen. Dann gibt es eine Umgebung $U \supset K$ von K, sodass die Inklusion $K \hookrightarrow U$ ein Retrakt ist.

Def. Ein topol. Raum X ist ein **Euklidischer Umgebungsretrakt**, falls eine topol. Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ existiert und für jede solche Einbettung das Bild Retrakt einer offenen Umgebung ist.

Kor. Kompakte topologische Mften sind Euklidische Umgebungsretrakte.

Prop. Sei X ein CW-Komplex und Y ein topologischer Raum. Sei $f : X^{n-1} \to Y$ stetig. Dann sind äquivalent:

- f lässt sich zu einer stetigen Abbildung $X^n \to Y$ fortsetzen.
- Alle Kompositionen $f \circ \phi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to Y$ sind homotop zu konstanten Abbildungen. Hierbei sind $\phi_\alpha : \partial D_\alpha \to X^{n-1}$ die anklebenden Abbildung der n-Zellen.

Prop. Es gibt einen kanonischen Morphismus $h : \pi_1(X) \to H_1(X)$. Wenn X wegzusammenhängend ist, so ist h surjektiv und der Kern von h ist die Kommutator-Untergruppe $K(\pi_1(X, x_0))$. Wir erhalten dann einen Iso $\pi_1(X)_{\mathrm{ab}} \to H_1(X)$.

Def. Ein **Kokettenkomplex** C^* ist eine Folge $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\delta^n : C^n \to C^{n+1}$ mit der Eigenschaft $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$. Analog zu Kettenkomplexen sind **Kozykel**, **Koränder** und **Kohomologiegruppen** $H^n(C^*) := \ker \delta_n / \operatorname{im} \delta_{n-1}$ des Kokettenkomplex definiert.

Def. Sei (X, A) ein Raumpaar und G eine abelsche Gruppe. Dann heißt $(C^*(X, A; G), \delta^*)$ mit

$$C^n(X, A; G) := \operatorname{Hom}(C_n(X, A), G), \quad \delta^n := \operatorname{Hom}(\partial_{n+1}, G)$$

singulärer (rel.) Kokettenkomplex von X mit Koeffizienten in G. Die n-te **singuläre Kohomologie** mit Koeffizienten in G ist

$$H^n(X, A; G) := H^n(C^*(X, A; G)).$$

Notation.
- $H^n(X; G) := H^n(X, \emptyset; G)$,
- $H^n(X, A) := H^n(X, A; \mathbb{Z})$

Bem. $H^n(-;G)$ ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Raumpaare nach **Ab**.

Lem. Für jede abelsche Gruppe G ist $\operatorname{Hom}(-,G)$ linksexakt: Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. von abelschen Gruppen. Dann ist

$$0 \to \operatorname{Hom}(C,G) \to \operatorname{Hom}(B,G) \to \operatorname{Hom}(A,G) \qquad \text{exakt.}$$

Def. Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. in einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Die Sequenz heißt **spaltend**, falls sie isomorph zur k. e. S. $0 \to A \to A \oplus C \to C$ ist.

Prop. Für eine Sequenz $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ sind äquivalent:

- Die Sequenz spaltet.
- Es existiert eine Retraktion $r : B \to A$ mit $r \circ f = \mathrm{id}_A$.
- Es existiert ein Schnitt $s : C \to B$ mit $g \circ s = \mathrm{id}_C$.

Prop. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor und $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine spaltende k. e. S. in $\mathcal{A}$. Dann ist auch $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ spaltend exakt.

Bem. Sei (X,A) ein Raumpaar. Man erhält aus der k. e. Sequenz

$$0 \to C^n(A) \to C^n(X) \to C^n(X,A) \to 0$$

durch Anwenden von $\operatorname{Hom}(-,G)$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to C^n(X,A;G) \to C^n(X;G) \to C^n(A;G) \to 0.$$

Daraus erhält man wiederum eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H^*(X,A;G) \to H^*(X;G) \to H^*(A;G) \to H^{*+1}(X,A;G) \to \ldots$$

Prop. Seien $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ homotope Abbildungen von Raumpaaren. Dann gilt $f^* = g^* : H^*(Y,B;G) \to H^*(X,A;G)$.

Satz. Sei (X,A) ein Raumpaar, $U \subset A$ mit $\overline{U} \subset \operatorname{int} A$. Dann induziert die Inklusion $(X-U, A-U) \hookrightarrow (X,A)$ Isomorphismen

$$H^n(X,A;G) \to H^n(X-U, A-U;G) \quad \text{für alle } n \geq 0.$$

Bem. Die kontrav. Funktoren $H^n(-;G) : \mathbf{Top}(2) \to \mathbf{Ab}$, $n \in \mathbb{Z}$ sind eine **Kohomologietheorie** im Sinne von Eilenberg & Steenrod.

Def. Die **reduzierte Kohomologie** $\tilde{H}^n(X;G)$ mit Koeff. in G eines topol. Raumes X ist die Homologie des Kokettenkomplexes, der durch Anwenden von $\operatorname{Hom}(-,G)$ aus dem augmentierten Komplex

$$\ldots \to C_2(X) \to C_1(X) \to C_0(X) \to \mathbb{Z} \to 0 \quad \text{entsteht.}$$

Prop. Sei $X = \cup_{i \in I} U_i$ die Zerlegung von X in Wegzshgskmpnnten. Dann induzieren die Inklusionen $U_i \hookrightarrow X$ einen kanonischen Iso

$$H^*(X;G) \cong \prod_{i \in I} H^*(U_i;G).$$

Satz. Seien $A, B \subset X$ mit $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) = X$. Dann gibt es in Kohomologie eine Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\ldots \to H^*(X;G) \to H^*(A;G) \oplus H^*(B;G) \to H^*(A \cap B;G) \to$$
$$\to H^{*+1}(X;G) \to \ldots$$

Def. Sei X ein Δ-Komplex und $A \subset X$ ein Unterkomplex. Dann ist $(C^*_\Delta(X,A;G), \delta^*)$ der Unterkomplex von $C^*(X,A;G)$ mit

$$C^n_\Delta(X,A;G) := \operatorname{Hom}(C^\Delta_n(X,A), G).$$

Die Homologie dieses Komplexes wird mit $H^*_\Delta(X,A;G)$ bezeichnet.

Prop. Die Inklusion $C^\Delta_*(X,A) \hookrightarrow C_*(X,A)$ induziert einen Iso

$$H^*(X,A;G) \to H^*_\Delta(X,A;G).$$

Def. Sei X ein CW-Komplex. Der **zelluläre Kokettenkomplex** $(C^*_{\mathrm{cell}}(X;G), \delta_{\mathrm{cell}})$ ist definiert durch

$$C^n_{\mathrm{cell}}(X,G) := H^n(X^n, X^{n-1};G)$$

mit δ_n dem verbindenden Homomorphismus in der l. e. Kohomologiesequenz des Raumtripels (X^{n+1}, X^n, X^{n-1}).

Prop. $H^*(C^*_{\mathrm{cell}}(X;G)) \cong H^*(X;G)$

Bem. $C_n(X;G) \cong C_n(X) \otimes G$

Prop. Für jede ab. Gruppe G ist der Funktor $- \otimes G$ rechtsexakt: Sei $0 \to A \to B \to C \to$ eine k. e. S. abelscher Gruppen. Dann ist

$$A \otimes G \to B \otimes G \to C \otimes G \to 0 \qquad \text{exakt.}$$

Def. Sei H eine ab. Gruppe. Eine **freie Auflösung** von H ist ein azyklischer Kettenkomplex

$$\ldots \to F_3 \to F_2 \to F_1 \to F_1 \to H \to 0 \quad (\text{kurz: } F_* \to H),$$

bestehend aus freien abelschen Gruppen F_i, $i \geq 0$.

Prop. Seien $F_* \to J$ und $G_* \to K$ freie Auflösungen. Dann existiert zu jedem Homomorphismus $\alpha : J \to K$ eine Kettenabbildung $\alpha_* : F_* \to K_*$, sodass $(F_0 \to K \xrightarrow{\alpha} J) = (F_0 \xrightarrow{\alpha_0} G_0 \to K)$. Die Kettenabbildung α_* ist eindeutig bis auf Kettenhomotopie.

Def. Seien G und H ab. Gruppen und $F_* \to H$ eine freie Auflösung.

$$\mathbf{Tor}_n(H,G) := H_n(F_* \otimes G), \quad \mathbf{Ext}^n(H,G) := H^n(\operatorname{Hom}(F_*, G)).$$

Prop. Die Definition von Tor_n und Ext^n hängt nicht von der Wahl der Auflösung ab (bis auf Isomorphie).

Prop. Tor_n und Ext^n definieren Funktoren

$$\operatorname{Tor}_n : \mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab},$$
$$\operatorname{Ext}^n : \mathbf{Ab}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}.$$

Prop. Jede abelsche Gruppe besitzt eine Auflösung der Länge ≤ 2.

Kor. $\operatorname{Tor}_{\geq 2}(G,H) = 0 = \operatorname{Ext}^{\geq 2}(G,H)$ für ab. Gruppen G, H

Notation. • $\operatorname{Tor}(G,H) := \operatorname{Tor}_1(G,H)$,
• $\operatorname{Ext}(G,H) := \operatorname{Ext}^1(G,H)$

Prop (Ext-Rechenregeln). • $\operatorname{Ext}^0(G,H) \cong \operatorname{Hom}(G,H)$
• $\operatorname{Ext}(\oplus_i H_i, G) \cong \prod_i \operatorname{Ext}(H_i, G)$ • $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) = G/nG$

- Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und H eine ab. Gruppe, so erhalten wir eine induzierte exakte Sequenz
$$0 \to \operatorname{Hom}(H,A) \to \operatorname{Hom}(H,B) \to \operatorname{Hom}(H,C) \to$$
$$\to \operatorname{Ext}(H,A) \to \operatorname{Ext}(H,B) \to \operatorname{Ext}(H,C) \to 0.$$

Prop (Tor-Rechenregeln). • $\operatorname{Tor}_0(A,B) \cong A \otimes B$
• $\operatorname{Tor}(A,B) \cong \operatorname{Tor}(B,A)$ • $\operatorname{Tor}(\oplus_i A_i, B) \cong \oplus_i \operatorname{Tor}(A_i, B)$
• $\operatorname{Tor}(A,B) \cong \operatorname{Tor}(T(A), B)$ mit $T(A) < A$ Torsionsuntergruppe
• $\operatorname{Tor}(A,B) = 0$, falls A torsionsfrei • $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}_n, A) \cong \ker(A \xrightarrow{\cdot n} A)$
• Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und H eine ab. Gruppe, so erhalten wir eine induzierte exakte Sequenz
$$0 \to \operatorname{Tor}(A,D) \to \operatorname{Tor}(B,D) \to \operatorname{Tor}(C,D) \to$$
$$\to A \otimes D \to B \otimes D \to C \otimes D \to 0.$$

Satz (**Universelles Koeffiziententheorem für Homologie**). Für jeden Raum X und für jede ab. Gruppe G existiert eine k. e. S.

$$0 \to H_n(X) \otimes G \to H_n(X;G) \to \operatorname{Tor}(H_{n-1}(X), G) \to 0.$$

Diese ist natürlich in X und G. Die Sequenz spaltet, der Spalt ist allerdings nur natürlich in G, nicht in X.

Satz (**Universelles Koeffiziententheorem für Kohomologie**). Für jeden Raum X und für jede ab. Gruppe G existiert eine k. e. S.

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X), G) \to H^n(X;G) \to \operatorname{Hom}(H_n(X), G) \to 0.$$

Diese ist natürlich in X und G. Die Sequenz spaltet, der Spalt ist allerdings nur natürlich in G, nicht in X.

Kor. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, die in Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten in jedem Grad Isomorphismen induziert. Dann gilt Gleiches für Homologie und Kohomol. mit bel. Koeffizienten G.

Satz. Für jeden Raum X und für jede endlich erzeugte abelsche Gruppe G existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to H^n(X;\mathbb{Z}) \otimes G \to H^n(X;G) \to \operatorname{Tor}(H^{n+1}(X;\mathbb{Z}), G) \to 0.$$

Def. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und X ein topol. Raum. Das **Cup-Produkt** $\phi \cup \psi \in H^{k+l}(X;R)$ von Koketten $\phi \in H^k(X;R)$ und $\psi \in H^l(X;R)$ ist definiert durch

$$(\phi \cup \psi)(\sigma) := \phi(\sigma|_{\langle v_0, \ldots, v_k \rangle}) \cdot \psi(\sigma|_{\langle v_k, \ldots, v_{k+l} \rangle}).$$

Lem. • $\partial(\phi \cup \psi) = (\partial\phi) \cup \psi + (-1)^k \phi \cup (\partial\psi)$
- Assoziativität: $(\phi \cup \psi) \cup \omega = \phi \cup (\psi \cup \omega)$
- Natürlichkeit: $f^*(\phi \cup \psi) = f^*(\phi) \cup f^*(\psi)$ für $f : X \to Y$ stetig
- Das Tensorprodukt induziert eine R-bilineare Abbildung
$$C^k(X;R) \times C^l(X;R) \to C^{k+l}(X;R)$$
und somit eine Kettenabbildung ausgehend von dem Tensorproduktkomplex $C^*(X;R) \otimes_R C^*(X;R) \to C^*(X;R)$.

Kor. Das Cup-Produkt induziert eine bilineare Abbildung

$$\cup : H^k(X;R) \times H^l(X;R) \to H^{k+l}(X;R).$$

Diese macht $H^*(X;R)$ zu einer graduierten, assoziativen R-Algebra mit Einselement $[\sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma \mapsto \sum_\sigma \lambda_\sigma] \in H^0(X;R)$

Bem. Seien $A, B \subset X$ offene Teilmengen oder Unterkomplexe. Dann gibt es ein **relatives Cup-Produkt**

$$C^k(X,A;R) \times C^l(X,B;R) \to C^{k+l}(X, A+B;R).$$

Satz. Sei R kommutativ. Dann ist $H^*(X;R)$ graduiert kommutativ, d. h. $\forall\,\alpha \in H^k(X;R) : \forall\,\beta \in H^l(X;R) : \alpha \cup \beta = (-1)^{kl}\beta \cup \alpha$.

Def. Seien X und Y topol. Räume. Das **Kreuzprodukt** (auch: externes Cup-Produkt) ist die Abbildung

$$\times : H^k(X;R) \times H^l(Y;R) \to H^{k+l}(X \times Y;R),\quad ([c],[d]) \mapsto [p_X^*(c) \cup p_Y^*(d)].$$

Für offene Teilmengen oder Unterkomplexe $A \subset X$ und $B \subset X$ gibt es ein relatives Kreuzprodukt

$$\times : H^k(X,A;R) \times H^l(Y,B;R) \to H^{k+l}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B;R).$$

Satz. Seien $k, l \geq 0$, $I^n := [0,1]^n$ der n-dimensionale Würfel. Seien $c^k \in H^k(I^k, \partial I^k;R) \cong R$ und $c^l \in H^l(I^l,\partial I^l;R) \cong R$ Erzeuger (als R-Modul). Dann bildet das Kreuzprodukt

$$\times : H^k(I^k,\partial I^k;R) \times H^l(I^l,\partial I^l;R) \to H^{k+l}(I^{k+l},\partial I^{k+l};R)$$

das Element (c^k, c^l) auf einen Erzeuger ab.

Satz. Seien $c \in H^k(\mathbb{R}^k|0;R)$ und $d \in H^l(\mathbb{R}^l|0;R)$ Erzeuger. Dann ist $c \times d$ ein Erzeuger von $H^{k+l}(\mathbb{R}^{k+l}|0;R)$.

Satz. Sei $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ (bzw. $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$) ein Erzeuger. Da $H^{n+1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) = 0$ (bzw. $H^{2n+2}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) = 0$), erhalten wir eine induzierte Abbildung

$$\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \to H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \quad / \quad \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1}) \to H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}).$$

Diese ist ein Isomorphismus von graduierten Ringen.

Def. Sei X ein topol. Raum und R ein kommutativer Ring. Für $k \geq l$ ist das **Cap-Produkt** die R-bilineare Abbildung

$$\cap : C_k(X;R) \times C^l(X;R) \to C_{k-l}(X;R),\quad (\sigma,\phi) \mapsto \phi(\sigma_{\langle v_0,\ldots,v_l\rangle}) \cdot \sigma_{\langle v_l,\ldots,v_{l+k}\rangle}.$$

Diese induziert in (Ko-)Homologie eine Abbildung

$$\cap : H_k(X;R) \otimes H^l(X;R) \to H_{k-l}(X;R).$$

Relative Version: Seien $A, B \subset X$ offen, dann gibt es

$$\cap : H_k(X, A \cup B;R) \times H^l(X,A;R) \to H_{k-l}(X,B;R).$$

Def. Das **Tensorprodukt** zweier Kettenkomplexe (C_*, ∂_*^C) und (D_*, ∂_*^D) ist definiert durch

$$(C \otimes D)_n := \bigoplus_{k+l=n} C_k \otimes D_l,$$
$$\delta_n^{C\otimes C'} := \bigoplus_{k+l=n} (\partial_k^C \otimes \mathrm{id}_{D_l} + (-1)^k \,\mathrm{id}_{C_k} \oplus \partial_l^D)$$

Satz (**Eilenberg-Zilber**)**.** Seien X und Y topologische Räume. Es ex. eine natürliche (in X und Y) Kettenhomotopieäquivalenz

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \underset{\theta}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} C_*(X \times Y).$$

Die Abbildungen $\times$ und θ sind im Grad 0 die kanonischen Abben.

Def. Seien A und B graduierte kommutative R-Algebren, R ein kommutativer Ring. Dann ist die graduiert kommutative Tensoralgebra $A \otimes_R B$ definiert durch

$$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{k+l=n} A_k \otimes B_l, \quad (a \otimes b)(c \otimes d) := (-1)^{|b||c|} ac \otimes bd.$$

Satz (**Künneth-Thm** für Homologie)**.** Es gibt eine nat. k. e. S.

$$0 \to (H_*(X) \otimes H_*(Y))_n \to H_n(X \times Y) \to \to (\mathrm{Tor}(H_*(X), H_*(Y)))_{n-1} \to 0$$

Die zweite Abbildung wird durch das Kreuzprodukt induziert. Die Sequenz spaltet, aber nicht natürlich.

Satz (**Künneth-Thm** für Kohomologie)**.** Sei R ein kommutativer Hauptidealring mit 1. Falls $H_*(X;R)$ oder $H_*(Y;R)$ in jedem Grad ein endlich erzeugter R-Modul ist, so gibt es eine natürliche k. e. S.

$$0 \to (H^*(X;R) \otimes H^*(Y;R))^n \to H^n(X \times Y;R) \to \to \mathrm{Tor}(H^*(X;R), H^*(Y;r))^{n+1} \to 0.$$

Dabei ist die zweite Abbildung das kohomologische Kreuzprodukt.

Def. Die **Kohomologie mit kompakten Träger** $H_c^*(X)$ mit Koeffizienten R eines topologischen Raumes X ist die Kohomologie des Kokettenkomplexes (C_c^*, δ_c^*) mit

$$C_c^i(X) := \varinjlim_{K \subset X} C^i(X, X-K;R),$$
$$\delta_c^i := \varinjlim_{K \subset X} (\delta^i : C^i(X,X-K;R) \to C^{i+1}(X,X-K;R))$$

Der direkte Limes läuft dabei über alle kompakten Teilmengen K.

Satz (**Poincaré-Dualität**)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M eine geschlossene orientierte n-Mft mit Orientierungsklasse $[M] \in H_n(M;R)$. Dann ist folgende Abb. ein Isomorphismus f. a. k:

$$D : H^k(M;R) \to H_{n-k}(M;R), \quad \alpha \mapsto [M] \cap \alpha.$$

Satz (Poincaré-Dualität, allg)**.** Sei R ein komm. Ring mit 1 und M eine orientierte n-Mft. Dann gibt es für alle kompakten Teilmengen $K \subset X$ einen Erzeuger $\mu_K \in H_n(M, M-K;R)$ der lokal zur gewählten Orientierung einschränkt. Die Abbildungen

$$H^k(M, M-K;R) \to H_{n-k}(M,M;R), x \mapsto \mu_k \cap x$$

induzieren im direkten Limes eine Dualitäts-Abbildung

$$D_M : H_c^k(M;R) \to H_{n-k}(M;R).$$

Diese ist ein Isomorphismus für alle k.

Bsp (Homologie von wichtigen Räumen)**.**

$$\tilde{H}_i(S^n) = \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n|\{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = 0, n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{wenn } i < n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } i = n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{wenn } i \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } i \leq 2n \text{ und } i \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(T^n) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{i}}$$

$$\tilde{H}_i(\text{Kleinsche Flasche}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{wenn } i = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$