Zusammenfassung Modellkategorien

Tim Baumann, http://timbaumann.info/uni-spicker

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie. Weiterführende Begriffe werden in der Homologische-Algebra-Zusammenfassung behandelt.

Die Ordinalzahlen

Def. Eine **Wohlordnung** auf einer Menge S ist eine Totalordnung auf S bezüglich der jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq S$ ein kleinstes Element besitzt. Eine wohlgeordnete Menge ist ein Tupel $(S, \leqslant)$ bestehend aus einer Menge S und einer Wohlordnung $\leqslant$ auf S.

Bem. Eine äquivalente Bedingung lautet: Es gibt in S keine nach rechts unendlichen absteigenden Folgen $\ldots > a_i > a_{i+1} > a_{i+2} > \ldots$

Bem. Äquivalent zum Auswahlaxiom ist:

Axiom (Wohlordnungssatz)**.** Auf jeder Menge ex. eine Wohlord.

Def. Zwei wohlgeordnete Mengen heißen isomorph, wenn es eine monotone Bijektion zwischen ihnen gibt.

Def. Eine **Ordinalzahl** ist eine Isomorphieklasse von wohlgeordneten Mengen.

Bem. Die Klasse aller Ordinalzahlen wird mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnet und ist eine echte Klasse, keine Menge. Sie ist selbst wohlgeordnet mittels

$$[(S, \leqslant_S)] \leqslant [(T, \leqslant_T)] \quad :\Longleftrightarrow \ \exists \,\text{inj. monotone Abb. } (S, \leqslant_S) \to (T, \leqslant_T).$$

Notation. • $0 := [\varnothing]$, • $n := [\{1, \ldots, n\}]$ für $n \in \mathbb{N}$, • $\omega := [\mathbb{N}]$ mit der jeweils kanonischen Ordnungsrelation.

Bem. Die ersten Ordinalzahlen sind

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

Prinzip (**Transfinite Induktion**)**.**
Sei $P : \mathcal{O}_n \to \mathbf{Prop}$ eine Aussage über Ordinalzahlen. Dann gilt:

$$(\forall \beta \in \mathcal{O}_n : (\forall \gamma < \beta : P(\gamma)) \implies P(\beta)) \implies \forall \alpha \in \mathcal{O}_n : P(\alpha)$$

Def. Arithmetik von Ordinalzahlen ist folgendermaßen definiert:
Für $\alpha = [(S, \leqslant_S)]$ und $\beta = [(T, \leqslant_T)] \in \mathcal{O}_n$ ist

- $\alpha + \beta := [(S \amalg T, \leqslant_{S \amalg T})]$, wobei gilt:
  $$\leqslant_{S \amalg T}|_{S \times S} := \leqslant_S, \quad \leqslant_{S \amalg T}|_{T \times T} := \leqslant_T, \quad S <_{S \amalg T} T.$$
- $\alpha \cdot \beta := [(S \times T, \leqslant_{S \rtimes T})]$ mit der lexikogr. Ordnung
  $$(s_1, t_1) \leqslant_{S \rtimes T} (s_2, t_2) := t_1 < t_2 \ \vee \ (t_1 = t_2 \wedge s_1 \leqslant_S s_2)$$
- $\alpha^\beta := [(\{\text{Abb. } f : S \to T \text{ mit } f(s) = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}, \leqslant)]$ mit
  $$f < g \quad :\Longleftrightarrow \ \exists \, t \in T : f(t) < g(t) \wedge (\forall \, t_2 >_T t : f(t_2) = g(t_2))$$

Bem. Es gibt drei Typen von Ordinalzahlen:

a) Die Null $0 := [(\varnothing, \leqslant)] \in \mathcal{O}_n$.
b) Die Nachfolgerzahl $\alpha + 1$ einer Zahl $\alpha \in \mathcal{O}_n$.
c) Die Limeszahl $\lim A := \sup A$ einer Teil*menge* $A \subset \mathcal{O}_n$.

Bem. Die Rechenop. können auch rekursiv definiert werden durch

a)	b)	c)
$\alpha + 0 := \alpha$	$\alpha + (\beta + 1) := (\alpha + \beta) + 1$	$\alpha + \lim A := \lim \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha \cdot 0 := 0$	$\alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$	$\alpha \cdot \lim A := \lim \{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma \in A\}$
$\alpha^0 := 1$	$\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$	$\alpha^{\lim A} := \lim \{\alpha^\gamma \mid \gamma \in A\}$

Def. Ein **Fast-Halbring** ist ein Tupel $(S, +, \cdot, 0)$, sodass $(S, +, 0)$ ein Monoid und $(S, \cdot)$ eine Halbgruppe ist mit
• $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, • $a \cdot 0 = 0$.

Lem (Rechenregeln in $\mathcal{O}_n$)**.** • $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$ • $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$
• $\alpha^0 = 1$ • $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ • $1^\alpha = 1$ • $\alpha^1 = \alpha$
• $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ • $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

- $\mathcal{O}_n$ ist ein Fast-Halbring (mit einer Klasse statt Menge)
- Das andere Distributivgesetz stimmt *nicht*!
- Weder Addition noch Multiplikation sind kommutativ.
- Addition und Mult. erlauben das Kürzen von Elementen nur links.
- Addition, Multiplikation und Potenzieren sind in beiden Argumenten monoton, allerdings nur im zweiten strikt monoton:
  $$\forall \beta < \gamma : \quad \alpha + \beta < \alpha + \gamma, \quad \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \ (\alpha > 0), \quad \alpha^\beta < \alpha^\gamma \ (\alpha > 1).$$

Lem. Jedes $\alpha \in \mathcal{O}_n$ kann geschrieben werden in **Cantor-NF**:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} c_1 + \omega^{\beta_2} c_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} c_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\beta_1 > \ldots > \beta_k \in \mathcal{O}_n$.

Kategorientheorie

Def. Eine **(schwache) 2-Kategorie** $\mathbb{C}$ besteht aus

- einer Ansammlung $\mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ von Objekten,
- für jedes Paar $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ von Objekten einer Kategorie
  $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & B \arrow[Rightarrow, from=U, to=D] \end{tikzcd} \right\},$$
- für jedes Tripel $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E})$ von Objekten einem Funktor
  $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{E}), \quad (F, G) \mapsto G \circ F,$$
- für jedes Objekt $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem Objekt $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$,
- für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ einem natürlichen Isomorphismus
  $$\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}} : \ - \circ (- \circ -) \Longrightarrow (- \circ -) \circ -,$$
  wobei beide Seiten Funktoren sind vom Typ
  $$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{F}),$$
- und für alle $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ natürlichen Isomorphismen
  $$\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ -) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})}, \quad \rho_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : (- \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})},$$

sodass folgende **Kohärenzbedingungen** erfüllt sind:

- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{F} \xrightarrow{K} \mathcal{G}) \in \mathcal{C}$ kommutiert
  $$\begin{tikzcd} K(H(GF)) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] \arrow[d, "K\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F}}"] & (KH)(GF) \arrow[r, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{G}}"] & ((KH)G)H \\ K((HG)F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{F},\mathcal{G}}"] & & (K(HG))F \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}} F"'] \end{tikzcd}$$
- Für alle $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}) \in \mathcal{C}$ kommutiert
  $$\begin{tikzcd} G \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \circ F) \arrow[rr, "\alpha_{\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{D},\mathcal{E}}"] \arrow[dr, "G\lambda_{\mathcal{C},\mathcal{D}}"] & & (G \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}) \circ F \arrow[dl, "\rho_{\mathcal{D},\mathcal{E}} F"] \\ & G \circ F & \end{tikzcd}$$

Bspe. • Die Kategorie **Cat** der Kategorien ist eine 2-Kategorie.

- Jede Kategorie $\mathcal{C}$ ist natürlich eine 2-Kategorie.
- Die Kategorie der Ringe $\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathbb{R}) := \{\,\text{Ringe mit Eins}\,\}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B) :=$ Kat. der B-A-Bimoduln mit $N \circ M := N \otimes_B M$ für $M \in \mathrm{Hom}(A, B)$ und $N \in \mathrm{Hom}(B, C)$. Dabei ist $\mathrm{Id}_A := A$.

Def. Eine **monoidale Kategorie** ist eine 2-Kategorie mit genau einem Objekt. In der Regel wird dann $\otimes$ anstelle von $\circ$ geschrieben.

Def. Sei $S : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Ein **Ende** $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ von S ist eine Familie $\alpha_c : E \to S(c, c)$, $c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von Morphismen in $\mathcal{A}$, sodass für alle $(f : c \to c') \in \mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & S(c,c) \arrow[dr, "S(\mathrm{id}_c, f)"] & \\ E \arrow[ur, "\alpha_c"] \arrow[dr, "\alpha_{c'}"'] & & S(c,c') \\ & S(c',c') \arrow[ur, "S(f, \mathrm{id}_{c'})"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, und E universell (terminal) mit dieser Eigenschaft ist. Sprechweise: Ein Ende ist ein terminaler S-**Keil**.

Notation. $E = \int_c S(c, c)$.

Bem. Enden sind spezielle Limiten, und umgekehrt sind Limiten spezielle Enden: $\lim F = \int_c F(c)$; der Integrand ist $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{A}$.

Bem. Das duale Konzept ist das eines ~~Anfangs~~ Koendes $\int^c S(c, c)$.

Bsp. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist

$$\int_c \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F(c), G(c)) \ \cong \ \mathrm{Nat}(F, G).$$

Satz (Fubini)**.** Sei $S : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ein Funktor. Dann gilt

$$\int_{(d,c)} S(d, d, c, c) \ \cong \ \iint_{dc} S(d, d, c, c),$$

falls die rechte Seite und $\int_c S(d, d', c, c)$ für alle $d, d' \in \mathcal{D}$ existieren.

Bsp. Sei R ein Ring, aufgefasst als präadditive Kategorie mit einem Objekt $*$. Ein additiver Funktor $R^{(\mathrm{op})} \to \mathbf{Ab}$ ist nichts anderes als ein R-Linksmodul (bzw. R-Rechtsmodul). Dann ist

$$A \otimes_R B \cong \int^{* \in R} A \otimes_{\mathbb{Z}} B.$$

Bsp (Ninja-Yoneda-Lemma)**.** Für jede Prägarbe $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ gilt

$$F \cong \int^{c} F(c) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

Def. Sei $\mathbb{C}$ eine 2-Kategorie. Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Eine **Adjunktion** von $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ist geg. durch Morphismen $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ (genannt **Eins**) und $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ (**Koeins**) mit $G\epsilon \circ \eta G = \mathrm{Id}_G$ und $\epsilon F \circ F\eta = \mathrm{Id}_F$. Man notiert $F \dashv G$.

Lem. R/L-Adjungierte sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bem. Seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Dann gilt $F \dashv G$ genau dann, wenn es einen nat. Iso zwischen den Hom-Mengen gibt:

$$\mathrm{Hom}(F \circ -, -) \cong \mathrm{Hom}(-, G \circ -)$$

Bsp. $\exists_f \dashv f^* \dashv \forall_f$

Bsp. Betrachte die 2-Kat. der Ringe. Dann gilt: Ein B-A-Modul M ist genau dann ein Linksadjungierter, wenn M als Rechts-A-Modul endlich erzeugt und projektiv ist.

Bem. Sind η und ϵ in $F \dashv G$ sogar Isomorphismen, so heißt $F \dashv G$ auch **adjungierte Äquivalenz**. Jede beliebige Äquivalenz lässt sich stets (unter Beibehaltung von F und G sowie einem der Morphismen ϵ, η) zu einer adj. Äquivalenz verfeinern.

Kan-Erweiterungen

Def. Sei $A \xleftarrow{T} M \xrightarrow{K} C$ ein Ausschnitt einer 2-Kategorie. Eine **Rechts-Kan-Erw.** (RKE) (R, ϵ) von T längs K besteht aus

- einem Morphismus $R : C \to A$
- einem 2-Morphismus $\epsilon : R \circ K \Rightarrow T$,

sodass gilt: Für alle Möchtegern-RKE $(\tilde{R} : C \to A, \epsilon : \tilde{R} \circ K \Rightarrow T)$ gibt es genau ein $\sigma : \tilde{R} \Rightarrow R$ mit $\epsilon \circ \sigma K = \tilde{\epsilon}$. Notation: $R = \mathrm{Ran}_K(T)$

Bem. (R, ϵ) ist RKE von T längs K $\iff$ $\mathrm{Hom}(\tilde{R}, R) \to \mathrm{Hom}(\tilde{R} \circ K, T)$ ist bijektiv für alle $\tilde{R} : C \to A$.

Prop. RKE sind eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Bsp. Die RKE eines bel. Morphismus $T : M \to A$ längs Id_M existiert stets und ist gegeben durch $(T, T \circ \mathrm{Id}_M \Rightarrow T)$.

Bsp. In der 2-Kategorie der Ringe existieren alle RKE:

$$\mathrm{Ran}_K(T) = (\mathrm{Hom}_M(K, T), \ \ ev : \mathrm{Hom}_M(K, T) \otimes_C K \Rightarrow T).$$

Bsp. Sei $K : \mathcal{M} \to \mathbf{1}$ der eindeutig best. Funktor. Sei $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ irgendein Funktor. Dann ist eine RKE von T längs K dasselbe wie ein Limes von T.

Thm. Seien $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ und $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ Funktoren. Existiere für alle Objekte $c \in \mathcal{C}$ der Limes

$$R(c) := \lim_{f : c \to Km} T(m).$$

Dabei ist die Indexkategore des Limes die Kommakat. $\Delta(c) \downarrow K$. Dann lässt sich diese Setzung zu einem Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ ausdehnen und zwar zu einer RKE von T längs K.

Bem. Ist $\mathcal{M}$ klein und $\mathcal{C}$ lokal klein und ist $\mathcal{A}$ vollständig, so sind die Voraussetzungen des Theorems für jeden Funktor $K : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ erfüllt. Insbesondere ist dann jede solche RKE von der Form im Theorem. Solche RKE heißen auch **punktweise RKE**.

Lem. Eine RKE ist genau dann punktweise, wenn sie für alle $a \in \mathcal{A}$ unter dem Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)$ erhalten bleibt.

Thm. Sei $K : M \to C$ ein Funktor. Betrachte $K^* : [C, A] \to [M, A]$.

- Wenn ein Funktor $\mathrm{Ran}_K : [M, A] \to [C, A]$ mit $K^* \dashv \mathrm{Ran}_K$ ex., so ist $\mathrm{Ran}_K(T)$ für alle $T : M \to A$ eine RKE von T längs K.
- Existiere für alle $T : M \to A$ eine RKE $\mathrm{Ran}_K(T)$. Dann kann man die Zuordnung $T \mapsto \mathrm{Ran}_K(T)$ zu einem Rechtsadjungierten von K^* ausdehnen.

Thm. Sei $G : A \to X$ in einer 2-Kategorie. Dann sind äquivalent:

- G besitzt einen Linksadjungierten.
- $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A)$ existiert und bleibt von G erhalten, d. h. $G \circ \mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Ran}_G(G \circ \mathrm{Id}_A)$.

In diesem Fall gilt $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A) \dashv G$ und $\mathrm{Ran}_G(\mathrm{Id}_A)$ wird sogar von allen Morphismen $H : A \to Y$ bewahrt.

Thm. Rechtsadjungierte bewahren RKE.

Kor. Rechtsadjungierte bewahren Limiten (RAPL)

Bsp. Sei $G : \mathbf{Field} \to \mathbf{Ring}$ der Vergissfunktor. Dann ist

$$(\mathrm{Ran}_G(G))(R) = \prod_{\mathfrak{p} \subset R} \mathrm{Quot}(R/\mathfrak{p}).$$

Algebraische Strukturen in Kategorien

Def. Eine **Retrakt** ist ein Morphismus $r : Y \to X$, sodass ein Morphismus $i : X \to Y$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$ existiert. Sprechweise: X ist ein Retrakt von Y (vermöge i).

Bsp. Ein Modul U ist genau dann Retrakt von einem Modul M, wenn U ein direkter Summand von M ist.

Prop. „– ist Retrakt von –“ ist eine reflexive und trans. Relation.

Def. Ein **Retrakt eines Morphismus** $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathcal{C}$ ist ein Morph. $g : X \to Y$, sodass es ein komm. Diagramm folgender Form gibt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"] & Y \arrow[r, "s"] & B \end{tikzcd}$$

Bem. Ein Retrakt von $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ ist ein Retrakt von $f \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\to})$.

Prop. • Retrakte von Isomorphismen sind Isomorphismen.

- Sei $f \circ g = \mathrm{id}$. Dann ist f ein Retrakt von $g \circ f$.

Prop. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist die Klasse $\{f \in \mathcal{C}^{\to} \mid F(f) \text{ ist ein Iso}\}$ abgeschlossen unter Retrakten.

Def. Sei $i : A \to X$ und $p : E \to B$. Dann werden als äq. definiert:

- p ist **i-injektiv** • i ist **p-projektiv** • $i \boxslash p$
- i hat die Linkshochhebungseigenschaft (LHHE) bzgl. p
- Für alle f, g wie unten, sodass das Quadrat kommutiert, gibt es ein diagonales λ, sodass die Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

Bsp. Wegeliftung aus der Topologie: $i : \{0\} \to [0, 1]$ erfüllt die LHHE bezüglich allen Überlagerungen $\pi : E \to B$.

Bsp. Sei P ein Objekt einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Dann ist P genau dann **projektiv**, wenn $(0 \to P)$ die LHHE bzgl. aller Epimorphismen in $\mathcal{A}$ hat. Dual ist I injektiv, wenn alle Monos in $\mathcal{A}$ die LHHE bzgl. $(I \to 0)$ besitzen.

Bsp. In der Kategorie der Mengen gilt: Alle Injektionen haben die LHHE bzgl. aller Surjektionen.

Lem (**Retrakt-Argument**)**.** Sei $f = q \circ j$. Ist f q-projektiv ($f \boxslash q$), so ist f ein Retrakt von j.

Zellenkomplexe

Def. Sei λ eine Ordinalzahl. Eine **λ-Sequenz** in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein kolimesbewahrender Funktor $X : \lambda \to \mathcal{C}$ (wobei man λ als Präordnungskategorie aller $\beta < \lambda$ auffasst). Ihre **transfinite Komposition** ist der induzierte Morphismus $X_0 \to \operatorname{colim}_{\beta<\lambda} X_\beta$.

Bem. Kolimesbewahrung bedeutet: $\operatorname{colim}_{\alpha<\beta} X_\alpha = X_\beta$ für alle $\beta < \lambda$.

Def. Sei $\mathcal{C}$ eine kovollständige Kategorie, $I \subset \operatorname{Mor}(\mathcal{C})$ eine Menge.

- Ein **relativer I-Zellenkomplex** ist eine transf. Komp. einer λ-Sequenz Z, sodass $\forall\, \alpha \in \mathcal{O}_n$ mit $\alpha+1<\lambda$ ein Pushoutdiagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Z_\alpha \arrow[d] & \leftarrow \textbf{Anklebeabbildung} \\ B \arrow[r] & Z_{\alpha+1} & \leftarrow \textbf{Zelle} \end{tikzcd}$$

  mit $f \in I$ existiert. Sprechweise:
  „$Z_{\alpha+1}$ entsteht aus Z_α, indem wir B längs C ankleben"
- Ein Objekt $A \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **I-Zellenkomplex**, wenn der Morph. $0 \to A$ aus dem initialen Obj. ein relativer I-Zellenkomplex ist.

Bsp. CW-Komplexe aus der algebraischen Topologie sind I-Zellenkomplexe mit $I := \{S^{n-1} \hookrightarrow B^n \mid n \geqslant 0\}$ (und $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$).

Bspe. • Identitäten $A \to A$ sind relative I-Zellenkomplexe.
- Das initiale Objekt ist ein absoluter I-Zellenkomplex.

Lem. Sei $Z : \lambda \to \mathcal{C}$ eine λ-Sequenz. Sei jeder Morphismus $Z_\beta \to Z_{\beta+1}$ $(\beta+1<\lambda)$ ein Pushout eines Morphismus aus I. Dann ist die transfinite Komposition von Z ein I-Zellenkomplex.

Thm. Die Klasse der relativen I-Zellenkomplex ist abgeschl. unter:
• transfinite Kompositionen • Isomorphismen • Koprodukt

Def. Eine Unterkat. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **links-saturiert**, falls $\mathcal{L}$ abgeschl. ist unter Pushouts, transfiniten Kompositionen und Retrakten.

Lem. Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ links-saturiert. Dann ist $\mathcal{L}$ unter Koprodukten abgeschlossen und enthält alle Isomorphismen.

Bsp. Sei $R \subset \operatorname{Mor}(\mathcal{C})$ eine Klasse von Morphismen in einer Kat. $\mathcal{C}$. Sei $\mathcal{L}$ die Unterkat. mit $\operatorname{Mor}(\mathcal{L}) := {}^{\boxslash}R := \{i \in \operatorname{Mor}(\mathcal{C}) \mid \forall\, r \in R : i \boxslash r\}$. Dann ist $\mathcal{L}$ schon links-saturiert.

Prop. Für $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \operatorname{Mor}(\mathcal{C})$ gilt $L_1^{\boxslash} \leqslant L_2^{\boxslash}$.

Def. • $L \subseteq \operatorname{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **proj. abgeschlossen**, falls $L \supseteq {}^{\boxslash}(L^{\boxslash})$.
- $R \subseteq \operatorname{Mor}(\mathcal{C})$ heißt **injektiv abgeschlossen**, falls $R \supseteq ({}^{\boxslash}L)^{\boxslash}$.

Prop. ${}^{\boxslash}(L^{\boxslash})$ ist die projektive Hülle von L, d. h. die kleinste Klasse von Morphismen, die projektiv abgeschlossen ist und L umfasst.

Prop. Die projektive Hülle von L ist links-saturiert. Ist L schon projektiv abgeschlossen, so ist L insbesondere links-saturiert.

Def. Ein Paar (L, R) von Klassen von Morphismen von $\mathcal{C}$ **faktorisiert** $\mathcal{C}$, falls $\forall\, f \in \operatorname{Mor}(\mathcal{C}) : \exists\, i \in L, p \in R : f = p \circ i$.

Def. Ein faktorisierendes Paar (L, R) heißt **schwaches Faktorisierungssystem** (SFS), falls $L = {}^{\boxslash}R$ und $R = L^{\boxslash}$.

Prop. Sei (L, R) faktorisierend. Dann ist (L, R) genau dann ein SFS, wenn $L \boxslash R$ und L und R unter Retrakten abgeschlossen sind.

Bsp. $(\{\,\text{Surjektionen}\,\}, \{\,\text{Injektionen}\,\})$ ist ein (S)FS in $\mathbf{Set}$

Modellkategorien

Motto. Modellkat. sind ein Werkzeug, math. Theorien zu studieren.

Def. Eine Klasse $W \subseteq \operatorname{Mor}(\mathcal{C})$ von Morphismen erfüllt die **2-aus-3-Eigenschaft**, falls für jede Komposition $h = g \circ f$ in $\mathcal{C}$ gilt: Liegen zwei der drei Morphismen f, g, h in W, so auch der dritte.

Def. $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}$ wie eben heißt **Unterkat. schwacher Äquivalenzen**, falls $\mathcal{W}$ die 2-aus-3-Eig. erfüllt und abgeschl. unter Retrakten ist.

Bsp. Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist $\mathcal{W} := F^{-1}(\{\,\text{Isos in } \mathcal{D}\,\})$ eine Unterkategorie schwacher Äquivalenzen.

Def. Ein Tripel $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ von Unterkategorien einer Kategorie $\mathcal{M}$ heißt **Modellstruktur** auf $\mathcal{M}$, falls sowohl $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ als auch $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ schwache Faktorisierungssysteme sind und $\mathcal{W}$ die 2-aus-3-Eigenschaft erfüllt.

Def. Eine bivollständige Kategorie $\mathcal{M}$ zusammen mit einer Modellstruktur $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ heißt eine **Modellkategorie**.

Sprechweise. Man verwendet folgende Bezeichnungen und Pfeile:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{W} & \xrightarrow{\sim} & \text{schwache Äquivalenz} \\ \mathcal{C} & \hookrightarrow & \text{Kofaserungen} \\ \mathcal{C} \cap \mathcal{W} & \overset{\sim}{\hookrightarrow} & \text{azyklische Kofaserungen} \\ \mathcal{F} & \twoheadrightarrow & \text{Faserungen} \\ \mathcal{F} \cap \mathcal{W} & \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} & \text{azyklische Faserungen} \end{array}$$

Bem. Ist $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ eine Modellstruktur auf $\mathcal{M}$, so ist $(\mathcal{W}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{F}^{\mathrm{op}})$ eine Modellstruktur auf $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Bem. Wegen $\mathcal{C} = {}^{\boxslash}(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ bzw. $\mathcal{F} = (\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^{\boxslash}$ ist das Datum $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ überbestimmt.

Bsp. Sei $\mathcal{M}$ bivollständig. Sei $\mathcal{W} := \mathcal{C} := \{\,\text{Isos in } \mathcal{M}\,\}$. Dann wird $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{F} := \mathcal{M}$ eine Modellkategorie.

Prop. In einer Modellkategorie sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ links-saturiert.

Lem. $\mathcal{W}$ enthält alle Isomorphismen und ist unter Retrakten abgeschlossen, bildet also eine Unterkat. schwacher Äquivalenzen.

Notation. Das initiale Objekt von $\mathcal{M}$ wird mit $\varnothing$, das terminale Objekt mit $*$ bezeichnet.

Def. • Ein Objekt $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{M})$ heißt **kofasernd**, falls $\varnothing \to X$ eine Kofaserung ist. Eine azyklische Faserung $q : QX \xrightarrow{\sim} X$ mit QX kofasernd heißt **kofasernder Ersatz** (oder Approx.) von X.
- Dual heißt $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{M})$ **fasernd**, falls X in $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ kofasernd ist und $X \overset{\sim}{\hookrightarrow} RX$ mit RX fasernd heißt **fasernder Ersatz** von X.

Bsp. Sei $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{M})$ beliebig. Dann faktorisiere $\varnothing \to X$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & X \\ & QX \arrow[ur, two heads, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Man erhält also immer einen kofasernden Ersatz QX für X.
Dual gibt es immer einen fasernden Ersatz RX für X.

Prop. Seien $q : QX \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ und $q' : Q'X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ zwei kofasernde Approximationen von X. Dann existiert eine schwache Äquivalenz $\xi : QX \xrightarrow{\sim} Q'X$ mit $q' \circ \xi = q$.

Def. Ein Obj. X heißt **bifasernd**, falls es fasernd und kofasernd ist.

Prop. Für alle $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{M})$ sind RQX und QRX schwach äquivalent und beide bifasernd.

Lem (Ken Brown)**.** Sei $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein Funktor, $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie, $\mathcal{N}$ besitze eine Unterkat. $\mathcal{W}'$ schwacher Äquivalenzen. Wenn F azyklische Kofaserungen zwischen kofasernden Objekten nach $\mathcal{W}'$ abbildet, so bildet F alle schwachen Äquivalenzen zwischen kofasernden Objekten nach $\mathcal{W}'$ ab.

Def. Sei $\mathcal{M}$ eine Modellkategorie. Ein **Zylinderobjekt** $X \times I$ zu einem $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{M})$ ist ein Obj. zusammen mit Morphismen wie folgt:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "i_0", "\sim"'] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] & & \\ & X \times I \arrow[r, "p", "\sim"'] & X \\ X \arrow[ur, "\sim", "i_1"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \end{tikzcd}$$

Der Zylinder $X \times I$ heißt **gut**, falls $X \amalg X \to X \times I$ eine Kofaserung ist. Ein guter Zylinder heißt **sehr gut**, falls $p : X \times I \to X$ eine azyklische Faserung ist.

Bsp. Sei die Kodiagonale $\nabla : X \amalg X \to X$ wie folgt faktorisiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, hook] & & & \\ & X \amalg X \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\nabla"] & X \times I \arrow[r, two heads, "\sim"] & X \\ X \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd}$$

Dann erhalten wir ein Zylinderobjekt $X \times I$ für X.
Dieses ist sehr gut, wenn X kofasernd ist.

Def. Zwei Morphismen $f, g : X \to Y$ in $\mathcal{M}$ heißen **links-homotop** (notiert $f \sim^l g$), falls ein Zylinder $X \times I$ und ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\sim"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\ & X \times I \arrow[r, dashed, "h"] & Y \\ X \arrow[ur, "\sim"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

existiert. Wir definieren $\pi^l(X, Y) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(X, Y)/\langle \sim^l \rangle$, wobei $\langle \sim^l \rangle$ die von der symmetrischen, refl. Relation $\sim^l$ erzeugte Äq'relation ist.