

Zusammenfassung Homologische Algebra

© Tim Baumann, <http://timbaumann.info/uni-spicker>

Kategorientheorie

Bem. Die Topologie-Zusammenfassung bietet eine Übersicht über Grundbegriffe der Kategorientheorie.

Def. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Der **kovariante Hom-Funktor** $h_X : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ ist definiert durch

$$h_X(Y) := \text{Hom}(X, Y), \quad h_X(f : Y \rightarrow Y')(g : X \rightarrow Y) := f \circ g.$$

Allgemeiner gibt es den Funktor $\text{Hom} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ mit

$$\text{Hom}(h : X' \rightarrow X, f : Y \rightarrow Y')(g : X \rightarrow Y) := f \circ g \circ h.$$

Def. Eine Kategorie \mathcal{D} heißt **Unterkategorie** einer Kategorie \mathcal{C} (notiert $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$), wenn für alle geeigneten X, Y, f, g gilt:

$\text{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ und $f \circ_{\mathcal{D}} g = f \circ_{\mathcal{C}} g$.

Def. Eine Unterkategorie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ heißt **voll**, wenn

$$\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{D}) : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt ...

- ... **treu**, wenn für alle $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ die Abbildung

$$F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$$

injektiv ist.

- ... **voll**, wenn diese Abb. für alle $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ surjektiv ist.

Bem. Die Einbettung einer (vollen) Unterkategorie ist ein (voll-)treuer Funktor.

- Ein Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **initiales Objekt**, falls für alle $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ genau ein Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ existiert.
- Ein Objekt $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ heißt **terminales Objekt**, falls für alle $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ genau ein Morphismus $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ existiert.

Def. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist ein **Kategorienäquivalenz**, falls es einen Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $F \circ G \simeq \text{Id}_{\mathcal{D}}$ und $G \circ F \simeq \text{Id}_{\mathcal{C}}$ gibt. Die Funktoren F und G heißen dann zueinander **quasiinvers**.

Def. Zwei Kategorien \mathcal{C}, \mathcal{D} heißen zueinander **äquivalent**, wenn es eine Kategorienäquivalenz $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ gibt.

Prop. $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ist genau dann eine Kategorienäquivalenz, wenn:

- F ist volltreu, • $\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{D}) : \exists X \in \text{Ob}(\mathcal{C}) : Y \cong F(X)$

Bsp. Sei B ein lokal wegzshgder, semi-lokal einfach zshgder topol. Raum. Dann ist die Kategorie $\text{Cov}(B)$ der Überlagerungen von B äquivalent zur Kategorie $[\pi(B), \mathbf{Set}]$ der Mengen-wertigen Funktoren auf dem Fundamentalgruppoid von B . Dabei ist

$$F : \text{Cov}(B) \rightarrow [\pi(B), \mathbf{Set}], \quad F(p : \tilde{B} \rightarrow B) := G_{\tilde{B}, p},$$

$$G_{\tilde{B}, p}(b \in B) := p^{-1}(b), \quad G_{\tilde{B}, p}(\gamma : [0, 1] \rightarrow B)(\tilde{b} \in p^{-1}(\gamma(0))) := \tilde{\gamma}(1),$$

mit $\tilde{\gamma}$ Liftung von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{b}$.

Def. Zwei Ringe A und B heißen **Morita-äquivalent**, wenn ihre Kategorien der (Links/Rechts)-Moduln äquivalent sind.

Simpliziale Mengen

Def. **Verklebedaten** sind gegeben durch einen Funktor

$$X : \Delta_{\text{strikt}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ_{strikt} die Kategorie mit den Mengen $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und streng monotonen Abbildungen.

Notation. $X_{(n)} := X([n])$ heißt Menge der n -Simplizes.

Def. Das **Standard- n -Simplex** $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist die von den $(n+1)$ Standardbasisvektoren aufgespannte affin-lineare Hülle. Eine streng monotone Abb $f : [n] \rightarrow [m]$ induziert durch Abbilden des i -ten Basisvektors auf den $f(i)$ -ten eine Inklusion $\Delta_f : \Delta_n \rightarrow \Delta_m$,

Def. Die **geometrische Realisierung** von Verklebedaten X ist der topologische Raum

$$|X| := \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_{(n)}) \right) / R$$

Dabei ist $X_{(n)}$ diskret. Die Äquivalenzrelation R wird erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \quad \text{mit } t \in \Delta_m, x \in X_{(n)}, f : [m] \rightarrow [n] \text{ s.m.s.}$$

Def. Das **k -Skelett** $\text{sk}_k X$ von Verklebedaten X ist definiert durch

$$(\text{sk}_k X)_{(n)} := \{x \in X_{(n)} \mid n \leq k\}, \quad (\text{sk}_k X)(f) := X(f) \text{ sofern möglich}$$

Def. Eine **simpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Dabei ist Δ die Kategorie mit den Mengen $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als Objekten und monotonen Abbildungen.

Notation. $X_n := X([n])$ heißt Menge der n -Simplizes.

Def. Eine **simpliziale Abbildung** zwischen simplizialen Mengen X und Y ist eine natürliche Transformation zwischen den beiden Funktoren $X, Y : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Def. Die Kategorie der simplizialen Mengen ist die Funktorkategorie $\mathbf{sSet} := [\Delta^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$.

Def. Die **geometrische Realisierung** einer simplizialen Menge X ist der topologische Raum

$$|X| := \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} (\Delta_n \times X_n) \right) / R$$

Die Äquivalenzrelation R wird dabei erzeugt von

$$(\Delta_f(t), x) \sim (t, X(f)(x)) \quad \text{mit } t \in \Delta_m, x \in X_n \text{ u. } f \in \text{Hom}_{\Delta}([m], [n]).$$

Def. Ein topologischer Raum heißt **trianguliert**, wenn er die Realisierung von Verklebedaten ist.

Def. Der **Nerv** einer Überdeckung $X = \cup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$ eines topologischen Raumes ist die simpliziale Menge

$$X_n := \{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in A^{n+1} \mid U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset\}$$

$$X(f)(\alpha_0, \dots, \alpha_n) := (\alpha_{f(0)}, \dots, \alpha_{f(n)}) \quad \text{für } f : [m] \rightarrow [n].$$

Bem. Falls die Überdeckung lokal endlich ist und alle nichtleeren, endlichen Schnitte $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}$ zusammenziehbar sind, so ist die geom. Realisierung des Nerves der Überdeckung homotopieäq. zu X .

Def. Sei Y ein topol. Raum. Die simpliziale Menge X der **singulären Simplizes** in Y ist

$$X_n := \{\text{stetige Abb. } \sigma : \Delta_n \rightarrow Y\}, \quad X_n(f)(\sigma) := \sigma \circ \Delta_f.$$

Bem. Diese Konstruktion stiftet einen Funktor $\text{Sing} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$.

Def. $\Delta[p]_n := \{g : [n] \rightarrow [p] \text{ monoton steigend}\}$, $\Delta[p](f)(g) := g \circ f$

Def. Der **klassifizierende Raum** einer Gruppe G ist gegeben durch die Realisierung der simpl. Menge BG mit $(BG)_n := G^n$ und

$$BG(f : [m] \rightarrow [n])(g_1, \dots, g_n) := (h_1, \dots, h_m), \quad h_i = \prod_{j=f(i-1)+1}^{f(i)} g_j.$$

Def. Ein n -Simplex $x \in X_n$ heißt **degeneriert**, falls eine monotone surjektive Abbildung $f : [n] \rightarrow [m]$, $n > m$ und ein Element $y \in X_m$ existiert mit $x = X(f)(y)$.

Def. Seien X Verklebedaten. Wir konstruieren eine dazugehörige simpliziale Menge \tilde{X} wie folgt:

$$\tilde{X}_n := \{(x, g) \mid x \in X_{(k)}, g : [n] \rightarrow [k] \text{ monoton und surjektiv}\},$$

Für eine monotone Abbildung $f : [m] \rightarrow [n]$ und $(x, g) \in \tilde{X}_n$ schreiben wir zunächst $g \circ f = f_1 \circ f_2$ mit einer Injektion f_1 und einer Surjektion f_2 und setzen $\tilde{X}(f)(x, g) := (X(f)(x), f_2)$.

Prop. Eine simpliziale Menge \tilde{X} kann genau dann aus (dann eindeutigen) Verklebedaten gewonnen werden, falls für alle nicht-degenerierten Simplizes $x \in \tilde{X}_n$ und streng monotonen Abbildungen $f : [m] \rightarrow [n]$ auch $\tilde{X}(f)(x) \in \tilde{X}_m$ nicht degeneriert ist.

Prop. Seien X Verklebedaten, \tilde{X} die entsprechende simpliziale Menge. Dann gilt $|X| \approx |\tilde{X}|$.

Def. Das **k -Skelett** $\text{sk}_k X$ einer simplizialen Menge X ist geg. durch

$$(\text{sk}_k X)_n := \{X(f)(x) \mid p \leq k, f : [n] \rightarrow [p] \text{ monoton}, x \in X_p\}.$$

Def. Eine simpliziale Menge X hat **Dimension** n , falls $X = \text{sk}_n X$.

Prop. Geom. Realisierung ist ein Funktor $|-| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Bspe. • Eine Überdeckung $(U_{\alpha})_{\alpha \in A}$ eines topologischen Raumes ist Verfeinerung von $(V_{\beta})_{\beta \in B}$, wenn es eine Abbildung $\psi : A \rightarrow B$ gibt, sodass $U_{\alpha} \subset V_{\psi(\alpha)}$ für alle $\alpha \in A$. Dies induziert eine simpliziale Abb. zwischen den Nerven der Überdeckungen durch

$$F_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n) := (\psi(\alpha_0), \dots, \psi(\alpha_n)).$$

- Ein Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow H$ stiftet eine Abbildung $BG \rightarrow BH$ zwischen den klassifizierenden Räumen durch

$$F(g_1, \dots, g_n) := (\phi(g_1), \dots, \phi(g_n)).$$

Def. Ein **simplicialer topologischer Raum** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}.$$

Bem. Die geometrische Realisierung eines simplicialen topol. Raumes ist definiert wie die einer simplicialen Menge mit dem Unterschied, dass X_n im Allg. nicht die diskrete Topologie trägt.

Def. Eine **bisimpliziale Menge** ist ein Funktor

$$X : \Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}.$$

Notation. $X_{nm} := X([n], [m])$

Bsp. Das **direkte Produkt** von simplicialen Mengen X und Y ist die bisimpliziale Menge

$$(X \times Y)_n := X_n \times Y_n, \quad (X \times Y)(f, g)(x, y) := (f(x), g(y)).$$

Def. Die **Diagonale** DX einer bisimplizialen Menge X ist die simpliciale Menge mit $(DX)_n := X_{nn}$ und $DX(f) := X(f, f)$.

Def. Sei X eine bisimpliziale Menge.

- Setze $|X|^D := |DX|$.
- Definiere einen simplicialen topologischen Raum X^I durch

$$X_n^I := |X_{\bullet n}|, \quad X^I(g) := |X(\text{id}, g)|.$$

Setze $|X|^{I, II} := |II, I|$.

- Definiere analog $|X|^{II, I}$.

Satz (Eilenberg-Zilber). $|X|^D \cong |X|^{I, II} \cong |X|^{II, I}$ kanonisch.

Garben

Def. • Eine mengenwertige **Prägarbe** \mathcal{F} auf einem topol. Raum X ist ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Dabei ist $\mathbf{Ouv}(X)$ die Präordnungs-Kategorie der offenen Teilmengen von X geordnet durch Inklusion.

- Allgemeiner ist eine \mathcal{C} -wertige Prägarbe ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{Ouv}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ (z. B. $\mathcal{C} = \mathbf{AbGrp}, \mathbf{R-Mod}, \mathbf{Top}$).
- Ein Morphismus zwischen Prägarben \mathcal{F} und \mathcal{G} auf demselben topol. Raum ist eine natürliche Transformation zwischen \mathcal{F} und \mathcal{G} .

Notation. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe

- $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$ heißt Menge der **Schnitte** von \mathcal{F} über U .
- $r_{UV} := \mathcal{F}(V \subseteq U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ heißt **Restriktionsabb.**
- $x|_V := r_{UV}(x)$ für $V \subseteq U$ und $x \in \mathcal{F}(U)$ heißt **Einschränkung** von x auf V .

Def. Eine **Garbe** auf einem topol. Raum X ist eine Prägarbe \mathcal{F} , für die gilt: Für alle Familien $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen und Schnitten $(s_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i \in I}$, die miteinander verträglich sind, d. h.

$$\forall i, j \in I : s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j},$$

gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(\cup_{i \in I} U_i)$ mit $\forall i \in I : s_i = s|_{U_i}$. Ein Morphismus zw. Garben ist ein Morphismus zw. den Prägarben.

Bem. Sei \mathcal{F} eine (Prä-)Garbe auf X und $U \subseteq X$ offen. Dann definiert $(\mathcal{F}|_U)(V) := \mathcal{F}(U \cap V)$ eine (Prä-)Garbe auf U .

Def. Eine Sequenz $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ von (Prä-)Garben abelscher Gruppen auf X heißt **exakt** bei \mathcal{G} , falls für alle offenen $U \subset X$ die Sequenz $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ exakt bei $\mathcal{G}(U)$ ist.

Def. Sei $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben auf X . Definiere Prägarben \mathcal{K} und \mathcal{C} auf X durch

$$\mathcal{K}(U) := \ker(f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)), \quad \mathcal{C}(U) := \mathcal{G}(U) / \text{im}(f_U).$$

Prop. Sei $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sogar ein Morphismus von Garben. Dann ist auch \mathcal{C} eine Garbe.

Achtung. Aber \mathcal{C} ist im Allgemeinen keine Garbe!

Def. Sei \mathcal{F} eine Garbe auf Y . Der **Halm** von \mathcal{F} in $y \in Y$ ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y &:= \{(U, s) \mid U \subseteq Y \text{ offen}, y \in U, s \in \mathcal{F}(U)\} / \sim, \\ (U, s) \sim (V, t) &: \iff \exists W \subset U \cap V \text{ offen}, y \in W : s|_W = t|_W. \end{aligned}$$

Notation. $s_y := [(U, s)]$ für $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $y \in U$.

Sprechweise. Elemente $[t] \in \mathcal{F}_y$ heißen **Keime** in y .

Def. Sei \mathcal{F} eine Garbe auf Y , $Z \subseteq Y$ beliebig. Definiere

$$\Gamma(Z, \mathcal{F}) := \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{F}),$$

wobei der Limes über alle offenen $U \subset X$ mit $Z \subseteq U$ läuft.

Beobachtung. $\mathcal{F}_y = \Gamma(\{y\}, \mathcal{F})$

Def. Der **Totalraum** F einer Prägarbe \mathcal{F} auf Y ist

$$F := \coprod_{y \in Y} \mathcal{F}_y$$

mit der Topologie erzeugt durch die Mengen

$$\{s_y \mid y \in U\} \quad \text{für } U \subseteq X \text{ offen}, s \in \mathcal{F}(U).$$

Bem. Mit dieser Topologie ist die Projektion $\pi : F \rightarrow Y$ stetig und ein lokaler Homöomorphismus.

Def. Sei \mathcal{F} eine Prägarbe auf Y . Die **Garbifizierung** \mathcal{F}^+ von \mathcal{F} ist die Garbe der stetigen Schnitte von $\pi : F \rightarrow Y$, also

$$\mathcal{F}^+(U) := \{f : U \rightarrow F \mid \pi \circ f = (i : U \hookrightarrow Y)\}.$$

Prop. Es ex. ein kanonischer Morphismus $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ def. durch

$$s \in \mathcal{F}(U) \mapsto (y \mapsto s_y : U \rightarrow F).$$

Wenn \mathcal{F} schon eine Garbe ist, dann ist f ein Isomorphismus.

Def. Sei A eine Menge (oder ab. Gruppe, ...), Y ein topol. Raum.

- Die **konstante Prägarbe** \mathbf{A} mit Faser A auf Y ist def. durch $\mathbf{A}(U) := A, \quad r_{UV} := \text{id}_A \quad \text{für alle } V \subseteq U \subseteq Y.$

- Die **konstante Garbe** mit Faser A ist die Garbifizierung $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+$ von \mathbf{A} .

Def. Eine Garbe \mathcal{F} auf Y heißt **lokal konstant**, falls jeder offene Punkt in Y eine offene Umgebung U besitzt, sodass $\mathcal{F}|_U$ isomorph zu einer konstanten Garbe ist.

Def. Eine Garbe \mathcal{F} auf einem topologischen Raum Y heißt ...

- ... **welk** (flabby, flasque), wenn die Einschränkungsabbildungen

$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$$

für alle *offenen* $U \subseteq Y$ surjektiv sind.

- ... **weich** (soft, mou), wenn die Einschränkungsabbildungen

$$\Gamma(Y, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{F})$$

für alle *abgeschlossenen* $A \subseteq Y$ surjektiv sind.

Def. Eine Garbe \mathcal{F} ab. Gruppen auf einem topol. Raum Y heißt **fein** (fine, fin), wenn für je zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq Y$ ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ existiert, sodass α auf einer offenen Umgebung von A_1 Null und auf einer offenen Umgebung von A_2 die Identität ist.

Komplexe und (Ko-)Homologie

Def. • Ein **Kettenkomplex** C_\bullet ist eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ mit der Eigenschaft $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

- Ein **Kokettenkomplex** C^\bullet ist eine Folge $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen $\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ mit der Eigenschaft $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Def. Sei C_\bullet ein Kettenkomplex.

- C_n heißt Gruppe der **n -Ketten**,
- $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$ heißt **Randabbildung**,
- $Z_n(C_\bullet) := \ker \partial_n \subset C_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n -Zykel**,
- $B_n(C_\bullet) := \text{im } \partial_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet)$ heißt Gruppe der **n -Ränder**,
- $H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet) / B_n(C_\bullet)$ heißt **n -te Homologiegruppe**.

Analog nennt man für einen Kokettenkomplex C^\bullet

- δ^n **Korandabbildung**, • C^n **n -Koketten**,
- $Z^n := \ker \delta^n$ **n -Kozykel**, • $B^n := \text{im } \delta^{n-1}$ **n -Koränder**,
- $H^n(C^\bullet) := Z^n(C^\bullet) / B^n(C^\bullet)$ **n -te Kohomologiegruppe**.

Def. Eine Morphismus $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ (bzw. $f : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$) zwischen (Ko-)Kettenkomplexen ist eine Familie von Abbildungen

$$(f_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\text{bzw. } (f^n : C^n \rightarrow D^n)_{n \in \mathbb{N}}),$$

die mit den Randabbildungen verträglich sind, d. h.

$$f_{n-1} \circ \partial_n^C = \partial_n^D \circ f_n \quad (\text{bzw. } f^{n+1} \circ \delta_n^C = \delta_n^D \circ f^n) \quad \text{für alle } n.$$

Prop. H_n (bzw. H^n) ist ein Funktor von der Kategorie der (Ko-)Kettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Def. Sei X eine simpl. Menge. Sei $C_n(X)$ die von den n -Simplizes X_n erzeugte abelsche Gruppe (d. h. die Gruppe der endl. formalen Linearkombinationen mit Koeffizienten in \mathbb{Z}). Sei $\delta_n^i : [n-1] \rightarrow [n]$ diejenige streng monotone Abb. mit $i \notin \delta_n^i$. Definiere

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X), \quad \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \sum_{i=0}^n (-1)^i X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Prop. $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ ist ein Kettenkomplex (d. h. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$)

Def. Sei X eine simpl. Menge und A eine ab. Gruppe. Dann ist ...

- ... der **Kettenkomplex** $(C_\bullet(X; A), \partial_\bullet)$ von X mit **Koeffizienten** in A definiert durch

$$C_n(X; A) := C_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} A, \quad \partial_n := \partial_n \otimes \text{id} : C_n(X; A) \rightarrow C_{n-1}(X; A).$$

- ... der **Kokettenkomplex** $(C^\bullet(X; A), \delta^\bullet)$ von X mit **Koeffizienten** in A definiert durch

$$C^n(X; A) := \text{Hom}(C^n(X), A), \\ \delta^n : C^n(X; A) \rightarrow C^{n+1}(X; A), \quad f \mapsto f \circ \delta_{n+1}.$$

Beobachtung. $C_n(X; \mathbb{Z}) = C_n(X)$

Notation. Sei X eine simpliziale Menge. Setze

- $H_n(X) := H_n(C_\bullet(X))$, $H^n(X) := H^n(C^\bullet(X; \mathbb{Z}))$,
- $H_n(X; A) := H_n(C_\bullet(X; A))$, $H^n(X; A) := H^n(C^\bullet(X; A))$.

Prop. Für jede simpl. Menge X ex. ein kanonischer Isomorphismus

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \text{freie ab. Gr. erzeugt von Zshgskomponenten von } |X|.$$

Def. Der **Kegel** CX über Verklebedaten X ist definiert durch

$$(CX)_{(0)} := X_{(0)} \amalg \{\star\}, \quad (CX)_{(n)} := X_{(n)} \amalg (X_{(n-1)} \times \{\star\}), \\ (CX)(f)(x) := X(f)(x),$$

$$(CX)(f)(x, \star) := \begin{cases} X(i \mapsto f(i) - 1)(x), & \text{wenn } f(0) > 0, \\ X(i \mapsto f(i+1) - 1)(x, \star), & \text{wenn } f(0) = 0. \end{cases}$$

Def. Für Verklebedaten ist der zugeh. (Ko-)Kettenkomplex (mit Koeffizienten) genauso definiert wie für simpliziale Mengen.

Prop. $H_0(CX) = \mathbb{Z}$, $H_{>0}(CX) = 0$

Def. Sei X eine simpliziale Menge.

- Ein **homol. Koeffizientensystem** \mathcal{A} auf X ist ein Funktor

$$\mathcal{A} : (1 \downarrow X) \rightarrow \mathbf{AbGrp}.$$

Dabei ist $1 : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{Set}$ der Funktor, der konstant $\{\star\}$ ist (und $\mathbf{1}$ die Kategorie mit einem Objekt und einem Morphismus).

Expliziter besteht ein Koeffizientensystem aus einer abelschen Gruppe \mathcal{A}_σ für jedes n -Simplex $\sigma \in X_n$ und Abbildungen $\mathcal{A}(f, \sigma) : \mathcal{A}_\sigma \rightarrow \mathcal{A}_{X(f)(\sigma)}$ für alle $\sigma \in X_n$, $f \in \text{Hom}_\Delta([m], [n])$ mit

$$\mathcal{A}(\text{id}, \sigma) = \text{id}, \quad \mathcal{A}(f \circ g, \sigma) = \mathcal{A}(g, X(f)(\sigma)) \circ \mathcal{A}(f, \sigma).$$

- Ein **kohomol. Koeffizientensystem** \mathcal{B} auf X ist ein Funktor

$$\mathcal{B} : (1 \downarrow X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{AbGrp}.$$

- Ein Morphismus zw. (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf derselben simpl. Menge ist eine natürliche Transformation.

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung und X deren Nerv. Dann definiert

$$\mathcal{F}_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} := \{U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}, \\ \mathcal{F}(f, (\alpha_0, \dots, \alpha_n))(\phi) := \text{passende Einschränkung von } \phi.$$

ein kohomologisches Koeffizientensystem auf X .

Def. Sei \mathcal{A} ein homologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X . Wir setzen

$$C_n(X; \mathcal{A}) := \{ \text{formale endl. Linearkomb. } \sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \text{ mit } \lambda_\sigma \in \mathcal{A}_\sigma \}$$

und definieren $\partial_n : C_n(X; \mathcal{A}) \rightarrow C_{n-1}(X; \mathcal{A})$ durch

$$\sum_{\sigma \in X_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in X_n} \sum_{i=0}^n (-1)^i \mathcal{A}(\partial_n^i, \sigma)(\lambda_\sigma) \cdot X(\partial_n^i)(\sigma).$$

Die Homologiegruppen des so def. Kettenkomplexes $C_\bullet(X; \mathcal{A})$ heißen **Homologiegruppen** von X mit **Koeffizienten in** \mathcal{A} .

Def. Sei \mathcal{B} ein kohomologisches Koeffizientensystem auf einer simplizialen Menge X . Wir setzen

$$C^n(X; \mathcal{B}) := \{ \text{Funktionen } f : (\sigma \in X_n) \rightarrow \mathcal{B}_\sigma \}$$

und definieren $\delta_n : C^n(X; \mathcal{B}) \rightarrow C^{n+1}(X; \mathcal{B})$ durch

$$\delta^n(f)(\sigma) := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \mathcal{B}(\partial_{n+1}^i, \sigma)(f(X(\partial_{n+1}^i)(\sigma))).$$

Die Kohomologiegruppen des so def. Kokettenkomplexes $C^\bullet(X; \mathcal{B})$ heißen **Kohomologiegruppen** von X mit **Koeffizienten in** \mathcal{B} .

Bsp. Sei Y ein topol. Raum, $U = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$, X und \mathcal{F} wie im letzten Beispiel. Die Homologiegruppen $H^n(X, \mathcal{F})$ werden Čech-Kohomologiegruppen der Garbe der stetigen Funktionen auf Y bzgl. der Überdeckung U genannt.

Def. Eine (lange) **exakte Sequenz** ab. Gruppen ist ein (Ko-)Kettenkomplex mit verschwindenden Homologiegruppen, d. h.

$$\text{im } \partial_n = \ker \partial_{n-1} \quad \text{für alle } n.$$

Def. Eine **kurze ex. Sequenz** (k. e. S.) ist eine ex. Seq. der Form

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0.$$

Def. Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine k. e. S. in einer abelschen Kategorie \mathcal{A} . Die Sequenz heißt **spaltend**, falls sie isomorph zur k. e. S. $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus C \rightarrow C$ ist.

Prop. Für eine Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ sind äquivalent:

- Die Sequenz spaltet.
- Es existiert eine Retraktion $r : B \rightarrow A$ mit $r \circ f = \text{id}_A$.
- Es existiert ein Schnitt $s : C \rightarrow B$ mit $g \circ s = \text{id}_C$.

Def. Eine Sequenz $0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow 0$ von Komplexen heißt **exakt**, wenn für alle n die Seq. $0 \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow 0$ exakt ist.

Prop. Eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A^\bullet \xrightarrow{i^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} C^\bullet \rightarrow 0$ von Kokettenkomplexen induziert eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H^n(A^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^\bullet)} H^n(B^\bullet) \xrightarrow{H^n(p^\bullet)} H^n(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A^\bullet) \rightarrow \dots$$

Lemma. Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann sind ebenfalls exakt:

$$0 \rightarrow C_\bullet(X; A) \rightarrow C_\bullet(X; B) \rightarrow C_\bullet(X; C) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow C^\bullet(X; A) \rightarrow C^\bullet(X; B) \rightarrow C^\bullet(X; C) \rightarrow 0.$$

Korollar. Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine k. e. S. ab. Gruppen und X eine simpl. Menge. Dann existieren lange exakte Sequenzen

$$\dots \rightarrow H_n(X; A) \rightarrow H_n(X; B) \rightarrow H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(X; A) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^n(X; A) \rightarrow H^n(X; B) \rightarrow H^n(C) \rightarrow H^{n+1}(X; A) \rightarrow \dots$$

Def. Eine Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'' \rightarrow 0$ von (ko-)homologischen Koeffizientensystemen auf einer simpl. Menge X heißt **exakt**, falls

$$0 \rightarrow \mathcal{B}'_\sigma \rightarrow \mathcal{B}_\sigma \rightarrow \mathcal{B}''_\sigma \rightarrow 0 \quad \text{für alle } \sigma \in X_n \text{ exakt ist.}$$

Lemma. Eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'' \rightarrow 0$ von (ko-)homologischen Koeff'systemen induziert kurze ex. Sequenzen

$$0 \rightarrow C_\bullet(X; \mathcal{B}') \rightarrow C_\bullet(X; \mathcal{B}) \rightarrow C_\bullet(X; \mathcal{B}'') \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow C^\bullet(X; \mathcal{B}') \rightarrow C^\bullet(X; \mathcal{B}) \rightarrow C^\bullet(X; \mathcal{B}'') \rightarrow 0$$

und damit auch entsprechende lange exakte Sequenzen.

Def. Eine **simpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{AbGrp}$.

Def. Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe.

Dann ist (A_\bullet, ∂) ein Kettenkomplex mit

$$\partial_n : A_n \rightarrow A_{n-1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i A(\partial_n^i)(a).$$

Def. Eine **kosimpl. ab. Gruppe** ist ein Funktor $A : \Delta \rightarrow \mathbf{AbGrp}$.

Def. Sei A eine kosimpliziale abelsche Gruppe.

Dann ist (A^\bullet, δ) ein Kokettenkomplex mit

$$\delta^n : A^n \rightarrow A^{n+1}, \quad a \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i A(\partial_{n+1}^i)(a).$$

Def. Sei Y ein topol. Raum, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine (nicht unbedingt offene) Überdeckung von Y und \mathcal{F} eine Garbe ab. Gruppen auf Y . Die kosimpliziale abelsche Gruppe $\check{C}(U, \mathcal{F})$ der **Čech-Koketten** ist

$$\check{C}^m(U, \mathcal{F}) := \prod_{\alpha_0, \dots, \alpha_m \in A} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_m}), \\ \check{C}(U, \mathcal{F})(f : [m] \rightarrow [n])((f_{\alpha_0, \dots, \alpha_m})_{\alpha_0, \dots, \alpha_m}) := \\ (f_{g(0), \dots, g(m)}|_{U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}})_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}.$$

Bem. Die Randabb. im zugeh. Kokettenkomplex ist gegeben durch

$$(\delta^n \phi)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}} := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \phi_{\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{n+1}}.$$

Def. Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes heißen **Čech-Homologiegruppen** von \mathcal{F} bzgl. der Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Bem. $\tilde{H}(U, \mathcal{F}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$ hängt nicht von der Überdeckung ab.

Def. Sei Y ein topol. Raum und X dessen simpl. Menge der singulären Simplizes. Die Homologiegruppen von $C_\bullet(X; A)$ heißen **singuläre Homologiegruppen** $H_n(Y; A)$ von Y mit Koeff. A .

Def. Sei M eine C^∞ -Mft, $\Omega^k(M)$ das $C^\infty(M)$ -Modul der k -Formen auf M . Die **äußere Ableitung** $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ ist in lokalen Koordinaten (x^1, \dots, x^n) definiert durch

$$d \left(\sum_{|I|=k} f_I dx^I \right) = \sum_{|I|=k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I.$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Komplexes $\Omega^\bullet(M)$ heißen **De-Rham-Kohomologiegruppen**.

Def. Sei \mathfrak{g} eine Lie-Algebra und A ein \mathfrak{g} -Modul. Setze $C^k(\mathfrak{g}, A) := L(\wedge^k \mathfrak{g}, A)$ und definiere $d : C^k(\mathfrak{g}, A) \rightarrow C^{k+1}(\mathfrak{g}, A)$ durch eine allgemeine Cartan-Formel

$$\begin{aligned} (dc)(g_1, \dots, g_{k+1}) &:= \sum_{1 \leq j < l \leq k+1} (-1)^{j+l-1} c([g_j, g_l], g_1, \dots, \hat{g}_j, \dots, \hat{g}_l, \dots, g_{k+1}) \\ &+ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j g_j c(g_1, \dots, \hat{g}_j, \dots, g_{k+1}). \end{aligned}$$

Die Kohomologiegruppen des so definierten Kokettenkomplexes werden mit $H^\bullet(\mathfrak{g}, A)$ bezeichnet.

Def. Eine **Kettenhomotopie** zw. Morphismen $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ von Kettenkomplexen ist eine Folge von Homomorphismen $k_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : \partial_{n+1}^D \circ k_n + k_{n-1} \circ \partial_n^C = f_n - g_n$.

Lemma. Seien $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ kettenhomotop. Dann gilt

$$H_n(f) = H_n(g) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Prop. • Seien $\phi, \psi : X \rightarrow Y$ homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Dann sind die induzierten Abbildungen $\phi_*, \psi_* : C_\bullet(X; A) \rightarrow C_\bullet(Y; A)$ kettenhomotop.

• Seien $\phi, \psi : M \rightarrow N$ zwei glatt homotope Abbildungen von C^∞ -Mften. Dann sind $\phi^*, \psi^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$.

Korollar. Homotopieäquivalente Räume besitzen isomorphe singuläre Homologiegruppen.