Numerične metode - preizkusi iz teorije

Ladisk

14. januar 2019

Kazalo

1 Datum: 11.1.2019

1. vprašanje
Podano tabelo podatkov: x = (0, 1, 2), y = (1, 4, 2) je potrebno interpolirati. Najprej predstavite interpolacijo podane tabele kot problem reševanja sistema linearnih enačb, nato predstavite Lagrangevo interpolacijsko metodo in jo uporabite na tabeli podatkov. Pojasnite razlike med obema pristopoma. Ali je rezultat enak? *(35 %)*

Okviren odgovor (skice tukaj niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora)
Polinomska interpolacija: podane imamo 3 točke, zato uporabimo interpolacijo s polinomom 2. stopnje:

$$y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0. \tag{1}$$

Točk: 5

Nastavimo sistem enačb oblike $A \cdot x = b$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Določimo neznanke (tukaj samo nakažemo rešitev, numerično pravilen postopek je z uporabo Gaussove eliminacije):

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Točk: 5

Lagrangeva metoda: enačbi Lagrangeve interpolacijske metode:

$$l_i(x) = \Pi_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \tag{4}$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot l_i(x). \tag{5}$$

Točk: 5

Najprej definiramo Lagrangeve polinome:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} \\ l_1(x) &= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} \\ l_2(x) &= \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-1}{2-1} \end{aligned} \tag{6}$$

Točk: 5

Definiramo Lagrangev interpolacijski polinom:

$$P(x) = 1 \cdot l_0(x) + 4 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x). \tag{7}$$

Točk: 5

Glavna razlika med metodama je, da pri Lagrangevi interpolaciji ni potrebno reševati sistema enačb, zato je takšen pristop numerično manj zahteven.
Točk: 5

Metodi vrneta enako interpolacijsko krivuljo. Točk: 5

2. vprašanje
Za drugi odvod izpeljite: centralno diferenčno shemo 2. reda natančnost in diferenčno shemo naprej 1. reda natančnosti. *(35 %)*

Okviren odgovor (skice tukaj niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora)
Centralna diferenčna shema za 2. odvod: razvijemo Taylorjevo vrsto naprej in nazaj do 3. odvoda:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2}\, f''(x) + \frac{h^3}{6}\, f'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \tag{8}$$

$$f(x-h) = f(x) - h\, f'(x) + \frac{h^2}{2}\, f''(x) - \frac{h^3}{6}\, f'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \tag{9}$$

Točk: 5

Enačbi seštejemo:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2\, f(x) + h^2\, f''(x) + \mathcal{O}(h^4) \tag{10}$$

in izrazimo drugi odvod:

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2\, f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{11}$$

Točk: 5

Pomembno je, da Taylorjevo vrsto razvijemo do vključno 3. odvoda, saj tako dobimo končno napako 2. reda (po deljenju s h^2). Tretji odvod se nato ob seštevanju enačb izniči. V primeru, da bi vrsto razvili le do 2. odvoda, bi dobili končno napako 1. reda. Točk: 5

Diferenčna shema naprej: za diferenčno shemo naprej moramo razviti dve Taylorjevi vrsti:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2}\, f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \tag{12}$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h\, f'(x) + \frac{4h^2}{2}\, f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \tag{13}$$

Točk: 5

Enačbo (12) pomnožimo z 2 in ji odštejemo enačbo (13):

$$\begin{aligned} 2\, f(x+h) - f(x+2h) = \quad & [2\, f(x) - f(x)] + \\ & [2\, h\, f'(x) - 2\, h\, f'(x)] + \\ & \left[\tfrac{2\, h^2}{2}\, f''(x) - \tfrac{4\, h^2}{2}\, f''(x)\right] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \tag{14}$$

Izraz poenostavimo:

$$2\, f(x+h) - f(x+2h) = f(x) - h^2\, f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \tag{15}$$

Točk: 5

Izrazimo drugi odvod. Ker enačbo delimo s h^2 dobimo red napake 1:

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2\, f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \tag{16}$$

Točk: 5

Ker smo napako $\mathcal{O}(h^3)$ delili s h^2, dobimo končno napako 1. reda.

Točk: 5

3. vprašanje
Zapišite uteži Simpsonove 1/3 metodo za numerično integriranje. Za tabelo podatkov $(x_0, x_1, ...)$, $(y_0, y_1, ...)$ prikažite uporabo osnovnega in sestavljenega Simpsonovega pravila; komentirajte napako. Pokažite, kako lahko s pomočjo Richardsonove ekstrapolacije rezultata s korakom h in $2h$ izračunamo boljši približek. *(30 %)*

Okviren odgovor (skice tukaj niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora)
Uteži Simpsonove 1/3 metode: $w = \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right] \cdot h$

Točk: 5

Za osnovno pravilo potrebujemo 3 ekvidistančne točke:

$x = [x_0, x_1, ...]$
$y = [y_0, y_1, ...]$

Primer integrala:

$$I = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4 \cdot y_1}{3} + \frac{y_2}{3}\right) \cdot h \tag{17}$$

Točk: 5

Sestavljeno pravilo.
$x = [x_0, x_1, ...]$
$y = [y_0, y_1, ...]$

Primer integrala:

$$I = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4 \cdot y_1}{3} + \frac{y_2}{3} + \frac{y_2}{3} + \frac{4 \cdot y_3}{3} + \frac{y_4}{3}\right) \cdot h \tag{18}$$

oziroma:

$$I = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4 \cdot y_1}{3} + \frac{2 \cdot y_2}{3} + \frac{4 \cdot y_3}{3} + \frac{y_4}{3}\right) \cdot h \tag{19}$$

Točk: 5

Pri sestavljenem 1/3 Simpsonovem pravilu je pomembno, da je število intervalov sodo. (Tukaj je priporočljiva **skica**)

Točk: 5

Napaka sestavljene Simpsonove metod je 4. reda: $-\frac{b-a}{180}\, h^4\, f^{(4)}(\eta)$.

Točk: 5

Izračunamo integral s korakom $2\,h$ in korakom h:

$$I_{2h} = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4\,y_2}{3} + \frac{y_4}{3}\right) \cdot 2\,h \tag{20}$$

$$I_h = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4\,y_1}{3} + \frac{2\,y_2}{3} + \frac{4\,y_3}{3} + \frac{y_4}{3}\right) \cdot h \tag{21}$$

Za izboljšano aproksimacijo integrala uporabimo enačbo:

$$I = \frac{2^n\,I_h - I_{2h}}{2^n - 1} = \frac{16\,I_h - I_{2h}}{15} \tag{22}$$

Točk: 5