Numerične metode - preizkusi iz teorije

Ladisk

14. januar 2020

Kazalo

1 Datum: 11.1.2019

1. vprašanje
Podano tabelo podatkov: x = (0, 1, 2), y = (1, 4, 2) je potrebno interpolirati. Najprej predstavite interpolacijo podane tabele kot problem reševanja sistema linearnih enačb, nato predstavite Lagrangevo interpolacijsko metodo in jo uporabite na tabeli podatkov. Pojasnite razlike med obema pristopoma. Ali je rezultat enak? *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Polinomska interpolacija: podane imamo 3 točke, zato uporabimo interpolacijo s polinomom 2. stopnje:

$$y = a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_2. \tag{1}$$

Nastavimo sistem enačb oblike $A \cdot x = b$: Točk: 5

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Določimo neznanke (tukaj samo nakažemo rešitev, numerično pravilen postopek je z uporabo Gaussove eliminacije):

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Točk: 5

Lagrangeva metoda: enačbi Lagrangeve interpolacijske metode:

$$l_i(x) = \Pi_{j=0, j\neq i}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \tag{4}$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot l_i(x). \tag{5}$$

Točk: 5

Najprej definiramo Lagrangeve polinome:

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} \\ l_1(x) &= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} \\ l_2(x) &= \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-1}{2-1} \end{aligned} \tag{6}$$

Definiramo Lagrangev interpolacijski polinom: Točk: 5

$$P(x) = 1 \cdot l_0(x) + 4 \cdot l_1(x) + 2 \cdot l_2(x). \tag{7}$$

Točk: 5

Glavna razlika med metodama je, da pri Lagrangevi interpolaciji ni potrebno reševati sistema enačb, zato je takšen pristop numerično manj zahteven. Točk: 5
Metodi vrneta enako interpolacijsko krivuljo. Točk: 5

2. vprašanje
Za drugi odvod izpeljite: centralno diferenčno shemo 2. reda natančnost in diferenčno shemo naprej 1. reda natančnosti. *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Centralna diferenčna shema za 2. odvod: razvijemo Taylorjevo vrsto naprej in nazaj do 3. odvoda:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2}\, f''(x) + \frac{h^3}{6}\, f'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \tag{1}$$

$$f(x-h) = f(x) - h\, f'(x) + \frac{h^2}{2}\, f''(x) - \frac{h^3}{6}\, f'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \tag{2}$$

Točk: 5

Enačbi seštejemo:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2\, f(x) + h^2\, f''(x) + \mathcal{O}(h^4) \tag{3}$$

in izrazimo drugi odvod:

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2\, f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{4}$$

Točk: 5

Pomembno je, da Taylorjevo vrsto razvijemo do vključno 3. odvoda, saj tako dobimo končno napako 2. reda (po deljenju s h^2). Tretji odvod se nato ob seštevanju enačb izniči. V primeru, da bi vrsto razvili le do 2. odvoda, bi dobili končno napako 1. reda.

Točk: 5

Diferenčna shema naprej: za diferenčno shemo naprej moramo razviti dve Taylorjevi vrsti:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2}\, f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \tag{5}$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2h\, f'(x) + \frac{4h^2}{2}\, f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \tag{6}$$

Točk: 5

Enačbo (5) pomnožimo z 2 in ji odštejemo enačbo (6):

$$\begin{aligned} 2\, f(x+h) - f(x+2h) = \quad & [2\, f(x) - f(x)] + \\ & [2\, h\, f'(x) - 2\, h\, f'(x)] + \\ & \left[\tfrac{2\, h^2}{2}\, f''(x) - \tfrac{4\, h^2}{2}\, f''(x)\right] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned} \tag{7}$$

Izraz poenostavimo:

$$2\, f(x+h) - f(x+2h) = f(x) - h^2\, f''(x) + \mathcal{O}(h^3) \tag{8}$$

Točk: 5

Izrazimo drugi odvod. Ker enačbo delimo s h^2 dobimo red napake 1:

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2\, f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \tag{9}$$

Točk: 5

Ker smo napako $\mathcal{O}(h^3)$ delili s h^2, dobimo končno napako 1. reda.

Točk: 5

3. vprašanje

Zapišite uteži Simpsonove 1/3 metodo za numerično integriranje. Za tabelo podatkov $(x_0, x_1, ...)$, $(y_0, y_1, ...)$ prikažite uporabo osnovnega in sestavljenega Simpsonovega pravila; komentirajte napako. Pokažite, kako lahko s pomočjo Richardsonove ekstrapolacije rezultata s korakom h in $2h$ izračunamo boljši približek. *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Uteži Simpsonove 1/3 metode: $w = \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right] \cdot h$

Točk: 5

Za osnovno pravilo potrebujemo 3 ekvidistančne točke:

$x = [x_0, x_1, ...]$
$y = [y_0, y_1, ...]$

Primer integrala:

$$I = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4 \cdot y_1}{3} + \frac{y_2}{3} \right) \cdot h \tag{1}$$

Točk: 5

Sestavljeno pravilo.
$x = [x_0, x_1, ...]$
$y = [y_0, y_1, ...]$

Primer integrala:

$$I = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4 \cdot y_1}{3} + \frac{y_2}{3} + \frac{y_2}{3} + \frac{4 \cdot y_3}{3} + \frac{y_4}{3} \right) \cdot h \tag{2}$$

oziroma:

$$I = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4 \cdot y_1}{3} + \frac{2 \cdot y_2}{3} + \frac{4 \cdot y_3}{3} + \frac{y_4}{3} \right) \cdot h \tag{3}$$

Točk: 5

Pri sestavljenem 1/3 Simpsonovem pravilu je pomembno, da je število intervalov sodo. (Tukaj je priporočljiva **skica**)

Točk: 5

Napaka sestavljene Simpsonove metod je 4. reda: $-\frac{b-a}{180}\, h^4\, f^{(4)}(\eta)$.

Točk: 5

Izračunamo integral s korakom $2\,h$ in korakom h:

$$I_{2h} = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4\,y_2}{3} + \frac{y_4}{3} \right) \cdot 2\,h \tag{4}$$

$$I_h = \left(\frac{y_0}{3} + \frac{4\,y_1}{3} + \frac{2\,y_2}{3} + \frac{4\,y_3}{3} + \frac{y_4}{3} \right) \cdot h \tag{5}$$

Za izboljšano aproksimacijo integrala uporabimo enačbo:

$$I = \frac{2^n\, I_h - I_{2h}}{2^n - 1} = \frac{16\, I_h - I_{2h}}{15} \tag{6}$$

Točk: 5

2 Datum: 28.1.2019

1. vprašanje
Matriko:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(1.) preoblikujte v Gaussovo eliminirano obliko. (2.) Kakšne oblike je matrika po preoblikovanju? Če $\boldsymbol{A}$ predstavlja razširjeno matriko sistema linearnih enačb in je zadnji stolpec vektor konstant, določite (3.) rang osnovne in razširjene matrike. (4.) Kaj nam preoblikovana matrika lahko pove o sistemu enačb? (5.) Ali ima podani sistem enolično rešitev? (6.) Katero operacijo izvedemo, da po Gaussovi eliminaciji dobimo rešitev sistema?
(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

(1.) Postopek preoblikovanja matrike $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2 - 2 \cdot \boldsymbol{A}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2 - 0.5 \cdot \boldsymbol{A}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Točk: 10

(2.) Matrika je zgornje trikotna. Točk: 5

(3.) Rang razširjene matrike je enak 3. Rang osnovne matrike je enak 2. Točk: 5

(4.) Preoblikovana matrika nam pove rang osnovne matrike in rang razširjene matrike. Posledično izvemo ali ima sistem rešitev ali ne. Točk: 5
(5.) Tak sistem enačb **nima** enolične rešitve. Točk: 5
(6.) Da dobimo rešitev sistema enačb moramo uporabiti **obratno vstavljanje**. Točk: 5

2. vprašanje
Tabelo podatkov x_i, y_i želimo aproksimirati s funkcijo $f(x) = a\,x^{3/2} + b$. Za podano funkcijo pokažite, kako to izvedemo s pomočjo metode najmanjše kvadratične napake? Nastavite sistem enačb za določitev parametrov a in b! *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Uporabimo enačbo za metodo najmanjših kvadratov:

$$S(a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - (a\,x_i^{3/2} + b))^2 \tag{1}$$

Točk: 5

Vemo, da v stacionarni točki velja:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \qquad \text{in} \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \tag{2}$$

Točk: 5

Izvedemo odvajanje:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - (a\,x_i^{3/2} + b)) \cdot x_i^{3/2}, \tag{3}$$

sledi:

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} (a\,x_i^3 + b\,x_i^{3/2} - x_i^{3/2}\,y_i) \tag{4}$$

Točk: 5

Iz:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - (a\,x_i^{3/2} + b)) \cdot (-1), \tag{5}$$

sledi:

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} (a\,x_i^{3/2} + b - y_i). \tag{6}$$

Točk: 5

Nastavimo lahko sistem enačb:

$$a \sum_{i=0}^{n-1} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n-1} x^{3/2} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{3/2}\,y_i \tag{7}$$

in

Točk: 5

$$a \sum_{i=1}^{n-1} x^{3/2} + b \sum_{i=1}^{n-1} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i \tag{8}$$

Točk: 5

3. vprašanje

Kakšna je razlika med reševanjem diferencialnih enačb glede na začetne pogoje in reševanjem glede na robne pogoje? Zapišite centralno diferenčno shemo za odvoda $\dot{x}$ in $\ddot{x}$. Pokažite, kako za robna pogoja: $x(t = 0\,\mathrm{s}) = 1$ in $x(t = 2\mathrm{s}) = 0$ rešite diferencialno enačbo: $\ddot{x} + c\,\dot{x} + kx = 0$. Rešite s pomočjo centralne diferenčne sheme drugega reda. Uporabite fizikalne točke pri $t = [0,1,2]$ s. *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Pri začetnem problemu pri sistemu d.e. poznamo vrednosti vseh dodatnih enačb pri isti vrednosti neodvisne spremenljivke in tako lahko začnemo numerično integracijo. Pri robnem problemu dodatne enačbe, potrebne za rešitev d.e., poznamo pri različnih vrednosti neodvisne spremenljivke. Točk: 5

Centralna diferenčna shema za $\dot{x}$:

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\,h} \tag{1}$$

Točk: 5

Centralna diferenčna shema za $\ddot{x}$:

$$\ddot{x}_i = \frac{x_{i-1} - 2\,x_i + x_{i+1}}{h^2} \tag{2}$$

Točk: 5

Enačbo zapišemo s pomočjo centralne diferenčne sheme:

$$\ddot{x} = -c\,\dot{x} - k\,x \tag{3}$$

$$\frac{x_{i-1} - 2\,x_i + x_{i+1}}{h^2} = -c\,\frac{-x_{i-1} + x_{i+1}}{2\,h} - k\,x_i \tag{4}$$

Točk: 5

Ker vemo, da uporabljamo samo točke pri $t = (0, 1, 2)$ sekund, **lahko zapišemo $x_i = x_1$ samo pri 1 sekundi**. To pomeni, da dobimo:

$$x_0 = x(0\ \mathrm{s}) \tag{5}$$
$$x_1 = x(1\ \mathrm{s}) \tag{6}$$
$$x_2 = x(2\ \mathrm{s}) \tag{7}$$

Točk: 5

Če te vrednosti vstavimo poznane vrednosti $x(0) = 1$ in $x(2) = 0$ v enačbo (4) dobimo:

$$\frac{1 - 2\,x_1 + 0}{h^2} = -c\,\frac{-1 + 0}{2\,h} - k\,x_1 \tag{8}$$

oziroma

$$\frac{-2x_1 + 1}{h^2} = \frac{c}{2h} - kx_1 \tag{9}$$

Točk: 5

upoštevamo še, da je korak h enak 1 (točke (0, 1, 2) si sledijo s korakom 1):

$$-2x_1 + 1 = \frac{c}{2} - kx_1 \tag{10}$$

in izrazimo x_1:

$$x_1 = \frac{c - 2}{2\,(k - 2)} \tag{11}$$

Točk: 5

3 Datum: 11.2.2019

1. vprašanje
Matriki $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

z uporabo principov sistema linearnih enačb, izračunajte inverzno matriko. *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Vemo, da mora veljati:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \tag{2}$$

kar lahko drugače zapišemo kot:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Točk: 5

Sedaj rešujemo 3 različne sisteme enačb. Vsak sistem enačb nam poda en stolpec inverza matrike $\boldsymbol{A}$.
Prvi sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$a_1 + 2\,a_2 + 3\,a_3 = 1 \tag{5}$$
$$a_1 + a_3 = 0 \tag{6}$$
$$-a_1 + a_2 + a_3 = 0 \tag{7}$$

Točk: 5

Iz enačbe (6) izrazimo a_1 in vstavimo v enačbo (7):

$$a_1 = -a_3 \tag{8}$$
$$-(-a_3) + a_2 + a_3 = 0 \tag{9}$$
$$a_2 = -2\,a_3 \tag{10}$$

a_1 in a_2 vstavimo v enačbo (5):

$$(-a_3) + 2\,(-2\,a_3) + 3\,a_3 = 1 \tag{11}$$
$$-a_3 - 4\,a_3 + 3\,a_3 = 1 \tag{12}$$
$$-2\,a_3 = 1 \tag{13}$$

Sedaj lahko izračunammo vrednosti:

$$a_3 = -\frac{1}{2} \tag{14}$$
$$a_1 = \frac{1}{2} \tag{15}$$
$$a_2 = 1 \tag{16}$$

Točk: 5

Drugi sistem
Enak postopek ponovimo tudi za drugi sistem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} b_1 + 2\,b_2 + 3\,b_3 &= 0 && (18) \\ b_1 + b_3 &= 1 \to b_1 = 1 - b_3 && (19) \\ -b_1 + b_2 + b_3 &= 0 \to -(1 - b_3) + b_2 + b_3 = 0 \to b_2 = 1 - 2\,b_3 && (20) \end{aligned}$$

Točk: 5

Vstavimo v enačbo (18) in izračunamo vrednosti:

$$\begin{aligned} (1 - b_3) + 2\,(1 - 2\,b_3) + 2\,b_3 &= 0 \to b_3 = \frac{3}{2} && (21) \\ b_1 &= -\frac{1}{2} && (22) \\ b_2 &= -2 && (23) \end{aligned}$$

Točk: 5

Tretji sistem
Enak postopek ponovimo tudi za tretji sistem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} c_1 + 2\,c_2 + 3\,c_3 &= 0 && (25) \\ c_1 + c_3 &= 0 \to c_1 = -c_3 && (26) \\ -c_1 + c_2 + c_3 &= 1 \to -(-c_3) + c_2 + c_3 = 1 \to c_2 = 1 - 2\,c_3 && (27) \end{aligned}$$

Točk: 5

Vstavimo v enačbo (25) in izračunamo vrednosti:

$$\begin{aligned} (-c_3) + 2\,(1 - 2\,c_3) + 2\,c_3 &= 0 \to c_3 = 1 && (28) \\ c_1 &= -1 && (29) \\ c_2 &= -1 && (30) \end{aligned}$$

Točk: 5

Vse dobljene vrednosti a_i, b_i in c_i vstavimo v enačbo (3). Vidimo, da smo izračunali inverzno matriko:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -0{,}5 & 1{,}5 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

2. vprašanje
Predstavite bisekcijsko metodo za numerično reševanje enačb; prikažite postopek tudi na primeru funkcije $f(x) = x^2 - 3\,x - 3$ in izvedite dva koraka iskanja ničle (začnite z $x_0 = -3$, $x_1 = 0$) *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Povzetek metode je:

- najprej preverimo če imata vrednosti $f(x_0)$ in $f(x_1)$ različna predznaka,

- interval $[x_0,x_1]$ razdelimo na pol in dobimo $x_2 = (x_0 + x_1)/2$,
- če imata $f(x_0)$ in $f(x_2)$ različne predznake, je nov interval $[x_0, x_2]$, sicer je $[x_2, x_1]$,
- v naslednjem koraku definiramo nov korak $[x_0, x_1]$ glede na prej določen interval.
- postopek ponavljamo dokler ne dosežemo želene natančnosti: $|x_1 - x_0| < \varepsilon$.

Bisekcijska metoda sicer ne zahteva, vendar opombo, da preverjamo končnost vsote $|f(x_0)| + |f(x_1)|$ za preprečitev identifikacije pola ali večkratne, štejemo pozitivno. Točk: 5

Tukaj je na mestu **SKICA** Točk: 5
Izvedemo iskanje ničle za podano funkcijo. Preverimo če na intervalu $[x_0, x_1]$ obstaja ničla:

$$f(x_0 = -3) = 15 \tag{1}$$
$$f(x_1 = 0) = -3 \tag{2}$$
$$\mathrm{sign}(f(x_0)) \neq \mathrm{sign}(f(x_1)) \tag{3}$$

Točk: 5

Prvi korak
Najprej izračunamo vrednost x_2:

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2} = -1{,}5 \tag{4}$$

izračunamo vrednosti pri $x_0 = -3$, $x_1 = 0$ in $x_2 = -1{,}5$:

$$f_0 = f(-3) = (-3)^2 - 3\,(-3) - 3 = 15 \tag{5}$$
$$f_1 = f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 3 = -3 \tag{6}$$
$$f_2 = f(-1{,}5) = (-1{,}5)^2 - 3\,(-1.5) - 3 = 3{,}75 \tag{7}$$

Točk: 5

Vrednosti f_0 in f_2 imata enaka predznaka, zato definiramo nov interval: $[-1{,}5;\ 0]$. To postane naš novi začetni interval: $x_0 = -1{,}5$, $x_1 = 0$. Točk: 5

Drugi korak

$$x_2 = \frac{-1{,}5 + 0}{2} = -0{,}75 \tag{8}$$

Izračunamo vrednosti funkcije:

$$f_0 = f(-1{,}5) = 3{,}75 \tag{9}$$
$$f_1 = f(0) = -3 \tag{10}$$
$$f_2 = f(-0{,}75) = -0{,}1875 \tag{11}$$

Vrednosti f_0 in f_2 imata različna predznaka, zato definiramo nov interval: $[-1{,}5;\ -0{,}75]$. To postane naš novi začetni interval: $x_0 = -1{,}5$, $x_1 = -0{,}75$. Točk: 5

3. vprašanje
Predstavite Eulerjevo metodo za reševanje diferencialnih enačb.
Na primeru diferencialne enačbe: $\ddot{x} + k\,x = 0$, pokažite kako diferencialno enačbo 2. reda preoblikujemo na sistem dveh diferencialnih enačb 1. reda. Če so začetni pogoji: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, potem pokažite izračun prvih dveh časovnih korakov z Eulerjevo metodo ($k = 1$ in korak: $h = 1$). *(35 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Eulerjeva metoda temelji na razvoju Taylorjeve vrste do drugega člena:

$$y(t + h) = y(t) + y'(t,y(t))\,h + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

Izrazimo prvi odvod:

$$y'(t) = f(t, y) \tag{2}$$

Točk: 5

Koraki Eulerjeve metode so naslednji:

1. $i = 0$, poznamo $y(t_0)$ in $y'(t_0, y(t_0))$
2. Izračunamo vrednost funkcije pri $t_{i+1} = t_i + h$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\, h \tag{3}$$

3. $i = i + 1$ in ponovimo korak 2

Koraka 2 in 3 ponavaljamo do t_n.

Točk: 5

Diferencialno enačbo $\ddot{x} + k\,x = 0$ zapišemo kot sistem diferencialnih enačb prvega reda. Preoblikujemo enačbo:

$$\ddot{x} = -k\,x \tag{4}$$

Zapišemo nove oznake:

$$y_0 = x \tag{5}$$

$$y_1 = \dot{x} \tag{6}$$

Točk: 5

in jih odvajamo:

$$y_0' = x' = y_1 \tag{7}$$

$$y_1' = x'' = -k\,y_0 \tag{8}$$

Dobili smo sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.

Točk: 5

Poznamo začetne pogoje:

$$x(0) = 0 \tag{9}$$

$$\dot{x}(0) = 1 \tag{10}$$

in tudi vrednost:

$$\ddot{x}(0) = -k\,x(0) = 0 \tag{11}$$

Točk: 5

Prvi korak
Sistem enačb v prvi točki:

$$y_0(t_1) = y_0(0) + y_1(0)\,h = 0 + 1 \cdot 1 = 1 \tag{12}$$

$$y_1(t_1) = y_1(0) - k\,y_0(0)\,h = 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 = 1 \tag{13}$$

Točk: 5

Drugi korak
Sistem enačb v drugi točki:

$$y_0(t_2) = y_0(t_1) + y_1(t_1)\,h = 1 + 1 \cdot 1 = 2 \tag{14}$$

$$y_1(t_2) = y_1(t_1) - k\,y_0(t_1)\,h = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \tag{15}$$

Točk: 5

4 Datum: 10.1.2020

1. vprašanje
Kako matriko preoblikujemo v t.i. vrstično kanonično obliko? Zakaj se uporablja vrstična kanonična oblika matrike?
Matriko:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{1}$$

preoblikujte v vrstično kanonično obliko.
Če $\boldsymbol{A}$ predstavlja razširjeno matriko sistema linearnih enačb in je zadnji stolpec vektor konstant, določite rang osnovne in razširjene matrike. Ali ima takšen sistem enolično rešitev? *(30 %)*

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

S pomočjo množenja in seštevanja vrstic lahko matriko preoblikujemo tako, da:

- so ničelne vrstice na dnu matrike
- je prvi neničelni element vrstice desno od prvih neničelnih elementov prejšnjih vrstic
- je pivot enak 1 (pivot je prvi neničelni element v vrstici)
- pivot je edini neničelni element v stoplcu

Dobimo vrstično kanonično obliko. Točk: 5

Vrstično kanonično obliko uporabljamo za določitev ranga matrike. Rang matrike je enak številu neničelnih vrstic kanonične oblike. Točk: 5

Postopek preoblikovanja matrike $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2 - 2 \cdot \boldsymbol{A}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2 - 0.5 \cdot \boldsymbol{A}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Točk: 5

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{A}_1 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1 / 2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A}_2 = -2\,\boldsymbol{A}_2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2/2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}_0 - 3\,\boldsymbol{A}_2 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Točk: 5

Rang razširjene matrike je enak 3. Rang osnovne matrike je enak 2. Točk: 5

Tak sistem enačb **nima** enolične rešitve. Točk: 5

2. vprašanje

Gaussov integracijski pristop je definiran z izrazom:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} w_i\,f(x_i). \tag{1}$$

Naloga:

1. Pojasnite zgornji izraz ter definirajte in pojasnite uporabljene simbole.
2. Pojasnite princip Gaussovega integracijskega pristopa glede na pristop Newton-Cotes.
3. Določite parametre Gaussove integracije za linearno funkcijo: $f(x) = P_1(x) = A_0 + A_1\,x$.
4. Določite parametre Gaussove integracije za polinom 3. stopnje: $f(x) = P_3(x) = A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + A_3\,x^3$ (namig: potrebni sta dve vozlišči, ustavite se pri sistemu enačb).

(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

Naloga:

1. Levi del predstavlja integral, katerega želimo določiti, desni del pa njegovo numerično oceno. Pri tem je $f(x)$ podintegralska funkcija, ki jo integriramo po neodvisni spremenljivki x od spodnje meje a do zgornje meje b. w_i so neznane uteži, x_i lega neznanega vozlišča. i je indeks vozlišča, katerih je n. Točk: 7.5

2. Newton-Cotes išče površino interpolirane polinomske funkcije. Cilj Gaussovega integracijskega pristopa je integral funkcije $f(x)$ nadomestiti z uteženo (neznano) vsoto vrednosti funkcije pri (neznani) diskretnih vrednostih $f(x_i)$. Točk: 7.5

3. Integral linearne funkcije je (leva stran):

$$\int_a^b P_1(x)\,\mathrm{d}x = \left(A_0\,x + A_1\,\frac{x^2}{2}\right)_a^b = -A_0\,a + A_0\,b - \frac{A_1\,a^2}{2} + \frac{A_1\,b^2}{2}. \tag{2}$$

   Desna vsota (ob predpostavki, da je $n = 1$):

$$w_0\,P_1(x_0) = w_0\,A_0 + w_0\,A_1\,x_0. \tag{3}$$

Točk: 5

Na podlagi izrazov (2) in (3) ob predpostavki poljubnega polinoma (npr. $A_0 = 1$ in $A_1 = 0$) izpeljemo rešitev:

$$w_0 = b - a, \qquad x_0 = \frac{b+a}{2}. \tag{4}$$

Točk: 5

4. Postopamo podobno kakor pri linearni funkciji, integral funkcije je (leva stran):

$$\int_a^b P_3(x)\,\mathrm{d}x = -A_0\,a + A_0\,b - \frac{A_1\,a^2}{2} + \frac{A_1\,b^2}{2} - \frac{A_2\,a^3}{3} + \frac{A_2\,b^3}{3} - \frac{A_3\,a^4}{4} + \frac{A_3\,b^4}{4}. \tag{5}$$

Desna vsota (ob predpostavki, da je $n = 2$):

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i\,P_3(x_i) = A_0\,w_0 + A_0\,w_1 + A_1\,w_0\,x_0 + A_1\,w_1\,x_1 + A_2\,w_0\,x_0^2 + A_2\,w_1\,x_1^2 + A_3\,w_0\,x_0^3 + A_3\,w_1\,x_1^3. \tag{6}$$

Točk: 5

Na podlagi izrazov (5) in (6) izpeljemo rešitev (štiri enačbe za štiri neznanke: x_0, x_1, w_0, w_1):

$$-a + b = w_0 + w_1, \tag{7}$$

$$-\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = w_0\,x_0 + w_1\,x_1, \tag{8}$$

$$-\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} = w_0\,x_0^2 + w_1\,x_1^2, \tag{9}$$

$$-\frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4} = w_0\,x_0^3 + w_1\,x_1^3. \tag{10}$$

Točk: 5

3. vprašanje

1. Predstavite Eulerjevo metodo za reševanje diferencialnih enačb.
2. Kako določimo napako pri Eulerjevi metodi?
3. V čem se eksplicitna Eulerjeva metoda razlikuje od implicitne Eulerjeve metode? Pojasnite prednosti in slabosti enega ali drugega pristopa!

(35 %)

Okviren odgovor je podan spodaj (skice niso podane; študente pa vzpodbujamo, da jih uporabljajo, saj lahko bistveno pripomorejo k jasnosti odgovora).

1. Eulerjeva metoda temelji na razvoju Taylorjeve vrste do drugega člena:

$$y(t+h) = y(t) + y'(t,y(t))\,h + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

Izrazimo prvi odvod:

$$y'(t) = f(t,y) \tag{2}$$

Točk: 5

Koraki Eulerjeve metode so naslednji:

(a) $i = 0$, poznamo $y(t_0)$ in $y'(t_0, y(t_0))$

(b) Izračunamo vrednost funkcije pri $t_{i+1} = t_i + h$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\, h \tag{3}$$

(c) $i = i + 1$ in ponovimo korak 2

Koraka 2 in 3 ponavaljamo do t_n.

Točk: 5

2. Lokalna napaka Eulerjeve metode je drugega reda $\mathcal{O}(h^2)$, globalna je prvega reda $\mathcal{O}(h^1)$.

   Točna rešitev $y(t_n)$ pri velikosti koraka h je:$y(t_n) = y_{n,h} + E_h$, kjer je $y_{n,h}$ numerični približek in E_h napaka metode. Ker je globalna napaka prvega reda, lahko napako zapišemo kot: $E_h = k\,h$..

   Podobno lahko za velikost koraka $2h$ zapišemo: $y(t_n) = y_{n,2h} + E_{2h}$, kjer je $y_{n,2h}$ numerični približek in E_{2h} napaka metode: $E_{2h} = k\,2\,h$.

   Točk: 5

   Ob predpostavki, da je konstanta k pri koraku h in koraku $2h$ enaka, lahko določimo oceno napake:

$$E_h = k\,h = y_{n,h} - y_{n,2h}. \tag{4}$$

Točk: 5

3. Implicitna Eulerjeva metoda temelji temelji na izrazu:

$$y(t + h) = y(t) + y'(t + h,y(t + h))\, h + \mathcal{O}(h^2). \tag{5}$$

   Ko zanemarimo napako, dobimo izraz

$$y(t + h) = y(t) + y'(t + h,y(t + h))\, h, \tag{6}$$

   kateri predstavlja nelinearno enačbo z neznanko $y(t + h)$.

   Točk: 10

   Prednost implicitne Eulerjeve metode je, da je bolj stabilna in omogoča večje korake integracije kakor eksplicitna oblika. Slabost metode je, da je numerično bolj zahtevna, saj na vsakem časovnem koraku zahteva iskanje rešitve nelinearne enačb.

Točk: 5