

## PERTEMUAN 4

### ALGORITMA LINGKARAN DAN ELIPS

#### A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah menyelesaikan materi pada pertemuan ini, mahasiswa mampu menerapkan algoritma lingkaran dan elips.

Pada pertemuan ini akan dijelaskan mengenai :

1. Algoritma Pembuatan Lingkaran
2. Algoritma Elips

#### B. URAIAN MATERI

##### 1. Algoritma Pembuatan Lingkaran

Secara umum lingkaran merupakan kumpulan titik-titik yang menyebar serta mempunyai jarak dengan titik pusat yang serupa pada semua titik yang tersebar tersebut. Bangun lingkaran umumnya terbentuk dengan cara menggambar seperempat lingkaran yang sama simetris dengan bagian lainnya. Sehingga bertambahnya  $x$  bisa dilakukan dari nol ke  $r$  dengan menambahkan sejumlah bagian *step*, yaitu dengan menjumlahkan  $\pm y$  kepada tiap-tiap *step*.

Persamaan lingkaran yang memiliki titik pusat di koordinat  $(x_p, y_p)$  kemudian jari-jari  $r$  dinotasikan dengan persamaan berikut:

$$(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r^2$$

Persamaan 3 - 2

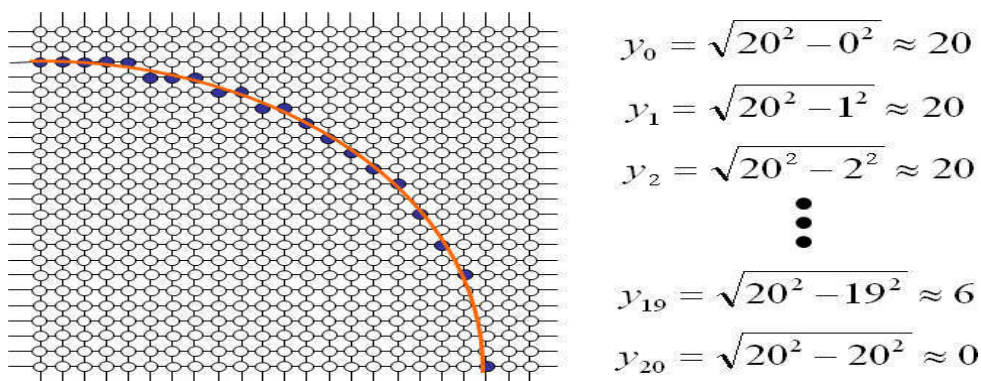
Atau

$$y = y_p \pm \sqrt{r^2 - (x - x_p)^2}$$

Persamaan 3 - 3

Dalam melakukan penggambaran piksel-piksel di dalam kurva sebuah lingkaran, maka kita bisa memakai sumbu  $x = (x_p - r)$  hingga  $x = (x_p + r)$  untuk menjadi acuan, kemudian menggunakan sumbu  $y$  yang menjadi hasil persamaan koordinat (2-10). Salah satu kesulitan dalam menggunakan algoritma

ini adalah karena diperlukan waktu operasi yang cukup besar, hal ini disepertemuangkan karena algoritma ini membutuhkan operasi perkalian dua bilangan bulat (integer). Sehingga dibutuhkan fungsi yang mendukung yaitu SQRT (fungsi pendukung penghitungan akar bilangan) kemudian adalah fungsi ROUND (fungsi pendukung dalam membulatkan bilangan pecahan menjadi bilangan bulat/integer). Selain itu kesulitan lainnya adalah kordinat piksel yang dihasilkan tidak merata hal ini dikarenakan adanya jarak/gap yang disepertemuangkan dari perubahan gradien.



Gambar 4. 1 Adanya jarak/gap dikarenakan perubahan gradien sehingga menghasilkan kordinat pada piksel menjadi tidak merata.

Untuk mengurangi resiko letak persebaran kordinat pixel tidak seimbang, kordinat letak pixel (x,y) diubah menggunakan kordinat polar dengan menggunakan persamaan (3 - 4)

$$x = x_p = r \cos \theta \quad \text{dan} \quad y = y_p = r \sin \theta$$

Menggunakan persamaan 3 – 4

Walaupun begitu, cara ini membutuhkan waktu pengoperasian cukup besar dikarenakan adanya perhitungan angka real, penjumlahan trigonometri, kemudian juga memerlukan segmen bagian dari garis yang cukup banyak.

#### a. Simetris Delapan Titik (lingkaran)

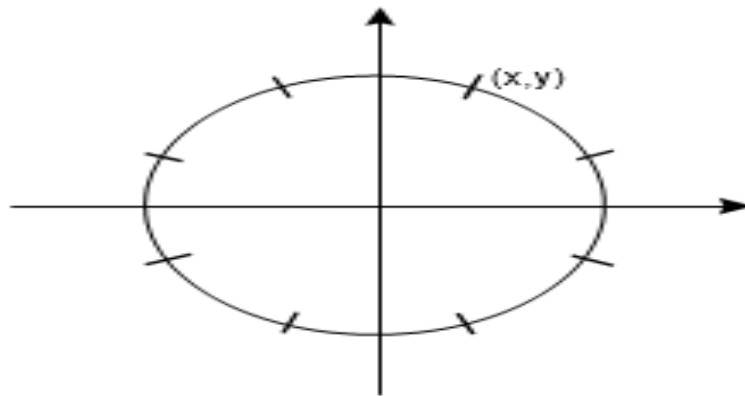
Penggambaran lingkaran kurva bisa dimulai dari penentuan dimana letak titik awal (x,y) yang ada di lingkaran, sehingga titik-titik lainnya dapat kita tentukan pula dengan menggunakan ketentuan berikut :

$(-x,y), (x, -y), (-x, -y), (y,x), (-y,x), (y, -x), (-y, -x)$

Sampai pada akhirnya akan menjadi 8 buah kordinat :

$(x, y), (-x,y), (x, -y), (-x, -y), (y,x), (-y,x), (y, -x), (-y, -x)$

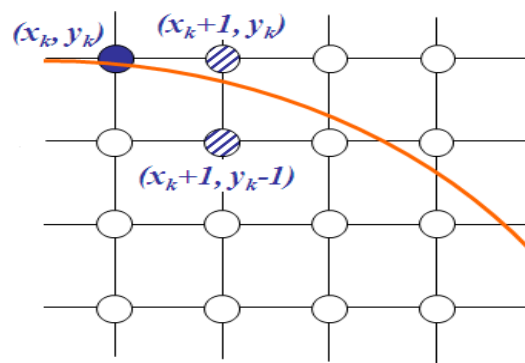
Jadi, hal ini diperlukan dalam menghitung segmen 45 derajat untuk melengkapi lingkaran sampai terbentuk sempurna.



Gambar 4. 2 Bentuk lingkaran simetris delapan titik

#### b. Midpoint Algorithm

Midpoint algorithm dikenal juga dengan nama algoritma lingkaran bresenham. Pembuatan titik pada algoritma ini didasarkan kepada titik pusat lingkaran dengan penambahan di seluruh jalur yang ada di sekeliling lingkaran. Langkah pertama komputasi dimulai dengan mengidentifikasi bagian yang ada di lingkaran dengan memakai sifat dari simetri. Caranya adalah dengan membagi lingkaran sehingga masing-masing bagian memiliki sudut sebesar 45 derajat, jadi lingkaran tersebut akan terbagi menjadi 8 bagian yang sama besar.



Gambar 4. 3 ilustrasi letak garis yang terletak di titik antara  $(x_k+1, y_k)$  juga  $(x_k+1, y_k - 1)$

Misalnya kita memiliki letak kordinat  $(x_k, y_k)$ . Langkah berikutnya yaitu menentukan kordinat mana diantara  $(x_k+1, y_k)$  dan  $(x_k+1, y_k - 1)$  yang paling dekat dengan bangun lingkaran. Selanjutnya, persamaan kurva lingkaran tersebut bisa dilihat seperti di bawah ini :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

Sehingga,

$$f(x, y) \begin{cases} < 0, & \text{jika } (x, y) \text{ didalam lingkaran} \\ = 0, & \text{jika } (x, y) \text{ terletak pada lingkaran} \\ > 0, & \text{jika } (x, y) \text{ terletak diluar lingkaran} \end{cases}$$

Dalam menentukan titik antara  $(x_k+1, y_k)$  dan  $(x_k+1, y_k - 1)$  dimana kita anggap paling dekat dengan lingkaran, terdapat beberapa ketentuan yang kita pakai dengan menggunakan letak kordinat tengah  $(x_k+1, y_k - \frac{1}{2})$  yaitu :

$$p_k = f(x_k+1, y_k - \frac{1}{2}) = (x_k+1)^2 + (y_k - \frac{1}{2})^2 - r^2$$

Apabila  $p_k < 0$  letak titik tengahnya terletak didalam dari lingkaran, artinya kordinat  $(x_k+1, y_k)$  yang kita pilih. Apabila  $p_k > 0$  letak titik tengahnya terletak diluar dari lingkaran, artinya kordinat  $(x_k+1, y_k - 1)$  yang kita pilih.

$$p_{k+1} = f\left(x_{k+1} + 1, y_{k+1} - \frac{1}{2}\right) = [(x_k + 1) + 1]^2 + \left(y_{k+1} - \frac{1}{2}\right)^2 - r^2$$

Dan

$$p_{k+1} = p_k + 2(x_k + 1) + (y_{k+1}^2 - y_k^2) - (y_{k+1} - y_k) + 1$$

Titik  $y_{k+1}$  yaitu  $y_k/y_{k-1}$  bergantung pada tanda yang ada di  $p_k$ . Untuk kasus seperti ini ketentuan awal dapat kita hitung menggunakan cara berikut :

$$p_0 = f\left(1, r - \frac{1}{2}\right) = 1 + \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 - r^2 = \frac{5}{4} - r$$

Apabila nilai jari-jari lingkaran berupa bilangan bulat (integer), maka kita dapat melakukan pembulatan  $p_0$  seperti dibawah ini :

$$p_0 \square 1 \square r$$

Apabila nilai  $p_k < 0$  maka:

$$p_k \square 1 \square p_k \square 2x_k \square 1 \square 1$$

Apabila nilai  $p_k > 0$  artinya:

$$p_k \square 1 \square p_k \square 2x_k \square 1 \square 1 \square 2 y_k \square 1$$

Sehingga kita memperoleh cara dalam membuat algoritma pembentukan lingkaran midpoint seperti dibawah ini :

- 1) Pilihlah  $r$  (jari-jari) kemudian letak titik pusat dari lingkaran  $(x_p, y_p)$ , selanjutnya buatlah pengaturan sehingga posisi letak kordinat awal dengan nilai :  $(x_0, y_0) = (0, r)$
- 2) Hitunglah angka acuan dasar :

$$p_0 = \frac{5}{4} - r$$

Apabila  $r$  berupa bilangan pecahan

$$p_0 \square 1 \square r$$

Apabila  $r$  berupa bilangan bulat

- 3) Pada tiap-tiap letak posisi  $x_k$ , dapat kita mulai dengan  $k = 0$  maka akan berlaku ketentuan seperti ini:
  - a) jika  $p_k < 0$ , artinya kordinat berikutnya yaitu  $(x_{k+1}, y_k)$  kemudian
 
$$p_{k+1} = p_k + 2 x_{k+1} + 1$$
  - b) jika bukan, artinya kordinat berikutnya yaitu  $(x_{k+1}, y_k - 1)$  kemudian
 
$$p_{k+1} = p_k + 2 x_{k+1} + 1 - 2 y_{k+1}$$
- 4) Aturlah titik simetri di 7 (tujuh) oktan lainnya
- 5) Ubahlah posisi dari setiap pixel  $(x, y)$  di dalam garis bangun lingkaran yang berdasarkan kepada letak kordinat pusat  $(x_p, y_p)$  kemudian juga plot nilai kordinat :  $x = x + x_p, y = y + y_p$
- 6) Ulang instruksi ke 3 dan juga instruksi ke 5 sampai didapatkan  $x \geq y$

### Contoh 1:

Coba buat kurva dari lingkaran yang memiliki titik pusat yaitu (4,6) dan jari-jari ( $r$ ) sebesar 8. Lakukan perhitungan dengan didasarkan pada oktan kuadran pertama yaitu  $x = 0$  hingga  $x = y$ , dengan kordinat awal di  $(x, r) = (0, 8)$ , diketahui jari-jari lingkaran adalah bilangan integer, oleh karena itu gunakan  $P_0 + 1 - r$ .

Cara Menjawab :

Pengulangan pertama :

$$K = 0, X_0 = 0, Y_0 = r = 8, P_0 = 1 - r = 1 - 8 = -7$$

Sepertemuan  $P_0 < 0$ , oleh karena itu :

$$X_1 = X_0 + 1 = 0 + 1 = 1 \text{ kemudian } Y_1 = Y_0 = 8,$$

Maka kordinat berikutnya : (1,8)

$$P_1 = p_0 + 2 x_1 + 1 = -7 + 2.(1) + 1 = -4$$

Menggunakan lingkaran simetris 8 titik, Selanjutnya kita akan mendapatkan titik sebagaimana dibawah ini :

(1,8), (-1,8), (1, -8), (-1, -8), (8,1), (-8,1), (8, -1), (-8, -1)

Pindahkan letak tiap-tiap piksel (x,y) pada lingkaran yang memiliki titik pusat di (4,6) sehingga akan didapatkan letak titik sebagai berikut ini :

(5, 14), (3, 14), (5, -2), (3, -2), (12, 7), (-4, 7), (12, 5), (-4, 5)

Pengulangan kedua :

$K = 1, X_1 = 1, Y_1 = 8, P_1 = -4$

Sepertemuan  $P_1 < 0$ , oleh karena itu :

$X_2 = X_1 + 1 = 1 + 1 = 2$  kemudian  $Y_2 = Y_1 = 8$ ,

Maka kordinatnya berikutnya : (2,8)

$P_2 = p_1 + 2 x_2 + 1 = -4 + 2.(2) + 1 = 1$

Menggunakan lingkaran simetris 8 titik, Selanjutnya kita akan mendapatkan titik sebagaimana dibawah ini :

(2,8), (-2,8), (2, -8), (-2, -8), (8,2), (-8,2), (8, -2), (-8, -2)

Pindahkan letak tiap-tiap piksel (x,y) pada lingkaran yang memiliki titik pusat di (4,6) sehingga akan didapatkan letak titik sebagai berikut ini :

(6, 14), (2, 14), (6, -2), (2, -2), (12, 8), (-4, 8), (12, 4), (-4, 4)

Pengulangan ketiga :

$K = 2, X_2 = 2, Y_2 = 8, P_2 = 1$

Sepertemuan  $P_2 > 0$ , oleh karena itu :

$X_3 = X_2 + 1 = 2 + 1 = 3$  kemudian  $Y_3 = Y_2 - 1 = 8 - 1 = 7$

Maka kordinat berikutnya : (3,7)

$P_3 = p_2 + 2 x_3 + 1 - 2 y_3 = 1 + 2.(3) + 1 - 2.(7) = -6$

Menggunakan lingkaran simetris 8 titik, Selanjutnya kita akan mendapatkan titik sebagaimana dibawah ini:

(3,7), (-3,7), (3, -7), (-3, -7), (7,3), (-7,3), (7, -3), (-7, -3)

Pindahkan letak tiap-tiap piksel (x,y) pada lingkaran yang memiliki titik pusat di (4,6) sehingga akan didapatkan letak titik sebagai berikut ini :

(7, 13), (1, 13), (7, -1), (1, -1), (11, 9), (-3, 9), (11, 3), (-3, 3)

Pengulangan keempat :

$$K = 3, X_3 = 3, Y_3 = 7, P_3 = -6$$

Sepertemuan  $P_3 < 0$ , oleh karena itu :

$$X_4 = X_3 + 1 = 3 + 1 = 4 \text{ kemudian } Y_4 = Y_3 = 7,$$

Maka kordinat berikutnya : (4,7)

$$P_4 = p_3 + 2 x_4 + 1 = -6 + 2.(4) + 1 = 3$$

Menggunakan lingkaran simetris 8 titik, Selanjutnya kita akan mendapatkan titik sebagaimana dibawah ini:

$$(4,7), (-4,7), (4, -7), (-4, -7), (7,4), (-7,4), (7, -4), (-7, -4)$$

Pindahkan letak tiap-tiap piksel (x,y) pada lingkaran yang memiliki titik pusat di (4,6) sehingga akan didapatkan letak titik sebagai berikut ini :

$$(8, 13), (0, 13), (8, -1), (0, -1), (11, 10), (-3, 10), (11, 2), (-3, 2)$$

engulangan kelima :

$$K = 4, X_4 = 4, Y_4 = 7, P_4 = 3$$

Sepertemuan  $P_4 > 0$ , oleh karena itu :

$$X_5 = X_4 + 1 = 4 + 1 = 5 \text{ kemudian } Y_5 = Y_4 - 1 = 7 - 1 = 6 ,$$

$$\text{Maka kordinat berikutnya: } (5,6) \quad P_5 = p_4 + 2 x_4 + 1 - 2 y_4 = 3 + 2.(5) + 1 - 2.(6) = 2$$

Menggunakan lingkaran simetris 8 titik, Selanjutnya kita akan mendapatkan titik sebagaimana dibawah ini:

$$(5,6), (-5,6), (5, -6), (-5, -6), (6,5), (-6,5), (6, -5), (-6, -5)$$

Pindahkan letak tiap-tiap piksel (x,y) pada lingkaran yang memiliki titik pusat di (4,6) sehingga akan didapatkan letak titik sebagai berikut ini :

$$(9, 12), (-1, 12), (9, 0), (-1, 0), (10, 11), (-2, 11), (10, 1), (-2, 1)$$

engulangan keenam :

$$K = 5, X_5 = 5, Y_5 = 6, P_5 = 2$$

Sepertemuan  $P_5 > 0$ , oleh karena itu :

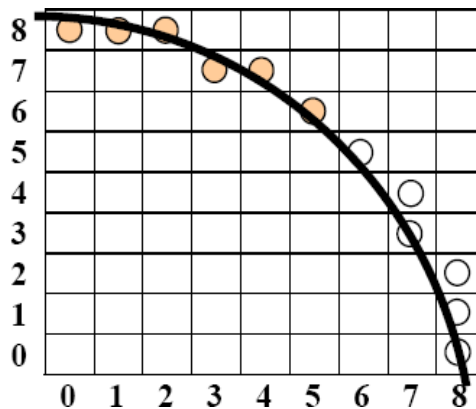
$$X_6 = X_5 + 1 = 5 + 1 = 6 \text{ kemudian } Y_6 = Y_5 - 1 = 6 - 1 = 5 ,$$



Maka kordinat berikutnya: (6,5)

Pengulangan tidak lagi perlu dilakukan dikarenakan  $X > Y$ .

Jika dilakukan penggambaran, maka akan didapatkan hasil oktan pertama sebagaimana dapat dilihat pada gambar 4.4



Gambar 4. 4 Ilustrasi letak piksel dengan pembentukan lingkaran yang memiliki titik pusat yaitu (0,0) dengan r sebesar 8

## 2. Algoritma Pembentukan Elips

**Bentuk elips** adalah salah satu bentuk modifikasi dari bangun dasar lingkaran. Hal ini dilakukan dengan cara menambahkan beberapa minor dan mayor axis dalam tata cara pembentukan lingkaran. Bentuk ellips dibuat dengan satu bagian titik dan juga tetap memperhatikan gap diatara kedua titik atau biasa disebut foci. Jika gap kedua foci dari sembarang letak kordinatp (x,y) ditandai dengan tanda d1 dan juga d2, maka kita akan mendapatkan persamaan bentuk elips yaitu :

$$d1+d2=\text{konstan}$$

Hal ini untuk memberikan gambaran jarak antara d1 dan d2 dan kordinat setiap titik  $F1(x1,y1)$  kemudian  $F2(X2,Y2)$

$$((x-x1)^2+(y-y1)^2)+((x-x2)^2+(y-y2)^2)=\text{konstan}$$

Yaitu ketika posisi minor dan juga mayor axis bentuk ellips berada di posisi paralel antara sumbu x dengan sumbu y di dalam contoh seperti ini. Selain itu, parameter lainnya seperti rx dikenal dengan sebutan semi mayor axis dan ry

dikenal dengan sebutan semi minor axis. Maka akan diperoleh persamaan bentuk ellips menggunakan acuan dasar  $r_x$  dan juga  $r_y$  sebagai berikut :

$$((x-r_c)/r_x)^2 + ((y-r_c)/r_y)^2 = 1$$

Salah satu algoritma pembentukan ellips yang umum digunakan adalah algoritma elips midpoint. Algoritma ini memiliki pendekatan yang tidak berbeda jauh dengan algoritma pembentukan lingkaran. Menggunakan parameter dengan elips yang berada pada posisi yang umum, terdapat  $r_x$ ,  $r_y$ , dan  $(x_c, y_c)$  di dalamnya. Jika elips akan digambarkan dengan letak pada umumnya, maka langkah yang bisa dipakai adalah mengubah ellips ke arah turun (diputar) dari koordinat pusatnya, hal ini dilakukan supaya didapatkan kembali minor dan mayor axisnya.

Teknik ini dioperasikan di kuadran pertama yang terbagi ke dalam dua langkah, pertama yaitu menurut kemiringan dari bentuk elips  $r_x < r_y$ , apabila slope nilainya kurang dari 1 (satu) maka dilakukan penambahan unit step searah dengan sumbu x. Sedangkan apabila slope nilainya lebih besar dari 1 (satu) maka penambahan dilakukan searah dengan sumbu y.

Kedua bagian ini bisa diaplikasikan dalam berbagai macam teknik. Contoh pertama kita mulai dari letak posisi  $(0, r_y)$  dan step yang arahnya sama dengan jarum jam yang sejajar dengan jalur ellips dalam kuadran kesatu. Perubahan pada unit step di dalam x dilakukan ketika nilai kemiringannya memiliki angka diatas 1 (satu).

Teknik lainnya adalah dengan memulainya dari posisi  $(r_x, 0)$  dengan seleksi titik yang arahnya tidak searah dengan jarum jam. Pengubahan unit step y menjadi unit step x dilakukan ketika nilai kemiringan (*slope*) memiliki nilai diatas -1. Menggunakan prosesor paralel, maka kita dapat melakukan penghitungan posisi pixel dengan dua bagian secara bersamaan.

Teknik pembentuk elips dengan menggunakan algoritma midpoint adalah seperti di bawah ini :

1. Tentukan dimana posisi  $r_x, r_y$  kemudian juga titik inti dari ellips  $(x_c, y_c)$  hingga didapatkan

$$(x_0, y_0) = (0, r_y)$$

2. Hitunglah angka-angka pada acuan dasar :  $P_{10} = r_y^2 - r_x^2 r_y + 1/4 r_x^2$

3. Tentukan angka untuk awalan  $k=0$ , pada tiap-tiap letak posisi  $x_k$  maka digunakan ketentuan seperti dibawah ini :

- a. Jika nilai  $p1_k < 0$  artinya titik berikutnya yaitu  $(x_{k+1}, y_k)$

$$p1_{k+1} = p1_k + 2r_y^2 x_{k+1} + r_y^2$$

- b. Jika tidak, artinya titik berikutnya yaitu  $(x_{k+1}, y_{k-1})$  dan

$$p1_{k+1} = p1_k + 2r_y^2 x_{k+1} - 2r_x y_{k+1} + r_y^2$$

Kemudian

$$2r_y^2 x_{k+1} = 2r_y^2 x_k + 2r_y^2$$

Dan

$$2r_x y_{k+1} = 2r_x^2 y_k + 2r_x^2$$

Terakhir

$$2r_y^2 x \geq 2r_x^2 y$$

4. Tentukan angka-angka dari acuan dasar di bagian selanjutnya dengan memakai titik akhir  $(x_0, y_0)$  dan sudah di lakukan perhitungan di bagian sebelumnya, seperti dapat dilihat dibawah ini :

$$P_{k+1}^2 = 2r_y^2 (x_0 + 1/2)^2 + 2r_x^2 (y_0 - 1)^2 - r_x^2 r_y^2$$

5. seluruh posisi  $y_k$  di bagian kedua kita mulai menggunakan  $k=0$

- a. Jika  $p2_k > 0$ , artinya kordinat berikutnya yaitu  $(x_k, y_{k-1})$

$$p2_{k+1} = p2_k + 2r_x^2 y_{k+1} + r_x^2$$

- b. Jika bukan, artinya titik berikutnya yaitu  $(x_{k+1}, y_{k-1})$  dan

$$p2_{k+1} = pk + 2r_y^2 x_{k+1} - 2r_x y_{k+1} + r_y^2$$

6. Carilah letak titik simetris di tiga bagian kuadran yang lain.
7. Ubahlah tiap-tiap posisi (x,y) di garis yang melingkar pada bentuk elips menggunakan titik pusat (xc,yc) kemudian carilah nilai kordinat

$$X = x + xc, \quad y = y + yc$$

8. Terus ualng instruksi kesatu seperti diatas sampai didapatkan nilai  $2r_y^2 x$   
 $> = 2r_x^2 y$

**C. SOAL LATIHAN/TUGAS**

Latihan	Petunjuk Pengerjaan Tugas
<b>Latihan Pertemuan 4</b>	1. Coba gambarkan lingkaran dengan koordinat pusat yaitu $(0,0)$ kemudian angka jari-jari $(r)=6$ , hitunglah dengan didasarkan pada oktan kuadran pertama, dengan $x = 0$ hingga $y = r$ , dan koordinat dari letak awalan yang diawali di titik $(x,r) = (0,6)$ .

**D. REFERENSI**