

PERTEMUAAN 6

ALGORITMA PEWARNAAN BIDANG

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Setelah menyelesaikan materi pada pertemuan ini, mahasiswa mampu algoritma pewarnaan bidang.

Pada pertemuan ini akan dijelaskan mengenai :

1. Pengertian Pewarnaan Bidang
2. Algoritma Pewarnaan Bidang

B. URAIAN MATERI

1. Pengertian Pewarnaan Bidang

Dalam teori graf, pewarnaan graf merupakan permasalahan spesial pelabelan graf; merupakan penugasan label yang secara tradisional diucap "corak" ke elemen grafik yang tunduk pada batas tertentu. Dalam wujud yang sangat simpel, ini merupakan metode memberi warna simpul- simpul dari suatu grafik sehingga tidak terdapat 2 simpul yang bersebelahan mempunyai corak yang sama; ini diucap pewarnaan puncak. Demikian pula, corak tepi menetapkan corak ke tiap tepi sehingga tidak terdapat 2 tepi yang bersebelahan mempunyai corak yang sama, serta corak wajah dari bagan datar menetapkan corak ke tiap wajah ataupun kawasan sehingga tidak terdapat 2 wajah yang berbagi. batasan dengan corak yang sama. corak yang sama.

Pewarnaan simpul biasanya digunakan buat menghadirkan permasalahan pewarnaan grafis, sepertemuan permasalahan pewarnaan yang lain bisa diganti jadi contoh pewarnaan simpul. Bagaikan contoh, pewarnaan tepi dari suatu graf cumalah pewarnaan simpul dari graf garisnya, serta pewarnaan wajah dari suatu graf datar cumalah pewarnaan simpul dari gandanya. Tetapi, permasalahan pewarnaan tanpa simpul kerap diajukan serta dipelajari sebagaimana terdapatnya. Ini sebagian bertabiat pedagogis serta sebagian sepertemuan

sebagian permasalahan sangat baik dipelajari dalam wujud tanpa titik sudutnya, semacam dalam permasalahan pewarnaan tepi.

Syarat pemakaian corak berasal dari memberi warna negara- negara di peta, di mana tiap wajah diwarnai secara harfiah. Ini digeneralisasikan buat memberi warna wajah dari grafik yang disematkan di pesawat. Dengan dualitas bidang itu jadi memberi warna simpul, serta dengan metode ini digeneralisasikan ke seluruh grafik. Dalam representasi matematika serta pc, umumnya memakai bilangan bundar positif ataupun non- negatif awal bagaikan "corak". Secara universal, tiap himpunan sampai bisa digunakan bagaikan "himpunan corak". Watak dari permasalahan pewarnaan bergantung pada jumlah corak, namun bukan pada jumlah rupanya.

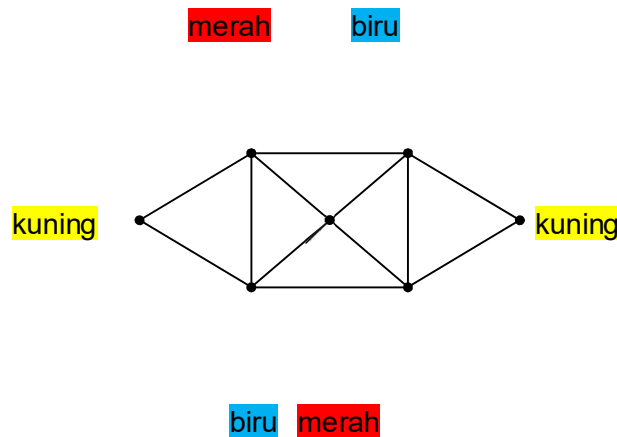
Pewarnaan grafis menikmati banyak aplikasi instan dan tantangan teoretis. Tidak hanya tipe permasalahan klasik, bermacam batas pula bisa diresmikan pada grafik, ataupun metode penetapan corak, ataupun apalagi corak itu sendiri. Dia apalagi menarik atensi warga universal dalam wujud misteri angka Sudoku yang terkenal. Pewarnaan grafis senantiasa jadi bidang riset yang sangat aktif.

2. Algoritma Perwanaaan Bidang

Terdapat 3 berbagai pewarnaan graf, ialah pewarnaan simpul pewarnaan sisi, serta pewarnaan daerah (*region*). Yang hendak kita bahas merupakan pewarnaan simpul serta pewarnaan daerah (*region*).

Pewarnaan simpul merupakan berikan corak pada simpul-simpul sesuatu graf sedemikian sampai tidak terdapat 2 simpul bertetangga yang memiliki corak yang sama. Kita bisa membagikan sembarang corak pada simpul- simpul asalkan berbeda dengan simpul simpul tetangganya.

Dalam pewarnaan graf, kita tidak cuma hanya memberi warna simpul-simpul dengan corak yang berbeda dengan corak simpul tetangganya saja, tetapi kita pula menginginkan supaya jumlah corak yang digunakan sesedikit bisa jadi. Jumlah corak minimum yang bisa digunakan buat memberi warna simpul simpul diucap bilangan kromatik dari graf G , yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Foto 1 memperlihatkan suatu graf, dengan $\chi(G) = 3$.



Gambar 6. 1 Tiga warna cukup untuk mewarnai graf ini

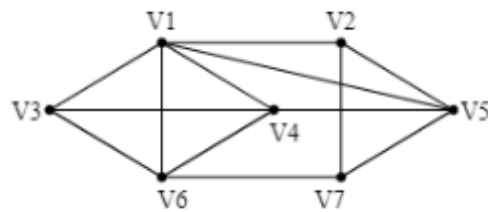
a. Algoritma Welch-Powell

Algoritma Welch- Powell merupakan sesuatu metode yang efektif buat memberi warna suatu graf G . tetapi algoritma ini cuma membagikan batasan atas untuk $\chi(G)$ Jadi algoritma ini tidak selalu memberikan jumlah warna minimum yang diperlukan Untuk mewarnai G . Menentukan $\chi(G)$ sesungguhnya sangat susah kecuali dalam kasus- kasus simpel semacam pada contoh- contoh yang hendak kita bahas dalam pertemuan ini.

Langkah- langkah dalam algoritma Welch- Powell:

- Urutkan simpul- simpul dari G dalam urutan derajat yang menyusut. Urutan ini bisa jadi tidak unik sepertemuan sebagian simpul bisa jadi memiliki derajat yang sama.
- Pakai satu corak tertentu buat memberi warna simpul awal. Secara berurut, tiap simpul dalam catatan yang tidak bertetangga dengan simpul tadinya diwarnai dengan corak ini.
- Ulangi langkah 2 di atas buat simpul dengan urutan paling tinggi yang belum diwarnai.
- Ulangi langkah 3 di atas hingga seluruh simpul dalam catatan terwarnai.

Pakai algoritma Welch- Powell buat memberi warna graf G yang ditunjukkan pada gambar 6.2 serta tentukan bilangan kromatiknya.



Gambar 6. 2 Pakai algoritma Welch- Powell buat memberi warna graf G

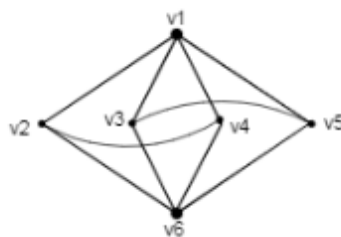
Penyelesaian :

Simpul	v1	v4	v5	v6	v2	v3	v7
Derajat	5	4	4	4	3	3	3
Warna	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>d a</i>	

Jadi, paling tidak ada 4 warna diperlukan untuk mewarnai graf G, sehingga $\chi(G) = 4$.

Contoh 2.

Permasalahan sama dengan contoh 1, untuk graf H yang ditunjukkan pada gambar 6.3 Penyelesaian :



Gambar 6. 3 Permasalahan isama idengan iconth i1, iuntuk igraf iH

Simpul	v1	v6	v2	v3	v4	v5
Derajat	4	4	3	3	3	3
Warna	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c c</i>	

Jadi $\chi(G) = 3$

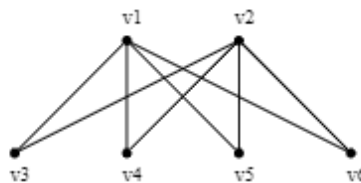
b. Pewarnaan pada Graf Bipartit

Sebuah graf bipartit adalah sebuah graf yang simpul-simpulnya dapat dibagi ke dalam dua himpunan bagian dimana simpul-simpul pada

masing-masing himpunan bagian bertetangga dengan semua simpul pada himpunan bagian lainnya dan bukan pada simpul-simpul dalam himpunan bagiannya sendiri. Karena tidak ada simpul-simpul yang bertetangga ke simpul-simpul yang bertetangga ke simpul lain dalam himpunan bagian yang sama, maka semua simpul dalam sebuah himpunan bagian dapat dipetakan ke dalam warna yang sama. Karena simpul-simpul pada dua himpunan bagian saling bertetangga, maka pada setiap himpunan bagian harus diwarnai dengan warna yang berbeda. Dengan demikian, dibutuhkan dua warna untuk mewarnai graf bipartit, sehingga bilangan kromatis pada graf bipartit adalah 2.

Contoh 3.

Diketahui sebuah graf bipartit $K_{2,4}$ seperti ditunjukkan pada gambar di bawah.



Gambar 6. 4 Graf bipartit $K_{2,4}$

Dengan menggunakan algoritma Welch-Powell, tentukan nilai kromatis dari graf di atas

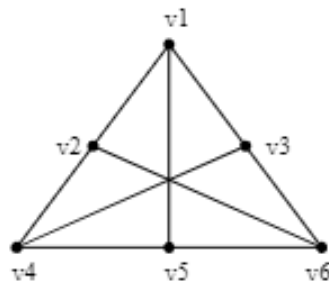
Simpul	v1	v2	v3	v4	v5	v6
Derajat	4	4	2	2	2	2
Warna	a	a	B	b	b	B

Jadi $\chi(G) = 2$, dan dapat dilihat bahwa dua himpunan bagian dalam graf bipartit tersebut adalah $m = \{v1, v2\}$ dan $n = \{v3, v4, v5, v6\}$

Contoh 4

Graf G pada gambar 5 adalah graf bipartit. Petakan warna-warna ke simpul simpul dari G dengan menggunakan algoritma Welch Powell untuk

menunjukkan dua himpunan bagian dari simpul-simpul yang membangun G .



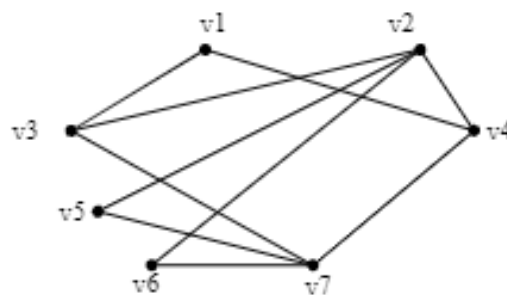
Gambar 6. 5 Graf bipartit

Simpul	v1	v2	v3	v4	v5	v6
Derajat	3	3	3	3	3	3
Warna	a	b	b	a	b	a

Jadi dua himpunan bagian yang membentuk G adalah $m = \{v1, v4, v6\}$ $n = \{v2, v3, v5\}$

Contoh 5.

Pemmasalahan yang sama dengan contoh 4, pada graf G yang ditunjukkan pada gambar 6.6 di bawah ini.



Gambar 6. 6 Graf G

Simpul	v2	v7	v3	v4	v1	v5	v6
Derajat	4	4	3	3	2	2	2

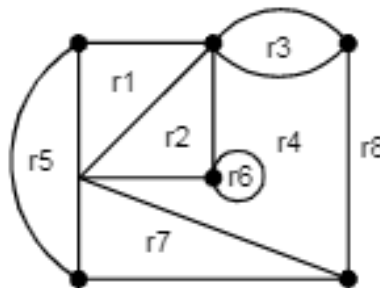
Warna a a B b A b b

Jadi dua himpunan bagian yang membentuk G adalah

$$m = \{v_2, v_7, v_1\} \quad n = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

c. Pewarnaan Wilayah/Region pada Graf Bidang

Dua buah region dari sebuah graf bidang dikatakan bertetangga jika keduanya mempunyai sebuah sisi bersama.



Gambar 6. 7 Graf bidang

Dari sebuah graf bidang pada gambar 6.7 , tentukan region dari graf tersebut yang bertetangga dengan region-region :

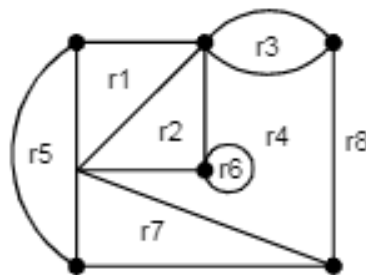
- a. r_7
- b. r_2
- c. r_6

Penyelesaian :

- a. r_4, r_5, r_8
- b. $r_1, \text{ dan } r_4$
- c. r_4

d. Pewarnaan Wilayah/Region pada Graf Bidang

Dua buah region dari sebuah graf bidang dikatakan bertetangga jika keduanya mempunyai sebuah sisi bersama.



Dari sebuah graf bidang pada gambar 6.7, tentukan region dari graf tersebut yang bertetangga dengan region-region :

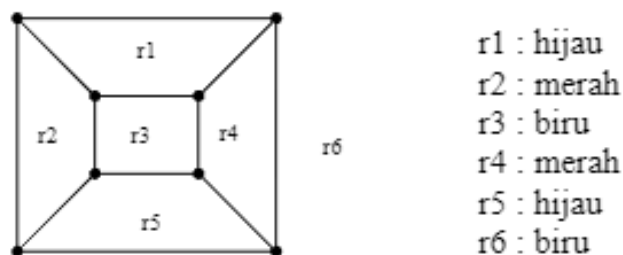
- r7
- r2
- r6

Penyelesaian :

- r4, r5, r8
- r1, dan r4
- r4

Pewarnaan Region (wilayah)

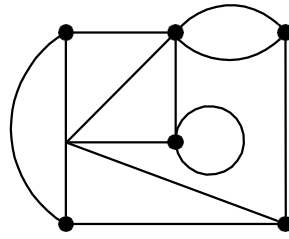
Pewarnaan region dari suatu graf planar (graf bidang) G adalah suatu pemetaan warna- warna ke region-region dari graf G sedemikian hingga region-region yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda. Gambar 8 menunjukkan contoh permasalahan pewarnaan region.



Gambar 6. 8 Graf planar (graf bidang) G

Contoh 6.

Misal kita melakukan pewarnaan region dari graf pada gambar 7, yang hasilnya akan bisa dilihat seperti pada gambar 6.9 di bawah ini.



Gambar 6. 9 Pewarnaan region

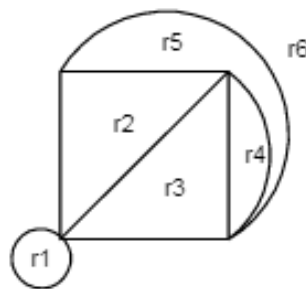
Pada gambar 6.9 bisa dilihat bahwa $(G) = 3$.

Graf Dual dari Graf Planar

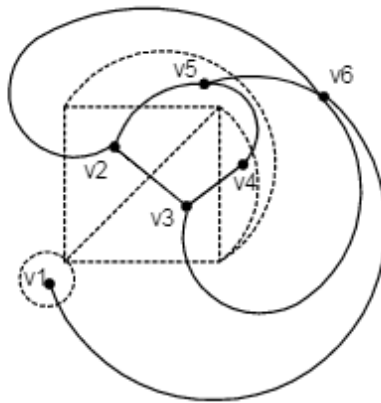
Dari suatu permasalahan pewarnaan region pada graf bidang, bisa kita bawa ke permasalahan pewarnaan simpul dengan membangun sebuah graf dual dari graf bidang tersebut.

Cara membentuk graf dual

Misal terdapat sebuah graf bidang M. Dalam setiap region dari M, pilih sebuah titik. Jika dua buah region mempunyai sebuah sisi bersama, maka titik-titik yang terkait dapat dihubungkan dengan sebuah garis melalui sisi bersama tersebut. iGaris-garis ini akan membentuk kurva. Kurva-kurva ini digambarkan sedemikian hingga agar tidak bersilangan. Dengan demikian kurva-kurva tersebut membentuk sebuah graf yang disebut sebagai graf dual dari M. Gambar 6.10 menunjukkan graf dual dari graf planar pada gambar 9.

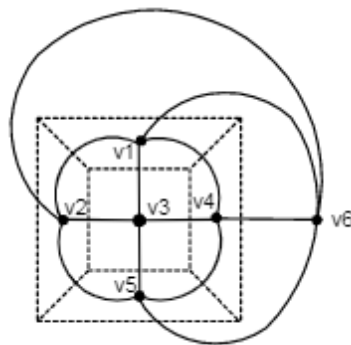


Gambar 6. 10 Graf bidang M



Gambar 6. 11 Pewarnaan simpul

Permasalahan pewarnaan region seperti yang ditunjukkan pada gambar 8 dapat kita bawa ke masalah pewarnaan isimpul, dengan ikita buat graf dual dari gambar 8 seperti ditunjukkan dalam gambar 6.11.



Gambar 6. 12 Algoritma Welch Powell

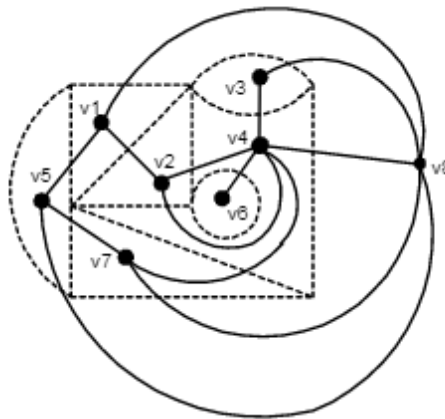
Dengan algoritma Welch Powell (permasalahan pewarnaan simpul),

Simpul	v1	v2	v3	v4	v5	v6
Derajat	4	4	4	4	4	4
Warna	a	b	C	b	a	c

$(G) = 3$. Hasil ini sama dengan hasil dari pewarnaan region pada gambar 8.

Contoh 7.

Permasalahan pada contoh 6 juga dapat kita bawa ke masalah pewarnaan simpul, dengan kita buat graf dual seperti ditunjukkan pada gambar 6.12.



Gambar 6. 13 Algoritma Welch Powell

Dengan algoritma Welch Powell,

Simpul	v4	v8	v1	v2	v5	v7	v3	v6
Derajat	6	5	3	3	3	3	2	1
Warna	a	b	a	b	c	d	c	b

$(G) = 4$. Hasil ini sama dengan hasil dari pewarnaan region pada contoh 6.13. Jika kita lihat pewarnaan region iyang kita lakukan sebelumnya pada subpertemuan 6.4, hasil ini memang berbeda. Ini adalah bukti bahwa algoritma welch Powell memang tidak selalu menghasilkan warna minimum (lihat kembali subpertemuan 6.2)

Contoh 8.

(Contoh aplikasi pewarnaan graf)

Ada 6 jenis zat kimia yang perlu disimpan di dalam gudang. Beberapa pasangan zat itu tidak dapat disimpan di dalam ruangan yang sama, karena campuran gasnya bersifat eksplosif (mudah meledak). Untuk zat

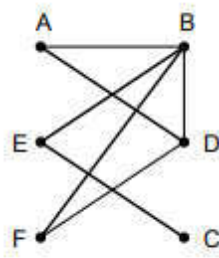
yang semacam itu, perlu dibangun ruang-ruang terpisah yang dilengkapi ventilasi dan penyedot udara keluar yang berlainan. Jika lebih banyak ruang yang dibutuhkan, berarti lebih banyak ongkos yang dikeluarkan. Karena itu perlu diketahui berapa banyak minimum ruangan yang diperlukan untuk dapat menyimpan semua zat kimia dengan aman. Berikut ini adalah daftar pasangan zat kimia yang tidak dapat disimpan dalam ruangan yang sama.

Zat Kimia	Tidak dapat disimpan bersama zat kimia
A	B, D
B	A, D, E, F
C	E
D	A, F, B
E	B, C
F	B, D

Gambar 6. 14 Gambarkan graf

Gambarkan igrاف yang imenyatakan ipersoalan idi iatas. iKemudian itentukan ijumlah iminimum iruangan iyang idibutuhkan iuntuk imenyimpan isemua izat ikimia idi iatas.

Graf yang merepresentasikan permasalahan di atas di tunjukkan pada gambar 6.14. Simpul-simpul ipada graf imenyatakan masing-masing zat kimia. Sisi yang menghubungkan dua simpul imenyatakan bahwa dua zat kimia yang terkait tidak dapat disimpan dalam ruangan yang sama.



Gambar 6. 15 Bilangan kromatik

Berdasarkan graf tersebut kita menyimpulkan, bahwa apabila terdapat dua simpul yang dihubungkan oleh sisi, maka kedua zat kimia tersebut tidak dapat tidak dapat disimpan dalam ruang yang sama, jadi dua simpul tersebut tidak boleh mempunyai warna yang sama. Permasalahan di atas, sama saja kita mencari bilangan kromatik dari graf yang ditunjukkan pada gambar 6.15.

Dengan algoritma Welch Powell,

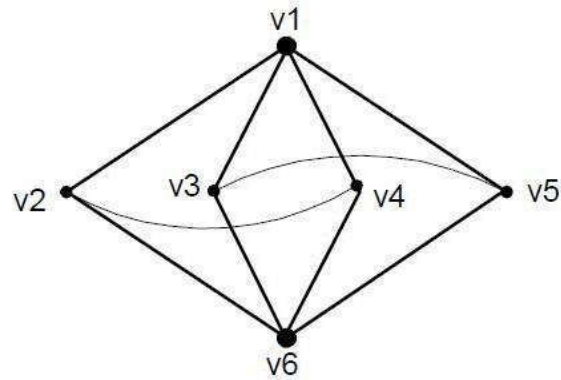
Simpul	B	D	A	E	F	C
Derajat	4	3	2	2	2	1
Warna	x	y	z	y	z	x

$\chi(G) = 3$, Jadi jumlah minimum ruangan yang dibutuhkan untuk menyimpan semua zat kimia tersebut adalah 3 ruangan.

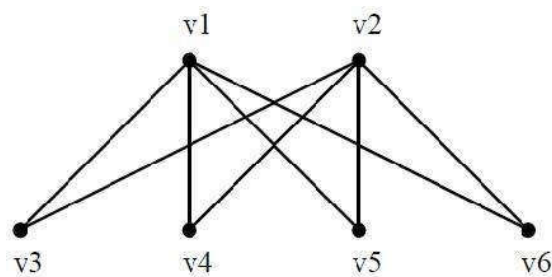
C. SOAL LATIHAN/TUGAS

1. Tentukan pewarnaan graf-graf berikut ini dengan menggunakan algoritma Welch-Powell dan tentukan bilangan kromatiknya.

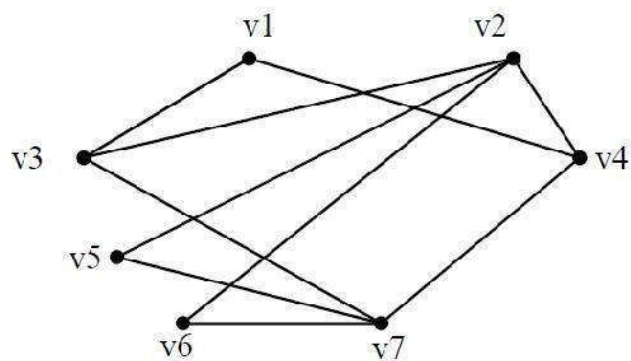
a. Graf G1



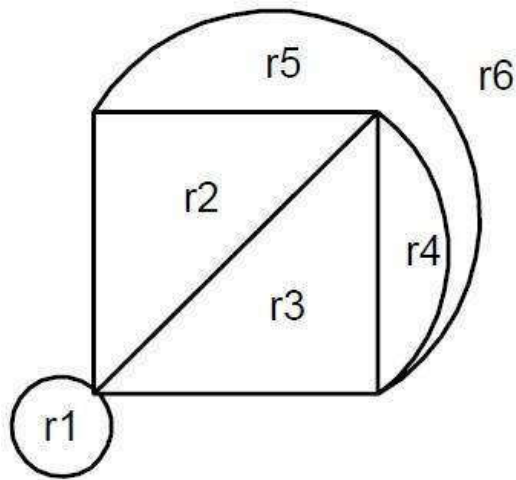
b. Graf G2



c. Graf G3



2. Tentukan pewarnaan region pada graf berikut.



D. REFERENSI