Modulo 3

La derivada

La derivada de una función puede entenderse como la tasa de cambio, o también como la rapidez a la que cambia la variable dependiente en función del cambio de la variable independiente.
Como esta tasa de cambio no necesariamente es constante sino que depende del valor de la variable independiente que se tome, se estudiará localmente, para lo cual se estudiará primero el concepto de variación promedio en el punto x_0 .

Variación promedio

Sea *f* una función numérica cualquiera, definida en un intervalo abierto (*a,b*) que contiene al punto x_0 . Consideremos un pequeño incremento *h, h* $\neq 0$, de la variable independiente, de manera que $x = x_0 + h,\ x \in (a,b)$.

La variación o incremento de *f* entre x_0 y x , se define como

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

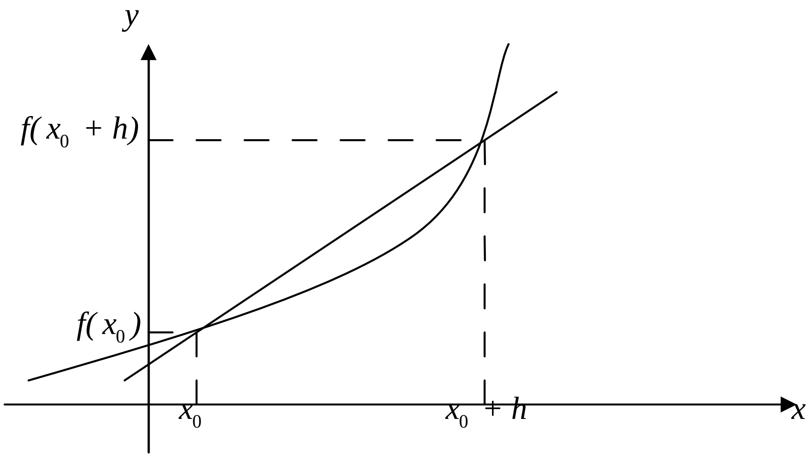
La variación o incremento de x entre x_0 y $x = x_0 + h$, se define como

$$\Delta x = x - x_0 = h$$

La variación promedio de *f* entre x_0 y x , se mide con el llamado *cociente incremental o Cociente de Newton de f en* x_0 *:*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geométricamente la variación promedio de f entre x_0 **y** ***x=*** x_0 ***+ h representa la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos (*** x_0 ***, f(*** x_0 ***)) y (*** x_0 ***+h ,f(*** x_0 ***+ h))***



Cuando *h* decrece infinitamente la variación promedio tiende a la *variación instantánea de f en el punto* x_0 .

Derivada de *f* en x_0: se define la derivada de f en x_0 y se escribe $f´(x_0)$ a

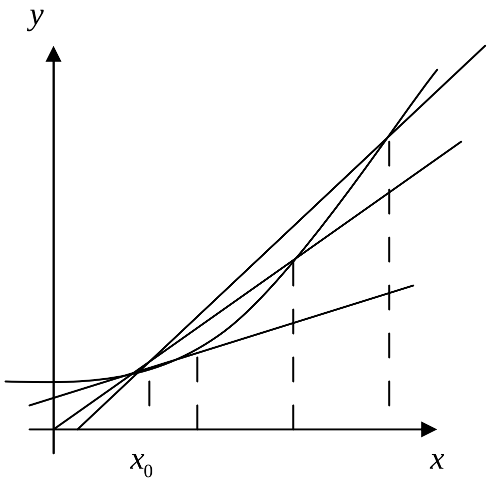
$$f´(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

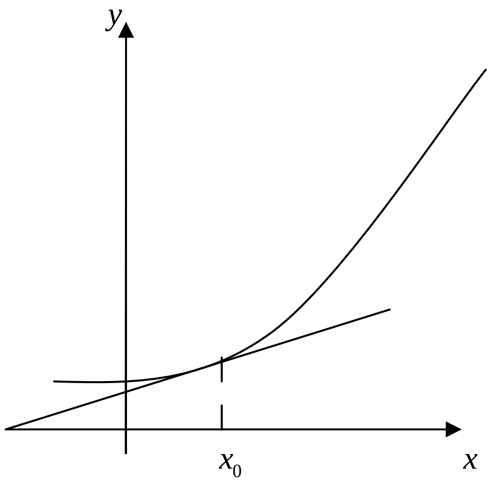
Siempre que el límite exista y en tal caso se dice que *f es derivable en* x_0

La idea gráfica de *recta tangente a una curva* puede describirse como una recta que se apoya "suavemente" sobre la curva, de manera que la inclinación de la curva y de la recta coinciden en el punto de apoyo.

Será un primer intento de aproximar una función por medio de otra función, esta segunda con una expresión polinómica, lo cuál ayuda mucho a los diferentes cálculos que se quieran hacer. Si bien pueden hacerse aproximaciones mejores, con polinomios de grado mayor, en este curso veremos sólo este tipo de aproximaciones lineales.

Geométricamente a medida que h decrece, la recta secante a la gráfica de *f* que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ *y* $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ se va acercando a la recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$. Así, la variación instantánea de *f* en x_0 representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(x_0, f(x_0))$:





Ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en *x*= x_0**:**

Dada una función *y=f(x),* la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa x_0 se puede obtener fácilmente. La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene pendiente m es dada por: $y = m(x - x_0) + y_0$

Luego, la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x_0 será aquella para la cual $y_0 = f(x_0)$, $m=f´(x_0)$

La función derivada:

En lugar de elegir un valor numérico x_0 para la variable independiente, podemos trabajar con un valor arbitrario *x,* definiendo así la función derivada, ya que depende del valor de *x,* queda definida la función derivada como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

Siempre que el límite exista diremos que *f* es derivable en *x.*

La función f se dice derivable si tiene derivada en todos los puntos donde está definida

Notación: La derivada de f tiene muchas formas diferentes de escribirse pero todas significan lo mismo, algunas de ellas son: $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = D_x f$

Ejemplo 1:

Sea *f(x)=2x+1*, hallar *f´(x)*

Calculamos el cociente Newton para un *x* cualquiera, haciendo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\frac{2(x+h)+1-(2x+1)}{h} = \frac{2x+2h+1-2x-1}{h} =$$

$$\frac{2h}{h} = 2$$

Luego, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2 = 2$

Ejemplo 2:

Sea *f(x)=* $2x^2$, hallar *f´(x)*

Calculamos el cociente Newton para un *x* cualquiera, haciendo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 2x^2}{h} =$$

$$\frac{4xh+2h^2}{h}=4x+2h$$

$$\textit{Luego,}\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}4x+2h=4x$$

Ejemplo 3:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=2x^2$ en el punto de abscisa *x*=3.

Hemos calculado en el ejemplo 2 la función derivada o simplemente la derivada de $f(x)=2x^2$, luego la pendiente de la recta tangente en *x*=3 será la derivada en *x*=3:

$f'(x)=4x \quad \Rightarrow \quad f'(3)=12$ =m

Por lo tanto reemplazando en $y=m(x-x_0)+y_0$

Tenemos $y=12(x-3)+f(3)$ y como *f (3)*=18

$y=12(x-3)+18 \quad \Rightarrow \quad y=12x-18$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en *x*=3.

Actividades:

1) Calcular la variación promedio de *f* entre *1* y *1 + h* de las siguientes funciones:
$a)\ f(x)=k \qquad b)\ f(x)=x \qquad c)\ f(x)=x^2 \qquad d)\ f(x)=x^3 \qquad e)\ f(x)=\sqrt{x}$

2) Sea $f(x)=x^2$, encuentre la ecuación de la recta secante a la gráfica de *f* en los puntos (1,1) y (1+*h* , *f(1+h)*) para los siguientes valores de *h*:

h=2; h=1; h=-1; h=-2. Grafique y comente lo que observa.

3) Calcule la variación instantánea de *f* en *x=1* de las siguientes funciones:
$a)\ f(x)=k \qquad b)\ f(x)=x \qquad c)\ f(x)=x^2 \qquad d)\ f(x)=x^3 \qquad e)\ f(x)=\sqrt{x}$

4) Sea $f(x)=x^2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (1,1). Grafique.

Reglas de derivación:

El cálculo de las derivadas utilizando la definición puede resultar engorroso. Sin embargo conociendo ciertas derivadas básicas y las reglas de derivación la tarea puede ser más sencilla:

Derivadas básicas:

1. $f(x) = k \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad k$ constante
2. $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$
3. $f(x) = x^r \quad \Rightarrow \quad f'(x) = rx^{r-1} \quad r \in \mathbb{R}$
4. $f(x) = senx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$
5. $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -senx$
6. $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$

Observación: en el caso 3, para que exista la derivada en *x=0*, *r* debe ser un número tal que x^{r-1} esté definida en un entorno del 0. En el apéndice encontrará algunas demostraciones.

Reglas de derivación

Considerando a f y g funciones derivables en x:

Derivada de la suma de funciones:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Derivada del producto de funciones:

$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Derivada del cociente de funciones:

Si $g(x) \neq 0$, entonces $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

Derivada de la composición:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

a esta regla se la conoce como la Regla de la Cadena.

Ejemplos:

En los primeros dos ejemplos aplicamos la regla básica de derivación de una potencia:

1) *si* $\quad f(x) = x^{33} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 33x^{32}$

2) *si* $f(x)=\sqrt[5]{x^3} \quad \Rightarrow \quad$ *escribimos* $\quad f(x)=x^{\frac{3}{5}}$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$$

En el siguiente ejemplo aplicaremos la regla de suma de funciones, además de reglas básicas:

3) *si* $f(x)=x^2+x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2x+1$

En el siguiente aplicaremos la regla del producto de funciones además de reglas básicas:

4) *si* $f(x)=(\sqrt{x}+x)(x+1) \quad \Rightarrow \quad$ *escribimos* $\quad f(x)=(x^{\frac{1}{2}}+x)(x+1)$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=(x^{\frac{1}{2}}+x)'(x+1)+(x^{\frac{1}{2}}+x)(x+1)'=$$
$$=(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+1)(x+1)+(x^{\frac{1}{2}}+x)(1)=(\frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}})(x+1)+(\sqrt{x}+x)=$$

$$=(\frac{x+2x\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}})+(\sqrt{x}+x)=\frac{x+2x\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}+2x+2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{3x+4x\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

En el siguiente ejemplo aplicaremos la regla del cociente:

5) *si* $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+2}$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{(x^2+x)'(x+2)-(x^2+x)(x+2)'}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(2x+1)(x+2)-(x^2+x)(1)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x+x+2-x^2-x}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2}$$

Finalmente veremos un ejemplo con el uso de la regla de la cadena o la regla de derivación para composición de funciones:

6) *si* $f(x)=(x^2+1)^9$ planteamos a *f* como una composición de funciones, llamando

$u(x)=(x^2+1) \quad y \quad t(x)=x^9$

De este modo $f(x)=(t\circ u)(x)=t(x^2+1)=(x^2+1)^9$

Por lo tanto $f'(x)=t'(u(x)).u'(x)=9(x^2+1)^8.2x=18x(x^2+1)^8$

Actividades:

5) Encontrar la función derivada de las siguientes funciones:

$a)\ f(x)=x^2+5x-101 \qquad b)\ g(x)=x^{23}+50x^{17}+223$

$c)\ h(u)=(2u)^3-3u \qquad d)\ j(t)=7t(t^3-2t)$

$e)\ k(x)=\dfrac{x^2+5x}{x-3} \qquad f)\ m(v)=\dfrac{v^3-2v^2+v}{4}$

$g)\ f(x)=\dfrac{4}{3}\pi x^3 \qquad h)\ g(u)=\dfrac{u^5}{1-u^2}$

6) Se dispone de la siguiente información:

$$f(3)=1 \qquad g(3)=2 \qquad h(3)=-1$$
$$f'(3)=4 \qquad g'(3)=6 \qquad h'(3)=1$$

Hallar:

$a)(f+g)'(3) \qquad b)(f-g+h)'(3) \qquad c)(fg)'(3)$

$d)(fg-h)'(3) \qquad e)\left(\dfrac{f}{g}\right)'(3) \qquad f)\left(\dfrac{fg}{h}\right)'(3)$

7) Hallar la derivada de las siguientes funciones:

$a)\ f(x)=(x^2+5x-101)^5 \qquad b)\ g(x)=\sqrt{x^{23}+50x^{17}+223}$

$c)\ h(u)=((2u)^3-3u)^{101} \qquad d)\ j(t)=(7t-(t^3-2t))^9$

$e)\ k(x)=\dfrac{x^2+5x}{\sqrt{x-3}} \qquad f)\ m(v)=\dfrac{\sqrt[3]{v^3-2v^2+v}}{4-v}$

$g)\ g(x)=x^2 senx \qquad h)\ f(x)=tg(x)$

$i)\ f(x)=\cos(x^2)+\cos^2 x \qquad j)\ f(x)=\dfrac{cotgx}{1-senx}$

$k)\ f(x)=2\sec^4 x-3sen(4x) \qquad l)\ f(x)=\dfrac{2\cos x}{x+1}$

$m)\ g(x)=\dfrac{x^5}{e^x} \qquad n)\ k(x)=\dfrac{1}{x}+2\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$

$ñ)\ f(x)=\ln^2 x-\ln(\ln x) \qquad o)\ f(x)=\sqrt{\ln x+1}+\ln(\sqrt{x}+1)$

8) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto dado:

$a)\, f(x) = 2x^2 + x - 1 \quad \textit{en el punto } (1,2)$

$b)\, g(x) = \sqrt{x-1} \quad \textit{en el punto } (2,1)$

$c)\, k(x) = \dfrac{x}{x-3} \quad \textit{en el punto } (6,2)$

$d)\, f(x) = x + \dfrac{4}{x} \quad \textit{en el punto } (2,4)$

$e)\, f(x) = \cos x \quad \textit{en el punto } (\frac{3}{2}\pi, 0)$

$f)\, f(x) = 4tg2x \quad \textit{en el punto } (\frac{\pi}{8}, 4)$

9) Hallar los puntos en los que las tangentes a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ son paralelas al eje de las abscisas.

10) En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$

11) Hallar la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto (1,1).

12) En qué punto de la curva $y = x^2 - 7x + 3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$

13) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y perpendicular a la curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ en el punto (-2,5).

14) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y perpendicular a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto cuya abscisa es 4.

15) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y perpendicular a la curva $y = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto (0, -1)

16) Escribir las ecuaciones de las tangentes y perpendiculares a la curva $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ en sus puntos de intersección con el eje de las abscisas.

17) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y perpendicular a la curva $y = x^3 - 2\cos(\pi x) + \ln x^2$ en el punto de abscisa x=1.

Derivadas de orden superior:

Dada una función derivable *f(x)* definida en un intervalo abierto I, su derivada *f'(x)* es también una función en ese intervalo. Esta nueva función puede o no ser derivable. Si sucede que también es derivable, entonces su derivada se llama ***derivada segunda*** o ***derivada de segundo orden*** de *f* respecto de *x* y se denota *f''(x)*.

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^4 + x^3 + 1$ entonces su derivada es $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

Y como esta nueva función también es derivable puede calcularse su derivada que representará la derivada segunda de *f* $f''(x) = 12x^2 + 6x$

El proceso puede continuarse mientras la nueva función derivada sea derivable, y en general se denota con $f^{(n)}(x)$ a la n-ésima derivada o derivada de orden n, de la función *f* respecto de la variable *x*,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

Conocer derivadas de órden superior puede darnos información importante sobre una función, durante este curso estudiaremos la información que nos brindan la derivada primera y la derivada segunda.

Derivabilidad y continuidad:

Hemos definido la derivada de una función en un punto como el límite cuando h tiende a o del cociente de Newton, siempre que ese límite exista. Los casos donde ese límite no existe pueden agruparse en 3 grupos:

1) Cuando existen los límites laterales del cociente de Newton pero son diferentes entre si:

$$f_+'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad f_-'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

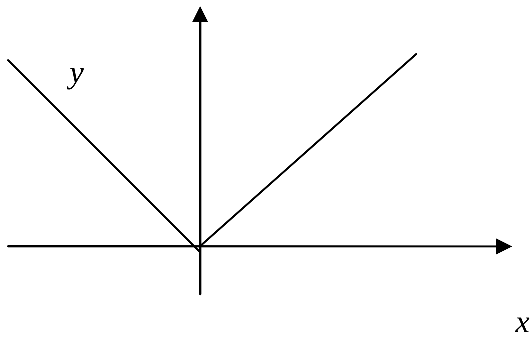
$$y\ f_+'(x_0) \neq f_-'(x_0) \qquad \Rightarrow \neg\exists \ \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ \Rightarrow \ \neg\exists \ \ f'(x_0)$$

Ejemplo:

$f(x)=|x|$ Analicemos su derivabilidad en 0

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}-1=-1$$



Por lo tanto $f_+'(0)\neq f_-'(0)$ y en consecuencia la función no es derivable en *x=0*

2) Cuando el límite del cociente de Newton tiende a infinito:

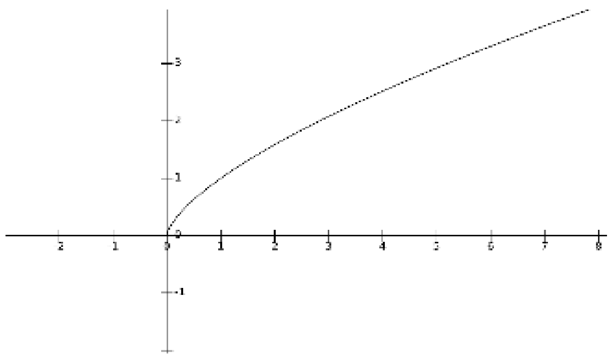
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$$

$$\Rightarrow \neg\exists \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \Rightarrow \quad \neg\exists \quad f'(x_0)$$

Ejemplo: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ Analicemos su derivabilidad en 0

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h^{-\frac{1}{3}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=\pm\infty$$

Por lo tanto la función no es derivable en *x=0*

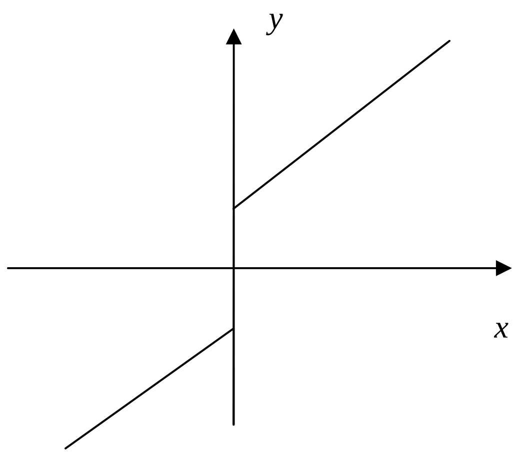


3) Cuando uno de los límites laterales del cociente de Newton existe y el otro tiende a infinito, esto es cuando la gráfica presenta un salto:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty \quad y \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=L$$

$$\Rightarrow \neg\exists \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \Rightarrow \quad \neg\exists \quad f'(x_0)$$

Ejemplo: $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$



Analicemos su derivabilidad en 0

$$f_{+}'(0)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{h+1-1}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

$$f_{-}'(0)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{h-1-1}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{h-2}{h}=\infty$$

Por lo tanto la función no es derivable en *x=0*

Si observamos detenidamente el último ejemplo vemos que la función es derivable en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(0,+\infty)$ sin embargo por ser discontinua en 0 la función no es derivable en ese punto. Este resultado es una consecuencia del siguiente teorema:

Teorema:

Si *f* es derivable en x_0 $\Rightarrow$ *f* es continua en x_0

Demostración:

f es derivable en x_0 $\Rightarrow$ $\exists$ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Como $\lim_{h\to 0} h=0$

Por el criterio de existencia del límite tenemos que :

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=0$$

Por lo tanto $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$

Que es una expresión equivalente a decir $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Por lo tanto f es continua en x_0 como queríamos demostrar.

Notemos que la expresión del contrarrecíproco del enunciado del teorema (equivalente con él) dice:

Si f no es continua en x_0 $\Rightarrow$ *f* no es derivable en x_0

Es la aplicación del teorema que usamos en el ejemplo del caso 3 de funciones no derivables.

Actividades:

18) Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2kx & x \geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$$

Hallar el valor de k para *f* resulte derivable en ℝ

19)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & x \geq 2 \\ \mathrm{k}x & x<2 \end{cases}$$

Hallar el valor de k para *f* resulte continua en ℝ . Para el valor de *k* hallado la función resulta derivable en *x=2?*Graficar

Apéndice

Los contenidos que se presentan a continación son importantes para un estudio más profundo de las funciones reales, si bien se recomienda su lectura, no serán evaluados durante este curso.

4- Derivación implícita:

Hasta ahora hemos trabajado con curvas en las que fue posible despejar y como función de x, y en ese caso, decimos que la curva dada es la gráfica de f. Hemos podido de este modo, si f es derivable en x_0 respuesta al problema de encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto $(x_0, f(x_0))$

Sin embargo no siempre es posible o sencillo despejar y en función de x. ¿qué pasaría entonces si tuviéramos que dar la ecuación de la recta tangente a la curva $F(x,y)=0$ en un punto de la misma?

Ejemplo:

La ecuación $x^2+y^2-4=0$ define en forma implícita una circunferencia. Podemos despejar y, obteniendo dos funciones:

$$y = f_1(x) = \sqrt{4-x^2} \qquad \textbf{e} \qquad y = f_2(x) = -\sqrt{4-x^2}$$

Veamos entonces que la curva dada NO ES LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN!

En efecto, la gráfica de f_1 es la semicircunferencia superior y la gráfica de f_2 es la semicircunferencia inferior.

Si tuviéramos como problema el determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto de coordenadas $(\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2})$, podríamos pensar solo en el tramo de la curva que corresponde a

$$y = f_1(x) = \sqrt{4-x^2}$$

y entonces, como antes sabemos que para determinar la pendiente de esa recta basta con calcular la derivada de f_1 en $\sqrt{2}$. (Te proponemos que lo hagas como ejercicio, así podrás comparar con otra forma que te propondremos de hacerlo en las líneas siguientes)

Sin embargo no siempre es sencillo despejar y en función de x, pero aún así podemos pensar localmente a la curva como la gráfica de una función $y = y(x)$, y de ese modo hallar su derivada siguiendo el procedimiento que se conoce como derivación implícita, que nos permite encontrar $y'(x)$ **aunque no podamos (o no querramos) despejar y en función de x**.

Veamos con detalle lo que sigue:

Volvamos a la circunferencia de la que hablamos arriba, y consideremos su ecuación:

$$x^2+y^2-4=0.$$

Sabiendo que *y* es localmente una función de *x*, hallar la derivada *y'(x)* en términos de *x* e *y(x)*.

Derivamos ambos miembros de la ecuación, sin olvidar que **como *y* depende de *x*, será necesario usar la regla de la cadena**, es decir que cuando derivemos $y(x)^2$ tendremos $(y(x)^2)' = 2 \cdot y(x) \cdot y'(x)$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) = \frac{d}{dx}0$$

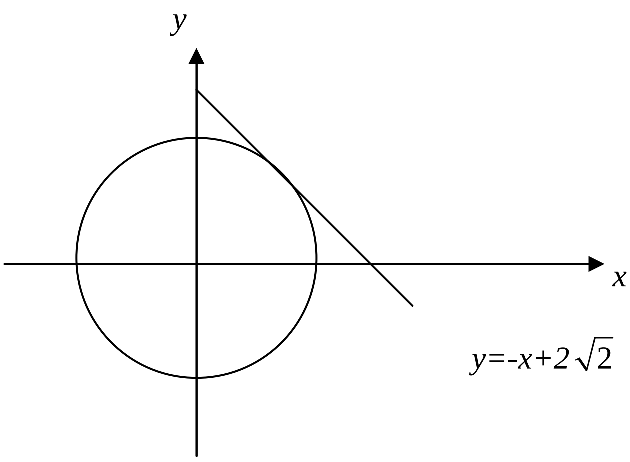
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad o \qquad 2x + 2yy' = 0$$

$$de \quad donde \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad o \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

Por lo tanto si quisiéramos hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

Tenemos $y' = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es $y = -(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$



Actividades:

20) Hallar las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:

$a)\, f(x) = 4x^6 - 3x^3 + 2 \qquad b)\, f(x) = \frac{x^2}{1-x} \qquad c)\, f(x) = 2x^3 - (1 - x^2)^2$

21) Demostrar que la función**:** $y=\dfrac{x^2+2x+2}{2}$ satisface la ecuación diferencial:

$$1+y'^2=2yy''$$

22) Demostrar que la función**:** $y=xe^{-x}$ satisface la ecuación diferencial:

$$xy'=(1-x)y$$

23) Dada $y=x^3-5x^2+7x \quad -2, \qquad hallar \quad y'''$

24) Determinar y' por derivación implícita:

$a)x^3-3xy+y^3=2 \qquad b)\sqrt{y}-\sqrt{xy}=2x \qquad c)(xy)^3-x^3y^2=y$

$d)y=\cos(x-y) \qquad e)\cot g(xy)+xy=2 \qquad f)2xy-\cos xy=seny$

$g)e^y=x+y \qquad h)\ln y+\dfrac{x}{y}=2 \qquad i)\ln x+e^{\frac{-y}{x}}=1$

25) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y perpendicular a la curva $ye^y=e^{x+1}$ en el punto (0,1)

26) Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $x^3+y^3-xy-7=0$ en el punto (1,2)

27) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^5+y^5-2xy=0$ en el punto (1,1)

28) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta perpendicular a la curva $x^2-y^2+2x-6=0$ en el o los puntos cuya ordenada es y=3.

29) Usando el hecho de que $x=e^{\ln x}$ hallar *y'(x)***:**

$a)y=x^x \qquad b)y=(senx)^x \qquad c)y=x^{x^2}$

Demostraciones de las derivadas básicas:

1. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k-k}{h}=0$

2. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$

3. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^r-x^r}{h}$

usando el binomio de Newton escribimos:

$$(x+h)^r=\sum_{k=0}^{r}C(r,k)x^{r-k}h^k=x^r+rx^{r-1}h+\sum_{k=2}^{r}C(r,k)x^{r-k}h^k=x^r+rx^{r-1}h+h^2P(x,h)$$

de la última sumatoria hemos sacado factor común h^2 y el resto es una expresión polinómica en *h* y *x* a la cual se la llama *P(x,h)*. Por lo tanto sustituyendo en el límite:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^r-x^r}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^r+rx^{r-1}h+h^2P(x,h)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{rx^{r-1}h}{h}+\frac{h^2P(x,h)}{h}=rx^{r-1}+\lim_{h\to 0}hP(x,h)=rx^{r-1}$$

4. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{senx\cos h+senh\cos x-senx}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{senx(\cos h-1)+\cos x\,senh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senx(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\,senh}{h}=$$
$$=senx\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}=senx.0+\cos x.1=\cos x$$

Observemos que en este caso pudimos expresar el límite de una suma como suma de los límites porque esos límites existen.

5. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos x\cos h-senh\,senx-\cos x}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-senx\,senh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{senx\,senh}{h}=$$
$$=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}-senx\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}=\cos x.0-senx.1=-senx$$

6. la derivada de la función logaritmo es por definición la que se dio en la tabla, ya que se define a la función logaritmo como la antiderivada de la función $f(x)=1/x$

7. hallaremos la derivada de la función e^x usando derivación implícita:

$y=e^x$

$\ln y=x$ *aplicando logaritmo a ambos miembros*

$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=1$ *aplicando derivación implícita a ambos miembros respecto de x*

$\dfrac{dy}{dx}=y$

$y'=e^x$ *reemplazando* $\dfrac{dy}{dx}$ *por* y' *y* y *por* e^x