

# Matemática 3 – Curso 2016

## Práctica 5: Distribución conjunta, suma y promedios de variables aleatorias. Ley de los grandes números. Teorema Central del Límite

- Se lanzan dos dados normales, uno rojo y otro verde. Sean las variables aleatorias  $X$ : “*número que ocurre en el dado rojo*” y  $Y$ : “*el mayor de los números obtenidos*”.
  - Hallar la función de frecuencia conjunta de  $(X, Y)$
  - ¿Son  $X$  e  $Y$  independientes?
  - Calcular la varianza de  $i) 3X - Y$   $ii) X + 2Y - 5$
- La Asociación de Libreros de una ciudad ha publicado recientemente un trabajo sobre el tipo de literatura preferida por los lectores de edad comprendida entre 25 y 40 años. Entre otros aspectos se analiza el número de libros de autores hispanos,  $X$ , que compra un individuo de un total  $Y$ , de libros adquiridos a la semana, mediante la siguiente fdp conjunta:

		Y			
		0	1	2	3
X	0	1/4	1/4	0	0
	1	0	1/8	1/8	0
	2	0	0	1/8	0
	3	0	0	0	1/8

- Hallar las distribuciones marginales de  $X$  e  $Y$ .
  - Calcular la probabilidad de que un individuo compre en la semana un libro de autor no hispano.( Sugerencia: considere el evento  $\{Y - X = 1\}$  y las formas en que puede ocurrir)
  - Si el número de libros que compra un individuo en una semana no depende de los que adquiere en cualquier otra, ¿cuál es la probabilidad de que el número de libros que un individuo adquiere al cabo de dos semanas, sea superior a 2? Sugerencia: considere las variables  $Y_i$ : “*nº de libros que un individuo compra la semana  $i$* ”,  $i = 1, 2$ , y piense las formas en que puede ocurrir el evento  $\{Y_1 + Y_2 > 2\}$ .
- Para un experimento se necesitan dos escáneres. De los 5 disponibles, 2 tienen defectos electrónicos, otro tiene un defecto en la memoria y 2 están en buenas condiciones operativas. Se seleccionan dos unidades al azar.
    - Encuentre la distribución de probabilidad conjunta de  $X$ : “*nº de escáneres seleccionados con defectos electrónicos*” e  $Y$ : “*nº de escáneres seleccionados con defectos en la memoria*”.
    - Determine la probabilidad de 0 o 1 defectos totales entre los dos seleccionados.
  - Un camión de carga viaja desde el punto  $A$  al punto  $B$ , y regresa por la misma ruta diariamente. Hay 4 semáforos en la ruta. Sean las variables aleatorias  $X$ : “*nº de semáforos en rojo que el camión encuentra cuando va de  $A$  a  $B$* ”,  $Y$ : “*nº de semáforos en rojo que el camión encuentra cuando va de  $B$  a  $A$* ” . La f.d.p. conjunta de  $(X, Y)$  esta dada en la siguiente tabla:

		Y				
		0	1	2	3	4
X	0	0.01	0.01	0.03	0.07	0.01
	1	0.03	0.05	0.08	0.03	0.02
	2	0.03	0.11	0.15	0.01	0.01
	3	0.02	0.07	0.10	0.03	0.01
	4	0.01	0.06	0.03	0.01	0.01

- (a) Hallar las distribuciones marginales de  $X$  e  $Y$ .
- (b) Hallar  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$ ,  $V(Y)$ ,  $cov(X, Y)$
- (c) ¿Son  $X$  e  $Y$  independientes?. Explique.
- (d) Sea la v.a.  $Z$ : “nº de semáforos en rojo que el camión encuentra en los viajes de ida y vuelta”. Hallar  $E(Z)$  y  $V(Z)$ .
5. El peso de un caramelo pequeño tiene una distribución normal con media 2.835 gramos y desviación estándar de 0.2835 gramos. Suponga que se colocan 16 caramelos en un paquete y que los pesos de éstos son independientes.
- (a) ¿Cuáles son la media y la varianza del peso neto del paquete?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el peso neto del paquete sea menor que 45.5 gramos?

6. Sea  $X$  la v.a. que representa el número cerezas en una tarta con distribución dada por

$x$	4	5	6	7
$p(x)$	0.1	0.4	0.3	0.2

- (a) Encuentre la esperanza y la varianza del número de cerezas promedio en 40 tartas.
- (b) Encuentre la probabilidad aproximada de que el número promedio de cerezas en 40 tartas sea menor que 5.5. ¿Qué teorema utiliza?
7. Suponga que se lanza 50 veces un dado balanceado de 10 lados (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), y en cada tiro se observa el número que ocurre.
- (a) Encuentre la media y la varianza de la suma de los números obtenidos. ¿Qué propiedades utiliza?.
- (b) Calcule la probabilidad de que la suma de los números obtenidos esté entre 200 y 250. ¿El resultado obtenido es exacto o aproximado?.
8. Sea la v.a.  $X$ : “nº de imperfecciones en una pulgada de un alambre de cobre”, se puede considerar a  $X$  v.a. discreta con la f.d.p.

$x$	0	1	2	3
$p(x)$	0.48	0.39	0.12	0.01

- (a) Se toma una muestra de 100 alambres. ¿Cuál es la probabilidad de que el número promedio de imperfecciones por alambre en esta muestra sea menor a 0.5?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que menos de 45 de éstos alambres no tengan imperfección?
9. La primera tarea en un curso introductorio de programación por computadora implica correr un breve programa. Si la experiencia indica que el 40% de todos los estudiantes no cometerán errores tipográficos, calcule la probabilidad (aproximada) de que en un grupo de 50 estudiantes,
- (a) por lo menos 25 no cometan errores.
- (b) entre 15 y 25 no cometan errores.

*Observación: Utilizar la corrección por continuidad y aclare qué resultado utiliza para realizar la aproximación.*

10. El número de visitas a un sitio web sigue una distribución Poisson, con media de 27 visitas por hora. Encuentre la probabilidad aproximada de que haya 90 o más visitas durante 3 horas. Explique qué propiedad utiliza.