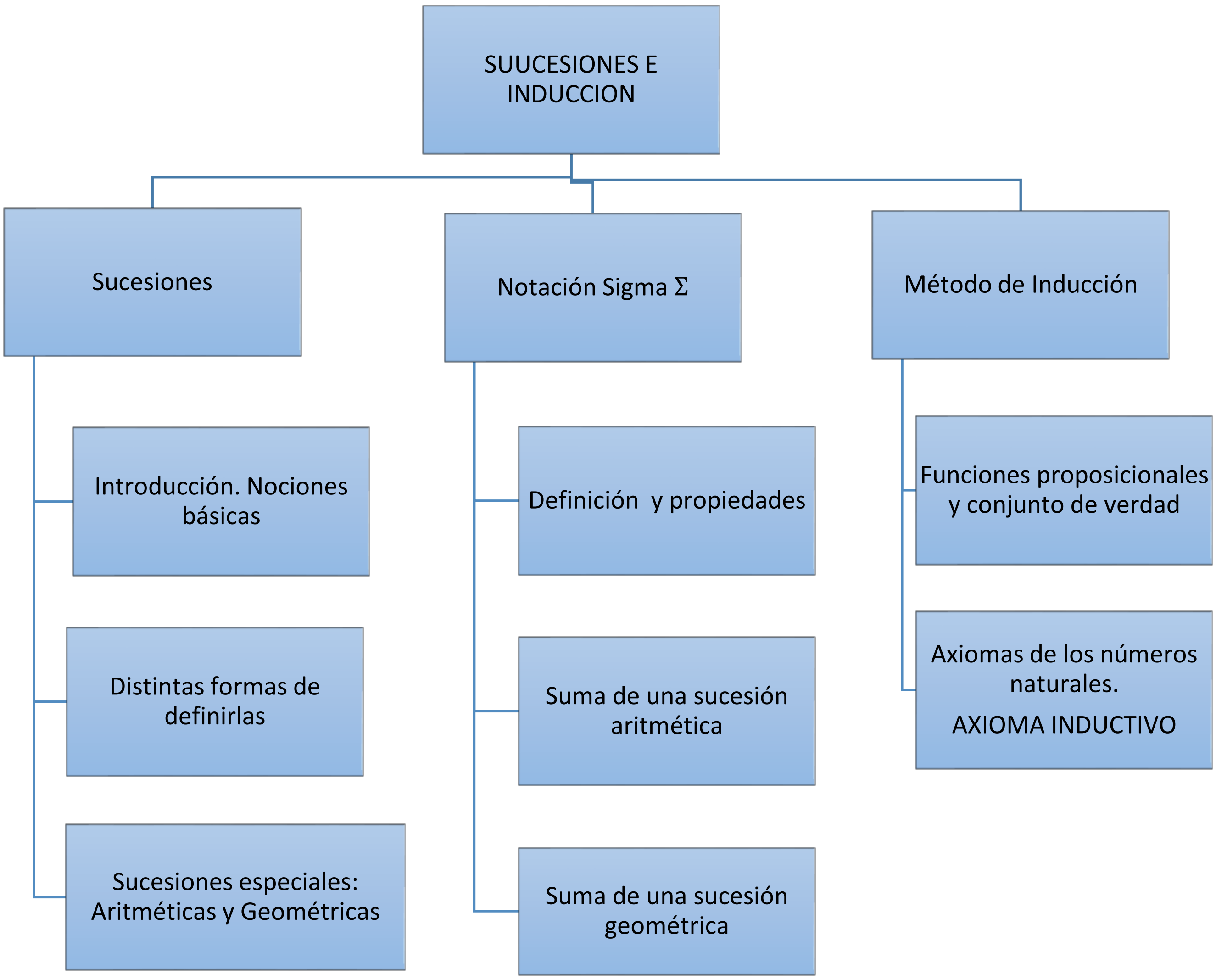
MATEMÁTICA I 2018

Capítulo 4

SUCESIONES E INDUCCIÓN

CONTENIDOS:



“No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje,
Y no la posesión, sino el acto de llegar allí,
lo que concede el mayor disfrute”
Carl Friederich Gauss

Matemático invitado: Carl Friederich Gauss

Fue un matemático alemán nacido el 30 de abril de 1777. Contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Publicó en 1801 “Disquisitiones arithmeticae” su mayor aportación a la teoría de números.

Cuenta la historia que cuando tenía 9 años su profesor propuso a sus alumnos que sumaran los números del 1 al 100, con la seguridad de que tardarían lo suficiente para que él se tomara un descanso. Mientras los demás alumnos apenas empezaban a trabajar, en pocos segundos Gauss había dejado su respuesta en el escritorio del maestro: 5050. El maestro se sorprendió y pidió a Gauss que explicara como lo había resuelto, porque de hecho, era la respuesta correcta. Gauss le explica que se había dado cuenta de que el primer número más el último (1+100) sumaban 101, el segundo más el anteúltimo (2+99) también, el tercero más el antepenúltimo (3+98) también, y así tenía 50 parejas de números que sumaban 101 y cuyo producto daba 5050.

Gauss había aplicado sin saberlo, la fórmula de la suma de los términos de una sucesión aritmética.

Se lo conoce como el “Príncipe de las matemáticas” por sus grades aportaciones a muchas ramas de la matemática, muere el 23 de febrero de 1855 a la edad de 77 años.

1. Introducción. Nociones básicas.

a) Considere los siguientes números naturales:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13...

a1) ¿Los anteriores números tienen un orden especial?

a2) ¿Existe un patrón para crear ese orden? ¿Cuál?

a3) ¿Qué número seguirá después de 13?

a4) ¿Qué número seguirá después de 51?

a5) ¿Qué número existirá antes de 85?

b) Considere la siguiente lista de números reales:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

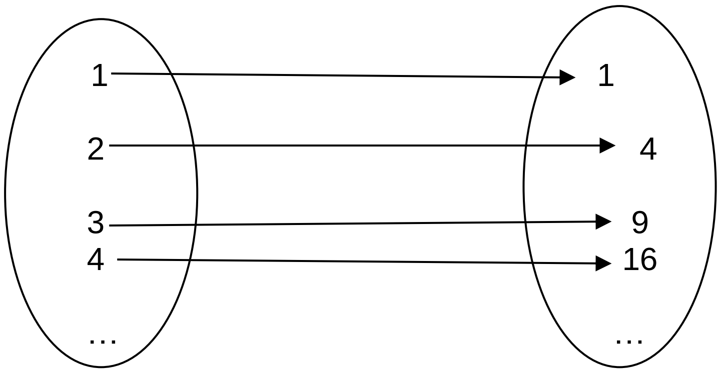
b1) ¿Cuál es el sexto término?

b2) ¿Cuál será el décimo término?

b3) ¿Existirá algún patrón para crear el orden de la anterior lista de términos? ¿Cuál?

b4) Si n representa cualquier número natural. ¿Qué número será el término n?

c) Considere la relación, cuya gráfica es la siguiente:



Los puntos suspensivos en los conjuntos indican que hay más números, podemos considerar que ambos conjuntos, son los conjuntos de números naturales.

Decimos que esta relación asigna o hace corresponder, a cada número natural otro número natural. Podemos indicar que el correspondiente de 1 es 1, el de 2 es 4, y así sucesivamente.

c1) Escriba como parejas ordenadas la anterior relación, para los números que se muestran en el gráfico.

c2) ¿Qué número corresponderá al número 6?

c3) Si n es cualquier número natural. ¿Cuál será su correspondiente? ¿y del número n+1?

Definición:

Una **sucesión** es una relación entre los números naturales y un conjunto A cualquiera, con la siguiente condición:
A cada natural le corresponde un único elemento del conjunto A. Notar que esta relación es una **función.**

Si a esta relación la llamamos S, puede expresarse como $S: \mathbb{N} \longrightarrow A$, e indicamos sus elementos:

S(1)= a_1

S(2)= a_2 …. , donde a_1, a_2,… son elementos de A

En general si k es un número natural cualquiera diremos que a_k es el **k-ésimo término** de la sucesión, también se lo llama **término general** de la sucesión. Esta descripción de término general es porque k está representando un natural cualquiera.

Notemos que la elección de la letra k es arbitraria, podemos hablar de a_n *o* a_t y diremos entonces que es el n-ésimo término o el t-ésimo término respectivamente. Del mismo modo llamamos "a" a los elementos de la sucesión pero podemos elegir cualquier otra letra.

En adelante nos referiremos a la sucesión sólo por los elementos de A con el orden dado por los números naturales.

En este curso vamos a trabajar con sucesiones tales que el conjunto A de la definición son los números reales.

Ejemplo 1.1:
Sea S la sucesión dada por 1,3,5,7,9,….

Diremos que a_1=1, a_2=3, a_3=5, …

Basta la enumeración en orden de sus elementos para saber a qué natural le corresponde cada número de la sucesión.

Esta sucesión está formada por los números impares, podemos entonces escribir:

a_1 =1= 2.1-1

a_2 =3= 2.2-1

a_3 =5= 2.3-1

…

a_n =2.n-1

Donde a_n es el n-ésimo término o término general.

Ejemplo 1.2:

Sea H la sucesión dada por 2, 4, 6, 8, 10,….

Diremos que a_1 =2, a_2 =4, a_3 =6, …

Esta sucesión está formada por los números pares, o múltiplos de 2, podemos entonces escribir:

a_1 =2= 2.1

a_2 =4= 2.2

a_3 =6= 2.3

…

a_n =2.n

Encontramos entonces nuevamente el término general.

Diferentes formas de expresar una sucesión.

- **Enumeración de los primeros términos**:

  Consiste en escribir los primeros términos de la sucesión.

Ejemplos: 1) 2, 4, 6, 8,….
2) 3, 9, 27, 81,….
3) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,…
4) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,…

- **Forma descriptiva**:

Consiste en describir con palabras la ley de formación de la sucesión, en los ejemplos anteriores podríamos describir:

1) sucesión de los números pares
2) sucesión de las potencias de 3
3) sucesión formada a partir de la suma de los dos términos anteriores. Esta descripción no es tan trivial, a veces no resulta tan fácil advertirla. Esta sucesión se conoce con el nombre de Sucesión de Fibonacci.
4) Sucesión de los números primos.

- **Forma explícita**:

Consiste en dar una fórmula que defina el término general de la sucesión en función del índice, dando información acerca del valor inicial del índice. Permite para un valor de n cualquiera saber cuál es el término correspondiente.

Veamos en los ejemplos dados si es posible encontrarla:

1) $a_n = 2.n$, $n \geq 1$
2) $b_n = 3^n$, $n \geq 1$
3) ¿? No es posible por ahora encontrar una fórmula explícita, por lo menos no es posible deducirla a partir de la expresión de sus términos.
4) Imposible, no se ha descubierto aún si hay un patrón para generar los números primos, sólo sabemos que son infinitos pero no hay una fórmula que permita hallar el primo n de esta sucesión.

- **Forma recursiva**:

Consiste en dar los primeros k términos de la sucesión (a estos se los llama condiciones iniciales de la sucesión) y luego establecer cómo se construye el término n-ésimo de la sucesión a partir de términos anteriores.

En los ejemplos dados podríamos definir:

1) $a_1 = 2$

$a_n = a_{n-1} + 2 \quad , n \geq 2$

2) $b_1 = 3$

$b_n = b_{n-1} 3 \quad , n \geq 2$

3) $c_1 = 1$

$c_2 = 1$

$c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \quad , n \geq 3$

4) Nuevamente es imposible definir esta sucesión en forma recursiva, ya que aún no conocemos una relación entre primos consecutivos.

Vemos entonces que no siempre es tan sencillo encontrar formas de definir sucesiones, los ejemplos 1 y 2 son los “ideales” por llamarlos de alguna manera ya que nos permiten su definición en distintas formas, pero en general esto no ocurre, por eso aparecen distintas formas de definir sucesiones.

Ejemplo 1.3:

Hallar una definición para la sucesión dada por: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$

La idea es entonces descubrir la ley de formación de esta sucesión. Como vemos el numerador es siempre 1 y en el denominador aparecen las potencias de 2, enumerando los términos tenemos:

$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}\ ,\ a_3 = \frac{1}{4},\ a_4 = \frac{1}{8}\ldots$

Podemos tratar de escribirla relacionando el valor del término con el subíndice del mismo: $a_1 = \frac{1}{1^0},\ a_2 = \frac{1}{2^1}\ ,\ a_3 = \frac{1}{2^2},\ a_4 = \frac{1}{2^3}\ldots$ vemos que la potencia a la que aparece el 2 es el número anterior al subíndice, entonces:

$a_1 = \frac{1}{1^{1-1}},\ a_2 = \frac{1}{2^{2-1}}\ ,\ a_3 = \frac{1}{2^{3-1}},\ a_4 = \frac{1}{2^{4-1}}\ldots$, con lo que podemos concluir que:

$$\mathbf{a_n = \frac{1}{2^{n-1}},\ \ n \geq 1}$$

Notar que la indicación $\mathbf{n \geq 1}$**,** es importante porque nos indica a partir de qué natural comienza la sucesión.

Hemos hallado una forma explícita para la sucesión, también podríamos pensar en otra descripción, analizando que cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por ½.

Esta afirmación nos lleva a dar una definición recursiva, de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{a_1 = 1}$$
$$\mathbf{a_n = a_{n-1}\frac{1}{2},\ \ n \geq 2}$$

Destacamos en este caso que la definición de esta sucesión en forma recursiva incluye la definición del primer término (condición inicial) y la definición de un término n-ésimo a partir de n=2. Esto es importante porque si ponemos sólo $\mathbf{a_n = a_{n-1}\frac{1}{2}}$ y quisiéramos calcular el primer término, cuando n vale 1, n-1 vale 0 y quedaría: $\mathbf{a_1 = a_0\frac{1}{2}}$ pero no sabemos quién es $\mathbf{a_0}$**.**

Nota: En este curso estamos tomando sucesiones con subíndice natural, pero también pueden definirse sucesiones con subíndice entero. Hemos tomado además los números naturales a partir del 1, esto es una convención, encontrarán textos donde se toman los naturales a partir del 0.

Ejemplo 1.4:

Hallar los 4 primeros términos de la sucesión: $a_h = (-1)^{h+1}3^h$, $h \geq 1$

$a_1 = (-1)^{1+1}3^1 = 3$
$a_2 = (-1)^{2+1}3^2 = -9$
$a_3 = (-1)^{3+1}3^3 = 27$
$a_4 = (-1)^{4+1}3^4 = -81$

Hallemos ahora los 4 primeros términos de la sucesión: $b_h = (-1)^{h-1}3^h$, $h \geq 1$

$b_1 = (-1)^{1-1}3^1 = 3$
$b_2 = (-1)^{2-1}3^2 = -9$
$b_3 = (-1)^{3-1}3^3 = 27$
$b_4 = (-1)^{4-1}3^4 = -81$

Finalmente veamos los 4 primeros términos de la sucesión: $c_t = -(-3)^t$, t ≥ 1

$c_1 = -(-3)^1 = 3$
$c_2 = -(-3)^2 = -9$
$c_3 = -(-3)^3 = 27$
$c_4 = -(-3)^4 = -81$

¿Qué observa?, evidentemente las 3 sucesiones son iguales, es decir que los números generados por la fórmula de la definición son los mismos.

Por lo tanto podemos concluir que no hay una única fórmula explícita de una sucesión y corresponde hablar de “un término general” en lugar de “el término general”.

Ejercicios:

1) Hallar los 4 primeros términos de las siguientes sucesiones :

a) $a_h = (-1)^h 3^h,\ h \geq 1$

b) $b_j = 2j + 3^j$, $\mathrm{j} \geq 1$

c) $c_t = 2^t - 1$, $\mathrm{t} \geq 1$

d) $d_h = h^2 \quad , h \geq 1$

e) $e_1 = 4, \qquad e_k = -3e_{k-1} + 2$, $\mathrm{k} \geq 2$

f) $f_1 = -2, \quad f_2 = 1 \quad f_k = 3f_{k-1} - f_{k-2}\ ,\ k \geq 3$

g) $g_h = 4 \quad , h \geq 1$

h) $x_1 = 3 \quad y \quad x_{k+1} = x_k - \tan x_k\ ,\ k \geq 1$, esta sucesión genera aproximaciones del número π .

2) Hallar una fórmula para el término general de las siguientes sucesiones:

a) 1, -1, 1, -1, 1, -1,…

b) -1, 1, -1, 1, -1, 1,…

c) 1, 8, 27, 64, 125,…

d) 4, 9, 14, 19, 24, 29,…

e) -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9,…

f) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,…

g) 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50,…

h) -1, 1/2, -1/3, 1/4, -1/5,…

i) 0, 5, 10, 15, 20,…

3) a) Dada la sucesión $d_h = \dfrac{h^2}{h+1}$, $h \geq 1$. Encuentre $d_3, \quad d_5, \quad d_j \quad y \quad d_{h+1}$

b) Dada la sucesión $f_1 = -2, \quad f_2 = 1 \quad f_k = 3f_{k-1} - f_{k-2}$, $k \geq 3$. Encuentre $f_t, \quad f_{j+2}, \quad f_{k-3} \quad y \quad f_{h+1}$

4) Dar una fórmula **explícita** para las siguientes sucesiones:

a) 4, 1, 1/4, 1/16, 1/64,…

b) 5, 15, 25, 35, 45,…

c) ½, 1/5, 1/10, 1/17, 1/26,…

d) 0, -4, 8, -12, 16, -20,…

5) Algunas calculadoras utilizan un algoritmo similar al siguiente para calcular $\sqrt{n}$, para un número *n* real positivo:

Sea $x_1 = \dfrac{n}{2}$, encuentra aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, ...$ mediante la siguiente fórmula: $x_k = \dfrac{1}{2}(x_{k-1} + \dfrac{n}{x_{k-1}})$, $k \geq 2$, hasta obtener la precisión deseada.

Utiliza este método para calcular $\sqrt{5} \quad y \quad \sqrt{18}$ con una precisión de 6 cifras decimales.

6) Complete la siguiente tabla. Recuerde que no todas las sucesiones pueden expresarse en estas cuatro formas, hemos visto como ejemplos la Sucesión de Fibonacci y la sucesión de los números primos.

Forma descriptiva	Primeros términos	Forma explícita	Forma recursiva
Sucesión de los números naturales	1, 2, 3, 4, …	$a_n = n, \quad n \geq 1$	$a_1 = 1$ $a_n = a_{n-1} + 1, \quad n \geq 2$
	1,4, 9, 16, 25, 36,…		
		$s_n = 3^n, \quad n \geq 1$	
Sucesión de los números pares			
Sucesión de los números impares			
	4, 7, 10, 13, 16,…		

Sucesiones especiales.

Nos ocuparemos de algunas sucesiones que tienen características particulares, ya que podemos encontrar con facilidad su término general individualizando algunos parámetros y modelizan muchos problemas de la vida cotidiana.

Sucesiones aritméticas

1) Encuentre los cuatro primeros términos de la sucesión que se obtiene de acuerdo a las siguientes condiciones y de una definición recursiva:

a) El primer término es 3.
b) El segundo término se obtiene al sumar 10 al primer término.

c) El tercer término se obtiene al sumar 10 al segundo término.

d) El cuarto término se obtiene al sumar 10 al tercer término.

2) Analice la siguiente sucesión: 1, 4, 7, 10, 13, 16...

Cada término se puede obtener sumándole al anterior un mismo número. ¿Qué número es? De una definición recursiva

Definición:

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la cual cada término se puede obtener del anterior, sumando un mismo número, llamado diferencia.

Término general:

En los casos 1 y 2 se ha pedido que de una definición recursiva, ya que como hemos dicho cada término es igual al anterior más un número fijo.

En el caso 1) la sucesión está dada por 3, 13, 23, 33, 43,… que se define recursivamente como:

$$\boldsymbol{a_1 = 3}$$

$$\mathbf{a_n = a_{n-1} + 10}, \quad \mathbf{n \geq 2}$$

En el caso 2) la sucesión está dada por 1, 4, 7, 10, 13,… que se define recursivamente como:

$$\boldsymbol{a_1 = 1}$$

$$\mathbf{a_n = a_{n-1} + 3}, \quad \mathbf{n \geq 2}$$

Definición recursiva de una sucesión aritmética:

$$\begin{cases} a_1 \\ a_n = a_{n-1} + d, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y *d* es la diferencia.

Veamos ahora como hallar una definición explícita.

Si llamamos $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, a los *n* primeros términos de una progresión aritmética, siendo *d* la diferencia, el término general de la progresión se puede obtener de acuerdo con el siguiente análisis:

$$a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_1 + d + d + d + d = a_1 + 4d$$

Por consiguiente, el n-ésimo término de la progresión aritmética es: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Definición explicita de una sucesión aritmética:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad n \geq 1$$

Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y *d* es la diferencia.

Ejemplo 1.5:

Hallar el séptimo término de la progresión aritmética cuyos primeros términos son 3, 6, 9.

Vemos que :

$a_1 = 3$

$a_2 = 6$

$a_3 = 9$

Sabemos que el primer término es 3, para hallar la diferencia, tomamos dos términos consecutivos cualesquiera y hacemos la diferencia d=$a_n - a_{n-1}$, como la progresión es aritmética alcanza con mirar cualquier diferencia y asegurarnos que esa será la diferencia entre dos términos cualesquiera.

Miramos entonces $a_3 - a_2 = 9 - 6 = 3$

La diferencia es 3 y por consiguiente:

$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad entonces \quad a_n = 3 + (n-1)3$

El séptimo término lo hallamos haciendo

$a_7 = 3 + 6.3 = 3 + 18 = 21$

Ejemplo 1.6:

Hallar el primer término de una progresión o sucesión aritmética si se sabe que el décimo término es 67 y la diferencia es 7.

Como tenemos una progresión aritmética sabemos que su término general es:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Por lo tanto el décimo término será: $a_{10} = a_1 + 9.7 = 67$

Despejando tenemos que: $a_1 = 67 - 63 = 4$

Así, el primer término de la sucesión es 4.

Ejemplo 1.7:

Hallar la diferencia de la progresión aritmética cuyo primer término es 1, y el término treinta y cinco es 18.

Nuevamente reemplazando en la fórmula del término general de una sucesión aritmética, tenemos: $a_{35} = 1 + 34.d = 18$

Al despejar de la fórmula obtenemos: $d = \frac{18-1}{34} = \frac{17}{34} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 1.8:

Encontrar los valores de a, b, c, d y e de modo que la sucesión 3, a, b, c, d, e, -5 sea una progresión aritmética.

Tenemos el primer término de la sucesión, llamémoslo $b_1 = 3$.

Tenemos también el séptimo término de la sucesión, $b_7 = -5$

Como buscamos una sucesión aritmética, sabemos que $b_7 = b_1 + 6d$

Reemplazando tenemos que $b_7 = 3 + 6d = -5 \quad \Rightarrow \quad d = \dfrac{-5-3}{6} = \dfrac{-8}{6} = \dfrac{-4}{3}$

Para encontrar entonces los términos pedidos sólo resta reemplazar en la fórmula:

$$a = b_2 = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$b = b_3 = 3 + 2(-\frac{4}{3}) = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

$$c = b_4 = 3 + 3(-\frac{4}{3}) = 3 - \frac{12}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$d = b_5 = 3 + 4(-\frac{4}{3}) = 3 - \frac{16}{3} = \frac{-7}{3}$$

$$e = b_6 = 3 + 5(-\frac{4}{3}) = 3 - \frac{20}{3} = \frac{-11}{3}$$

Verifique entonces que con esta definición $b_7 = -5$

Sucesiones geométricas

3) Considera la siguiente sucesión:

1, 3, 9, 27, 81...

a) ¿Cuál es el primer término?

b) ¿Cómo puede obtener el segundo término a partir del primero?

c) ¿Cómo puede obtener el tercer término a partir del segundo?

d) ¿Cómo puede obtener el quinto término a partir del cuarto?

e) ¿Cuál será el sexto término?

h) Encuentra una definición recursiva para la sucesión.

4) Considera la siguiente sucesión:

192, 48, 12, 3,…

a) Calcule los cocientes $\frac{b_2}{b_1}$, $\frac{b_3}{b_2}$, $\frac{b_4}{b_3}$, ¿Qué observa?

b) ¿Cómo se construye el segundo término de la sucesión a partir del primero?¿ y el tercero a partir del segundo?

c) ¿Cuál será el quinto término de la sucesión?

d) De una definición recursiva para la sucesión

Definición:

Una **progresión o sucesión geométrica** es una sucesión en la cual cada término se puede obtener del anterior, multiplicandolo por un mismo número, llamado razón.

Término general:

En los casos 3 y 4 se ha pedido que de una definición recursiva, ya que como hemos dicho cada término es igual al anterior multiplicado por una constante.

En el caso 3) la sucesión 1, 3, 9, 27, 81,… se define recursivamente como:

$$\boldsymbol{a_1 = 1}$$
$$\mathbf{a_n = a_{n-1}.3,\ \ n \geq 2}$$

En el caso 4) la sucesión 192, 48, 12, 3,… se define recursivamente como:

$$\boldsymbol{a_1 = 192}$$
$$\mathbf{a_n = a_{n-1}.\frac{1}{4},\ \ n \geq 2}$$

Definición recursiva de una sucesión geométrica:

$$\begin{cases} a_1 \\ a_n = a_{n-1}.r, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y r es la razón

Veamos ahora como hallar una definición explícita.

Si llamamos $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, a los *n* primeros términos de una progresión geométrica, siendo r la razón, el término general de la progresión se puede obtener de acuerdo con el siguiente análisis:

$$a_1$$
$$a_2 = a_1.r$$
$$a_3 = a_1.r.r = a_1.r^2$$
$$a_4 = a_1.r.r.r = a_1.r^3$$
$$a_5 = a_1.r.r.r.r = a_1.r^4$$

Por consiguiente, el n-ésimo término de la progresión geométrica es: $a_n = a_1.r^{n-1}$

Definición explícita de una sucesión geométrica:

$$a_n = a_1.r^{n-1}, \qquad n \geq 1$$

Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y r es la razón.

Ejemplo 1.9:

Hallar el quinto término de la sucesión geométrica: - 2, - 6, -18, - 54...

Para hallar el quinto término es necesario conocer la razón.

La razón es el cociente entre un término y el término precedente, por lo tanto en este caso podemos calcularla tomando:

-6/-2 = 3 o -18/-6=3 , etc

Como hemos hallado que la razón es 3 y el primer término es -2, aplicamos la fórmula para hallar el término quinto:

$a_5 = a_1.r^{5-1}$, entonces $a_5 = (-2).3^4 = (-2).81 = -162$

Ejemplo 1.10:

El segundo y tercer término de una progresión geométrica son 30 y 45 respectivamente. Calcular el primer término y la razón.

Como es una sucesión geométrica y sabemos que: $a_2 = 30$ y $a_3 = 45$, el cociente entre $a_3 \ y \ a_2$ debe ser la razón.

Por lo tanto $\frac{a_3}{a_2} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2} = r$

Usando la definición explícita de la sucesión, sabemos que:

$a_2 = a_1 . \frac{3}{2}$ y $a_3 = a_1 . (\frac{3}{2})^2$

Podemos usar cualquiera de las dos igualdades para hallar a_1, si elegimos la primera, tenemos que: $a_2 = 30 = a_1 . \frac{3}{2}$ entonces $a_1 = 30 . \frac{2}{3} = 20.$

Entonces la sucesión puede expresarse como: $a_n = a_1 . (\frac{3}{2})^{n-1}, \ n \geq 1$

La sucesión de Fibonacci.

Se define la sucesión : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Cada número a partir del tercero, se obtiene sumando los dos que le preceden. Por ejemplo, 21 = 13 + 8; el siguiente a 34 será 34 + 21 = 55.

Esta sucesión es la llamada "sucesión de Fibonacci", tal el nombre con el que se conoció al rico comerciante Leonardo de Pisa (1170-1240). Viajó por el Norte de África y Asia y trajo a Europa algunos de los conocimientos de la cultura árabe e hindú, entre otros la ventaja del sistema de numeración arábigo (el que usamos) frente al romano.

La sucesión de Fibonacci presenta diversas regularidades numéricas. Quizás la más sorprendente sea la siguiente propiedad: dividamos dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor y veamos lo que obtenemos:

1 : 1 = 1

2 : 1 = 2

3 : 2 = 1,5

5 : 3 = 1,66666666

8 : 5 = 1,6

13 : 8 = 1,625

21 :13 = 1,6153846....

34:21 = 1,6190476....

Si continuamos realizando los cocientes entre los números consecutivos de esta sucesión, veremos que se aproximan al número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, llamado número de oro, ya que está presente en la proporción del cuerpo humano (la relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo, la relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos) y de muchos fenómenos de la naturaleza. La proporción áurea fue usada con posterioridad en numerosas obras de arte, el cuadro de La Gioconda del famoso Leonardo Da Vinci, fue pintado con esta proporción y el mismo maestro renacentista observó que estas medidas daban por resultado la armonía del cuerpo humano y ello es constatable en “El hombre de Vitruvio” (1490).

Cuando se mira una girasol, automáticamente aparecen espirales que van a favor y en contra de las agujas del reloj, formadas por las semillas. Claramente estas semillas crecen de forma tal de aprovechar al máximo el espacio disponible. El número de las espirales depende del tamaño del girasol. Lo más común es encontrar 34 espirales en un sentido y 55 en el otro, pero se han encontrado y documentado casos con más espirales: 89/55, 144/89 e incluso 233/144. Todos estos números son, por supuesto, números de Fibonacci consecutivos.

Ejercicios:

7) Analizar si las siguientes sucesiones son geométricas o aritméticas. Dar una definición explícita en todos los casos.

a) 1, 1, 1, 1,…..

b) 1, -1, 1, -1,….

c) 1, 2, 3, 4, 5,….

d) 4, 5, 6, 7, 8, …..

e) 13, 20, 27, 34, 41,….

f) 8, 2/3, 1/18, 1/216,….

g) $a_n = 2.n \ \ , n \geq 1$

h) $a_n = 2^n \ , n \geq 1$

i) 10, 19/2, 9, 17/2, 8, 15/2,…

j) 300, -30, 3, -0.3,…

k) 2, 6, 18, 54,…

8) El tercer término de una sucesión aritmética es 85 y el decimocuarto es 30, hallar el primer término y la diferencia

9) Encontrar tres números ***f***, ***g*** y ***h*** tales que 20, ***f***, ***g*** , ***h*** , 52 sean los 5 primeros términos de una sucesión geométrica.

10) Hallar el primer término y la diferencia de una sucesión aritmética sabiendo que la suma del tercer término y el octavo da 75 y la diferencia entre el noveno y el segundo es 49.

11) La superficie de un triángulo rectángulo es 54 cm^2 . Hallar la longitud de sus lados sabiendo que están en progresión aritmética. (Idea: plantear la relación pitagórica del triángulo rectángulo y resolver la ecuación cuadrática para a_1 dejando fijo d)

12) Se desea construir una escalera de pared de 16 escalones cuyas longitudes decrecen uniformemente de 50 cm en la base a 30 cm en la parte superior. Encuentra una fórmula para saber cuánto mide el escalón n.

13) Hallar el término especificado de la sucesión aritmética a partir de los términos dados:

a) a_{11} , siendo $a_1 = 2 + \sqrt{2} \quad y \ a_2 = 3$

b) a_1 , siendo $a_8 = 47 \ y \quad a_9 = 53$

14) Encontrar la razón de una sucesión geométrica cuyo primer término es 320 y el séptimo es 5.

15) Hallar todos los posibles valores de r para una sucesión geométrica con los términos dados:

a) $a_4 = 3 \ y \quad a_6 = 9$ b) $a_3 = 4 \ y \quad a_7 = \frac{1}{4}$

16) La cantidad de bacterias en cierto cultivo es inicialmente 500 y el cultivo se duplica todos los días.

a) Encuentra la cantidad de bacterias en día 2, día 3 y día 4.

b) Da una fórmula para hallar la población bacteriana en el día n.

17) Habitualmente se agrega cloro al agua de las piscinas para controlar los microorganismos. Si el nivel de cloro es mayor de 3 ppm (partes por millón), los nadadores sentirán ardor en los ojos e incomodidad en la piel; si el nivel baja a menos de 1 ppm, existe la posibilidad de que el agua tome color verde por la presencia de algas. El cloro debe agregarse al agua a intervalos regulares. Si no se agrega cloro a una piscina en un período de 24 hs, alrededor del 20% del cloro existente se disipará en la atmósfera y el 80 % permanecerá en el agua.

a) Determina la sucesión a_n que exprese la cantidad de cloro presente después de n días, si la piscina tiene a_1 ppm de cloro al principio y no vuelve a agregarse. Expresa la sucesión en forma recursiva y en forma explícita.

b) Si al inicio tiene 7 ppm, determina el primer día en que el nivel de cloro baja de 3 ppm

2. Notación sigma.

En algunas situaciones puede interesarnos sumar términos de una sucesión.

Por ejemplo si queremos sumar los 6 primeros términos de la sucesión definida por $a_n = 1 + (n-1)3$, escribimos:

1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16

Si quisiéramos sumar los *k* primeros términos de dicha sucesión escribimos:

1 + 4 + 7 + 10 + ... + $(1+(k-1)3)$

Podemos reescribir esta suma de la siguiente manera:

1+(1-1)3 + 1+(2-1)3 + 1+(3-1)3 + ... + $(1+(k-1)3)$

Podemos leer esa suma diciendo:

"Sume los términos de la sucesión $a_n = 1 + (n-1)3$, haciendo variar n de uno en uno, desde 1 hasta *k* "

Esta tarea es exactamente la que hace la notación sigma que presentamos a continuación:

La suma de los k primeros términos de una sucesión de término general a_n puede expresarse como:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k$$

y se lee: " Sume los términos de la sucesión a_n , con n variando de uno en uno desde 1 hasta k

Observación: la variable utilizada en esta notación es *muda*, esto es que no importa qué letra usemos, por eso las siguientes expresiones son iguales entre sí e iguales a la suma de arriba:

$$\sum_{h=1}^{k} a_h = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

Ejemplo 2.1:

Si queremos sumar los términos de la sucesión $a_h = 2h$ desde el primero hasta el décimo, escribimos:

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{10} 2k = 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + 2.5 + \ldots. + 2.10$$

Ejemplo 2.2:

Queremos sumar los términos de la sucesión $b_t = 3^t$, desde el primero hasta el k-ésimo, entonces escribimos:

$$\sum_{j=1}^{k} b_j = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_k \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{k} 3^j = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^k$$

Ejemplo 2.3:

Queremos sumar los términos de la sucesión $c_k = 3 + 4k$, desde el cuarto hasta el decimoquinto, entonces escribimos:

$$\sum_{j=4}^{15} c_j = c_4 + c_5 + c_6 + ... + c_{15} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{j=4}^{15} 3 + 4j = (3 + 4.4) + (3 + 4.5) + (3 + 4.6) + ... + (3 + 4.15)$$

Nota: esta notación para sumar términos puede comenzar en cualquier término siempre que la variable que se usa para el subíndice de la sucesión varíe de uno en uno, es decir que la variable k del ejemplo 1 recorre los naturales a partir del 1 hasta el 10 , la variable j del ejemplo 2 recorre los naturales desde el 1 hasta el natural k y la variable j del ejemplo 3 recorre los naturales desde el 4 hasta el 15.

Algunas propiedades:

Si $a_1, a_2, ..., a_n, ... \quad y \quad b_1, b_2, ..., b_n, ...$ son sucesiones infinitas, entonces para todo natural *n*, se tiene que:

I) Es claro que:

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \cdots + a_n + b_n =$$
$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

Ya que la suma es conmutativa en el conjunto de los números reales. De igual forma podemos proceder en la resta:

$$a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3 + \cdots + a_n - b_n =$$
$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

Expresado en notación sigma tenemos que:

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n} a_h \pm b_h = \sum_{h=1}^{n} a_h \pm \sum_{h=1}^{n} b_h}$$

II) Vemos también que:

$$c.a_1 + c.a_2 + c.a_3 + \cdots + c.a_n = c.(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

Haciendo uso solamente de la propiedad de factor común.

Expresado en notación sigma tenemos que:

$$\sum_{h=1}^{n} c.a_h = c.(\sum_{h=1}^{n} a_h)$$

III) Si queremos sumar n veces una constante c, escribimos:

$$\underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n\ veces} = n.c$$

Escrito en notación sigma:

$$\sum_{h=1}^{n} c = n.c$$

Ejercicios:

1) Desarrollar las siguientes sumas y dar el resultado:

$$a)\sum_{k=1}^{7}(2k-4)$$

$$b)\sum_{t=4}^{10}(3^t+t^2)$$

$$c)\sum_{h=5}^{14}(2-\frac{4}{h})$$

2) Completar las siguientes igualdades:

$$a)\sum_{k=1}^{28}(2k-4)=\sum_{k=1}^{7}(2k-4)+\sum_{\dots}^{\dots}(2k-4)$$

$$b)\sum_{t=4}^{10}(3^t+t^2)=\sum_{t=1}^{10}(3^t+t^2)-\sum_{\dots}^{\dots}(3^t+t^2)$$

$$c)\sum_{h=5}^{14}(2-\frac{4}{h})=\sum_{\dots}^{\dots}(2-\frac{4}{h})-\sum_{\dots}^{\dots}(2-\frac{4}{h})$$

$$d)\sum_{i=4}^{10}(2^i+i)=(2^4+4)+\sum_{\dots}^{\dots}(2^i+i)$$

$$e)\sum_{j=3}^{18}(\frac{1+j}{j})=\sum_{\dots}^{\dots}(\frac{1+j}{j})+(\frac{1+18}{18})$$

$$f)\sum_{j=2}^{45}(\frac{4-j}{j+1})=\sum_{j=2}^{44}(\frac{4-j}{j+1})+\dots\dots$$

$$g)\sum_{n=3}^{h}(\frac{4}{n+1})=\sum_{n=3}^{h-1}(\frac{4}{n+1})+\dots\dots$$

$$h)\sum_{t=6}^{k}(\frac{t}{t+2})=\sum_{t=6}^{k-1}(\frac{t}{t+2})+\dots\dots$$

3) Escribir las siguientes sumas utilizando la notación sigma:

a) 1 + 4 + 9+ 16+ 25 +…+81

b) 1 -1 + 1 -1 +1 -1+1

c) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 +….+46

d) 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ….+34

e) 13+ 20+ 27+ 34+ 41+….+(13+n.7)

f) 8 + 2/3 + 1/18 + 1/216 +… +8 $(1/12)^k$

g) 2 + 4 + 6 + 8 + … + 2.t

4) Dar el resultado de las siguientes sumas:

$$a)\sum_{i=1}^{4} 4i^2 + 5 \qquad b)\sum_{j=3}^{6} \frac{(j-1)}{(j-2)}$$

$$c)\sum_{k=3}^{8} k(k-1) \qquad d)\sum_{t=5}^{9} 1+(-1)^t$$

$$e)\sum_{i=1}^{200} 10 \qquad f)\sum_{j=8}^{70} 20$$

Suma de sucesiones aritméticas y geométricas.

Hemos definido con carácter de sucesiones especiales a las sucesiones aritméticas y geométricas. Parte de esta caracterización es que podemos conocer el resultado de sumar cualquier número finito de términos de estas sucesiones.

Suma aritmética:

Recordemos la fórmula de la sucesión aritmética: $a_k = a_1 + (k-1)d$

Llamemos S_n al resultado de sumar los n primeros términos de una sucesión aritmética, entonces:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n \quad es \quad claro \quad también \quad que:$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 \quad y \quad sumando \quad tenemos:$$

$$2S_n = 2\sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_n + a_1), \quad donde$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_1 + (n-2)d) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_1 + (n-3)d) = a_1 + a_n$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_1 + 3d) + (a_1 + (n-4)d) = a_1 + a_n$$

....

Todos los paréntesis de la suma resultan ser iguales a $a_1 + a_n$

Por lo tanto podemos escribir:

$$\boxed{2S_n = 2\sum_{k=1}^{n} a_k = n(a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

Entonces, conociendo el primer término y la diferencia de una sucesión aritmética podemos conocer la suma de sus términos.

Ejemplo 2.4:

Sume los términos de la sucesión aritmética de primer término 3 y diferencia -5 desde el 1ero hasta el 25

$$\sum_{k=1}^{25} a_k = \sum_{k=1}^{25} [3 + (k-1)(-5)] = \frac{25(3 + (-123))}{2}$$

Suma geométrica:

Recordemos la fórmula de la sucesión geométrica: $a_k = a_1 r^{k-1}$

Llamemos nuevamente S_n al resultado de sumar los n primeros términos de una sucesión geométrica, tenemos entonces:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_1.r + a_1.r^2 + \cdots + a_1.r^{n-1}$$

Multiplicando por r:

$$r.S_n = r.(\sum_{k=1}^{n} a_k) = a_1.r + a_1.r^2 + a_1.r^3 + \cdots + a_1.r^n$$

Restando ambas expresiones:

$$S_n - r.S_n =$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - r.(\sum_{k=1}^{n} a_k) = a_1 + (a_1.r - a_1.r) + (a_1.r^2 - a_1.r^2) + \cdots + (a_1.r^{n-1} - a_1.r^{n-1}) - a_1.r^n$$

Por lo tanto, sacando factor común S_n:

$$(1-r).S_n = (1-r).\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 - a_1.r^n$$

Dividiendo por (1-r):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 - a_1.r^n}{(1-r)} \quad entonces \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)}$$

Entonces, conociendo el primer término y la razón de una sucesión geométrica podemos conocer la suma de sus términos.

Ejemplo 2.5:

Sume los términos de la sucesión geométrica de primer término 3 y razón ½ desde el 1ero hasta el 38:

$$\sum_{k=1}^{38} a_k = \sum_{k=1}^{38} 3.(\frac{1}{2})^{k-1} = \frac{3(1-(\frac{1}{2})^{38}}{1-\frac{1}{2}}$$

Nota: observar que en ambos casos faltaría resolver la cuenta, pero es sólo una cuenta y no la suma de 38 o 25 términos. Observar también que estas expresiones son válidas sólo si se suman los términos de una sucesión aritmética o geométrica, a partir del primero.

Ejercicios:

5) Calcular las siguientes sumas de dos formas diferentes: a) aplicando la suma de una sucesión aritmética, b) aplicando las propiedades de la sumatoria vistas.

$a)\sum_{i=1}^{30} 4i+5$ $\qquad$ $b)\sum_{j=1}^{33} -3(j-1)+2$

$c)\sum_{k=1}^{45} 4+5(k-1)$ $\qquad$ $d)\sum_{t=1}^{h} 3t+1$

6) Dada la siguiente sucesión, definida en forma recursiva:

$c_1 = 3 \quad y \quad c_n = 4 + c_{n-1} \quad si \quad n \geq 2$, calcular $\sum_{k=1}^{m} c_k$

7) Dada la siguiente sucesión definida por sus primeros términos:

$s_1 = -1, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = 9, \quad s_4 = 14, ... \quad calcular \quad \sum_{j=1}^{t} s_j$,

8) Calcular la suma de los 100 primeros números naturales

9) Calcular la suma de los 100 primeros naturales impares

10) Una pila de troncos tiene 24 troncos en la base, 23 en la 2da hilera, 22 en la tercera, y así siguiendo hasta llegar a la capa superior en la que tiene 10 troncos. Encuentra la cantidad total de troncos en la pila.

11) Sabiendo que la suma de los 10 primeros términos de una sucesión aritmética es 50 y el primer término es -2. Calcular la diferencia de la sucesión.

12) Encuentra la cantidad de enteros entre 32 y 395 divisibles por 6. Da el resultado de su suma.

13) Pablo sumó todos los números enteros positivos de 4 dígitos, pero se salteó uno. La suma de Pablo es igual a 8499 veces el número que se salteó Pablo. Hallar el número que se salteó Pablo.

14) Un ciclista avanza cuesta abajo a razón de 4 pies el primer segundo. En cada segundo sucesivo, avanza 5 pies más que en el segundo anterior. Si el deportista llega a la parte inferior del cerro en 11 segundos, encuentra la distancia total recorrida.

15) Si el primero de octubre ahorro 10 centavos, el 2 de octubre ahorro 20, el 3 de octubre ahorro 30, y así sucesivamente,

a. ¿Cuánto dinero ahorraré el 31 de octubre?
b. ¿Cuánto dinero ahorraré en todo el mes de octubre?

16) Calcular las siguientes sumas:

$$a)\sum_{i=1}^{30}(\frac{1}{2})^{i-1} \qquad b)\sum_{j=1}^{30}(\frac{1}{2})^{j}$$

$$c)\sum_{k=1}^{45}(\frac{1}{2})^{k+1} \qquad d)\sum_{t=1}^{h}5.2^{t-1}$$

$$e)\sum_{k=1}^{m}4(\frac{1}{3})^{k-1} \qquad d)\sum_{t=1}^{h}2.8^{t}$$

17) Una pelota de ping pong se lanza desde una altura de 16 mts. En cada rebote se eleva verticalmente ¼ de la altura alcanzada en la caída previa.

a. ¿A qué altura se elevará en el séptimo rebote?
b. ¿Cuál es la distancia total que la pelota recorrió después de ese tiempo?

18) Un mendigo le propuso a un avaro:"… durante este mes le daré a usted un peso el primer día, dos pesos el segundo día, 3 el tercero y así sucesivamente. A cambio usted sólo me dará 0,01 pesos el primer día, 0,02 pesos el segundo día, 0,04 pesos el tercero, 0,08 pesos el cuarto y así sucesivamente.

El avaro aceptó entusiasmado y convinieron en realizar el pago a fin de mes. ¿Cuánto le deberá cada uno al otro al cabo de ese tiempo?

3. Inducción matemática

En lo que sigue *n* representará un número natural.

Ejemplo 3.1:

Consideremos la siguiente expresión: "*n* es par"

¿La expresión anterior es una proposición?

Recordemos que para que lo sea, es necesario poder asignarle de manera inequívoca un valor de verdad: verdadero o falso. ¿Es posible hacerlo? No, puesto que no conocemos qué número natural es *n*.

Ahora bien, si asignamos a *n* un valor concreto, por ejemplo 1064, nuestra expresión queda: "1064 es par", que es claramente una proposición.

¿Cuál es su valor de verdad?

Lo mismo sucedería si asignamos a *n* cualquier otro número natural. Obtendríamos siempre una proposición, cuyo valor de verdad estará determinado por el número particular utilizado.

> Una ***función proposicional*** sobre el conjunto de los números naturales es una expresión *P*(*n*) con la propiedad de que reemplazando *n* por cualquier número natural la expresión obtenida es una proposición.

Ejemplos 3.2:

1. Las siguientes son funciones proposicionales:

   - $P(n): \quad n+1>n$
   - $Q(n): \quad n$ es un número primo
   - $S(n): \quad \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$
   - $E(n): \quad n^2-3n+2=0$

2. Las siguientes **no son** funciones proposicionales:

   - n^2+1
   - $\sum_{k=1}^{n} k$

- $n^2 - 3n + 2$

Conjunto de verdad:

Si *P*(*n*) es una función proposicional entonces, para cada número natural *k* dado, la expresión *P*(*k*) es una proposición. El conjunto de los naturales *k* para los cuales *P*(*k*) es verdadera se denomina **conjunto de verdad de** *P* y se escribe *V(P)* . Simbólicamente: $V(P) = \{k \in N : P(k) \; es \; verdadera\}$

Ejemplo 3.2:

Encontremos el conjunto de verdad para cada una de las funciones proposicionales del ejemplo anterior.

- Es bastante claro que cualquiera sea el número *k* la desigualdad $k+1>k$ es verdadera. Por lo tanto, *V(P)*= ℕ
- $V(Q) = \{n \in \mathbb{N}: n \; solo \; es \; divisible \; por \; 1, -1, n \; y -n\}$.
- Si aplicamos la fórmula de la suma de una sucesión aritmética a la sucesión de los primeros *k* números naturales, tendremos:

  $$1+2+3+...+k = \frac{k(a_1+a_k)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

  Por lo tanto, *S*(*k*) es verdadera cualquiera sea el natural *k*, y *V(S)*= ℕ
- Por último, si resolvemos la ecuación $k^2 - 3k + 2 = 0$ obtenemos $V(E) = \{1,2\}$

Ejercicios:

1) Encuentre en cada uno de los siguientes casos el valor de verdad de *P*(*1*), *P*(*2*), *P*(*3*) y establezca si los números 1, 2 y 3 pertenecen al conjunto de verdad:

a. $P(n): \quad 2+6+10+...+(4n-2) = 2n^2$

b. $P(n): \quad 4+8+12+...+4n = 2n(n-1)$

c. $P(n): \quad a^5 a^n = a^{5+n}$

d. $P(n): \quad 9^n - 1$ es divisible por 4

e. $P(n): \quad 4^n - 1$ es divisible por 3

Las funciones proposicionales de las que nos ocuparemos serán aquellas que expresen una propiedad interesante o útil referida a los números naturales. En esos casos nuestra intención será determinar si *P*(*n*) es verdadera independientemente de cuál sea el número *n* o, si por el contrario eso no sucede.

Esto es, nos interesa saber si, para una función proposicional *P*(*n*) dada, se verifica *V(P)*= $\mathbb{N}$, o bien *V(P)*$\neq \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.3:

a) Hemos visto que para una progresión geométrica de razón *r* y primer término a_1 la suma de los *n* primeros términos es igual a $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$.

Esto quiere decir que para la función proposicional *P*(*n*): "la suma de los primeros *n* términos de una sucesión geométrica de razón *r* primer término a_1 es igual a $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ ", tendremos *V(P)*= $\mathbb{N}$.

Decimos entonces:

$$(\forall n)\big(P(n)\big)\ es\ verdadera\ en\ el\ universo\ de\ los\ números\ naturales$$

Que también escribimos como:

$$\sum_{k=1}^{n} a_1.r^{k-1} = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)} \quad ,\forall n, n \in \mathbb{N}$$

Observación: notar que cuando agregamos el cuantificador a la función proposicional obtenemos una proposición, ya que ahora se afirma que todos los naturales cumplen *V(P),* esto podría ser verdadero o falso pero tiene un valor de verdad a diferencia de la función proposicional que depende del valor que asignemos a n.

b) Consideremos la función proposicional siguiente:

P(*n*): $n^2 - n + 11$ es un número primo

¿Cómo haríamos para decidir si *V(P)*= $\mathbb{N}$ o *V(P)*$\neq \mathbb{N}$?

Afirmar que *V(P)*= $\mathbb{N}$, es equivalente a decir que *P(n)* es verdadera para todo natural n, ya que es una ***proposición universal***, es decir que cualquiera sea el número natural *n* que consideremos la expresión $n^2 - n + 11$ es un número primo.

Para comprobar *V(P)*$\neq \mathbb{N}$ bastará mostrar un número cualquiera para el cual la expresión nos suministre un número compuesto, ya que es equivalente a negar la proposición universal anterior, transformándose en una ***proposición existencial***.

Lo primero que podríamos hacer es probar con algunos valores. Para ello podemos hacer una tabla como la siguiente:

n	n^2-n+11		$P(n)$
1	11	primo	verdadero
2	13	primo	verdadero
3	17	primo	verdadero
4	23	primo	verdadero
5	31	primo	verdadero
6	41	primo	verdadero
7	53	primo	verdadero
8	67	primo	verdadero
9	83	primo	verdadero

¿Qué nos informa la tabla anterior acerca de V(*P*)? ¿Podemos concluir que *V(P)* = $\mathbb{N}$? De ninguna manera, solamente hemos comprobado que $k \in V(P)$ para $k = 1, 2, 3, ..., 9$. O sea que la proposición $P(k)$ es verdadera para esos nueve valores de *k*. Nada sabemos del resto todavía.

Una proposición $(\forall n)(P(n))$ de la que se desconoce su valor de verdad, es decir, no sabemos si es verdadera para todos los valores de *n*, se llama ***conjetura***.

Hasta este momento entonces, nuestra proposición

$(\forall n)(P(n))$ *, siendo P*(*n*): $n^2 - n + 11$ es un número primo

es una conjetura. Hemos verificado su validez para algunos valores; esa verificación podría sugerirnos que en realidad *P(n)* es verdadera para todo *n*. Sin embargo, si intentamos un par de valores más:

P(*10*): $10^2 - 10 + 11 = 101$ es un número primo *es verdadero*

P(*11*): $11^2 - 11 + 11 = 121 = 11 \times 11$ es un número primo *es falso*

De esta manera podemos afirmar que $V(P) \neq N$.

Hemos llamado ***conjetura*** a una proposición de la que desconocemos su valor de verdad. Notemos que el estado de conjetura subsiste mientras nosotros desconozcamos si el conjunto verdad es $\mathbb{N}$ o es $\neq \mathbb{N}$.

Demostrando que dicho conjunto es todo $\mathbb{N}$ nuestra conjetura se convertirá en un ***teorema****,* esto es una propiedad válida para todos los números naturales; o bien encontrando un valor de *n* para el cual nuestra función proposicional sea falsa, podemos excluir nuestra conjetura de las propiedades válidas de los números naturales.

Ejercicios:

2) Dé dos ejemplos de funciones proposicionales que sean teoremas sobre los números naturales.

3) Dé dos ejemplos de funciones proposicionales que no sean teoremas.

4) Considere las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
&1 = 1\\
&1 + 3 = 4\\
&1 + 3 + 5 = 9\\
&1 + 3 + 5 + 7 = 16\\
&1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
\end{aligned}
$$

¿Cuál es la conjetura sugerida por las igualdades anteriores? ¿Podría decidir si es un teorema? ¿Cómo lo haría?

Axiomas de los números naturales

Giuseppe Peano fue un matemático que entre otras cosas postuló los siguientes axiomas para definir los números naturales (un axioma es un enunciado que se acepta como definición, no se demuestra):

Axioma 1: $1 \in \mathbb{N}$

Axioma 2: Si $x \in \mathbb{N}$ entonces $x + 1 \in \mathbb{N}$

Axioma 3: $1 \neq x+1$ para todo $x, x \in \mathbb{N}$

Axioma 4: Si $x+1=y+1$ entonces $x=y$

Axioma 5:

Dado A un subconjunto de $\mathbb{N}$, es decir $A \subseteq \mathbb{N}$, si se cumple que:

a) $1 \in A$ y

b) Cualquiera sea x, si $x \in A$ entonces $x+1 \in A$

entonces $A=\mathbb{N}$

Este último axioma que hemos destacado, se llama ***Axioma inductivo*** y es el axioma en el que se basa el ***Principio de Inducción***.

El ***Principio de inducción*** afirma que cualquier subconjunto de los naturales que posea esas mismas propiedades es necesariamente igual a $\mathbb{N}$.

Un conjunto con estas propiedades se dice que es un ***Conjunto Inductivo***.

Podemos ahora aplicar el principio de inducción a la demostración de que cierta función proposicional *P(n)* es verdadera para todos los números naturales. Es decir, queremos analizar si el conjunto de verdad de una proposición es el conjunto de los números naturales.

Queremos mostrar que el conjunto de verdad de una proposición es un **conjunto inductivo,** es decir, queremos ver que**:**

Si *V(P)* es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que verifica:

- 1 es un elemento de *V(P)*.
- Si *k* es un elemento de *V(P)* **entonces** *k* + 1 también es un elemento de *V(P)*

entonces *V(P)* = $\mathbb{N}$

Esto es equivalente a escribir:

Si

1) *P*(1) es verdadera

***2)* Si para un número *k cualquiera, fijo, P*(*k*) es verdadera $\rightarrow$ *P*(*k*+1) es verdadera.**

Entonces *P(n)* es verdadera para todo natural *n*.

Ejemplo 3.4:

En el ejercicio 4 se pedía formular una conjetura sobre la suma de los primeros *n* números impares, y demostrarla. Eso puede hacerse mediante la fórmula de la suma de una progresión aritmética (cada número impar se obtiene sumando dos al anterior). Hagámoslo ahora usando el principio de inducción:

Conjetura: $P(n): \quad 1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ para todo n, n natural

Vamos a mostrar que el conjunto de verdad de *P(n)* son todos los naturales. Para ello debemos ver dos cosas:

1) *P(1)* es verdadero (esto nos dice que $1 \in V(P)$)

2) Si suponemos *P(k)* verdadero, entonces *P(k+1)* también es verdadero.

1) Escribimos *P(1)*: $1 = 1^2$ es obviamente verdadera.

2) Notemos que debemos demostrar un enunciado condicional.

Cuando analizamos el valor de verdad de un condicional (p$\rightarrow$q) debemos recordar que sólo es falso cuando el antecedente (p) es verdadero y el consecuente (q) es falso. Por lo tanto sólo nos restringimos a analizar que esa situación NO se cumpla, ya que en todos los otros casos el condicional es verdadero.

Entonces, **asumimos el antecedente verdadero y queremos ver que el consecuente también tiene que ser verdadero**.

Supongamos que para cierto *k*, *P(k)* es verdadera, esto es lo que llamamos hipótesis en una demostración, en este caso debido al principio de inducción la llamaremos **hipótesis inductiva**. Tendremos entonces:

$P(k): \quad 1+3+5+...+(2k-1)=k^2$ es verdadera

Hipótesis inductiva

Ahora debemos comprobar que *P(k+1)* también lo es. Escribimos *P(k+1)*:

$$P(k+1): \qquad 1+3+5+\ldots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

Tesis inductiva

Demostración:

Para probar la igualdad empezamos escribiendo la expresión que está a la izquierda:

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}+(2(k+1)-1)=\underbrace{k^2}+(2(k+1)-1)$$

Es la hipótesis inductiva

Ahora debemos operar con la expresión de la derecha:

$$k^2+(2(k+1)-1)=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1$$

Aplicando la fórmula de Bhaskara tenemos que:

$$k=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Esto nos dice que $k^2+2k+1=(k+1)^2$

Hemos probado que:

$$P(k): 1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \;\rightarrow\; P(k+1):\; 1+3+5+\cdots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

Esto es, que si *P(k)* es verdadera, también lo es *P(k+1)*. Como P(1) también es verdadera, obtenemos que P(n) es verdadera para todo n natural.

Observación: también podríamos haber escrito nuestra proposición utilizando la notación sigma, de esta forma hemos probado que:

$$P(n): \sum_{j=1}^{n}(2j-1)=n^2 \quad es\ verdadera\ para\ todo\ n, n\ natural$$

Ejemplo 3.5:

Consideremos la sucesión: $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \ldots, \frac{1}{i(i+1)}, \ldots$

Sea $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}$ la suma de sus n primeros términos.

Calculemos esta suma para algunos valores de n :

n=1 $\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$; *n=2* $\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} = \frac{2}{3}$;

n=3 $\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{3}{4}$;

n=4

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \frac{1}{4(4+1)} = \frac{4}{5}$$

Esto nos sugiere que la siguiente conjetura:

P(n): $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{(n+1)}$ *para todo n natural*

Vamos a demostrarlo usando el Principio de Inducción:

1) *P(1):* $\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, por lo tanto P(1) es verdadero

2) Queremos ver que si

P(k): $\underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{k}{(k+1)}}_{\text{Hipótesis inductiva}}$ es verdadera $\rightarrow$ P(k+1): $\underbrace{\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{k+1}{k+2}}_{\text{Tesis inductiva}}$ también lo es.

Suponemos *P(k):* $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{k}{(k+1)}$ verdadera.

Demostración:

Desarrollando la suma

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} =$$

Usando la hipótesis inductiva

$$= \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j(j+1)}\right) + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+1+1)} =$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

En este segundo paso: suponiendo que la igualdad $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{(n+1)}$ es cierta para *n* igual a algún natural *k*, vimos que entonces también es cierta para *n* igual al natural siguiente (*k + 1).*

1) y 2) demuestran que $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{(n+1)}$ se cumple para todos los números naturales.

Probamos que la igualdad se cumple para el 1, entonces, como en el segundo paso probamos que si se cumple para un natural se debe cumplir también para el siguiente, sabemos que se cumple para el 2 (ya que k es un natural cualquiera, en particular puede ser el 1). Como se cumple para el 2, se cumple también para el siguiente del 2. Como se cumple para el 3 . . .

Esto es lo que afirma el principio de inducción.

Ejemplo 3.6:

Utilizaremos el principio de inducción matemática para demostrar que:

$$\sum_{h=1}^{n} 2^{h-1} = 2^n - 1, \qquad para\ todo\ n\ natural$$

Llamemos *P(n)* al enunciado que queremos demostrar.

1) Debemos comprobar que *P(1)* es verdadero

$$\sum_{h=1}^{1} 2^{h-1} = 2^0 = 1 \qquad y \qquad 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Por lo tanto, P(1) es verdadero.

2) Debemos probar que el condicional *P(k)* ⟶ *P(k+1)* es verdadero, cualquiera sea el número natural k, es decir, que *P(k+1)* es verdadero si se supone verdadero *P(k)*).

$$P(k): \sum_{h=1}^{k} 2^{h-1} = 2^{k} - 1 \qquad \longrightarrow \qquad P(k+1): \sum_{h=1}^{k+1} 2^{h-1} = 2^{k+1} - 1$$

Hipótesis inductiva

Tesis inductiva

Demostración:

Desarrollando la suma

$$\sum_{h=1}^{k+1} 2^{h-1} = 2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{3-1} + \cdots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} =$$

Usando la hipótesis inductiva

$$= \left(\sum_{h=1}^{k} 2^{h-1}\right) + 2^{(k+1)-1} = 2^{k} - 1 + 2^{(k+1)-1} = 2^{k} - 1 + 2^{k} = 2.2^{k} - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Luego, *P(k+1)* es verdadero.

De 1) y 2) concluimos que *P(n)* es verdadero para todo valor de n.

Observación: hay algunos enunciados que pueden plantearse como válidos para todo natural mayor o igual a 0 o incluso mayor o igual que algún natural mayor a 1, en esos casos utilizamos el principio de inducción para probarlo, usando como primer elemento el 0 o el natural a partir del cual se plantea su validez.

El factorial

La expresión **n!** se lee "**n factorial**" o "**factorial de n**" y se define, en forma recursiva, de la siguiente manera:

1! = 1

n! = n . (n –1)! , si n > 1

De acuerdo con esta definición es:

2! = 2 . 1! = 2 . 1 = 2

3! = 3 . 2! = 3 . 2 . 1 = 6

$4! = 4 \,.\, 3! = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 24$

. . . .

$n! = n\,(n-1)\,(n-2) \,.\,.\,.\,.\,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1$

Este número es muy utilizado en la teoría de conteo y probabilidades.

Probaremos a continuación una desigualdad con este número.

Ejemplo 3.7:

Probar por inducción que:

P(n): $n\,! \geq 2^{n-1}$ para todo n natural

1) P(1): $1\,! \geq 2^{1-1}$?

En efecto : si $n = 1$, es $n! = 1$ y $2^{n-1} = 2^0 = 1$, por lo tanto P(1) es verdadero

2) Tenemos que demostrar que:

P(k): $k! \geq 2^{k-1}$ es verdadero para algún k, $k \geq 1$ entonces P(k+1): $(k+1)! \geq 2^{k+1-1}$ es verdadero

Hipótesis inductiva

Tesis inductiva

Demostración:

Por definición de factorial

Usando la hipótesis: $k! \geq 2^{k-1}$

Porque $k + 1 \geq 2$ ya que $k \geq 1$

$$(k+1)! = (k+1)\,.\,k! \geq (k+1)\,.\,2^{k-1} \geq 2\,.\,2^{k-1} = 2^{k+1-1}$$

Tenemos entonces: $(k+1)! \geq 2^{k+1-1}$

Por lo tanto P(k+1) es efectivamente verdadero.

Los pasos 1) y 2) demuestran que $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

Ejemplo 3.8:

Probar por inducción que:

P(n): $4^n - 1$ es divisible por 3, para todo n natural

Recordemos que decir que un número es divisible por 3 es equivalente a decir que es múltiplo de 3. Entonces podemos reformular nuestro enunciado como:

P(n): $4^n - 1 = 3h$ siendo h un número entero, para todo n natural

1) P(1): $4^1 - 1 = 3h$ siendo h un número entero ?

En efecto: $4^1 - 1 = 3$ que puede expresarse como 3.1 siendo 1 un número entero, por lo tanto P(1) es verdadero

2) Tenemos que demostrar que:

P(k): $4^k - 1 = 3h$, h un número entero ⟶ P(k+1): $4^{k+1} - 1 = 3w$, w un número entero

Hipótesis inductiva

Tesis inductiva

Demostración:

Usando la hipótesis: $4^k = 3h + 1$

Sacando factor común

$$4^{k+1} - 1 = 4^k.4 - 1 = (3h + 1).4 - 1 = 3h.4 + 4 - 1 = 3h.4 + 3 = 3\left(\underbrace{4h + 1}\right) = 3w$$

w es entero por ser suma y producto de enteros

Tenemos entonces: $4^{k+1} - 1 = 3w$, w un número entero

Por lo tanto P(k+1) es efectivamente verdadero.

Los pasos 1) y 2) demuestran que $4^n - 1 = 3h$ siendo h un número entero, para todo n ≥ 1.

Ejercicios:

5) Utilizando el principio de inducción matemática, demostrar las siguientes afirmaciones.

$a)\ 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n+1) \quad para\ todo\ n, n\ natural$

$$b)\sum_{h=1}^{n} 3\mathrm{h} = \frac{3}{2}n(n+1), \qquad para\ todo\ n, n\ natural$$

$$c)\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad para\ todo\ n, n\ natural$$

$$d)\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \qquad para\ todo\ n, n\ natural$$

$$e)\ 2n+1 < 5n, \qquad para\ todo\ n, n\ natural$$

$$f)\ 9^n - 1\ \ es\ divisible\ por\ 4, \qquad para\ todo\ n, n\ natural$$

$$g)\ 7^n - 1\ \ es\ divisible\ por\ 6, \qquad para\ todo\ n, n\ natural$$

$$h)\sum_{h=1}^{n} \mathrm{h.h!} = (n+1)! - 1, \qquad para\ todo\ n, n\ natural$$

$$i)\sum_{i=1}^{n} \mathrm{i(i+1)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \qquad para\ todo\ n, n\ natural$$

$$j)\sum_{h=1}^{n} 8.3^{h-1} = 4(3^n - 1), \qquad para\ todo\ n, n\ natural$$

$$k)\sum_{h=1}^{n} 6\mathrm{h} - 5 = \mathrm{n(3n-2)}, \qquad para\ todo\ n, n\ natural$$

6) Evaluar sin realizar la suma (no deje de relacionarlo con el ejercicio 5.)

$$a)\sum_{h=10}^{34} 3\mathrm{h} =$$

$$b)\sum_{i=7}^{50} i^2 =$$

$c) \sum_{h=19}^{45} 8.3^{h-1} =$

$d) \sum_{h=4}^{20} 12\mathrm{h} - 10 =$

$e) \sum_{j=21}^{35} 4.j^{3} =$

Bibliografía

- R. Espinosa Armenta, **Matemáticas discretas**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010
- Johnsonbaugh, Richard , **Matemáticas discretas**, 4ª ed., Prentice Hall, 1999
- Smith, et al , **Algebra, trigonometría y geometría analítica**, Pearson-Addison Wesley Longman, 1998
- Jimenez Murillo, José A., **Matemáticas para la computación**, Alfaomega grupo editor, México, 2008