

Matemática IV- 2019

TP2 - Relaciones y Congruencia

1. Sean los conjuntos $A = \{1, 0, -1\}$ y $B = \{2, 3, 1\}$. Decide si las siguientes corresponden a relaciones de A en B . Justifica.

- (a) $R = \{(1; 2), (0; 3)\}$
- (b) $R = \{(-1; 1), (-1; 2), (-1; 3)\}$
- (c) $R = \{(3; 1)\}$
- (d) $R = \emptyset$

2. Sea $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{Z}$ y la relación viene definida en la forma: xRy si y sólo si y es el cuadrado de x .

Escribe R por extensión. Define R^{-1} por comprensión y por extensión.

3. Sea $A = \{a, b, c\}$

- (a) Dar un ejemplo de una relación R no reflexiva en A
- (b) Dar un ejemplo de una relación R simétrica en A
- (c) Dar un ejemplo de una relación R no transitiva en A

4. Sea A un conjunto arbitrario. Sea $R = \Delta_A$ (diagonal de A). Analizar qué propiedades tiene R .

5. Sea $A = \{1, 2, 3\}$

- (a) Dar un ejemplo de una relación R no simétrica en A
- (b) Dar un ejemplo de una relación R antisimétrica en A
- (c) ¿Hay alguna conexión entre ser no simétrica y ser antisimétrica? Ejemplificar

6. Determinar si las siguientes relaciones definidas en $A = \{a, b, c, d\}$ son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas:

- $R_1 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (c, d)\}$
- $R_2 = \{(a, a); (b, b); (b, c); (c, b); (d, d); (c, c)\}$
- $R_3 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, c); (c, b); (b, b)\}$
- $R_4 = \{(a, a); (b, b); (c, c); (d, d)\}$
- $R_5 = \emptyset$

7. Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y las relaciones en A definidas como sigue:

$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ y $S = \{(b, a), (c, a)\}$

- (a) Decidir justificando si R es reflexiva, simétrica, transitiva, o antisimétrica
- (b) Decidir justificando si S es transitiva y/o antisimétrica
- (c) ¿Qué pares hay que agregar necesariamente a S para que sea reflexiva?
- (d) ¿Qué pares hay que agregar necesariamente a S para que sea simétrica?

8. Establecer las propiedades de las siguientes relaciones:
- (a) Sea H el conjunto de los seres humanos.
Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x es hermano de y
 - (b) Sea H el conjunto de los seres humanos.
Sea R la relación en H definida por xRy si y sólo si x es hijo de y
 - (c) Sea N el conjunto de los números naturales.
Sea \leq la relación en N dada por $x \leq y$ si y sólo si x es menor que y
 - (d) Sea N el conjunto de los números naturales.
Sea $|$ la relación en N dada por $x|y$ si y sólo si x divide a y
 - (e) Igual al anterior pero en el conjunto de los enteros.
9. Sea R la siguiente relación en $Z \times Z$ dada por $(x, y)R(z, w)$ si y sólo si $x = z$
Esta relación se llama *relación de equivalencia asociada a la primera proyección*
Demostrar que es efectivamente una relación de equivalencia y hallar la R -clase del par (x, y) .
10. Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Sea R la relación en A dada por: xRy si y sólo si $f(x) = f(y)$
Hallar los conjuntos cocientes para cada una de las siguientes funciones en los reales:
- (a) $f(x) = x^2$
 - (b) $f(x) = 2x$
11. Hallar las clases de equivalencia módulo 3 y 5 de los números 387, 25 y 649
12. Hallar las respectivas clases de 13, 6, 11 y $-49 \pmod{4}$
13. Averiguar si son congruentes módulo 3 entre sí los siguientes pares de números: $(2, 1024)$, $(101, 512)$, $(1501, 1348)$.
14. Analizar para qué valores de m se hacen verdaderas las siguientes congruencias: $5 \equiv 4 \pmod{m}$, $1 \equiv 0 \pmod{m}$, $1197 \equiv 286 \pmod{m}$, $3 \equiv -3 \pmod{m}$
15. Probar que dos enteros son congruentes módulo m si y sólo si los respectivos restos de su división por m son iguales.
16. Probar las siguientes propiedades para todo $a, b, c \in Z$:
- (a) $a \equiv a \pmod{n}$
 - (b) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$
 - (c) $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$
 - (d) $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a + c \equiv b + c \pmod{n}$
 - (e) $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{n}$
 - (f) $a \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow n|a$
17. Sea m un entero impar, probar que $m^2 \equiv 1 \pmod{4}$
18. Probar: todo número es congruente, módulo n , con el resto de su división por n
19. Hallar los resultados de las siguientes operaciones realizadas entre enteros módulo 4 y 5 : $\bar{3} + \bar{1}$; $\bar{5} + \bar{9}$; $4\bar{0}.\bar{3}$; $(\bar{3} + \bar{2}).(\bar{6}.\bar{8})$
20. Construir las tablas de sumar y multiplicar de los enteros módulo 2 y 5