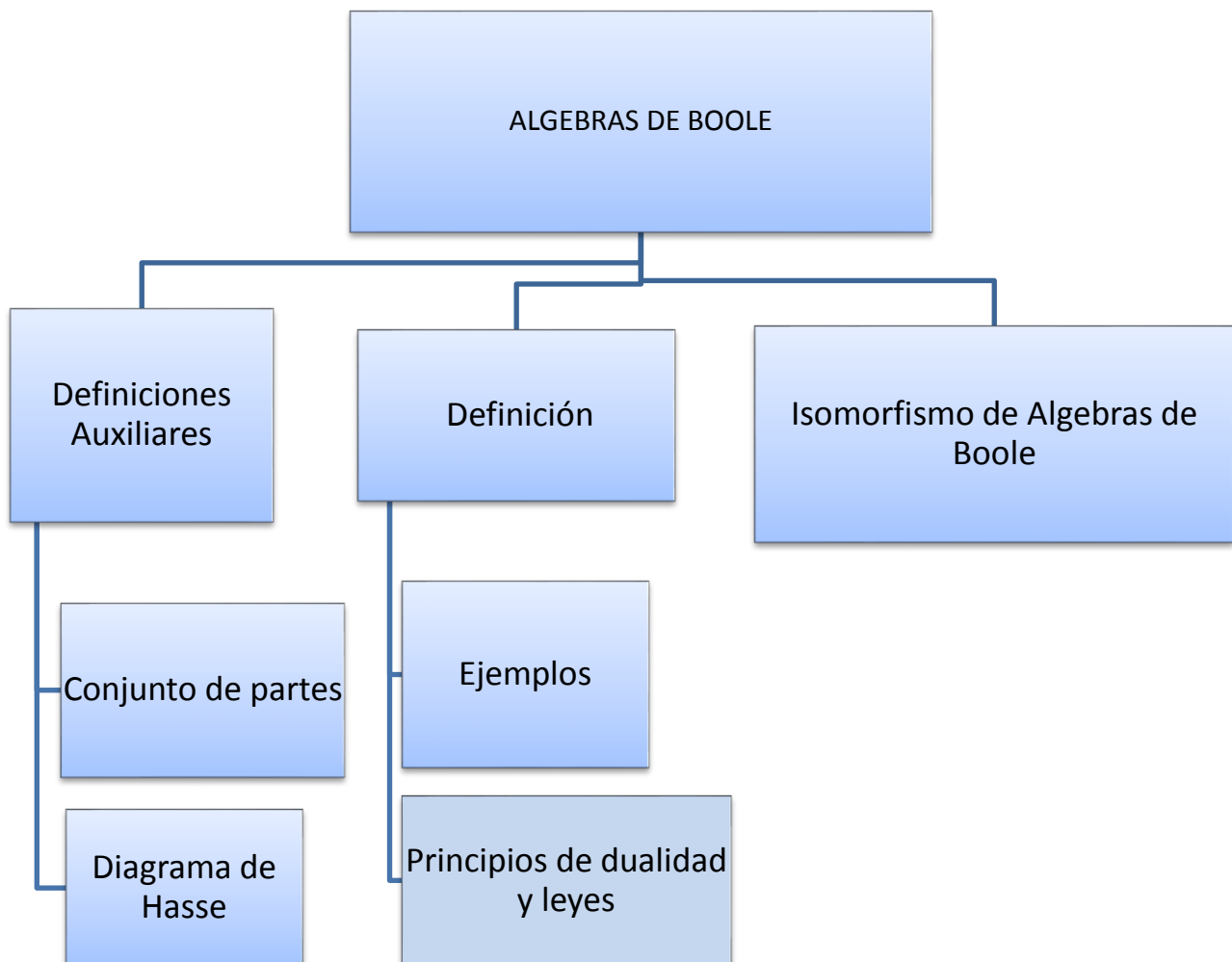


Capítulo 3

ALGEBRAS DE BOOLE

CONTENIDOS:



Matemático invitado: George Boole

En el siglo XIX, el matemático George Boole (1815-1864), en sus libros: "*The Mathematical Analysis of Logic*" (1847) y "*An Investigation of The Laws of Thought*" (1854), desarrolló la idea de que las proposiciones lógicas podían ser tratadas

mediante herramientas matemáticas siguiendo el comportamiento de reglas algebraicas. Igual que en álgebra tradicional, también se trabaja con letras para denominar variables y formar ecuaciones para obtener el resultado de ciertas operaciones mediante una ecuación o expresión booleana.

Los trabajos de Boole y los de sus discípulos resultaron extraños en su época porque en aquel momento parecían no tener aplicaciones. A mediados del siglo XX el álgebra de Boole resultó de una gran importancia práctica, importancia que se ha ido incrementando hasta nuestros días, en el manejo de información digital. Gracias a ella, Claude Shannon (1916-2001) pudo formular su teoría de la codificación y John Von Neumann (1903-1957) pudo enunciar el modelo de arquitectura que define la estructura interna de las computadoras desde la primera generación.

Por esto, Boole es hoy considerado uno de los fundadores de las Ciencias de la Computación y de la base teórica para la era digital.

1. Definiciones Auxiliares

1.1 Conjunto de partes.

Dado un conjunto $A = \{a, b, c\}$ podemos enumerar todos los subconjuntos posibles de A , o dicho de otro modo todos los conjuntos incluidos en A .

Construimos entonces un nuevo conjunto con todos esos conjuntos como elementos, este nuevo conjunto se llama *conjunto de partes de A* y se indica:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Notemos que todos los elementos de $P(A)$ se escriben entre llaves porque son conjuntos, salvo el conjunto vacío que se escribe sin llaves. A su vez $P(A)$ también es un conjunto por lo tanto se nota también con llaves.

Formalmente:

Dado un conjunto U , se define el *conjunto $P(U)$ de partes de U* al que tiene como elementos todos los subconjuntos de U . Los *elementos* de $P(U)$ son *conjuntos*, todos los que están contenidos en U , incluyendo el vacío que está contenido en cualquier conjunto y el conjunto total U ($\emptyset \subseteq U$, $U \subseteq U$)

$$P(U) = \{X; X \subseteq U\}$$

En palabras: X es un elemento de $P(U)$ si y sólo si X está incluido en U

En símbolos: $X \in P(U) \Leftrightarrow X \subseteq U$

Si U es un conjunto finito (o sea tiene un número finito n de elementos), el número de elementos de $P(U)$ es 2^n .

El conjunto vacío tiene 0 elementos, $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ tiene como único elemento al vacío (porque $\emptyset \subseteq \emptyset$), también vale en este caso que tiene $2^0 = 1$ elementos.

Ejemplo 1.1:

Dado el conjunto $U = \{5, 8, 9, b\}$, el conjunto $P(U)$, de partes de U por extensión es:

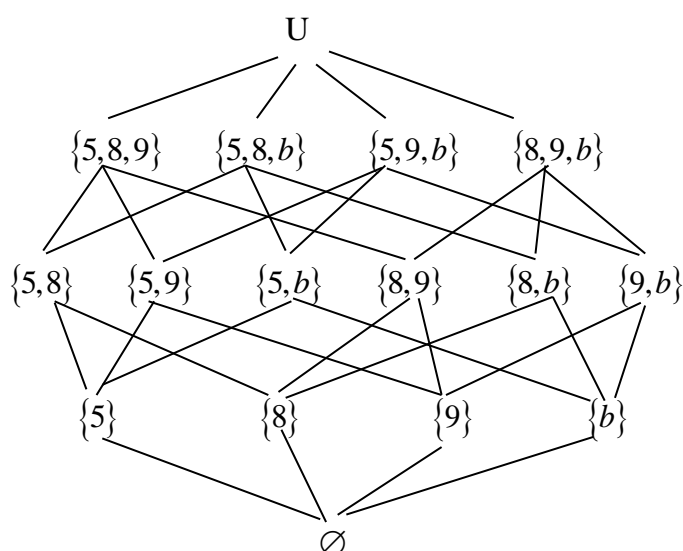
$P(U) = \{\emptyset, \{5\}, \{8\}, \{9\}, \{b\}, \{5, 8\}, \{5, 9\}, \{5, b\}, \{8, 9\}, \{8, b\}, \{9, b\}, \{5, 8, 9\}, \{5, 8, b\}, \{5, 9, b\}, \{8, 9, b\}, U\}$

1.2 Diagrama de Hasse

El diagrama de Hasse es una representación gráfica de la relación entre elementos de un conjunto que le da un orden de acuerdo al criterio con el que se los relaciona.

Ejemplo 1.2:

Podemos hacer un diagrama de Hasse con los elementos del conjunto $P(U)$ del ejemplo anterior ordenándolos por inclusión como muestra la figura:



En la figura se representan los conjuntos por niveles de acuerdo con el número de elementos.

Las líneas de abajo hacia arriba indican la inclusión al nivel inmediato siguiente, se omiten las líneas por transitividad. También indican las uniones al nivel inmediato superior, por ejemplo $\{8, 9\} \cup \{8, b\} \cup \{9, b\} = \{8, 9, b\}$.

De arriba hacia abajo indican las intersecciones al nivel inmediato inferior como $\{5, 8, b\} \cap \{5, 9, b\} = \{5, b\}$

Esta representación recibe el nombre de **diagrama de Hasse** de $P(U)$.

2. Álgebra de Boole

Dado un conjunto con una operación definida, decimos que es **binaria** si se realiza entre dos elementos del conjunto, y decimos que es **unaria** si se realiza sobre un elemento del conjunto.

Formalmente: Dado un conjunto no vacío A , una *operación binaria* en A es una función del producto cartesiano $A \times A$ en A y una *operación unaria* es una función de A en A .

Definición:

Un **Álgebra de Boole** es un conjunto B con al menos dos elementos distintos (primer y último elementos) designados en forma general con los símbolos 0 y 1 , dos operaciones binarias: \vee (denominada “supremo”) y \wedge (denominada “ínfimo”), y una operación unaria: $'$ (denominada “complemento”), con las siguientes propiedades para elementos cualesquiera $x, y, z \in B$:

- | | |
|---|-------------------|
| $(B1) \ x \vee y = y \vee x$ | } conmutatividad |
| $(B2) \ x \wedge y = y \wedge x$ | |
| $(B3) \ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ | } distributividad |
| $(B4) \ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ | |
| $(B5) \ x \vee 0 = x$ | |
| $(B6) \ x \wedge 1 = x$ | |
| $(B7) \ x \vee x' = 1$ | |
| $(B8) \ x \wedge x' = 0$ | |

Un Algebra de Boole también se indica como $B=(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ cuando sea necesario referirse a las operaciones y al primer y último elemento.

Observaciones:

1) En este contexto el 0 y el 1 son símbolos para indicar primero y último elementos de la definición de un álgebra de Boole en general. En cada ejemplo particular primer y último elementos serán los que correspondan de acuerdo con el tipo de elementos de cada caso.

2) También son válidas la asociatividad de \vee y de \wedge :

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

3) El supremo y el ínfimo son operaciones binarias, es decir funciones de $B \times B$ en B ; el complemento, como operación unaria, es una función de B en B . El hecho de que sean funciones asegura que para todo par x, y de elementos de B , $x \vee y \in B$, $x \wedge y \in B$ y son *únicos* y que el complemento $x' \in B$ y es *único*.

4) Toda álgebra de Boole *finita* admite una representación mediante un diagrama de Hasse y los elementos en el nivel inmediato superior al 0 se denominan **átomos**.

En general el diagrama de Hasse se construye ubicando en el nivel inferior al 0 y luego se ordenará los elementos según las operaciones supremo e ínfimo del algebra correspondiente.

2.1 Ejemplos

En los axiomas (B1) a (B8) se evidencia la semejanza de las propiedades con las conocidas en los cálculos con conjuntos y con proposiciones, por ejemplo:

$$A \cup B = B \cup A ; \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad B \cap B^c = \emptyset$$

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p) ; \quad p \wedge (q \vee s) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$$

Ejemplo 2.1

Dado un conjunto U , el conjunto $P(U)$ con la unión como supremo, la intersección como ínfimo, el complemento para conjuntos, el vacío como 1er elemento y U como último elemento, $(P(U), \cup, \cap, ^c, \emptyset, U)$ es un álgebra de Boole, usualmente llamada **álgebra de partes** de un conjunto.

Si el conjunto U es finito $P(U)$ admite una representación por un diagrama de Hasse como el de la figura anterior, los conjuntos unitarios (los que tienen sólo un elemento) son sus átomos.

En ese ejemplo los átomos son $\{5\}$, $\{8\}$, $\{9\}$ y $\{b\}$.

Ejemplo 2.2

Un conjunto de proposiciones cerrado bajo los conectivos conjunción, disyunción y negación cumple las propiedades (B1) a (B8) pero no forma un álgebra de Boole.

En primer lugar la igualdad debe ser reemplazada por el símbolo \Leftrightarrow (o \equiv) de equivalencia lógica, por ejemplo $p \wedge q$ y $q \wedge p$ **no** son **iguales** sino lógicamente equivalentes.

Además el primer elemento designado en general con **0**, en este caso no sería único, podría ser *cualquier* proposición de la forma $p \wedge \sim p$ (contradicción), para que cumpla la condición (B8), tampoco habría un único último elemento **1** porque podría ser *cualquier* proposición de la forma $p \vee \sim p$ (tautología), para que cumpla la condición (B7).

Las propiedades son **válidas** teniendo en cuenta esas salvedades.

Para obtener el **álgebra de Boole del cálculo proposicional** debe procederse del siguiente modo:

Se toma $[p]$ representando el conjunto de todas las proposiciones p_1, p_2, p_3, \dots equivalentes con p , así también resulta único el primer elemento **0** representado por $p \wedge \sim p$ y el último **1** por $p \vee \sim p$.

En estas condiciones se define:

$$[p \vee q] = [p] \vee [q]$$

$$[p \wedge q] = [p] \wedge [q]$$

$$[p]' = [\sim p]$$

Es correcto usar el símbolo de igualdad y valen las propiedades (B1)-(B8) de álgebra de Boole.

Ejemplo 2.3

El conjunto $B = \{0,1\}$ con las operaciones \vee e \wedge dadas por las tablas:

\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

Y la operación complemento definida por $0' = 1$, $1' = 0$, es un álgebra de Boole.

Ejemplo 2.4

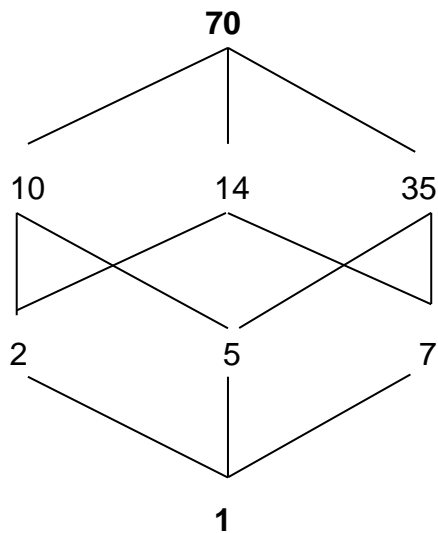
En el conjunto $D_{70} = \{1,2,5,7,10,14,35,70\}$ de los divisores positivos de 70 se definen las operaciones máximo común divisor (mcd) como el ínfimo \wedge , el mínimo común múltiplo (mcm) como el supremo \vee , el complemento está dado por $x' = \frac{70}{x}$.

Por ejemplo:

$$5 \wedge 14 = 1; \quad 5 \vee 14 = 70; \quad 10 \wedge 35 = 5; \quad 10 \vee 35 = 70; \quad 2 \wedge 5 = 1; \quad 2 \vee 5 = 10; \\ 5' = 14; \quad 2' = 35; \quad 10' = 7$$

D_{70} con esas operaciones, el **1** como primer elemento y el **70** como último, es *un álgebra de Boole*. Se puede graficar con un diagrama de Hasse, sus átomos son 2, 5 y 7.

En este caso ordenamos el diagrama según las operaciones del álgebra.



Notemos que $1 \vee 5 = 5$, $1 \vee 2 = 2$ y $1 \vee 7 = 7$ (recordemos que \vee representa el mínimo común múltiplo entre los elementos), por eso hay una raya desde 1 hasta esos elementos.

Luego $2 \vee 5 = 10$, $2 \vee 7 = 14$, $5 \vee 7 = 35$, por eso hay una raya desde el 2 y desde el 5 al 10, desde el 2 y desde el 7 al 14 y desde el 5 y desde el 7 al 35.

Puede pensarse también que habrá una raya desde el un número hasta otro en el que aparezca en su factorización, ubicando como átomos a los factores primos. Así, 2, 5 y 7 son los factores primos de 70 y luego el 2 aparece en la factorización de 10 y de 14, 5 en la de 10 y 35 y 7 en la de 14 y 35.

Observación:

Sean $n \in \mathbb{N}, n > 1$ y D_n el conjunto de los divisores positivos de n . D_n **no siempre** es un álgebra de Boole.

Para todo par de números siempre existen \vee e \wedge , dados respectivamente por el mcm y el mcd, pero no siempre existe el complemento.

Por ejemplo, sea $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$ conjunto de los divisores naturales de 8. Este conjunto con las operaciones vistas **no** es un álgebra de Boole. Nótese que el 1er elemento es 1, el último es 8 y que los axiomas de complemento (B7) y (B8) no se cumplen.

Las siguientes son propiedades importantes sobre D_n :

Proposición 1.

Si n cumple que $\forall k > 1$, k^2 no divide a n , entonces todo $x \in D_n$ tiene complemento $x' = \frac{n}{x}$.

Demostración:

Sea n un natural tal que no existe k que cumpla que k^2 divida a n , esto quiere decir que los factores primos de n son todos distintos, sea $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_t$.

Sea $x \in D_n$, entonces $x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_m$, es decir que es el producto de alguno de los primos de n , entonces:

$$\frac{n}{x} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_m \cdot p_{m+1} \cdot p_{m+2} \dots p_t}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_m} = p_{m+1} \cdot p_{m+2} \dots p_t$$

Por lo tanto x y $\frac{n}{x}$ no tienen primos en común, entonces su mínimo común múltiplo es el producto de todos y su máximo común divisor es 1.

Se cumplen (B7): $x \vee \frac{n}{x} = mcm\left(x, \frac{n}{x}\right) = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_m) \cdot (p_{m+1} \cdot p_{m+2} \dots p_t) = n$

$$(B8): x \wedge \frac{n}{x} = mcd\left(x, \frac{n}{x}\right) = 1$$

Siendo n el último elemento de D_n y 1 el primer elemento de D_n .

Entonces es $\frac{n}{x} = x'$ el complemento de x

Ejemplos:

Hemos visto que $70=2 \cdot 5 \cdot 7$ es decir que sus factores primos son todos distintos, la proposición nos dice que todo elemento de D_{70} tiene complemento, como vimos en el ejemplo.

En D_{30} también sabemos que todo elemento tiene complemento ya que $30=2 \cdot 3 \cdot 5$, n tiene cuadrados en su factorización.

Por el contrario en D_8 vemos que para el número 4 que pertenece a D_8 no hay ningún x en D_8 que cumpla (a la vez) $4 \vee x = 8$ y $4 \wedge x = 1$ (axiomas (B7) y (B8)), 4 no tiene complemento, luego D_8 no es un álgebra de Boole. Por el contrarrecíproco de la proposición 1 sabemos que hay cuadrados que dividen a 8, ya que $8=2 \cdot 2 \cdot 2$.

Tampoco son álgebras de Boole $D_9=\{1, 3, 9\}$ o $D_{24}=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ en los que están, respectivamente, los cuadrados 9 y 4.

Se define que un natural n es **libre de cuadrados** si en su factorización como producto de primos, todos tienen exponente 1.

Observación:

Las propiedades (B1) a (B6) de un algebra de Boole se cumplen para todo conjunto D_n con las operaciones de supremo como mcm, de ínfimo como mcd y de complemento como el cociente entre n y el número. Es decir que para que D_n sea un algebra de Boole alcanza sólo con mirar las propiedades (B7) y (B8), lo que da lugar al siguiente criterio:

Proposición 2.

Sea $n \in \mathbb{N}, n > 1$ y D_n el conjunto de los divisores positivos de n . D_n es un algebra de Boole si y sólo si n es libre de cuadrados.

La proposición afirma dos cosas:

- 1) Si $n \in \mathbb{N}, n > 1$ y D_n el conjunto de los divisores positivos de n . D_n es un algebra de Boole **entonces** n es libre de cuadrados.
- 2) Si n es libre de cuadrados **entonces** D_n , el conjunto de los divisores positivos de n , es un algebra de Boole.

Demostración de 1):

Lo demostraremos por el absurdo, suponiendo que existe D_n algebra de Boole y que n no es libre de cuadrados.

Sea $n = p^2 \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_t$ es decir que al menos el primo p está al cuadrado.

Sea $x \in D_n$ tal que $x = p \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_t$.

Por ser algebra de Boole deben cumplirse (B7) y (B8), es decir que:

$$x \vee \frac{n}{x} = n \quad \text{y} \quad x \wedge \frac{n}{x} = 1 \quad \left(\frac{n}{x} = \frac{p^2 \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_t}{p \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_t} = p \right)$$

Sin embargo $x \vee \frac{n}{x} = mcm(p \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_t, p) = p \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_t \neq n$

Y $x \wedge \frac{n}{x} = mcd(p \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_t, p) = p \neq 1$

Por lo tanto no se cumplen las propiedades mencionadas para este elemento, entonces no es algebra de Boole. Absurdo ya que contradice la hipótesis.

Entonces no es cierto que D_n pueda ser Algebra de Boole y a la vez no ser n libre de cuadrados.

Hemos probado que si $n \in \mathbb{N}, n > 1$ y D_n el conjunto de los divisores positivos de n . D_n es un algebra de Boole **entonces** n es libre de cuadrados.

Demostración de 2):

Hay que ver que si n es libre de cuadrados entonces D_n es algebra de Boole.

Si n es libre de cuadrados sabemos por la proposición 1 que todo elemento tiene complemento y por la observación anterior, si todo elemento tiene complemento entonces D_n es Algebra de Boole, con lo que queda probado el enunciado.

Ejemplos:

En los casos mencionados 70 y 30 son libres de cuadrados mientras que 8, 9 y 24 no lo son.

En D_{70} $14' = 5$ pues $\frac{70}{14} = 5$, siendo **70=2.5.7** y **14=2.7**, el único primo que falta de la factorización de 70 es el **5**.

D_{210} es un álgebra de Boole porque $210=2.3.5.7$, el complemento de 10 es $\frac{210}{10}=21$, 10 se factoriza como $10=5.2$ y $21=3.7$ los primos de la factorización de 210 que no están en la de 10.

2.2 Principio de Dualidad y Leyes en un álgebra de Boole

Dualidad:

El enunciado **dual** de una proposición en un álgebra de Boole B es el que se obtiene intercambiando las operaciones \vee e \wedge y los elementos **0** y **1** en la proposición original. En la definición (B1) y (B2) son duales una de la otra, lo mismo (B3) y (B4), (B5) y (B6), (B7) y (B8). Por la simetría de estos axiomas que definen un álgebra de Boole B , cualquier proposición en B es verdadera si y sólo si su dual lo es. Este hecho se conoce como **principio de dualidad**.

Teorema 1. (Leyes de Idempotencia). Sea B un álgebra de Boole, entonces para cualquier $x \in B$, $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$

Demostración:

Por los axiomas (B5), (B8), (B3) y (B7)

$$x \wedge x = (x \wedge x) \vee 0 = (x \wedge x) \vee (x \wedge x') = x \wedge (x \vee x') = x \wedge 1 = x$$

Y por dualidad $x \vee x = x$.

Teorema 2. (Leyes de acotación). Sea B un álgebra de Boole, entonces para cualquier $x \in B$, $x \vee 1 = 1$, $x \wedge 0 = 0$

Demostración:

Por (B8), asociatividad, idempotencia y de nuevo (B8)

$$x \wedge 0 = x \wedge (x \wedge x') = (x \wedge x) \wedge x' = x \wedge x' = 0$$

Por dualidad $x \vee 1 = 1$.

Teorema 3. (Leyes de absorción). Sea B un álgebra de Boole, entonces para cualesquiera $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$, $x \wedge (x \vee y) = x$

Demostración:

Por (B6), (B7), distributividad ((B3))

$$\begin{aligned} x \vee (x \wedge y) &= (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = [x \wedge (y \vee y')] \vee (x \wedge y) = \\ &= [(x \wedge y) \vee (x \wedge y')] \vee (x \wedge y) = \end{aligned}$$

por asociatividad y conmutatividad ((B1))

$$= [(x \wedge y) \vee (x \wedge y)] \vee (x \wedge y') =$$

por idempotencia aplicada al elemento $(x \wedge y)$, distributividad ((B3)), (B7) y (B6)

$$= (x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \wedge (y \vee y') = x \wedge 1 = x$$

Por dualidad también es verdadero $x \wedge (x \vee y) = x$.

Teorema 4. (Involución). Sea B un álgebra de Boole, entonces para cualquier $x \in B$, $(x')' = x$ (el complemento del complemento de x es de nuevo x)

Demostración:

Por (B7) y (B8): $x \vee x' = 1$ y $x \wedge x' = 0$

Por las conmutativas (B1) y (B2): $x' \vee x = 1$, $x' \wedge x = 0$

Y el complemento es único (Observación 3 de la definición de álgebra de Boole), luego

$$(x')' = x.$$

Teorema 5. (Leyes de De Morgan). Sea B un álgebra de Boole, entonces para $x, y \in B$,

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$

$$(x \wedge y)' = x' \vee y'$$

Demostración:

Se demuestra que $(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = 1$ (parte 1)

y que $(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = 0$ (parte 2)

por lo que, por unicidad del complemento $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

parte 1: Por distributiva (B4), conmutatividad y asociatividad del \vee , (B7), acotación

$$(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = [(x \vee y) \vee x'] \wedge [(x \vee y) \vee y'] = [(x \vee x') \vee y] \wedge [x \vee (y \vee y')] =$$

$$= [1 \vee y] \wedge [x \vee 1] = 1 \wedge 1 = 1$$

parte 2: Por conmutativa (B2) y distributiva (B3), asociativa y conmutativa de \wedge , (B8)

y ley de acotación

$$(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = [x \wedge (x' \wedge y')] \vee [y \wedge (x' \wedge y')] = [(x \wedge x') \wedge y'] \vee [(y \wedge y') \wedge x'] =$$

$$= [0 \wedge y'] \vee [0 \wedge x'] = 0 \vee 0 = 0$$

Se obtuvo que $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

Por dualidad también vale $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

3. Isomorfismo de álgebras de Boole

Definición

Sean B_1 y B_2 dos álgebras de Boole. Un **isomorfismo** entre B_1 y B_2 es una función biyectiva $f: B_1 \rightarrow B_2$ que cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \forall \text{ par } x, y \in B_1 \quad & \text{(i) } f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \\ & \text{(ii) } f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \\ & \text{(iii) } f(x') = [f(x)]' \end{aligned}$$

Es decir que la imagen por f del supremo $x \vee y$ entre x e y es igual al supremo $f(x) \vee f(y)$ entre $f(x)$ y $f(y)$, la imagen por f del ínfimo $x \wedge y$ es el ínfimo $f(x) \wedge f(y)$ entre sus imágenes y la imagen por f de x' (el complemento de x) es igual al complemento $[f(x)]'$ de su imagen, siendo x e y elementos de B_1 y $f(x)$, $f(y)$ elementos de B_2 .

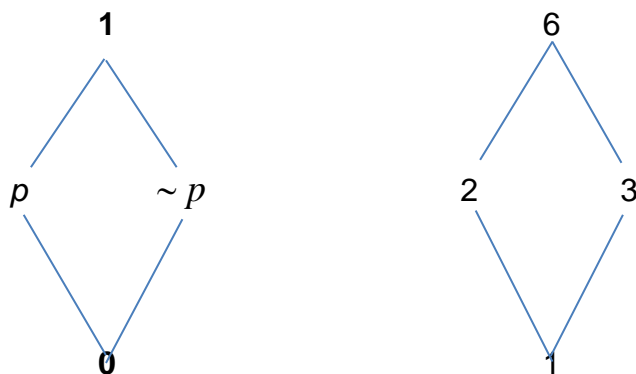
Un isomorfismo es una biyección que conserva las operaciones. Cuando existe tal isomorfismo entre B_1 y B_2 , se dice que B_1 y B_2 son **isomorfas**. B_1 y B_2 tienen elementos distintos pero tienen *la misma forma* comportándose igual con respecto a sus operaciones.

Ejemplo 3.1

Dados el conjunto D_6 de los divisores positivos de 6 y el conjunto B formado por las proposiciones p , $\sim p$, el primer elemento es $0 = p \wedge \sim p$, el último es $1 = p \vee \sim p$, únicos.

La función $f: D_6 \rightarrow B$ dada por $f(0) = 1$, $f(p) = 2$, $f(\sim p) = 3$, $f(1) = 6$ es un isomorfismo entre D_6 y B .

Se observa que sus respectivos diagramas de Hasse coinciden:



Nótese que en D_6 el 1 es el número 1, mientras que en B tanto **1** como **0** son símbolos que representan lo indicado.

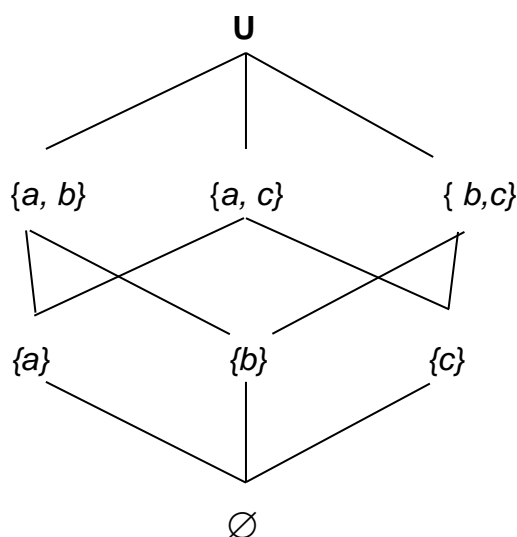
Ejemplo 3.2

El álgebra de Boole $\mathbf{D}_{70} = (\mathbf{D}_{70}, \text{mcm}, \text{mcd}, 70/x, 1, 70)$ que tiene tres átomos 2, 5, 7, es isomorfa a un álgebra de partes de un conjunto U que tenga tres elementos.

Por ejemplo $U = \{a, b, c\}$ con las operaciones propias de $P(U)$, $P(U) = (P(U), U, I, \cap, \cup, \emptyset, U)$, definiendo el isomorfismo mediante la función f de \mathbf{D}_{70} en $P(U)$, en el que los conjuntos unitarios $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ son los átomos, dada por $f(2) = \{a\}$, $f(5) = \{b\}$, $f(7) = \{c\}$, $f(10) = \{a, b\}$, $f(14) = \{a, c\}$, $f(35) = \{b, c\}$, $f(70) = \{a, b, c\}$, $f(1) = \emptyset$.

Esta función es biyectiva y respeta las operaciones.

Para hacer más simple la correspondencia se puede tomar como conjunto $U = \{u_2, u_5, u_7\}$ con sus elementos subindexados con los átomos de \mathbf{D}_{70} o directamente $U = \{2, 5, 7\}$ con los átomos como elementos, teniendo en cuenta **que cada álgebra tiene sus propias operaciones** y que en tal elección de U , los átomos de $P(U)$ son los conjuntos unitarios $\{2\}, \{5\}, \{7\}$, en tanto que en \mathbf{D}_{70} los átomos son los números 2, 5 y 7. Eligiendo $U = \{a, b, c\}$, en la figura 4 se muestra el diagrama de Hasse de $P(U)$ que coincide con el de \mathbf{D}_{70} dado en la figura.



Se observa por ejemplo que:

$$f(5 \vee 7) = f(35) = \{b, c\} = \{b\} \cup \{c\} = f(5) \cup f(7);$$

$$f(10 \wedge 35) = f(5) = \{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\} = f(10) \cap f(35)$$

En D_{70} 35 es el complemento de 2, $f(35)=\{b, c\}$, $f(2)=\{a\}$ y $\{b, c\}$ es el complemento de $\{a\}$ en $P(U)$, o sea se cumple que $f(2') = f(35) = \{b, c\} = \{a\}^c$

El Ejemplo 3.2 se puede generalizar para todo álgebra de Boole con un número finito de elementos.

Teorema 6. Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces existe un conjunto U tal que B es isomorfa al álgebra de partes $P(U)$.

Para demostrarlo se toma U el conjunto de los átomos de B , la biyección que a cada átomo a_i de B le asigna el conjunto unitario $\{a_i\}$, a partir de ahí se construye un isomorfismo f entre B y $P(U)$.

Teorema 7.(Corolario del Teorema 6). El número de elementos de un álgebra de Boole finita es una potencia de dos, 2^n con $n > 0$.

Demostración.

Si B es un álgebra de Boole finita y U es el conjunto de sus átomos, por el teorema anterior el número de elementos de B es igual al número de elementos de $P(U)$ y, como se indica al comienzo (Ver Conjunto de partes), si U tiene n elementos, $P(U)$ tiene 2^n elementos.

El número n debe ser mayor que 0 porque B tiene por lo menos dos elementos: el primero y el último.

Observación.

La condición enunciada en el Teorema 7 es necesaria, por lo que si el número de elementos de un conjunto *no* es una potencia de dos, se puede concluir que tal conjunto *no* es un álgebra de Boole.

La condición *no* es suficiente, por ejemplo el conjunto $D_{24}=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ de divisores positivos de 24 tiene 2^3 elementos y no es un álgebra de Boole. El hecho de que un conjunto tenga 2^n elementos, con $n \geq 1$, *no* asegura que sea un álgebra de Boole.

Ejercicios

1) Encontrar los conjuntos de partes de un conjunto con 3 elementos y otro con 4 elementos y graficar sus respectivos diagramas de Hasse. Indicar los átomos en cada caso.

2) Sean B y D conjuntos tales que $B \subseteq D$. Probar que $P(B) \subseteq P(D)$

3) Graficar el diagrama de Hasse del álgebra de Boole D_{30} , indicar sus átomos y el complemento de cada elemento.

4) Determinar si los conjuntos D_{40} , D_{15} , D_{170} , D_{21} , D_6 , D_{18} , D_{42} , D_{54} son o no álgebras de Boole, justificando las respuestas.

En caso que sea un álgebra de Boole, graficar el diagrama de Hasse e indicar cuáles son sus átomos

5) Determinar si el conjunto D_{390} es o no un álgebra de Boole.

En caso afirmativo graficar su diagrama de Hasse, indicar los átomos y encontrar el complemento de cada elemento.

6) Sean $B = \mathbb{Z}$, \vee la suma usual de enteros, \wedge el producto usual de enteros y para cada $a \in \mathbb{Z}$, se define $a' = -a$. ¿Es B un álgebra booleana?

7) Simplificar (hasta su mínima expresión) las siguientes expresiones, indicando las propiedades usadas

$$\begin{aligned} [x \vee (x \wedge y)] \vee [(x \wedge (x \vee y))] &= & x' \vee [(x \wedge x')'] &= \\ x \wedge (y \vee x')' &= & [x \wedge (y' \wedge y)] \vee [(y \wedge (x \vee x'))] &= \end{aligned}$$

8) a) Probar la Ley de De Morgan $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

b) Expresar las Leyes de De Morgan en los conjuntos y en el cálculo proposicional, con los símbolos y operaciones que corresponden en cada caso

9) Sea $f: B_1 \rightarrow B_2$ un isomorfismo de álgebras booleanas. Si llamamos 0_1 y 0_2 al 0 de B_1 y B_2 respectivamente y 1_1 y 1_2 al 1 de B_1 y B_2 respectivamente, demostrar que $f(0_1) = 0_2$ y $f(1_1) = 1_2$

10) Encontrar un conjunto U tal que el álgebra de partes $P(U)$ sea isomorfa a D_{390} , indicar primer elemento, último elemento y los átomos en cada álgebra de Boole y el número total de elementos que tienen.

Obtener los complementos en D_{390} de los elementos 15, 78, 10, 13, 39, supremo e ínfimo en D_{390} de 15 y 10, 15 y 39, 30 y 78, 10 y 30, 10 y 39. Y los correspondientes por el isomorfismo en $P(U)$

11) Mediante el Teorema 7 establecer si D_{40} , D_{18} , D_9 son o no álgebras de Boole.

Anexo

Una aplicación: Los circuitos

Una aplicación del álgebra de Boole es el álgebra de circuitos de conmutación. Un *circuito de conmutación* es una red eléctrica formada por interruptores conectados por cable, con dos estados que son *cerrado* y *abierto*, a los que se les asigna, respectivamente, los valores 1 y 0, y dos terminales s y t .

La corriente eléctrica fluye de s a t a través del punto donde está localizado un interruptor si y sólo si éste está cerrado

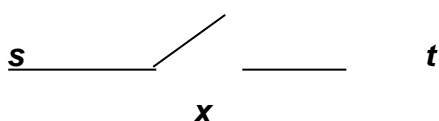


figura 1

En la figura 1 se muestra un circuito con un solo interruptor.

El circuito de la figura 2 está cerrado si y sólo si x o y están cerrados. Esta combinación de interruptores se indica con $x \vee y$ y se dice que los interruptores x , y están *en paralelo*

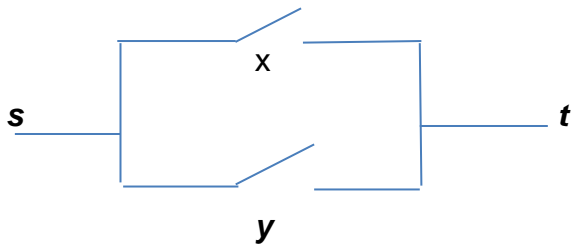


figura 2

Dos interruptores x e y están *en serie* si están conectados como en la figura 3



figura 3

En este caso el circuito está cerrado si y sólo si ambos x e y lo están, esta combinación de interruptores se indica con $x \wedge y$.

La operación **supremo** es la conexión en paralelo y el **ínfimo** es la conexión en serie. Los valores que pueden tomar los interruptores son sólo dos: {ON, OFF} o bien {1,0}. Si dos interruptores operan en tal forma que cuando uno está abierto el otro está cerrado, y viceversa entonces se designará uno de ellos con una letra y el otro por su **complemento**.

Se indica con **0** al circuito que está siempre abierto y con **1** al que está siempre cerrado.

Con estas operaciones el conjunto de circuitos de conmutación es un álgebra de Boole y tiene todas sus propiedades.

En el diseño actual de redes eléctricas los interruptores se reemplazan por otros dispositivos llamados **compuertas lógicas**, que se corresponden con las operaciones booleanas \vee , \wedge y complemento (negación).

Bibliografía

- Ramón Espinosa Armenta, **Matemática Discreta**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010.
- Elliott Mendelson, **Boolean Algebra and Switching Circuits**, McGraw-Hill.