Teoría de Números III

Matemática IV, Facultad de Informática, UNLP.
2019

Números Complejos

Definición

Definimos al número complejo i (unidad imaginaria) como aquel número que satisface la siguiente igualdad:

$$i^2 = -1$$

Esto nos permite ampliar al conjunto de los números reales y por lo tanto escribiremos a un número complejo z de la siguiente forma:

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

donde vemos que si $b = 0$ recuperamos a los números reales.
Luego el conjunto de números complejos, al que denotaremos como $\mathbb{C}$, se define por comprensión de la siguiente forma:

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

Definición

Dado un número complejo $z = a + ib$, se definen la parte real y la parte imaginaria de z como:

$$Re(z) = a$$
$$Im(z) = b,$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$

Definición

El conjugado de un número complejo $z = a + ib$ se lo denota como $\bar{z}$ y se lo define como:

$$\bar{z} = a - ib$$

Observamos que $\bar{\bar{z}} = z$

Potencias del número i

Ahora nos preguntamos ¿cuánto vale $\imath^n$? Observamos que

$$\begin{aligned}
\imath^0 &= 1 \\
\imath^1 &= i \\
\imath^2 &= -1 \\
\imath^3 &= i^2 i = -i \\
\imath^4 &= i^2 i^2 = -1. - 1 = 1
\end{aligned}$$

Esto nos permite inferir que $\imath^m = i^r$ siendo $m = 4q + r; 0 \leq r < 4$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
i^{173} &= i^{43 \cdot 4+1} = i^1 \\
i^{1354} &= i^{338 \cdot 4+2} = i^2
\end{aligned}$$

Suma de complejos

Definición

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2$, *se define la suma de estos dos números como:*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$

Suma de complejos

Definición

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2$, *se define la suma de estos dos números como:*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$

Por ejemplo si $z_1 = 1 + i2$ y $z_2 = 3 - i4$ entonces,

$$z_1 + z_2 = (1 + i2) + (3 - i4) = (1 + 3) + i(2 - 4) = 4 - i2$$

Opuesto y Resta

Definición

Dado un número complejo $z = a + ib$ se define el opuesto de z y se lo denota como $-z$ al complejo $-z = -a - ib$.

Esto nos permite definir la operación resta entre dos complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ como sigue:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - i\,(a_2 + ib_2) = (a_1 + ib_1) + (-a_2 - ib_2)$$

es decir, no es mas que sumarle a z_1 el opuesto de z_2.

Opuesto y Resta

Definición

Dado un número complejo $z = a + ib$ se define el opuesto de z y se lo denota como $-z$ al complejo $-z = -a - ib$.

Esto nos permite definir la operación resta entre dos complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ como sigue:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - i\,(a_2 + ib_2) = (a_1 + ib_1) + (-a_2 - ib_2)$$

es decir, no es mas que sumarle a z_1 el opuesto de z_2.
Por ejemplo si $z_1 = 1 + i3$ y $z_2 = 2 - i5$,

$$z_1 - z_2 = (1 + i3) - (2 - i5) = (1 + i3) + (-2 + i5) = -1 + i8$$

Producto de dos complejos

Definición

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2$*, se define el producto de estos dos números como:*

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a_1 + ib_1).(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + ib_1ib_2 \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2 \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 - b_1b_2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

Producto de dos complejos

Definición

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, se define el producto de estos dos números como:

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a_1 + ib_1).(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + ib_1ib_2 \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2 \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 - b_1b_2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

Por ejemplo si $z_1 = 2 + i3$ y $z_2 = 4 - i5$ entonces,

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (2 + i3).(4 - i5) = 2,4 + i2(-5) + i3,4 + i3.(-i5) \\ &= 8 - i10 + i12 - i^2 15 = 8 - i10 + i12 + 15 \\ &= (8 + 15) + i(-10 + 12) = 23 + i2 \end{aligned}$$

Inverso

Definición

Dado el número complejo $z = a + \imath b \neq 0 + \imath 0$, *se define el inverso de* z *y se lo denota como* z^{-1} *al siguiente número:*

$$z^{-1} = \frac{1.\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{a - ib}{(a + ib).(a - ib)}$$

Inverso

Definición

Dado el número complejo $z = a + \imath b \neq 0 + \imath 0$, se define el inverso de z y se lo denota como z^{-1} al siguiente número:

$$z^{-1} = \frac{1.\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{a - ib}{(a+ib).(a-ib)}$$

Por ejemplo queremos calcular el inverso del complejo $z = 2 + i3$ entonces,

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1.\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{2 - i3}{(2+i3)\cdot(2-i3)} = \frac{2 - i3}{((2\cdot 2 + 3\cdot 3) + i(2\cdot(-3) + 3\cdot 2))} \\ &= \frac{2-i3}{13} = \frac{2}{13} - i\frac{3}{13} \end{aligned}$$

Cociente de dos complejos

Definición

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2 \neq 0 + \imath 0$*, se define el cociente de estos dos números y se lo denota como* $\frac{z_1}{z_2}$*, al producto de* z_1 *con el inverso de* z_2 *es decir:*

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 . z_2^{-1} = \frac{(a_1 + ib_1) . (a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} \\
&= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2}
\end{aligned}
$$

Cociente de dos complejos

Definición

Dados dos números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$ *y* $z_2 = a_2 + ib_2 \neq 0 + \imath 0$*, se define el cociente de estos dos números y se lo denota como* $\frac{z_1}{z_2}$*, al producto de* z_1 *con el inverso de* z_2 *es decir:*

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 . z_2^{-1} = \frac{(a_1 + ib_1) . (a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

Por ejemplo si $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 3 + i4$ entonces,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1} = \frac{(1 + i) . (3 - i4)}{(3 + \imath 4)(3 - i4)} = \frac{7 - i}{25} = \frac{7}{25} - i\frac{1}{25}$$

Plano Complejo

Recordamos que al conjunto de números complejos lo hemos definido, por comprensión, de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

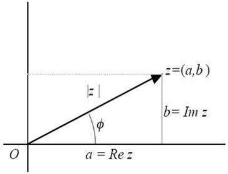
Esto nos permite definir al Plano Complejo como el plano donde se grafica un número complejo, en efecto dado un número complejo z lo podemos graficar en el plano de la siguiente forma:

Plano Complejo

Recordamos que al conjunto de números complejos lo hemos definido, por comprensión, de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

Esto nos permite definir al Plano Complejo como el plano donde se grafica un número complejo, en efecto dado un número complejo z lo podemos graficar en el plano de la siguiente forma:



Esto último nos permite escribir al plano complejo en su forma de par ordenado, es decir $z = (a, b)$.

Módulo y argumento de un complejo

De la representación en el plano complejo de un número z se puede ver que hay asociado a cada numero complejo un numero real que es su distancia al origen y llamaremos modulo del complejo y al que denotaremos como $|z|$, y un ángulo α, que es el que forma el segmento de recta $|z|$ con el eje real positivo, al que llamaremos argumento de z y se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha &= \arctan(b/a) \end{aligned}$$

Luego, a partir del gráfico, se puede expresar la parte real y la parte imaginaria de cada complejo como

$$Re(z) = a = |z| \cos(\alpha)$$
$$Im(z) = b = |z| \sin(\alpha)$$

Forma trigonométrica de un complejo

Entonces, si

$$\begin{aligned} a &= Re(z) = |z|\cos(\alpha) \\ b &= Im(z) = |z|\sin(\alpha) \end{aligned}$$

podemos escribir al número complejo z en lo que se conoce como su forma trigonométrica:

Forma trigonométrica de un complejo

Entonces, si

$$\begin{aligned} a &= Re(z) = |z|\cos(\alpha) \\ b &= Im(z) = |z|\sin(\alpha) \end{aligned}$$

podemos escribir al número complejo z en lo que se conoce como su forma trigonométrica:

$$z = a + \imath b = |z|\cos(\alpha) + \imath|z|\sin(\alpha) = |z|\left(\cos(\alpha) + \imath\sin(\alpha)\right); \quad 0 \leq \alpha < 2\pi$$

Forma exponencial de un complejo

Usando la formula de Euler

$$e^{\imath\beta} = \cos(\beta) + \imath\sin(\beta);$$

y la forma trigonometrica de un número complejo, obtenemos una forma mas cómoda de escribir a un número complejo z que se conoce como forma exponencial del complejo y se la define como:

Forma exponencial de un complejo

Usando la formula de Euler

$$e^{\imath\beta} = \cos(\beta) + \imath\sin(\beta);$$

y la forma trigonometrica de un número complejo, obtenemos una forma mas cómoda de escribir a un número complejo z que se conoce como forma exponencial del complejo y se la define como:

Definición

$$z = |z|(\cos(\alpha) + \imath\sin(\alpha)) = |z|e^{\imath\alpha}$$

Producto y cociente de complejos en forma exponencial

Dados dos números complejos escritos en su forma exponencial, $z_1 = |z_1|e^{\imath\alpha_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{\imath\alpha_2}$, podemos escribir el producto y el cociente de dos número complejos de manera simple como:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= |z_1|e^{\imath\alpha_1}|z_2|e^{\imath\alpha_2} = |z_1||z_2|e^{\imath\alpha_1}e^{\imath\alpha_2} = |z_1||z_2|e^{\imath(\alpha_1+\alpha_2)} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|e^{\imath\alpha_1}}{|z_2|e^{\imath\alpha_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{\imath(\alpha_1-\alpha_2)}
\end{aligned}
$$

Potencias de un complejo

Vimos que al escribir un número complejo en su forma exponencial resulta fácil calcular el producto de dos números complejos, esto nos permite definir la potencia n de un número complejo $z = |z|e^{\imath\alpha}$ como:

Potencias de un complejo

Vimos que al escribir un número complejo en su forma exponencial resulta fácil calcular el producto de dos números complejos, esto nos permite definir la potencia n de un número complejo $z = |z|e^{\imath\alpha}$ como:

$$z^n = \left(|z|e^{\imath\alpha}\right)^n = |z|^n \left(e^{\imath\alpha}\right)^n = |z|^n e^{\imath n\alpha}$$

Raíces n-ésimas de un complejo

Definición

Dado un número complejo $z = |z|e^{\imath\alpha}$*, se define a las raíces n-ésimas de* z *(y se las denota como* $z^{1/n}$*), como los números complejos* w *que satisfacen la siguiente ecuación* $w^n = z$*.*
Entonces $w = |w|e^{\imath\beta}$ *donde* $|w| = |z|^{1/n}$ *y* $\beta = \frac{\alpha+2k\pi}{n}; 0 \leq k < n$*, es decir las raíces n-ésimas de* z *están dadas por la siguiente expresión:*

Raíces n-ésimas de un complejo

Definición

Dado un número complejo $z = |z|e^{\imath\alpha}$, se define a las raíces n-ésimas de z (y se las denota como $z^{1/n}$), como los números complejos w que satisfacen la siguiente ecuación $w^n = z$.
Entonces $w = |w|e^{\imath\beta}$ donde $|w| = |z|^{1/n}$ y $\beta = \frac{\alpha+2k\pi}{n}; 0 \leq k < n$, es decir las raíces n-ésimas de z están dadas por la siguiente expresión:

$$w_k = |z|^{1/n} e^{\frac{\alpha+2k\pi}{n}}; 0 \leq k < n$$