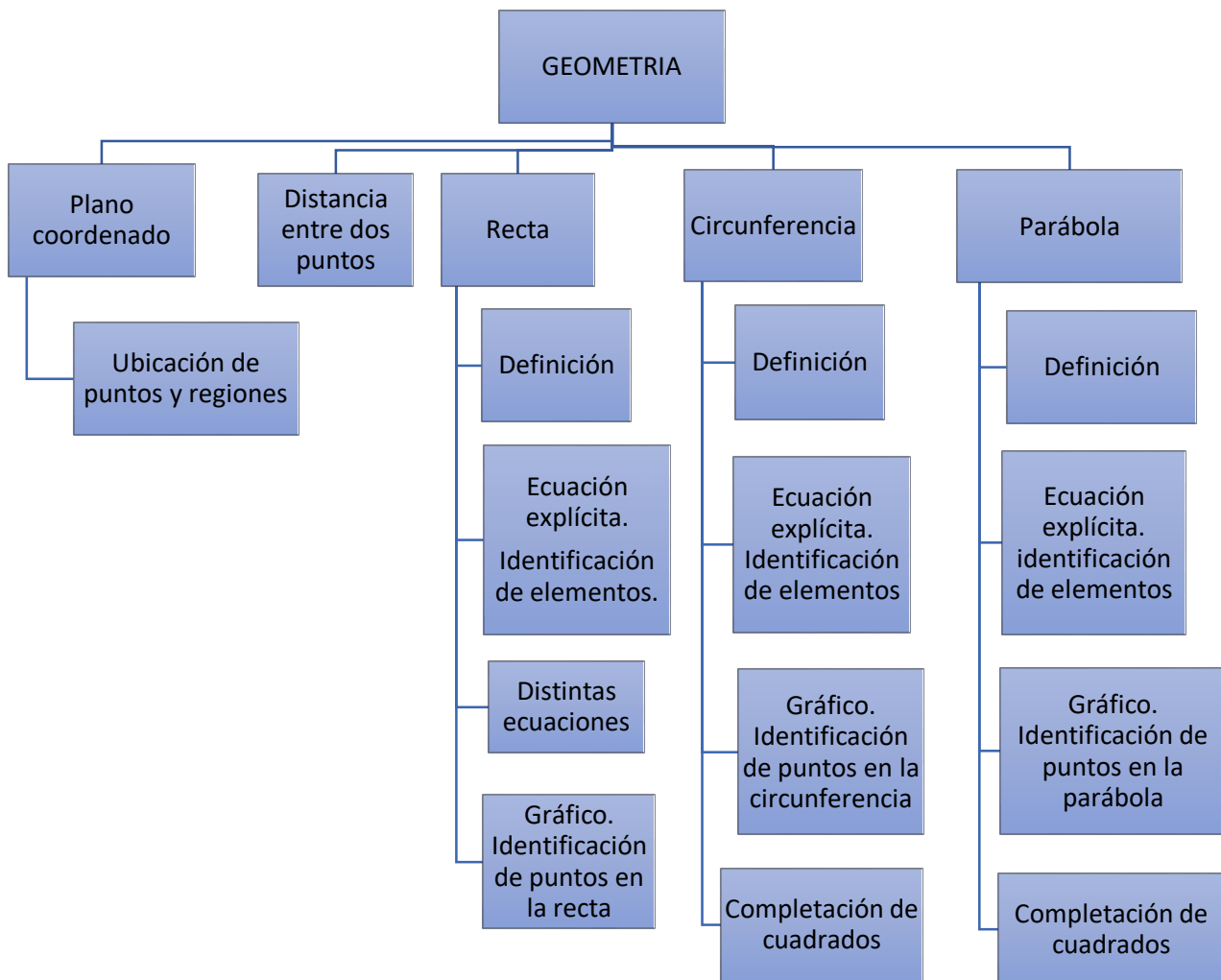


## Capítulo 1

GEOMETRÍA

---

## CONTENIDOS:



“Si quieres ser un verdadero buscador de la verdad, es necesario que dudes al menos una vez en tu vida, en la medida de lo posible, de todas las cosas.”

Rene Descartes

---

## Matemático invitado: René Descartes

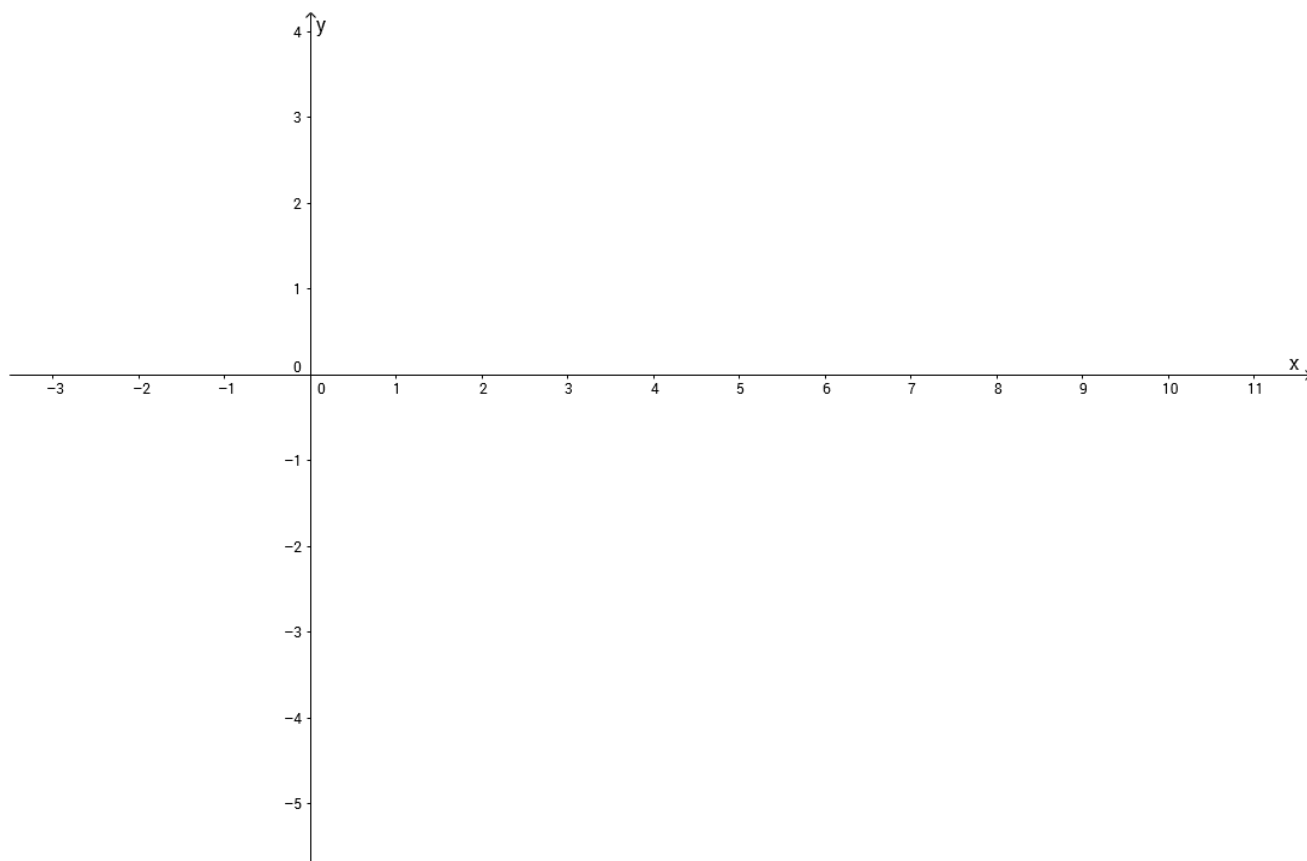
El plano cartesiano fue creado por Ratus Cartesius, o mejor conocido como Rene Descartes, famoso matemático francés, quien aportó tan gran descubrimiento en el campo de las matemáticas. Nació el 31 de marzo de 1596 y falleció el 11 de febrero de 1650. Estudió derecho en la Facultad de Portierre, Francia y fue soldado en el ejército de Nassau.

Cuenta la historia que Rene Descartes observaba una mosca en el techo de su recámara y quería descubrir la ubicación de la misma, en donde se origina el famoso plano cartesiano. Es reconocido como el padre de la Geometría Analítica y su frase más recordada es “Pienso luego existo”.

---

### 1. Plano coordenado

Para identificar cada punto del plano con un par ordenado de números, trazamos dos rectas perpendiculares que llamaremos **eje x, al eje horizontal** y **eje y, al eje vertical**, que se cortan en un punto O llamado **origen de coordenadas**.



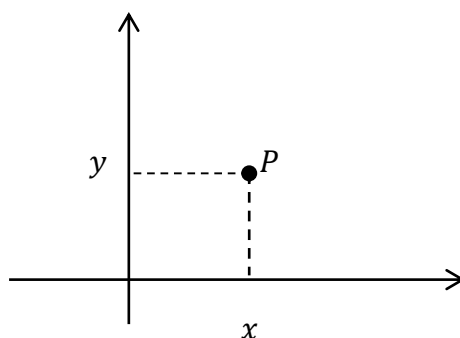
Representamos los números sobre cada eje, eligiendo en ambos ejes la misma unidad, como muestra la figura.

Los ejes dividen al plano en cuatro cuadrantes: llamamos 1er cuadrante a la región donde los valores de  $x$  y de  $y$  son positivos. 2do cuadrante donde los valores de  $x$  son negativos y los de  $y$  positivos, 3er cuadrante donde los valores de  $x$  y de  $y$  son negativos y 4to cuadrante donde los valores de  $x$  son positivos y los de  $y$  negativos.

Dado un punto  $P$  del plano, sea  $P_x$  el punto de intersección del eje  $x$  con la recta que contiene a  $P$  y es paralela al eje  $y$ , y sea  $P_y$ , el punto de intersección del eje  $y$  con la recta que contiene a  $P$  y es paralela al eje  $x$ . A  $P_x$  le corresponde un número  $x$  en el eje  $x$  y a  $P_y$ , le corresponde un número  $y$  en el eje  $y$ .

Decimos que  $P$  tiene coordenadas  $(x, y)$ ,  $x$  es la **abscisa** de  $P$  e  $y$  es la **ordenada** de  $P$ .

El punto  $P$  se identifica con sus coordenadas y se escribe  $P = (x, y)$ .



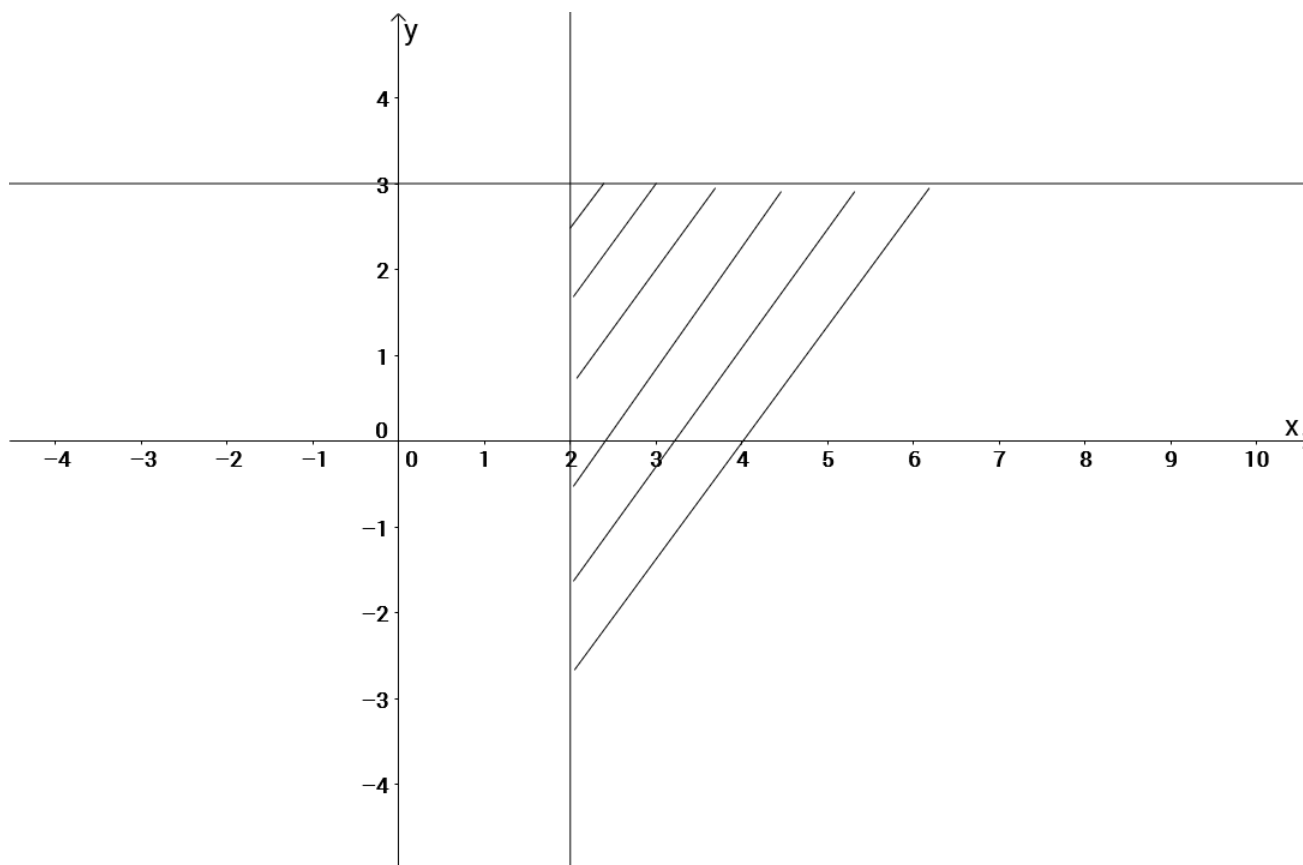
Recíprocamente, dado un par ordenado de números reales  $(x, y)$  hay un punto  $P$  del plano del cual son las coordenadas. En el gráfico el punto  $P$  se encuentra en el 1er cuadrante.

El plano coordenado así definido se llama  $\mathbb{R}^2$  y se lee “R dos”, es un conjunto y se expresa  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$  es decir, el conjunto de los pares ordenados donde cada componente es un número real.

También podemos identificar regiones del plano que no sean necesariamente los cuadrantes, sino regiones dadas por alguna condición.

### Ejemplo 1.1:

Queremos identificar la región del plano donde los valores de  $x$  son mayores o iguales que 2 y los valores de  $y$  son menores o iguales que 3:



Esta condición también puede expresarse en notación de conjunto:

$$A = \{(x, y): (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } x \geq 2 \text{ y } y \leq 3\}$$

Esto se lee: el conjunto de los pares ordenados  $(x, y)$  tales que  $(x, y)$  son puntos de plano  $\mathbb{R}^2$ ,  $x$  es mayor o igual que 2 e  $y$  es menor o igual que 3.

## Ejercicios

1. Representar en el plano los siguientes puntos y decir a qué cuadrante pertenecen:

**P=(2, -1) Q=(3, ½) R=(-2, -4) S=(0, -2) T=(-3, 0)**

2. Representar en el plano los puntos de abscisa negativa y ordenada mayor que 2.

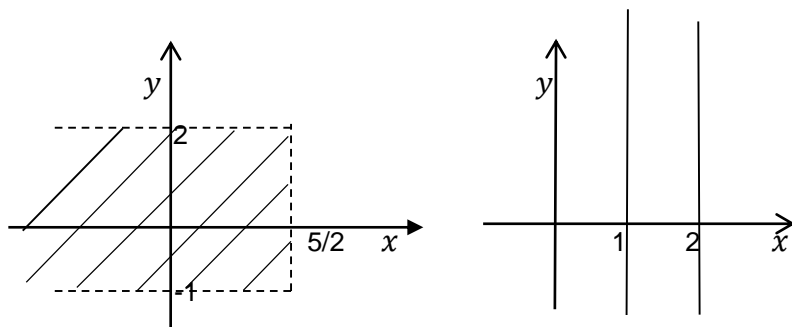
3. Representar en el plano los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 1 \leq x < 2 \wedge y \geq 0\}$$

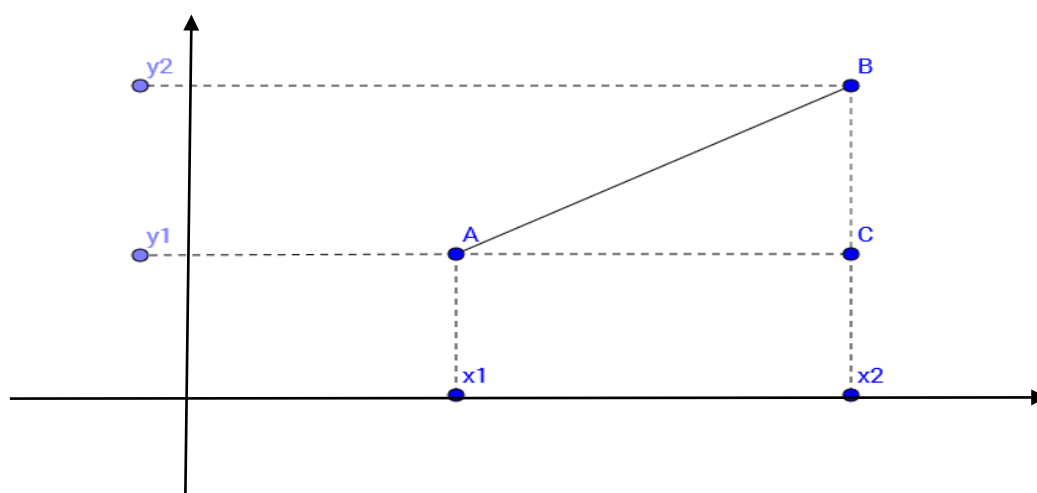
$$B = \{(x, y): (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x \cdot y < 0\}$$

$$C = \{ (x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x = y \}$$

4. Definir mediante condiciones los siguientes subconjuntos del plano:

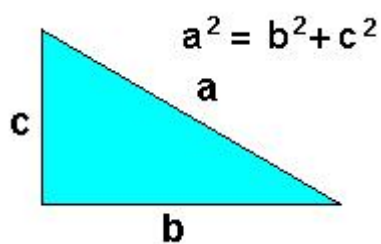


## 2. Distancia entre dos puntos



La distancia entre los puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  es la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo que en la figura tiene vértices  $A, B, C$ . Para calcularla usamos el Teorema de Pitágoras que podemos enunciar:

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Notar que en la figura el lado  $\overline{AC}$  mide  $x_2 - x_1$  y el lado  $\overline{BC}$  mide  $y_2 - y_1$ , por lo tanto se tiene que:  $\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Como  $\overline{AB}$  es la distancia entre los puntos se tiene que:

$$d = d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Ejemplo 2.1:** Hallar la distancia entre los puntos  $P=(-2,5)$  y  $Q=(7,-3)$ .

La distancia está dada por

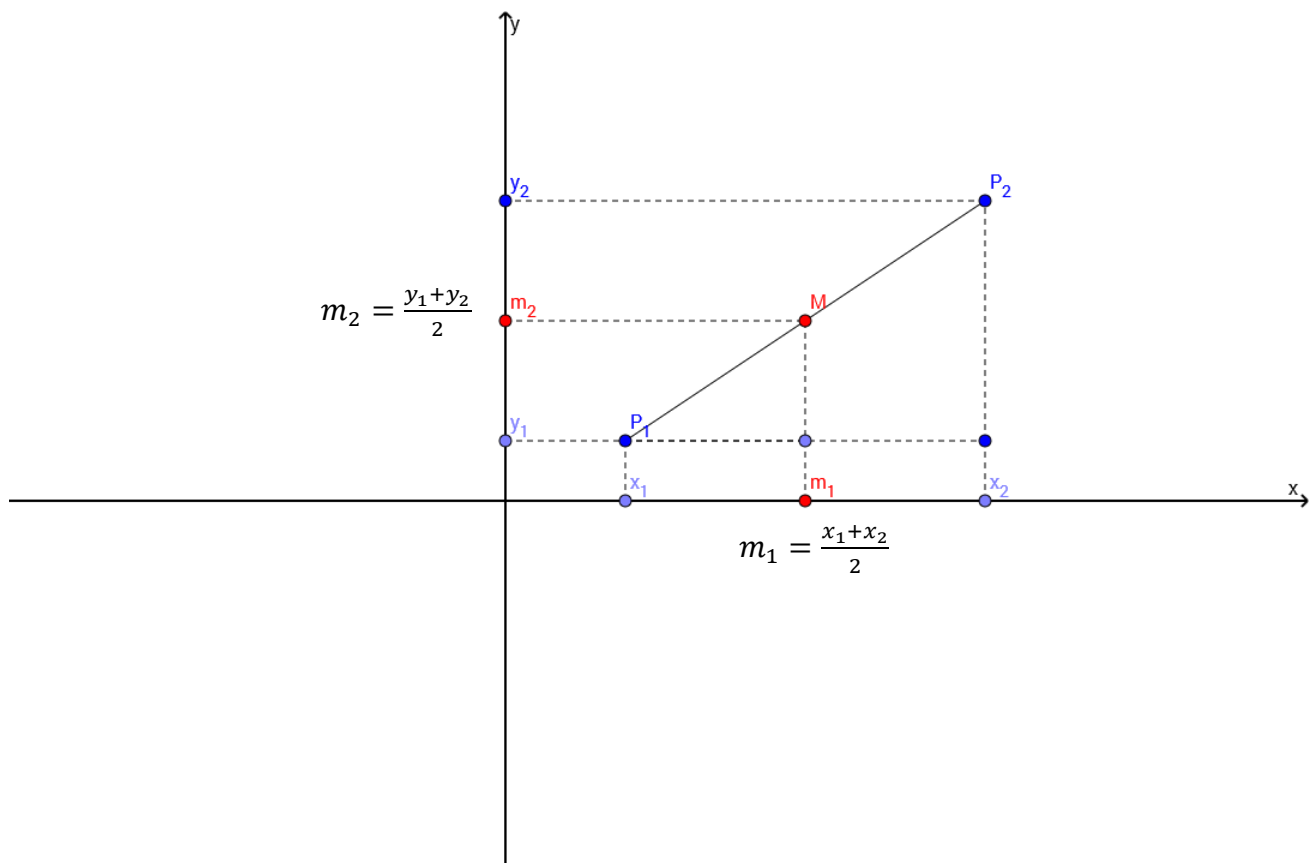
$$d = \sqrt{(7 - (-2))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{9^2 + (-8)^2} = \sqrt{81 + 64} = \sqrt{145}$$

Notar que es indistinto qué punto tomamos como  $P_1$  y qué punto tomamos como  $P_2$ . Por un lado porque claramente la distancia de P a Q debe ser la misma que la distancia de Q a P y por otro porque las diferencias están elevadas al cuadrado. Mostremos la cuenta tomando los puntos en distinto orden:

$$d = \sqrt{(-2 - 7)^2 + (-5 - 3)^2} = \sqrt{(-9)^2 + (-8)^2} = \sqrt{81 + 64} = \sqrt{145}$$

### Ejercicios:

1. Calcular la distancia entre  $P_1=(3,2)$  y  $P_2=(-1,4)$
2. Representar y hallar el perímetro del triángulo de vértices  $A=(-1,2)$ ,  $B=(4,5)$  y  $C=(5,0)$
3. Determinar un punto sobre el eje  $y$  que equidiste de  $(2,5)$  y  $(3,3)$
4. El punto medio entre dos puntos  $P_1=(x_1, y_1)$  y  $P_2=(x_2, y_2)$  está dado por el punto  $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$  como se muestra en el gráfico:



Determinar las coordenadas del punto medio entre  $A=(-3,8)$  y  $B=(5, -4)$

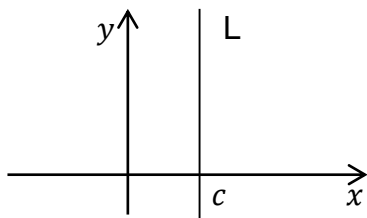
### 3. Rectas en el plano

Sea  $L$  una recta del plano.

i) Si  $L$  es vertical,  $L$  tiene una ecuación de la forma  $x = c$ , ya que todos los puntos que están sobre la recta tienen coordenadas  $(c, y)$ , el valor de  $x$  está fijo en  $c$  mientras que  $y$  puede tomar cualquier valor real.

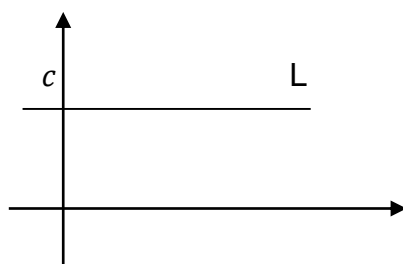
Las rectas también pueden expresarse como un conjunto de puntos del plano:

$$L = \{(x, y) : x = c\}$$

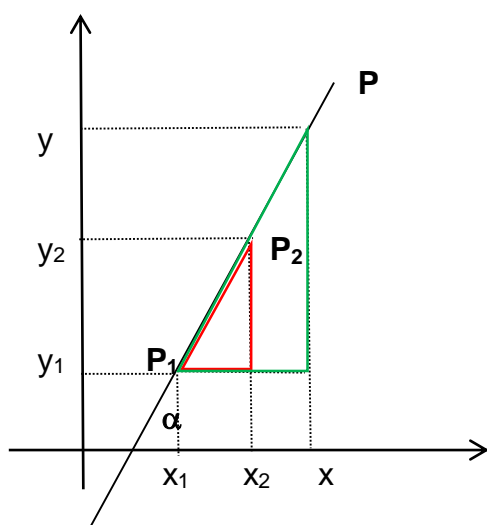


ii) Si  $L$  es horizontal,  $L$  tiene una ecuación de la forma  $y = c$ , en este caso los puntos sobre la recta son de la forma  $(x, c)$ .

Su expresión en notación de conjuntos es:  $L = \{(x, y) : y = c\}$



iii) Si  $L$  no es horizontal ni vertical y pasa por los puntos  $P_1=(x_1, y_1)$  y  $P_2=(x_2, y_2)$ , podemos trazar las rectas paralelas a los ejes que pasan por ellos y del mismo modo para cualquier otro punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  que esté en la misma recta.



Así quedan determinados dos triángulos rectángulos que se llaman proporcionales, ya que el cociente de sus lados se mantiene constante. En el triángulo con vértices en  $P_1$  y  $P_2$  sus lados miden  $y_2 - y_1$  y  $x_2 - x_1$ , en el triángulo con vértices en  $P_1$  y  $P$  sus lados miden  $y - y_1$  y  $x - x_1$ , entonces se debe verificar la siguiente ecuación:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{Esta es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos}$$

Notemos que  $x_1, x_2, y_1, y_2$  son números, son las coordenadas de dos puntos dados, en cambio  $x$  e  $y$ , son las coordenadas de un punto cualquiera en la recta.

Operando en esa ecuación llegaremos a otras formas de la ecuación de la recta, pero todas son **equivalentes**.



Multipliquemos a ambos miembros de la ecuación por  $x - x_1$  y por  $x_2 - x_1$  :

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

Aplicando propiedad distributiva tenemos que:

$$x \cdot (y_2 - y_1) - x_1 \cdot (y_2 - y_1) = y \cdot (x_2 - x_1) - y_1 \cdot (x_2 - x_1)$$

Dejando todo del lado izquierdo de la igualdad:

$$x \cdot (y_2 - y_1) - y \cdot (x_2 - x_1) - x_1 \cdot (y_2 - y_1) + y_1 \cdot (x_2 - x_1) = 0$$

O equivalentemente:

$$\underbrace{x \cdot (y_2 - y_1)}_A + \underbrace{y \cdot (-x_2 + x_1)}_B + \underbrace{[-x_1 \cdot (y_2 - y_1) + y_1 \cdot (x_2 - x_1)]}_C = 0 \quad (1)$$

se puede escribir en la **forma general de la ecuación de la recta**:  **$Ax + By + C = 0$**

Donde A, B y C son números.

Si en la ecuación (1) despejamos la variable y, obtenemos:

$$y \cdot (-(x_2 - x_1)) = x \cdot (-(y_2 - y_1)) + x_1 \cdot (y_2 - y_1) - y_1 \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\text{Entonces: } y = \frac{x \cdot (-(y_2 - y_1))}{(-(x_2 - x_1))} + \frac{x_1 \cdot (y_2 - y_1) - y_1 \cdot (x_2 - x_1)}{(-(x_2 - x_1))}$$

$$\text{Simplificando: } y = \frac{x \cdot (y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} + \frac{x_1 \cdot (y_2 - y_1)}{(-(x_2 - x_1))} + y_1$$

donde  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , se llama **pendiente** de la recta **L**, y, como se observa en la figura,

es igual a la tangente del ángulo  $\alpha$  que es el **ángulo de inclinación de L**

$b = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1$  es la **ordenada al origen** de la recta L (la ordenada del punto de la recta que está sobre el eje y), llegando entonces a:

**Ecuación de la recta en forma explícita o estándar:**  $y = mx + b$

Hemos mostrado entonces 3 ecuaciones de la recta, todas equivalentes ya que todas se obtienen al hacer operaciones sobre otra.

Dada una recta  $L$  del plano es posible entonces encontrar una ecuación lineal

$Ax + By + C = 0$  que en notación de conjuntos es:

$$L = \{(x, y): Ax + By + C = 0\}$$

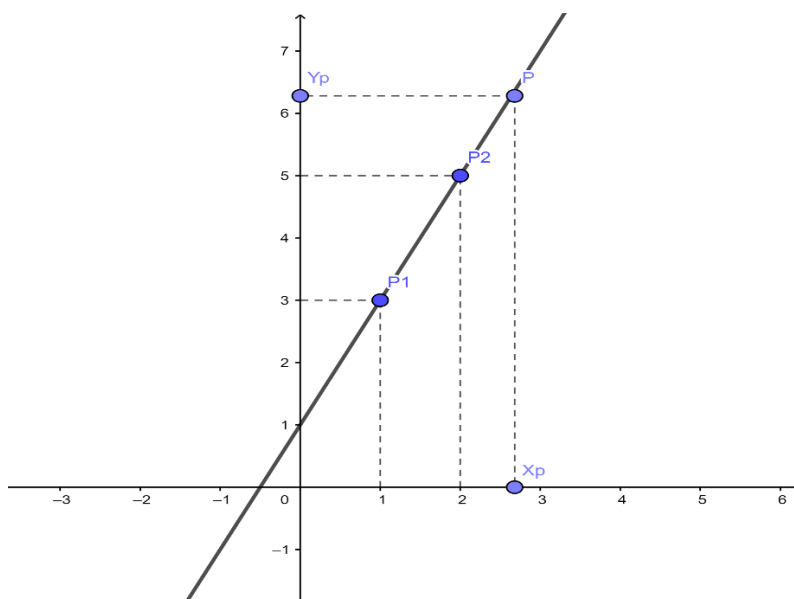
Recíprocamente, el conjunto de puntos del plano que verifica una ecuación lineal

$Ax + By + C = 0$  es una recta del plano.

### Ejemplo 3.1:

Veamos un ejemplo para obtener las distintas ecuaciones:

Sea L la recta que pasa por  $P_1 = (1,3)$  y  $P_2 = (2,5)$ .



Decimos entonces que para cualquier otro punto P de coordenadas  $(x, y)$  debe cumplirse

que  $\frac{5-3}{2-1} = \frac{y-3}{x-1}$ .

Esta es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, que obtuvimos reemplazando por las coordenadas de los puntos dados.

Entonces  $\frac{2}{1} = \frac{y-3}{x-1}$

multiplicando a ambos miembros por  $x - 1$  tenemos  $2(x - 1) = y - 3$

de donde  $2x - 2 - y + 3 = 0$

entonces  $2x - y + 1 = 0$  es la ecuación implícita de la recta o ecuación lineal, donde  $A=2$ ,  $B=-1$  y  $C=1$ .

Si ahora despejamos  $y$ , tenemos:  $y = 2x + 1$

que es la ecuación explícita de la recta, donde la pendiente vale 2 y la ordenada al origen es 1.

### Ejemplo 3.2:

Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos  $(1,2)$  y  $(-2,8)$

Podemos resolverlo de distintas maneras:

- 1) Usamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, notando que es indistinto a qué punto llamemos  $P_1$  y a qué punto llamamos  $P_2$ .

Usamos entonces  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$  y reemplazando queda:

$$\frac{8-2}{-2-1} = \frac{y-2}{x-1} \quad \text{entonces, despejando } y \quad \frac{6}{-3}(x-1) = y-2$$

$y = -2(x-1) + 2$  entonces  $y = -2x + 4$  es la ecuación explícita

Donde la pendiente es  $m=-2$  y la ordenada es  $b=4$

- 2) Usamos la ecuación explícita de la recta sabiendo que los dos puntos deben satisfacer la ecuación:

Reemplazamos en la ecuación  $y = mx + b$  por los puntos dados:

$$2 = m \cdot 1 + b \quad y \quad 8 = m(-2) + b$$

De esta forma tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que podemos resolver despejando  $b$  de la primera ecuación y reemplazándolo en la segunda:

$$2 - m = b \quad \text{entonces} \quad 8 = m(-2) + 2 - m$$

De donde  $8 = m(-3) + 2$  entonces  $m = \frac{6}{-3} = -2$

Con este valor de  $m$  volvemos a la primera ecuación:  $2 = (-2) \cdot 1 + b$

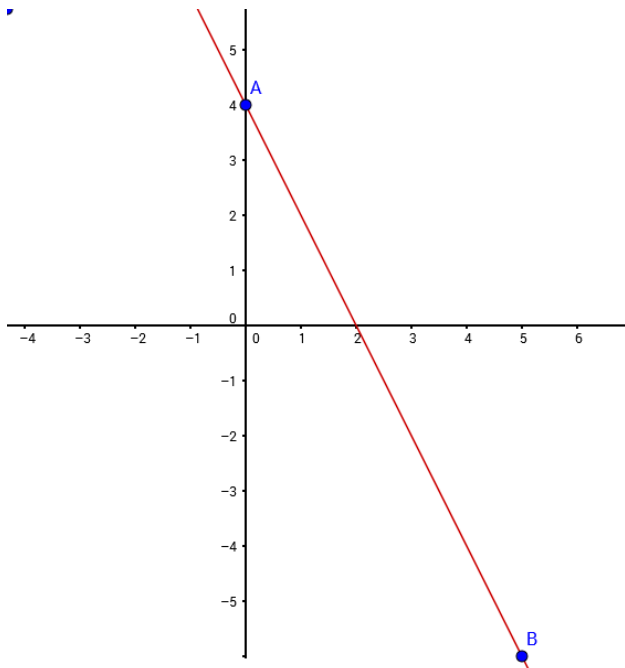
Obtenemos entonces  $b = 4$

Así nos queda la ecuación explícita:  $y = -2x + 4$

Es importante poder representar la recta en el plano coordenado, en este caso tenemos dos puntos de la recta, pero si no nos hubieran dado los puntos y tuviéramos sólo la ecuación, podemos hallar dos puntos para graficar la recta.

Por ejemplo si  $x$  toma valor 5,  $y = -2 \cdot 5 + 4 = -6$ , es decir que el punto (5,-6) está sobre la recta.

Si  $x$  toma valor 0,  $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$ , es decir que el punto (0,4) está sobre la recta, cosa que ya sabíamos porque el valor de  $b$  es la ordenada al origen, es decir el valor de la ordenada o de la variable  $y$  cuando la recta corta al eje  $y$ .



### Ejercicios:

1. Halle la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos dados:

a) (2, 5) y (4, 3)      b) (-1, 3) y (-2, -3)      c) (1/2, 0) y (-1/2, -2)

2. Determine el valor de  $k$  para el cual los puntos (-1,2), (3, 1) y (2, - $k$ +1) están alineados.

3. Halle la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes rectas y representélas gráficamente.

- a) **L**:  $5x + y - 3 = 0$       b) **S**:  $4x - 3y = 6$   
c) **M**:  $3x - 6 = 0$       d) **H**:  $y + 2 = 0$

4. Escriba la ecuación explícita de la recta que:

- a) tiene pendiente  $-2$  y pasa por el origen de coordenadas.  
b) tiene pendiente  $-2$  y pasa por  $(-2, -3)$

Dos rectas  $L$  y  $L'$  del plano pueden ser: **transversales** (se cortan en un punto), **paralelas** (no se cortan) o **coincidentes** ( $L = L'$ )

Cada recta tiene una ecuación lineal:    **L**:  $y = mx + b$   
                                                          **L'**:  $y = m'x + b'$

Los puntos de intersección, si existen, deben verificar ambas ecuaciones, es decir, deben ser solución del sistema lineal:

$$\begin{cases} y = mx + b \\ y = m'x + b' \end{cases}$$

- Las rectas son **transversales** si y sólo si dicho sistema lineal admite una única solución.
- Las rectas son **paralelas** si y sólo si dicho sistema lineal no tiene solución.
- Las rectas son **coincidentes** si y sólo si dicho sistema lineal admite infinitas soluciones (ambas ecuaciones son equivalentes)

**(1) Las rectas paralelas pueden ser además coincidentes o ser paralelas y distintas.**

**$L$  y  $L'$  son paralelas si y sólo si  $m = m'$**

**Si además  $b \neq b'$  son paralelas y distintas.**

**Si  $b = b'$ ,  $L$  y  $L'$  son coincidentes**

**(2) Las rectas transversales se cortan en un punto, si además se cortan formando un ángulo recto o de  $90^\circ$  son perpendiculares.**

**$L$  y  $L'$  son perpendiculares si y sólo si  $m \cdot m' = -1$**

**Ejemplo 3.3:**

Analizar si las siguientes rectas son paralelas, transversales o coincidentes, en caso de ser transversales determinar si son o no perpendiculares y hallar el punto de intersección.

Graficar ambas rectas:

$$\begin{cases} 2x + 1 + y = 0 \\ x - 5 - y = 0 \end{cases}$$

Comenzamos llevando las ecuaciones a su forma estándar o explícita:

$$L: 2x + 1 + y = 0 \quad \text{entonces} \quad L: y = -2x - 1$$

$$L': x - 5 - y = 0 \quad \text{entonces} \quad L': y = x - 5$$

Observamos las pendientes:  $m = -2$  y  $m' = 1$ , como son distintas esto nos dice que las rectas no son paralelas ni coincidentes, por lo tanto serán **transversales**.

Para saber si son perpendiculares multiplicamos:  $m \cdot m' = -2 \cdot 1 = -2$ , por lo tanto no son perpendiculares.

Para hallar la intersección debemos hallar el valor de  $x$  y de  $y$  que satisfagan las dos ecuaciones a la vez. Asumimos entonces que el valor de  $y$  debe ser el mismo, entonces:

$$-2x - 1 = x - 5$$

Ahora resolvemos la ecuación:

Sumamos a ambos miembros  $-x$

$$-2x - x - 1 = -5$$

Sumamos a ambos miembros 1

$$-2x - x = -5 + 1$$

$$-3x = -4$$

$$x = \frac{-4}{-3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Esto es lo que llamamos método de igualación, lo hacemos con la variable  $y$  pero lo podríamos haber hecho con  $x$ , es indistinto.

Este valor de  $x$  lo reemplazamos en cualquiera de las dos rectas para obtener el valor de

$y$ , si elegimos por ejemplo la recta L:  $y = -2\frac{4}{3} - 1 = -\frac{8}{3} - 1$

Entonces  $y = -\frac{8}{3} - 1 = \frac{-8-3}{3} = -\frac{11}{3}$

Esto nos dice que el punto de intersección es  $(\frac{4}{3}, -\frac{11}{3})$

Grafiquemos ahora las rectas:

Para graficarlas podemos buscar dos puntos en cada una, en particular ya sabemos que el punto  $(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$  está en las dos rectas.

También conocemos la ordenada al origen de cada una de ellas.

Para la recta L la ordenada al origen es -1, esto nos dice que el punto (0,-1) pertenece a L.

Para la recta L' la ordenada al origen es -5, esto nos dice que el punto (0,-5) pertenece a L'.

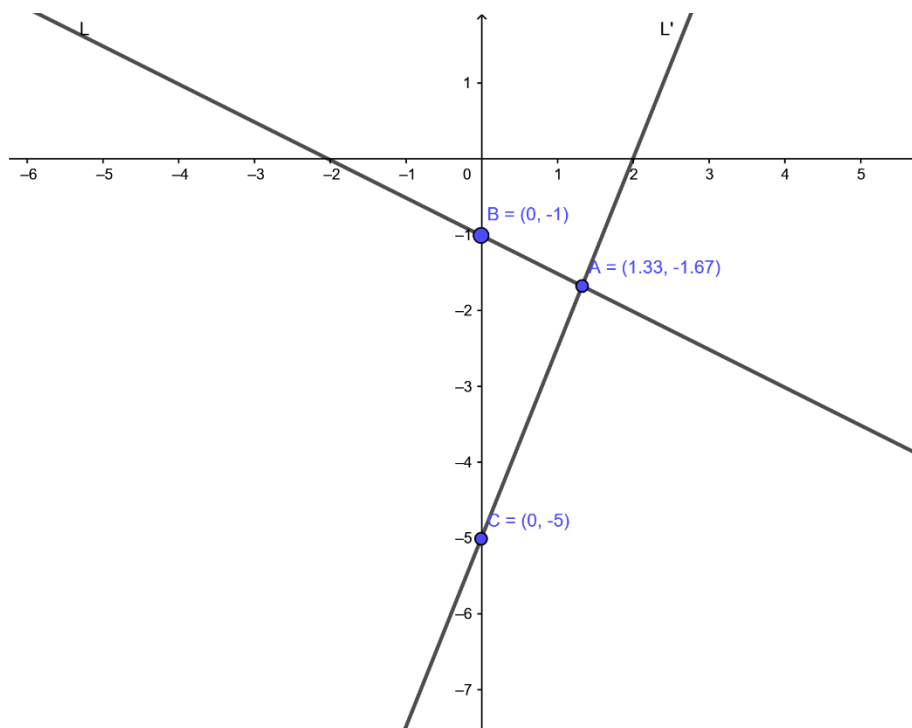
Ya tenemos dos puntos en cada una.

Si no tuviéramos el punto de corte, ¿cómo buscamos otro punto en la recta?

La recta L tiene ecuación:  $y = -2x - 1$  podemos entonces darle un valor cualquiera a  $x$ , por ejemplo -1 y reemplazarlo:  $y = -2(-1) - 1 = 2 - 1 = 1$

Sabemos entonces que el punto (-1,1) también pertenece a L.

Usamos entonces los puntos hallados:



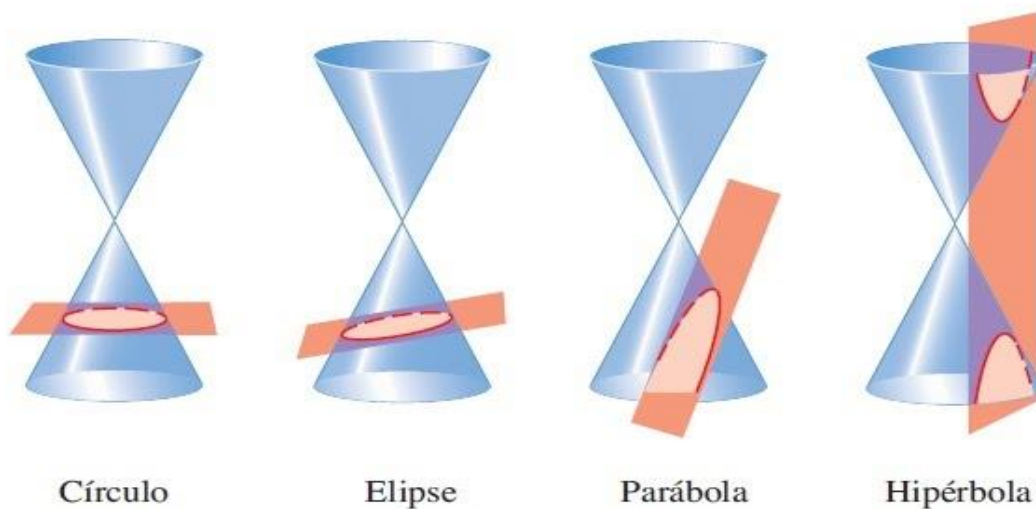
## Ejercicios

5. a) Hallar la ecuación explícita de la recta L que tiene pendiente  $\frac{3}{5}$  y pasa por P(12, 5).
- b) Hallar una paralela a L que pase por Q (3,12)
- c) Hallar una perpendicular a L que pase por T (3,6)

6. a) Hallar la ecuación explícita de la recta L que tiene pendiente  $-\frac{5}{12}$  y pasa por P(9, 6)
- b) Hallar una paralela a L que pase por Q (-5,1)
- c) Hallar una perpendicular a L que pase por T (-8,4)
7. a) Hallar la ecuación explícita de la recta L que pasa por los puntos P (-1, 5) y Q (5,9).
- b) Hallar una perpendicular a L que pase por S (-8,5).
- c) Hallar una paralela a L que pase por Q (-9,15)
8. a) Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por P(-1, 1/3) y es paralela a la recta de ecuación  $-x + 2y - 1 = 0$
- b) Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por P (2, -1/2) y es perpendicular a la recta de ecuación  $3x - 2y + 1 = 0$ .
9. Hallar las pendientes de las siguientes rectas y expresarlas por sus ecuaciones explícitas. Para cada una de ellas hallar una recta paralela y una perpendicular que pasen por el origen:
- L :  $3x - 2y + 6 = 0$  ; S:  $2x + y = 6$  ; T :  $6y - x - 2 = 0$
10. Decida si los siguientes pares de rectas son transversales, paralelas o coincidentes y determine, cuando corresponda, las coordenadas del punto en el que se cortan.
- a)  $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -6x + 3y = -6 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 4x - 8y = -12 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

Estudiaremos a continuación las ecuaciones de dos **cónicas**: la **circunferencia** y la **parábola**. Se llaman cónicas porque resultan de la intersección de un plano con un cono circular como muestra la figura. Existen también otras cónicas como la elipse y la hipérbola que no estudiaremos en este curso.





#### 4. Circunferencia

Una **circunferencia** es el conjunto de puntos  $P(x,y)$  del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**. La distancia entre cualquier punto de la circunferencia y el centro se llama **radio**.

Ecuación estándar de la circunferencia:

Si  $C(\alpha, \beta)$  es el centro,  $r$  es el radio y  $P(x,y)$  es un punto genérico de la circunferencia, por definición debe ser:

$$d(P,C) = r$$

es decir :  $\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$

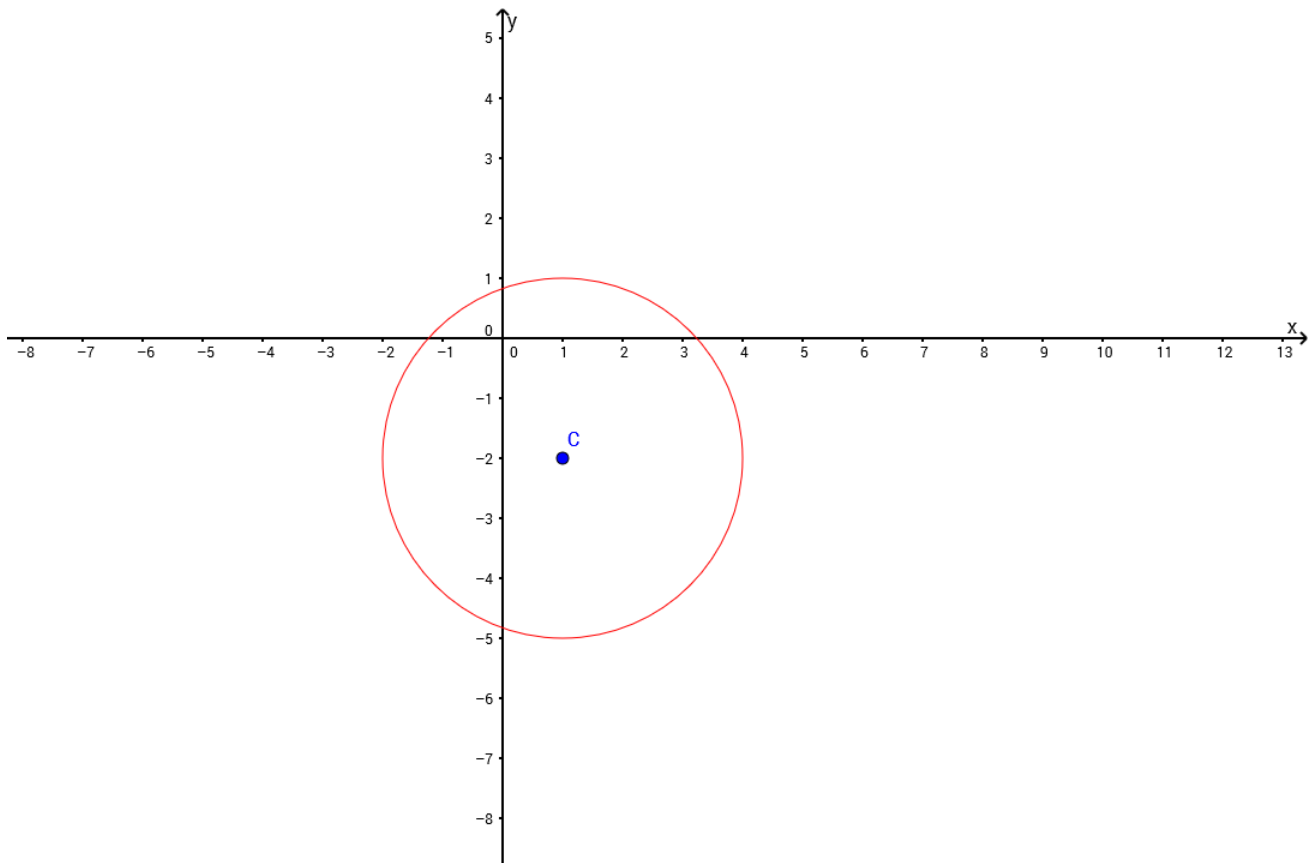
elevando ambos miembros al cuadrado queda:  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$

La ecuación  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$  es la ecuación estándar o canónica de la circunferencia con centro  $C(\alpha, \beta)$  y radio  $r$ .

##### Ejemplo 4.1:

Hallar centro y radio y graficar la circunferencia dada por:  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

El centro de la circunferencia está en  $(1,-2)$  y el radio es 3.



#### Ejemplo 4.2:

Hallar la ecuación explícita de la circunferencia con centro en  $(1, 4)$  y que pasa por el punto  $(2, \sqrt{3} + 4)$

Como tenemos el centro, sabemos que la ecuación debe ser:  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = r^2$

Nos falta hallar el radio, para eso usaremos el punto dado, ya que debe satisfacer la ecuación de la circunferencia:

$$(2 - 1)^2 + (\sqrt{3} + 4 - 4)^2 = r^2$$

Entonces:

$$(1)^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2$$

Elevando al cuadrado tenemos:  $1 + 3 = r^2$

Por lo tanto  $r^2 = 4$ , entonces el radio es 2.

La ecuación es:  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$

#### Completación de cuadrados

Si en la ecuación estándar se desarrollan los cuadrados de ambos binomios:

$(x - \alpha)^2$  y  $(y - \beta)^2$  y se multiplica todo por un número real no nulo, la ecuación tiene otro aspecto:

Dada:  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

Tendríamos:  $hx^2 - h2x\alpha + h\alpha^2 + hy^2 - h2y\beta + h\beta^2 = hr^2$

Si  $(\alpha, \beta) = (2, 3)$  y  $r = 2$ , la ecuación explícita sería:  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

Desarrollando y multiplicando por  $h=3$ :  $3x^2 - 3 \cdot 2x \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3y^2 - 3 \cdot 2y \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 4$

Agrupando:  $3x^2 - 12x + 3y^2 - 18y + 27 = 0$

**Esta última ecuación es equivalente a la dada, pero acá no están a la vista centro y radio, por eso será importante poder recuperar la información a partir de esta ecuación.**

Interesa tanto en la circunferencia como en cualquier cónica, que estén expresadas por su ecuación estándar porque a partir de ella se pueden obtener los elementos (centro y radio en la circunferencia, vértice, foco, eje focal y directriz en la parábola).

Cuando la ecuación no está en forma estándar o canónica el método de completación de cuadrados permite llevarla a esa forma.

#### Ejemplo 4.3:

Veamos cómo podemos recuperar la ecuación estándar a partir de la ecuación que obtuvimos:

$$3x^2 - 12x + 3y^2 - 18y + 27 = 0$$

Lo primero que vemos es que las variables al cuadrado están multiplicadas por un número que no es 1 y ambas están multiplicadas por 3, entonces comenzamos dividiendo toda la ecuación por 3:

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$$

Ahora completaremos cuadrados.

Para hacerlo la compararemos con la ecuación desarrollada:

$$x^2 - \boxed{2x\alpha} + \alpha^2 + y^2 - \boxed{2y\beta} + \beta^2 = r^2$$

$$x^2 - \boxed{4x} + \alpha^2 + y^2 - \boxed{6y} + \beta^2 = -9 + \alpha^2 + \beta^2$$

Si comparamos cada término de la primera ecuación con la segunda, nos faltarían los números  $\alpha^2$  y  $\beta^2$ .

Como el número que acompaña a  $x$  en la primera ecuación es  $-2\alpha$ , y en la segunda es  $-4$ ,  $-2\alpha$  debe ser igual a  $-4$ , de donde  $-2\alpha = -4$  entonces  $\alpha = 2$ .

Esto nos dice que deberíamos sumar  $2^2$  para que la expresión  $x^2 - 4x + 2^2 = (x - 2)^2$ , pero si sumamos un término de un lado de la igualdad alteraríamos la ecuación, por lo tanto debemos sumar el valor de  $\alpha^2$  a ambos miembros.

Del mismo modo, el número que acompaña a  $y$  en la primera ecuación es  $-2\beta$ , y en la segunda es  $-6$ , por lo tanto  $-2\beta = -6$ , entonces  $\beta = 3$ .

Esto nos dice que deberíamos sumar  $3^2$  para que la expresión  $y^2 - 6y + 3^2 = (y - 3)^2$ , pero nuevamente, el valor de  $\beta^2$  debemos sumarlo a ambos miembros.

Tenemos entonces:

$$x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 6y + 3^2 = -9 + 2^2 + 3^2$$

$$\text{Que resulta ser: } (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

#### Ejemplo 4.4:

Llevar a la forma estándar la siguiente ecuación:

$$2x^2 - 12x + 2y^2 + 20y + 50 = 0$$

Observemos que  $x^2$  e  $y^2$  están multiplicados por un número distinto de 1, por lo tanto comenzamos por dividir toda la ecuación por 2:

$$x^2 - 6x + y^2 + 10y + 25 = 0$$

Compararemos con la ecuación desarrollada:

$$x^2 \boxed{- 2x\alpha} + \alpha^2 + y^2 \boxed{- 2y\beta} + \beta^2 = r^2$$

$$x^2 \boxed{- 6x} + \alpha^2 + y^2 \boxed{+ 10y} + \beta^2 = -25 + \alpha^2 + \beta^2$$

Como el número que acompaña a  $x$  en la primera ecuación es  $-2\alpha$ , y en la segunda es  $-6$ ,  $-2\alpha$  debe ser igual a  $-6$ , de donde  $-2\alpha = -6$  entonces  $\alpha = 3$ .

Esto nos dice que deberíamos sumar  $3^2$  a ambos miembros.

Del mismo modo, el número que acompaña a  $y$  en la primera ecuación es  $-2\beta$ , y en la segunda es  $10$ , por lo tanto  $-2\beta = 10$ , entonces  $\beta = -5$ .

Esto nos dice que deberíamos sumar  $(-5)^2$  a ambos miembros.

Tenemos entonces:

$$x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + 10y + (-5)^2 = -25 + 3^2 + (-5)^2$$

$$\text{Que resulta ser: } (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$$

#### Ejemplo 4.5:

Hallar la intersección entre la circunferencia  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$  y la recta

$$y - x + 1 = 0$$

Si queremos hallar la intersección entre una circunferencia y una recta podemos usar también el método de igualación, porque otra vez se trata de hallar el o los valores de  $x$  y de  $y$  que satisfagan las dos ecuaciones a la vez.

Observar que en este caso la recta puede cortar en un único punto a la circunferencia, en dos o no cortarla.

Llevando la ecuación de la recta a la forma explícita tenemos:  $y = x - 1$

Reemplazamos el valor de  $y$  en la ecuación de la circunferencia:

$$(x - 3)^2 + (x - 1 + 1)^2 = 9$$

Desarrollamos los cuadrados:

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 = 9$$

Agrupando y restando 9 a ambos miembros:

$$2x^2 - 6x = 0 \quad (1)$$

Podemos resolver esta ecuación cuadrática aplicando la fórmula de Bahscara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ entonces } x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 0}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{6 \pm 6}{4}$$

Tenemos entonces dos valores para  $x$ ,  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 3$

Esto nos dice que habrá dos puntos de corte.

También podríamos haber sacado factor común en la ecuación (1):  $2x(x - 3) = 0$

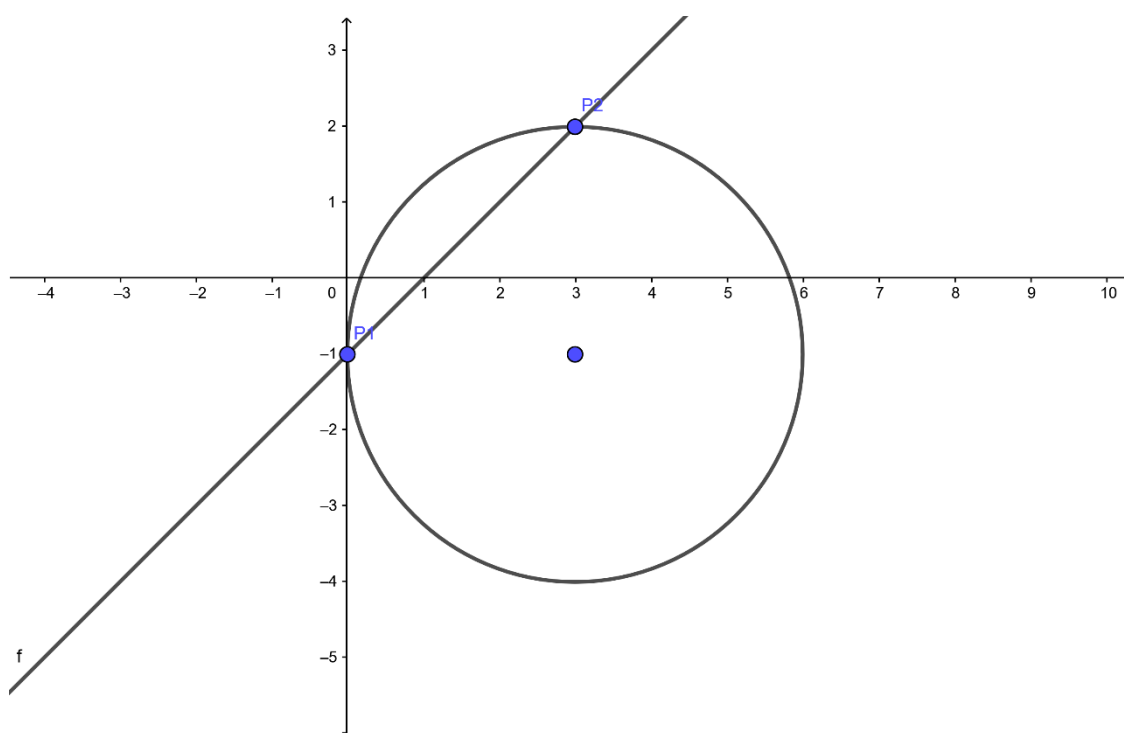
Entonces para que ese producto sea 0:  $2x = 0$  o  $x - 3 = 0$

Tenemos entonces dos valores para  $x$ ,  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 3$ , igual que antes.

Reemplazamos estos valores en la ecuación de la recta y tenemos:

$$y_1 = 0 - 1 = -1 \quad \text{y} \quad y_2 = 3 - 1 = 2$$

Por lo tanto los puntos de corte o intersección son:  $P_1(0,-1)$  y  $P_2(3,2)$  como se ve en el gráfico:



## Ejercicios

1. a) Escriba la ecuación estándar de la circunferencia de centro  $C(-3, 4)$  y radio  $3^{1/2}$ . Graficar.

b) Escriba la ecuación estándar de la circunferencia de centro  $C(-2, 5)$  y que pasa por el punto de coordenadas  $(1, 2)$ . Graficar.

2. Hallar las ecuaciones estándar de las siguientes circunferencias con centro  $P$  y que pasa por  $Q$ , y con centro  $Q$  que pasa por  $P$ :

a)  $P(2, 5)$ ,  $Q(4, 3)$    b)  $P(-1, 3)$ ,  $Q(-2, -3)$    c)  $P(1/2, 0)$ ,  $Q(-1/2, -2)$

3. Analice si las siguientes ecuaciones corresponden o no a una circunferencia indicando, en caso afirmativo, los elementos de la misma:

a)  $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$       b)  $x^2 + y^2 - 2x = 1$

c)  $3x^2 + 3y^2 + 9x - 3y + 21 = 0$

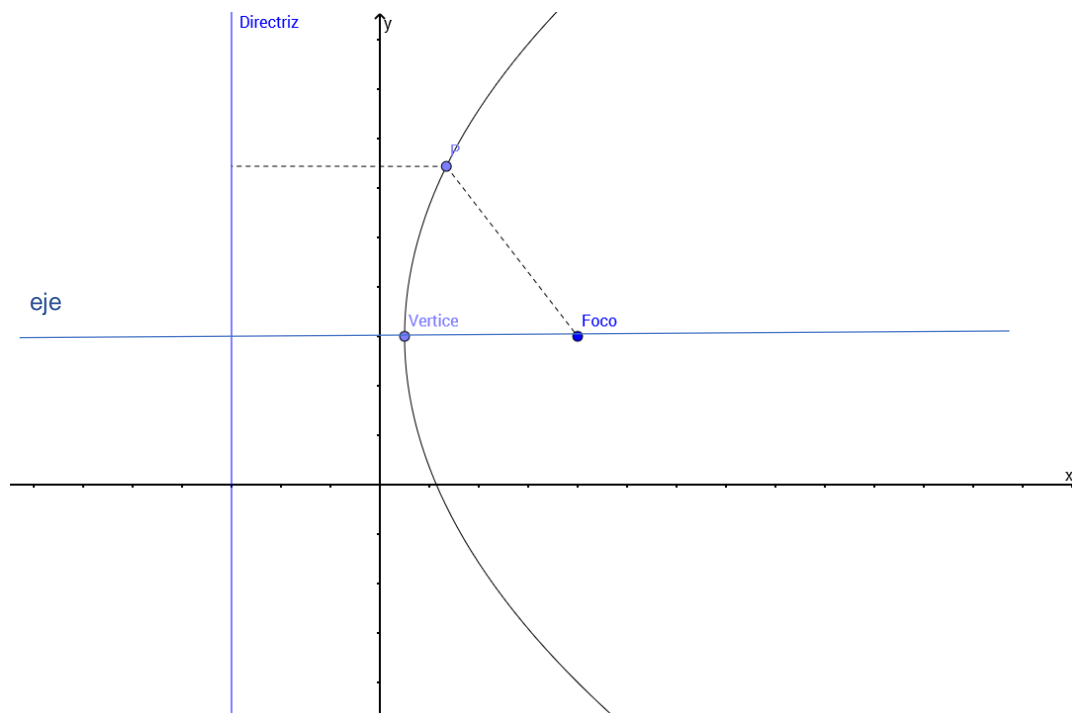
4. Llevar la ecuación  $6x^2 + 6y^2 - 12x + 12y - 6 = 0$  a la forma estándar e indicar sus elementos.

5. a) Hallar la intersección de la circunferencia del Ejercicio anterior con el eje  $x$ .  
b) Hallar la intersección de dicha circunferencia con el eje  $y$ .  
c) Hallar la intersección de dicha circunferencia con la recta de ecuación  $y = x - 1$

## 5. Parábola

Una **parábola** es el conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **foco** y de una recta fija que no contiene al foco llamada **directriz**.

En este curso estudiaremos parábolas cuya directriz es una recta vertical u horizontal.



La recta perpendicular a la directriz trazada por el foco es el **eje** de la parábola.

El **vértice** es el punto en el que se cortan la parábola y el eje.

El **vértice** es un punto de la parábola, por lo tanto su distancia al Foco es igual a su distancia a la Directriz.

En el siguiente gráfico elegimos un punto cualquiera al que llamamos **Foco** y una recta vertical a la que llamamos **Directriz**.

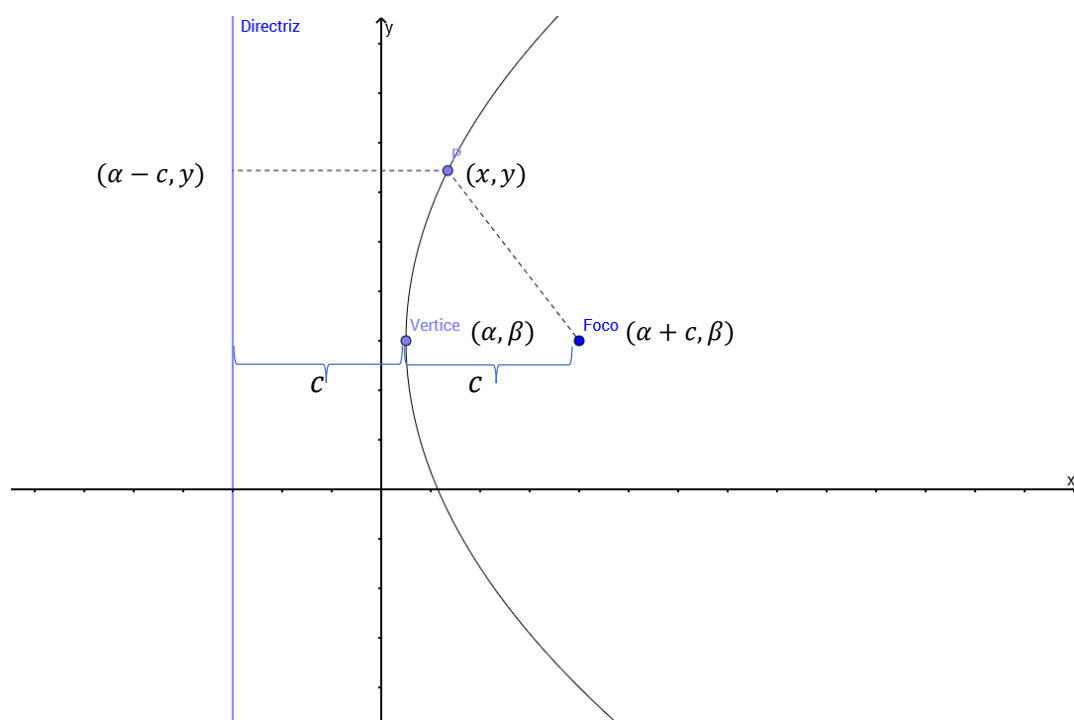
El punto medio entre la directriz y el foco es el **vértice** de la parábola.

Llamemos  $c$  a la distancia del Vértice al Foco y del Vértice a la Directriz.

Llamemos  $(\alpha, \beta)$  a las coordenadas del vértice, entonces el Foco tiene coordenadas  $(\alpha + c, \beta)$ .

Así definido la directriz tiene ecuación  $x = \alpha - c$

Dado un punto  $P = (x, y)$  que está en la parábola, el punto que está en la directriz y se encuentra a menor distancia de  $P$  es el punto de coordenadas  $(\alpha - c, y)$



De esta forma, de acuerdo a la definición, como la distancia de  $P$  al foco debe ser igual a la distancia de  $P$  a la directriz, tenemos:  $d(P, F) = d(P, D)$

Reemplazando por las coordenadas:  $d((x, y), (\alpha + c, \beta)) = d((x, y), (\alpha - c, y))$

Aplicando la fórmula de distancia:



$$\sqrt{(x - (\alpha + c))^2 + (y - \beta)^2} = \sqrt{(x - (\alpha - c))^2 + (y - \beta)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(x - (\alpha + c))^2 + (y - \beta)^2 = (x - (\alpha - c))^2$$

Desarrollaremos los cuadrados en los que aparece x:

$$x^2 - 2x(\alpha + c) + (\alpha + c)^2 + (y - \beta)^2 = x^2 - 2x(\alpha - c) + (\alpha - c)^2$$

Cancelamos el término repetido a ambos miembros  $x^2$ , aplicamos propiedad distributiva y volvemos a desarrollar los cuadrados:

$$-2x\alpha - 2xc + \alpha^2 + 2\alpha c + c^2 + (y - \beta)^2 = -2x\alpha + 2xc + \alpha^2 - 2\alpha c + c^2$$

Cancelamos nuevamente los términos repetidos a ambos miembros y con el mismo signo:

$$-2xc + 2\alpha c + (y - \beta)^2 = 2xc - 2\alpha c$$

$$\text{Despejando: } (y - \beta)^2 = 2xc - 2\alpha c + 2xc - 2\alpha c = 4xc - 4\alpha c = 4c(x - \alpha)$$

Tenemos entonces la que llamamos

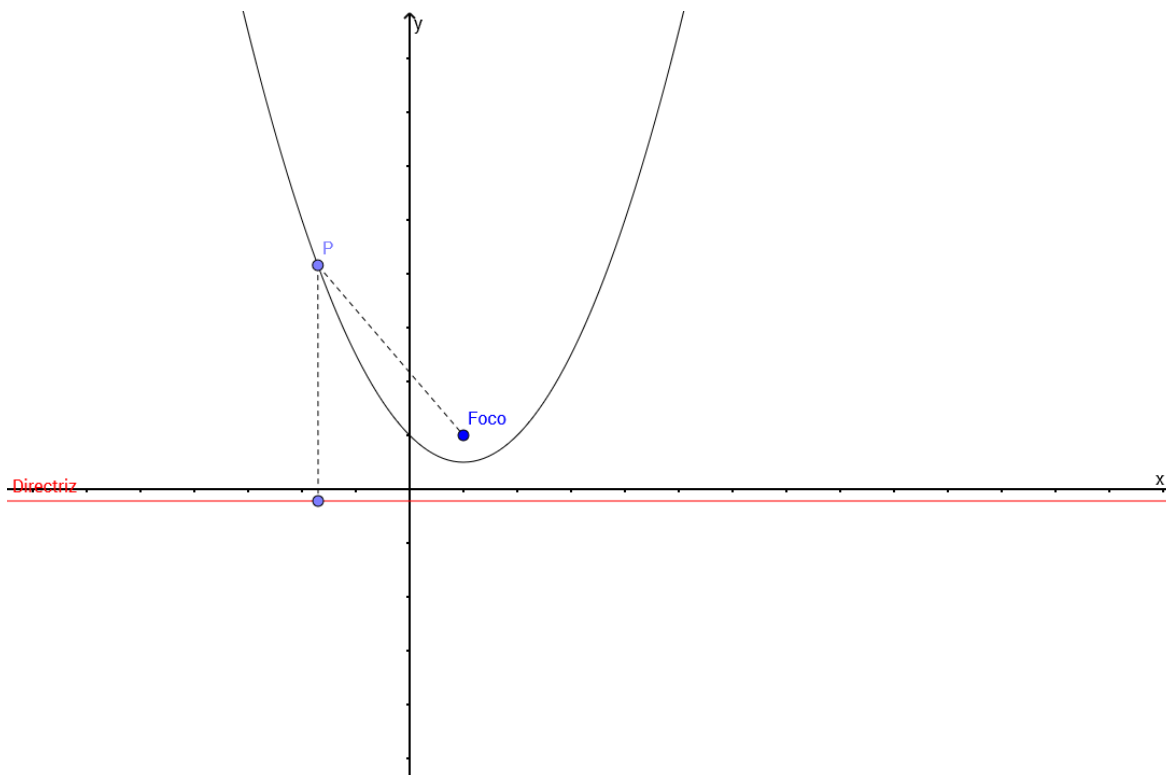
**Ecuación explícita o estándar de la parábola con eje focal paralelo al eje x, distancia focal valor absoluto de c y vértice en  $(\alpha, \beta)$ :**

$$(y - \beta)^2 = 4c(x - \alpha)$$

Invirtiendo el papel de x e y en lo anterior se tiene:

**Ecuación explícita o estándar de la parábola con eje focal paralelo al eje y, distancia focal valor absoluto de c y vértice en  $(\alpha, \beta)$ :**

$$(x - \alpha)^2 = 4c(y - \beta)$$



**Observación:** el valor de  $c$  podría ser negativo, por eso decimos que la distancia de un punto cualquiera al foco y a la directriz es valor absoluto de  $c$  , ya que la distancia es un número positivo.

Si la parábola tiene eje paralelo al eje  $x$  y el signo de  $c$  es positivo, es cóncava hacia la derecha, si el signo de  $c$  es negativo, es cóncava hacia la izquierda.

Si la parábola tiene eje paralelo al eje  $y$  y el signo de  $c$  es positivo, es cóncava hacia la arriba, si el signo de  $c$  es negativo, es cóncava hacia abajo.

### Ejemplo 5.1:

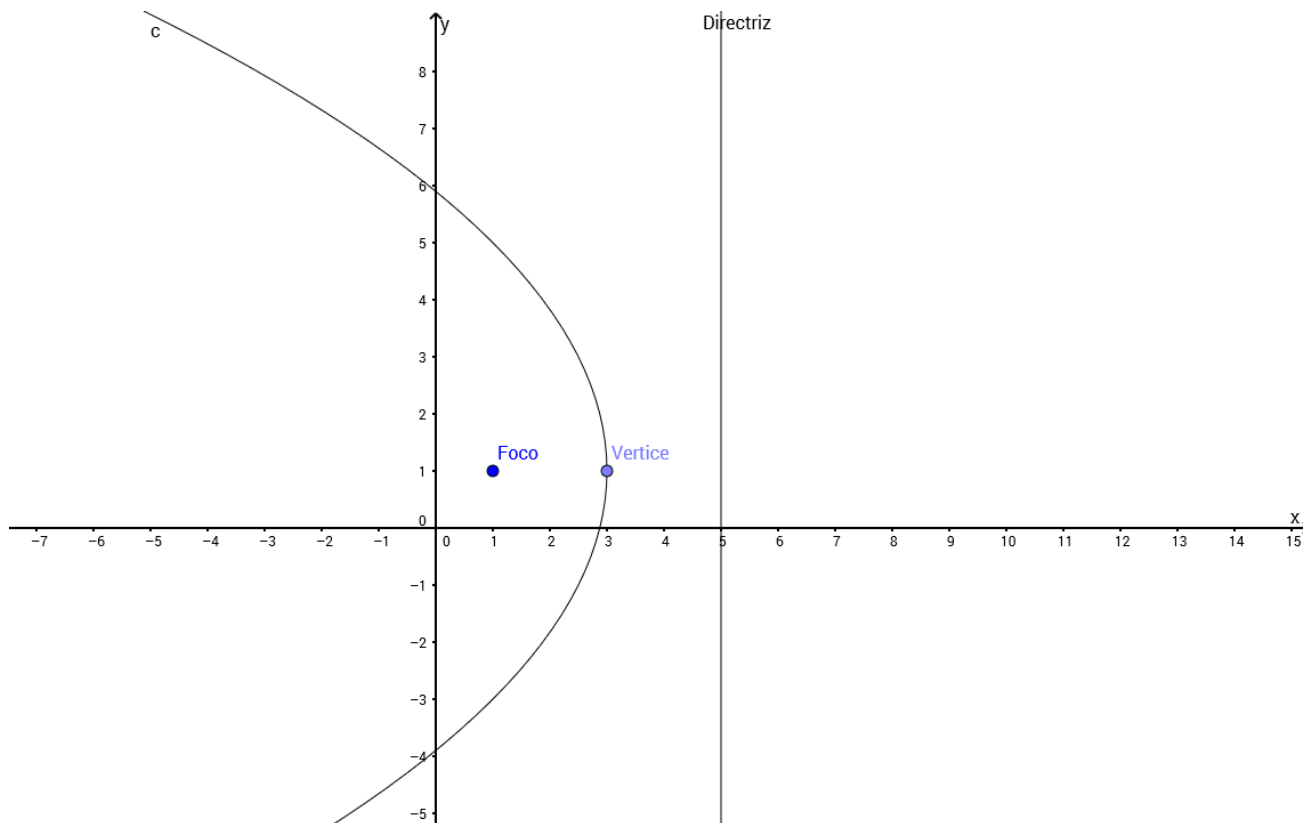
Hallar los elementos y gráfica de  $(y - 1)^2 = -8(x - 3)$

Comparando la ecuación con la ecuación estándar, tenemos que el vértice es  $(\alpha, \beta) = (3,1)$

El valor de  $4c = -8$  , entonces  $c = -2$

Esto nos dice que la distancia focal es 2.

Sabemos también que la parábola tiene eje paralelo al eje  $x$ , graficamos para obtener las coordenadas del Foco y la ecuación de la directriz:



Trasladándonos 2 unidades a la derecha del vértice estará el foco, que tiene coordenadas (1,1) y dos unidades a la derecha estará la directriz, que tiene ecuación  $x=5$ .

### Ejemplo 5.2:

Hallar la ecuación estándar, elementos y gráfico de la parábola con vértice en (0,-1) y foco en (0,2).

Como el vértice y el foco están sobre la recta  $x=0$ , sabemos que es una parábola con eje paralelo al eje  $y$ , en este caso es el eje  $y$ , por lo tanto la ecuación que debemos usar es:

$$(x - \alpha)^2 = 4c(y - \beta)$$

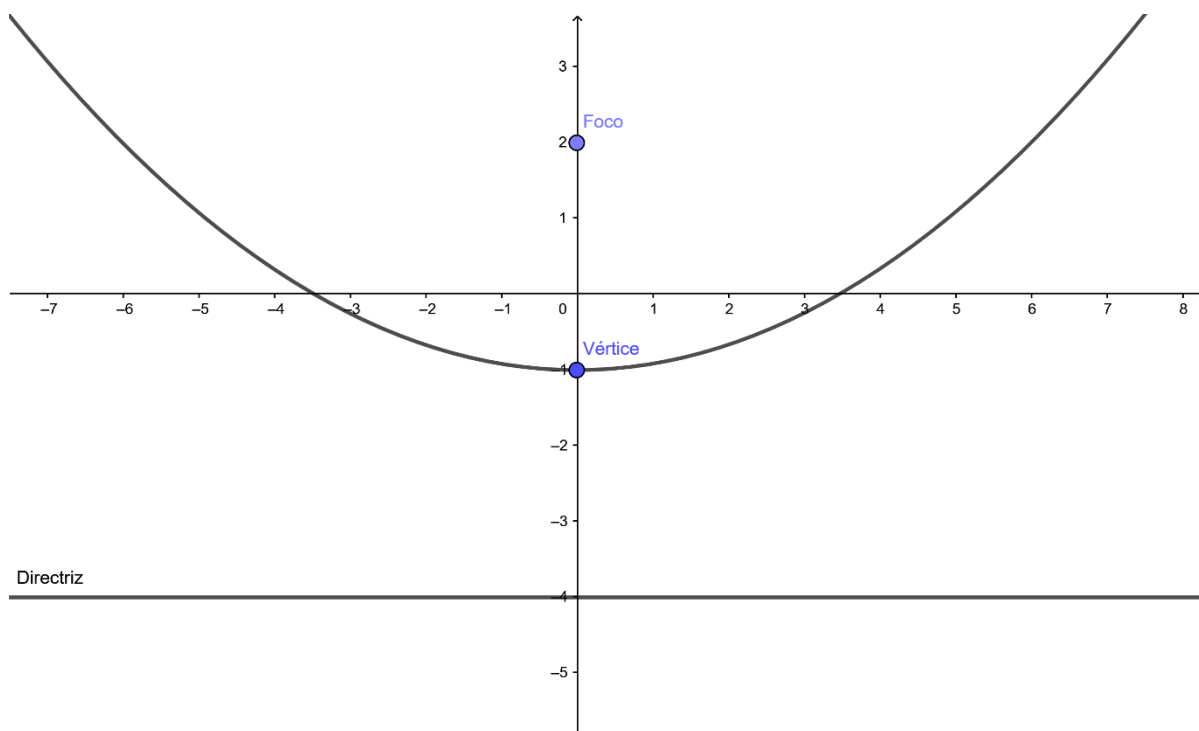
Sabemos las coordenadas del vértice, por lo tanto, reemplazando en la ecuación:

$$x^2 = 4c(y + 1)$$

Nos falta hallar  $c$ , pero como el foco está en (0,2), está a distancia 3 del vértice, por lo tanto  $c=3$ , tenemos entonces la ecuación:

$$x^2 = 12(y + 1)$$

Como  $c=3$ , la directriz estará a distancia 3 del vértice y es una recta paralela al eje  $x$ , por lo tanto su ecuación es  $y = -4$ .



## Completación de cuadrados

En el caso de la parábola también podemos observar que si desarrollamos el cuadrado del binomio la ecuación tiene otro aspecto:

$$x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 = 4cy - 4c\beta \quad \text{o}$$

$$y^2 - 2y\beta + \beta^2 = 4cx - 4c\alpha$$

En estos casos tendremos que llevar la ecuación a la forma estándar para poder hallar sus elementos y graficar.

### Ejemplo 5.3:

Hallar la forma estándar de la parábola dada por:  $y^2 - 4y - 16x + 20 = 0$

Como  $y$  es la variable que está elevada al cuadrado, dejamos los términos con  $y$  de un lado de la igualdad:

$$y^2 - 4y = 16x - 20$$

Ahora comparamos con la ecuación desarrollada:

$$y^2 - 2y\beta + \beta^2 = 4cx - 4c\alpha$$

$$y^2 - 4y + \beta^2 = 16x - 20 + \beta^2$$

Igualemos para despejar  $\beta$  ,  $-2\beta = -4$  entonces  $\beta = 2$

Sumamos a ambos miembros  $\beta^2$ :

$$y^2 - 4y + 2^2 = 16x - 20 + 2^2$$

Tenemos entonces:

$$(y - 2)^2 = 16x - 16$$

Sacando factor común:

$$(y - 2)^2 = 16(x - 1)$$

Que es la ecuación estándar de una parábola de eje paralelo al eje x, con vértice en (1,2) y distancia focal 4.

## Ejercicios

1. Escriba la ecuación canónica de las parábolas:

- a) con foco  $F = (0, 6)$  y directriz  $y + 6 = 0$
- b) con vértice en el origen y foco en  $(-4,0)$
- c) con vértice en  $(3,2)$  y foco  $(5,2)$
- d) con vértice en  $(0,0)$  y que contiene a los puntos  $(2,-3)$  y  $(-2,-3)$

2. Graficar y dar los elementos de las parábolas definidas por las siguientes ecuaciones:

- a)  $3y^2 = 8x$
- b)  $y^2 = -12x$
- c)  $x^2 = 4(y + 1)$
- d)  $(y - 3)^2 = -20(x + 2)$

3. Encontrar la ecuación estándar y los elementos de las parábolas:

- a)  $2x^2 + 12x + 8y + 10 = 0$
- b)  $3y^2 + 18y - 24x = 93$
- c)  $y = x^2 + 6x + 10$

4. a) Hallar la ecuación estándar de la parábola con vértice  $V(1,3)$ , eje focal paralelo al eje x y que pasa por el punto  $P(6, 13)$ . Graficar y dar los restantes elementos.

b) Hallar la ecuación estándar de la parábola con vértice  $V(-5,1)$ , eje focal paralelo al eje y y que pasa por el punto  $P(1, 0)$ . Graficar y dar los restantes elementos.

5. a) Hallar las ecuaciones estándar de las parábolas con vértice  $V(3,2)$  y foco  $F(7,2)$ , y otra con vértice  $V(7,2)$  y foco  $F(3,2)$ .

b) Hallar las ecuaciones estándar de las parábolas con vértice  $V(-3,3)$  y foco  $F(-3,-1)$ , y otra con vértice  $V(-3,-1)$  y foco  $F(-3,3)$ .

### Bibliografía

- Smith et al, Algebra, trigonometría y geometría analítica, Editorial Pearson-Addison Wesley Longman, 1998
- Swokoski, Earl W. y Cole, Jeffery A., Algebra y trigonometría con geometría analítica, 11ma ed., Editorial Thomson, 2006

