Matemática 3 – Curso 2016

Práctica 3: Variables aleatorias discretas – Funciones de distribución
Binomial, Geométrica, Hipergeométrica, Poisson.

1. (a) Dadas las siguientes tres funciones $p(x)$, determinar cuáles son funciones de frecuencia para una variable X, y para esas calcular: $P(2 \leq X \leq 4)$, $P(X = 2)$ y $P(X \neq 0)$

x	0	1	2	3	4
$p_1(x)$	.3	.3	.3	.05	.05
$p_2(x)$	.4	.1	.1	.1	.3
$p_3(x)$	.4	.1	.2	.1	.3

   (b) Sea $p(x) = c.(5 - x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4$, ¿cuál debería ser valor de c para que sea una función de frecuencia?

2. Las enfermedades I y II son relativamente comunes entre la gente de cierta población. Se supone que el 10% de la población tiene la enfermedad I, el 15% la enfermedad II y el 3% tiene ambas enfermedades. Se elige una persona al azar de esa población y se define Y como la variable que cuenta cuántas enfermedades tiene la persona seleccionada. Encuentre la función de frecuencia de Y y grafique.

3. Dada la siguiente función de distribución acumulada de la v. a. X,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ .30 & 1 \leq x < 3 \\ .40 & 3 \leq x < 4 \\ .45 & 4 \leq x < 6 \\ .60 & 6 \leq x < 12 \\ 1 & x \geq 12 \end{cases}$$

   (a) Hallar la fdp de X.

   (b) Usando la Fda, calcular $P(3 \leq X \leq 6)$, $P(X \geq 4)$ y $P(4 < X < 12)$

4. De las personas que pasan por un detector de metales en un aeropuerto, 1% lo activa. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las próximas 20 personas que pasen por ese detector, por lo menos dos lo activen?

5. Si el 90% de todos los solicitantes para cierto tipo de hipoteca no llenan correctamente el formulario de solicitud, ¿cuál es la probabilidad de que entre 15 de estos solicitantes seleccionados al azar

   (a) por lo menos 12 no llenen correctamente la solicitud?

   (b) entre 10 y 13 no la llenen correctamente?

   (c) a lo sumo 2 llenen correctamente la solicitud?

6. Un amigo que trabaja en una gran ciudad tiene dos automóviles, uno pequeño y uno grande. Tres cuartas partes del tiempo utiliza el automóvil pequeño para trabajar, y la cuarta parte restante usa el automóvil grande. Si utiliza el automóvil pequeño, por lo general no tiene problemas para estacionarse y, por lo tanto, llega a su trabajo a tiempo con una probabilidad de 0.9. Si utiliza el automóvil grande, llega a tiempo a su trabajo con una probabilidad de 0.6. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo al trabajo en 6 de 10 mañanas, suponiendo que hay independencia entre un día y otro?

7. En una caja hay 4 bolillas rojas y 6 bolillas azules. Considerar los siguientes experimentos:

(a) Se extrae una bolilla de la caja, se anota el color y se la devuelve a la caja. Se repite el experimento 5 veces. Sea $X =$*cantidad de bolillas rojas extraídas entre las 5 elegidas.* ¿Qué distribución tiene X? Calcular $P(X = 3)$.

(b) Se extraen 5 bolillas de la caja de una sola vez. Sea $Y =$*cantidad de bolillas rojas extraídas entre las 5 elegidas.* ¿Qué distribución tiene Y? Calcular $P(Y = 3)$.

(c) Se extrae una bolilla de la caja, si no es roja se la devuelve a la caja. Se repite el experimento hasta obtener una bolilla roja. Sea $W =$*cantidad de extracciones hasta obtener la primera bolilla roja.* ¿Qué distribución tiene W? Calcular $P(W = 5)$.

8. Un semáforo localizado en cierta intersección está en rojo 30% de las veces. Un automóvil pasa por esta intersección una vez al día. Suponga que cada día representa un experimento independiente.

   (a) Sea X: *"número de días transcurridos, hasta que el automóvil se encuentra con una luz roja por primera vez"*. ¿Qué distribución tiene X ? Hallar la $P(X = 3)$.

   (b) Sea Y: *"número de días que han transcurrido, hasta que el automóvil se encuentra con una luz roja por tercera vez"*. ¿Qué distribución tiene Y. Hallar la $P(Y = 7)$.

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que en una secuencia de 10 días se haya encontrado con 5 luces rojas?

9. Suponga que aviones pequeños llegan a cierto aeropuerto según un proceso de Poisson, con tasa $\lambda = 8$ aviones por hora.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 5 aviones pequeños en un período de una hora?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un período de un cuarto de hora no llegue ningún avión?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen por lo menos 20 aviones pequeños en un período de 2 1/2 hs?

10. Suponga que la distribución de árboles en cierto bosque, es una v. a. Poisson con $\lambda = 2$ por m^2.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que en cierto lote de $10m^2$ haya 35 árboles?

    (b) Suponga que se selecciona un punto del bosque y se construye un círculo de $1m$ de radio. ¿Cuál es la probabilidad de que en ese círculo haya 7 árboles?

11. Calcule la esperanza y varianza de las variables aleatorias de los ejercicios 1 y 2.

12. En una prueba de tarjetas de circuitos, la probabilidad de que un diodo en particular falle es 0.01. Suponga que una tarjeta contiene 200 diodos.

    (a) ¿Cuántos diodos se esperan que fallen?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad (aproximada) de que por lo menos cuatro diodos fallen en una tarjeta seleccionada al azar?

13. El peaje de un puente cobra \$10 por cada micro y \$25 por otros vehículos. Supongamos que durante las horas diurnas, el 60% de todos los vehículos son micros. Si 25 vehículos cruzan el puente durante un período particular diurno ¿cuál es el ingreso esperado del peaje?

14. Un resultado que recibe el nombre de **desigualdad de Chebyshev,** establece que para cualquier distribución de probabilidad de una v. a. X y cualquier número $k \geq 1$,

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$$

    En otras palabras, la probabilidad de que el valor de X se encuentre a por lo menos k desvíos de su media es a lo sumo $1/k^2$.

    (a) ¿Cuál es la cota superior para $k = 2$?¿$k = 3$?¿$k = 4$?¿$k = 5$?¿$k = 10$?

    (b) Sea X una v.a. con tres valores posibles, -1, 0 y 1, con probabilidades $\frac{1}{18}$, $\frac{8}{9}$ y $\frac{1}{18}$, respectivamente. Calcule la $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$ y compárela con la cota dada por la desigualdad.