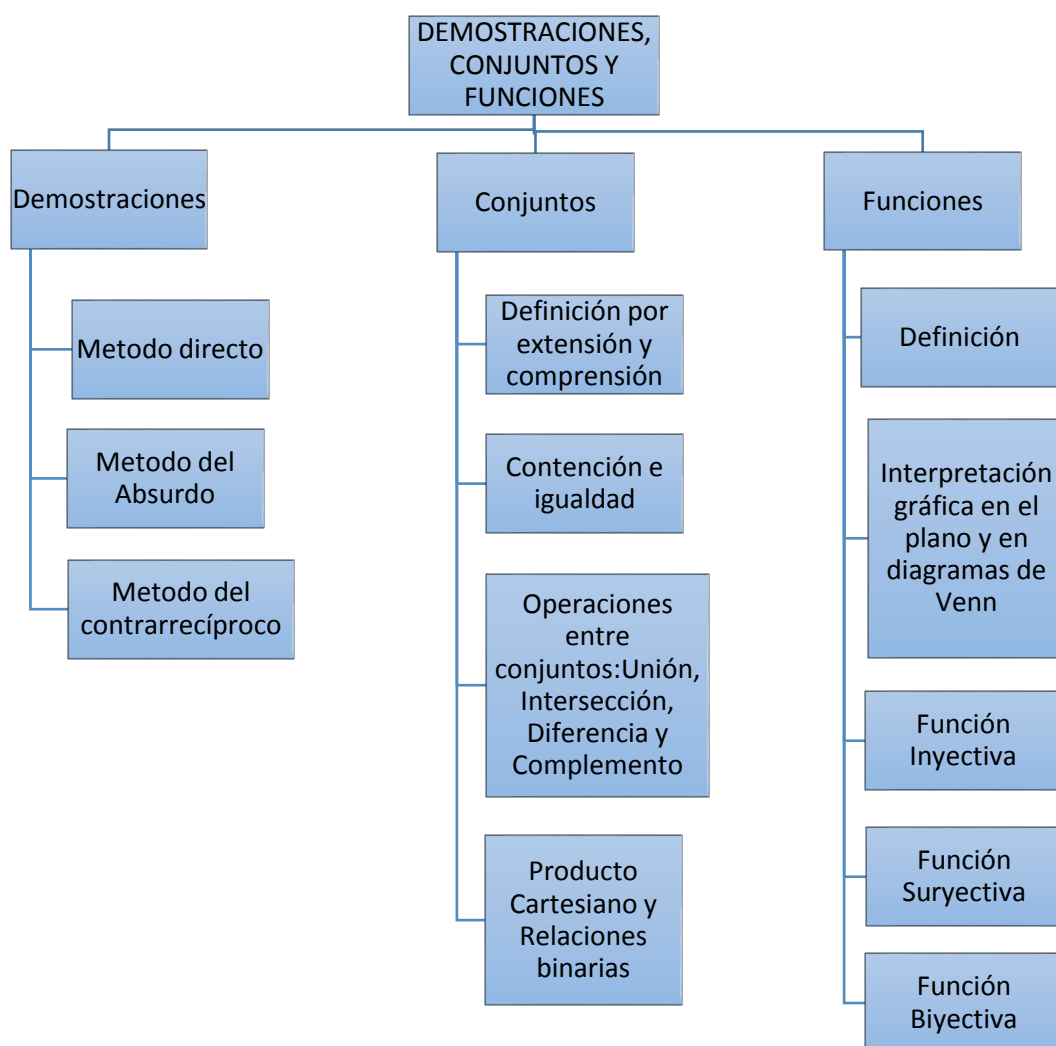


Capítulo 2

DEMOSTRACIONES, CONJUNTOS Y FUNCIONES

CONTENIDOS:



Matemático invitado: Pierre de Fermat

En matemática las únicas verdades son aquellas afirmaciones que se pueden demostrar, es decir, que partiendo de axiomas y otras afirmaciones ya demostradas podemos llegar, siguiendo un camino lógico a mostrar nuestro enunciado. Los axiomas son enunciados que no

se demuestran, enunciados que se aceptan como válidos, por ejemplo los axiomas que usó Peano para definir a los números naturales, aceptamos que los números naturales tienen un primer elemento (el 1 para algunos autores, el 0 para otros. En este curso tomaremos el 1), y que sumando uno a cualquier número natural obtenemos otro natural.

Cuando un enunciado no ha sido demostrado se llama **conjetura**, así permanece hasta que alguien encuentre una demostración, y entonces pasa a ser un **teorema**.

La tarea de demostrar es sumamente difícil, requiere mucha ejercitación y mucha paciencia.

Una de las conjeturas más famosas de la historia de las matemáticas fue la **Conjetura de Fermat**, que hoy conocemos como **el último Teorema de Fermat**, gracias a **Andrew Wiles** que en 1996 lo demostró.

Fermat fue un abogado del que no se sabe con certeza cuando nació, se conserva su fecha de defunción el 12 de enero de 1665 a los 57 años. Si Gauss recibió el nombre del “Príncipe de las matemáticas”, a Fermat se le asigna el del “Príncipe de los aficionados”, ya que fue un aficionado a las matemáticas, dedicaba su tiempo libre a su estudio.

En el margen de una página del libro “Aritmética” de Diofanto, enuncia su conjetura de inocente apariencia:

Si n es un número natural mayor a 2, entonces no existen números enteros x, y, z distintos de 0 tales que se cumpla la igualdad: $x^n + y^n = z^n$

Esta anotación, contenía una frase adicional que fue el desvelo de grandes matemáticos a lo largo de 300 años: “He descubierto una demostración realmente maravillosa que este margen es demasiado pequeño para contener”. Se estima que esto fue escrito en una fecha indeterminada de la década de 1630, tuvieron que pasar casi 300 años para que se encontrara una demostración y finalmente sea un teorema.

Hay otras conjeturas aún sin demostrar de enunciados matemáticos, algunos muy complejos y otro no tanto. Los que se mantienen como conjeturas son aquellos que no han podido ser demostrados pero a los que tampoco se ha podido refutar mediante un contraejemplo, es decir, no se ha encontrado tampoco el caso donde la conjetura falle.

Nuestro homenaje a Pierre de Fermat, quien hizo grandes aportaciones a la matemática y por supuesto a Andrew Wiles, que ya a los 9 años leyó el enunciado del teorema y dedicó después casi toda su vida de matemático a demostrarlo.

Comenzaremos con algunos comentarios generales acerca de las demostraciones de enunciados matemáticos. Se sugiere que repasen y releen el apunte de lógica visto en el ingreso.

1. Las demostraciones

Los resultados válidos en Matemática son aquellos que se pueden demostrar.

La manera de hacer demostraciones depende de lo que se quiera demostrar y también de la "forma" del enunciado. Los enunciados son **proposiciones**, se afirma algo de todos o de algunos elementos de un conjunto o de un universo dado.

Si el enunciado a probar es de forma existencial alcanzará en algunos casos con exhibir un individuo con las características que dice el enunciado o una manera de construirlo. Por ejemplo: "Existen números enteros que son primos"

Este enunciado podemos simbolizarlo como: $(\exists x)p(x)$, siendo $p(x)$ ="x es primo" y el Universo los números enteros.

En principio debemos conocer la definición de número primo, **un número "a" , "a" distinto de 1 y -1, es primo si y sólo si es divisible por 1,-1, a y -a**. Alcanza entonces con mostrar que el número entero, por ejemplo el "7", es primo ya que sólo es divisible por 1,-1,7 y -7. El enunciado afirma que existen primos, es decir que al menos hay uno, con lo que queda demostrado.

Si el enunciado es de forma universal habrá que probar que cada uno de los elementos del universo cumple con lo afirmado. Si el universo fuera de un número finito de individuos podríamos analizar que cada uno de ellos verifica lo enunciado. Si el universo es infinito, habrá que tomar un elemento arbitrario (NO un ejemplo) del universo del que se habla, y probar que tiene la propiedad enunciada.

Por ejemplo: "Si un número entero es par, su cuadrado es par"

Es un enunciado universal porque afirma algo acerca de todos los elementos del conjunto de los números enteros. En este caso el universo es infinito, por lo tanto debemos mostrar que se cumple para un elemento arbitrario del conjunto.

Podemos simbolizarlo como: $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$, siendo $p(x)$ ="x es par", $q(x)$ ="x² es par" y el Universo los números enteros.

Veremos distintos métodos:

Método directo:

Este enunciado tiene la forma de un condicional, es importante identificar antecedente y consecuente o hipótesis y tesis, para saber cuándo será verdadero.

Recordemos que un condicional es falso sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso, **partiremos entonces de antecedente verdadero y tratamos de ver que el consecuente tiene que ser verdadero**, es decir que no se da el caso de antecedente verdadero y consecuente falso, por lo tanto la implicación será verdadera y queda probado el enunciado.

En este caso el antecedente es "x es par" y el consecuente "x² es par"

Tomamos entonces un entero par *cualquiera*, es decir que podemos tomar un número x, tal que $x=2k$, siendo k un entero.

Tenemos que ver que si lo elevamos al cuadrado también es par.

$x^2=(2k)^2$ entonces $x^2=2k \cdot 2k$, o equivalentemente $x^2=2(k \cdot 2k)$, siendo $k \cdot 2k$ un número entero, por ser multiplicación de enteros, por lo tanto x^2 es par.

De esta forma queda demostrado.

Método del absurdo:

Esto consiste en suponer que el enunciado es falso y llegar a un absurdo. Cuando el enunciado tiene la forma de un condicional, suponer que es falso, es negar el condicional.

Recordemos que $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$, es decir que negar el condicional **es suponer que tanto el antecedente como la negación del consecuente pueden ser verdaderas**. Al llegar a un absurdo decimos entonces que lo que supusimos era falso y por lo tanto el condicional es verdadero.

Volviendo al ejemplo, demostrar por el método del absurdo sería suponer que:

Existe x, "x es par" y "x² **no** es par"

Esto implicaría que $x=2k$ y $x^2=2t+1$ (ya que si no es par, es impar), con k y t números enteros.

Pero entonces $x^2 = (2k)^2$ y además $x^2=2t+1$, esto implica que $x^2 = 2(k^2)$ y $x^2=2t+1$, es decir que x^2 es par e impar, ABSURDO, pues ningún número es par e impar a la vez.

El absurdo proviene de suponer que el enunciado era falso, por lo tanto la implicación es verdadera.

Método indirecto o contrarrecíproco:

En realidad es hacer el método directo a la proposición contrarrecíproca de lo que se quiere demostrar. Pues ya se ha probado que un condicional y su contrarrecíproca son equivalentes. Es decir que: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Sólo se trata de reformular el problema, escribirlo con un enunciado equivalente y demostrarlo.

No siempre las demostraciones pueden hacerse por los 3 métodos. Por eso para mostrar este método pondremos otro ejemplo:

“Si el cuadrado de un número entero es par, entonces el número es par”

Podemos simbolizarlo como: $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$, siendo $p(x)$ =“ x^2 es par”, $q(x)$ =“ x es par” y el Universo los números enteros.

Vamos a demostrarlo por el método del contrarrecíproco, reformulando el enunciado en uno equivalente: $(\forall x)(\neg q(x) \rightarrow \neg p(x))$

Trataremos de probar entonces que:

”Si un número no es par entonces su cuadrado no es par”.

Ahora planteamos, sea $x=2h+1$ (x un número impar, h entero) entonces $x^2=(2h+1)^2$

Desarrollando el cuadrado $x^2 = (2h)^2 + 4h + 1 = 4h^2 + 4h + 1$

Sacando factor común $x^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1$, siendo $2h^2 + 2h$ un número entero por ser suma y producto de enteros.

Por lo tanto x^2 es impar ya que puede escribirse como 2 por un entero más 1.

Por lo tanto partimos de un número impar y llegamos a que su cuadrado también debe ser impar, con lo que queda demostrado.

A estas herramientas haremos referencia cada vez que queramos hacer una demostración.

Observación: no siempre hacemos la simbolización del enunciado antes de demostrarlo, pero en muchos casos ayuda para entender exactamente lo que se quiere demostrar.

2. Conjuntos, elementos, pertenencia.

De manera intuitiva un conjunto es una colección bien definida de objetos que generalmente se representa con una letra mayúscula A , B , X , W , etc. Los objetos que integran el conjunto se denominan sus elementos.

El enunciado “ t pertenece a A ” o equivalentemente “ t es un elemento de A ” se indica $t \in A$. Si un elemento u no pertenece a A , se indica $u \notin A$.

El conjunto que no tiene elementos se llama conjunto vacío, que se indica con el símbolo \emptyset .

Un conjunto está bien definido si se sabe exactamente qué elementos lo integran y cuáles no.

Existen esencialmente dos formas de especificar un determinado conjunto: dando de manera explícita cada uno de sus elementos (**por extensión**) o bien mediante una propiedad que caracterice a cada uno de sus elementos y únicamente a ellos, es decir que todo elemento que cumpla tal propiedad estará en el conjunto y sólo ellos (**por comprensión**).

Es posible definir el conjunto por extensión si el conjunto tiene un número finito y relativamente pequeño de elementos, sin embargo algunos conjuntos infinitos o con muchos elementos se presentan de esa manera cuando se entiende su ley de formación.

Ejemplo 2.1:

Se define el conjunto **A por extensión como:** $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$, se tiene que $1 \in A$, $3 \in A$, $5 \in A$ y $7 \in A$, por otra parte por ejemplo $9 \notin A$, $12 \notin A$.

También se puede definir **A por comprensión como:**

$A = \{x: x \text{ es un número entero positivo impar menor que } 9\} =$

$= \{x: x = 2k + 1 \text{ para } k \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leq k \leq 3\}$

Este conjunto se lee: el conjunto de los números de la forma $2k+1$, con k entero, entre 0 y 3.

En ambos casos, la propiedad (o predicado o esquema proposicional)

$P(x)$: “ x es un número entero positivo impar menor que 9”, equivalentemente

$P(x)$: “ $x = 2k + 1$ para $k \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k \leq 3$ ” es la que caracteriza a todos los elementos de A y únicamente a ellos.

Ejemplo 2.2:

El conjunto de los números naturales (según la definición que se adopte puede tener al 0 o al 1 como primer elemento, en este curso tomaremos los naturales a partir del 1), y el conjunto de los enteros a pesar de ser infinito es usual indicarlos respectivamente:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}, \quad \mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Con los puntos suspensivos, en estos casos se intuye cuáles son los restantes elementos por la ley de formación y el orden.

Ejemplo 2.3:

Escribe por extensión el conjunto: $A = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge x + 8 = 10\}$.

Este conjunto lo forman los números enteros que sumados con 8 dan como resultado 10, por tanto, su forma por extensión es: $A = \{2\}$, ya que el único entero que sumado a 8 da 10 es 2.

Cabe destacar que en un conjunto cualquiera no interesa en qué orden aparecen los elementos, así como tampoco interesa que un elemento aparezca repetido.

El conjunto $B = \{5, b, 3, d, d, 1, w\} = \{1, 3, 5, w, w, d, b\} = \{d, 1, 3, b, 5, w\}$ es el mismo conjunto con 6 elementos en cualquiera de las tres formas en que aparece.

Así como los conjuntos \mathbb{N} y \mathbb{Z} representan los números naturales y enteros respectivamente, los conjuntos \mathbb{Q} , \mathbb{I} y \mathbb{R} representan los números racionales o fraccionarios, los irracionales y los reales respectivamente.

Ejercicios:

1) Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N}: 1 < x \leq 9\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{N}: x + 3 = 7\}$

c) $B = \{y \in \mathbb{Z}: -2 < y \leq 3\}$

d) $C = \{x: x \text{ es una vocal de la palabra "número"}\}$

e) $D = \{x: x \text{ es un dígito de la cifra: 453425}\}$

f) $E = \{z: z \text{ es un dígito primo de la cifra 729634}\}$

g) $A = \{w \in \mathbb{N}: w \text{ es divisor de } 50\}$

2) Definir por comprensión los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de los números enteros pares mayores que -8 y menores o iguales que 12.

b) El conjunto de las primeras seis potencias naturales de -2.

c) El conjunto de los números naturales pares.

d) El conjunto de los enteros múltiplos de 3.

e) El conjunto de los naturales múltiplos de 5.

f) El conjunto de los enteros múltiplos de 9.

g) El conjunto de los números reales que anulan la ecuación

$$(x^3 - \frac{1}{4}x) \cdot (x^2 - 3) \cdot (x + 5)$$

Igualdad de conjuntos

Los conjuntos A y B son iguales si y sólo si A y B tienen los mismos elementos. Es decir que todo elemento de A es también elemento de B y recíprocamente, o sea que se verifica:

$(\forall x) (x \in A \leftrightarrow x \in B)$. **Se indica: $A = B$.**

Ejemplo 2.4:

Los conjuntos A , B y C son iguales:

$$A = \{0, 2\}, B = \{x; x^2 - 2x = 0\} \text{ y } C = \{x : x = 2 \cdot k \wedge (k = 0 \vee k = 1)\}$$

Notar que todos los elementos de A son elementos de B ya que el 0 y el 2 satisfacen la ecuación $x^2 - 2x = 0$.

Por otro lado los únicos elementos que satisfacen la ecuación $x^2 - 2x = 0$ son el 0 y el 2 ya que $x^2 - 2x = 0$ si y sólo si $x(x - 2) = 0$ entonces $x = 0$ o $x = 2$. Por lo tanto todos los elementos de B son elementos de A . Por lo tanto $A = B$

Resta verificar $A = C$.

Inclusión, subconjuntos

Puede ocurrir que todo elemento de un conjunto sea elemento de otro conjunto pero no se cumpla la recíproca.

Ejemplo 2.5:

Sean los conjuntos $A = \{0, 2\}$ y $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

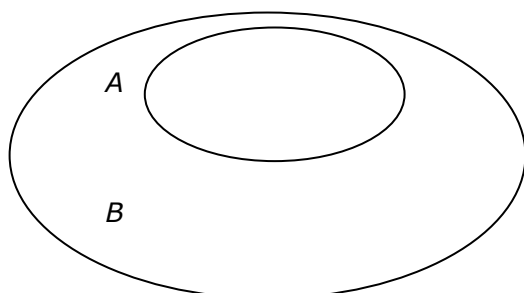
Todo elemento de A es elemento de B , pero no todo elemento de B es elemento de A .

Ejemplo 2.6:

Todo elemento de \mathbb{N} es elemento de \mathbb{Z} , pero no todo elemento de \mathbb{Z} es elemento de \mathbb{N} .

Si dados dos conjuntos A y B , todo elemento de A es elemento de B , se usará alguna de las siguientes expresiones que son todas equivalentes:

- a) A es subconjunto de B
- b) A es parte de B
- c) A está incluido en B
- d) A está contenido en B
- e) B contiene a A



Decimos entonces: A contenido en B si se verifica que $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

Se utiliza la notación $A \subseteq B$ para indicar esta relación entre conjuntos. También a veces se usa indicarlo con $B \supseteq A$.

Si A no es subconjunto de B , se indica con $A \not\subseteq B$.

En forma similar a las desigualdades $\leq, <$ entre números o expresiones algebraicas, entre los conjuntos \subset indica la inclusión estricta, mientras que \subseteq equivale a " \subset o $=$ ".

Es decir: $A \subset B$ significa que $A \subseteq B$ y $A \neq B$, se dice que A está incluido o contenido estrictamente en B , o que A es parte propia o subconjunto propio de B .

Conjunto universal:

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, todos los conjuntos que se consideren serán subconjuntos de un conjunto universal U , si se trata con conjuntos de personas U es el conjunto de todos los seres humanos, en geometría plana U será \mathbb{R}^2 , en problemas con conjuntos numéricos U será \mathbb{R} , o bien \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{I} o \mathbb{Q} de acuerdo con el contexto del problema.

Ejemplo 2.7:

a) Probar que los múltiplos enteros de 12 son múltiplos enteros de 3.

Del enunciado de este problema se infiere que el conjunto universal es \mathbb{Z} , se hace referencia a los conjuntos $D=\{x: x = 12k \text{ y } k \in \mathbb{Z}\}$ y $T=\{x: x = 3q \text{ y } q \in \mathbb{Z}\}$ definidos por comprensión.

Se quiere probar que D está incluido en T , de acuerdo con la definición de inclusión hay que probar que todo elemento de D es elemento de T .

Demostración por el método directo:

Un elemento arbitrario x de D se escribe $x=12k$, donde k es algún entero. Para demostrar que x pertenece a T habrá que ver que $x=3m$ para algún entero m .

Si $x=12k = (3 \cdot 4) \cdot k$, por la propiedad asociativa del producto de enteros $(3 \cdot 4) \cdot k = 3 \cdot (4 \cdot k)$,

Como 4 y k son enteros, entonces su producto es también un entero, luego $4k=m$, y se obtiene que $x=12k=3m$.

Entonces $x \in T$.

Como x es un elemento arbitrario de D , queda probado que para todo x , $x \in D \Rightarrow x \in T$, es decir que $D \subseteq T$ y por lo tanto todo múltiplo de 12 es múltiplo de 3.

b) ¿Es todo múltiplo de 3 múltiplo de 12?

Con la notación usada equivale a la pregunta ¿ $T \subseteq D$?

Es suficiente mostrar un elemento de T que no esté en D , por ejemplo $15=3 \cdot 5$, $15 \in T$, pero no existe ningún entero k tal que 15 se pueda escribir como $12 \cdot k$, o sea que $15 \notin D$, luego $T \not\subseteq D$.

Propiedades de la inclusión:

1) Para todo par de conjuntos A y B , $A=B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ (antisimetría)

Esta propiedad da un criterio para probar igualdad entre conjuntos. Si se prueba que A es subconjunto de B y que B es subconjunto de A , entonces $A=B$.

- 2) Para todo conjunto A se cumple que $A \subseteq A$ (reflexividad)
- 3) Dados los conjuntos A, B, C , cualesquiera, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (transitividad)
- 4) Para todo conjunto A se cumple que $\emptyset \subseteq A$

Observación: Notar que cuando hablamos de propiedades nos referimos a proposiciones verdaderas para **todo** conjunto o para todo conjunto que cumpla una determinada condición, pero no para un conjunto en particular. Por ejemplo en la propiedad 3) se dice que si A, B y C son **cualquier terna de conjuntos** que cumplan $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ se cumple que $A \subseteq C$.

Si $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2,3,4,5\}$ se cumple que $A \subseteq C$.

Pero si $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{1,3,4,5\}$ no tiene porqué cumplirse.

Ejercicios:

3) Indicar si los siguientes pares de conjuntos son iguales, son disjuntos o alguno está incluido en el otro:

- a) $A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ es divisor de } 6\}$, $B = \{1,2,3,6\}$
- b) $A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ es divisor de } 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}: 2 < x < 5\}$
- c) $A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ es divisor de } 12\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

4) En cada caso indicar el conjunto universal y escribir por extensión y por comprensión los conjuntos que se mencionan.

- a) Probar que los múltiplos naturales de 18 son múltiplos de 6.
- b) Probar que los múltiplos enteros de 60 son múltiplos de 15.
- c) Probar que los múltiplos enteros de 12 son pares.
- d) ¿Son los múltiplos naturales de 3 múltiplos de 21?
- e) ¿Son los múltiplos enteros de 13 múltiplos de 39?
- f) Probar que los múltiplos enteros de 39 son múltiplos de 13.
- g) Sean B el conjunto de los múltiplos enteros de -5 y C el conjunto de los múltiplos enteros de 5, probar que $B=C$.

Operaciones entre Conjuntos

Unión: La unión de dos conjuntos A y B , indicada por $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B .

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo 2.8:

a) Sean $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,6\}$ entonces el conjunto unión es $A \cup B = \{1,2,3,6\}$

b) Sean $A = \{1,2,7,9,a\}$, $B = \{1,2,3,6,w,x\}$ entonces el conjunto unión es

$$A \cup B = \{1,2,3,6,7,9,a,w,x\}$$

Propiedades de la Unión:

1) Asociatividad: Sean A , B y C conjuntos cualesquiera, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

2) Conmutatividad: Para todo par de conjuntos A y B , $A \cup B = B \cup A$

3) Para todo par de conjuntos A y B : $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Intersección: La intersección de dos conjuntos A y B , indicada por $A \cap B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y a B .

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

Si A y B son no vacíos y $A \cap B = \emptyset$, A y B se llaman disjuntos.

Ejemplo 2.9:

a) Sean $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,6\}$ entonces el conjunto intersección es $A \cap B = \{1,2\}$

b) Sean $A = \{1,2,7,9,a,w\}$, $B = \{1,2,3,7,w,x\}$ entonces el conjunto intersección es

$$A \cap B = \{1,2,7,w\}$$

Propiedades de la Intersección:

1) Asociatividad: Sean A , B y C conjuntos cualesquiera, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

2) Conmutatividad: Para todo par de conjuntos A y B , $A \cap B = B \cap A$

3) Para todo par de conjuntos A y B : $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$

Diferencia: La diferencia de dos conjuntos A y B , indicada por $A-B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B .

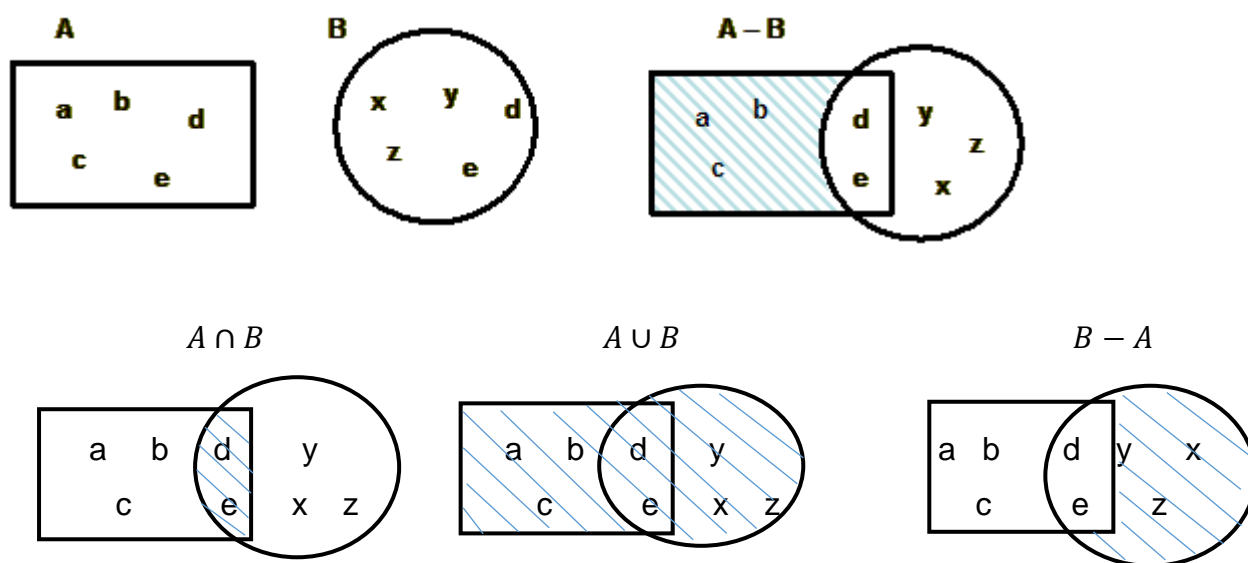
$$A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplo 2.10:

Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{x, y, e, z, d\}$

$A \cap B = \{d, e\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$, $A - B = \{a, b, c\}$, $B - A = \{x, y, z\}$

Graficando los conjuntos en diagramas de Venn:



Propiedades de la Diferencia:

1) Para todo A , $A - A = \emptyset$

2) Para todo A , $\emptyset - A = \emptyset$

3) Para todo A , $A - \emptyset = A$

4) Para todo par de conjuntos A y B, si $A - B = B - A$ entonces $A = B$

Complemento: El complemento de un conjunto A es el conjunto de todos los elementos (del universo U) que no están en A

$$A^c = \{x; x \notin A\} = U - A$$

Ejemplo 2.10:

a) Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $U = \{a, b, c, d, x, y, e, z\}$ entonces $A^c = \{x, y, z\}$

b) Sean $B = \{-2, -3, 1, 5, 7, 8, 9\}$ y $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Entonces $B^c = \{-4, -1, 0, 2, 3, 4, 6\}$

Propiedades del Complemento:

1) Para todo A, $(A^c)^c = A$

2) Si U es el universo, $\emptyset^c = U$

3) Si U es el universo, $U^c = \emptyset$

4) Para todo par de conjuntos A y B, $A \subseteq B \leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

Propiedades combinando operaciones:

Leyes Distributivas:

a) Para toda terna de conjuntos A, B y C: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) Para toda terna de conjuntos A, B y C: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de De Morgan:

c) Para todo par de conjuntos A y B: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

d) Para todo par de conjuntos A y B: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Ejercicios:

5) Sean $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3,6\}$, $C = \{x: x = 2k \text{ y } k \in \mathbb{N}\}$, $D = \{x: x = 3m \text{ y } m \in \mathbb{Z}\}$ y $U = \mathbb{Z}$
Hallar:

a) $A \cup \mathbb{Z}$, b) A^c , c) $A \cap C$, d) $B - (D \cap A)$, e) C^c , f) $(D \cap B)^c$, g) $A - B$, h) $B - A$

6) Sean P el conjunto de los enteros pares e I el conjunto de los enteros impares

a) Indicar qué conjuntos son $P \cup I$, $P - I$, $I - P$, P^c , I^c

b) Probar que $P \cap I = \emptyset$

Indicaciones: probarlo por el absurdo suponiendo que fuera distinto del \emptyset , es decir que existe un número m que es a la vez elemento de P y elemento de I.

7) Si T es el conjunto de enteros múltiplos de 3 y C el de los enteros múltiplos de 4, ¿Que conjuntos son $T \cap C$, $C \cup T$, $T - C$, $C - T$, T^c , C^c ?

Producto cartesiano

El producto cartesiano es otra operación entre conjuntos, a diferencia de las anteriores sus elementos son pares ordenados.

Si A y B son conjuntos cualesquiera el **producto cartesiano** $A \times B$ es el conjunto de todos los pares ordenados (a,b) donde $a \in A$ y $b \in B$, $A \times B = \{(a,b); a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplos 2.11:

a) Si $A = \{1,3,5\}$, $B = \{w,1\}$, $A \times B = \{(1,w), (3,w), (5,w), (1,1), (3,1), (5,1)\}$

b) En geometría, el plano \mathbb{R}^2 es el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y en efecto sus elementos, los puntos del plano, son pares ordenados $(x,y): x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$.

Ejercicios:

8) Hallar el producto cartesiano $E \times F$ de los conjuntos

$E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $F = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ y representarlo en \mathbb{R}^2 como puntos del plano.

9) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1\}$ y $C = \{6, 7\}$, son conjuntos, hallar $A \times (B \cap C)$ y $(A \times B) \cap (A \times C)$ y verificar que son iguales.

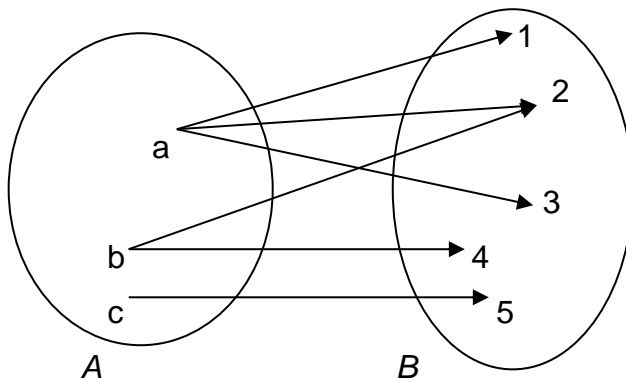
Relaciones binarias

Una relación binaria o correspondencia de un conjunto A en un conjunto B , es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Sus elementos son pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$, **no necesariamente todos** tales pares ordenados.

Cuando un par $(a, b) \in R$, también se indica aRb o $b \in R(a)$, donde $R(a) = \{x \in B; aRx\}$ es decir el conjunto de todos los elementos x de B relacionados por R con un elemento fijo a de A .

Si A y B son finitos y tienen pocos elementos es posible representar gráficamente la relación R de A en B mediante un diagrama para A , otro para B y una flecha con origen en un elemento a de A y extremo en uno b de B si y sólo si el par (a, b) pertenece a la relación R .

Ejemplo 2.12:



En este caso $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y los pares que están en la relación son:
 $R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 4), (c, 5)\}$

Ejemplos 2.13:

- a) Si $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{w, 1\}$ se define la relación binaria $T = \{(1, w), (5, w), (1, 1), (5, 1)\} \subset A \times B$, en este caso $T(5) = \{x \in B; 5Tx\} = \{w, 1\}$
- b) En el plano \mathbb{R}^2 se define por comprensión la relación binaria $S = \{(x, y); y = x^2 - 3\}$, sus elementos son todos los puntos del plano que pertenecen a la parábola $y = x^2 - 3$
- c) En el plano \mathbb{R}^2 se define la relación binaria $P = \{(x, y); y^2 = x\}$, sus elementos son todos los puntos del plano que pertenecen a $y^2 = x$ parábola de eje focal x.

3. Funciones

Una relación binaria de A en B que cumpla que:
a todo elemento $a \in A$ le asigna un único elemento $b \in B$ es una función de A en B

Se indica con $f: A \rightarrow B$. El elemento único de B asignado a cada $a \in A$ **se llama la imagen de a por f y se indica $f(a)$** .

El conjunto A se llama el **dominio** de f que se indica con $\text{Dom}(f)$, y el conjunto B el **codominio**.

En una relación binaria cualquiera de A en B , el conjunto $R(a)$, para $a \in A$, puede ser vacío o tener cualquier número de elementos. En una función tal conjunto nunca es vacío y tiene exactamente un elemento que se indica con $f(a)$, **la** imagen de a por f .

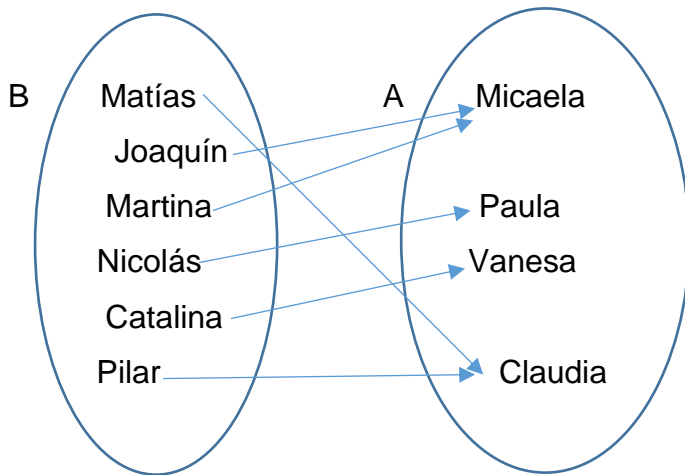
Ejemplo 3.1:

Si A es el conjunto de las madres de 6 amigos y B es el conjunto de los amigos,

definimos:

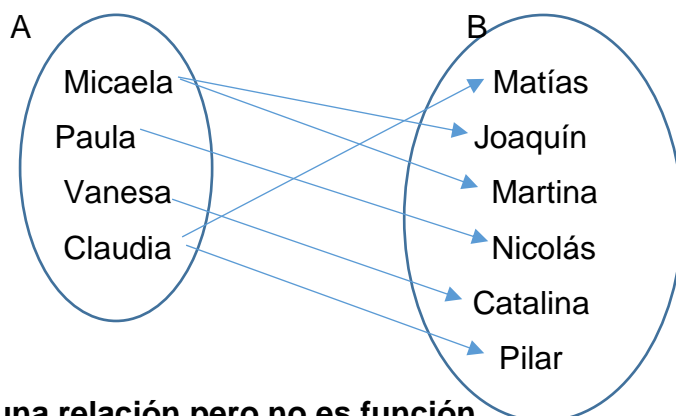
$A = \{Micaela, Paula, Vanesa, Claudia\}$, $B = \{Matías, Joaquín, Martina, Nicolás, Catalina, Pilar\}$

Podemos establecer la **relación** que a cada hijo le asigna su madre, esta relación es una función, ya que **todos** los hijos tienen una madre y esta es **única**.



Hemos definido una función $f: B \rightarrow A$, donde a cada elemento de B se le asigna un único elemento en el conjunto A.

Sin embargo si quisiéramos relacionar las madres con sus hijos, podemos definir una relación de A en B que **no es función**, ya que hay elementos en el dominio que tienen más de una imagen, hay elementos en el dominio a quienes se les asigna más de un elemento en el conjunto codominio.

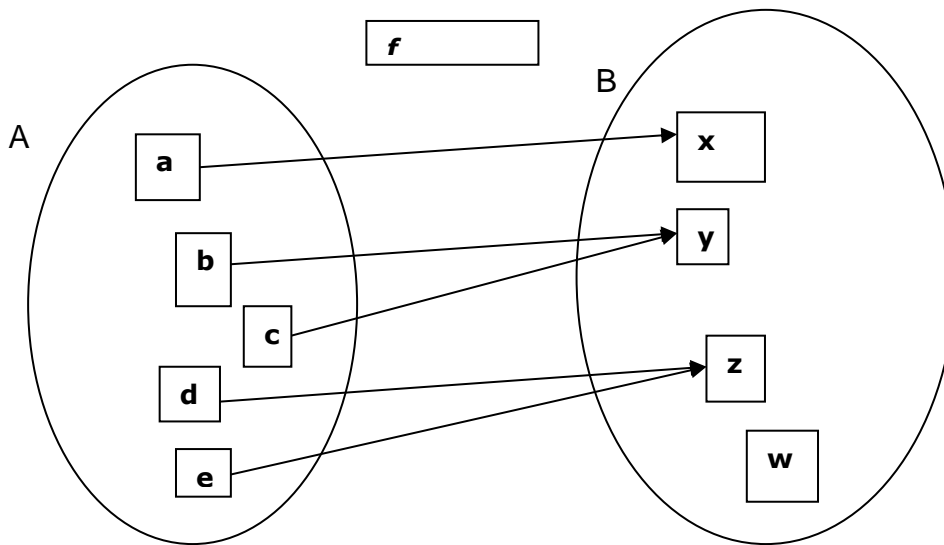


Es una relación pero no es función

Ejemplo 3.2:

El siguiente es el diagrama de la función f de A en B , que asigna $f(a)=x$, $f(b)=y$, $f(c)=y$, $f(d)=z$, $f(e)=z$.

De cada elemento del dominio $A=\text{Dom}(f)$ debe salir una flecha única, a elementos del codominio B pueden llegar más de una flecha o ninguna, como en los elementos y , z , w de B .



La **imagen de una función** f es el conjunto de todos los $y \in B$ tales que sean imagen por f de algún elemento x de A , en términos de conjuntos:

$$\text{Im}(f) = \{y, y \in B / \exists x, x \in A, y = f(x)\} \subseteq B.$$

La imagen es un subconjunto del codominio, en algunos casos pueden coincidir.

Ejemplo 3.3:

Sea A el conjunto de las letras del alfabeto y \mathbb{R} el de los números reales, se define la función

$$g : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } g(x) = \begin{cases} -3, & \text{si } x \text{ es consonante} \\ 5, & \text{si } x \text{ es vocal.} \end{cases}$$

El codominio es el conjunto \mathbb{R} de todos los reales, la imagen $\text{Im}(g) = \{-3, 5\}$ está contenida estrictamente en \mathbb{R} .

Ejemplo 3.4:

El área de un triángulo se calcula como base \times altura, si suponemos una base dada, por ejemplo de 10 cm, el área del triángulo variará **en función** de la altura, decimos que el área depende de la altura, podemos escribir entonces $f(x) = 10 \cdot x$, tomando la altura como x y el área es $f(x)$.

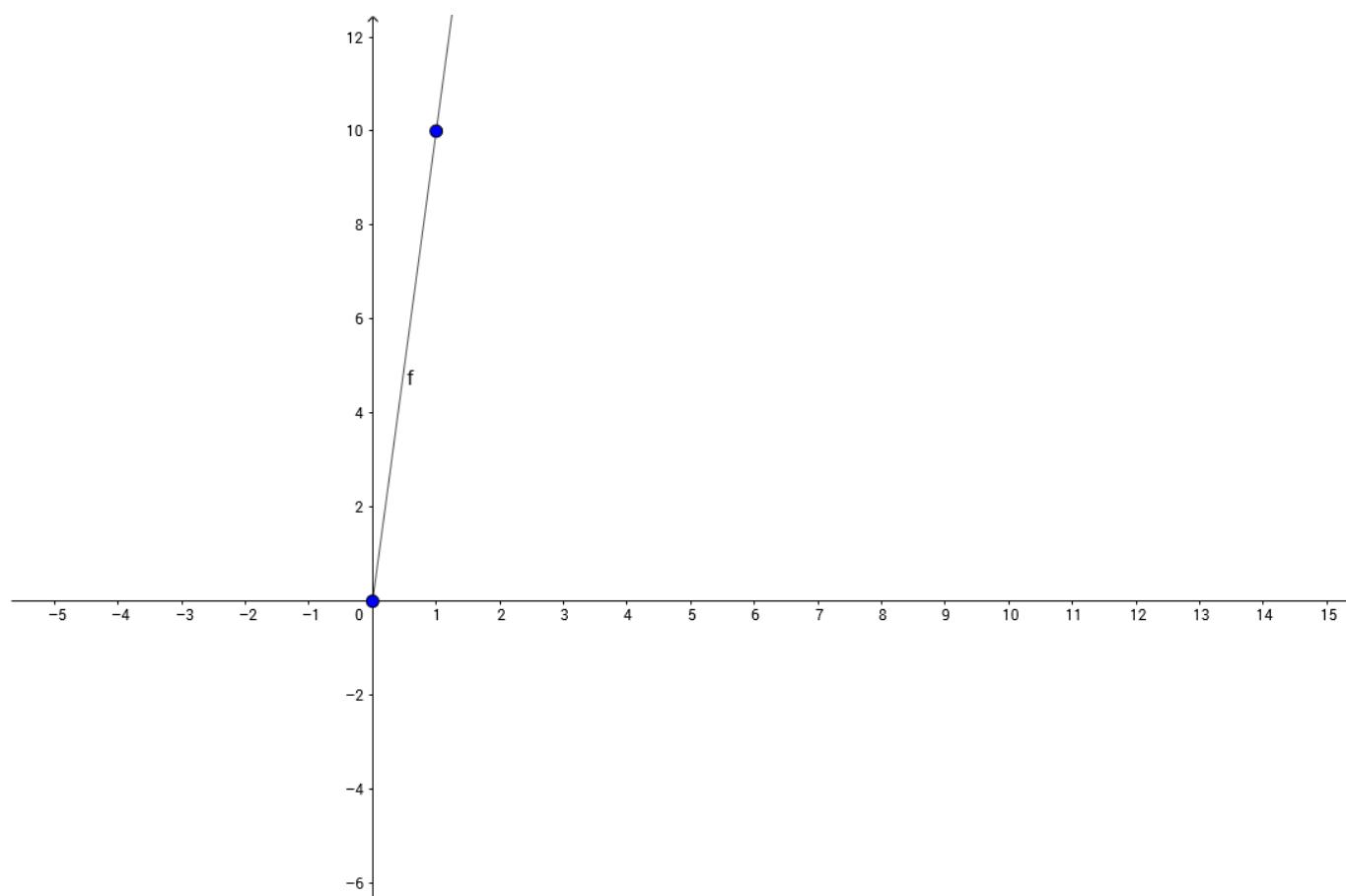
Tomando como dominio y codominio los reales positivos, decimos que a cada valor de x , es decir a cada altura le corresponde un área **distinta y única**.

Por ejemplo si la altura es 5, $f(5) = 10 \cdot 5 = 50$, el área es 50.

Si la altura es 20, $f(20) = 10 \cdot 20 = 200$, el área es 200.

Así definida, f es una función que relaciona cada altura de un triángulo con su área.

Observemos que esta función representa la ecuación de una recta de pendiente 10 y ordenada al origen 0, con la salvedad de que como estamos modelizando un problema con longitudes y distancias tomamos sólo los reales positivos como dominio y codominio, podemos graficarla en el plano cartesiano:



Igualdad de funciones

Se define que dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio y establecen la misma relación:

$$f = g \Leftrightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = D \wedge f(x) = g(x) \quad \forall x, x \in D$$

Funciones numéricas

Una función numérica es una función tal que su dominio y su codominio son conjuntos de números, por ejemplo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } f(x) = 3x + \frac{5}{6};$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ dada por } g(n) = n - 25;$$

$$k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } k(x) = x^2 + 1;$$

$$j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ dada por } j(x) = 5x + 3;$$

Se representan en un sistema de ejes cartesianos, sobre el eje horizontal se representa el dominio y sobre el vertical el codominio.

El dominio de una función numérica es el conjunto de números que tienen imagen.

El mismo puede darse en forma explícita, por ejemplo, si se escribe $f: A \rightarrow B$, entonces A es el dominio de la función. También puede darse en forma implícita, por ejemplo, si sólo se escribe

$f(x) = \frac{3+x}{x-5}$, se entiende que **el dominio es el conjunto de todos los números reales para**

los cuales puede calcularse el correspondiente por f , en este ejemplo, el dominio es $\mathbb{R} - \{5\}$ (todos los números reales salvo aquellos para los cuales el denominador es 0).

Ejemplo 3.5:

En la función $g(x) = \frac{x^3 - 5}{x^2 - 9}$ el dominio de g es el conjunto $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ puesto que -3 y 3 son las raíces del divisor $x^2 - 9$, en ellos se producen indeterminaciones o sea que $g(-3)$ y $g(3)$ **no** existen por lo que deben excluirse del dominio

Ejemplo 3.6:

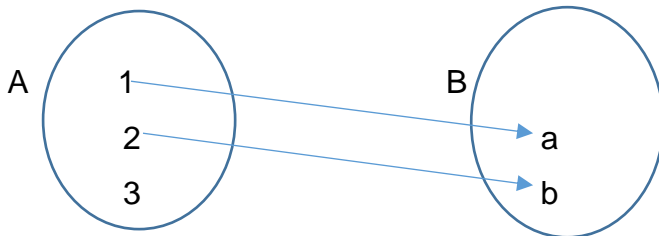
La función $y = f(x) = \sqrt{x-3}$, como la raíz cuadrada (también cualquier raíz de índice par) está definida para números reales mayores o iguales que 0, tiene su dominio en los reales x tales que $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Luego el dominio de esta función es el conjunto $\{x: x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 3\}$, es decir, el conjunto de los reales mayores o iguales que 3.

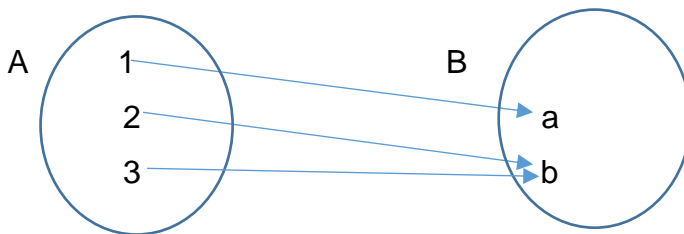
Ejercicios

10) Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones, justificando lo que afirma:

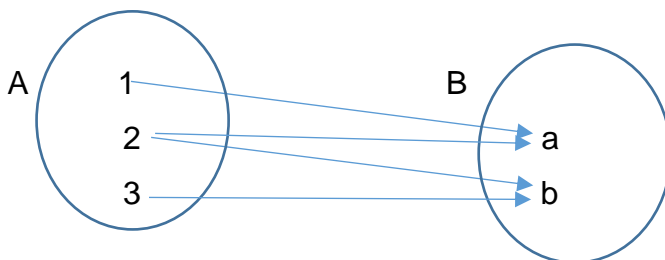
a)



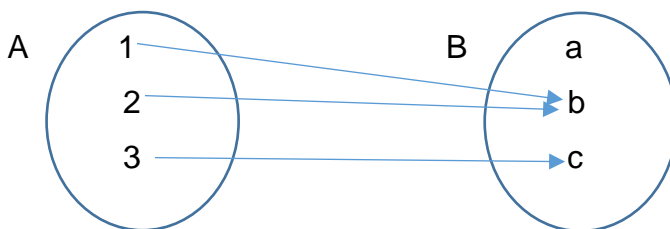
b)



c)



d)



11) Dada $f(x) = \frac{3+x}{x-5}$ determinar: a) $f(-1)$; b) $f(0)$; c) $f(2)$; d) $f(3/2)$

12) Dada $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ determinar: a) $g(0)$; b) $g(-\frac{3}{4})$; c) $g(3)$

13) Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $g(x) = \frac{1}{3+x} - 2$ c) $h(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$

d) $t(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4x + 4}$ e) $u(x) = \sqrt{x-7}$ f) $w(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$

14) Un rectángulo tiene 100cm de perímetro. Expresar el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

15) Se desea construir un depósito de base cuadrada (sin tapa) y 10 m^3 de capacidad. Exprese la superficie lateral del depósito en función de la longitud del lado de la base.

16) Una lámina metálica rectangular mide 5 cm de ancho y 8 m de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. Expresar el volumen de la caja en función de su altura.

17) Estudiar si las siguientes funciones son iguales. Justificar:

$$f(x) = x + 2 \qquad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Funciones inyectivas, suryectivas, función inversa

Función inyectiva:

Una función $f(x)$ es **inyectiva** si a dos elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas en el codominio. Es decir: Sea $f: A \rightarrow B$, $f(x)$ es inyectiva si

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

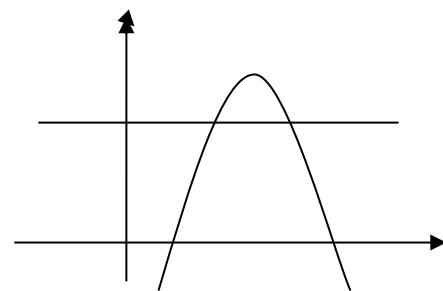
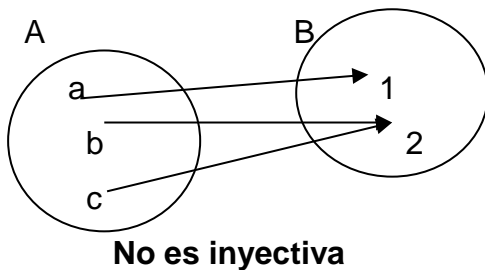
Equivalentemente:

$$f(x) \text{ es inyectiva si } \forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

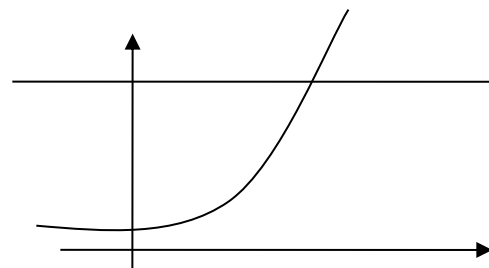
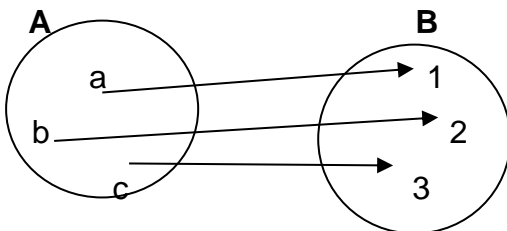
Ambas expresiones son equivalentes ya que una es la contrarrecíproca de la otra.

-Si la función admite una representación mediante diagrama de flechas, la misma será inyectiva si a cada elemento del codominio le llega a lo sumo una flecha.

-En una representación en un sistema de coordenadas cartesianas, un criterio para decidir si la función es inyectiva es el siguiente: Toda recta horizontal que corte al eje de las ordenadas en un punto de su codominio debe cortar a su gráfica en a lo sumo un punto.



No es inyectiva



Es inyectiva

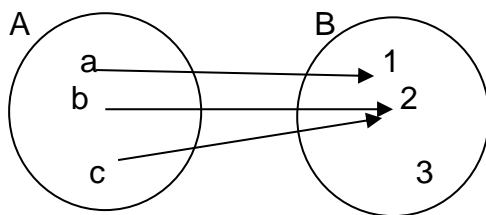
Función suryectiva (o sobreyectiva):

Una función $f(x)$ es **suryectiva** o sobreyectiva si todo elemento del codominio es la imagen de uno o más elementos del dominio. Es decir: Sea $f : A \rightarrow B$, $f(x)$ es suryectiva si $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $y = f(x)$.

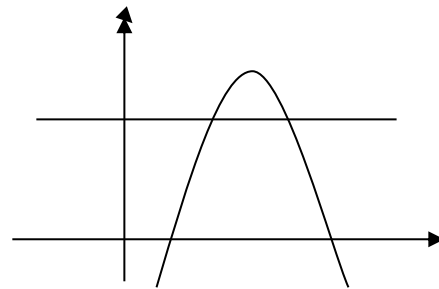
Equivalentemente $f(x)$ es suryectiva si $\text{Im}(f) = \text{Codominio}(f)$

-Si la función admite una representación mediante diagrama de flechas, la misma será suryectiva si a cada elemento del codominio le llega al menos una flecha.

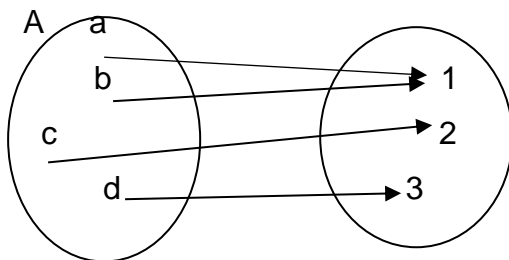
-En una representación en un sistema de coordenadas cartesianas, un criterio para decidir si la función es suryectiva es el siguiente: Toda recta horizontal que corte al eje de las ordenadas en un punto de su codominio debe cortar a su gráfica en al menos un punto.



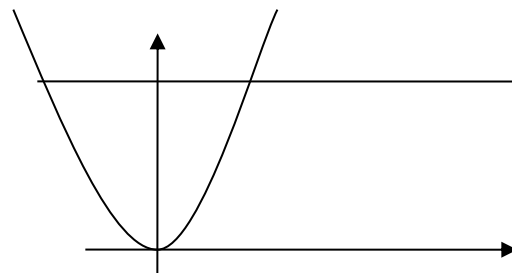
No es suryectiva



Si consideramos $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, no es suryectiva



Es suryectiva



Si consideramos $f: A \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ es suryectiva

Función biyectiva:

Una función $f(x)$ es biyectiva si es inyectiva y suryectiva. Es decir que todo elemento del codominio es la imagen de uno y sólo un elemento del dominio. Se dice también que hay una correspondencia “uno a uno”, o que la correspondencia es biunívoca.

Si una función $f: A \rightarrow B$ es biyectiva, por la suryectividad todo elemento $y \in B$ es la imagen ($y = f(x)$) de algún $x \in A$ y, por la inyectividad, ese elemento $x \in A$ es único, es decir que todo $y \in B$ tiene una única preimagen $x \in A$ que cumple $y = f(x)$.

Esto permite definir la función $g: B \rightarrow A$ dada por $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$, esta función g es la función inversa de f y se la indica con f^{-1} . Por la observación anterior: Una función f tiene inversa sí y sólo si f es biyectiva.

Ejemplo 3.7:

En las siguientes funciones estudiar si son o no inyectivas, suryectivas justificando cada respuesta, y en caso de ser biyectiva hallar su inversa.

a) Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x+3$.

Inyectividad:

Hay que ver que **para todo par de enteros distintos sus imágenes son distintas**.

Se demostrará por el absurdo, supondremos que **existe un par de enteros distintos con la misma imagen**:

Sean a y b enteros distintos, entonces $f(a) = a+3$ y $f(b) = b+3$

Si a y b tuvieran la misma imagen $a+3 = b+3$, entonces sumando -3 a ambos miembros $a = b$

Esto es un absurdo porque supusimos $a \neq b$, entonces debe ser $f(a) \neq f(b)$.

A elementos distintos del dominio les corresponden imágenes distintas, luego f es inyectiva.

Suryectividad:

Hay que ver que **todo número entero del codominio es imagen de algún entero del dominio**.

Se demostrará por el método directo, partiendo de un entero cualquiera veremos que es imagen de algún entero.

Sea m un entero cualquiera, si existe un entero a tal que $f(a) = m$, debe cumplirse que $m = a+3$.

Efectivamente dado un entero siempre puede escribirse como otro entero más 3, es decir siendo $a = m-3$, a es el entero que buscamos y se cumple que $f(m-3) = m$, es decir que todo elemento del codominio tiene una preimagen, por lo tanto f es suryectiva.

Luego f es biyectiva y por esto tiene inversa. La inversa es $f^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f^{-1}(x) = x - 3$.

Esto quiere decir que dado un entero, por ejemplo $a=5$, su imagen es $m=8$, es decir $f(5)=5+3=8$.

Y si tomamos en el codominio 8 su preimagen es 5, $f^{-1}(8)=8-3=5$.

b) Sea $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(x) = x + 3$

La inyectividad se prueba como en el Ejemplo anterior, cambiando enteros por naturales.

Esta función g va de \mathbb{N} en \mathbb{N} , tomando el natural 2, se busca un natural n tal que $g(n) = n + 3 = 2$

El único número que cumple tal condición es -1 que no es un natural, luego 2 no tiene preimagen por g , y g no es suryectiva, entonces g no es biyectiva y por lo tanto no tiene inversa.

c) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 3$

Inyectividad:

Hay que ver que **para todo par de reales distintos sus imágenes son distintas**.

Se demostrará por el absurdo, supondremos que **existe un par de enteros distintos con la misma imagen**:

Sean x y z reales distintos, suponiendo que $f(x) = f(z)$, o sea que $2x - 3 = 2z - 3$, sumando 3 a ambos miembros se tiene que $2x = 2z$ y multiplicando por $\frac{1}{2}$ a ambos miembros implica que $x = z$, que es absurdo porque habíamos supuesto que eran distintos.

Por lo tanto si x y z son reales distintos tienen distinta imagen, por lo tanto la función es inyectiva.

Surjectividad:

Hay que ver que **todo número real del codominio es imagen de algún real del dominio**.

Se demostrará por el método directo, partiendo de un real cualquiera veremos que es imagen de algún real.

Sea y un número real cualquiera, si existe un x real que lo tiene por imagen, debe cumplirse que $y = 2x - 3 \rightarrow x = \frac{y+3}{2}$, para cualquier número real y la expresión $\frac{y+3}{2}$ es un número real, pertenece al dominio.

Entonces $f\left(\frac{y+3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{y+3}{2}\right) - 3 = y$, es decir dado cualquier real y , se encuentra que existe un número real $x = \frac{y+3}{2}$ tal que $y = f(x)$, o sea que todo número real tiene preimagen por esta función, luego f es suryectiva.

Por lo tanto f es biyectiva y tiene inversa que es $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$.

Ejercicios:

18) Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$ conjuntos. Definir una función con dominio A y codominio B , que sea suryectiva.

19) Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$ conjuntos. Definir una función con dominio A y codominio B , que sea inyectiva.

20) Definir conjuntos finitos B, C, D, E y realizar diagramas de flechas para definir una función:

- a) $f: B \rightarrow C$ que sea inyectiva y no suryectiva
- b) $g: D \rightarrow E$ que sea suryectiva y no inyectiva
- c) $f: B \rightarrow C$ que sea biyectiva

21) a) Graficar las siguientes funciones: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 1$.

b) Justifique si son inyectivas y/o suryectivas. Puede demostrarlo siguiendo los últimos ejemplos o dar una justificación geométrica.

22) Estudiar si las siguientes funciones son o no inyectivas y si son o no suryectivas, **demostrando lo que afirma:**

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + 5$

b) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x + 5$

c) $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(x) = x + 5$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$

e) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - 1$

Bibliografía

- L. Oubiña, **Introducción a la Teoría de Conjuntos**, Editorial EUDEBA, Argentina, 1974.
 - S. Lipschutz, **Matemática Finita**, Serie de Compendios Schawm, Ed. Mc Graw- Hill, México.
 - S. Lipschutz y M. Lipson, **2000 problemas resueltos de Matemática discreta**, Serie de Compendios Schawm, Ed. Mc Graw- Hill, España, 2004.
 - R. Espinosa Armenta, **Matemáticas discretas**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010
-