Teoría de Números II

Matemática IV, Facultad de Informática, UNLP.
2019

Números Racionales

Un **número racional** es todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros (o más precisamente, un entero y un natural positivo)
Es decir, una fracción común $\frac{a}{b}$ con *numerador* a y *denominador* b distinto de cero.

El término **racional** alude a una fracción o parte de un todo.

El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$ (o bien Q) que deriva de *cociente* (Quotient en varios idiomas europeos).

En sentido estricto, **número racional** es el conjunto de todas las *fracciones equivalentes* a una dada; de todas ellas, se toma como representante canónico de dicho número racional a la *fracción irreducible.*

Números Racionales

Este conjunto de números incluye a los números enteros.

Cualquier entero n se puede expresar como el número racional $\frac{n}{1}$ debido a eso se escribe frecuentemente $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

También se dice que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ pero técnicamente los racionales contienen un subanillo isomorfo al anillo de los números enteros.

Equivalencia entre fracciones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ si \ y \ sólo \ si \quad ad = bc$$

Orden de los números racionales : Cuando ambos denominadores son positivos

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} si \ y \ sólo \ si \quad ad < bc$$

Si alguno de los denominadores es negativo, las fracciones deben convertirse en otras equivalentes con denominadores positivos, siguiendo las ecuaciones:

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \qquad y \qquad \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$$

Suma:
Se define la suma o adición de dos racionales a la operación que a todo par de números racionales le hace corresponder otro racional de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

La suma es asociativa y conmutativa.

El inverso aditivo u opuesto existe y está dado por: $-(\frac{a}{b}) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Resta:
La operación que a todo par de racionales le hace corresponder su diferencia se llama **resta** o *diferencia* y se la considera operación *inversa* de la suma $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + (-\frac{c}{d})$

Multiplicación:
La multiplicación o producto de dos números racionales está dado por:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Inversos:
El inverso multiplicativo existe en los números racionales y está dado por: $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ con $a \neq 0$

División:
Se define la división o *cociente* de dos racionales r entre s distinto de 0, al producto de r por el inverso de s, esto es:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c}$$

Números Irracionales

Un **número irracional** es un número que no puede ser expresado como cociente de dos enteros, es decir que no puede ser una fracción $\frac{m}{n}$ donde m y n sean enteros (con n diferente de cero)

Números Irracionales - Clasificación

Los números irracionales se clasifican en dos tipos:

Número algebraico:
Son la solución de alguna ecuación algebraica y se representan por un número finito de radicales libres o anidados en algunos casos.

Número trascendente:
No pueden representarse mediante un número finito de raíces libres o anidadas; provienen de las llamadas funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, etc.)

Números Irracionales - Propiedades

Estas son algunas propiedades importantes de los números irracionales

- La suma y la diferencia de un número racional y de un número irracional es un número irracional
- El producto de un racional diferente de cero por un irracional es un número irracional
- El cociente entre un racional no nulo y un irracional, es un número irracional
- El inverso de un número irracional es número irracional

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales incluye tanto a los números racionales como a los irracionales.

Los números reales pueden ser descritos y construidos de varias formas, algunas simples aunque carentes del rigor necesario para los propósitos formales de matemáticas y otras más complejas pero con el rigor necesario para el trabajo matemático formal.

Números Reales

Con los números reales pueden realizarse todo tipo de operaciones básicas (suma, resta, producto, división y además potencias y raíces) con diversas excepciones importantes:

1. No existen raíces de orden par (cuadradas, cuartas, sextas, etc.) de números negativos en números reales
2. La división por cero no está definida (pues cero no posee inverso multiplicativo)
3. No se puede hallar el logaritmo de un número real negativo, cualquiera sea la base de logaritmos