Matemática IV- TP1 - Números

1. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   (a) $z \in Z \leftrightarrow 2z \in Z$
   (b) $z \in Z \leftrightarrow -z \in N$
   (c) $z \in Z \leftrightarrow z^2 \in Z$
   (d) $z \in Z \leftrightarrow z^2 = 1 \in Z$
   (e) $z \in N \leftrightarrow z^2 \in N$
   (f) $z \in N \leftrightarrow -z \notin N$
   (g) $z \in N \leftrightarrow 2z \in N$
   (h) $z \in N \leftrightarrow z + 1 > 0$

2. (a) ¿Hay números naturales n que puedan escribirse en la forma $4m + 1$ y $4t + 3$ simultáneamente?
   (b) ¿ Qué enteros z, $-10 \leq z \leq 10$ se escriben en la forma $4m + 3$, , para algún $m \in Z$? y $4m - 3$?
   (c) Probar que no hay enteros simultáneamente pares e impares

3. Demostrar las siguientes propiedades para a, b, c números enteros :
   (a) $a|a$
   (b) $1|a$ y $a|0$
   (c) Si $a|b$ entonces $a| - b$; $-a|b$ y $-a| - b$
   (d) $a(a + 1)$ es par
   (e) $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$
   (f) $a|b$ entonces $a|bc$
   (g) $a|b$ y $a|c$ entonces $a|b + c$
   (h) $a|b + c$ y $a|b$ entonces $a|c$

4. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   (a) $a|b$ y $b|a$ entonces $|a| = |b|$
   (b) $a|bc$ entonces $a|b$ ó $a|c$
   (c) $a|b$ y $c|b$ entonces $ac|b$
   (d) $a|b + c$ entonces $a|c$ ó $a|b$
   (e) $a|b$ y $b \neq 0$ entonces $|a| \leq |b|$

5. Sean a y b dos números enteros que tienen restos 4 y 7 respectivamente en la división por 11. Hallar los restos de la división por 11 de los siguientes enteros:
   (a) $3a$

(b) $a+b^2$

6. Calcular el máximo común divisor entre:

   (i) $(16,38)$ (ii) $(120,50)$ (iii) $(31,57)$ (iv) $(120,245)$ (v) $(9834,1430)$

   (vi) $(-60,45)$ (vii) $(187,77)$ (viii) $(-187,77)$

7. Probar que si a y b son enteros:

   (a) $(a,1)=1$

   (b) si a es no nulo, $(a,0)=|a|$

   (c) $(a,a)=|a|$

8. Si a un número se lo divide por 4, el resto es 2 y si se lo divide por 3, el resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 12 ?

9. Probar que para cualquier a entero se cumple que a y $a+1$ son coprimos

10. Si $(a,b)=d$; $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|cd$

11. Sean a y b dos enteros coprimos, demostrar que :

    (a) $a+b$ es coprimo con a

    (b) $a+b$ y ab son coprimos

    (c) $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$

12. Si p es primo, calcular (a,p) para cualquier $a \in Z$

13. Sean $a,b \in Z$ y sea p primo. Demostrar que si $p|ab$ entonces $p|a$ ó $p|b$

    Mostrar que ésto no se cumple si p no es primo.

14. Sean u y v números racionales. Probar que:

    (a) $u+v \in Q$ y $u-v \in Q$

    (b) $u.v \in Q$

    (c) Si u es no nulo, $u^{-1} \in Q$

15. Demostrar que dados a y b en Q tales que $a<b$, existe otro número racional x tal que $a<x<b$.

16. Dados $a,b,c,d \in Z$, suponiendo que los denominadores no se anulen y que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ no es cero, probar:

    (a) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ y $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

(b) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ y $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

(c) $\frac{a+c}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

(d) $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

17. Probar que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2

18. Demostrar que si p es primo y $n \in N$, entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional

19. Escriba en la forma binómica los siguientes números:

    a) $\sqrt{-49}$; b) $\sqrt{-20}$; c) $\sqrt{-\frac{9}{16}}$

20. Encuentre el conjugado de los siguientes números:

    $z_1 = -8 + 15i$; $z_2 = 5 - 7i$; $z_3 = 5i$; $z_4 = 9$; $z_5 = m + ni$;

21. Indique la parte real Re(z) y la parte imaginaria Im(z) de los siguientes complejos:

    a) $z = -8 + 15i$ b) $z = 7$

    c) $z = (3 + i) + (5 - 4i)$ d) $z = 3i - (5 - 2i)$

22. La suma de un número complejo y su conjugado es -8 y la suma de sus módulos es 10. De qué números complejos se trata?

23. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo es 5. De qué números complejos se trata?

24. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica :

    a) $\frac{1+3i}{3-i}$ b) $\frac{1-i}{(1+i)^2}$ c) $\frac{2-5i}{4+2i}$

25. Encuentre x e y tales que:

    a) $x - 15i = 9 + 5yi$; b) $2x + 3yi = 6 + yi$; c) $\frac{x+2i}{1-i} + yi = 1$

26. Encontrar el valor de k para que el complejo $\frac{2-(1+k)i}{1-ki}$ sea un n úmero real.

27. Encontrar el valor de h para que el complejo $\frac{1+3hi}{7+(h-2)i}$ sea un imaginario puro.

28. Graficar en el plano complejo:

    a) $\{z \in C : |z| = 1\}$ b) $\{z \in C : |z - (3 + 4i)| = 2\}$ c) $\{z \in C : |z + 5| \leq 1\}$
    d)$\{z \in C : |z - 2i| \geq 3\}$ e) $\{z \in C : Im(z) \geq 3\}$ f) $\{z \in C : Re(z) = 2\}$
    g) $\{z \in C : |z - (-1 + i)| \leq 2 \& Im(z) \leq 0\}$ h) $\{z \in C : |z + i| \geq 4 \& Re(z) \geq 4\}$

29. Calcular las siguientes potencias:

a) i^{489} b) $-i^{1026}$ c) i^{2051} d) i^{628} e) $(3i)^{68}$ f) $(-5i)^{128}$ g) $(15i)^{1024}$

30. Encontrar las formas de par ordenado, trigonométrica y exponencial de los siguientes complejos en forma binómica:

$z_1 = 3+3i$ $z_2 = -1+i$ $z_3 = 5+4i$ $z_4 = 9$ $z_5 = 5i$ $z_6 = -7$
$z_7 = -4-4i$ $z_8 = -8i$ $z_9 = 2-2i$ $z_{10} = 3-4i$

31. Realizar las siguientes operaciones con los complejos del punto anterior:

a) $z_1 + z_7$ b) $z_5 - z_3$ c) $z_9.z_6$ d) z_8/z_{10} e) $z_3 + z_6$ f) $z_2 - z_6$
g) $z_3.z_{10}$ h) z_1^3 i) z_9^9 j) z_5^{15} k) z_{10}^3

l) hallar las raíces cuartas de z_2

m) hallar las raíces cúbicas de z_4

n) hallar las raíces séptimas de z_8

ñ) hallar las raíces cúbicas de z_5

o) hallar las raíces quintas de z_6

p) hallar las raíces séptimas de i