

Modulo 4

Estudio de funciones

1. Valores extremos de funciones

En muchos casos las funciones que se presentan no pueden graficarse hallando unos pocos puntos, ya que no es fácil deducir el comportamiento de la función entre ellos. Por eso analizaremos criterios para encontrar puntos claves o representativos que nos permitan esquematizar el comportamiento de una función cualquiera.

Definiciones:

Sea $f(x)$ definida en un dominio D :

$f(x)$ alcanza en $x = a, a \in D$ un **máximo absoluto** en $D \Leftrightarrow f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in D$

$f(x)$ alcanza en $x = a, a \in D$ un **mínimo absoluto** en $D \Leftrightarrow f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D$

$f(x)$ alcanza en $x = a, a \in D$ un **máximo local** \Leftrightarrow existe un intervalo abierto $I \subset D / f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in I$

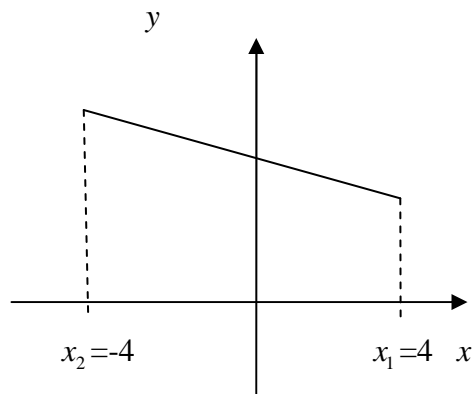
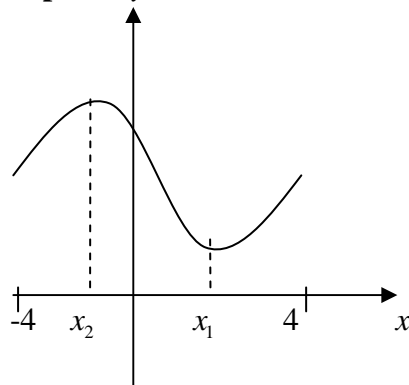
$f(x)$ alcanza en $x = a, a \in D$ un **mínimo local** \Leftrightarrow existe un intervalo abierto $I \subset D / f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in I$

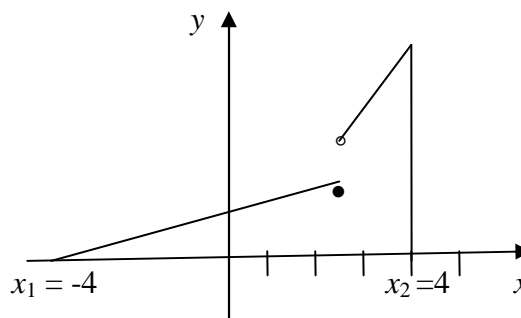
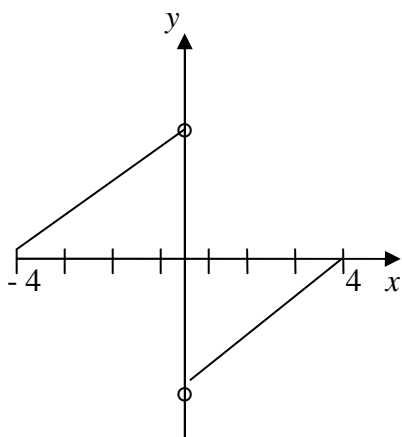
Teorema de máximos y mínimos para funciones continuas:

Si f es continua en todo punto de un intervalo cerrado I , entonces f alcanza un máximo absoluto M y un mínimo absoluto m en puntos de I .

Es decir que existen puntos x_1 y x_2 en el intervalo I , tales que $f(x_1) = m$ y $f(x_2) = M$ y $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in I$

Ejemplos:





En el primer y segundo ejemplos vemos funciones continuas con máximo y mínimo en el intervalo $[-4, 4]$, en el primer caso en puntos interiores al intervalo y en el segundo en puntos extremos.

En el tercer y cuarto ejemplos vemos funciones discontinuas, en el tercero sin máximo ni mínimo y en el cuarto con máximo y mínimo. Es decir que para funciones no continuas no podemos saber si habrá o no máximos o mínimos.

Veremos entonces estrategias para localizar máximos y mínimos de funciones de manera de empezar a conocer su comportamiento.

Teorema de la primera derivada para valores extremos locales:

Sea f una función derivable en (a, b) . Si f tiene un máximo o un mínimo local en un punto c del intervalo, entonces :

$$f'(c) = 0$$

Demostración:

Como f es derivable en todos los puntos del intervalo (a, b) , veremos que si f tiene un máximo o un mínimo local en $c \in (a, b)$, entonces $f'(c)$ no puede ser negativa ni positiva (y por lo tanto $f'(c)$ deberá ser 0).

Supongamos que f tiene un máximo local en $x=c$, $c \in (a, b)$, por lo tanto $f(x) \leq f(c)$ para todos los valores de x que estén cercanos a c , o dicho de otro modo, para algún entorno del punto c .

Entonces $f(x) - f(c) \leq 0$ en ese entorno.

Además $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ ya que c es un punto interior de (a, b) , entonces:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ ya que } f(x) - f(c) \leq 0 \text{ y } x - c > 0$$

Análogamente

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ ya que } f(x) - f(c) \leq 0 \text{ y } x - c < 0$$

Por lo tanto la única posibilidad es $f'(c)=0$.

Puntos críticos:

Llamaremos puntos críticos de f a los puntos interiores del dominio de f donde la derivada sea cero o no esté definida.

Por lo tanto, si una función f está definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, los únicos puntos donde f puede tener sus extremos locales o globales son:

- *puntos críticos en el interior del intervalo*
- *los extremos del intervalo, esto es: en a o en b*

La mayor parte de las búsquedas de valores extremos requieren hallar valores extremos absolutos de funciones continuas en intervalos cerrados. El primer teorema nos asegura que tales valores existen, el segundo nos dice que sólo pueden estar en los puntos críticos o en los extremos del intervalo. Esos puntos suelen ser tan pocos que podemos enumerarlos y calcular los valores correspondientes de la función para ver cuáles son el mayor y el menor.

Ejemplo:

Hallar máximo y mínimo absolutos de $f(x) = x^2$, en el intervalo $[-2,1]$

La función es derivable en todo su dominio, así que el único punto crítico es donde $f'(c)=2x=0$.

El punto crítico es $x=0$. Por lo tanto los valores a analizar son el 0 y los extremos del intervalo, es decir $x=-2$ y $x=1$.

$$f(-2)=4$$

$$f(0)=0$$

$$f(1)=1$$

Por lo tanto la función tiene máximo en $x=-2$ y mínimo en $x=0$.

Teorema de Rolle:

Supongamos que la función $y = f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en todo punto del intervalo (a, b) .

Si $f(a)=f(b)=0$ entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$

Demostración:

Como f es continua, toma valores máximo y mínimo en $[a,b]$. Estos valores los toma en puntos críticos o extremos.

Como f es derivable en (a,b) , los puntos críticos son sólo los puntos donde la derivada es 0, ya que la derivada existe en todos los puntos de (a,b) .

Caso 1) Si el máximo o mínimo se da en un punto c del interior, entonces por el teorema anterior la derivada se anula en ese punto, $f'(c)=0$ y por lo tanto se cumple el teorema.

Caso 2) Si ni el máximo ni el mínimo se dan en el interior, quiere decir que ambos se dan en los extremos, por lo tanto f es una función constante y en consecuencia $f'(x)=0$ en todos los puntos del intervalo y podemos tomar a c como cualquier punto del intervalo, por lo tanto se cumple el teorema también en este caso.

Ejemplo:

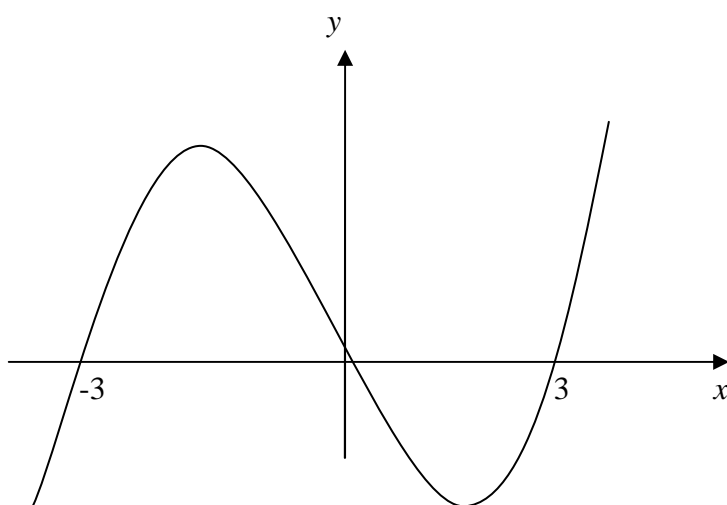
La función polinomial $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$ es continua en todos los puntos del intervalo $[-3,3]$ y derivable en $(-3,3)$.

$$\text{Veamos que } f(-3) = \frac{-27}{3} - 3(-3) = 0 \quad \text{y} \quad f(3) = \frac{27}{3} - 3(3) = 0$$

Por lo tanto en virtud del Teorema de Rolle debe existir un punto interior de derivada nula.

$$\text{Efectivamente } f'(x) = x^2 - 3 \quad \text{y} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

En este caso existen dos puntos donde la derivada se anula



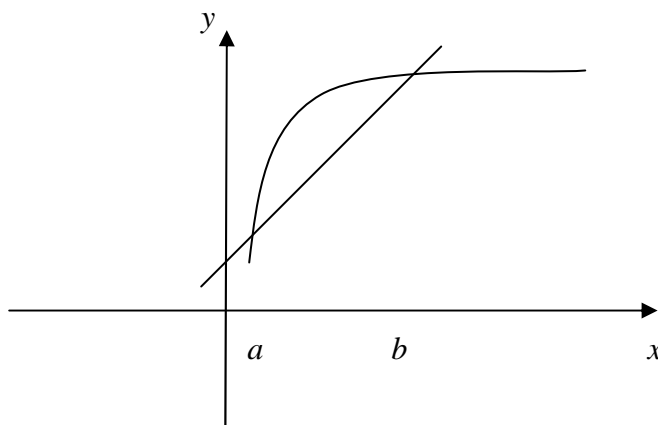
Teorema del valor medio:

Supongamos que $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en (a,b) . Entonces existe al menos un punto c en (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración:

Graficamos f como una curva en el plano y trazamos una recta que pasa por los puntos de coordenadas $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Esta recta tiene ecuación: $g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

La diferencia entre las gráficas de f y g podemos expresarla como una función $h(x) = f(x) - g(x)$

La función h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , por ser suma de continuas y derivables además como

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

Por lo tanto h cumple las hipótesis del teorema de Rolle, entonces existe un punto intermedio c donde la derivada de h es cero :

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow \quad h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como queríamos demostrar.

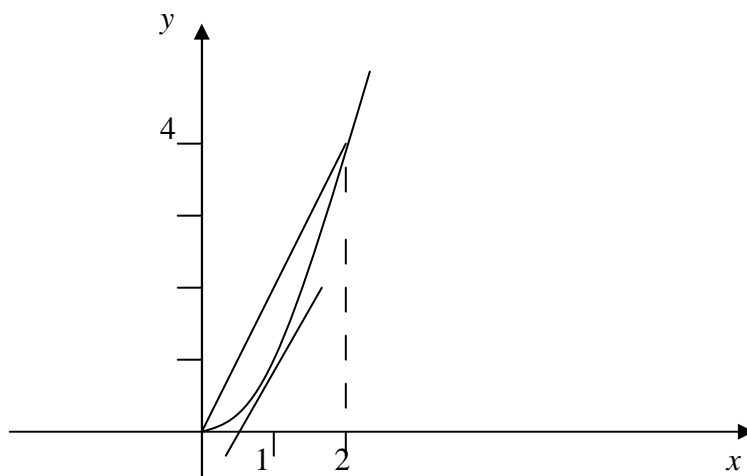
Ejemplo:

Si tomamos nuevamente la función $f(x) = x^2$, en el intervalo $[0, 2]$, sabemos que es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

Además $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$ por lo tanto en virtud del Teorema del Valor Medio debe existir un punto c en $(0, 2)$ en el que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ como } f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f'(c) = 2c$$

Por lo tanto c debe cumplir que $2c = \frac{4-0}{2-0} = 2 \Rightarrow c = 1$



Corolario 1:

Las funciones con derivada cero son constantes

Si una función f definida en un intervalo I es tal que $f'(x)=0$ en todo punto de I entonces $f(x) = c$ para todo x en I , donde c es una constante.

La demostración se deja como ejercicio. La idea es tomar dos puntos cualesquiera en I , y utilizando el teorema del valor medio, mostrar que la función toma el mismo valor en ambos puntos y por lo tanto en todos.

Corolario 2:

Las funciones con derivadas iguales difieren en una constante

Si $f'(x)=g'(x)$ en todo punto de un intervalo I , entonces existe una constante c tal que $f(x)=g(x)+c$ para todo x en I .

La demostración se deja como ejercicio. La idea es construir una función h , como diferencia de f y de g y en consecuencia de derivada nula. Luego aplicar el corolario 1.

Ejemplo:

Hallar una función $f(x)$ cuya derivada sea $\sin x$ y cuya gráfica pase por el punto $(0,2)$.

Si consideramos $g(x) = -\cos x$, su derivada es $\sin x$, luego f tiene la misma derivada que g .

Por lo tanto, el corolario asegura que existe una constante c tal que $f(x) = g(x) + c$, o lo que es lo mismo $f(x) = -\cos x + c$.

El valor de c puede encontrarse a partir de la condición $f(0)=2$:

$$f(0) = -\cos 0 + c = 2, \text{ lo que implica } 1+c = 2, \text{ por lo tanto } c = 1.$$

Así, la función f buscada es: $f(x) = -\cos x + 1$.

Actividades:

1) Hallar los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados. Justifique indicando el procedimiento utilizado. Grafique.

$$a. f(x) = x^3 - 3x + 3 \quad \text{en } \left[\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

$$b. f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad \text{en } [-1, 5]$$

$$c. f(x) = (x-2)^2 - 4 \quad \text{en } [0, 5]$$

$$d. f(x) = \frac{1}{x} + 1 \quad \text{en } [1, 3]$$

$$e. f(x) = \begin{cases} (2-x)^2 - 4 & \text{si } x \leq 5 \\ 10-x & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad \text{en } [1, 6]$$

$$f. f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 4 & \text{si } x \leq 4 \\ -(x-6)^2 + 4 & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad \text{en } [0, 8]$$

2) Se tuerce un trozo de alambre de 10m, de manera que forme un rectángulo. Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?

3) Un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón de 80 cm de largo por 50 cm de ancho, cortando cuadrados en las esquinas y doblando los lados hacia arriba. Se desea conocer la longitud de los cuadrados que se deben cortar en las esquinas para que la caja tenga el mayor volumen posible.

4) Un terreno rectangular se encuentra en la orilla de un río y se desea delimitarlo de manera que no se utilice cerca de lo largo de la orilla. Si el material para la cerca de los lados cuesta \$36 por metro colocado, y \$54 por metro colocado para el lado paralelo al río, determine las dimensiones del terreno de mayor área que pueda limitarse con \$5400 de cerca.

5) Determine un número en el intervalo $[1/3, 2]$ tal que la suma del número y su inverso sea un
a) mínimo b) máximo.

6) Determine un número del intervalo $[-1, 1]$ tal que la diferencia entre el número y su cuadrado sea
a) mínimo b) máximo

7) La función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x=0$. Contradice esto el Teorema de la primera derivada? Justifique

8) Por qué la conclusión del Teorema de la primera derivada podría no cumplirse si c fuera un punto extremo de la función?

9) Hallar los valores máximos y mínimos locales en los dominios dados e indicar en qué puntos se alcanzan. Indicar además cuáles de estos valores son máximos o mínimos absolutos.

$$a. f(x) = x^2 - 4 \quad \text{en } [-2, 2]$$

$$b. f(x) = x^2 - 4 \quad \text{en } [-2, 2)$$

$$c. f(x) = x^2 - 4 \quad \text{en } [-2, \infty)$$

$$d. f(x) = 2 - 2x^2 \quad \text{en } \mathbb{R}$$

10) Indicar cuáles de las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema del Valor Medio y cuáles no. Justifica:

$$a. f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad \text{en } [-1, 8]$$

$$b. f(x) = \sqrt{x(1-x)} \quad \text{en } [0, 1)$$

$$c. f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

11) La función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Vale 0 en $x=0$ y en $x=1$, y su derivada nunca es 0. Contradice el Teorema de Rolle? Justifica.

12) a) Hallar los ceros o raíces de los siguientes polinomios y los de sus primeras derivadas:

$$i) f(x) = x^2 - 4$$

$$ii) f(x) = x^2 + 8x + 15$$

$$iii) f(x) = (x-2)^2(x-1)$$

b) Utiliza el Teorema de Rolle para demostrar que entre cualesquiera dos ceros de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ hay un cero de $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$

13) Analice si las hipótesis del Teorema de Rolle son satisfechas por la función f en el intervalo indicado. Interprete gráficamente.

$$f(x) = 2\operatorname{sen}(3x) \quad \text{en } [0, \pi/3]$$

14) Verifique que se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor Medio para las siguientes funciones y encuentre el valor de c correspondiente:

$$a. f(x) = 4\cos x \quad \text{en } [\pi/3, 2\pi/3]$$

$$b. f(x) = 3\operatorname{sen} \frac{x}{2} \quad \text{en } [0, \pi]$$

2. Funciones crecientes y decrecientes

Definiciones:

Sea $f(x)$ definida en un intervalo I y x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en I :

$f(x)$ es **creciente** en I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$f(x)$ es **decreciente** en I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

Corolario 3:

Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

Si $f' > 0$ en cada punto de (a,b) entonces f es creciente en $[a,b]$

Si $f' < 0$ en cada punto de (a,b) entonces f es decreciente en $[a,b]$

Demostración:

Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera en $[a,b]$, con $x_1 < x_2$, entonces por el Teorema del Valor medio, existe un punto c en $[x_1, x_2]$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow (x_2 - x_1)f'(c) = f(x_2) - f(x_1)$$

Si $f' > 0$, como $(x_2 - x_1) > 0$, se tiene que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ y en consecuencia f es creciente

Si $f' < 0$, como $(x_2 - x_1) > 0$, se tiene que $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ y en consecuencia f es decreciente

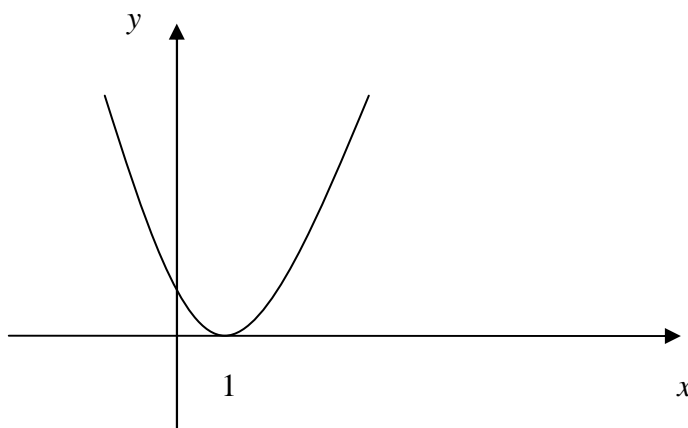
Ejemplo:

Sea $f(x) = (x-1)^2$, entonces $f'(x) = 2(x-1) = 2x - 2$

Analizamos el signo de la derivada:

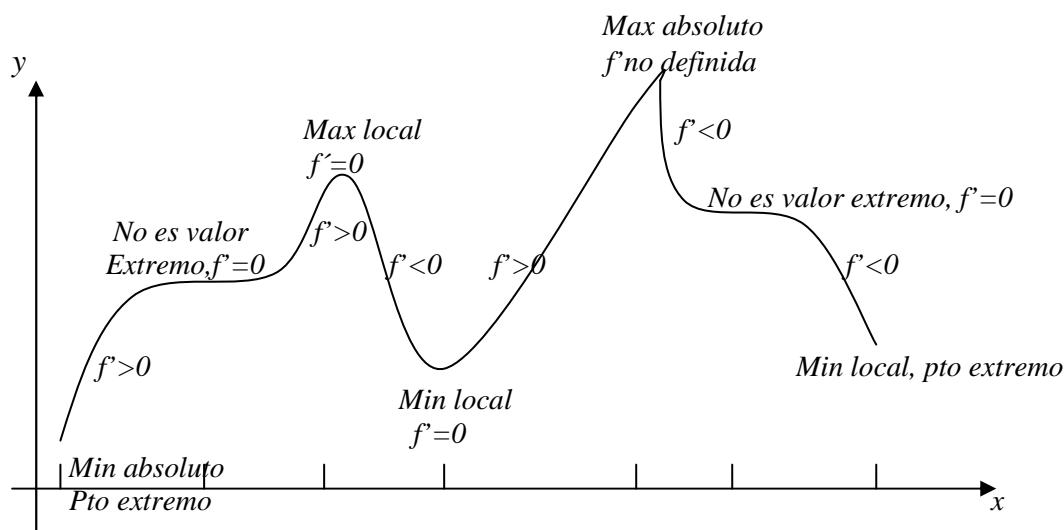
$$2x-2 < 0 \text{ en } (-\infty, 1) \text{ y } 2x-2 > 0 \text{ en } (1, +\infty)$$

Por lo tanto en virtud del corolario 3 la función es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$. En efecto, la gráfica de f es:



Como se observa en el siguiente gráfico una función puede tener valores extremos locales en algunos puntos críticos y en otros no. La clave es el signo de f' en un entorno inmediato del punto. Conforme x se mueve de izquierda a derecha, los valores de f crecen donde $f' > 0$ y decrecen donde $f' < 0$.

- En los puntos donde f tiene un valor mínimo, vemos que $f' < 0$ a la izquierda y $f' > 0$ a la derecha de un entorno del punto. Esto significa que la curva es decreciente a la izquierda de un valor mínimo y creciente a la derecha. Si el punto donde f tiene un valor mínimo es un extremo del intervalo, sólo se considera un entorno a la izquierda o derecha según corresponda.
- Análogamente en los puntos donde f tiene un valor máximo, vemos que $f' > 0$ a la izquierda y $f' < 0$ a la derecha de un entorno del punto. Esto significa que la curva es creciente a la izquierda de un valor máximo y decreciente a la derecha.



Estas observaciones conducen a un criterio para hallar extremos locales:

Criterio de la primera derivada para extremos locales:

Sea f una función continua y sea c un punto crítico:

- Si $f' > 0$ para $x < c$ y $f' < 0$ para $x > c$, entonces f tiene un máximo local en c .
- Si $f' < 0$ para $x < c$ y $f' > 0$ para $x > c$, entonces f tiene un mínimo local en c .
- Si f' no cambia de signo en c entonces f no tiene un valor extremo en c .

Sea f una función continua en $[a, b]$, entonces:

- Si $f' < 0$ para $x > a$ entonces f tiene un máximo local en a .
- Si $f' > 0$ para $x > a$ entonces f tiene un mínimo local en a .
- Si $f' < 0$ para $x < b$ entonces f tiene un mínimo local en b .
- Si $f' > 0$ para $x < b$ entonces f tiene un máximo local en b .

Ejemplo 1:

Hallar los puntos críticos de $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-4)$. Identificar los intervalos en los cuales f crece o decrece. Hallar los valores extremos absolutos y locales de f .

La función f está definida para todos los valores reales, y es una función continua.

Escribimos la función $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-4) = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$ y hallamos su derivada:




$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

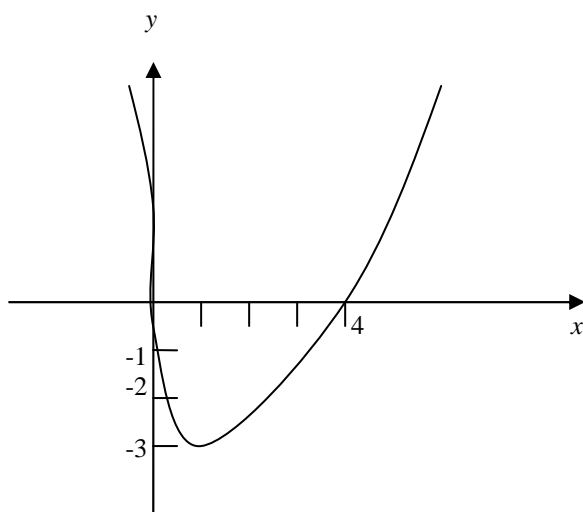
La derivada es nula en $x = 1$, y no está definida para $x = 0$.

Por lo tanto los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 0$.

Son los únicos puntos en los que f podría tener un valor extremo absoluto o local.

Dividimos entonces el eje x en 3 intervalos : $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$ y analizamos el signo de f' en esos intervalos, tomando cualquier valor de x en cada uno (recordemos que entre dos ceros consecutivos, f' conserva su signo). Indicaremos en un cuadro el comportamiento de f , indicando con flecha hacia arriba cuando f crece y con flecha hacia abajo cuando f decrece.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de f'	-	-	+
Comportamiento de f			
Valores extremos		0 No es valor extremo	1 Min local y absoluto



Ejemplo 2:

Hallar los puntos críticos de $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$. Identificar los intervalos en los cuales f crece o decrece. Hallar los valores extremos absolutos y locales de f .

La función f está definida para todos los valores reales, y es una función continua.

Hallamos su derivada:





$$f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$$

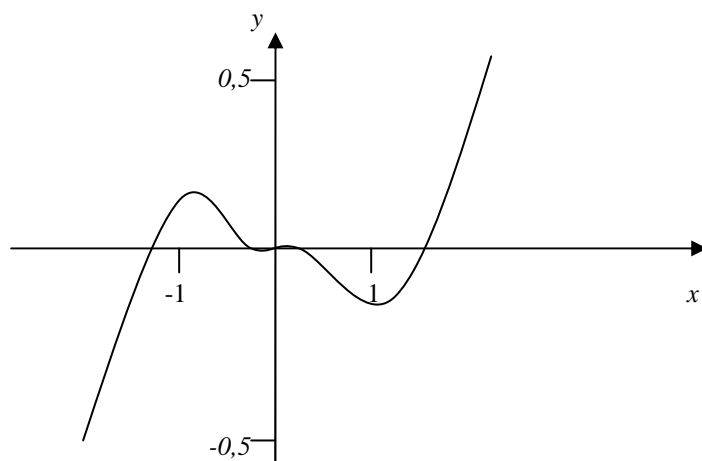
La derivada es 0 en $x=1$, en $x=-1$ y en $x=0$.

Por lo tanto los puntos críticos son $x = 1$, $x = -1$ y $x = 0$.

Son los únicos puntos en los que f podría tener un valor extremo absoluto o local.

Dividimos entonces el eje x en 4 intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$ y analizamos el signo de f' en esos intervalos. Indicaremos en un cuadro el comportamiento de f , indicando con flecha hacia arriba cuando f crece y con flecha hacia abajo cuando f decrece.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de f'	+	-	-	+
Comportamiento de f				
Valores extremos		-1	0	1
		Max local	No es valor extremo	Min local



Notemos que en este caso los extremos son locales, no hay extremos absolutos.

Actividades:

15) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y sus extremos locales, indicando si alguno de ellos es absoluto:

$$a. f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$$

$$b. f(x) = x^3 - 32x + 4$$

$$c. f(x) = 2 - |x - 2|$$

$$d. f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

$$e. f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$f. f(x) = \frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$g. f(x) = 3\cos\frac{x}{2} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

16) Trazar la gráfica de una función que cumpla:

- a. $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f'(x)>0$ para los valores de x menores que 1 y $f'(x)<0$ para los valores de x mayores que 1
- b. $f(1)=1$, $f'(1)=0$ y $f'(x)<0$ para todo $x \neq 1$
- c. tiene un mínimo local en (1,1) y tiene un máximo local en (3,3)
- d. tiene máximos locales en (1,1) y en (3,3)

17) Encontrar los puntos críticos de las funciones cuyas derivadas se listan a continuación. Dar intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos:

$$a. f'(x) = x(x-1)$$

$$b. f'(x) = (x-1)^2(x+2)$$

$$c. f'(x) = x^{-\frac{1}{2}}(x-3)$$

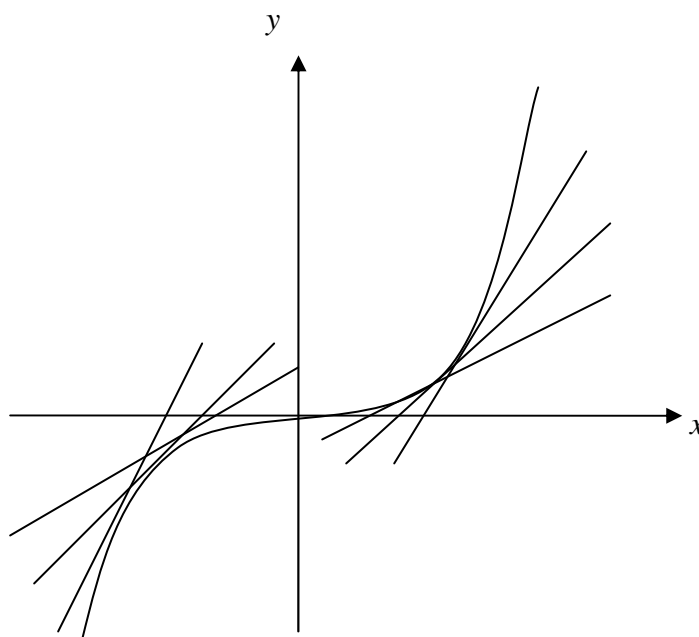
3. Concavidad

Hemos visto la importancia de la primera derivada para localizar extremos de una función, y conocer parte de su comportamiento. **Una función derivable en un intervalo abierto puede tener valores extremos sólo en los puntos críticos. Sin embargo una función puede tener puntos críticos que no sean extremos.**

Esta información se recupera de la derivada, como se ve en el ejercicio 17 basta conocer la derivada de una función para conocer valores extremos y los intervalos donde la función crece o decrece.

Veremos ahora cómo determinar la manera en que la gráfica de $f(x)$ se “tuerce”. Por ejemplo si observamos la gráfica de $y = x^3$, vemos que antes del 0 y después del 0 la gráfica se tuerce en forma diferente. Es decir que cuando nos acercamos al cero por la izquierda las tangentes a la curva quedan siempre por encima de la curva, es decir que las pendientes de las tangentes decrecen, y cuando nos movemos del origen hacia la derecha, las tangentes a la curva quedan siempre por debajo de la curva, es decir que las pendientes de las tangentes crecen.

Estamos analizando entonces el crecimiento o decrecimiento de la derivada de f y por lo tanto necesitaremos encontrar también intervalos de crecimiento y decrecimiento de f' .



Definición:

La gráfica de una función derivable $y = f(x)$ es **cóncava hacia arriba** en todo intervalo donde f' es creciente, y es **cóncava hacia abajo** en todo intervalo donde f' es decreciente.

Para analizar el crecimiento y decrecimiento de f' , usaremos el corolario 3 del Teorema del Valor Medio para funciones dos veces derivables, es decir que sabemos que:

$$f' \text{ crece si } f'' > 0 \text{ y } f' \text{ decrece si } f'' < 0.$$

Criterio de la segunda derivada para concavidad:

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo I :

- Si $f'' > 0$ en I , la gráfica de f en I es cóncava hacia arriba.
- Si $f'' < 0$ en I , la gráfica de f en I es cóncava hacia abajo.

Observación:

Si analizamos ahora el comportamiento de f' , para una función dos veces derivable, podemos aplicar el Criterio de la Primera derivada para f' , y diremos entonces que si f' tiene un extremo en $x = c$ entonces $f''(c) = 0$. Es decir que f' cambia de creciente a decreciente o de decreciente a creciente en el punto $x = c$. Por el criterio de la segunda derivada, esto nos dice que f cambia de concavidad en $x = c$.

Definición:

Un punto donde la gráfica de una función tiene una recta tangente y la concavidad cambia se llama **punto de inflexión**.

Si c es un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$, o bien, $f''(c)$ no está definida.

Ejemplo :

Hallar los puntos críticos de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$. Identificar los intervalos en los cuales f crece o decrece. Hallar los valores extremos absolutos y locales de f . Hallar posibles puntos de inflexión y los intervalos de concavidad.

La función f está definida para todos los valores reales de x y es continua y derivable

Hallamos su derivada:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

La derivada es 0 en $x=3$ y en $x=0$. Por lo tanto los puntos críticos son $x=3$ y $x=0$.









Hallamos la segunda derivada:

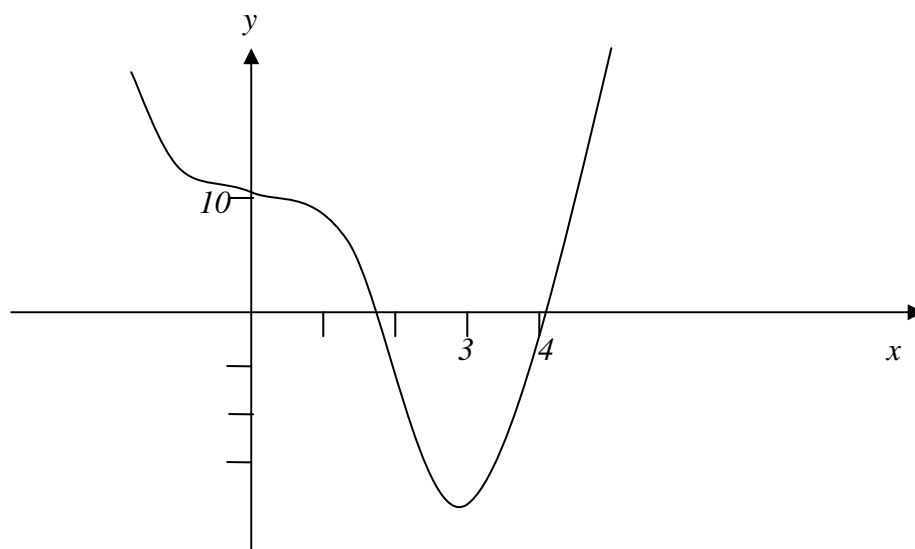
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

La derivada segunda se anula en $x=0$ y en $x=2$. Por lo tanto esos son los posibles puntos de inflexión.

Dividimos entonces el eje x , teniendo en cuenta los puntos críticos y los posibles puntos de inflexión en 4 intervalos : $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, +\infty)$ y analizamos el signo de f' y el de f'' en esos intervalos. Tomamos todos los puntos para hacer una sola tabla, sólo por una cuestión práctica, aunque ya sabemos que en $x=2$ no cambiará el crecimiento de f , también sabemos que en $x=3$ no cambiará la concavidad.

Indicaremos la concavidad de f con \cap , cuando es cóncava hacia abajo y con \cup cuando es cóncava hacia arriba.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de f'	-	-	-	+
Comportamiento de f (crecimiento)				
Signo de f''	+	-	+	+
Concavidad de f				
Valores extremos		0	2	3
		No es valor extremo		Min local
Puntos de inflexión	Es punto de inflexión	Es punto de inflexión		



4. Estudio y gráfico de funciones:

Para graficar funciones debe hacerse un estudio general que involucra todos los aspectos estudiados hasta ahora. En los ejemplos previos las funciones tomadas han sido elegidas para que puedan ser graficadas con el estudio de la primera y segunda derivada, pero veremos otros casos en los que hace falta analizar más elementos.

Para el estudio general incluiremos los siguientes pasos

- Estudio y determinación del dominio
- Estudio de la continuidad: puntos de discontinuidad y existencia de asíntotas verticales.
- Comportamiento en el infinito y existencia de asíntotas horizontales.
- Cálculo de la primera derivada y determinación de su dominio. Determinación de puntos críticos y puntos extremos si los hubiera.
- Cálculo de la segunda derivada y determinación de su dominio. Determinación de puntos de derivada segunda nula o donde esta no existe.
- Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Clasificación de los puntos críticos (máximos y mínimos locales y/o absolutos)
- Determinación de los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
- Intersecciones con los ejes coordenados cuando sea posible
- Con esta información realizamos la gráfica de la función, señalando las características esenciales que surgen del estudio.

Ejemplo 1:

Estudiar la función $f(x) = 2x + \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ y graficarla.

- Estudio y determinación del dominio:

La función no está definida en los puntos que anulan el denominador, por lo tanto hallamos las raíces de $x^2 - 3x + 2$, que son $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$, por lo tanto $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

- Estudio de la continuidad: puntos de discontinuidad y existencia de asíntotas verticales:

Podemos llevar la función a su forma estandar, ya que es una función racional, escribiendo:

$$f(x) = 2x + \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = 2x + \frac{1}{x-2}$$

podemos simplificar ya que $x = 1$ no pertenece al dominio.

Analizamos entonces el comportamiento en $x = 1$ y en $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + \frac{1}{(x-2)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + \frac{1}{(x-2)} = 1$$

Entonces $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, por lo tanto f presenta una discontinuidad evitable en $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + \frac{1}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x(x-2)+1}{x-2} = +\infty \quad \text{ya que el numerador tiende a 1 y el}$$

numerador tiende a cero con valores positivos.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + \frac{1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x(x-2)+1}{x-2} = -\infty \quad \text{ya que el numerador tiende a 1 y el denominador tiende a cero con valores negativos.}$$

Por lo tanto no existe el $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, presentando una discontinuidad inevitable en $x=2$.
Decimos que en $x=2$ hay una asíntota vertical.

- Comportamiento en el infinito y existencia de asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \frac{1}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2x-4 + \frac{1}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{1}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2x-4 + \frac{1}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = +\infty$$

Por lo tanto f no presenta asíntotas horizontales, recordemos que para que esto ocurra los límites tendiendo a infinito deben ser números reales.

- Cálculo de la primera derivada y determinación de su dominio. Determinación de puntos críticos y puntos extremos si los hubiera.

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{(x-2)^2} \quad \text{por lo tanto el dominio de } f \text{ es el mismo que el de } f'$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\text{las raíces de ese polinomio son: } x_1 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y } x_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Por lo tanto los puntos críticos son } x_1 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y } x_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Cálculo de la segunda derivada y determinación de su dominio. Determinación de puntos de derivada segunda nula o donde esta no existe.

$$f''(x) = \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3} \quad \text{nuevamente tiene el mismo dominio que } f$$











Igualamos a cero para encontrar posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} = 0 \quad \text{la segunda derivada no se anula para ningún punto del dominio, y está definida para todos los puntos del dominio, por lo tanto no hay puntos de inflexión.}$$

- Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Clasificación de los puntos críticos (máximos y mínimos locales y/o absolutos)
- Determinación de los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

Estos puntos los analizamos juntos, dividiendo la recta real en los intervalos que quedan determinados con los puntos críticos, puntos de discontinuidad y con los posibles puntos de

inflexión si los hubiera, en este caso tomamos sólo los puntos críticos y los de discontinuidad:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$	$(2, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
Signo de f'	+	+	-	-	+
Comportam. de f (crecimiento)					
Signo de f''	-	-	-	+	+
Concavidad de f					
Valores extremos	1	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ <i>Max local</i>	2	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ <i>Min local</i>	
Puntos de inflexión	<i>No posee</i>				

Concluimos que:

- ♦ la función es creciente en $(-\infty, 1)$, $(1, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ y en $(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
- ♦ la función es decreciente en $(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$ y en $(2, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2})$
- ♦ presenta un máximo local en $(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 4 - 2\sqrt{2})$
- ♦ presenta un mínimo local en $(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 4 + 2\sqrt{2})$
- ♦ la función es cóncava hacia arriba en $(2, \infty)$
- ♦ la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$
- ♦ la función no presenta puntos de inflexión

- Intersecciones con los ejes coordenados:

Eje y:

$$f(0) = 2 \cdot 0 + \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{la curva pasa por el punto } (0, -1/2)$$

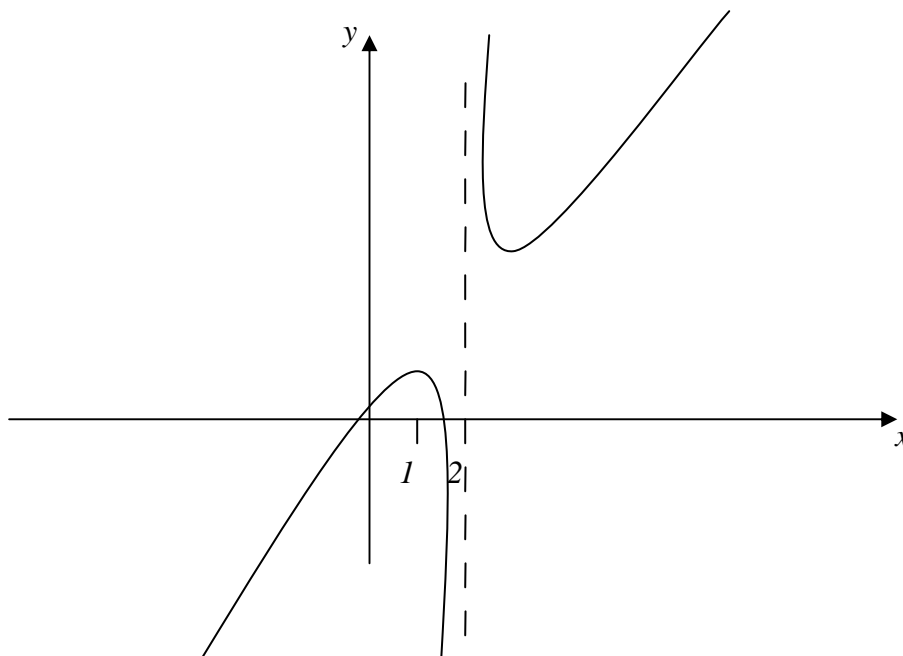
Eje x:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 4x + 1}{x-2} = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La curva pasa por los puntos $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ y $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

- Con esta información realizamos la gráfica de la función, señalando las características esenciales que surgen del estudio.



Ejemplo 2:

Estudiar la función $f(x) = \text{sen}x$ y graficarla.

- Estudio y determinación del dominio:

La función está definida para todos los números reales por lo tanto $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Notemos que la función es impar ya que $-\text{sen}x = \text{sen}(-x)$

- Estudio de la continuidad: puntos de discontinuidad y existencia de asíntotas verticales:

La función es continua en todo su dominio, ya que: $\lim_{x \rightarrow x_0} \text{sen}x = \text{sen}x_0$

Por lo tanto no presenta asíntotas verticales.

- Comportamiento en el infinito y existencia de asíntotas horizontales:

La función es periódica por lo tanto oscila cuando x tiende a infinito y en consecuencia

$$\neg \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{sen}x$$

Por lo tanto f no presenta asíntotas horizontales.

- Cálculo de la primera derivada y determinación de su dominio. Determinación de puntos críticos y puntos extremos si los hubiera.

$f'(x) = \cos x$ por lo tanto el dominio de f es el mismo que el de f'









Por ser una función periódica de período 2π , podemos tomar para el análisis el intervalo $[0, 2\pi]$. Por lo tanto los puntos críticos son $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}\pi$

- Cálculo de la segunda derivada y determinación de su dominio. Determinación de puntos de derivada segunda nula o donde esta no existe.

$f''(x) = -\sin x$ nuevamente tiene el mismo dominio que f

Igualamos a cero para encontrar posibles puntos de inflexión, y obtenemos: $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi$

- Determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Clasificación de los puntos críticos (máximos y mínimos locales y/o absolutos)
- Determinación de los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
Signo de f'	+	-	-	+
Comportam. de f (crecimiento)				
Signo de f''	-	-	+	+
Concavidad de f				
Valores extremos	$\frac{\pi}{2}$ <i>Max local</i>	π	$\frac{3}{2}\pi$ <i>Min local</i>	
Puntos de inflexión	<i>punto de inflexión</i>			

Concluimos que:

- ♦ la función es creciente en $(0, \frac{\pi}{2})$ y en $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
- ♦ la función es decreciente en $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$
- ♦ presenta un máximo local en $(\frac{\pi}{2}, 1)$
- ♦ presenta un mínimo local en $(\frac{3}{2}\pi, -1)$

- ♦ la función es cóncava hacia arriba en $(\pi, 2\pi)$
- ♦ la función es cóncava hacia abajo en $(0, \pi)$
- ♦ la función presenta un punto de inflexión en $x = \pi$

- Intersecciones con los ejes coordenados:

Eje y:

$$f(0) = \sin 0 = 0 \Rightarrow \text{la curva pasa por el punto } (0,0)$$

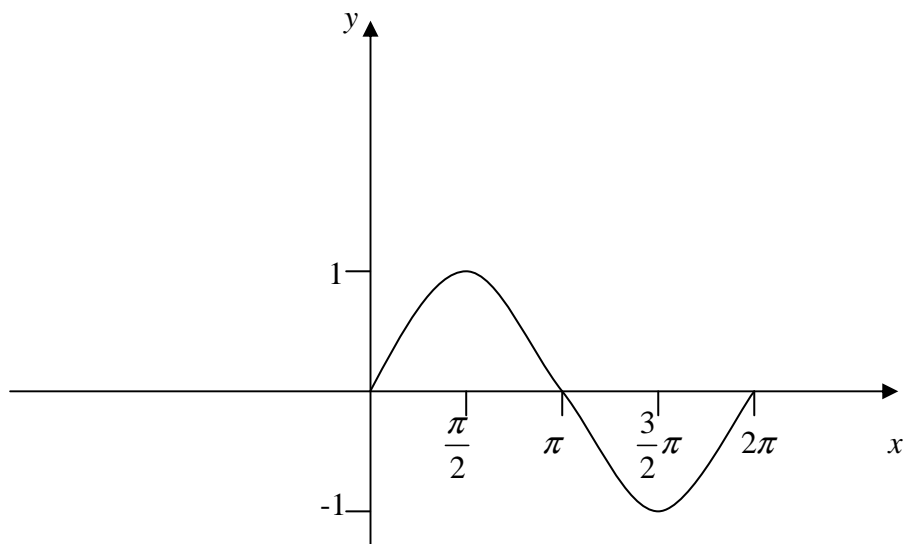
Eje x:

$$f(x) = \sin x = 0 \Rightarrow$$

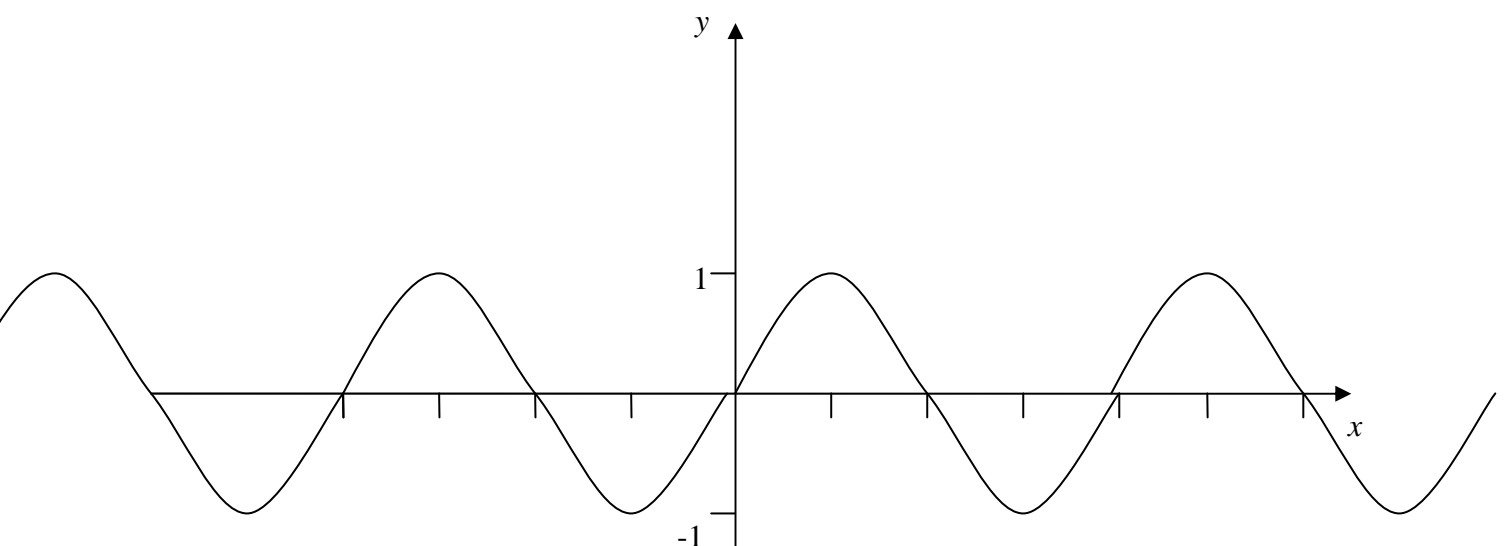
$$x_1 = 0, \quad x_2 = \pi, \quad x_3 = 2\pi$$

La curva pasa por los puntos $(0,0)$, $(\pi,0)$ y $(2\pi,0)$

- Con esta información realizamos la gráfica de la función, señalando las características esenciales que surgen del estudio.



Como sabemos que la función es periódica de período 2π , podemos extender nuestro gráfico a todo el dominio:



Actividades:

18) Realizar el estudio de las siguientes funciones siguiendo los pasos analizados en los ejemplos y graficar:

$$a. f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$$

$$b. f(x) = x^3 - 32x + 4$$

$$c. f(x) = 2 - |x - 2|$$

$$d. f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$e. f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$f. f(x) = \cos x$$

$$g. f(x) = \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$h. f(x) = 3\cos \frac{x}{2} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$i. f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$j. f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$k. f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

$$l. f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

$$m. f(x) = xe^{-x^2}$$

5. Aproximación de funciones

Aproximación constante:

Sea f una función continua definida en un intervalo abierto I que contiene al punto x_0 , queremos estimar el valor de $f(x)$ con x en I y sólo conocemos $f(x_0)$. Una primera aproximación para valores de x cercanos a x_0 consiste en decir que $f(x) \approx f(x_0)$.

Evidentemente con esta aproximación cometemos un error que está dado por $R_0(x) = f(x) - f(x_0)$

Y dado que f es continua en I se tiene: $\lim_{x \rightarrow x_0} R_0(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$

Por lo tanto cuando x es cercano a x_0 el error es pequeño.

Ejemplo:

Supongamos que queremos aproximar el valor de $\sqrt{146}$.

Definimos la función $f(x) = \sqrt{x}$ y conocemos $f(144) = \sqrt{144} = 12$.

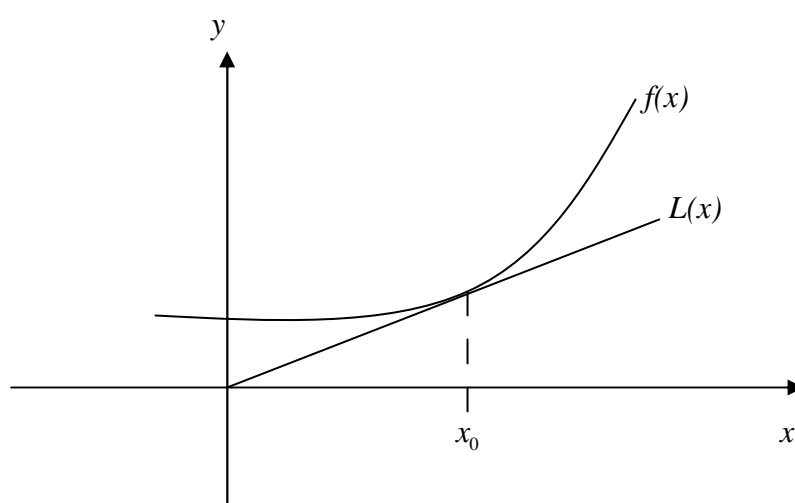
Decimos entonces que el valor aproximado es 12, es decir que $f(146) \approx f(144) = 12$

Si lo comparamos con el valor dado por la calculadora observamos que $R(146)=0.083$

Aproximación lineal:

Sea f una función continua y derivable en un intervalo abierto I que contiene al punto x_0 . Queremos estimar el valor de $f(x)$, con x en I , y conocemos los valores $f(x_0)$ y $f'(x_0)$.

De todas las funciones lineales que pasan por el punto $(x_0, f(x_0))$ queremos obtener la que mejor aproxime la función para valores de x cercanos a x_0 . Geométricamente podemos ver que la recta que mejor aproxima la función es la recta tangente a la curva en x_0 .



Luego, la función dada por:

$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ es la llamada **linealización de $f(x)$** , siendo la gráfica de $L(x)$ la recta tangente a la gráfica de f en $x = x_0$.

La aproximación lineal establece que $f(x) \approx L(x)$, siendo $f(x) = L(x) + R_1(x)$

$$\begin{aligned}
 \text{Entonces: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] - f'(x_0) = \\
 &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto para valores de x cercanos a x_0 , el error será pequeño.

Ejemplo:

Hallar un valor aproximado de $\sqrt{146}$.

Definimos la función $f(x) = \sqrt{x}$ y conocemos $f(144) = \sqrt{144} = 12$.

Como $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(144) = \frac{1}{24}$, y $f(144) = 12$

Usamos la aproximación lineal: $f(x) \approx 12 + \frac{1}{24}(x - 144)$

Tenemos entonces que $\sqrt{146} = f(146) \approx 12 + \frac{1}{24}(146 - 144) = 12.08333...$

Comparando con el valor dado por la calculadora observamos que $R(146) = 0.00028$, lo cual mejora la aproximación constante.

Apéndice

Los contenidos que se presentan a continuación son importantes para un estudio más profundo de las funciones reales, si bien se recomienda su lectura, no serán evaluados durante este curso.

Definición:

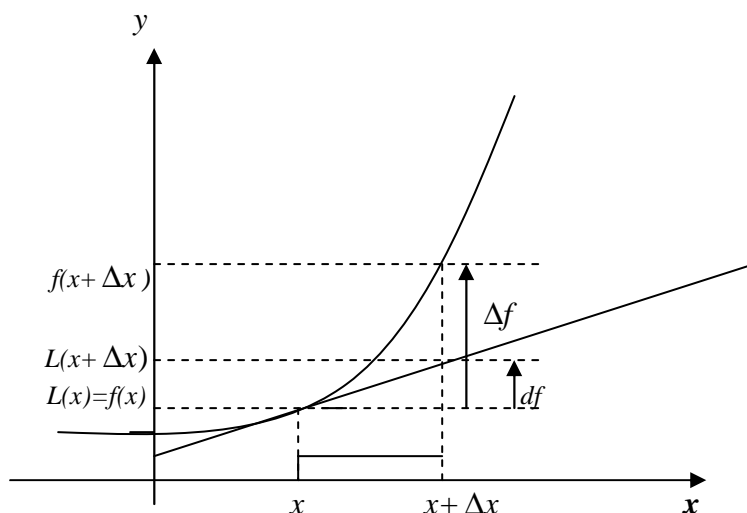
Se llama **diferencial** de una función $f(x)$ a la parte principal de su incremento lineal con respecto al incremento $\Delta x = dx$ de la variable independiente x . La diferencial de f se denota con df y está dada por: $df = f'(x)dx$

La diferencial de f puede ser interpretada geométricamente como el incremento de la linealización de f en el punto $(x, f(x))$.

El incremento de f entre x y $(x + \Delta x)$ está dado por $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

El diferencial de f entre x y $(x + \Delta x)$ está dado por :

$$df = L(x + \Delta x) - f(x) = f(x) + f'(x)\Delta x - f(x) = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

**Ejemplo:**

Hallar el incremento y la diferencial de la función $f(x) = 3x^2 - x$

- 1er procedimiento:

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \\
 &= 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - (3x^2 - x) = \\
 &= 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - x - \Delta x - 3x^2 + x = \\
 &= (6x - 1)\Delta x + 3\Delta x^2
 \end{aligned}$$

Como hemos definido el diferencial de una función como la parte principal de su incremento lineal con respecto al incremento $\Delta x = dx$ de la variable independiente x , tenemos:

$$df = (6x - 1)\Delta x = (6x - 1)dx$$

- 2do procedimiento:

$$\text{Como } f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow df = f'(x)dx = (6x - 1)dx$$

Aplicación de la diferencial para cálculos aproximados:

Cuando $|\Delta x|$ es pequeño, la diferencial df de la función y el incremento Δf son aproximadamente iguales:

$$\Delta f \approx df \quad \text{o} \quad \Delta f \approx f'(x)\Delta x$$

Ejemplo:

¿En cuánto aumentará aproximadamente el lado de un cuadrado, si su área aumenta de 9 m^2 a $9,1 \text{ m}^2$?

Llamaremos x al área del cuadrado, ya que sobre esa variable conocemos el incremento. Definimos entonces :

$f(x) = \sqrt{x}$ como el lado del cuadrado dependiendo del área.

Tenemos los datos : $x = 9$ y $\Delta x = 0,1$

Calculamos aproximadamente el incremento Δf del lado del cuadrado:

$$\Delta f \approx f'(9)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{9}}0,1 = 0,016$$

Concluimos que el lado del cuadrado aumentará en $0,016 \text{ m}$

Actividades:

19) Determine la linealización de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3$ en $x_0 = 1$

b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}}$ en $x_0 = 0$

20) Compruebe las siguientes aproximaciones lineales en $x_0 = 0$

a. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

b. $\frac{1}{(1+2x)^4} \approx 1 - 8x$

21) Hallar el incremento Δf y la diferencial df de la función $f(x) = 5x + x^2$ para $x = 2$ y $\Delta x = 0,001$

22) ¿En cuánto aumenta aproximadamente el volumen de una esfera, si su radio de 15 cm se alarga en 2 mm ?