Relaciones Binarias

Matemática IV, Facultad de Informática, UNLP.
2019

Conjuntos

Se llama conjunto a toda colección o reunión de objetos (cosas, animales, personas o números) bien definidos que cumplen una propiedad determinada.
A los objetos del conjunto se denominan **elementos**.

La determinación de un conjunto corresponde a la manera como éste puede expresarse.
Para determinar un conjunto se utilizan dos formas: determinación por extensión (listando todos sus elementos) y la determinación por comprensión (por la propiedad que cumplen o caraterizan sus elementos).

Conjuntos

- Llamaremos *Conjunto Vacío* al conjunto especial, $\emptyset$, que no tiene ningún elemento.
- Diremos que un conjunto B *contiene* a otro conjunto A (También se dice que A está contenido en B o que A es subconjunto de B), cuando todos los elementos de A son también elementos de B. Se denotará $A \subset B$.
- Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$

Álgebra de Conjuntos

Existen unas operaciones básicas que permiten manipular los conjuntos y sus elementos, similares a las operaciones aritméticas, constituyendo el álgebra de conjuntos:

- La *unión* de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cup B$ que contiene cada elemento que está por lo menos en uno de ellos.
- La *intersección* de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B$ que contiene todos los elementos comunes de A y B.
- La *diferencia* entre dos conjuntos A y B es el conjunto $A - B$ que contiene todos los elementos de A que no pertenecen a B.
- El *complemento* de un conjunto A es el conjunto A^c que contiene todos los elementos (respecto de algún conjunto referencial) que no pertenecen a A.

Producto Cartesiano

El **producto cartesiano** de dos conjuntos es una operación, que resulta en otro conjunto, cuyos elementos son todos los *pares ordenados* que pueden formarse de forma que el primer elemento del par ordenado pertenezca al primer conjunto y el segundo elemento pertenezca al segundo conjunto.

$$A \times B = \{(x, y)/x \in A; \quad y \in B\}$$

Relaciones

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una *relación binaria* definida entre los mismos es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, caracterizado por alguna propiedad común a sus elementos

$$R = \{(x, y)/(x, y) \in A \times B\} \subset A \times B$$

Muchas veces cuando $(x, y) \in R$ escribiremos xRy

Las relaciones estarán dadas por *extensión*, dando todos los pares que la componen, o por *comprensión* dando la propiedad que la caracteriza.

Relaciones- Ejemplos

1. si $A = \{x/x \ es \ vocal\}$ y $B = \{brisa, sol, mar, nube\}$ y la relación en $A \times B$ viene definida por: xRy si y sólo si *x es letra de y.*

   Entonces,la relación definida por extensión quedaría:
   $R = \{(i, brisa); (a, brisa); (a, mar); (o, sol); (u, nube); (e, nube)\}$

2. si $A = \{enteros \ pares \ entre \ \text{-}4 \ y \ 10\}$, $B = Z$ y la relación viene definida en la forma: xRy si y sólo si *y es el cuadrado de x*

   Entonces,la relación definida por extensión quedaría:
   $R = \{(-4, 16); (-2, 4); (0, 0); (2, 4); (4, 16); (6, 36); (8, 64); (10, 100)\}$

Dominio e Imagen de una relación binaria

Sea R una relación de A en B.
Se llama **dominio** de R al conjunto de elementos x de A tales que $(x, y) \in R$

$$Dom_R = \{x \in A : (x, y) \in R\}$$

Se llama **imagen** de R al conjunto de elementos y de B tales que $(x, y) \in R$

$$Im_R = \{y \in B : (x, y) \in R\}$$

Relación inversa

Sea R una relación de A en B. Se llama **relación inversa** de R al subconjunto de $B \times A$ definido por

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

Ejemplo

Sean $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{-8, -1, 0, 1, 8, 27\}$, y sea R de A en B definida por : xRy si y sólo si x *es el cubo de* y
$R = \{(-8, -2); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (8, 2); (27, 3)\}$

Entonces, $R^{-1} = \{(-2, -8); (-1, -1); (0, 0); (1, 1); (2, 8); (3, 27)\}$, es decir, $aR^{-1}b$ si y sólo si a *es la raíz cúbica de* b

Composición de Relaciones

Dadas las relaciones R en $A \times B$ y S en $B \times C$ se puede construir la relación composición

$$SoR = \{(x, z) : (x, y) \in R, (y, z) \in S\} \subset A \times C$$

Ejemplo

Sean $A = \{x/x \ es \ vocal\}$, $B = \{brisa, sol, mar, nube\}$ y $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones R definidas en $A \times B$ por: xRy si y sólo si $x \ es \ letra \ de \ y$, y y S en $B \times C$ por: xRy si y sólo si $y \ es \ cantidad \ de \ letras \ que \ tiene \ x$

Entonces,las relaciones definidas por extensión quedarían:

$R = \{(i, brisa); (a, brisa); (a, mar); (o, sol); (u, nube); (e, nube)\}$ y

$S = \{(sol, 3); (mar, 3); (nube, 4); (brisa, 5)\}$

Luego, $SoR = \{(i, 5); (a, 5); (a, 3); (o, 3); (u, 4); (e, 4)\}$

Relaciones definidas en un conjunto

Si una relación R es tal que $R \subset A \times A$, se dice que está definida en el conjunto A. En este tipo de relaciones se pueden definir las siguientes

propiedades:

- **Reflexividad**: R será *reflexiva* si para todo $x \in A$ vale que xRx
- **Simetría**: R será *simétrica* si para todo $x, y \in A$ vale que xRy implica yRx
- **Antisimetría**: R será *antisimétrica* si xRy e yRx implican que $x = y$ para todo $x, y \in A$
- **Transitividad**: R será *transitiva* si para todo $x, y, z \in A$ vale que xRy e yRz implican que xRz

1. Sea $A = \{a, b, c\}$
   - $R = \{(a, b); (a, a); (b, b)\}$ es transitiva pero no simétrica ni reflexiva. También es antisimétrica.
   - $R = \{(a, a); (b, b); (c, c)\}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva
   - $R = \{(a, b); (b, c); (a, c); (c, b); (a, a); (b, b); (c, c)\}$ es reflexiva, transitiva pero no es simétrica ni antisimétrica.
2. La relación x *divide a* y en el conjunto de los números naturales es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Obviamente no es simétrica . La misma relación *divide* en el conjunto de los números enteros no es antisimétrica.
3. En el conjunto de las rectas del plano, la relación L *es paralela a* M es reflexiva, simétrica y transitiva

Si una relación R definida sobre un conjunto A es reflexiva, antisimétrica y transitiva diremos que es una **relación de orden** (ó que es un *orden sobre* A)

Si una relación R definida sobre un conjunto A es reflexiva, simétrica y transitiva diremos que es una **relación de equivalencia** (ó que es un *equivalencia en* A)

Dada una relación de equivalencia R sobre A y un elemento $a \in A$ se denominará **clase de equivalencia de a** y se denotará $\bar{a}$ al conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con a por R. Es decir, $\bar{a} = \{x \in A : xRa\}$

Cualquier elemento de $\bar{a}$ se llama *representante* de la clase, y en particular, como la relación es reflexiva se da que $a \in \bar{a}$, luego para todo $a \in A$, a es representante de la clase $\bar{a}$

Clases de equivalencia - Propiedades

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A, se cumple:

1. Para todo $a \in A$, $\bar{a} \neq \emptyset$
2. Si $a, b \in A$ tales que $\bar{a} = \bar{b}$ entonces aRb
3. Si $a, b \in A$ tales que $\bar{a} \neq \bar{b}$ si y sólo si $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$

Esto es, las clases de equivalencia son conjuntos no vacios y disjuntos.

Conjunto cociente - Particiones

Al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de elementos del conjunto A respecto de la relación R se lo llamará **conjunto cociente de A respecto de la relación R** y se lo denotará:

$$A/R = \{\bar{a} : a \in A\}$$

Recordemos que dado un conjunto no vacio A y $P = \{A_i\}$ con $i \in I$, se dice que P constituye una **partición** de A si y sólo si $A = \cup A_i$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$

Teorema (Teorema Fundamental de las relaciones de equivalencia)

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A , el conjunto cociente A/R es una partición de A.