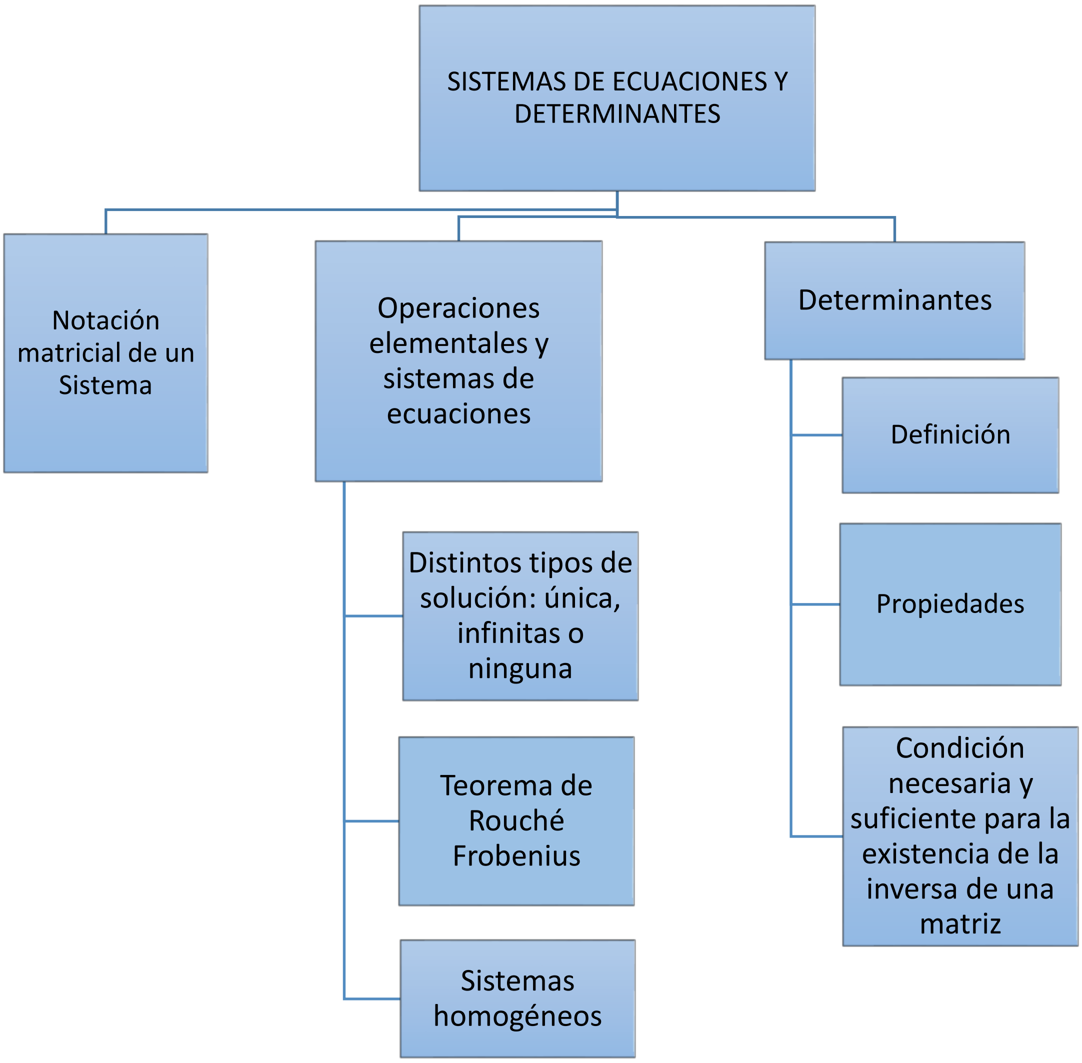
Capítulo 7

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DETERMINANTES

CONTENIDOS:



Matemático invitado: Leonardo Pisano

Los sistemas de ecuaciones lineales modelizan muchos problemas de la realidad y la preocupación por resolverlos y por encontrar métodos para su resolución data de muchos años.

Leonardo Pisano, matemático italiano que vivió aproximadamente entre los años 1175 y 1250 d.c, más conocido como Fibonacci, y que se conoce sobre todo por su famosa sucesión, viajaba habitualmente por cuestiones de comercio. Durante sus viajes aprendió la nueva aritmética árabe, que después presentó al occidente en su conocido libro Liber Abaci. Cuenta la leyenda que el Emperador Federico II de Sicilia invitó a Fibonacci y a otros sabios a participar en una especie de torneo de matemáticas, en el que plantearon varios problemas. Uno de ellos era el siguiente:

"Tres hombres poseen una sola pila de monedas, y sus partes son 1/2, 1/3 y 1/6. Cada uno toma algo de dinero de la pila hasta que no queda nada. El primero regresa 1/2 de lo que tomó, el segundo 1/3 y el tercero 1/6. Cuando el total reintegrado se divide por igual entre los tres, se descubre que cada uno posee lo que le corresponde. ¿Cuánto dinero había en la pila original, y cuánto tomó cada uno de esa pila? "

Fibonacci llegó a la solución: la cantidad total era 47 y las cantidades que tomaron cada uno, fueron 33, 13 y 1. El desafío será resolver el problema al final del capítulo.

1. Notación matricial de un Sistema. Soluciones.

Dado un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ...+ a_{3n}x_n = b_3 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se distinguen las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & ..... & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix} \in R^{m\times n} \ , \qquad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ..... \\ x_n \end{pmatrix} , \qquad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ..... \\ b_m \end{pmatrix} \in R^{m\times 1}$$

A es la matriz de coeficientes, b la matriz de términos independientes, en ambas sus entradas son números, x es la matriz de una columna de las incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$.

Conociendo el producto de matrices, el sistema puede escribirse en forma equivalente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & ..... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ..... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ..... \\ b_m \end{pmatrix}$$

que indicaremos en forma breve A.x=b.

La matriz ampliada $(A \;\; b)$ del sistema es la matriz A de coeficientes a la que se agrega como última columna la matriz b de términos independientes.

Una **solución** del sistema es una n-upla $(c_1, c_2, ..., c_n)$ de números tales que reemplazando respectivamente x_1 por c_1, x_2 por c_2,....., x_n por c_n en **cada una** de las ecuaciones, se cumple la igualdad en **todas** ellas.

2. Operaciones elementales y sistemas de ecuaciones lineales

Si ***A***.*x*=***b*** es un sistema de ecuaciones, aplicando operaciones elementales de fila a la matriz ***A*** ampliada con la columna ***b*** de términos independientes, se obtiene una matriz equivalente, el sistema de ecuaciones correspondiente tiene las mismas soluciones que el de partida.

Proposición 2.1: *Si* ***A***.*x =* ***b*** *es un sistema de ecuaciones lineales y* ***e*** *es una operación elemental de fila, entonces el sistema e(****A****).x= e(****b****) tiene las mismas soluciones que A.x = b.*

Demostración

Sea **c** = $(c_1, c_2, ..., c_n)$ una solución de **A**.x = **b**,

Caso 1: e es multiplicar F_i por escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

Vale la igualdad $a_{i1}\, c_1 + a_{i2}\, c_2 + ... + a_{in}\, c_n = b_i$ por ser **c** solución, también vale la igualdad multiplicando ambos miembros por α :

α (a_{i1} c_1 + a_{i2} c_2 + ...+ $a_{i\,n}$ c_n)= α b_i , luego **c** es solución del sistema e(A).x = e(b), para este caso.

Caso 2: e es reemplazar F_i por $F_i + \alpha F_k$, entonces son válidas las siguientes igualdades

a_{i1} c_1 + $a_{i\,2}$ c_2 + ...+ $a_{i\,n}$ c_n = b_i y también

a_{k1} c_1 + $a_{k\,2}$ c_2 + ...+ $a_{k\,n}$ c_n = b_k

Multiplicando la segunda por α y sumándola a la primera se conserva la igualdad, factoreando c_i en cada sumando, queda lo siguiente:

($a_{i1} + \alpha\, a_{k1}$) c_1 + ... + ($a_{in} + \alpha\, a_{kn}$) c_n = $b_i + \alpha\, b_k$

también queda probado para e del segundo tipo.

Caso3: e es permutar F_i con F_k , inmediato ya que es solamente permutar dos ecuaciones de lugar.

El enunciado quedó probado para cuando se aplica **una** operación elemental de cualquiera de los tres tipos que hay. También vale cuando se aplica a las matrices A y b del sistema un número finito de operaciones elementales de fila.

e_1(**A**).x = e_1(**b**) tiene las mismas soluciones que **A**.x=**b**, es decir : son sistemas equivalentes.

Si se aplica una segunda operación elemental, resulta $e_2 \circ e_1$(**A**).x = $e_2 \circ e_1$(**b**) equivalente a e_1(**A**).x=e_1(**b**), luego también equivalente al sistema **A**.x=**b**. Siguiendo, si se aplican k operaciones elementales $e_k \circ e_{k-1} \circ \ldots \circ e_2 \circ e_1(A).x = e_k \circ e_{k-1} \circ \ldots \circ e_2 \circ e_1(b)$ tiene las mismas soluciones que **A**.x = **b** . □

Aplicación a los distintos tipos de Sistemas lineales

El objetivo es encontrar las soluciones (o bien decidir que no hay) del sistema dado **A**.x=**b**. Las operaciones elementales se aplicarán a la matriz ampliada ***(A b)***, es decir a A y a ***b*** simultáneamente hasta llevar a la matriz ***A*** de los coeficientes a su matriz reducida equivalente A_R.

Ejemplo 1: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x+2y+2z=4 \\ 2x-y-z=1 \\ x+2y-z=-3 \end{cases}$

Se forma la matriz ampliada $(A\ \ b)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ y se le aplica una sucesión de operaciones elementales (no necesariamente única) para llevarla a $(A_R\ \ b')$ donde A_R es la reducida equivalente con *A* y b' la columna resultante de esa misma sucesión de operaciones elementales.

(A_R, b') es **única** cualesquiera sean las operaciones elementales elegidas para reducir ***A.***

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\frac{-1}{3}F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} F_1-F_2 \\ F_3-F_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \frac{-1}{3}F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F_2-F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La última matriz obtenida es la más simple equivalente a la matriz ampliada del sistema dado.

La matriz A_R reducida equivalente a ***A*** en este caso es la identidad.

El sistema así obtenido da las soluciones del sistema dado.

El sistema equivalente al de partida con notación usual y con la matricial es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} x+0y+0z=1 \\ 0x+y+0z=-1 \\ 0x+0y+z=2 \end{cases}$$

La solución **única** de este sistema dado es : $x=1,\ y=-1,\ \ z=2$, es un sistema ***compatible determinado.***

En el Ejemplo 1 el sistema tiene solución única. Esto no ocurre siempre.

Si un sistema no tiene ninguna solución es ***incompatible*****.**

Si tiene solución es ***compatible***, y existen dos posibilidades: que haya una única solución (como en el Ejemplo 1) en cuyo caso se llama ***compatible determinado***, o que el conjunto de soluciones sea infinito, en este caso el sistema es ***compatible indeterminado*****.**

Observación: La palabra "indeterminado" sugiere que las soluciones no pueden conocerse, esto no es así: las infinitas soluciones de un sistema compatible indeterminado siguen todas una misma "ley" (que suele llamarse solución general), a partir de la cual se puede obtener cualquier solución particular. En un ejemplo se verá que también esa solución general se encuentra aplicando operaciones elementales a la matriz ampliada ***(A b)****,* hasta llevar ***A*** a su matriz equivalente A_R reducida por filas.

Ejemplo 2:

Ejemplo de un sistema con infinitas soluciones (compatible indeterminado), se encontrará el conjunto de sus infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x+y-2z+4t=5 \\ 2x+2y-3z+t=3 \\ 3x+3y-4z-2t=1 \end{cases}$$

Se construye la correspondiente matriz ampliada $(A\ \ b)$ y se le aplican operaciones elementales hasta obtener (A_R, b') donde A_R es la reducida equivalente a A y b' la columna que resulte habiendo aplicado a b la misma secuencia de operaciones elementales.

$$(A\ \ b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1\end{pmatrix},\qquad \begin{matrix}F_2-2F_1\\ F_3-3.F_1\end{matrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7\\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14\end{pmatrix},$$

$$F_3-2F_2\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad F_1+2F_2\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -10 & -9\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=(R_A\ \ b')$$

En este como en todos los casos, la sucesión de operaciones elementales aplicada **no** es única, no debe necesariamente ser la que se muestra ahí arriba, pero cualesquiera sean las operaciones elementales y el orden en que se apliquen, la matriz final obtenida (A_R, b')es siempre la misma, ésa es única.

La matriz (A_R, b') es la matriz ampliada correspondiente a un sistema equivalente (es decir: con las mismas soluciones) que el enunciado. Escrito en forma matricial y en la forma corriente queda:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\ -7\\ 0\end{pmatrix}$$

$\begin{cases}x+y-10t=-9\\ \qquad z-7t=-7\end{cases}$ del que se obtiene $\begin{cases}x=-9-y+10t\\ z=-7+7t\end{cases}$

Las letras y, t son variables libres, pueden adoptar cualquier número real, esto se indica con: $y, t \in \mathbb{R}$. En cambio, x, z son dependientes (dependen de los valores elegidos para y y para t).

El hecho de que haya al menos una variable libre, que recorre todos los números reales, hace que el conjunto de soluciones del sistema sea infinito.

En este ejemplo el conjunto de infinitas soluciones del sistema se expresa como:

S = $\{(-9-y+10t,\ \ y,\ \ -7+7.t,\ \ t)\ ;\ y,\ t\ \in\ \mathrm{R}\}$

Si se quiere obtener una solución particular, se asignan números determinados a las libres (en este ejemplo *y, t)* y con esos valores se obtienen los de *x* y *z.*

Si elegimos $y=0, t=1$ obtenemos la solución: $x=1, y=0, z=0, t=1$.

Si elegimos $y=2, t=-1$ obtenemos la solución: $x=-21, y=2, z=-14, t=-1$.

Observación: Antes de dar un ejemplo de aplicación de operaciones elementales a un sistema incompatible, en este ejemplo sencillo se ve qué significa la incompatibilidad:

Ejemplo 3:

Hallar las soluciones, si es que existen, del siguiente sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Usando el método corriente de despejar e igualar, se obtiene al despejar y de ambas ecuaciones:

$1 - 2x_1 = -2x_1$ equivalente a 1 = 0 (Falso).

Siempre se llega a una falsedad cuando se quiere resolver un sistema incompatible.

En este ejemplo simple la incompatibilidad surge del hecho de que la segunda ecuación pide que el doble de x_1 sea el opuesto de x_2 (que es único), en la primera ecuación se está pidiendo que el doble de x_1 sumado a x_2 sea 1.

No existe ningún par de números reales (ni complejos) que cumplan <u>simultáneamente</u> ambas condiciones. En esto reside la incompatibilidad : pedir en una ecuación (E_i) una determinada relación numérica, tal que, para por lo menos otra ecuación (E_k) del mismo sistema, ninguna de las soluciones de la ecuación (E_i), puede satisfacer la ecuación (E_k).

Ejemplo 4:

Ejemplo de un sistema incompatible, aplicando operaciones elementales de fila a la matriz ampliada.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} F_3 - F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En el sistema equivalente que se obtiene, queda la última ecuación $0x+0y+0z=-1$, imposible de resolver, equivale (cualesquiera sean x, y , z) a la igualdad falsa 0 = -1.

El siguiente teorema permite establecer comparando el rango de la matriz de coeficientes con el de la matriz ampliada si el sistema es compatible o incompatible.

Teorema (Rouché, Frobenius). Sea A x = b un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A x = b es compatible si y sólo si $r(A) = r(A \ \ \mathrm{b})$

Además, si $r(A) = r(A \ \ \mathrm{b}) =$ n (número de incógnitas), entonces la solución es única, (sistema compatible determinado), si $r(A) = r(A \ \ \mathrm{b}) <$ n, entonces tiene infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado).

Ejemplo 5:

Para el sistema $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$ del Ejemplo 4, es $r(A)=2 < r(A \ \ \mathrm{b})=3$, de acuerdo con el teorema el sistema es incompatible.

Observación: Este teorema permite clasificar el sistema, no obtener las soluciones en caso que existan.

Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si todos los términos independientes son ceros.

Su notación matricial es **A**.x = O donde O indica una matriz columna nula.

Observación:

Todo sistema homogéneo es compatible: la solución **trivial** es aquella en la que se reemplazan todas las incógnitas por ceros, esta solución nula la tienen todos los sistemas homogéneos, por esa razón se llama trivial.

Si el sistema homogéneo es determinado, tiene una única solución que debe necesariamente ser la trivial. Si es indeterminado tendrá, además de la trivial, otras infinitas soluciones.

Aplicando el teorema de Rouché Frobenius a un sistema homogéneo los rangos de ambas matrices siempre coinciden debido a que la columna que se agrega para construir la matriz ampliada es nula. Este número puede coincidir con el número n de incógnitas (compatible determinado) o ser menor que n (compatible indeterminado).

Un sistema homogéneo se resuelve mediante operaciones elementales como los anteriores.

Teorema: Sea **A**.**x**=**O** un sistema homogéneo donde A $\in \mathbb{R}^{mxn}$, **O** es la matriz nula mx1 y **x** la matriz columna de n incógnitas x_i , i =1,...,n.

Sean c y c´ dos soluciones del sistema y k $\in \mathbb{R}$, entonces c + k.c´ también es una solución del sistema dado.

Demostración:

Siendo c y c´ soluciones las siguientes son igualdades :

A.c = O y A. **c´=** O . Se debe probar que sustituyendo **x** por (c + k. c´)

también se obtiene una igualdad :

A (c+k. c´) = A.c + A. k. c´ = A. c + k. A. c´= O + k.O = O (porque A.c = O y A. c´= O), luego c + k. c´ es solución de **A. x** = O . □

…………………………………………………………………………………………………..

Ejercicios:

1) Representar en el plano los siguientes sistemas, indicar qué observa en cada caso

$\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{matrix} 2x+6y=8 \\ x+3y=4 \end{matrix}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 6x-3y=-5 \end{cases}$

2) Verificar que los valores dados son *soluciones* de los sistemas planteados. En cada caso clasifique el sistema.

a) x=1, y =2 para $\begin{cases} 3x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ $\quad$ b) x=1, y=1 para $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \\ 3x-y=2 \end{cases}$

c) {(x,y) ; x = -3y} para $\begin{cases} x+3y=0 \\ -3x-9y=0 \\ 2x+6y=0 \end{cases}$ $\quad$ d) x=1, y=0, z= -1 para $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ \quad y+4z=-4 \\ x-y-z=2 \end{cases}$

e) {(x, y, z) ; x =1+y, z=3y} para $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-y=1 \end{cases}$

3) Aplicar el teorema de Rouché-Frobenius a los siguientes sistemas y resolverlos:

a) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=2 \\ x_1 \quad -x_3=6 \\ \quad x_2+x_3=4 \end{cases}$ $\quad$ b) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=1 \\ \quad u_2-u_3=1 \end{cases}$ $\quad$ c) $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=0 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$ $\quad$ d) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=3 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y+z=7 \\ 3x \quad +5z=4 \\ 2x+y+3z=-1 \end{cases}$ $\quad$ f) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+5x_2-x_3+2x_4=2 \end{cases}$ $\quad$ g) $\begin{cases} x-2y+3z-2w=0 \\ 3x-7y-2z+4w=0 \\ 4x+3y+5z+2w=0 \end{cases}$

4) Analizar la ***verdad*** o ***falsedad*** de las siguientes afirmaciones. Fundamentar la respuesta

a) Todo sistema homogéneo tiene al menos una solución.

b) Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.

c) Un sistema homogéneo que no tiene una única solución, tiene infinitas soluciones.

d) Si un sistema no homogéneo no tiene solución única, debe tener infinitas soluciones.

e) Si un sistema tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.

f) La ecuación x + y = 0 no tiene solución.

g) Si para cada ecuación del sistema hay alguna solución, entonces el sistema tiene solución.

h) Si un sistema es incompatible, entonces cada ecuación del mismo tampoco tiene solución.

5) Determinar (si existen) los valores de ***b*** para que los siguientes sistemas sean

i) compatible (en tal caso resolverlo, expresar la solución en la forma adecuada)

ii) incompatible

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 \quad + 2x_3 + 7x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3r - s + 7t = 5 \\ 4r \quad + 3t = b \\ 5r + s - t = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + \frac{1}{2}z - 3w = 8 \\ -2x + 2y - z + 6w = b \end{cases}$

6) Determinar qué relación debe haber entre *a, b* y *c* para que este sistema sea compatible:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

7) Si la terna $(2,1,-1)$ es <u>**una *solución***</u> de $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 \quad + x_3 = b \\ x_1 + x_2 \quad = c \end{cases}$ hallar todas las soluciones del sistema. (piense dónde debe reemplazar 2, 1 y -1)

8) En cada caso determinar, si existen, los valores de ***k*** tales que el sistema resulte, respectivamente:

i) compatible determinado

ii) compatible indeterminado

iii) incompatible

(a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 + k.x_2 = k + 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + (k-1).x_2 = k \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 + k.x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 + k.x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\qquad k.x_3 = 2 \end{cases}$

9) Resuelve el problema de la Pila de monedas de Fibonacci planteado al principio del capítulo.

3. Determinante de una matriz.

El determinante de una matriz es un número real que se asigna SOLO A MATRICES CUADRADAS. Este número fue primeramente calculado para encontrar condiciones para que un sistema de ecuaciones de 2x2 tuviera solución única, esto motiva el estudio de los determinantes y nos dará una poderosa herramienta para analizar los sistemas de ecuaciones cuya matriz de coeficientes sea cuadrada.

Si A está en $\mathbb{R}^{nxn}$ el determinante de A, que se nota **det(A)** o $|\boldsymbol{A}|$, es un número real que se puede pensar como una función, con dominio en $\mathbb{R}^{nxn}$ y codominio en $\mathbb{R}$:
det: $\mathbb{R}^{nxn} \to \mathbb{R}$ que a toda matriz A en $\mathbb{R}^{nxn}$ le asigna el único número **det(A)** $\in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1:

Sea $A = (3)$ una matriz de 1x1, el determinante de A, que se escribe det(A) o $|\boldsymbol{A}|$ es 3.
Es decir es el único número que tiene la matriz.

Ejemplo 3.2:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ una matriz de 2x2, det(A)= 2.4 – 3.5 = 8-15= - 7

Es decir que es el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo 3.3:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$una matriz de 3x3.

Para calcular el determinante, elegimos cualquier fila o cualquier columna de la matriz, elijamos la fila 1, tenemos entonces:

det(A)= $1.\ (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+1}}\ .\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix} + \ \mathbf{3}.\ (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+2}}\,.\boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} + (-\mathbf{1}).\ (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+3}}.\ \boldsymbol{det}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$=

a_{11}

(-1) elevado al número de fila más columna

Determinante de la matriz que queda sacando fila1, columna1

a_{12}

(-1) elevado al número de fila más columna

Determinante de la matriz que queda sacando fila1, columna2

a_{13}

(-1) elevado al número de fila más columna

Determinante de la matriz que queda sacando fila1, columna3

=1.1 . $(\mathbf{0.1} - \mathbf{4.2}) + \ \mathbf{3}.(-\mathbf{1}).(\mathbf{2.1} - \mathbf{1.2}) + (-\mathbf{1}).\mathbf{1}.(\mathbf{2.4} - \mathbf{1.0}) = -\mathbf{8} + \mathbf{0} - \mathbf{8} = -\mathbf{16}$

Si eligiéramos otra fila o cualquier columna el resultado sería el mismo. Desarrollemos el determinante por la columna 2:

det(A)= $3.\ (-1)^{1+2}\ .\ det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0.\ (-1)^{2+2}\ .\ det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 4.\ (-1)^{3+2}.\ det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=$

a_{12}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila1, columna2	a_{22}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila2, columna2	a_{32}	(-1) elevado al número de fila más columna	Determinante de la matriz que queda sacando fila3, columna2

$=3.(-1).(2.1-1.2)+0.1.\big(1.1-1.(-1)\big)+4.(-1).(1.2-2.(-1)=0+0-16=-16$

Se define a continuación, por recurrencia, el determinante de cualquier matriz **cuadrada**:

Definición: Sea A matriz de $\mathbb{R}^{nxn}$,

1) Si *n= 1*, A = (a_{11}), se define **det(A) =** a_{11} **o** $|A|=a_{11}$

2) Si *n= 2,* A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define **det(A)=** $a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12}$ **o** $|A| = a_{11}.a_{22}-a_{21}.a_{12}$

3) Si *n es cualquier número natural mayor que 2*, se define, dada cualquier fila i**:**

det(A)= $a_{i1}.(-1)^{i+1}det\big(A(i|1)\big)+a_{i2}.(-1)^{i+2}det\big(A(i|2)\big)+\cdots+a_{in}.(-1)^{i+n}det\big(A(i|n)\big)$

o también, dada cualquier columna j**:**

det(A)= $a_{1j}.(-1)^{1+j}det\big(A(1|j)\big)+a_{2j}.(-1)^{2+j}det\big(A(2|j)\big)+\cdots+a_{nj}.(-1)^{n+j}det\big(A(n|j)\big)$

Por comodidad escribimos ambas expresiones con la notación sigma:

det(A)=

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.(-1)^{i+k}det\big(A(i|k)\big)}_{\text{Está fija la fila i, va Variando la columna}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}.(-1)^{k+j}det\big(A(k|j)\big)}_{\text{Está fija la columna j, va variando la fila}}$$

Se llama ***adjunto*** (o ***cofactor***) del coeficiente a_{ij} al valor α_{ij} = $(-1)^{i+j}$.**det** $A(i/j)$.

El ***determinante*** de A es la suma de los productos de los coeficientes de una fila (o una columna) cualquiera de A por sus respectivos cofactores, es decir, desarrollado por la fila *i*, es

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.\alpha_{ij} = a_{i1}.\alpha_{i1} + a_{i2}.\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}.\alpha_{in}$$

Observación: El determinante está bien definido: el valor det(A) es único cualquiera sea la fila o la columna de A que se elija para calcularlo.

Ejemplo 3.4:

Calcular det(A) siendo A = $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Calcularemos por la fila 2: $\det(A) = a_{21}.\alpha_{21} + a_{22}.\alpha_{22} + a_{23}.\alpha_{23}$,

calculando primero los cofactores α_{2j}:

$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}$. det A(2/1) = $(-1).\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **= -1**

$\alpha_{22} = (-1)^{2+2}$ .detA(2/2) = $\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ = **- 9**

$\alpha_{23} = (-1)^{2+3}$. det A(2/3) = $(-1).\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = **- 3**

Entonces:

det(A) = 2 . (- 1) + (- 1). (- 9) + (- 2) . (- 3) = 13

El mismo valor 13 se obtiene calculando det(A) por cualquier otra fila o por cualquier columna. Tomando por ejemplo la primera columna:

det (A) = 3.(- 1)$^{1+1}$.$\det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **+ 2.(-1)$^{2+1}$** . $\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **+** 0 = 13

Algunas propiedades del determinante

A continuación se enuncian algunas propiedades de los determinantes. Existen además otras propiedades no incluidas en los contenidos de esta asignatura. Demostraremos sólo algunas de estas propiedades.

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$**:**

Propiedad 1) det(*A)* = det (*A*^{T})

Esto se deduce de la definición del determinante y por el hecho de que el valor det(*A)* es único cualquiera sea la fila o columna que se elija para calcularlo. (Recordar: la fila ***i*** de ***A*** es la columna ***i*** de ***A***$^{\mathbf{T}}$). □

Corolario de la Propiedad 1. Toda propiedad de los determinantes que se enuncie para las filas vale también para las columnas de la matriz.

Propiedad 2) Si se aplica la operación elemental de multiplicar todos los coeficientes de **una** fila (respectivamente una columna) de *A* por un escalar *c* entonces el det(*A)* queda multiplicado por *c*.

Demostración:

Llamemos *B* a la matriz que se obtiene multiplicando la fila k de *A* por c, los elementos de *B*, son iguales a los de *A*, salvo los de la fila k, que son los de *A* multiplicados por el número c, entonces *B* está dada por: $b_{ij} = \begin{cases} c.a_{ij} & si\ i = k \\ a_{ij} & si\ i \neq k \end{cases}$

Calculamos el det(*B)* por la fila k,

$$\boldsymbol{det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}.(-1)^{k+j} det\big(B(k|j)\big)}$$

Por la definición de *B*, es $\det B(k/j) = \det A(k/j)$, porque en ambas se suprime la fila *k* que es la única en la que difieren, y $\boldsymbol{b_{kj} = c.a_{kj}}$**,** entonces se tiene:

$$\boldsymbol{det(B)=\sum_{j=1}^{n} c.a_{kj}.(-1)^{k+j}det\big(A(k|j)\big)=c.\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}.(-1)^{k+j}det\big(A(k|j)\big)\right)=c.det(A)}$$

Corolario de la Propiedad 2 Si consideramos la matriz $c.A$ (producto del escalar *c* por la matriz *A*), entonces: $\det(c.A)=c^n.\det(A)$

Propiedad 3) Si una fila (respectivamente una columna) de *A* tiene todos sus coeficientes iguales a 0 entonces det(*A*) = 0.

Demostración:

Sea $F_k=(0,0,.....,0)$ la fila nula, se desarrolla el determinante por fila k,

$\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}.\alpha_{kj}=0$ porque $a_{kj}=0$ para k fijo, $j=1,.....,n.$. □

Propiedad 4) Sean $A,\ B$ matrices de $R^{n\times n}$ entonces $\det(A.B)=\det A.\det B$

Observaciones

1) Dado un n fijo, la propiedad 4 se generaliza a cualquier número finito de matrices $n\times n$

Si $M_1,\ M_2,...,\ M_k$ son matrices $n\times n,$ entonces
$\det(M_1.M_2.....M_k)=\det M_1.\det M_2.....\det M_k.$

2) Esta propiedad del determinante es, tal como se indica, para el **producto** de matrices, **no** existe ninguna con relación a la suma de matrices

Propiedad 5) Para la matriz identidad *I* $n\times n$, det(*I*) = 1, cualquiera sea *n*.

Demostración:

Lo demostraremos por inducción sobre el número de filas de la matriz, el enunciado entonces es: P(n): “$\det(I_n)=1$ “ para todo n, natural mayor o igual a 1.

1) Para n=1 es trivial por la definición. Por lo tanto vale P(1).

2) Si $\mathrm{P(k)}: \det(I_k) = 1$ **entonces** $\mathrm{P(k+1)}: \det(I_{k+1}) = 1$

Para calcular $\det(I_{k+1})$ lo desarrollamos por la columna 1, entonces:

$\det(I_{k+1}) = 1.(-1)^{1+1}.\det(I_k)$, tiene sólo ese término ya que el resto de los elementos de la columna son 0.

Columna con un solo elemento no nulo $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $\det(I_k) = 1$

Por lo tanto $\det(I_{k+1}) = 1.(-1)^{1+1}.\det(I_k) = 1.1.1. = 1$

Hemos probado los dos pasos de la inducción, por lo tanto $\det(I_n) = 1$ para todo natural.

Propiedad 6) Si se aplica la operación elemental de sumarle a una fila otra fila multiplicada por un número distinto de 0, el determinante no cambia.

Propiedad 7) Si se aplica la operación elemental de permutar filas el determinante cambia de signo.

Propiedad 8) Si la matriz A tiene inversa A^{-1}, entonces $\det(A^{-1}) = [\det A]^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Demostración:

Por hipótesis A tiene inversa, es decir $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$,

$\det\left(A.A^{-1}\right) = \det A.\det A^{-1} = \det I = 1,$ luego $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}.$

Propiedad 9) Dado un sistema de n ecuaciones con n incógnitas

A.x=b, siendo A matriz $n \times n$ de los coeficientes, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ matriz $n \times 1$ de una sola

columna de las incógnitas y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ matriz $n \times 1$ de una sola columna de los términos independientes,

el sistema A.x=b tiene una solución única (es compatible determinado) *si y sólo si* la matriz A tiene inversa.

(Esquema de la demostración A es cuadrada de orden n, el sistema tiene única solución si y sólo si la matriz reducida equivalente $R_A = I$ si y sólo si A tiene inversa.).

Condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa:

Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$,

A tiene inversa si y sólo si det(A) es distinto de 0.

El enunciado afirma dos cosas:

1) Si A tiene inversa **entonces** su determinante es distinto de 0.

2) Si el determinante de A es distinto de 0 **entonces** A tiene inversa.

Demostración de 1):

Sabemos que A tiene inversa, entonces existe A^{-1} tal que $A.A^{-1} = I$

Cuando dos matrices son iguales su determinante también lo es, (notar que no es cierto la recíproca, es decir si dos matrices tienen el mismo determinante no tienen por qué ser iguales), por lo tanto:

$\det(A.A^{-1}) = \det(I)$ y por las propiedades 4 y 5 se tiene que $\det(A).\det(A^{-1}) = 1$

Tenemos entonces un producto de números reales igual a 1, por lo tanto ninguno de los dos factores puede ser 0, en particular determinante de A es distinto de 0.

Demostración de 2):

Sabemos que el determinante de A es distinto de 0, queremos ver que A es invertible.

Para eso alcanza con probar que A es equivalente por filas con la identidad.

Si le aplicamos un número finito de operaciones elementales a A para llegar a la escalonada y reducida por filas equivalente con A, el $\det(A_R)$ será:

* igual al de A, o
* cambiará de signo con el de A o
* será un número multiplicado por el determinante de A, por las propiedades 2, 6 y 7.

Es decir que si $\det(A) \neq 0$ entonces $\det(A_R) \neq 0$, entonces A_R no puede tener una fila de 0, porque si así fuera su determinante valdría 0, esto quiere decir que $A_R = I$, por lo tanto A tiene inversa.

Esta importante propiedad nos garantiza una condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa.

Ejercicios:

1) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tal que det(A)= 5 calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2.d & 2.e & 2.f \\ 3.g & 3.h & 3.i \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} a & 4b & 5c \\ 10d & 40e & 50f \\ g & 4h & 5i \end{pmatrix}$ Indicar las propiedades usadas

2) Si A es una matriz 3x3 con det(A) = 5, ¿Cuál es el determinante de A^T, de 3A, de $\frac{1}{2}.A$, de -2A , de A^2, de $(A^T)^3$, de $(3A)^4$? Indicar las propiedades usadas.

3) Sea B $\in \mathbb{R}^{5x5}$ tal que det(B)=2. Indicar cuál es el valor del determinante de la matriz que se obtiene si se multiplica la fila 3 por 4 y la columna 2 por 3.

4) a) Probar que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

b) Sean A, B, C matrices *nxn*, tales que C tiene inversa y **A = C.B.C $^{-1}$.**

Probar que det(A) = det(B). Fundamentar cada paso de la prueba.

c) Si A es 5x5 y el det (A) **= k**, hallar y justificar:

i) det (8.A) ii) $(6.A)^9$

d) Si B es *nxn* y el det B **= 10**, hallar det ($\frac{3}{4}$.B). Explicar.

e) Si D es 6x6 y el det(D) $=\frac{\sqrt{5}}{2}$, indicar cuál es el determinante de las matrices $10.D^4$, $(10.D)^4$ (explique la diferencia entre ambas), indicar los determinantes de $\frac{4}{5}.D^3$, $\left(\frac{4}{5}.D\right)^3$ (explique la diferencia entre ambas).

5) Si *A*, *B*, C son matrices 5x5, det(A)=3, det(*B*)=2 y det(*C*)=6, indicar cuánto valen:

a) $\det\left(A^T.\left(\frac{1}{3}B\right).A^3.\left(\frac{1}{5}B^{-1}\right)\right)$

b) $\det\left(\left(\frac{1}{2}B^T\right).\left(A^T\right)^4.(B.A)^{-1}\right)$

c) $\det\left(\left(\frac{5}{3}(B.C)^T\right)^3.\left(\left(\frac{1}{2}B\right).A^{-1}\right)^4.(C^T.B.A)^{-1}\right)$

<u>Mencionar todas las propiedades usadas en cada paso. Justificar todas las respuestas.</u>

6) Decidir si las siguientes matrices tienen o no inversa:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ -3 & -6 & -9\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

7) Hallar los valores de *k* para que las siguientes matrices tengan inversa

$$A=\begin{pmatrix}1 & k+2\\ -(k-2) & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}k-5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & k+5\end{pmatrix}$$

8) Sean A, B matrices *nxn*. Decidir por propiedades del determinante si las siguientes afirmaciones son V o F. Justificar.

a) Si A no tiene inversa, entonces A.B no tiene inversa

b) Si A tiene inversa y B no, entonces A.B no tiene inversa.

c) Si A.B no tiene inversa, entonces ni A ni B tienen inversa.

d) Si A.B no tiene inversa, entonces al menos una de las dos, A o B, no tiene inversa.

e) Si det(A)=det(B) entonces A=B

9) Decidir si hay valores de *k* (y encontrarlos) para los que el siguiente sistema sea compatible determinado, justificar la respuesta.

$$\begin{cases} 3(k+5).x_1 + 9.x_2 - x_3 = b_1 \\ \qquad\qquad 6.x_2 + 12.x_3 = b_2 \\ 5.x_1 \quad + (1-k).x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

10) Analizar si la función determinante es o no inyectiva y si es o no suryectiva.

11) Calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 78 & 45 \\ 0 & 5 & -87 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 230 & 5 & 0 \\ -80 & 32 & 3 \end{pmatrix}$

12) Tomando los resultados del ejercicio 11, puede decir ¿cuánto vale el determinante de una matriz triangular inferior o triangular superior? Demuestre por inducción lo que afirma.

13) Otra forma de calcular determinantes de matrices grandes es realizar operaciones elementales para llevar la matriz a una triangular inferior o superior, si realizamos sólo la operación de sumarle a una fila un múltiplo de otra, el determinante de la matriz resultante es el mismo que el de A. Realice estas operaciones para calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ANEXO:

OTRA APLICACIÓN

Las matrices inversas se pueden usar para proporcionar un procedimiento simple y efectivo para codificar y decodificar mensajes.

Para codificar un mensaje los elementos que se requieren son: un emisor, un receptor, un mensaje y un código.

Cuando hablamos de código, estamos hablando de un método de codificación, es decir algún algoritmo biunívoco (una función biyectiva), que asigne a cada carácter del mensaje otro carácter. Este método hace que el mensaje enviado por el emisor se transforme en una cadena de símbolos ilegibles para el resto de los receptores que no sean legales.

Dependiendo de la calidad del método de codificación, el mensaje será más o menos difícil de descifrar si es capturado por receptores ilegales.

Método de encriptación:

* A las letras del alfabeto se le asignan los números del 1 al 27. Al espacio en blanco se le asigna el número 28, para poder separar palabras. Esta es una posibilidad, también podrían asignarse las letras en orden decreciente o comenzando por el número 3, etc.

* Cualquier matriz cuyos elementos sean enteros positivos y sea invertible se puede usar como matriz de codificación.

* Si la matriz de código es de nxn se construye con el mensaje una matriz de n filas y tantas columnas como sean necesarias, escribiendo los números por columna y rellenando al final con espacios en blanco si fuera necesario.

* Luego se multiplica a izquierda por la matriz de código y el resultado es el mensaje codificado.

* Para recuperar el mensaje se multiplica la matriz anterior a izquierda por la inversa de la matriz de código.

Ejemplo:

Mensaje a codificar: **“vuelvo mañana”**

Secuencia que le corresponde:

23 21 5 12 23 16 28 13 1 15 1 14 1

Matriz de código, se elige cualquiera que sea invertible, debe ser conocida por el emisor y el receptor: **C=**$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Construcción de la matriz A (tendrá dos filas): $\begin{pmatrix} 23 & 5 & 23 & 28 & 1 & 1 & 1 \\ 21 & 12 & 16 & 13 & 15 & 14 & 28 \end{pmatrix}$

Multiplicando CA, se obtiene: B= $\begin{pmatrix} 86 & 41 & 71 & 67 & 46 & 43 & 85 \\ 67 & 22 & 62 & 69 & 17 & 16 & 30 \end{pmatrix}$

El receptor es quien recibe esta matriz y debe conocer la inversa de la matriz de código para recuperar el mensaje.

En este caso **C^{-1}=**$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ entonces al realizar el producto C^{-1} .B= C^{-1} . C. A= I. A=A y se recupera el mensaje en forma matricial. Es evidente que el receptor debe conocer tanto la primera fase de la codificación, es decir que número le corresponde a cada letra, como la segunda fase, es decir la matriz de código.

<u>Bibliografía</u>

- R. Espinosa Armenta, **Matemáticas discretas**, Editorial Alfaomega, Mexico, 2010
- Smith, et al , **Algebra, trigonometría y geometría analítica**, Pearson-Addison Wesley Longman, 1998
- Swokoski, Earl W. y Cole, Jeffery A., **Algebra y trigonometría con geometría analítica,** 11ma ed., Editorial Thomson, 2006