Matemática 3 – Curso 2016

Práctica 4: Variables aleatorias continuas – Funciones de distribución
Uniforme, Exponencial y Normal.

1. Un maestro universitario nunca termina su clase antes que suene la campana, y siempre termina su clase a menos de 1 min después que suena la campana. Sea $X =$*tiempo que tanscurre entre la campana y el término de la clase* y suponga que la función de densidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & cc \end{cases}$$

   (a) Encuentre el valor de k.

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la clase termine a menos de $1/2$ min después de que suene la campana?

2. Una barra de 12 pulgadas, que está sujeta por ambos extremos, debe someterse a una creciente cantidad de esfuerzo hasta que se rompa. Sea la v.a. X : *"distancia desde el extremo izquierdo en el que ocurre la rotura"* Suponga que la f.d.p. de X es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{24}\left(1 - \dfrac{x}{12}\right) & 0 < x < 12 \\ 0 & cc \end{cases}$$

   (a) Hallar la Fda de X.

   (b) Calcular la $P(X \leq 4)$, $P(X > 6)$ y $P(4 \leq X \leq 6)$

   (c) Hallar $E(X)$, $E(X^2)$ y $V(X)$

   (d) ¿Cuál es la probabilidad de que el punto de ruptura ocurra a más de 2 pulgadas del punto esperado de ruptura?

   (e) ¿Y la probabilidad de que el segmento más corto cuando ocurra la ruptura sea mayor a 3 pulgadas?.

3. La Fda de la v.a. X está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

   (a) Hallar la fdp de X . Calcular $E(X)$ y $V(X)$

   (b) Calcular $P(X \leq 1)$, $P(1/2 \leq X \leq 1)$

4. El tiempo en horas empleado diariamente en transporte por los trabajadores de una gran ciudad es una v.a. continua con densidad

$$f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x} & x > 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

   (a) Calcular la probabilidad de que un trabajador emplee más de media hora en transporte.

   (b) Los trabajadores de un barrio periférico emplean al menos una hora, ¿cuál es la probabilidad de que no superen la hora y media?

5. El tiempo total, medido en unidades de 100 horas, que un adolescente utiliza su estéreo en un período de un año es una v.a. continua X con densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.25x & 0 < x < 2 \\ 1 - 0.25x & 2 \leq x < 4 \\ 0 & cc \end{cases}$$

   Calcule la esperanza de la v.a. $Y = 60X^2 + 39X$, donde Y es igual al número de kilowatt-hora que gasta al año.

6. Se piensa que el tiempo X (en minutos) para que un asistente de laboratorio prepare el equipo para cierto experimento, tiene una distribución uniforme en el intervalo $(25, 35)$

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación exceda los 33 min?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación se encuentre dentro de 2 min del tiempo medio?

7. El tiempo X que tarda (en segundos) un bibliotecario para localizar una ficha en el archivo de registros, tiene una distribución exponencial con media $20seg.$

   (a) Calcule $P(X \leq 30)$, $P(X \geq 20)$y $P(20 \leq X \leq 30)$

   (b) Para qué valor de t se cumple $P(X \leq t) = 0.5$

8. Sea Z la v.a. normal estándar.

   (a) Calcule las siguientes probabilidades: *i)*$P(Z \leq 2.17)$, *ii)*$P(Z > 1.37)$, *iii)*$P(0 \leq Z \leq 2.50)$, *iv)*$P(-2.17 \leq Z \leq 0)$, *v)*$P(Z \geq 2)$, *vi)*$P(|Z| \leq 2.50)$

   (b) Hallar los valores de z que verifiquen: *i)* $P(Z \leq z) = 0.9838$, *ii)* $P(Z > z) = 0.121$, *iii)* $P(|Z| \geq z) = 0.016$, *iv)* $P(-z \leq Z \leq z) = 0.668$.

9. Sea X una v.a. normal con media 80 y desvío 10. Calcular: *i)* $P(X \leq 100)$, *ii)* $P(65 \leq X \leq 95)$, *iii)* $P(|X - 80| \leq 10)$.

10. El volumen de latas llenadas por cierta máquina se distribuye normalmente con media de 12.05 onzas y desviación estándar de 0.03 onzas.

    (a) ¿Qué proporción de latas contiene menos de 12 onzas?

    (b) La media del proceso se puede ajustar utilizando calibración. ¿En qué valor debe fijarse la media para que el 99% de las latas contenga 12 onzas o más?

    (c) Si la media del proceso sigue siendo 12.05 onzas, ¿en qué valor debe fijarse la desviación estándar para que 99% de las latas contenga 12 onzas o más?

11. La holgura de las válvulas de entrada de unos motores nuevos de cierto tipo se distribuye normalmente con media 200 μm y desviación estándar 10 μm.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la holgura sea mayor a 225 μm?

    (b) Un motor tiene 6 válvulas de entrada. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo dos de ellas tengan holguras mayores a 225 μm?

12. La desigualda de Chebyshev, introducida en el ejercicio 14 de la práctica 3, es válida para distribuciones continuas y discretas. Obtenga la probabilidad $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ para el caso de una ditribución normal para $k = 1, 2$ y 3 y compare con la cota superior $\left(1/k^2\right)$ proporcionada por la desigualdad.