数学建模案例选讲

优化建模——国赛2021C

数学规划(Mathematical Programming)模型

$\min z = f(X)$ (或$\max z = f(X)$)

s.t. $X \in S\ (\subset R^n)$

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$

若能写出描述 S 的数学式子,则可直接写出.

例如: $\max z = kxy^2 \quad (k > 0)$

s.t. $x^2 + y^2 = d^2,$

$x > 0, y > 0.$

这里 $X = (x, y)^{\mathrm{T}},$

$S = \{(x, y)^{\mathrm{T}} \mid x^2 + y^2 = d^2, x > 0, y > 0\}$

若S可以用一系列不等式和(或)等式约束表示, 则数学规划问题可写为:

$$\min z = f(X)\ (\text{或} \max z = f(X))$$

$$\text{s.t.}\ \ g_i(X) \le 0,\ i = 1, \dots, p$$

$$h_j(X) = 0,\ j = 1, \dots, q$$

其中, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $f(X)$, $g_i(X)$, $h_j(X)$为X 的实值函数.

我们将该模型简记为MP(Mathematical Programming)

数学规划问题的几个概念

$\min z = f(X)$ (或$\max z = f(X)$)

s.t. $X \in S\ (\subset R^n)$

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$

$f(X)$: 目标函数

S: 可行域

描述 S的数学式子:约束条件

X: 决策变量

若$S = \Phi$, 则称该数学规划问题不可行;若$S \neq \Phi$, 则该问题可行.

若$X \in S$, 则称X 可行解.

定义: 对于数学规划问题(MP), 若$X^* \in S$, 并且有

$$f(X^*) \le f(X),\ \forall\ X \in S$$

则称X^*是(MP)的全局最优解或全局极小点, 称$f(X^*)$是(MP)的全局最优值或全局极小值.

如果有

$$f(X^*) < f(X),\quad \forall\ X \in S,\ X \neq X^*$$

则称X^*是(MP)的严格全局最优解或严格全局极小点, 称$f(X^*)$是(MP)的严格全局最优值或严格全局极小值.

定义: 对于数学规划问题(MP), 若$X^* \in S$, 并且存在X^*的邻域 $N_\delta(x^*) = \{X \in \mathbf{R}^n \mid \|X - X^*\| < \delta\}$, 使

$$f(X^*) \le f(X), \forall X \in N_\delta(X^*) \cap S$$

则称X^*是(MP)的局部最优解或局部极小点, 称$f(X^*)$是(MP)的局部最优值或局部极小值.

如果有

$$f(X^*) < f(X), \forall x \in N_\delta(X^*) \cap S, X \ne X^*$$

则称X^*是(MP)的严格局部最优解或严格局部极小点, 称$f(X^*)$是(MP)的严格局部最优值或严格局部极小值.

数学规划问题的分类

$$\min z = f(X)\ (\text{或}\max z = f(X))$$

$$\text{s.t.}\ \ g_i(X) \le 0,\ i = 1, \ldots, p$$

$$h_j(X) = 0,\ j = 1, \ldots, q$$

☺若$f(X)$, $g_i(X)$, $h_j(X)$为线性函数, 即为线性规划(LP);

☺若$f(X)$, $g_i(X)$, $h_j(X)$至少一个为非线性, 即为非线性规划(NLP);

☺对于非线性规划, 若没有$g_i(X)$, $h_j(X)$, 即$S = R^n$, 称为无约束非线性规划或无约束最优化问题; 否则称为约束非线性规划或约束最优化问题.

线性规划模型

$$\max\ (\text{或}\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = (\leq, \geq)\ b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = (\leq, \geq)\ b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n = (\leq, \geq)\ b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n \geq (\leq)\ 0\ (\text{或者无限制})$$

$c^T = (c_1, c_2, \ldots c_n)$: 价值向量

$c_j, j = 1, 2, \ldots, n$: 价值系数

$A = (a_{ij})_{m\times n}$: 系数矩阵

$b = (b_1, b_2, \ldots b_m)^T$:
右端向量、资源向量

$x_j, j = 1, 2, \ldots, n$: 决策变量

用Matlab解线性规划问题

[x, fval] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, options)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f^T X \\
\text{s.t.} \quad & A X \le b \\
& Aeq\, X = beq \\
& lb \le X \le ub
\end{aligned}
$$

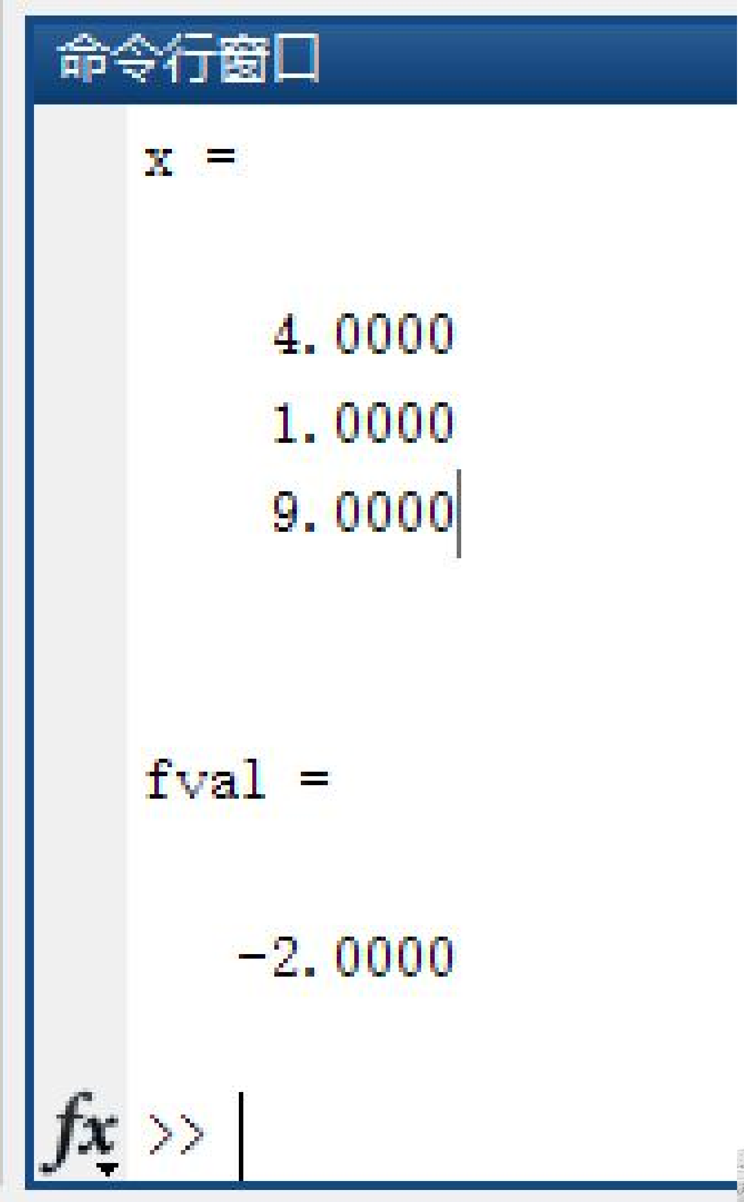
其中 f, X, lb, ub 为 n 维列向量, A为 $k\times n$ 矩阵, Aeq为 $m\times n$ 矩阵.

[x, fval, exitflag, …] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub, options)

exitflag 描述程序运行的情况, 取值为1时表明程序收敛于解x.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 - x_2 - x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\
& -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\
& -2x_1 + x_3 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

```
clc;clear all;
f=[-3,1,1];
A=[1,-2,1;4,-1,-2];
b=[11,-3];
Aeq=[-2,0,1];
beq=[1];
lb=[0,0,0];
[x,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[])
```



```
clc;clear all;
f=[-3,1,1];
A=[1,-2,1;4,-1,-2];
b=[11,-3];
Aeq=[-2,0,1];
beq=[1];
lb=[0,0,0];
opts = optimoptions(@linprog,…
        'Algorithm','simplex');
[x,fval,exitflag,output]=linprog(f,…
        A,b,Aeq,beq,lb,[],zeros(3,1),opts)
```

注: 虽然单纯形法不需要初始点(这里是zeros(3,1)), 但若没有这个输入参数, 程序会报错.

命令行窗口

```
The simplex algorithm uses a built-in starting point;
ignoring user-supplied X0.
Optimization terminated.

x =

     4
     1
     9


fval =

    -2


exitflag =

     1


output =

         iterations: 1
          algorithm: 'simplex'
       cgiterations: []
            message: 'Optimization terminated.'
    constrviolation: 0
      firstorderopt: 2.2204e-16
```

整数(线性)规划模型

整数规划是规划论中的一个重要分支。

经济管理中的大量问题抽象为模型时，人们发现许多量具有不可分割性，因此当它们被作为变量引入到规划中时，常要求满足取整条件。如生产计划中，生产机器多少台（整数）；人力资源管理中，招聘员工多少人（整数）；运输问题中，从一个港口到另一个港口的集装箱调运数量（整数）；另外，运作管理中的决策问题：如工厂选址、超市选址、人员的工作指派、设备购置和配置等。

常用解法：割平面法、分枝定界法等

用Matlab解整数规划问题

[x, fval] = intlinprog(f, intcon, A, b, Aeq, beq, lb, ub, options)

$$\max z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 4x_2 + x_3 \le 6 \\ x_i = 0 \text{ or } 1, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

```
f = [–3; 2; –5];
intcon = [1, 2, 3];
A = [1, 2, –1; 1, 4, 1; 1, 1, 0; 0, 4, 1];
b = [2; 4; 3; 6];
lb = zeros(3,1);
ub = ones(3,1);
[x, fval] = intlinprog(f, intcon, A, b, [], [], lb, ub)
```

最优解为: $x = [1; 0; 1]$

$fval = -8$

最优值为: 8

```
clear all;clc;
f = [-3; 2; -5];
intcon = 1:3;
A = [1,2,-1;1,4,1;1,1,0;0,4,1];
b=[2;4;3;6];
lb=zeros(3,1);
ub=ones(3,1);
[x,fval]=intlinprog(f,intcon,A,b,[],[],lb,ub)
```

命令行窗口

```
x =

     1
     0
     1


fval =

    -8
```

非线性规划模型

如果目标函数和(或)约束条件中包含有自变量的非线性函数, 则这样的规划问题就属于**非线性规划**

一般来说, 求解非线性规划问题比线性规划问题困难得多. 而且, 也不象线性规划那样有单纯形法这一通用的方法. 非线性规划的各种算法大都有自己特定的使用范围, 都有一定的局限性. 到目前为止还没有适合于各种问题的一般算法.

除了一些特殊的情况, 几乎所有的非线性规划寻优方法求得的结果都是局部最优解.

无约束(非线性)规划问题

$$\min_{X} F(X)$$

迭代方法：从某个初始点 X_0 开始, 按如下方式迭代

$$X_{k+1} = X_k + \alpha_k P_k$$

其中: 向量 P_k 是搜索方向, $\alpha_k > 0$是搜索步长.

终止条件: $\|X_{k+1} - X_k\| < \varepsilon_1$ 或/和 $\|F(X_{k+1}) - F(X_k)\| < \varepsilon_2$

无约束规划的Matlab解法

在Matlab工具箱中, 用于求解无约束极小值问题 $\min\limits_{x} F(x)$ 的函数有fminunc和fminserach

[x,fval,exitflag] = fminunc(fun, x0, options)

fun: 用m文件定义的函数.

当fun只有一个返回值时, 返回值是目标函数$F(x)$;

当fun有两个返回值时, 第二个返回值是函数$F(x)$的梯度;

当fun有三个返回值时, 第三个返回值是函数$F(x)$的Hessian矩阵.

x0: 初始可行解;　options: 优化参数;

exitflag: 函数运行结束是解的状态. 可能取值为–3, –1, 0, 1, 2, 3, 5

exitflag > 0: 算法收敛; exitflag = 0: 超过最大迭代次数.

x: 最优解;　fval: 最优值.

[x,fval,exitflag] = fminsearch(fun, x0, options)

fun: 用m文件定义的函数, 返回值是目标函数$F(x)$.

exitflag: 函数运行结束是解的状态. 可能取值为–1, 0, 1

exitflag = 1: 算法收敛; exitflag = 0: 超过最大迭代次数;
exitflag = –1:算法被外部函数终止.

例1: 求多元函数 $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值.

```
clc, clear
%定义匿名函数;
F=@(x) x(1)^3 - x(2)^3 + 3*x(1)^2 + 3*x(2)^2 - 9*x(1);
G=@(x) -F(x);

[xy1,z1,exitflag1]=fminunc(F,rand(2,1)); %求极小值点
[xy2,z2,exitflag2]=fminsearch(G,rand(2,1)); %求极大值点
xy2, z2= -z2
```

求得极小值点为(1, 0), 极小值为–5; 极大值点为(–3, 2), 极大值点为31.

例2: 求多元函数 $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ 的极小值.

使用函数的梯度信息.

编写m文件fun3.m如下:

```
function[f,g]=fun3(x);
f=100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;
g=[-400*x(1)*(x(2)-x(1)^2)-2*(1-x(1)); 200*(x(2)-x(1)^2)]; %梯度向量
```

编写主程序文件如下:

```
options = optimset('GradObj', 'on');
[x,y,exitflag] = fminunc('fun3', rand(1,2), options)
```

求得极小值点(1, 1), 极小值为5.8672×10^{-13}, 近似为0.

也可以使用**Hessian**矩阵信息．编写**m**文件**fun4.m**如下：

```
function[f,df,d2f]=fun4(x);
f=100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;
df=[-400*x(1)*(x(2)-x(1)^2)-2*(1-x(1)); 200*(x(2)-x(1)^2)]; %梯度向量
d2f = [-400*x(2)+1200*x(1)^2, -400*x(1); -400*x(1),200]; %Hessian
```

编写主程序文件如下：

```
options = optimset('GradObj', 'on', 'Hessian', 'on');
[x,y,exitflag] = fminunc('fun4', rand(1,2), options)
```

用Matlab解非线性规划问题

Matlab中非线性规划问题写成如下形式:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
\text{s.t.} \quad & A\,x \le b \\
& Aeq\,x = beq \\
& c(x) \le 0 \\
& ceq(x) = 0 \\
& lb \le X \le ub
\end{aligned}
$$

**[x,fval,exitflag] = fimincon(fun,x0,A,b,…
Aeq,beq, lb, ub, nonlcon, options)**

其中$f(x)$是标量函数, A, b, Aeq, beq, lb, ub是相应维数的矩阵和向量, $c(x)$, $ceq(x)$是非线性向量函数.

[x,fval,exitflag] = fimincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq, lb, ub, nonlcon, options)

fun: 用m文件定义的函数$f(x)$;

x0: 初始可行解;

nonlcon: 用m文件定义的非线性向量函数$c(x)$, $ceq(x)$;

options: 优化参数, 可以使用Matlab缺省的参数设置;

exitflag: 函数运行结束是解的状态. 可能取值为–3~5的整数.

exitflag = 1: 算法收敛; exitflag = 0: 超过最大迭代次数.

x: 最优解;

fval: 最优值;

例: 求解非线性规划问题

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8$$

$$\text{s.t. } x_1^2 - x_2 + x_3^2 \ge 0$$
$$x_1 + x_2^2 + x_3^2 \le 20$$
$$-x_1 - x_2^2 + 2 = 0$$
$$x_2 + 2x_3^2 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

(1) 编写m文件fun1.m定义目标函数.

```
function f = fun1(x)
        f = sum(x.^2) + 8;
end
```

(2) 编写m文件fun2.m定义非线性约束条件.

```
function [g,h] = fun2(x)
        g = [–x(1)^2 + x(2) –  x(3)^2;…
         x(1) + x(2)^2 + x(3)^2 – 20];
%非线性不等式约束
        h = [–x(1) – x(2)^2 + 2; …
         x(2) + 2*x(3)^2 – 3];
%非线性等式约束
end
```

(3) 编写主程序文件或在命令行窗口输入命令求解.

```
[x,y,ef]=fmincon(‘fun1’,rand(3,1),[],[],[],[],…
     zeros(3,1),[],‘fun2’);
```

也可以写为:

```
[x,y,ef]=fmincon(@fun1,rand(3,1),[],[],[],[],zeros(3,1),[],@fun2);
```

运算结果:

x = [0.5522; 1.2033; 0.9478], y = 10.6511

2021年高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目

C题 生产企业原材料的订购与运输

某建筑和装饰板材的生产企业所用原材料主要是木质纤维和其他植物素纤维材料，总体可分为 A、B、C 三种类型。该企业每年按 48 周安排生产，需要提前制定 24 周的原材料订购和转运计划， 即根据产能要求确定需要订购的原材料供应商（称为“供应商”）和相应每周的原材料订购数量（称为“订货量”），确定第三方物流公司（称为“转运商”）并委托其将供应商每周的原材料供货数量（称为“供货量”）转运到企业仓库。

该企业每周的产能为2.82 万立方米，每立方米产品需消耗 A 类原材料 0.6 立方米，或 B 类原材料 0.66 立方米，或 C 类原材料 0.72 立方米。由于原材料的特殊性，供应商不能保证严格按订货量供货，实际供货量可能多于或少于订货量。为了保证正常生产的需要，该企业要尽可能保持不少于满足两周生产需求的原材料库存量，为此该企业对供应商实际提供的原材料总是全部收购。

在实际转运过程中，原材料会有一定的损耗（损耗量占供货量的百分比称为“损耗率”），转运商实际运送到企业仓库的原材料数量称为“接收量” 。每家转运商的运输能力为 6000 立方米/周。通常情况下，一家供应商每周供应的原材料尽量由一家转运商运输。

原材料的采购成本直接影响到企业的生产效益，实际中 A 类和 B 类原材料的采购单价分别比 C 类原材料高 20%和10% 。三类原材料运输和储存的单位费用相同。

附件1 给出了该企业近 5 年 402 家原材料供应商的订货量和供货量数据。附件 2 给出了 8 家转运商的运输损耗率数据。请你们团队结合实际情况，对相关数据进行深入分析，研究下列问题：

1. 根据附件 1 对 402 家供应商的供货特征进行量化分析， 建立反映保障企业生产重要性的数学模型，在此基础上确定 50 家最重要的供应商，并在论文中列表给出结果。

2. 参考问题 1，该企业应至少选择多少家供应商供应原材料才可能满足生产的需求？针对这些供应商，为该企业制定未来 24 周每周最经济的原材料订购方案，并据此制定损耗最少的 转运方案。 试对订购方案和转运方案的实施效果进行分析。

3. 该企业为了压缩生产成本，现计划尽量多地采购 A 类和尽量少地采购 C 类原材料，以减少转运及仓储的成本，同时希望转运商的转运损耗率尽量少。 请制定新的订购方案及转运方案，并分析方案的实施效果。

4. 该企业通过技术改造已具备了提高产能的潜力。根据现有原材料的供应商和转运商的实际情况， 确定该企业每周的产能可以提高多少并给出未来 24 周 的订购和转运方案。

注：请将问题2 、问题 3 和问题 4 订购方案的数值结果填入附件 A，转运方案的数值结果填入附件B，并作为支撑材料（勿改变文件名）随论文一起提交。

读入数据

```
num = xlsread(filename);
```

读入EXCEL文件filename的首张工作表的数值数据, 返回array 格式的num

```
num = xlsread(filename,sheet,xlRange);
```

```
[num, txt, raw] = xlsread(___);
```

返回数值数据num (array格式), 文本单元数据txt (cell格式), 所有数据(文本和数值) raw (cell格式)

order = xlsread('附件1 近5年402家供应商的相关数据');

order：402×240 double, 订货量数据

[order,order_class,order_all]=xlsread('附件1 近5年402家供应商的相关数据');

order：402×240 double, 订货量数据；
order_class：403×242 cell；order_all：405×242 cell

supply = xlsread('附件1 近5年402家供应商的相关数据',2);

[supply,supply_class,supply_all]=xlsread('附件1 近5年402家供应商的相关数据',2);

order

402x240 double

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	43	0	0	0	0
2	1	1	0	1	0	0	0	0
3	7	1	0	0	0	1	4	50
4	0	1	1	100	0	85	0	0
5	30	60	60	60	70	70	60	70
6	0	0	0	0	0	0	0	1
7	8	150	30	200	20	20	20	10
8	0	0	0	0	1	0	0	1
9	0	0	0	0	1	0	0	0
10	30	1	0	65	0	55	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0

变量 - order_class

order_class

403x242 cell

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	供应商ID	材料分类	W001	W002	W003	W004	W005	W006	W00
2	S001	B							
3	S002	A							
4	S003	C							
5	S004	B							
6	S005	A							
7	S006	C							
8	S007	A							
9	S008	C							
10	S009	B							
11	S010	B							

变量 - order_all

order_all

405x242 cell

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	'供应商ID'	'材料分类'	'W001'	'W002'	'W003'	'W004'	'W005'	'W006'	'W0(
2	'S001'	'B'	0	0	0	43	0	0	0
3	'S002'	'A'	1	1	0	1	0	0	0
4	'S003'	'C'	7	1	0	0	0	1	4
5	'S004'	'B'	0	1	1	100	0	85	0
6	'S005'	'A'	30	60	60	60	70	70	60
7	'S006'	'C'	0	0	0	0	0	0	0
8	'S007'	'A'	8	150	30	200	20	20	20
9	'S008'	'C'	0	0	0	0	1	0	0
10	'S009'	'B'	0	0	0	0	1	0	0
11	'S010'	'B'	30	1	0	65	0	55	0

问题分析

核心问题：选择并量化供货特征，确定订购方案和转运方案。

关键词：产能、订货量、转运量、接收量、库存量、损耗量、损耗率。

供货特征：供货量、订货完成率、供货率、稳定性和连续性。

订购方案：每周的供应商、订货量和库存量。

转运方案：每周的转运商、转运量、损耗量、接收量。

关键问题：供货特征选取与量化，供货能力、订购成本、供货量、接收量、库存量、产能增加量的核算。

问题一

根据附件 1 对 402 家供应商的供货特征进行量化分析， 建立反映保障企业生产重要性的数学模型，在此基础上确定 50 家最重要的供应商，并在论文中列表给出结果。

排序

- 按哪些指标排序
  - 选取供货特征
  - 构建评价指标
- 排序方法

数据初探及预处理

企业5年来分别在各供应商的总订货量

最多481103，最少23，平均14501.05

各供应商的5年来的总供应量

最多354887，最少28，平均11001.7

供应量-订货量

部分供应商只是偶尔供货，部分供应商周期性供货。

- 供货量极少的部分供货商(比如总供货量 < 10)可预先剔除。
  或者剔除总供货量少，且缺货量大的次数较多的供应商

- 每立方米产品消耗的各类原材料数量不同，可先按单位产量折算。

$$p_i = \begin{cases} 0.6, & \text{供应商}i\text{为A类} \\ 0.66, & \text{供应商}i\text{为B类} \\ 0.72, & \text{供应商}i\text{为C类} \end{cases}$$

1、供货特征的选取与量化

$g_{i,t}$: 供货商 i 在第 t 周的供货量;

$d_{i,t}$: 厂家在第 t 周向供货商 i 订购的订货量;

(1) 供货量

供货次数 $n_i = \sum_{t=1}^{240} \mathrm{sign}(d_{i,t})$ (也可取供货量 $\geq 10\mathrm{m}^3$ 的供货次数)

平均供货量 $\mu_i = \dfrac{1}{n_i} \sum_{t=1}^{240} \dfrac{g_{i,t}}{p_i}$

注: 将平均供货量定义为 $\dfrac{1}{240} \sum_{t=1}^{240} \dfrac{g_{i,t}}{p_i}$, 或用总供货量 $\sum_{t=1}^{240} \dfrac{g_{i,t}}{p_i}$

就没有考虑到供货次数的影响。

$$\text{市场占有率：}\frac{\text{供货商的总供货量}}{\text{所有供应商总供货量}}\times 100\%$$

$$G_i=\frac{\sum_{t=1}^{240} g_{i,t}/p_i}{\sum_{i=1}^{402}\sum_{t=1}^{240} g_{i,t}/p_i}\quad (i=1,2,\ldots,402)$$

(2) 供货率

第i个供应商的供货量占所有供应商总订货量的比例：$F_i=\dfrac{\sum_{t=1}^{240} g_{i,t}/p_i}{\sum_{i=1}^{402}\sum_{t=1}^{240} d_{i,t}/p_i}$

(3) 订货完成率

第t周第i个供应商订单的完成率：$s_{i,t}=\begin{cases}1, & g_{i,t}\ge d_{i,t}>0\\ \dfrac{g_{i,t}}{d_{i,t}}, & 0<g_{i,t}<d_{i,t}\\ 0, & 0=g_{i,t}\le d_{i,t}\end{cases}$

第i个供应商五年完成订货量次数占总订购次数的比率：

$$h_i=\frac{1}{n_i}\sum_{t=1}^{240}s_{i,t}\qquad n_i=\sum_{t=1}^{240}\mathrm{sign}(d_{i,t})$$

第i个供应商过去五年总完成率：$H_i=G_ih_i=\dfrac{G_i}{n_i}\sum_{t=1}^{240}s_{i,t}$

(4) 供货稳定性

第i个供应商的供货稳定性指标：$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{n_i}\sum_{t:d_{i,t}>0}\left(\frac{g_{i,t}}{p_i}-\mu_i\right)^2}$

即供货量的标准差.

(5) 供货连续性

第i个供应商的供货稳定性指标：$o_i = \sum_{t=1}^{240}[1-\mathrm{sign}(g_{i,t})]$

即在240周中没有供货的次数.

2. 反映供应商重要性的模型

(1) 供货量均值

供货量均值 μ_i (i = 1, 2, ..., 402)是反映了供应商实际的供货量大小的指标, 不同供应商的数值差异很大. 可单独作为一个评价指标.

(2) 供货率与订货完成率

二者都是反映订单完成情况的指标, 既不相同, 又非独立. 可定义一个综合指标.

对F_i和H_i标准化:

$$F_i' = 1 + \frac{F_i - \min\limits_{1\le i\le 402} F_i}{\max\limits_{1\le i\le 402} F_i - \min\limits_{1\le i\le 402} F_i}, \qquad H_i' = 1 + \frac{H_i - \min\limits_{1\le i\le 402} H_i}{\max\limits_{1\le i\le 402} H_i - \min\limits_{1\le i\le 402} H_i}$$

综合指标: $FH_i = \sqrt{F_i' \cdot H_i'}$

(3) 供货稳定性和连续性

供货稳定性反映供货量平稳性, 而供货连续性反映供货次数的多少和连续性. 二者有共同的特性, 但含义完全不同.

二者均是取值越小越好. 可定义一个综合指标.

对σ_i和o_i标准化:

$$\sigma_i' = \frac{\sigma_i - \min\limits_{1\le i\le 402} \sigma_i}{\max\limits_{1\le i\le 402} \sigma_i - \min\limits_{1\le i\le 402} \sigma_i}, \qquad o_i' = \frac{o_i - \min\limits_{1\le i\le 402} o_i}{\max\limits_{1\le i\le 402} o_i - \min\limits_{1\le i\le 402} o_i}$$

综合指标: $K_i = \sigma_i' + o_i'$

3. 确定最重要的供应商

对各供应商分别按指标μ_i, FH_i 从大到小排序, 按指标K_i 从小到大排序, 得到各供应商分别按三项指标排序的位次$s(\mu_i)$, $s(FH_i)$和$s(K_i)$ ($i = 1, 2, ..., 402$).

令 $S_i = s(\mu_i) + s(FH_i) + s(K_i)$

按优先级 $S_i \succ s(\mu_i) \succ s(FH_i) \succ s(K_i)$ 从小到大排序, 即得各供应商的重要性排序结果.

权重及综合评价得分

熵权法-TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)

一、熵权法

设评价对象i的第j项指标的得分为a_{ij}

1) 归一化:

对极大化指标: $b_{ij}=\dfrac{a_{ij}-\min_i a_{ij}}{\max_i a_{ij}-\min_i a_{ij}}$

对极小化指标: $b_{ij}=\dfrac{\max_i a_{ij}-a_{ij}}{\max_i a_{ij}-\min_i a_{ij}}$

2) 求各指标的信息熵:

$$E_j = -\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\ln p_{ij} \qquad \text{其中} \quad p_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}}$$

若$p_{ij} = 0$, 则取 $p_{ij}\ln p_{ij} = 0$.

3) 确定各指标的权重:

$$w_j = \frac{D_j}{\sum_j D_j}, \quad D_j = 1 - E_j$$

二、TOPSIS

1) 对熵权法中归一化评分数据$\{b_{ij}\}$, 按熵权法得到的权重 $w_1, w_2, \ldots, w_m$, 计算加权评价数据 $r_{ij} = w_j b_{ij}$;

2) 记$r_j^+ = \max_i\{r_{ij}\}$, $r_j^- = \min_i\{r_{ij}\}$, 取正理想解$A^+ = (r_1^+, r_2^+, \ldots, r_m^+)$, 负理想解$A^- = (r_1^-, r_2^-, \ldots, r_m^-)$, 计算各评价对象与$A^+$和$A^-$的欧式距离：

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(r_j^+ - r_{ij})^2}, \quad d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(r_j^- - r_{ij})^2}$$

3) 评价对象i的最终得分：$S_i = \dfrac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}$

问题二

2. 参考问题 1，该企业应至少选择多少家供应商供应原材料才可能满足生产的需求？针对这些供应商，为该企业制定未来 24 周每周最经济的原材料订购方案，并据此制定损耗最少的转运方案。 试对订购方案和转运方案的实施效果进行分析。

一、供应商选择

二、原材料订购方案

三、原材料转运方案

一、供应商选择

估计各供应商的最大供货能力，按最大供货能力选取能满足要求的供应商.

异常值处理：

供应商 i (折算后)供货量的偏度 $\frac{1}{n_i}\sum_{t:d_{i,t}>0}\left(\frac{g_{i,t}}{p_i}-\mu_i\right)^3$

按偏度大小排序，对大于四分位数的供货量数值$g_{i,t}$用其均值$\mu_i\, p_i$代替.

对供应商i 处理后的供货量数据，再计算均值μ_i'和方差σ_i^2. 按照3σ原则，供应商i 的最大供货能力$S_i \in [\mu_i' p_i, (\mu_i' + 3\sigma_i)p_i]$.

考虑前 N_0 家重要供应商, 相应的最大供货能力不妨取为

$$S_i = (\mu_i' + 3\sigma_i)p_i$$

事实上, 必然有前N_0家供应商, 满足

$$\sum_{i=1}^{N_0}\mu_i' \le 3P = 3\times 28200 \le \sum_{i=1}^{N_0}(\mu_i' + 3\sigma_i)$$

考虑订货完成率、供货率和损耗率等不确定因素的影响.

N_0 即为最少需要的供应商数目, 大约在50左右.

二、原材料订购方案

设已筛选出的N_0家供应商标号集为S, 供应三种不同材料的供应商标号集分别为A, B, C.

1. 决策变量

$d_{i,t}$: 厂家在第 t 周向供货商 i 订购的订货量, $i \in S$.

2. 目标函数

C_p : C类材料的单价； C_T : 材料运输和储存的单位费用;

若$i \in A$, 则单位产能成本: $C_i = 0.6 \times 1.2\ C_p + 0.6\ C_T = 0.72\ C_p + 0.6\ C_T$

若$i \in B$, 则 $C_i = 0.66 \times 1.1\ C_p + 0.66\ C_T = 0.726\ C_p + 0.66\ C_T$

若$i \in C$, 则 $C_i = 0.72\ C_p + 0.72\ C_T$

供货商 i 在第 t 周的供货量 $g_{i,t} = d_{i,t}(1 + \alpha_{i,t})$

$\alpha_{i,t}$: 供货商 i 在第 t 周的供货量偏差率

最小化生产成本: $\min \sum_{t} \sum_{i \in S} C_i (1 + \alpha_{i,t}) d_{i,t}$

3. 约束条件

1) 订货量不超过供应商最大稳定供货量: $0 \le d_{i,t} \le S_i$

2) 满足库存要求:

$$\sum_{i \in S} \frac{d_{i,t}(1+\alpha_{i,t})(1-L_{i,t})}{p_i} + R_{t-1} - P \ge 2P$$

$L_{i,t}$: 供应商 i 供应的原材料在第 t 周的转运损耗率; $p_i = \begin{cases} 0.6, & i \in A \\ 0.66, & i \in B \\ 0.72, & i \in C \end{cases}$

R_t: 第 t 周的库存可生产的产品量;

P: 每周的产能, 即$2.82 \times 10^4\ \mathrm{m}^3$.

该约束式左边即为R_t: $R_t = \sum_{i \in S} \frac{d_{i,t}(1+\alpha_{i,t})(1-L_{i,t})}{p_i} + R_{t-1} - P$

4. 参数选取

1) C类材料的单价C_p 与材料运输和储存的单位费用C_T 的比例:

参考第三问, C类材料的单位产量成本最高, 故

$$0.72\, C_p + 0.72\, C_T \geq 0.726\, C_p + 0.66\, C_T$$

可得 $C_T \geq C_p$

可先取$C_T = C_p$ 或 $C_T = 1.1C_p$ 进行求解, 后续再分析C_T / C_p 的值对最优解的影响.

2) 供货商 i 在第 t 周的供货量偏差率$\alpha_{i,t}$：

处理方法1：取为历史10个周期中相应周的平均偏差率

处理方法2：根据历史10个周期中相应周的偏差率数据, 估计偏差率的分布, 生成服从该分布的随机数.

处理方法3：将供货量具有明显周期性的供应商和供货量比较平稳的供应商分别处理.

3) 供应商 i 供应的原材料在第 t 周的转运损耗率$L_{i,t}$：

处理方法1：取历史平均损耗率

处理方法2：取为历史10个周期中相应周的平均损耗率

4) 初始库存可生产的产品量R_0：

方法1: 取$R_0 = 2P$

方法2: 由附件1统计, $R_0 = 37403$

线性规划模型

$$\min \quad \sum_{t}\sum_{i\in S} C_i(1+\alpha_{i,t})d_{i,t}$$

$$\text{s.t.} \quad 0 \le d_{i,t} \le S_i$$

$$\sum_{i\in S}\frac{d_{i,t}(1+\alpha_{i,t})(1-L_{i,t})}{p_i} + R_{t-1} - P \ge 2P$$

$$\left.\begin{array}{l} R_0 = 37403 \\ R_t = \displaystyle\sum_{i\in S}\frac{d_{i,t}(1+\alpha_{i,t})(1-L_{i,t})}{p_i} + R_{t-1} - P \end{array}\right\} \text{库存迭代}$$

$$i \in S, t = 1, 2, \ldots, 24.$$

三、原材料转运方案

求解订购模型, 得到第 t 周向供应商 i 的订货量 $d_{i,t}$, 供应商 i 的实际供货量 $g_{i,t} = d_{i,t}(1 + \alpha_{i,t})$

1. 决策变量

$T_{i,k,t}$: 第 t 周转运商 k 运输供货商 i 的货物量, $i \in S, k = 1, 2, ..., 8.$

2. 目标函数

转运损失最小 $\min \sum_{i\in S}\sum_{k=1}^{8}\frac{T_{i,k,t}}{p_i}L_{k,t}$ 或 $\min \sum_{i\in S}\sum_{k=1}^{8}T_{i,k,t}L_{k,t}$

$L_{k,t}$: 转运商 k 在第 t 周的损耗率

3. 约束条件

1) 转运商转运能力限制

$$\sum_{i\in S} T_{i,k,t} \le 6000, \qquad k = 1, 2, \ldots, 8.$$

2) 总供货量限制

$$\sum_{k=1}^{8} T_{i,k,t} \ge g_{i,t}, \qquad i \in S.$$

3) 转运量非负

$$T_{i,k,t} \ge 0,\ \ i \in S, k = 1, 2, \ldots, 8.$$

4. 参数选取

转运商 k 在第 t 周的损耗率 $L_{k,t}$：

处理方法1：取为历史10个周期中相应周的平均损耗率

处理方法2：根据转运商 k 的历史10个周期中相应周的损耗率数据，估计损耗率的分布，生成服从该分布的随机数.

处理方法3：根据转运商 k 的历史损耗率数据，估计估计损耗率的分布，生成服从该分布的随机数.

线性规划模型

$$\min \ \sum_{i\in S}\sum_{k=1}^{8}\frac{T_{i,k,t}}{p_i}L_{k,t}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in S}T_{i,k,t}\le 6000, \quad k=1, 2, ..., 8.$$

$$\sum_{k=1}^{8}T_{i,k,t}\ge g_{i,t}, \qquad i\in S.$$

$$T_{i,k,t}\ge 0, \ \ i\in S, k=1, 2, ..., 8.$$

没有反映题目中的如下要求：

通常情况下，一家供应商每周供应的原材料尽量由一家转运商运输。

检查订购模型的解, 若所有供应商的供货量$g_{i,t}$均不超过转运商的最大转运量 6000 m³, 则可考虑若供应商 i 供应的原材料由转运商 k 运输, 那么运输量就是供货量 $g_{i,t}$.

取0-1变量 $x_{i,k,t}$ 为决策变量, 其含义为:

$$x_{i,k,t}=\begin{cases}1, & \text{第}k\text{周转运商}k\text{运输供应商}i\text{的货物}\\0, & \text{否则}\end{cases}$$

$i \in S, k = 1, 2, ..., 8.$

0-1线性规划模型

$$\min \sum_{i\in S}\sum_{k=1}^{8}\frac{g_{i,t}}{p_i}x_{i,k,t}L_{k,t}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i\in S} g_{i,t}x_{i,k,t} \le 6000, \quad k=1, 2, ..., 8.$$

$$\sum_{k=1}^{8} x_{i,k,t} = 1, \quad i \in S.$$

$$x_{i,k,t} = 0 \text{ or } 1, \ \ i \in S, k = 1, 2, ..., 8.$$

问题三

3. 该企业为了压缩生产成本，现计划尽量多地采购 A 类和尽量少地采购 C 类原材料，以减少转运及仓储的成本，同时希望转运商的转运损耗率尽量少。 请制定新的订购方案及转运方案，并分析方案的实施效果。

一、 $$\min \quad \sum_{i\in A} d_{i,t}(1+\alpha_{i,t}) - \sum_{i\in C} d_{i,t}(1+\alpha_{i,t})$$

也可以在问题二的订购模型中, 将三类原材料的订购成本分别乘以控制系数K_A, K_B, K_C ($K_A < K_B < K_C$), 再求解. 比如可取 $K_A = 0$, $K_B = 1$, $K_C = 2$.

二、 运输和储存的单位费用C_T 与C类材料的单价C_p 的比例$C_T / C_p > 1$时，原材料C比原材料A、B成本高. 分析C_T / C_p的值对最优解的影响.

订购方案与转运方案的模型建立和求解的方法与问题二类似.

问题四

4. 该企业通过技术改造已具备了提高产能的潜力。根据现有原材料的供应商和转运商的实际情况， 确定该企业每周的产能可以提高多少并给出未来 24 周 的订购和转运方案。

提高产能的核算

考虑到保障企业生产的稳定性和原材料供应的可靠性, 增加产能的多少取决于原材料稳定可靠的供货量. 为此按所有供应商每周供货量的均值核算.

所有供应商每周总供货量对应的产能 $\sum_{i=1}^{402}\mu_i'$，

相应总运量 $\sum_{i=1}^{402}\mu_i' p_i \quad (\le 8\times 6000)$

各转运商的平均损耗率 $\bar{L}=\frac{1}{8\times 240}\sum_{k=1}^{8}\sum_{t=1}^{240}l_{k,t}$，

每周的接收量 $(1-\bar{L})\sum_{i=1}^{402}\mu_i' p_i$，相应的产能 $W=(1-\bar{L})\sum_{i=1}^{402}\mu_i'$，

即每周的产能增加量为 $W-28200$. W 的值在 30000左右

订购和转运与问题二类似

关于参赛论文的综合评述

1、总体情况概述

(1) 实际的问题, 实际的数据; 易读易懂, 看似容易, 实际不易; 开放性强, 挑战性强. 选C题多, 做好的不多, 获全国一、二等奖的比例相对较低.

(2) 一些论文能够从问题的实际出发, 对问题的数据做出较深入的分析, 挖掘出了符合实际的特征和指标, 给出了合理的结果.

(3) 多数论文对问题的理解是正确的, 能够抓住问题的核心和实际要求, 正确利用实际订购量与供货量数据, 提取出了相应供应商的供货特征, 并给出了量化指标.

(4) 有些论文没有针对实际问题和实际数据, 没有考虑实际的供货特征, 仅考虑与订购量和供货量直接相关的特征.

(5) 部分论文考虑到了实际中不确定因素的影响, 针对问题建立了随机规划模型, 并给出了相应的求解算法, 得到了合理的数值结果. 比如获得 "知网研学奖"的队, 在这方面做得很好.

(6) 不少论文考虑到了每周原材料库存量的动态变化对订购方案的影响, 而实际供货量和转运方案又影响到接收量和库存量, 这是一个动态变化的过程.

(7) 有些论文按A、B、C三类原材料分别考虑, 先确定每一类的订购量, 再分配给相关的供应商. 这种处理方法将问题复杂化了.

1、存在的主要问题

(1) 问题一是一个典型的多因素决策(综合排序)问题. 大部分论文都没有分析各指标间的相关性, 简单地用加权和来进行综合评价.

(2) 有些论文发现个别供应商的供货量好像有一定的周期性, 认为是普遍规律, 利用时间序列预测未来的供应量.

(3) 很多论文没有考虑到供应商没有订货就不会供货的实际情况, 在计算五年的供货量均值、方差等指标时, 按240周计算. 这是不合适的.

(4) 很多论文没有弄清楚订货量与供货量的关系和差异性.

(5) 有些论文在订购方案的模型中, 仅考虑了原材料的订购成本, 没有考虑三种原材料的利用率不同.

(6) 有些论文没有考虑到某些供应商供货量的异常情况, 简单地用历史最大供货量座位供应商的供货上界或最大供货能力.

(7) 有的论文将每个转运商每周的转运能力6000m^{3}加到了订购方案模型中, 要求每个供应商的供货量不高于6000m^3, 这是不合理的.

(8) 有些论文没有考虑随机因素的影响和库存量动态变化过程, 把问题变成完成确定的问题.

(9) 有的结果为非整数; 有的供货总量与转运总量不相等.

谢谢！