DIRO
IFT 2425

DEVOIR N^o 3

Intégration & Erreurs Numériques, Suite et Chaos

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Estimation de π par Intégration Numérique

De nombreuses formules, de physique, d'ingénierie et bien sûr de mathématiques, impliquent π, qui est une des constantes les plus importantes des mathématiques. π est défini comme le rapport constant entre la circonférence d'un cercle et son diamètre. Cette définition géométrique, la première historiquement et très intuitive, permet de trouver une approximation de π grâce au calcul intégral en le définissant simplement comme étant quatre fois l'aire d'un quart de disque de rayon 1 ($\mathcal{A} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 1^2$), i.e., en posant l'intégrale suivante :

$$\pi = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad (1)$$

La vraie valeur de cette intégrale est $\pi \approx 3.14159265358979323846264338$.

Intégration Numérique et Somme Compensée

1– Implémenter un programme (utilisant simplement des nombres FLOATS) permettant de calculer une valeur approchée de π en utilisant la méthode d'intégration des Trapèzes sur l'Eq. (1) avec 5 000 000 d'intervalles. Afficher sur le moniteur, l'estimée de π et l'erreur (avec 10 chiffres significatifs après la virgule).

2– Mettez maintenant les valeurs flottantes (i.e., $[f_0\,h/2], [f_1\,h], [f_2\,h], \ldots, [f_{N-1}\,h/2]$) de la somme précédente dans un vecteur de flottants de $N = 5\,000\,001$ points et faites les sommations de ces valeurs en utilisant les deux stratégies suivantes :

(a) la somme par paires, également appelé aussi sommation cascade, est une technique pour additionner une séquence de nombres à virgule flottante (de précision finie) qui permet de réduire sensiblement l'erreur complètent accumulé par rapport à la somme d'accumulation naïve en séquence (comme celle calculée à la question précédente). La sommation par paires d'une séquence de n nombres $x[n]$ est un algorithme de la famille des méthodes DIVISER POUR RÉGNER. Elle consiste simplement à diviser de manière récursive la séquence en deux moitiés, résumant chaque moitié, et en ajoutant les deux sommes. la récursion est appliquée jusqu'à ce que la division implique la somme de deux nombres. Implémenter cette sommation soit par une sommation à base de boucles naïve ou soit de façon récursive (en utilisant seulement des FLOATS). Afficher sur le moniteur, l'estimée de π et l'erreur (avec 10 chiffres significatifs après la virgule).

(b) En arithmétique binaire, on peut montrer que l'erreur d'arrondi dans la somme de deux nombres a et b est donnée par :

$$(((a \boxplus b) \boxminus a) \boxminus b)$$

En effet, sur calculateur ; $(((10^{99} + 1) - 10^{99}) - 1) = -1$ représente l'erreur d'arrondi de cette somme.
À partir de cette propriété, une méthode appelée *somme compensée de Kahan* [1] a été proposée pour calculer la somme de n termes x_n de manière à ce que les erreurs d'arrondi se compensent. On désigne par e, l'erreur d'arrondi initiale, et on pose $e = 0$ et la sommation initiale $s = 0$. À la i-ième étape, avec $i >= 0$, on évalue $temp = s$ et $y = x_i + e$, la somme est mise à jour en posant $s = temp + y$ et la nouvelle erreur d'arrondi est donnée par $e = (temp - s) + y$ et le résultat de la somme est dans s. Implémenter cette sommation en utilisant seulement des FLOATS. Afficher sur le moniteur, l'estimée de π et l'erreur (avec 10 chiffres significatifs après la virgule).

Suite Itérative Logistique & Estimation de PI

Une suite logistique est une suite dont la relation de récurrence est donnée par la relation :

$$x_{[n+1]} = \mu \, x_{[n]} \, (1 - x_{[n]}) \qquad (2)$$

Cette suite conduit, suivant les valeurs de μ, à une suite convergente, une suite soumise à oscillations ou une suite chaotique. Cette suite permet, entre autres, de modéliser la taille d'une population biologique au fil des générations. Dans ce modèle, si x_n désigne le rapport de la population d'une espèce sur la population maximale de cette espèce (c'est un nombre compris entre 0 et 1), plusieurs comportements différents sont observés selon la valeur du paramètre μ :

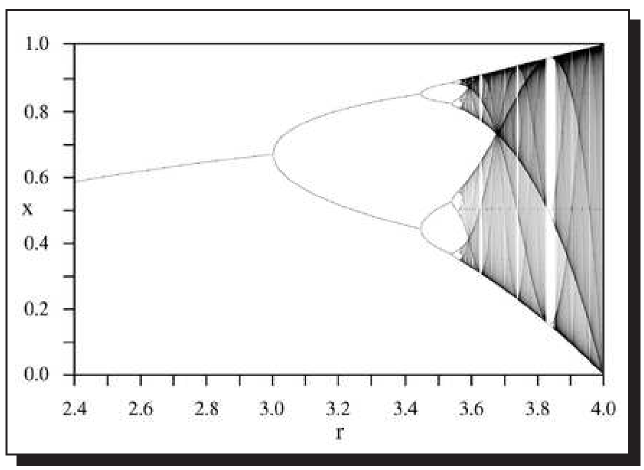

FIG. 1 – L'axe horizontal porte les valeurs du paramètre μ (noté r, tandis que l'axe vertical montre les valeurs limites possibles.

Si $0 \leq \mu \leq 1$, la population s'éteint. L'espèce finira par mourir, quelle que soit la population de départ.
Si $1 \leq \mu \leq 3$, la population finit par se stabiliser autour de la valeur $(\mu - 1)/\mu$.
Si $3 \leq \mu \leq 3.57$, l'effectif de la population oscille entre 2, 4, 8... valeurs (puissance de 2).
Si $3.57 \leq \mu$, l'effectif de la population est chaotique, sauf exception.

3– Tracer le diagramme de bifurcation (cf. Fig. 1) dans une image de taille 4096×4096 pixels avec l'axe des abscisses portant les valeurs du paramètre μ compris dans l'intervalle $[2.5 : 4]$ (parcouru par pas de 0.0001) et x représentant l'axe des ordonnées ($x \in [0.0 : 1.0]$). On prendra $x_{[0]} = 0.5$. On considerera les valeurs de la suite après convergence ; c'est-à-dire après $N_1 = 10000$ itérations. Les valeurs de convergence, d'oscillation ou chaotique seront considérées pour les $N_2 = 10000$ itérations suplémentaires (i.e., entre les itérations 10000 et 20000).
Par exemple, pour $\mu = 3.50$, après les 10000 premières itérations, la suite logistique, partant de $x_{[0]} =$

0.5 oscillera (approximativement) entre les 4 valeurs d'ordonnée : $\ldots, 0.500, 0.875, 0.3828, 0.827$. Dans le graphe, le points d'abscisse $x = \mu = 3.5$ et d'ordonnés $y_1 = 0.500, y_2 = 0.875, y_3 = 0.3828, y_4 = 0.827$ seront mis en noir (niveaux de gris 0 dans le tableau 2D : GRAPH2D).

4– Prendre maintenant $\mu = 4$, pour $N = 10000000$ et pour les trois valeurs initiales $x_{[0]} = 0.2, 0.4, , 0.6$ calculer en FLOAT :

$$x = \frac{2}{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{x_{[n]}}}$$

qui devrait approcher π, (afficher le résultat sur le moniteur).

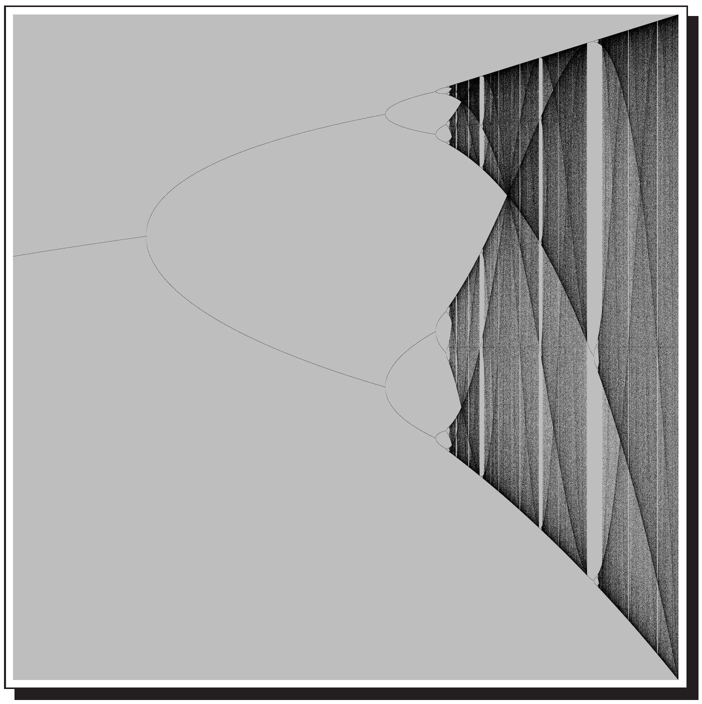

FIG. 2 – Le diagramme de bifurcation de la suite logistique.

Réferences

[1] Wikipédia.

1

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême* situé sur la page web du cours. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*. Les programmes devront se compiler et s'executer sur Linux.

2

Conseils Pratiques

Utiliser le programme que je vous donne sur ma page web en initialisant la variable FLAG_GRAPH=1 et remplisser le tableau 2D nommé Graph2D dans le programme (initialement remplie de blanc) comme une feuille de papier dessin. Le programme que je vous donne sauvera cette image au format PGM. Vous pourrez ensuite la lire avec les logiciels RISTRETTO ou GIMP disponible sur Linux.