

Aproximación Numérica

Derivación Numérica

Método de Diferencias Finitas

Referencias para las fórmulas de diferencias finitas:

x_0 : Indica el punto de interés, de estudio o de análisis.

h : Espaciamiento constante de la tabla.

$f(x_0)$: Función evaluada en el punto de interés.

$$f(x_0 + h) = f(x_0 + 1) \quad \text{y} \quad f(x_0 - h) = f(x_0 - 1)$$

$$f(x_0 + nh) = f(x_0 + n) \quad \text{y} \quad f(x_0 - nh) = f(x_0 - n)$$

Existen tres tipos:

- 1. Diferencias hacia adelante.**
- 2. Diferencias hacia atrás.**
- 3. Diferencias centrales.**

Método de diferencias finitas hacia adelante.

Primera diferencia

$$f'(x_0) = \frac{f(x_{0+1}) - f(x_0)}{h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_{0+2}) - 2f(x_{0+1}) + f(x_0)}{h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{f(x_{0+3}) - 3f(x_{0+2}) + 3f(x_{0+1}) - f(x_0)}{h^3}$$

$$f^{iv}(x_0) = \frac{f(x_{0+4}) - 4f(x_{0+3}) + 6f(x_{0+2}) - 4f(x_{0+1}) + f(x_0)}{h^4}$$

Segunda diferencia

$$f'(x_0) = \frac{-f(x_{0+2}) + 4f(x_{0+1}) - 3f(x_0)}{2h}$$

$$f''(x_0) = \frac{-f(x_{0+3}) + 4f(x_{0+2}) - 5f(x_{0+1}) + 2f(x_0)}{h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{-3f(x_{0+4}) + 14f(x_{0+3}) - 24f(x_{0+2}) + 18f(x_{0+1}) - 5f(x_0)}{2h^3}$$

$$f^{iv}(x_0) = \frac{-2f(x_{0+5}) + 11f(x_{0+4}) - 24f(x_{0+3}) + 26f(x_{0+2}) - 14f(x_{0+1}) + 3f(x_0)}{h^4}$$

Método de diferencias finitas hacia atrás.

Primera diferencia

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_{0-1})}{h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_{0-1}) + f(x_{0-2})}{h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{f(x_0) - 3f(x_{0-1}) + 3f(x_{0-2}) - f(x_{0-3})}{h^3}$$

$$f^{iv}(x_0) = \frac{f(x_0) - 4f(x_{0-1}) + 6f(x_{0-2}) - 4f(x_{0-3}) + f(x_{0-4})}{h^4}$$

Segunda diferencia

$$f'(x_0) = \frac{3f(x_0) - 4f(x_{0-1}) + f(x_{0-2})}{2h}$$

$$f''(x_0) = \frac{2f(x_0) - 5f(x_{0-1}) + 4f(x_{0-2}) - f(x_{0-3})}{h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{5f(x_0) - 18f(x_{0-1}) + 24f(x_{0-2}) - 14f(x_{0-3}) + 3f(x_{0-4})}{2h^3}$$

$$f^{iv}(x_0) = \frac{3f(x_0) - 14f(x_{0-1}) + 26f(x_{0-2}) - 24f(x_{0-3}) + 11f(x_{0-4}) - 2f(x_{0-5})}{h^4}$$

Método de diferencias finitas centrales.

Primera diferencia

$$f'(x_0) = \frac{f(x_{0+1}) - f(x_{0-1})}{2h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_{0+1}) - 2f(x_0) + f(x_{0-1}))}{h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{f(x_{0+2}) - 2f(x_{0+1}) + 2f(x_{0-1}) - f(x_{0-2}))}{2h^3}$$

$$f^{iv}(x_0) = \frac{f(x_{0+2}) - 4f(x_{0+1}) + 6f(x_0) - 4f(x_{0-1}) + f(x_{0-2}))}{h^4}$$

Segunda diferencia

$$f'(x_0) = \frac{-f(x_{0+2}) + 8f(x_{0+1}) - 8f(x_{0-1}) + f(x_{0-2}))}{12h}$$

$$f''(x_0) = \frac{-f(x_{0+2}) + 16f(x_{0+1}) - 30f(x_0) + 16f(x_{0-1}) - f(x_{0-2}))}{12h^2}$$

$$f'''(x_0) = \frac{-f(x_{0+3}) + 8f(x_{0+2}) - 13f(x_{0+1}) + 13f(x_{0-1}) - 8f(x_{0-2}) + f(x_{0-3}))}{8h^3}$$

$$f^4(x_0) = \frac{-f(x_{0+3}) + 12f(x_{0+2}) - 39f(x_{0+1}) + 56f(x_0) - 39f(x_{0-1}) + 12f(x_{0-2}) - f(x_{0-3}))}{6h^4}$$

Integración Numérica

Regla del trapecio

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_1(x)dx$$

La longitud del intervalo $[a; b]$ es $h = b - a$.

Un intervalo

Considerando $x_0 = a, x_1 = b$ y los puntos $(x_0; f(x_0)), (x_1; f(x_1))$ se tiene:

$I \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$	Fórmula de la Regla del Trapecio
---	---

Cuyo error es:

$$E_1(\xi) = -\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3 \quad \text{Error de Integraci#n de la Regla del Trapecio}$$

M#ltiples intervalos

Sea f una funci#n continua en $[a; b]$. Si se considera que sobre $[a; b]$ hay $n + 1$ puntos igualmente espaciados, $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, entonces hay n segmentos de longitud $h = \frac{b-a}{n}$

Si $x_i = x_{i-1} + h$ con $i = 1 \dots n - 1$, $a = x_0$ y $b = x_n$, entonces se puede afirmar que:

$$I \approx \frac{(b-a)}{2n} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

o, lo que es lo mismo...

$$I \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Cuyo error lo calculamos con:

$$E \leq \left| \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \right|$$

Regla de Simpson

Simpson 1/3

La f#rmula para tres puntos es simplemente un atajo cuando se presenta la situaci#n donde tenemos un intervalo con $n + 1 = 3$ puntos. Se puede usar de forma indistinta con la f#rmula de segmentos m#ltiples. Eso s#, acordate que para Simpson 1/3 el n#mero de segmentos n tiene que ser par.

Tres puntos

$$I \approx \frac{1}{3}h \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad \text{F#rmula de la Regla de Simpson 1/3}$$

El error est# dado por:

$$E_2 = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi) \quad \text{con } a < \xi < b$$

Error de Integración Regla de Simpson 1/3

Segmentos múltiples

Este método subdivide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos y cada dos de ellos aproxima por una parábola. Para poder aplicar Simpson n debe ser par.

$$A = \frac{h}{3} \cdot (E + 4I + 2P)$$

Donde

$E = y_0 + y_n$ suma de extremos

$I = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}$ Suma de impares

$P = y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}$ Suma de pares

Estimación del Error en Simpson (cuando se conoce $f(x)$)

$$E \leq \left| \frac{(a-b)}{180} h^4 f^{(4)}(\varphi) \right| \quad \text{con } \varphi \in [a, b]$$

Simpson $\frac{3}{8}$

Para este método, n tiene que ser múltiplo de 3.

Formula de Simpson de 3/8

$$A = \frac{3}{8}h \cdot [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \quad \text{con } h = \frac{b-a}{3}$$

Error

$$E_3 = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi), \quad \text{con } a < \xi < b$$

Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales

Método de Euler

Fijado $h \neq 0$ es posible obtener aproximaciones de la solución del problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

En los puntos x_1, x_2, \dots, x_n donde

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Siendo $h = \frac{b - a}{n}$, donde b es valor de x a aproximar y a coincide con x_0

Mediante el m#todo recurrente

$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n$

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ son los puntos de nuestra soluci#n aproximada de la ecuaci#n diferencial.

$\overline{E}_n = \frac{|y(x_n) - y_n|}{|y(x_n)|}$

Error relativo local

$$E_{rel} = \frac{|\text{Valor Real} - \text{Valor Calculado}|}{|\text{Valor Real}|}$$

Formato típico de la tabla:

n	x_i	y_i	$f(x, y)$	y (real)	Error relativo	Error%
---	-------	-------	-----------	----------	----------------	--------

Método de Euler Mejorado

Fijado $h \neq 0$ es posible obtener aproximaciones de la soluci#n del problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

En los puntos x_1, x_2, \dots, x_n donde

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Siendo $h = \frac{b - a}{n}$

Mediante el m#todo recurrente

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, z_{i+1})]$$

donde

$$z_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Formato típico de la tabla:

n	x_i	y_i	z_i	$f(x_i, y_i)$	$f(x_{i+1}, z_{i+1})$	y (real)	Error relativo	Error%
----------	-------	-------	-------	---------------	-----------------------	-----------------	-----------------------	---------------

$$y_i \xrightarrow{\text{uso}} \underbrace{f(x_i, y_i)}_{\text{Pendiente 1}} \xrightarrow{\text{Euler}} \boxed{z_{i+1}} \xrightarrow{\text{uso}} \underbrace{f(x_{i+1}, z_{i+1})}_{\text{Pendiente 2}} \xrightarrow{\text{Promedio}} \boxed{y_{i+1}}$$

Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Fijado $h \neq 0$ es posible obtener aproximaciones de la solución del problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

En los puntos x_1, x_2, \dots, x_n donde

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Mediante el método recurrente

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}(p_i + 2q_i + 2r_i + s_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Donde

$$p_i = f(x_{i-1}, y_{i-1})h$$

$$q_i = f\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, y_{i-1} + \frac{1}{2}p_i\right)h$$

$$r_i = f\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, y_{i-1} + \frac{1}{2}q_i\right)h$$

$$s_i = f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + r_i)h$$

Interpolación

Forma de Lagrange

$$P(x) = \sum_{k=0}^n y_k \cdot L_k(x)$$

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}$$

Diferencias Divididas de Newton

x	f(x)	Dif. de orden 1	Dif. de orden 2	Dif. De orden 3
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$		$f[x_0, \dots, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		
x_3	$f(x_3)$			

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\
 & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
 & + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 & + \dots \\
 & + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})
 \end{aligned}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i] \left(\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

Trazadores Cúbicos Naturales

$$\delta_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\delta_i}$$

$$2(\delta_1 + \delta_2)c_2 = 3(\Delta_2 - \Delta_1)$$

$$a_i = y_i \quad (\text{Es simplemente el valor } y_i)$$

$$b_i = \Delta_i - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3\delta_i}$$

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Series de Fourier

Intervalo simétrico

Es el caso más común donde la función está definida en un intervalo centrado en el origen.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Donde $\omega_0 = 2\pi/T$ es la frecuencia angular fundamental y a_0, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Podemos considerar $T = 2L$, entonces $L = T/2$, lo que nos permite reescribir la fórmula de una manera simplificada...

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(n \frac{\pi}{L} t \right) + b_n \sin \left(n \frac{\pi}{L} t \right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left(n \frac{\pi}{L} t \right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \left(n \frac{\pi}{L} t \right) dt$$

L es el “semiperiodo”, esto es, la mitad del intervalo que representa el dominio de la función $f(t)$.

Funciones pares e impares

Función par: $f(t) = f(-t)$

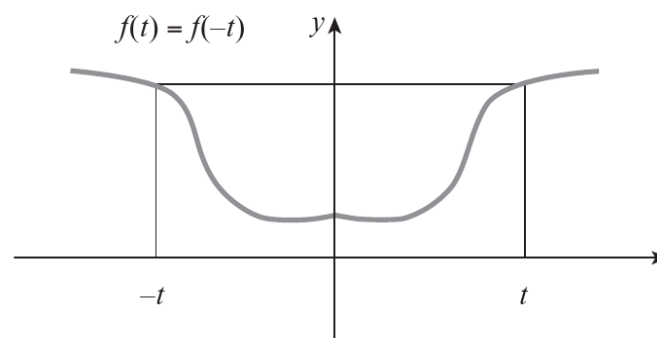


Figura 5.1

Función impar: $f(-t) = -f(t)$

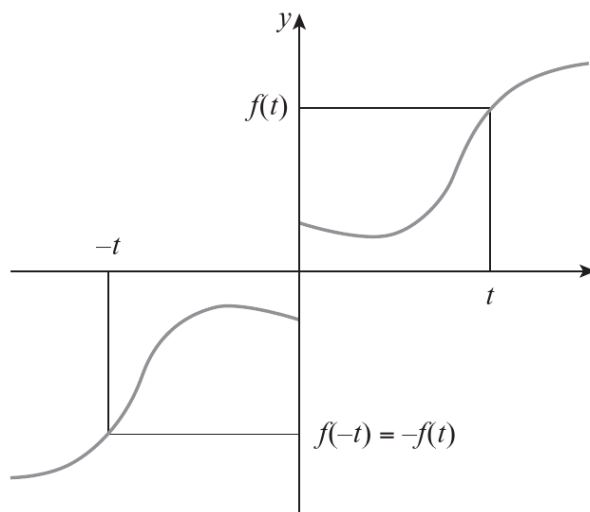


Figura 5.2

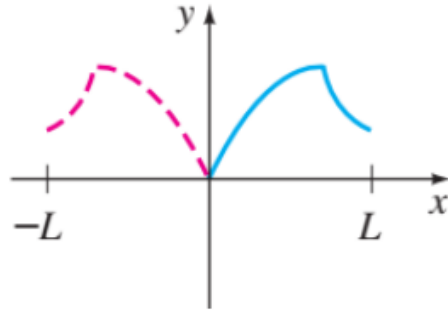
Tu Función $f(x)$ es...	¿Qué calculás?	¿Qué vale CERO?	Tipo de Serie
PAR (simétrica respecto al eje y)	a_0 y a_n	$b_n = 0$	Serie de Cosenos
IMPAR (antisimétrica en el origen)	Solo b_n	$a_0 = 0, a_n = 0$	Serie de Senos
NI PAR NI IMPAR	Todo (a_0, a_n, b_n)	Nada (a priori)	Serie Completa

Desarrollo por cosenos y senos

¡Importante! Ahora L sería el extremo superior del intervalo.

Desarrollo por cosenos

Cuando la función es **par**, podés encontrar la función haciendo el desarrollo por cosenos:



Imaginate que reflejás la gráfica con respecto al eje y en $(-L; 0)$; la función ahora es par en $(-L, L)$.

La serie:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

(Nota: $b_n = 0$)

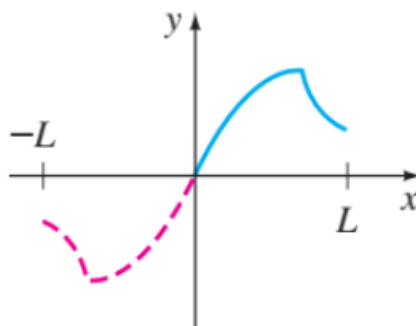
Los Coeficientes:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

Desarrollo por senos

Si la función es **impar**, se puede hallar la función haciendo el desarrollo por senos:



Ahora, hacé de cuenta que se refleja la gráfica con respecto al origen en $(-L, 0)$; la función ahora es impar en $(-L, L)$.

La Serie:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

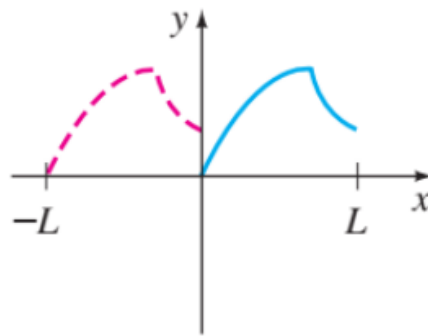
(Nota: $a_0 = 0$ y $a_n = 0$)

Los Coeficientes:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

Serie de medio intervalo

En este caso tenemos una función “desplazada”, generalmente hacia el lado positivo de la abscisa a partir del origen de coordenadas, del tipo $[0; p]$, donde p es el **periodo**.



Definir f en $(-L, 0)$ con $y = f(x + L)$

Los Coeficientes:

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{p}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{p}\right) dt$$

La Serie:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{p}\right)$$