Análisis Numérico

Ariel Tincho Rodri Axel Juancho

October 25, 2025

Entender el rol de los autovalores y autovectores es, literalmente, la **clave** para descifrar el comportamiento de cualquier sistema lineal homogéneo. Son como el "ADN" del sistema: contienen toda la información sobre cómo evolucionará en el tiempo.

Vamos a desglosar su significado y función.

El Problema: $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$

Recordemos que estamos tratando de resolver un sistema donde la **velocidad de cambio ($\mathbf{X}'$)** en cualquier punto del espacio es determinada por la matriz $\mathbf{A}$ multiplicada por la **posición actual ($\mathbf{X}$)**.

La pregunta fundamental es: ¿Existen "caminos" o "direcciones" especiales en este espacio donde el movimiento sea particularmente simple? La respuesta es sí, y esas direcciones son los **autovectores**.

---

1. Autovectores: Las "Autopistas" del Sistema

- **Definición Intuitiva:** Un **autovector** de la matriz $\mathbf{A}$ es una **dirección** en el espacio de estados. Si el sistema comienza en un punto a lo largo de esta dirección, **se moverá a lo largo de esa misma dirección para siempre**, sin desviarse. Es como una "autopista" rectilínea en el plano de fases.

- **Definición Matemática:** Un vector no nulo $\mathbf{v}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ si, al multiplicar $\mathbf{A}$ por $\mathbf{v}$, el resultado es simplemente el mismo vector $\mathbf{v}$ escalado por un número λ.

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

- **Conexión con el Sistema:** Si una solución $\mathbf{X}(t)$ está en la dirección del autovector $\mathbf{v}$, podemos escribirla como $\mathbf{X}(t) = f(t)\mathbf{v}$, donde $f(t)$ es una función escalar del tiempo. Al sustituir esto en la ecuación $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, obtenemos:

$$(f(t)\mathbf{v})' = \mathbf{A}(f(t)\mathbf{v})$$

$$f'(t)\mathbf{v} = f(t)(\mathbf{A}\mathbf{v})$$

Usando la definición de autovector, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$:

$$f'(t)\mathbf{v} = f(t)(\lambda\mathbf{v})$$

$$f'(t) = \lambda f(t)$$

Esta es la ecuación diferencial más simple que existe, y su solución es una exponencial: $f(t) = ce^{\lambda t}$.

- **La Gran Conclusión:** A lo largo de la "autopista" definida por un autovector $\mathbf{v}$, la solución es increíblemente simple:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

---

2. Autovalores: La "Velocidad y Comportamiento" en las Autopistas

- **Definición Intuitiva:** El **autovalor** λ asociado a un autovector $\mathbf{v}$ te dice **cómo se mueve el sistema a lo largo de esa "autopista"**. Es el "límite de velocidad" y la "dirección del tráfico" en esa ruta.

- **Conexión con la Estabilidad:** El signo y la naturaleza (real o compleja) del autovalor determinan el comportamiento y la estabilidad del sistema.

Caso 1: Autovalores Reales

- **Si $\lambda > 0$ (Positivo):** El término $e^{\lambda t}$ **crece exponencialmente al infinito**. A lo largo de la dirección del autovector, las soluciones **se alejan del origen**. Esto es un comportamiento **inestable**.

- **Si $\lambda < 0$ (Negativo):** El término $e^{\lambda t}$ **decae exponencialmente a cero**. A lo largo de la dirección del autovector, las soluciones **se acercan al origen**. Esto es un comportamiento **estable**.

Caso 2: Autovalores Complejos Conjugados ($\lambda = \alpha \pm i\beta$)

- **La Parte Real (α):** Determina la **estabilidad** del movimiento.

  - **Si $\alpha > 0$:** El término $e^{\alpha t}$ crece. Las soluciones se alejan del origen en **espirales hacia afuera**. Comportamiento **inestable (foco inestable)**.

- **Si** $\alpha < 0$**:** El término $e^{\alpha t}$ decae. Las soluciones se mueven hacia el origen en **espirales hacia adentro**. Comportamiento **estable (foco estable)**.

- **Si** $\alpha = 0$**:** El término $e^{\alpha t}$ es 1. Las soluciones **orbitan perpetuamente** alrededor del origen en elipses, sin acercarse ni alejarse. Comportamiento **marginalmente estable (centro)**.

- **La Parte Imaginaria (**β**):** Determina la **velocidad de oscilación**. Un valor más grande de β significa que las espirales u órbitas son más "rápidas" o "apretadas".

---

3. La Solución General: Combinando las Autopistas

El **Principio de Superposición** nos dice que la solución general del sistema es una **combinación lineal** de las soluciones simples que encontramos a lo largo de cada "autopista" (autovector).

- **Si tienes dos autovalores reales distintos** λ_1, λ_2 **con autovectores** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$**:** Cualquier solución del sistema es una mezcla de movimientos a lo largo de esas dos direcciones.
$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$
El comportamiento a largo plazo estará dominado por el autovalor con la parte real más grande.

Resumen: El ADN del Sistema

Componente	Rol Geométrico	Rol en la Solución	Rol en la Estabilidad
Autovectores (v)	Definen las **"autopistas"** o direcciones de movimiento simple en el plano de fases.	Proporcionan la **dirección vectorial** de cada componente de la solución.	Definen los ejes de atracción/repulsión.
Autovalores (λ**)**	Definen la **"velocidad" y el "sentido"** del movimiento a lo largo de las autopistas.	Proporcionan el **comportamiento temporal** ($e^{\lambda t}$) de cada componente.	**Determinan completamente la estabilidad** del sistema.

En esencia, al encontrar los autovalores y autovectores, estás "descomponiendo" un sistema complejo en sus movimientos más fundamentales y predecibles.