Contenido

Números Complejos

El concepto de número complejo surge en el siglo XVI como una herramienta matemática para resolver ecuaciones algebraicas que no admitían soluciones reales. Fue inicialmente considerado una curiosidad sin aplicación práctica, ya que implicaba la raíz cuadrada de números negativos. Sin embargo, con los aportes de matemáticos como Rafael Bombelli, René Descartes, Carl Friedrich Gauss y Leonhard Euler, los números complejos fueron adquiriendo una base teórica sólida y se integraron plenamente al cuerpo del análisis matemático.

A lo largo del tiempo, los números complejos demostraron ser fundamentales para modelar fenómenos físicos, especialmente en electricidad, mecánica cuántica y teoría de señales. En el campo de la ingeniería, su utilidad se extendió a diversas áreas como la electrónica, el procesamiento de señales y el análisis de sistemas dinámicos.

En la **Ingeniería en Sistemas de Información**, los números complejos juegan un papel importante en múltiples contextos. Se utilizan en algoritmos de procesamiento digital de señales (como en imágenes, audio y video), en la representación y manipulación de señales en el dominio de Fourier, y en técnicas de simulación numérica. También resultan esenciales en la implementación de algoritmos de inteligencia artificial que requieren operaciones con transformadas complejas, redes neuronales profundas y optimización de funciones no reales.

Esta guía propone una introducción operativa al uso de los números complejos y su tratamiento numérico, explorando su implementación en Python y su aplicación en problemas ingenieriles concretos. El objetivo es que los estudiantes reconozcan el valor práctico de estos conceptos matemáticos en su futura labor profesional.

"Matemáticas puras es, en su forma, la poesía de las ideas lógicas."
— *Albert Einstein*

Definición, Operaciones y Propiedades

Definición: Se llama conjunto de números complejos, y se denota $\mathbb{C}$, al conjunto de pares ordenados $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ donde las operaciones de suma y producto se definen de la siguiente manera,

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \qquad \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$$
$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc), \quad \forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$$

De la definición anterior podemos escribir $\mathbb{C}=\{\mathbb{R}^2,+,.\}$, donde + , . denotan las operaciones de suma y producto definidas anteriormente.

Ejemplo

P ara $z=(1,3), w=(2,-2) \in \mathbb{C}$

a) Calcular $z+w$

$$z+w=(1,3)+(2,-2)=(3,1)$$

b) Calcular zw.

$$zw=(1,3)(2,-2)=(1.2-3\cdot(-2),1\cdot(-2)+3.2)=(8,4).$$

Propiedades de la Suma

Sean $z, w, u \in \mathbb{C}$, entonces

Propiedad asociativa: $z + (w + u) = (z + w) + u$

Propiedad conmutativa: $z + w = w + z$,

Neutro para la suma: $z + (0,0) = (0,0) + z = z$

Inverso aditivo: $z + (-z) = (0,0)$,

El inverso aditivo $-z$ de un número complejo $z = (a, b)$ es el número complejo $-z = (-a, -b)$.

La resta de números complejos puede ser considerada como una suma: $z - w = z + (-w)$.

Propiedades del Producto

Sean $z, w, u \in \mathbb{C}$, entonces

Propiedad asociativa: $z(wu) = (zw)u$

Propiedad conmutativa: $zw = wz$

Neutro para el producto: $z(1,0) = (1,0)z = z$

Distributiva del Producto con Respecto a la Suma: Sean $z, w, u \in \mathbb{C}$ entonces $z(w + u) = zw + zu$

Nota: Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{C}$ extienden la suma y el producto definidos en $\mathbb{R}$:

Consideremos $z = (a, 0), w = (b, 0) \in \mathbb{C}$, notemos que z y w se identifican con los números reales a y b. Aplicando la definición de suma y producto en $\mathbb{C}$ tenemos que

- $z + w = (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \equiv a + b \in \mathbb{R}$,
- $zw = (a, 0)(b, 0) = (ab - 0, a0 + 0b) = (ab, 0) \equiv ab \in \mathbb{R}$.

De aquí en adelante escribiremos a en lugar de ($a, 0$), en particular el elemento neutro para el producto es $1 = (1,0)$.

Los números complejos de la forma $(0, b) \in \mathbb{C}$ (primera componente nula) se denominan imaginarios puros. El conjunto de números imaginarios puros se denota $\mathbb{I}$,

$$\mathbb{I} = \{(a, b) \in \mathbb{C}: a = 0\}$$

Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos está formado por el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, el conjunto $\mathbb{I}$ de los imaginarios puros y el conjunto de números formado por las sumas de ellos.

Forma Binómica

Definiciones

Definición: Se llama i al número complejo $(0,1) \in \mathbb{R}^2$

Propiedad: El número $i \in \mathbb{C}$ es el único que satisface $i^2 = -1$.

Demostración: Notemos que $i^2 = (0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$, luego $i^2 = -1$.

Encontramos un elemento de $\mathbb{C}$ cuyo cuadrado es -1, por lo tanto, el conjunto $\mathbb{C}$ contiene números de cuadrado negativo.

Definición: Si $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, llamamos forma binómica de z a la representación dada como suma de un número real más un número imaginario:

$$z = (a, 0) + (0, b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi.$$

Definición: Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se denomina

(a) parte real de z al número real a y se denota $\mathrm{Re}(z) = a$.

(b) parte imaginaria de z al número real b y se denota $\mathrm{Im}(z) = b$.

Nota: Notemos que la parte imaginaria $\mathrm{Im}(z)$ es el número real b que multiplica a i (no confundir con el término imaginario bi).

Ejemplo: Escribir en forma Binómica y las partes real e imaginaria de los números complejos $(2,0), (0,3), (1, -1), (3,4)$.

Par ordenado	Forma Binómica	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$
$z = (2,0)$	2	2	0
$z = (0,3)$	$3i$	0	3
$z = (1, -1)$	$1 - i$	1	-1
$z = (3,4)$	$3 + 4i$	3	4
$z = (0, -2)$	$-2i$	0	-2

Propiedad: Dos números complejos, $z, w \in \mathbb{C}$, son iguales si y sólo si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria:

$$z = w \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \;\; y \;\; \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$$

Demostración: Esta propiedad nos dice que un número complejo queda completamente determinado por su parte real y su parte imaginaria.

Suma y producto

Las operaciones de suma y producto en $\mathbb{C}$ se traducen a la forma binomial de la siguiente manera:

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$
$$zw = (ac - bd) + (ab + dc)i$$

También podemos realizar las operaciones algebraicas con la forma del binomio. Aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, se obtiene

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bdi^2$$

Como $i^2 = -1$ reagrupando términos nos queda $zw = ac - bd + (ad + bc)i$ que se escribe como par ordenado ($ac - bd, ad + bc$), que coincide con la definición de producto para números complejos.

Ejemplo: Siendo $z = 2 + 3i$ y $w = -1 + 4i$. Calcular zw

Aplicamos la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} zw &= (2 + 3i)(-1 + 4i) \\ &= -2 + 8i - 3i + 12i^2 \\ &= -14 + 5i. \end{aligned}$$

Proposición: El inverso multiplicativo de i es $-i$.

Demostración: Vimos que $i^2 = -1$, luego $-i^2 = 1$ o equivalentemente $-ii = 1$ y de aquí

$$i^{-1} = -i$$

Potencias de i

Definimos $i^0 = 1$ y dado que $i^2 = -1$, al calcular las potencias i^n se obtienen cuatro resultados posibles: $1, i, -1, -i$:

$$\begin{array}{lll} i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, \\ i^4 = i^2 i^2 = 1, & i^5 = i^4 i = i, & i^6 = i^4 i^2 = -1, \\ & & i^2 = i^2 i = -i \\ & & i^3 = -i \end{array}$$

Propiedad: Si n y m son números enteros que difieren en un múltiplo de 4 entonces

$$i^n = i^m.$$

Demostración: Si n y m son números enteros que difieren en un múltiplo de 4 entonces podemos escribir $n - m = 4k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, o bien $n = m + 4k$. Ya que $i^{4k} = (i^4)^k = 1$ resulta

$$i^n = i^{4k+m} = i^{4k} i^m = i^m.$$

Corolario: Dado un número cualquiera $n \in \mathbb{Z}$, resulta $i^n = i^m$ donde $m \in \mathbb{N}$ es el resto de la división de n por 4.

Nota: Observar que una potencia negativa, digamos i^{-n} con $n > 0$, también se puede calcular como

$$i^{-n} = (i^{-1})^n = (-i)^n = (-1)^n i^n.$$

Ejemplo: Calcular las siguientes potencias

a) i^{39}, b) i^{1348}, c) i^{-13}, d) i^{-450}.

Escribimos cada exponente $n \in \mathbb{Z}$ en términos del cociente y resto de dividir por 4: $n = 4k + m$ y luego aplicamos la propiedad.

a) Como $39 = 4.9 + 3$, se tiene $i^{39} = i^3 = -i$.

b) Calculemos ahora i^{1348}. Como 1348 es múltiplo de 4 resulta $i^{1348} = i^0 = 1$.

c) En el caso i^{-13}, podemos proceder de dos maneras distintas.

Por un lado, $i^{-13} = (-1)^{13} i^{13} = (-1) i^{4.3+1} = -i$

o se puede escribir $i^{-13} = i^{4.(-4)+3} = i^3 = -i$.

d) De manera similar al caso anterior, i^{-450} se puede calcular como

$i^{-450} = (-1)^{450} i^{450} = i^{4.112+2} = i^2 = -1$ o como $i^{-450} = i^{4(-113)+2} = i^2 = -1$

Propiedad: Dados $n, m \in \mathbb{Z}$,

(a) $i^n \cdot i^{-n} = 1$,

(b) $i^n \cdot i^m = i^{n+m}$.

Ejemplo: Calcular $i^{105}(1 - i^5) + i^{-35}$.

Aquí aplicamos la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y las propiedades de potencia para obtener

$$i^{105}(1 - i^5) + i^{-35} = i^{105} - i^{105} i^5 + i^{-35} = i^{105} - i^{110} + i^{-35}.$$

Reescribimos cada término aplicando las propiedades vistas para potencias de i :

$$i^{105} = i^{4.26} i = i,$$

Reemplazando en la expresión anterior, resulta

$$i^{105}(1 - i^5) + i^{-35} = i^{105} - i^{110} + i^{-35} = i - (-1) + i = 1 + 2i.$$

La igualdad $i^2 = -1$ nos dice que i es raíz del polinomio $x^2 + 1$, por lo tanto, es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Queda como ejercicio para el lector verificar que $-i$ también es raíz de $x^2 + 1$. Entonces el polinomio $x^2 + 1$ tiene dos raíces imaginarias puras.

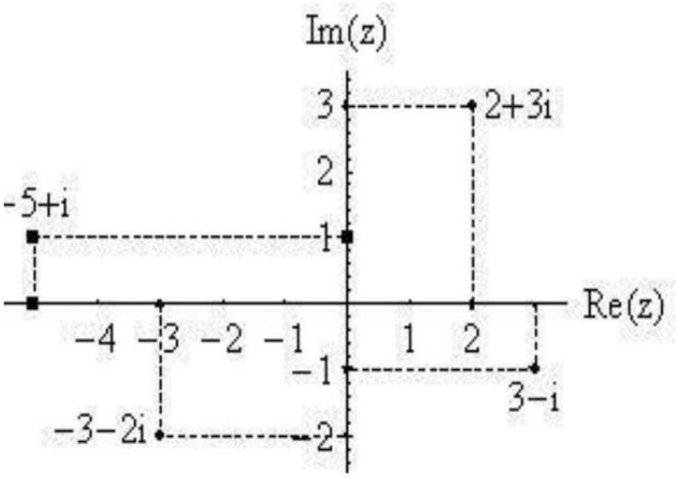
El polinomio $x^2 + 1$ es un ejemplo de un polinomio que no admite raíces en el conjunto de los números reales, pero sí en $\mathbb{C}$. Observemos que los polinomios que tienen raíces reales tienen raíces en $\mathbb{C}$ ya que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Nos preguntamos si dado cualquier polinomio, éste siempre admite una raíz en el conjunto de los números complejos. El siguiente teorema responde esta pregunta.

Representación Gráfica

Un número complejo se puede representar gráficamente como un punto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, también llamado plano complejo o diagrama de Argand.

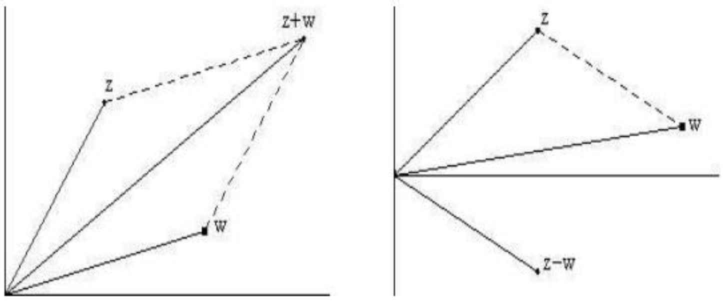
En el eje horizontal se representa la parte real de z, $\mathrm{Re}(z)$ (primera coordenada del par) y en el eje vertical la parte imaginaria, $\mathrm{Im}(z)$ (segunda coordenada del par). Así, los números reales $z = a$ se grafican sobre el eje x y los imaginarios puros, $z = bi$, se grafican sobre el eje y.

Ejemplo: Representar en el plano los números complejos $2 + 3i, 3 - i,$ $-5 + i$ y $-3 - 2i$.



Representación Gráfica de la Suma y la Resta en el Plano

La suma y la resta de números complejos se pueden representar gráficamente de la misma manera que la suma y la resta de vectores del plano.

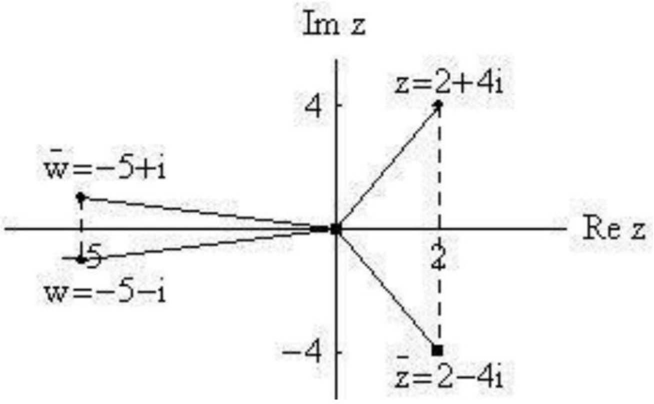


Número Complejo Conjugado

Definición: Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama conjugado de z y se denota $\bar{z}$, al número complejo

$$\bar{z} = a - bi.$$

Gráficamente el complejo conjugado de un número $z \in \mathbb{C}$ es la reflexión respecto del eje real.



Ejemplo: Calcular el conjugado de cada uno de los siguientes números complejos.

(a) $z = 2 + 4i$, (b) $z = -5 - i$, (c) $z = 3i$, (e) $z = 2$,

Notemos que para obtener el conjugado de un número complejo, basta con cambiar el signo a la parte imaginaria. Por lo tanto,

Numero complejo	Conjugado
$z = 2 + 4i$	$\bar{z} = 2 - 4i$,
$z = -5 - i$	$\bar{z} = -5 + i$
$z = 2$	$\bar{z} = 2$
$z = 3i$	$\bar{z} = -3i$

Propiedades:

Dado $z \in \mathbb{C}$ entonces

Propiedad	**Demostración**
$\bar{z} = z$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$,	Por unicidad de la forma binómica, $z = \bar{z}$ si y sólo si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\bar{z})$ e $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(\bar{z})$ y por la definición de número conjugado resulta $b = -b$, de donde $b = 0$ y por lo tanto $z = a \in \mathbb{R}$.
$\bar{\bar{z}} = z$,	Es inmediato de la definición de número conjugado.
$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.	Por definición de suma, $z + \bar{z} = (a + a) + (b + (-b))i = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$. Luego, $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, o equivalentemente, $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$. De manera análoga se demuestra que $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$, de donde resulta la igualdad que queríamos demostrar.

Propiedades de Suma y Producto

La conjugación es distributiva con respecto a la suma y al producto:

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $\quad z = a + bi, \quad w = c + di$.

a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$,

Como $z + w = (a + c) + (b + d)i$, entonces $\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c) - (b+d)i$.

Reagrupando se tiene que $\overline{z+w} = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$.

b) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

Calculamos el producto $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, luego el conjugado es

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i\\ &= (ac - bd) + (-ad - bc)i\end{aligned}$$

Por otro lado $\bar{z} = (a - bi)$ y $\bar{w} = (c - di)$, luego el producto de los conjugados de z y w es $\bar{z}\bar{w} = (ac - bd) + (-ad - bc)i$. De donde resulta $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

Ecuaciones en z y $\bar{z}$

Ejemplo

Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las ecuaciones dadas.

$$2 + z - 2i = 3\bar{z} + 5i.$$

En este caso no es posible despejar z o $\bar{z}$, por este motivo usamos la notación binómica para z y reescribimos las ecuaciones en términos de las incógnitas $a = \mathrm{Re}(z)$ y $b = \mathrm{Im}(z)$.

$$2 + z - 2i = 3\bar{z} + 5i$$

$$z - 3\bar{z} = -2 + 7i$$

Usamos la notación binómica $z = a + bi$ y resolvemos la ecuación para $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a + bi - 3(a - bi) = -2 + 7i \Leftrightarrow$$
$$-2a + 4bi = -2 + 7i$$

Por la unicidad de la forma binómica deben coincidir las partes reales por un lado y las partes imaginarias por el otro, es decir

$$\begin{cases}-2a & = -2\\ \quad 4b & = 7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 1\\ b = \dfrac{7}{4}\end{cases}$$

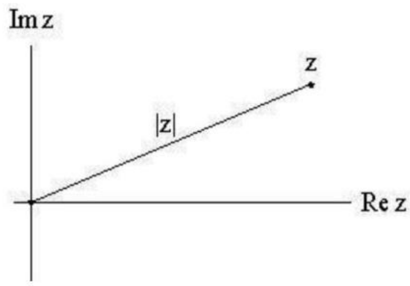
Luego, la única solución es $z = 1 + \frac{7}{4}i$.

Módulo de un Número Complejo

La norma para vectores de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, permite definir la magnitud de un número complejo.

Definición: Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama módulo (o valor absoluto o magnitud) de z y se denota $|z|$, al número real

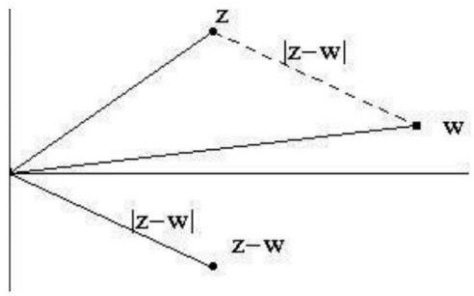
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



El módulo $|z|$ de un número complejo $z = a + bi = (a, b)$ es igual a la distancia del punto z al origen 0 , es decir $\operatorname{dist}(z, 0) = |z|$.

En general, podemos definir la distancia entre dos puntos z, w del plano complejo como el módulo de la diferencia entre dichos puntos, es decir $\operatorname{dist}(z, w) = |z - w|$.

Esta afirmación se puede comprobar en el gráfico donde representamos dos números complejos z, w, la diferencia $z - w$ y su módulo $|z - w|$.



Además, si $z = a \in \mathbb{R}$, es decir $\operatorname{Im}(z) = 0$, entonces resulta $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$ y por lo tanto el módulo coincide con la función módulo (o valor absoluto) en $\mathbb{R}$.

Propiedades

Dado $z \in \mathbb{C}$, el módulo $|z|$ satisface

Propiedad	**Demostración** Sea $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$.
$|z| \geq 0$. Además $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$,	Por definición de módulo de un número complejo, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, luego $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Además, $|z| = 0$ si y sólo si $a^2 + b^2 = 0$ y esto ocurre si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$, es decir $z = 0$.
$|z|^2 = z\bar{z}$,	Por definición del número conjugado $\bar{z}$ y la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma se tiene $$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$
$|\bar{z}| = |z|$.	$|\bar{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + (b)^2} = |z|$.
$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$,	Notemos que $|\operatorname{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2}$. Por otro lado, como $0 \leq a^2 \leq a^2 + b^2 a, b \in \mathbb{R}$ y la función $f(x) = \sqrt{x}$ es una función creciente en $[0, +\infty)$, entonces $$\sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

	Por lo tanto, resulta $$\lvert\mathrm{Re}(z)\rvert = \lvert a\rvert = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = \lvert z\rvert \Longrightarrow \lvert\mathrm{Re}(z)\rvert \leq \lvert z\rvert$$ De manera análoga se puede probar que $\lvert\mathrm{Im}(z)\rvert \leq \lvert z\rvert$.

Propiedades para Suma y Producto

El módulo posee la propiedad distributiva con respecto al producto de números complejos, sin embargo, no se puede distribuir cuando se trata de una suma.

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ entonces

(a) $|zw| = |z||w|$,

(b) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Desigualdad Triangular)

Representación Gráfica de Conjuntos

Algunos conjuntos del plano complejo pueden expresarse a través de relaciones que involucran $|z|$, $\mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Im}(z)$. En algunos casos resulta más sencillo expresarlos y representarlos como intersección de dos o más conjuntos definidos con una sola restricción.

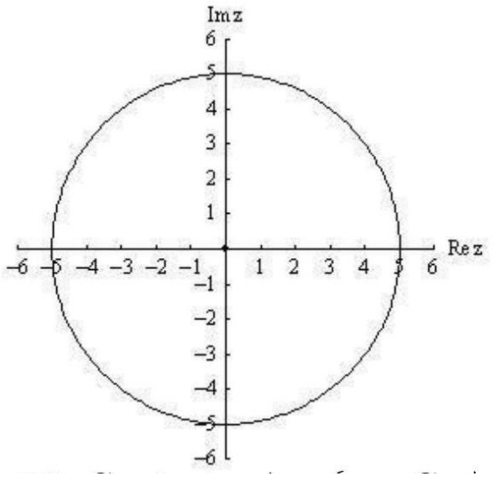
Si quisiéramos representar en el plano complejo los siguientes conjuntos

a) $\boldsymbol{A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}}$,

Recordemos que la circunferencia centrada en el origen de radio r se define a través de la ecuación

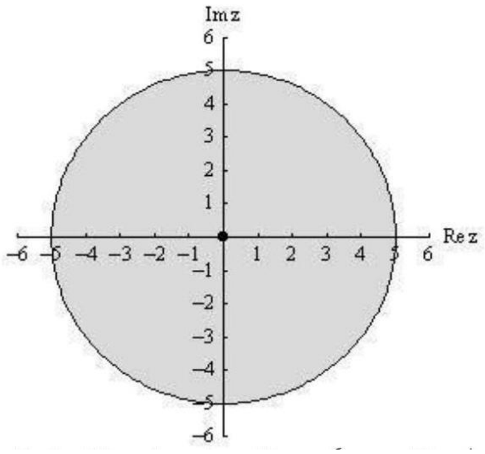
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{o} \quad \sqrt{x^2+y^2} = r.$$

El conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}$ está formado por los números complejos que están a distancia 5 del origen, luego A se representa por la circunferencia que se muestra en la siguiente figura:



b) $\boldsymbol{B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 5\}}$,

La desigualdad $|z| \leq 5$ es satisfecha por todos los números complejos que están a distancia menor o igual que 5 del origen. Gráficamente, forman un círculo o disco cerrado con centro en el origen y radio 5.



Inverso Multiplicativo y División

Usando propiedades de módulo podemos definir el inverso multiplicativo z^{-1} de un número complejo z.

Todo $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, tiene inverso multiplicativo z^{-1}, siendo

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Demostración: Consideremos $z \neq 0$, luego $|z| > 0$ y como $|z|^2 = z\bar{z} \neq 0$ se puede dividir por $|z|^2$ ambos miembros y resulta

$$\frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1, \text{ o } z\frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

Entonces $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ es el inverso multiplicativo de z.

Dados $z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, la operación cociente,$\frac{z}{w}$, se define como

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = z\frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

Ejemplo:

Calcular z/w en los siguientes casos.

(a) $z = 1 - 2i, w = 3 + i$.

Para calcular $\frac{z}{w} = \frac{1-2i}{3+i}$ usamos la fórmula de w^{-1} y obtenemos:

$$\frac{1-2i}{3+i} = (1-2i)(3+i)^{-1} = \frac{(1-2i)(3-i)}{|3+i|^2} = \frac{3-6i-i+2i^2}{10} = \frac{1-7i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$$

Conjugado del Cociente

Como vimos la conjugación es distributiva con respecto a la suma y al producto. Ahora veremos que también es distributiva con respecto al cociente.

Propiedades.

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ entonces

(a) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}, \forall w \neq 0,$

Demostración: $\text{Sean} z, w \in \mathbb{C}, z = a + bi, w = c + di.$

Si $w \neq 0$ entonces $\bar{w} \neq 0$ y existen w^{-1} y $(\bar{w})^{-1}$. Luego, podemos escribir

$$z = zw^{-1}w$$

$$\bar{z} = \overline{zw^{-1}w} = \overline{zw^{-1}}\bar{w}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $(\bar{w})^{-1}$, se tiene

$$\bar{z}(\bar{w})^{-1} = \overline{zw^{-1}}.$$

(b) $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}, \forall z \neq 0.$

Demostración: $\text{Sean} z, w \in \mathbb{C}, z = a + bi, w = c + di.$

Es un caso particular de la propiedad anterior reemplazando z por 1 y w por z.

Ejemplo

Dados $\quad z = 1 - 2i, \qquad w = 3 + i.$

Calcular $\overline{z/w}$ y $\overline{w^{-1}}$ para

$$\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w} = \frac{1 + 2i}{3 - i}.$$

Usando la fórmula del inverso de un número complejo se obtiene

$$\frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{w}} = \frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{|3 + i|^2} = \frac{1 + 7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i,$$

$$\overline{(\boldsymbol{w^{-1}})} = 1/\bar{w} = \frac{1}{3 - i} = \frac{(3 + i)}{|3 + i|^2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Módulo del Cociente

El módulo también es distributivo con respecto al cociente y a la potencia.

Propiedades: Dados $z, w \in \mathbb{C}$, $z = a + bi, \;\; w = c + di.$

a) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \forall w \neq 0,$

Si $w \neq 0$ entonces existe w^{-1}. Luego,

$$|z| = |zw^{-1}w| = |zw^{-1}||w| = |z/w||w|.$$

Podemos dividir por $|w|$ ya que $w \neq 0$ y obtenemos

$$\frac{|z|}{|w|} = |z/w|$$

b) $|z^{-1}| = |z|^{-1}, \forall\, z \neq 0.$

Se demuestra de manera análoga a la anterior, considerando $1 = z^{-1}z$ para $z \neq 0$.

c) $|z^n| = |z|^n, \forall n \in Z.$

Demostraremos primero que $|z^n| = |z|^n$, $\forall\, n \geq 0$, por el principio de inducción

- Si $n = 0, |z^0| = 1 = |z|^0$ por definición de potencia nula.

Paso inductivo: Supongamos que vale $|z^k| = |z|^k$ para cierto $k > 0$ (hipótesis inductiva), entonces por la propiedad distributiva del módulo con respecto al producto se tiene que

$$|z^{k+1}| = |z^k z| = |z^k||z|$$

y como suponemos que $|z^k| = |z|^k$ resulta

$$|z^{k+1}| = |z|^k|z| = |z|^{k+1}$$

Como demostramos que vale si $n = 0$ y además demostramos que si vale para un número cualquiera k vale para el número siguiente, la propiedad vale para cualquier valor $n \geq 0$.

Por último, si $n < 0$ definimos $m = -n > 0$ y a partir de b) obtenemos

$$|z^n| = |z^{-m}| = |z^m|^{-1} = |z|^{-m} = |z|^n.$$

Ejemplo

Calcular el módulo de los siguientes números complejos

(a) $(-3+i)^2(-i)^{-2}$,

Aplicando las propiedades de módulo a $|(-3+i)^2(-i)^{-2}|$, se tiene

$$\begin{aligned} |(-3+i)^2(-i)^{-2}| &= |(-3+i)^2||(-i)^{-2}| \\ &= ((-3)^2 + (1)^2)1^{-2} \\ &= 10. \end{aligned}$$

Ecuaciones

En el siguiente ejemplo veremos resolución de ecuaciones Siempre que podamos, despejaremos z o $\bar{z}$, cuando no sea posible escribiremos las ecuaciones en forma binómica usando la notación usual $z = a + bi$ y resolveremos las ecuaciones obtenidas para a y b.

Ejemplo

Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las ecuaciones dadas.

(a) $2|z^2| + i^{480}z^2 = \bar{z}z - 1 - \mathrm{Re}(z-2).$

Aplicamos las propiedades vistas y observamos que $\mathrm{Re}(z-2) = \mathrm{Re}(z) - 2$, entonces resulta

$$\begin{aligned} 2|z^2| + i^{480}z^2 &= \bar{z}z - 1 - \mathrm{Re}(z-2) && \Leftrightarrow \\ 2|z^2| + z^2 &= \bar{z}z - 1 - (\mathrm{Re}(z) - 2) && \Leftrightarrow \\ 2|z|^2 + z^2 &= |z|^2 - \mathrm{Re}(z) + 1 && \Leftrightarrow \\ |z|^2 + z^2 + \mathrm{Re}(z) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ya que no podemos despejar z, reescribimos la ecuación usando la forma binómica de z y como $z^2 = a^2 - b^2 * 2abi$ obtenemos

$$a^2 + b^2 + a^2 - b^2 + 2abi + a - 1 = 0$$

o equivalentemente $(2a^2 + a - 1) + 2abi = 0$. Por unicidad de la forma binómica, se tiene

$$2a^2 + a - 1 = 0 \text{ y } 2ab = 0$$

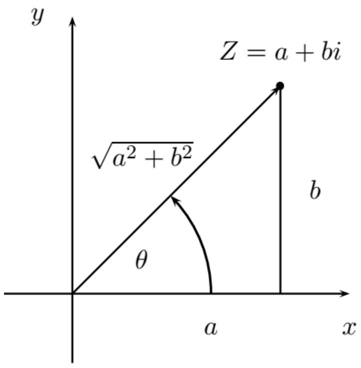
De la primera ecuación resulta $a = -1$ o $a = 1/2$ y de la segunda ecuación se tiene $a = 0$ o $b = 0$. Entonces, para que se cumplan las dos ecuaciones debe ser $a = -1$ o $a = 1/2$ y $b = 0$. Entonces las soluciones son $z = -1$ y $z = 1/2$.

Forma trigonométrica y polar

La forma binómica describe un número complejo $z = a + bi$ mediante su parte real $a = \mathrm{Re}(z)$ y su parte imaginaria $b = \mathrm{Im}(z)$. Otra manera de presentar un número complejo es la denominada forma trigonométrica.

La forma trigonométrica de un número complejo es sumamente útil para el cálculo de potencias de un número complejo.

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, si $z \neq 0$ entonces, $|z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2} > 0$, con su representación grafica



Si las coordenadas polares del punto (a, b) son $(|z|, \theta)$ sabemos que:

$$a = |z|cos\theta \qquad b = |z|sen\theta \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Entonces podemos escribir la **forma trigonométrica** del complejo como:

$$z = a + bi = |z|cos\theta + |z|sen\theta i = |z|(cos\theta + isen\theta)$$

En esta forma trigonométrica de un numero complejo r es siempre ≥ 0 e igual al módulo de z. Al angulo polar θ se lo llama argumento o amplitud del número complejo y se lo denota como $arg\ z$.

La **forma polar** de un numero complejo esta dada por:

$$z = (|z|, \theta) = |z|_\theta$$

Argumento Principal y Reducción al Primer Cuadrante

Para hallar la forma trigonométrica de un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, primero calculamos su módulo $|z|$. Luego calculamos su argumento principal $\mathrm{Arg}(z)$ mediante el método de reducción al primer cuadrante.

Llamamos ángulo de referencia $\alpha_0 \in [0, \pi/2]$ al ángulo obtenido por reducción al primer cuadrante. La relación entre un ángulo α y su ángulo de referencia α_0 es la siguiente

Si $\alpha \in (0, \pi/2)$ (cuadrante I) $\Rightarrow \alpha = \alpha_0$
Si $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ (cuadrante II) $\Rightarrow \alpha = \pi - \alpha_0$
Si $\alpha \in (\pi, 3\pi/2)$ (cuadrante III) $\Rightarrow \alpha = \pi + \alpha_0$
Si $\alpha \in (3\pi/2, 2\pi)$ (cuadrante IV) $\Rightarrow \alpha = 2\pi - \alpha_0$

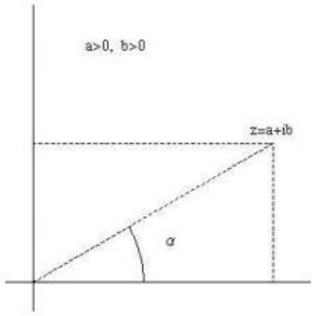
Recordemos la tabla de signos de $\cos(\alpha)$ y $\text{sen}(\alpha)$ para cada cuadrante

$\cos(\alpha) < 0$ $\text{sen}(\alpha) > 0$	$\cos(\alpha) > 0$ $\text{sen}(\alpha) > 0$
$\cos(\alpha) < 0$ $\text{sen}(\alpha) < 0$	$\cos(\alpha) > 0$ $\text{sen}(\alpha) < 0$

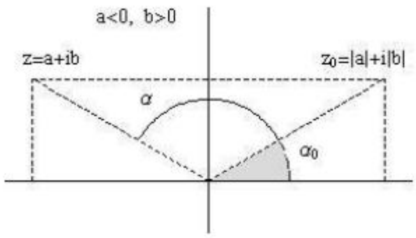
Luego, para $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se tiene

Si $a > 0$ y $b > 0$ (cuadrante I) $\Rightarrow \text{Arg}(z) = \alpha_0$
Si $a < 0$ y $b > 0$ (cuadrante II) $\Rightarrow \text{Arg}(z) = \pi - \alpha_0$
Si $a < 0$ y $b < 0$ (cuadrante III) $\Rightarrow \text{Arg}(z) = \pi + \alpha_0$
Si $a > 0$ y $b < 0$ (cuadrante IV) $\Rightarrow \text{Arg}(z) = 2\pi - \alpha_0$

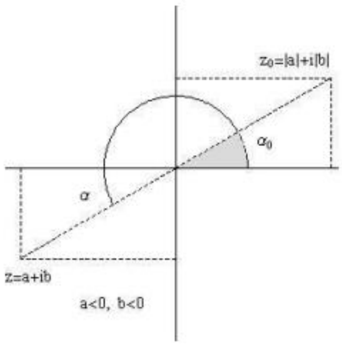
Gráficamente, la relación entre un número complejo z y su ángulo de referencia es la siguiente



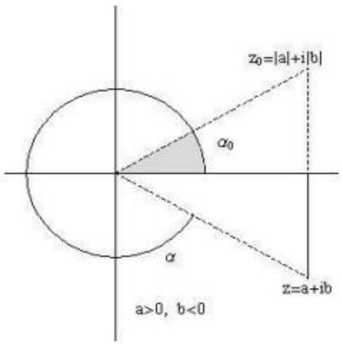
Primer Cuadrante



Segundo Cuadrante



Tercer Cuadrante



Cuarto Cuadrante

Observemos que, en particular,

- si $z \in \mathbb{R}$, entonces $\text{Arg}(z) = 0$ o $\text{Arg}(z) = \pi$,

- si $z \in \mathbb{I}$, se tiene $\text{Arg}(z) = \pi/2$ o $\text{Arg}(z) = 3\pi/2$.

Ángulos notables

ángulo grados	0	30	45	60	90	120	135	180	270	360 ≡ 0
ángulo radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi \equiv 0$
sen(a)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0
cos(a)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	- 1	0	1
tan(a)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\nexists$	0

Ejemplo

Hallar la forma trigonométrica y polar de los siguientes $z \in \mathbb{C}$.

a) Si $z = 3 + 3i$,
Entonces $a = 3, b = 3$

$|z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2} = \sqrt[2]{3^2 + 3^2} = \sqrt[2]{18} = 3\sqrt{2}$,

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

Entonces z pertenece al primer cuadrante y $\text{Arg}(z) = \pi/4$, de donde

Forma trigonométrica: $z = 3\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\text{sen}(\pi/4))$

Forma polar: $\text{z} = 3\sqrt{2}_{\pi/4}$

b) $z = -3 + 3i$,

Entonces $a = -3, b = 3$

$|z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2} = \sqrt[2]{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt[2]{18} = 3\sqrt{2}$,

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

Entonces z pertenece al segundo cuadrante y $\text{Arg}(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, de donde

Forma trigonométrica: $z = 3\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\text{sen}(3\pi/4))$

Forma polar: $\text{z} = 3\sqrt{2}_{3\pi/4}$

Calculamos ahora la forma binómica $z = a + bi$ a partir de la forma trigonométrica de un número $z = |z|(\cos(\operatorname{Arg}(z)) + i\operatorname{sen}(\operatorname{Arg}(z))) \in \mathbb{C}$.

Ejemplo

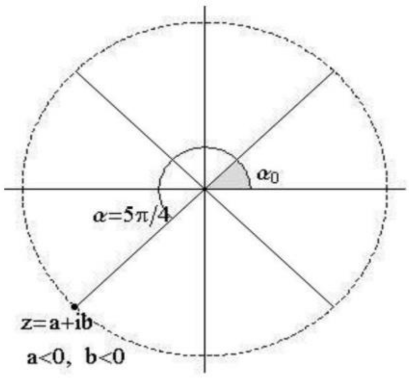
Escribir en forma binómica los siguientes números complejos,

a) $z = 2(\cos(0) + i\operatorname{sen}(0))$

Si $z = 2(\cos(0) + i\operatorname{sen}(0))$ y ya que $\cos(0) = 1$ y $\operatorname{sen}(0) = 0$, resulta

$z = 2$

b) $z = 3\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right)$



Se tiene $z = 3\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i3\operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right)$.

Observemos que $\frac{5}{4}\pi$ es un ángulo en el tercer cuadrante,

$z = 3\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right)$

luego el ángulo de referencia α_0 satisface $\frac{5}{4}\pi = \pi + \alpha_0$ y resulta $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$. Además, en el tercer cuadrante $\cos(\alpha) = \frac{a}{|z|} < 0$ y $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{b}{|z|} < 0$, de donde resulta

$$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Entonces

$$z = -3\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Producto, cociente y potencia de Números Complejos.

Dados $z, w \in \mathbb{C}, z, w \neq 0$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) + 2k\pi.$$

Como $z, w \in \mathbb{C}, z, w \neq 0, z$ y w se pueden escribir en forma trigonométrica como

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha)), \\ w &= |w|(\cos(\beta) + i\operatorname{sen}(\beta)), \end{aligned} \quad \text{donde } \alpha = \operatorname{Arg}(z), \quad \beta = \operatorname{Arg}(w).$$

Entonces, se tiene que

$$zw = \{\,|z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha\}.\{|w|(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)\}$$
$$= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\, i\operatorname{sen}\alpha + i\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + i^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$$
$$= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + i(\cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta)).$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \end{aligned}$$

de donde resulta

Producto: $\boldsymbol{zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\mathrm{sen}(\alpha+\beta))}$ **(1)**

También podemos expresar

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|(\cos\ \alpha + i\mathrm{sen}\alpha)}{|w|(\cos\ \beta + i\mathrm{sen}\beta)} \cdot \frac{(\cos\ \beta - i\mathrm{sen}\beta)}{(\cos\ \beta - i\mathrm{sen}\beta)}$$

$$= \frac{|z|}{|w|}\left\{\frac{(\cos\alpha\cos\ \beta + \mathrm{sen}\alpha_1\mathrm{sen}\beta) + i(\mathrm{sen}\alpha\cos\ \beta - \cos\ \alpha\mathrm{sen}\beta)}{\cos^2\ \beta + \mathrm{sen}^2\beta}\right\}$$

$$= \frac{|z|}{|w|}\{\cos(\alpha-\beta) + i\mathrm{sen}(\alpha-\beta)\}$$

Cociente: $\boldsymbol{\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha-\beta) + i\mathrm{sen}(\alpha-\beta))}$ (2)

Una generalización de la ecuación (1)

$$z_1 z_2 \cdots z_n = |z_1|.|z_2| \ldots |z_n|\{\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \theta\alpha_n) + i\mathrm{sen}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\}$$

y si $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ se obtiene

$\boldsymbol{\mathrm{Potencia}: z^n = \{|z|(\cos\ \alpha + i\mathrm{sen}\alpha)\}^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\mathrm{sen}n\alpha)\quad (Teorema\ de\ Moivre)}$

En forma polar:

Producto: $z.w = \boldsymbol{|z||w|_{(\alpha+\beta)}}$

Cociente: $\boldsymbol{\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}_{(\alpha-\beta)}}$

Potencia: $\boldsymbol{z = |z|^n{}_{n\alpha}}$

Ejemplo:

Calcular zw en forma trigonométrica, polar y binómica para:

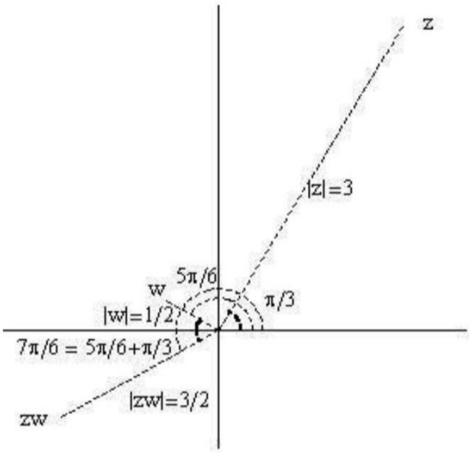
$$z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \qquad w = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right).$$

El módulo del producto es $|zw| = |z||w| = \frac{3}{2}$

y existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{Arg}(zw) = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi + 2k\pi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \in [0,2\pi)$.

Como $\frac{7}{6}\pi \in [0,2\pi)$ resulta $k = 0$ y $\mathrm{Arg}(zw) = \frac{7}{6}\pi$. Entonces

$$zw = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right).$$



Además, ya que $\mathrm{Arg}(zw) = \frac{7}{6}\pi$ está en el tercer cuadrante resulta que $\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) < 0, \mathrm{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right) < 0$ y el ángulo de referencia α_0 satisface $\frac{7}{6}\pi = \pi + \alpha_0$, es decir $\alpha_0 = \frac{7}{6}\pi - \pi = \frac{\pi}{6}$. Entonces

$$\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \mathrm{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

y

$$zw = \frac{3}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i.$$

El resultado se puede verificar haciendo el producto con las formas binómica, $z = 3/2 + 3\sqrt{3}/2i$ y $w = -\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$.

Ejemplo

Para $z = 1 - i$, calcular en forma trigonométrica z^3.

La forma trigonométrica de z es

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right).$$

$$z^3 = \sqrt{2}^3(\cos(\alpha) + i\mathrm{sen}(\alpha))$$

donde el argumento está dado por

$$\mathrm{Arg}(z^3) = 3\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi = 3\frac{7}{4} + 2k\pi = \frac{21}{4}\pi + 2k\pi$$

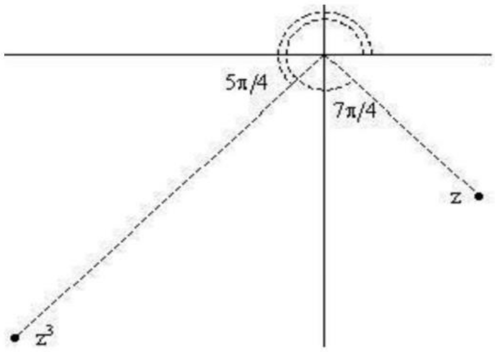
Buscamos $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{21}{4}\pi + 2k\pi \in [0,2\pi)$,

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \frac{21}{4}\pi + 2k\pi & < & 2\pi \\ -\frac{21}{4}\pi & \leq & 2k\pi & < & 2\pi - \frac{21}{4}\pi \end{array} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{21}{8} \quad \leq \quad k \quad < \quad -\frac{13}{8}\pi$$

Luego $k = -2$ y $\text{Arg}(z^3) = \frac{21}{4}\pi - 4\pi = \frac{5}{4}\pi$ y

$$z^3 = 2\sqrt{2}(\cos{(5/4\pi)} + i\text{sen}(5/4\pi))$$



Raíces de números complejos

Se dice que un número w es la raíz n-ésima de un número complejo z si $w^n = \ z$, y se escribe $w = z^{1/n}$. De acuerdo con el teorema de De Moivre se aprecia que, si n es un entero positivo,

$$z^{1/n} = \{|z|(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha)\}^{1/n}$$

$$z^{1/n} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\text{sen}\frac{\alpha}{n}\right)$$

Si se expresan los ángulos en radianes, el ángulo total es 2π, y tenemos que se verifica:

$$\theta = \frac{\alpha}{n} + k.\frac{2\pi}{n} \; con\; k \; \in \; \mathbb{Z}$$

Sin embargo, solo dan valores de z diferentes los valores $0, 1, \dots, n-1$ de k. Por lo tanto la solución completa de la ecuación viene dada por

Como el ángulo de donde se infiere que hay n valores diferentes de $z^{1/n}$; es decir, n raíces n-ésimas de z, siempre y cuando $z \neq 0$.

$$z^{1/n} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\text{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

Existe n raíces n-ésimas de cualquier número complejo $\neq 0$. Todas tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$.

Ejemplo

1) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 = 1$.

Hallar las raíces cuartas de 1 es equivalente a hallar todos $\text{los}\, z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 = 1$. Por la unicidad de la forma trigonométrica z^4 y 1 deben tener el mismo módulo y el mismo argumento principal.

Entonces $\qquad |z| = 1 \qquad \alpha = 0 \qquad \text{k} = 0,1,2,3 \qquad \text{n} = 4$

Encontramos los argumentos de las raíces

$$k=0 \quad \alpha_1=\frac{\alpha+2k\pi}{n}=0, \quad k=1 \quad \alpha_2=\frac{\alpha+2k\pi}{n}=\frac{\pi}{2},$$

$$k=2 \quad \alpha_3=\frac{\alpha+2k\pi}{n}=\pi, \quad k=3 \quad \alpha_4=\frac{\alpha+2k\pi}{n}=\frac{3\pi}{2},$$

$$\alpha_1=0, \alpha_2=\frac{\pi}{2}, \alpha_3=\pi, \alpha_4=\frac{3\pi}{2}.$$

como $|z|=1$ se tiene que $z=\cos(\alpha)+i\mathrm{sen}(\alpha)$ de donde las raíces cuartas de 1 son:

$$\alpha_1=0, \quad z_1=\cos 0+i\,sen\,0=1$$

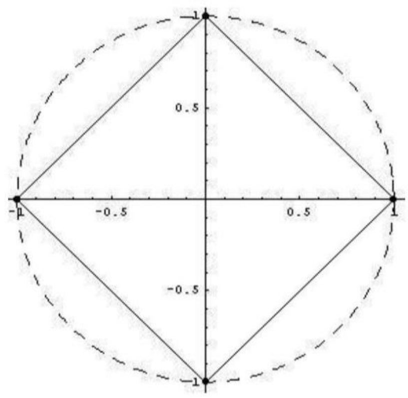
$$\alpha_2=\frac{\pi}{2}, \quad z_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\,sen\,\frac{\pi}{2}=i$$

$$\alpha_3=\pi, \quad z_3=\cos\pi+i\,sen\,\pi=-1$$

$$\alpha_4=\frac{3\pi}{2}, \quad z_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\,sen\,\frac{3\pi}{2}=-i$$

$$z_1=1, \quad z_2=i, \quad z_3=-1, \quad z_4=-i$$

Gráficamente, corresponden a los vértices de un cuadrado inscripto en la circunferencia de centro 0 y radio 1 como muestra la figura.



2) Hallar las raíces cúbicas de $-8i$, es decir, hallar todos $\text{los}\, z\in\mathbb{C}$ tales que $z^3=-8i$.

$$|-8i|=8, \quad \alpha=\frac{3}{2}\pi, \quad k=0,1,2, \quad n=3$$

Encontramos los argumentos de las raíces

$$k=0 \quad \alpha_1=\frac{\alpha+2k\pi}{n}=\frac{\frac{3}{2}\pi+2.0.\pi}{3}=\frac{\pi}{2}, \quad k=1 \quad \alpha_2=\frac{\frac{3}{2}\pi+2.\pi}{3}=\frac{7\pi}{6},$$

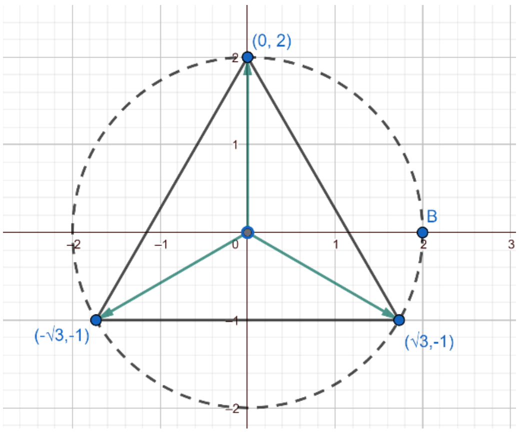
$$k=2 \quad \alpha_3=\frac{\frac{3}{2}\pi+2.2.\pi}{3}=\frac{11\pi}{6},$$

Encontramos las raíces

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ sen\ \frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

$$\alpha_2 = \frac{7\pi}{6}, \quad z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\ sen\ \frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$\alpha_3 = \frac{11\pi}{6}, \quad z_3 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\ sen\ \frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$



Forma exponencial o de Euler

En el siglo XVIII el matemático Euler descubrió una manera abreviada de escribir los números complejos que facilitó las operaciones entre ellos. Su notación está basada en una relación del número e con las funciones trigonométricas coseno y el seno. La relación es:

$$e^{i\theta} = \cos\ \theta + isen\theta$$

Gracias a esta relación la notación para los números complejos se simplifica, de ser:

$$z = r(\cos\ \theta + isen\theta)$$

Se convierte en la forma de Euler:

$$\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$$

Donde r es el módulo de z y θ es su argumento.

Ahora, la multiplicación entre complejos toma una notación más sencilla. Sea:

$$w = re^{i\theta} \text{y} \quad z = r'e^{i\theta'}$$

la multiplicación de estos dos complejos es:

$$\boldsymbol{wz = rr'e^{i(\theta+\theta')}}$$

Por ejemplo, si $w = 5e^{i30°}$ y $z = 7e^{i45°}$, entonces:

$$wz = \left(5e^{i30°}\right)\left(7e^{i45°}\right) = (5)(7)e^{i(30°+45°)} = 35e^{i(75°)}$$

El cociente entre los complejos w y z es:

$$\boldsymbol{\frac{w}{z} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}}$$

Por ejemplo, si $w = 28e^{i57°}$y$z = 7e^{i35°}$, entonces el cociente de w entre z es:

$$\frac{w}{z} = \frac{28e^{i57°}}{7e^{i35°}} = \frac{28}{7}e^{i(57°-35°)} = 4e^{i22°}$$

Elevar un número a una potencia dada n también es más sencillo de escribir:

$$\boldsymbol{w^n = r^n e^{in\theta}}$$

Por ejemplo el cuadrado del número complejo $\mathfrak{w} = 9e^{i25°}$ es:

$$w^2 = \left(9e^{i25°}\right)^2 = (9)^2 e^{i2(25°)} = 81e^{i50°}$$

Obtener la raíz de un número complejo también se facilita:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{w} = (\sqrt[n]{r})e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{360°k}{n}\right)}}$$

Con $k = 0,1,2, \dots, n-1$. La notación de Euler es de gran ayuda para denotar a los números complejos y para hacer operaciones con ellos.

Por ejemplo, si $w = 8e^{i60°}$, entonces las raíces cúbicas de w son:

$$\sqrt[3]{\mathfrak{w}} = (\sqrt[3]{8})e^{i\left(\frac{60°}{3}+\frac{360°k}{3}\right)}$$

para $k = 0$

$$2e^{i(20°+0°)} = 2e^{i20°}$$

para $k = 1$

$$2e^{i(20°+120°)} = 2e^{i140°}$$

para $k = 2$

$$2e^{i(20°+240°)} = 2e^{i280°}$$

Ahora daremos otros ejemplos. Multiplicamos los números ($3+7i$) y ($4+i$). Como:

$$3+7i = 7.62(\cos\ 66.80° + i\text{sen}66.80°) \quad \text{y} \quad 4+i = 4.12(\cos\ 14.04° + i\text{sen}14.04°)$$

Entonces:

$$3+7i = 7.62e^{i66.80°} \text{ y } 4+i = 4.12e^{i14.04°}$$

Por lo tanto:

$$(3+7i)(4+i) = \left(7.62\mathrm{e}^{i66.80°}\right)\left(4.12e^{i14.04°}\right) = [(7.62)(4.12)]e^{i(66.80°+14.04°)}$$
$$(3+7i)(4+i) = 31.39e^{i80.84°}$$

En el siguiente ejemplo, obtengamos las raíces de $z^4 = 4+9i$. Como:

$$4+9i = 9.84(\cos\ 66.04° + i\text{sen}66.04°)$$

Entonces:

$$4+9i = 9.84e^{i66.04°}$$

Las raíces están dadas por la ecuación:

$$z = \sqrt[4]{9.84}e^{i\left(\frac{66.04°}{4}+\frac{360°k}{4}\right)}$$

Donde $k = 0{,}1{,}2$ y 3. Por último las raíces son:

$$z_1 = 1.77e^{i16.51°}$$
$$z_2 = 1.77e^{i106.51°}$$
$$z_3 = 1.77e^{i196.51°}$$
$$z_4 = 1.77e^{i286.51°}$$

Último ejemplo, realicemos la operación:

$$\frac{zv^3}{w}$$

Donde $z = 5e^{i90°}, v = 67e^{i35°}$ y $w = 85e^{i54°}$. Sustituyendo los valores se tiene:

$$\frac{(5e^{i90°})(67e^{i35°})^3}{(85e^{i54°})}$$

desarrollando la expresión al cubo:

$$\frac{(5e^{i90°})(67e^{i35°})^3}{(85e^{i54°})} = \frac{(5e^{i90°})[(67)^3e^{i3(35°)}]}{(85e^{i54°})} = \frac{(5e^{i90°})(300763e^{i105°})}{(85e^{i54°})}$$

ahora, haciendo la multiplicación:

$$\frac{(5e^{i90°})(300763e^{i105°})}{(85e^{i54°})} = \frac{(5)(300763)e^{i(105°+90°)}}{(85e^{i54°})} = \frac{(1503815e^{i195°})}{(85e^{i54°})}$$

y después la división:

$$\frac{(1503815e^{i195°})}{(85e^{i54°})} = \left(\frac{1503815}{85}\right)e^{i(195°-54°)} = 17691.94e^{i141°}$$

Notemos que cuando es necesario hacer varias operaciones de multiplicación y división con los números complejos resulta más sencillo utilizar la notación de Euler.