UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RESISTENCIA

Análisis Numérico: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y Estabilidad

Luis Ariel Quiroz
Agustín Juan Luis Arduña Zago
Rodrigo Román Franco
Axel Daniel Barabás
Juan Ignacio Velazco Gez Schegtel

October 27, 2025

Etapa 1: Investigación del marco conceptual

1. Explicá con tus palabras la función principal de la Transformada de Laplace en el análisis de sistemas dinámicos.

La función principal de la Transformada de Laplace es convertir problemas de cálculo (ecuaciones diferenciales) en problemas de álgebra (ecuaciones polinómicas).

Esto es tan útil en sistemas dinámicos porque:

1. El Problema Original (Cálculo)

Los sistemas dinámicos (como un circuito eléctrico, un sistema masa-resorte, o la suspensión de un auto) se describen por cómo cambian en el tiempo (t).

Matemáticamente, esto casi siempre se representa con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs). Estas ecuaciones incluyen derivadas (como $\frac{dy}{dt}$) e integrales, y resolverlas puede ser muy complicado.

2. La traducción algebraica (del dominio t a s)

Aquí entra Laplace. La transformada toma la ecuación diferencial en el dominio del tiempo (t) y la "traduce" a una ecuación algebraica en un nuevo dominio, llamado el dominio de Laplace (s).

La magia está en que:

- La derivación ($\frac{d}{dt}$) se convierte en una multiplicación (por s).

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+), \qquad \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - s\,f(0^+) - f'(0^+).$$

- La integración ($\int dt$) se convierte en una división (entre s).

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

De repente, esa ecuación diferencial complicada se transforma en una ecuación algebraica que podemos resolver despejando la variable.

3. La Solución y el Regreso

Resumen de propiedades importantes de la Transformada de Laplace:

- **Condiciones de existencia:** si f es continua a trozos y de **orden exponencial**, entonces $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$.

- **Derivadas (con condiciones iniciales):**

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+), \qquad \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - s\,f(0^+) - f'(0^+).$$

- **Integral (antiderivada):** $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$.

- **Valor inicial y final (cuando aplican):**

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s), \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} sF(s),$$

  siempre que los límites existan y el sistema sea **estable** (todos los polos de F con $\mathrm{Re} < 0$ para el valor final).

- **Corrimiento exponencial:** $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$.

- **Convolución:** $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, con $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$.

Una vez que resolvemos la ecuación fácil en el dominio s, simplemente usamos la Transformada Inversa de Laplace para "traducir" la solución de vuelta al dominio del tiempo (t).

2. Definí qué es un punto de equilibrio en un sistema de EDOs y cómo se determina.

En un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs), un punto de equilibrio es una solución constante del sistema.

Dicho de forma más intuitiva: es un estado en el que el sistema no cambia en el tiempo. Si el sistema comienza exactamente en un punto de equilibrio, permanecerá allí indefinidamente.

Matemáticamente, si tienes un sistema autónomo (donde el tiempo t no aparece explícitamente en las funciones) escrito en forma vectorial:

$$x' = f(x)$$

Un punto x^* es un punto de equilibrio si cumple que $f(x^*) = 0$. Es decir, es un punto donde todas las tasas de cambio (derivadas) son simultáneamente cero.

A estos puntos también se les suele llamar puntos críticos, puntos estacionarios o puntos fijos.

¿Cómo se Determinan?

El procedimiento para encontrar los puntos de equilibrio es puramente algebraico:

1. **Igualar todas las derivadas a cero**: Tomas cada ecuación diferencial del sistema y haces que su derivada sea igual a cero.

2. **Resolver el sistema algebraico resultante**: Al hacer esto, el sistema de EDOs se convierte en un sistema de ecuaciones algebraicas (generalmente no lineales).

3. **Las soluciones son los puntos**: Cada solución que encuentres para ese sistema algebraico corresponde a las coordenadas de un punto de equilibrio.

3. Analizá cómo los autovalores y autovectores permiten caracterizar soluciones y estabilidad en sistemas lineales homogéneos.

Entender el rol de los autovalores y autovectores es, literalmente, la **clave** para descifrar el comportamiento de cualquier sistema lineal homogéneo. Son como el "ADN" del sistema: contienen toda la información sobre cómo evolucionará en el tiempo.

Vamos a desglosar su significado y función.

El Problema: $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$

Recordemos que estamos tratando de resolver un sistema donde la **velocidad de cambio ($\mathbf{X}'$)** en cualquier punto del espacio es determinada por la matriz $\mathbf{A}$ multiplicada por la **posición actual ($\mathbf{X}$)**.

La pregunta fundamental es: ¿Existen "caminos" o "direcciones" especiales en este espacio donde el movimiento sea particularmente simple? La respuesta es sí, y esas direcciones son los **autovectores**.

---

1. Autovectores: Las "Autopistas" del Sistema

- **Definición Intuitiva:** Un **autovector** de la matriz $\mathbf{A}$ es una **dirección** en el espacio de estados. Si el sistema comienza en un punto a lo largo de esta dirección, **se moverá a lo largo de esa misma dirección para siempre**, sin desviarse. Es como una "autopista" rectilínea en el plano de fases.

- **Definición Matemática:** Un vector no nulo $\mathbf{v}$ es un autovector de $\mathbf{A}$ si, al multiplicar $\mathbf{A}$ por $\mathbf{v}$, el resultado es simplemente el mismo vector $\mathbf{v}$ escalado por un número λ.
$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$$

- **Conexión con el Sistema:** Si una solución $\mathbf{X}(t)$ está en la dirección del autovector $\mathbf{v}$, podemos escribirla como $\mathbf{X}(t) = f(t)\mathbf{v}$, donde $f(t)$ es una función escalar del tiempo. Al sustituir esto en la ecuación $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, obtenemos:
$$(f(t)\mathbf{v})' = \mathbf{A}(f(t)\mathbf{v})$$
$$f'(t)\mathbf{v} = f(t)(\mathbf{Av})$$

Usando la definición de autovector, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$:

$$f'(t)\mathbf{v} = f(t)(\lambda\mathbf{v})$$

$$f'(t) = \lambda f(t)$$

Esta es la ecuación diferencial más simple que existe, y su solución es una exponencial: $f(t) = ce^{\lambda t}$.

- **La Gran Conclusión:** A lo largo de la "autopista" definida por un autovector $\mathbf{v}$, la solución es increíblemente simple:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

---

2. Autovalores: La "Velocidad y Comportamiento" en las Autopistas

- **Definición Intuitiva:** El **autovalor** λ asociado a un autovector $\mathbf{v}$ te dice **cómo se mueve el sistema a lo largo de esa "autopista"**. Es el "límite de velocidad" y la "dirección del tráfico" en esa ruta.

- **Conexión con la Estabilidad:** El signo y la naturaleza (real o compleja) del autovalor determinan el comportamiento y la estabilidad del sistema.

Caso 1: Autovalores Reales

- **Si $\lambda > 0$ (Positivo):** El término $e^{\lambda t}$ **crece exponencialmente al infinito**. A lo largo de la dirección del autovector, las soluciones **se alejan del origen**. Esto es un comportamiento **inestable**.

- **Si $\lambda < 0$ (Negativo):** El término $e^{\lambda t}$ **decae exponencialmente a cero**. A lo largo de la dirección del autovector, las soluciones **se acercan al origen**. Esto es un comportamiento **estable**.

Caso 2: Autovalores Complejos Conjugados ($\lambda = \alpha \pm i\beta$)

- **La Parte Real (α):** Determina la **estabilidad** del movimiento.

  - **Si $\alpha > 0$:** El término $e^{\alpha t}$ crece. Las soluciones se alejan del origen en **espirales hacia afuera**. Comportamiento **inestable (foco inestable)**.

  - **Si $\alpha < 0$:** El término $e^{\alpha t}$ decae. Las soluciones se mueven hacia el origen en **espirales hacia adentro**. Comportamiento **estable (foco estable)**.

– **Si $\alpha = 0$:** El término $e^{\alpha t}$ es 1. Las soluciones **orbitan perpetuamente** alrededor del origen en elipses, sin acercarse ni alejarse. Comportamiento **marginalmente estable (centro)**.

> **Nota (sistemas no lineales):** si el sistema original es no lineal y la linealización tiene **parte real cero** (autovalores puramente imaginarios), la clasificación es **inconclusa**. Se requiere un análisis adicional (Lyapunov, términos de orden superior, etc.).

- **La Parte Imaginaria (β):** Determina la **velocidad de oscilación**. Un valor más grande de β significa que las espirales u órbitas son más "rápidas" o "apretadas".

Forma real de las soluciones con autovalores complejos.
Si $\lambda = \alpha \pm i\beta$ y el autovector asociado es $\mathbf{v} = \mathbf{p} \pm i\mathbf{q}$, entonces una base real de soluciones es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t}\big[c_1\big(\mathbf{p}\cos\beta t - \mathbf{q}\sin\beta t\big) + c_2\big(\mathbf{p}\sin\beta t + \mathbf{q}\cos\beta t\big)\big].$$

Autovalores repetidos y casos no diagonalizables (Jordan).
Si A tiene un autovalor repetido y no es diagonalizable, aparecen términos del tipo $t\,e^{\lambda t}\mathbf{v}$, $t^2 e^{\lambda t}\mathbf{v}$ en la solución (según la longitud de la cadena de Jordan). Esto afecta transitorios y estabilidad aparente, por lo que conviene verificar la **completitud** de autovectores.

3. La Solución General: Combinando las Autopistas

El **Principio de Superposición** nos dice que la solución general del sistema es una **combinación lineal** de las soluciones simples que encontramos a lo largo de cada "autopista" (autovector).

- **Si tienes dos autovalores reales distintos λ_1, λ_2 con autovectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:** Cualquier solución del sistema es una mezcla de movimientos a lo largo de esas dos direcciones.

  $$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

  El comportamiento a largo plazo estará dominado por el autovalor con la parte real más grande.

Resumen: El ADN del Sistema

Componente	Rol Geométrico	Rol en la Solución	Rol en la Estabilidad
Autovectores (v)	Definen las **“autopistas”** o direcciones de movimiento simple en el plano de fases.	Proporcionan la **dirección vectorial** de cada componente de la solución.	Definen los ejes de atracción/repulsión.
Autovalores (λ)	Definen la **“velocidad” y el “sentido”** del movimiento a lo largo de las autopistas.	Proporcionan el **comportamiento temporal** ($e^{\lambda t}$) de cada componente.	**Determinan completamente la estabilidad** del sistema.

En esencia, al encontrar los autovalores y autovectores, estás “descomponiendo” un sistema complejo en sus movimientos más fundamentales y predecibles.

4. Compará las soluciones de un sistema lineal homogéneo con uno no homogéneo.

Nota (estabilidad en sistemas no homogéneos): si $\max \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, la parte homogénea domina y la respuesta **diverge** aunque la entrada $\mathbf{f}(t)$ sea acotada. La estabilidad viene determinada por los autovalores de A.

Diferencia entre Sistemas Homogéneos y No Homogéneos

La diferencia fundamental radica en la **presencia de una entrada o “fuerza” externa**.

- **Sistema Homogéneo:**
$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$
  - Describe la **respuesta natural** del sistema, es decir, cómo evoluciona por sí mismo basándose únicamente en sus condiciones iniciales (como soltar un péndulo o dejar que un circuito RC se descargue).
- **Sistema No Homogéneo:**
$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$
  - Describe la **respuesta forzada**. El término $\mathbf{f}(t)$ es una entrada externa que “empuja” o “alimenta” al sistema (como empujar un columpio o aplicar un voltaje senoidal a un circuito).

La solución del sistema no homogéneo se construye usando la solución del homogéneo.

Una Analogía: El Columpio

Imagina que un columpio es tu sistema dinámico.

1. Sistema Homogéneo (Respuesta Natural) Llevas el columpio hacia atrás (esta es la *condición inicial*) y lo sueltas. El columpio oscilará a su propia frecuencia natural, perdiendo altura gradualmente debido a la fricción, hasta detenerse en el punto de equilibrio. Esa oscilación amortiguada es la **solución homogénea ($\mathbf{x}_h$)**.

2. Sistema No Homogéneo (Respuesta Forzada) El columpio está quieto, y tú empiezas a empujarlo rítmicamente (esta es la *fuerza externa* $\mathbf{f}(t)$).

- **Fase Transitoria:** Al principio, el movimiento será caótico. El columpio intentará oscilar a su frecuencia natural ($\mathbf{x}_h$) y a la frecuencia de tus empujones ($\mathbf{x}_p$) al mismo tiempo. Pasado un rato, el movimiento natural de "bamboleo" inicial (la parte homogénea) desaparece.

- **Fase Estacionaria:** El columpio se sincroniza contigo y oscila *exactamente* a la frecuencia de tus empujones. Este movimiento final y sostenido es la **solución particular ($\mathbf{x}_p$)**.

Comparación Detallada de las Soluciones

1. Sistema Homogéneo ($\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$)

- **Estructura de la Solución:**
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t)$$

- **Significado Físico:** Representa la **Respuesta Natural** o Transitoria del sistema.

- **Comportamiento:** Describe cómo el sistema vuelve al equilibrio (si es estable) basándose únicamente en sus condiciones iniciales.

- **Rol de $\mathbf{x}(0)$:** Determina directamente las constantes c_i de la solución $\mathbf{x}_h(t)$.

- **Comportamiento a Largo Plazo:** (Si es estable) El sistema siempre tiende al origen ($\mathbf{0}$).

2. Sistema No Homogéneo ($\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$)

- **Estructura de la Solución:**

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t)$$

- **Significado Físico:** Representa la **Respuesta Total** del sistema.

- **Comportamiento:** Es la suma de dos partes:

  – $\mathbf{x}_h(t)$ **(Solución Homogénea):** Es la parte **transitoria**. Generalmente, $\mathbf{x}_h(t) \to \mathbf{0}$ con el tiempo (si el sistema es estable).

  – $\mathbf{x}_p(t)$ **(Solución Particular):** Es la parte de **estado estacionario**. Describe el comportamiento a largo plazo del sistema, "arrastrado" por la fuerza externa $\mathbf{f}(t)$.

- **Rol de $\mathbf{x}(0)$:** Determina las constantes c_i de la parte $\mathbf{x}_h(t)$ para asegurar que la solución total cumpla la condición inicial: $\mathbf{x}_h(0) + \mathbf{x}_p(0) = \mathbf{x}(0)$.

- **Comportamiento a Largo Plazo:** (Si es estable) El sistema tiende a la solución particular $\mathbf{x}_p(t)$.

El Rol Clave de la Solución Homogénea ($\mathbf{x}_h$)

> **Pregunta:** Si la solución homogénea $\mathbf{x}_h$ tiende a cero, ¿por qué la calculamos en el caso no homogéneo?
> **Respuesta:** Porque $\mathbf{x}_h(t)$ es la única parte de la solución que tiene constantes arbitrarias $(c_1, c_2, \ldots)$, las cuales son necesarias para satisfacer la condición inicial.

El proceso es el siguiente: 1. Encontramos una **solución particular** $\mathbf{x}_p(t)$ que funcione. Esta solución no tiene constantes libres y está completamente determinada por la fuerza externa $\mathbf{f}(t)$. 2. Al sumarle la **solución homogénea** $\mathbf{x}_h(t)$, le agregamos "flexibilidad" a la solución total. 3. Usamos esa flexibilidad (ajustando las constantes c_i de $\mathbf{x}_h(t)$) para cumplir con la **condición inicial** $\mathbf{x}(0)$.

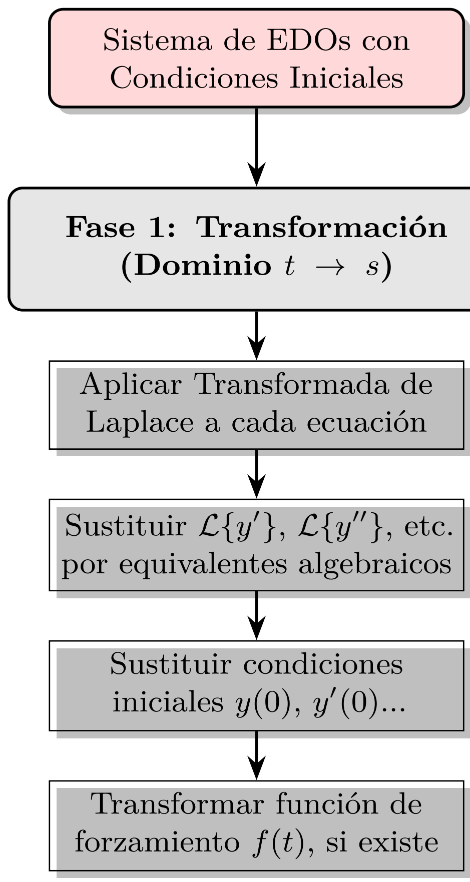
En resumen:

- $\mathbf{x}_p(t)$ dicta el comportamiento a **largo plazo** (el estado estacionario).

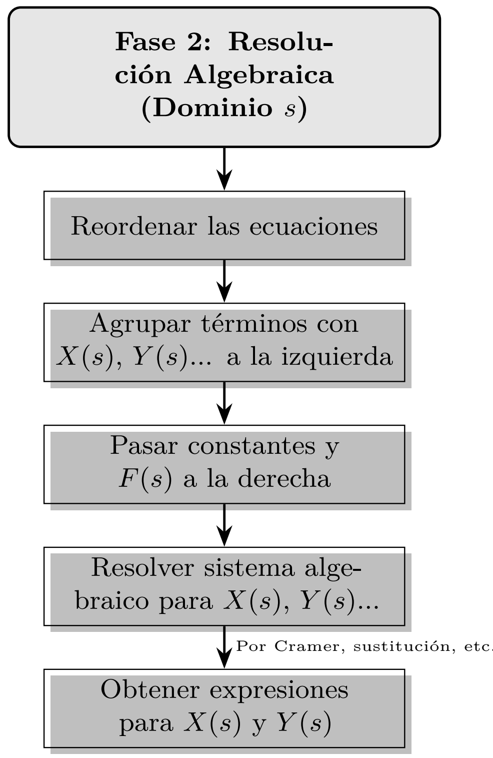
- $\mathbf{x}_h(t)$ dicta el comportamiento a **corto plazo** (la transición) y ajusta la solución para que comience en el lugar correcto $\mathbf{x}(0)$.

5. Elaborá un diagrama de flujo del algoritmo de resolución de sistemas homogéneos y no homogéneos (utilizando Laplace).

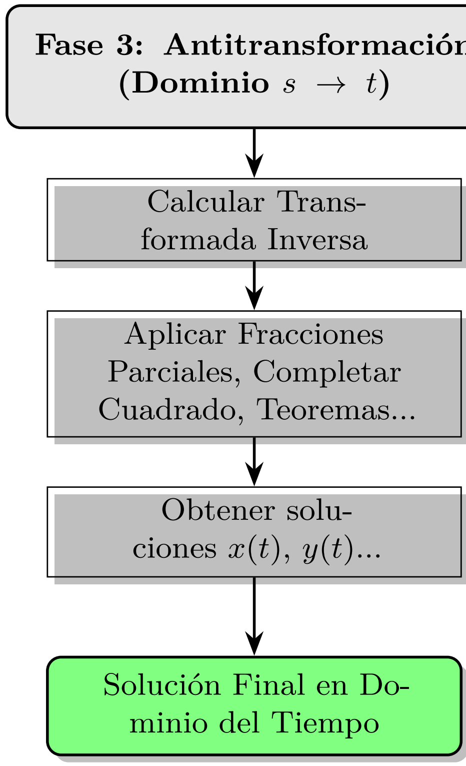
Fase 1: Transformación al Dominio de Laplace



Fase 2: Resolución en el Dominio Algebraico



Fase 3: Retorno al Dominio del Tiempo



> La diferencia entre un sistema homogéneo y uno no homogéneo no cambia los pasos del algoritmo, sino el contenido de lo que se calcula en algunos de esos pasos

Ejemplo 1: Sistema Lineal Homogéneo

Problema: Resolver el siguiente sistema con las condiciones iniciales dadas:

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases} \qquad \text{con } x(0) = 1, y(0) = 0$$

Paso 1: Transformar cada Ecuación del Sistema Aplicamos la Transformada de Laplace a ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{x'\} = \mathcal{L}\{x\} + 2\mathcal{L}\{y\} \\ \mathcal{L}\{y'\} = 4\mathcal{L}\{x\} + 3\mathcal{L}\{y\} \end{cases}$$

Sustituimos las fórmulas de la transformada, usando $X(s)$ para $\mathcal{L}\{x\}$ y $Y(s)$ para $\mathcal{L}\{y\}$:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = X(s) + 2Y(s) \\ sY(s) - y(0) = 4X(s) + 3Y(s) \end{cases}$$

Ahora, introducimos las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $y(0) = 0$:

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = X(s) + 2Y(s) \\ sY(s) - 0 = 4X(s) + 3Y(s) \end{cases}$$

Paso 2: Reordenar en un Sistema Algebraico Estándar Agrupamos los términos con $X(s)$ y $Y(s)$ a la izquierda y las constantes a la derecha.

$$\begin{cases} (s-1)X(s) - 2Y(s) = 1 \\ -4X(s) + (s-3)Y(s) = 0 \end{cases}$$

Paso 3: Resolver el Sistema Algebraico para $X(s)$ y $Y(s)$ Usaremos la **Regla de Cramer**. 1. **Determinante del sistema (Δ):**

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ -4 & s-3 \end{vmatrix} = (s-1)(s-3) - 8 = s^2 - 4s + 3 - 8 = s^2 - 4s - 5 = (s-5)(s+1)$$

2. **Determinante para $X(s)$ (Δ_X):**

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & s-3 \end{vmatrix} = 1(s-3) - 0 = s - 3$$

3. **Determinante para $Y(s)$ (Δ_Y):**

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (1)(-4) = 4$$

4. **Soluciones en s:**

$$X(s) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{s-3}{(s-5)(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{4}{(s-5)(s+1)}$$

Paso 4: Antitransformar para Encontrar $x(t)$ y $y(t)$ Usamos **fracciones parciales** para cada solución.

- **Para $X(s)$:** $\frac{s-3}{(s-5)(s+1)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+1}$
  - $A = \frac{5-3}{5+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
  - $B = \frac{-1-3}{-1-5} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$ $X(s) = \frac{1/3}{s-5} + \frac{2/3}{s+1} \implies \mathbf{x(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t}}$

- **Para** $Y(s)$**:** $\frac{4}{(s-5)(s+1)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s+1}$

  - $A = \frac{4}{5+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
  - $B = \frac{4}{-1-5} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$ $Y(s) = \frac{2/3}{s-5} - \frac{2/3}{s+1} \implies \mathbf{y(t) = \frac{2}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{-t}}$

Ejemplo 2: Sistema Lineal No Homogéneo

Problema: Resolver el mismo sistema, pero ahora con una función de forzamiento:

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 4x + 3y \end{cases} \qquad \text{con } x(0) = 1, y(0) = 0$$

Paso 1: Transformar cada Ecuación del Sistema La única diferencia es el término `+1` en la primera ecuación.

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = X(s) + 2Y(s) + \mathcal{L}\{1\} \\ sY(s) - 0 = 4X(s) + 3Y(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = X(s) + 2Y(s) + \frac{1}{s} \\ sY(s) = 4X(s) + 3Y(s) \end{cases}$$

Paso 2: Reordenar en un Sistema Algebraico Estándar

$$\begin{cases} (s-1)X(s) - 2Y(s) = 1 + \frac{1}{s} \\ -4X(s) + (s-3)Y(s) = 0 \end{cases}$$

Paso 3: Resolver el Sistema Algebraico para $X(s)$ **y** $Y(s)$ El determinante del sistema, $\Delta = (s-5)(s+1)$, es el mismo que en el caso homogéneo.

1. **Determinante para** $X(s)$ (Δ_X)**:**

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{s} & -2 \\ 0 & s-3 \end{vmatrix} = (1 + \frac{1}{s})(s-3) = \frac{s+1}{s}(s-3) = \frac{(s+1)(s-3)}{s}$$

2. **Determinante para** $Y(s)$ (Δ_Y)**:**

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} s-1 & 1 + \frac{1}{s} \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-4)(1 + \frac{1}{s}) = 4\left(\frac{s+1}{s}\right) = \frac{4(s+1)}{s}$$

3. **Soluciones en s:**

$$X(s) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{(s+1)(s-3)/s}{(s-5)(s+1)} = \frac{s-3}{s(s-5)}$$

$$Y(s) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{4(s+1)/s}{(s-5)(s+1)} = \frac{4}{s(s-5)}$$

Paso 4: Antitransformar para Encontrar $x(t)$ y $y(t)$

- **Para $X(s)$:** $\frac{s-3}{s(s-5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-5}$
  - $A = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$
  - $B = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$ $X(s) = \frac{3/5}{s} + \frac{2/5}{s-5} \implies \mathbf{x(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{5t}}$
- **Para $Y(s)$:** $\frac{4}{s(s-5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-5}$
  - $A = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$
  - $B = \frac{4}{5}$ $Y(s) = \frac{-4/5}{s} + \frac{4/5}{s-5} \implies \mathbf{y(t) = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}e^{5t}}$

Comparación y Conclusión

- **Solución Homogénea:** $x_h(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t}$ y $y_h(t) = \frac{2}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{-t}$. Describe la **respuesta natural** del sistema.
- **Solución No Homogénea:** $x(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}e^{5t}$ y $y(t) = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}e^{5t}$. Describe la **respuesta total**.

La solución de un sistema no homogéneo es la superposición (suma) de la respuesta debida solo a las condiciones iniciales (lo que calculamos en el caso homogéneo) y la respuesta debida solo a la fuerza externa.

El método de Laplace es poderoso porque maneja esta superposición de forma automática. No necesitas calcular las dos partes por separado y luego ver cómo encajan; la transformada lo hace todo en un solo paso, garantizando que el resultado final cumpla tanto con la ecuación diferencial como con las condiciones iniciales.

Una Conexión Clave: Polos de Laplace y Autovalores

Es fundamental destacar la conexión directa que existe entre los dos métodos de análisis presentados: los **polos** de la solución en el dominio de Laplace son, de hecho, los **autovalores** de la matriz del sistema.

Esta equivalencia surge porque el denominador que aparece al resolver el sistema mediante Laplace, $\det(sI - A)$, es precisamente el polinomio característico que se utiliza para encontrar los autovalores, $\det(A - \lambda I) = 0$.

Por ejemplo, en el sistema homogéneo que resolvimos, el denominador de $X(s)$ fue $(s-5)(s+1)$, dándonos los polos $s = 5$ y $s = -1$. Estos son exactamente los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, analizar la estabilidad a través de los autovalores en el dominio del tiempo es conceptualmente idéntico a analizar la ubicación de los polos en el dominio de Laplace.

Ampliando el Análisis: La Función de Transferencia

La relación entre la entrada y la salida de un sistema se formaliza con el concepto de **Función de Transferencia**, denotada como $G(s)$. Se define como el cociente entre la Transformada de Laplace de la **salida** y la Transformada de Laplace de la **entrada**, asumiendo que todas las **condiciones iniciales son nulas**.

$$G(s) = \left.\frac{\text{Salida}(s)}{\text{Entrada}(s)}\right|_{\text{condiciones iniciales}=0}$$

La función de transferencia es un modelo matemático del sistema en sí mismo, independiente de la entrada que se le aplique. Su importancia radica en que **los polos de** $G(s)$ **son los autovalores de la matriz del sistema**, y por lo tanto, determinan completamente su estabilidad.

Si en nuestro ejemplo no homogéneo consideramos la fuerza externa "1" como una entrada $u(t) = 1$ (cuya transformada es $U(s) = 1/s$) y a $x(t)$ como la salida, la función de transferencia $G(s) = X(s)/U(s)$ tendría en su denominador el polinomio $s^2 - 4s - 5$, revelando una vez más los modos inestables ($s = 5$) y estables ($s = -1$) del sistema.

6. Diseñá un esquema visual que clasifique los tipos de puntos de equilibrio y la estabilidad asociada.