Sistema de ecuaciones complejo

2) Pasar a forma trigonométrica y exponencial

Para un número $z = a + bi$:

1. **Módulo:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. **Argumento:** $\theta = \operatorname{atan2}(b, a)$ (ajustá por cuadrante).
   - Q1: $a > 0, b > 0 \Rightarrow \theta = \arctan(b/a)$
   - Q2: $a < 0 \Rightarrow \theta = \pi - \arctan(|b/a|)$
   - Q3: $a < 0, b < 0 \Rightarrow \theta = \pi + \arctan(b/a)$
   - Q4: $a > 0, b < 0 \Rightarrow \theta = -\arctan(|b/a|)$
3. **Trig.:** $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
4. **Exponencial:** $z = |z|\, e^{i\theta}$.

Casos especiales

- Si $a = 0$: $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ según el signo de b.
- Si $b = 0$: $\theta = 0$ si $a > 0$, $\theta = \pi$ si $a < 0$.
- Siempre podés sumar $2\pi k$ al argumento y es el mismo número.

3) Graficar los resultados

1. Dibujá el plano complejo: eje **Real** (horizontal) y **Imaginario** (vertical).
2. Marcá cada solución $z = a + bi$ en (a, b).
3. Si querés, mostrás:
   - el **módulo** como distancia al origen,
   - el **argumento** como ángulo desde el eje real positivo.

Polar: $z = r[\cos\theta + i\ sen\theta] = |z|[\cos\theta + i\ sen\theta]$

Raíces n-esimas

$$z^n = w \rightarrow Pasar\ w\ a\ forma\ polar \rightarrow r = |w| = \sqrt{a^2 + b^2}\ y\ \theta = \arctan(b, a)$$

$$z^n = w = r\big(\cos(\theta_k) + isen(\theta_k)\big) = \rho e^{i\theta_k} \rightarrow \theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}\ , k = 0, \dots, n-1$$

Hurwitz

Paso 1 — Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s), \quad \mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2X(s), \quad \mathcal{L}\{x'''(t)\} = s^3X(s).$$

$$(s^3 + 4s^2 + 5s + 50)X(s) = (4s^2 - 3s)U(s)$$

$$a_3 = 1,\ a_2 = 4,\ a_1 = 5,\ a_0 = 50,\ n = 3$$

Dividí ambos lados:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$$

Paso 4 — Ecuación característica y orden

- **Ecuación característica** = denominador de $G(s)$.
- **Orden** = mayor exponente de s en el denominador.

Paso 5 — Polos y ceros

- **Ceros** = raíces del **numerador**.
- **Polos** = raíces del **denominador**.

$$\Delta_1 = |a_{n-1}|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{matrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{matrix}$$

Cuando veamos un resultado de determinantes negativos, decimos que es inestable.

Si existen los limites indicados se cumple

$$\boxed{\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} s\,F(s)}$$

Ejemplo:

Sea $f(t) = 3\,e^{-2t}$

entonces $\lim_{t \to 0} 3\,e^{-2t} = 3$ $\quad F(s) = \frac{3}{s+2} \Rightarrow \lim_{s \to \infty} \frac{3s}{s+2} = 3$

Si existen los limites indicados se cumple

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\,F(s)}$$

Ejemplo:

Sea $f(t) = 3\,e^{-2t}$

entonces $\lim_{t \to \infty} 3\,e^{-2t} = 0$ $\quad F(s) = \frac{3}{s+2} \Rightarrow \lim_{s \to 0} \frac{3s}{s+2} = 0$

PASO 0 – Escribir $f(t)$ con $u(t-a)$ y cosas de $(t-a)$

Siempre que puedas, dejá las cosas así:

- Si es **constante a partir de** a:

$$f(t) = k\,u(t-a)$$

- Si es **polinomio cortado** (ej: vale t hasta 1 y 0 después):

$$f(t) = t - t\,u(t-1)$$

- Si aparece $t\,u(t-a)$, escribí:

$$t = (t-a) + a \Rightarrow t\,u(t-a) = (t-a)u(t-a) + a\,u(t-a)$$

PASO 1 – Aplicar Laplace

Ejemplo genérico:

$$y' + ay = f(t)$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y_0, \quad \mathcal{L}\{y\} = Y$$

Entonces:

$$(s+a)Y(s) - y_0 = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Ahora transformás $f(t)$ usando:

- $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$
- Lo que no está corrido, con la tabla normal.

PASO 2 – Sacar factor común $Y(s)$

Ya queda algo tipo:

$$(s+a)Y(s) = \text{expresión en } s$$

PASO 3 – Aislar $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{\text{expresión en } s}{s+a}$$

Si $f(t)$ tiene escalón, casi siempre queda algo así:

$$Y(s) = \underbrace{F_1(s)}_{\text{sin } e^{-as}} + \underbrace{e^{-as}F_2(s)}_{\text{parte con corrimiento}}$$

PASO 4 – Unificar denominadores y proponer fracciones parciales

Trabajás **por separado**:

1. La parte sin corrimiento: $F_1(s)$
2. La parte con corrimiento: $F_2(s)$ (sin el e^{-as})

Para cada una:

- Dejás una sola fracción, por ejemplo:

$$F_1(s) = \frac{P_1(s)}{(s+\alpha)(s+\beta)\dots}$$

- Proponés fracciones parciales, por ejemplo:

$$F_1(s) = \frac{A}{s+\alpha} + \frac{B}{s+\beta}$$

o

$$F_2(s) = \frac{C}{s} + \frac{D}{s^2} + \frac{E}{s+2}$$

PASO 5 – Encontrar los coeficientes $A, B, C, \dots$

PASO 6 – Inversa de Laplace

1. **Parte sin corrimiento $F_1(s)$:**
   Llamemos $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}$.
2. **Parte con corrimiento $e^{-as}F_2(s)$:**
   - Primero encontrás $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$ como si no hubiera corrimiento.
   - Después aplicás la fórmula:

   $$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F_2(s)\} = f_2(t-a)u(t-a)$$
3. **Combinar todo:**

   Si $Y(s) = F_1(s) - e^{-as}F_2(s)$, entonces:

   $$y(t) = f_1(t) - f_2(t-a)\,u(t-a)$$