// Assignment: 1

// Author: Guy Shitrit, ID: 330707761

<u>שאלה 1</u>

1

$$(\neg Q \to P) \land (S \lor \neg R) \equiv F$$

נבדוק עבור אילו השמות ביטוי זה שקול לשקר.

כידוע יש לנו 3 אפשרויות:

$$F \land T \equiv F, \quad T \land F \equiv F, \quad F \land F \equiv F$$

~~קודם נסתכל על הביטוי $S \lor \neg R$~~

	Q	P	S	R	¬Q	¬R	¬Q→P	S∨¬R	(¬Q→P)∧(S∨¬R)
1)	T	T	T	T	F	F	T	T	T
2)	T	T	T	F	F	T	T	T	T
3)	T	T	F	T	F	F	T	T	T
4)	T	F	T	T	F	F	T	F	F
5)	F	T	T	T	T	F	F	T	F
6)	T	T	F	F	F	T	T	T	T
7)	T	F	T	F	F	T	T	T	T
8)	T	F	F	T	F	F	T	F	F
9)	F	T	F	T	T	F	F	F	F
10)	F	T	T	F	T	T	F	T	F
11)	F	F	T	T	T	F	F	T	F
12)	T	F	F	F	F	T	T	T	T
13)	F	T	F	F	T	T	F	T	F
14)	F	F	T	F	T	T	F	T	F
15)	F	F	F	T	T	F	F	F	F
16)	F	F	F	F	T	T	F	T	F

מצאנו 10 מתוך 16 אפשרויות כך שהפסוק המקורי יהיה שקול לשקר ולכן, ערך האמת של כל אחד מארבעת הפסוקים האטומיים לפנינו תלוי בהשמה מתוך 10 האפשרויות שמצאנו. לפיכך, אין דרך להסיק ערך אמת וודאי עבור פסוקים אלו, משום שאף אחד מפסוקים אלו לא תמיד אמת או תמיד שקר (לא מקיימים טאוטולוגיה או סתירה).

לכן ניקח אחד מהאפשרויות עבורן הפסוק המקורי נתן ערך שקר ונציב עבור כל אחד מארבעת הפסוקים:

$$Q \equiv F, P \equiv F, S \equiv F, R \equiv F$$

1) $(P \lor S) \to (Q \land R)$

$(F \lor F) \to (F \land F) \Rightarrow F \to F \equiv \boxed{T}$

2) $\neg(P \leftrightarrow R)$

$\neg(F \leftrightarrow F) \Rightarrow \neg T \equiv \boxed{F}$

3) $\neg(\neg Q \to S) \Rightarrow \neg(\neg F \to F) \equiv \neg(T \to F) \equiv \neg F \equiv \boxed{T}$

4) $(Q \oplus S) \land P \Rightarrow \overbrace{(F \oplus F)}^{F} \land F \equiv F \land F \equiv \boxed{F}$

<u>שאלה 2</u>

שאלה 2

1) 1.3. $(Q \to P) \vee (S \to Q)$

לפי $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$:

$Q \to P \equiv \neg Q \vee P$

$S \to Q \equiv \neg S \vee Q$

$(\neg Q \vee P) \vee (\neg S \vee Q) \equiv$ $P \vee Q \vee \neg Q \vee \neg S$

חילוף

$P \vee (\overbrace{Q \vee \neg Q}^{T}) \vee \neg S \equiv T$

התקבל אמת מהביטוי ולכן הביטוי המקורי הוא טאוטולוגיה.

2. הוכחנו שלא משנה מה יתקבל אמת, נוכל להוכיח זאת ע"י טבלת אמת:

P	Q	S	$Q \to P$	$S \to Q$	$(Q \to P) \vee (S \to Q)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T

טאוטולוגיה

(2) 1.3. $(P \leftrightarrow S) \to (P \vee S)$

$$P \leftrightarrow S \equiv (P \wedge S) \vee (\neg P \wedge \neg S)$$

זהות: $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$

$$\neg\left((P \wedge S) \vee (\neg P \wedge \neg S)\right) \vee (P \vee S) \equiv \left(\neg(P \wedge S) \wedge \neg(\neg P \wedge \neg S)\right) \vee (P \vee S)$$

$$\equiv \left((\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S)\right) \vee (P \vee S) \equiv (P \vee S) \vee \left((\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S)\right)$$

זהות: $P \vee (P \wedge Q) \equiv P \Rightarrow (P \vee S) \vee \left((\neg P \vee \neg S) \wedge (P \vee S)\right) \equiv \boxed{P \vee S}$

(במשפט ההבלעה)

בגלל זה אינו טאוטולוגיה או סתירה משום שלא החזיר לנו אמת או שקר. $\cancel{(P \vee S)}$.

2.

P	S	$P \leftrightarrow S$	$P \vee S$	$(P \leftrightarrow S) \to (P \vee S)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	F

③ 1.3. $(R\vee Q) \oplus (\neg P\wedge R) \equiv (R\vee Q)\oplus(R\wedge\neg P)$
חילוף

לפי: $P\oplus Q \equiv (P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

$$\underbrace{(R\vee Q)}_{"P"} \oplus \underbrace{(\neg P\wedge R)}_{"Q"} \equiv ((R\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge R))\vee(\neg(R\vee Q)\wedge(\neg P\wedge R))$$

דה מורגן   דה מורגן

$$\equiv \cancel{R\vee Q\wedge}\ \cancel{\neg(\neg P\wedge R)}\ ((R\vee Q\wedge P\vee\neg R)\vee(\neg R\wedge\neg Q\wedge\neg P\wedge R)$$

~~נסמן A - R∨Q , B - ¬P∧R~~

$\cancel{(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)}$

$$\equiv ((R\vee Q)\wedge(P\vee\neg R))\vee(\underbrace{R\wedge\neg R}_{F}\wedge\neg Q\wedge\neg P)) \equiv ((R\vee Q)\wedge(P\vee\neg R))\vee(F\wedge\neg Q\wedge\neg P))$$

חילוף

לפי: $P\vee F\equiv P$

$\equiv$

$\boxed{(R\vee Q)\wedge(P\vee\neg R)}$

הביטוי אינו טאוטולוגיה או סתירה משום שאינו מחזיר אמת או שקר קבוע.

2.

P	Q	R	¬P	R∨Q	¬P∧R	(R∨Q)⊕(¬P∧R)
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	F
F	F	F	T	F	F	F

(4) 1.3. $(Q \to Q) \land (S \to P)$

אנו יודעים כי $T \to T \equiv T$ ו $F \to F \equiv T$, ולכן:

$$Q \to Q \equiv T$$

$$T \land (S \to P) \equiv \boxed{S \to P}$$

הביטוי ~~אינו~~ אינו טאוטולוגיה או סתירה משום שאינו מחזיר אמת או שקר קבוע (תלוי ב S ו P).

2.

Q	S	P	$Q \to Q$	$S \to P$	$(Q\to Q)\land(S\to P)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

(5) 1.3. $S \to ((Q \leftrightarrow R) \land S)$

$$Q \leftrightarrow R \equiv (Q \land R) \lor (\neg Q \land \neg R)$$

$$S \to (((Q\land R)\lor(\neg Q \land \neg R)) \land S) \equiv_{\text{לפי } p\to q \equiv \neg p \lor q} \neg S \lor (\overbrace{((Q\land R)\lor(\neg Q\land\neg R))}^{\text{נסמן כ-}A} \land S)$$

$$\neg S \lor (A \land S) \equiv (\neg S \lor A) \land \underbrace{(\neg S \lor S)}_{T} \equiv \neg S \lor A \land T \equiv \neg S \lor A$$

נרחיב לפי חוק ~~הקיבוץ~~ הפילוג

$$\equiv \neg S \lor (\underbrace{(Q\land R)\lor(\neg Q\land \neg R)}_{Q\leftrightarrow R}) \equiv \boxed{\neg S \lor (Q \leftrightarrow R)}$$

הביטוי אינו טאוטולוגיה ואינו סתירה משום שאינו מחזיר אמת או שקר קבוע.

2.

S	Q	R	$Q\leftrightarrow R$	$(Q\leftrightarrow R)\land S$	$S\to((Q\leftrightarrow R)\land S)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

שאלה 3

שאלה 3

1) $P\oplus Q \equiv (P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$ צ"ל:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\oplus Q$	$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$
T	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	F	F	F

הוכחה של שקילות לפי טבלת אמת

(3) 2. צריך להראות כי $P\oplus Q\oplus Q \equiv P$

כידוע: $P\oplus Q \equiv (P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

$$\Big(\underbrace{(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)}_{\text{"}P\text{"}}\Big)\oplus \underbrace{Q}_{\text{"}Q\text{"}}$$

$$\Big(\big((P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\big)\wedge\neg Q\Big)\vee\Big(\neg\big((P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\big)\wedge Q\Big)$$

$$\neg\big((P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\big)\underset{\text{דה מורגן}}{\equiv}\neg(P\wedge\neg Q)\wedge\neg(\neg P\wedge Q)\underset{\text{דה מורגן}}{\equiv}(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$$

$$\Big(\big((P\wedge\neg Q)\vee\underbrace{(\neg P\wedge Q)\big)\wedge\neg Q}\Big)\vee\Big((\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge Q\Big)$$

$$(\neg P\wedge \underbrace{Q\wedge\neg Q}_{F})\equiv F$$

$$\Big(\underbrace{(P\wedge\neg Q)\vee F}_{(P\wedge\neg Q)}\Big)\vee\Big(\underbrace{(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge Q}\Big)$$

$$\underbrace{Q\wedge(Q\vee\neg P)}\wedge(P\vee\neg Q)\equiv Q\wedge(P\vee\neg Q)$$

חילוף לפי $P\wedge(P\vee Q)\equiv P$, צד שמה Q

$$\underset{\text{חוק הפילוג}}{\equiv}(Q\wedge P)\vee(\underbrace{Q\wedge\neg Q}_{F})\equiv Q\wedge P\underset{\text{חילוף}}{\equiv}P\wedge Q$$

עכשיו כל הדברים הופשטו ונוכל להגיע לביטוי פשוט זה:

$$(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\underset{\text{חוק הפילוג}}{\equiv}P\wedge\overbrace{(Q\vee\neg Q)}^{T}\equiv P\wedge T\equiv\boxed{P}$$

שאלה 4

שאלה 4

נסמן פסוקים באותיות ואז נתרגם את כל הפסוקים הבאים בצורה כך.

P - דני קורא ספר
Q - רונית מציירת

R - יורד שלג
S - שלמה עוזר לדני

(1) $(P \wedge Q) \rightarrow R$

(2) $(\neg P \vee \neg S) \rightarrow \neg Q$

(3) $R \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

(4) $\neg(S \rightarrow (P \wedge Q))$

(5) $S \leftrightarrow (R \vee Q)$

נמיין את הפסוקים לפי הפסוקים המעורבים P, Q, R, S:

$\{(1), (3)\}$

$\{(2), (4)\}$

טומר פסוק (5) אינו יכול להיות שקול לפסוק אחר כי אין פסוק אחר שפסוקים רלוונטיים מעורבים בו.

(ב) $(1) \stackrel{?}{\equiv} (3)$

$(P \wedge Q) \rightarrow R \stackrel{?}{\equiv} R \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

לפי $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$:

$(P \wedge Q) \rightarrow R \equiv \neg(P \wedge Q) \vee R \equiv \neg P \vee \neg Q \vee R$ (1)

לפי $P \leftrightarrow Q \equiv \cancel{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)}$: $R \rightarrow (P \wedge \neg Q) \equiv \neg R \vee (P \wedge \neg Q)$ (3)

$\cancel{(R \wedge (P \wedge \neg Q)) \vee (\neg R \wedge (P \wedge \neg Q)) \equiv (P \wedge (R \wedge \neg Q)) \vee (P \wedge (Q \wedge \neg R))}$

$\equiv \cancel{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \equiv \ldots P \wedge (Q \vee R) \equiv P \wedge (\ldots)}$

~~חוק הפילוג~~

~~שני~~ הפסוקים לא שקולים לוגית משום שצורתם הלוגית שונה לחלוטין, נוכיח עם טבלת אמת.

P	$\neg P$	Q	R	$\neg R$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$(P \wedge Q) \to R$	$R \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$
T	F	T	T	F	F	T	F	T	F
T	F	T	F	T	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T	F
T	F	F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T

כמו שניתן לראות, הערכים אינם מתאימים עבור כל השמה בין שני הפסוקים ולכן אינם שקולים לוגית.

ב) $(2) \overset{?}{\equiv} (4)$

$$\underbrace{(\neg P \vee \neg S) \to \neg Q}_{\text{אגף שמאל}} \overset{?}{\equiv} \underbrace{\neg(S \to (P \wedge Q))}_{\text{אגף ימין}}$$

לפי: $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$;

נפשט את אגף שמאל:

$$\neg(\neg P \vee \neg S) \vee \neg Q \equiv P \wedge S \vee \neg Q$$

נפשט את אגף ימין:

$$\neg(\neg S \vee (P \wedge Q)) \equiv S \wedge \neg(P \wedge Q) \equiv S \wedge \neg P \vee \neg Q$$

אז נשווה, האם $S \wedge P \vee \neg Q \equiv S \wedge \neg P \vee \neg Q$?

נבחין כי הביטויים כמעט דומים אך יש הבדל בין P לבין $\neg P$, מה שאומר ששני הפסוקים גם לא שקולים לוגית.

תשובה סופית: אף אחד מהפסוקים הלוגיים אינם שקולים זה לזה.

שאלה 5

(5)

$S(x) = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge$ x מספר ריבועי $(x=n^2)$ $n \in \mathbb{N} \}$

$F(x) = \{ x \mid$ x מספר שלם $(x \in \mathbb{Z}) \wedge$ x מתחלק ב-5 $\}$

1) $\forall x \, (S(x) \rightarrow F(x))$

= "עבור כל מספר טבעי x, אם x הוא מספר ריבועי אז הוא מתחלק ב-5."

טענה זו לא נכונה ונצטרך דוגמה אחת בלבד כדי להפריכה.

נציב $n=1$. $x=n^2=1^2=1$. 1 לא מתחלק ב-5 לכן הטענה לא נכונה, ~~עם הטענה~~ לכן הפסוק הוא $\boxed{\text{שקר.}}$ $(\frac{1}{5} \notin \mathbb{N})$

2) $\exists x \, (S(x) \wedge \neg F(x))$

= "קיים מספר טבעי x שהוא מספר ריבועי ולא מתחלק ב-5."

טענה זו נכונה ונוכל להציג את אותה הצבה n=1 כדי להוכיח:

$n=1$: $x=n^2=1^2=1$. 1 לא מתחלק ב-5 לכן הפסוק הוא $\boxed{\text{אמת.}}$ $(\frac{1}{5} \notin \mathbb{N})$

3) $\forall x \, (F(x) \rightarrow \neg S(x))$

= "עבור כל מספר טבעי x, אם x מתחלק ב-5 אז הוא לא מספר ריבועי."

טענה זו לא נכונה, נציב $n=5$:

$n=5$: $x=n^2=5^2=25$. 25 מתחלק ב-5 וגם מספר ריבועי, מה שסותר את הפסוק, ולכן הפסוק הוא $\boxed{\text{שקר.}}$ $(\frac{25}{5}=5 \in \mathbb{N})$

4) $\exists x \, (F(x) \wedge S(x))$

= "קיים מספר טבעי x שמתחלק ב-5 וגם מספר ריבועי."

טענה זו נכונה, נוכל להשתמש בהצבה הקודמת, $n=5$.

$n=5$: $x=n^2=5^2=25$. 25 גם מתחלק ב-5 וגם מספר ריבועי, לכן אכן קיים מספר שמתחלק ב-5 וגם מספר ריבועי, ומכאן שהפסוק הוא $\boxed{\text{אמת.}}$ $(\frac{25}{5}=5 \in \mathbb{N})$

5) $\neg \exists x \, (S(x) \wedge \neg F(x))$

= "לא קיים מספר טבעי x שהוא מספר ריבועי ולא מתחלק ב-5."

במילים פשוטות יותר: הפסוק בעצם טוען שכל מספר ריבועי מתחלק ב-5, משהו שהוא לא נכון. נציב $n=1$.

$n=1$: $x=n^2=1^2=1$. 1 הוא מספר ריבועי שלא מתחלק ב-5, לכן כן קיים מספר ריבועי שלא מתחלק ב-5, ומכאן שהפסוק הוא $\boxed{\text{שקר.}}$ $(\frac{1}{5} \notin \mathbb{N})$

שאלה 6

שאלה 6

1) $\forall x \in N, \exists y \in N \ (y > x)$

"עבור כל מספר טבעי x, קיים מספר טבעי y שמקיים $x<y$."=

גרסת שלילה:

$\neg(\forall x \in N, \exists y \in N, (y > x))$

נצטרך להפוך את הסימן של הכמתים ושל הביטוי המתמטי.

$$\left.\begin{array}{l} \neg\forall x = \exists x \\ \neg\exists y = \forall y \\ \neg(y>x) = (y \le x) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists x \in N, \forall y \in N \ (y \le x)}$$

"קיים מספר טבעי x כך שעבור כל מספר טבעי y מתקיים $x \ge y$."=
(משפט השלילה שולל את ~~הפסוק המתמטי~~ הטענה המקורית, שכמובן אינו נכון).

$2x = y \Rightarrow x = \frac{y}{2}$

2) $\forall y \in R, \exists x \in R \ (x + x = y)$

"עבור כל מספר ממשי y, קיים מספר ממשי x שמקיים $x = \frac{y}{2}$."=

גרסת שלילה:

$\neg(\forall y \in R, \exists x \in R (x = \frac{y}{2})) \Rightarrow \boxed{\exists y \in R, \forall x \in R \ (x \neq \frac{y}{2})}$

"קיים מספר ממשי y כך שעבור כל מספר ממשי x מתקיים $x \neq \frac{y}{2}$."=

3) $\forall x \in R ((x^2 > 0) \rightarrow (x > 0))$

"עבור כל מספר ממשי x, אם x^2 חיובי אז x חיובי."=

גרסת השלילה:

$\neg(\forall x \in R ((x^2 > 0) \rightarrow (x > 0))$

$\neg\forall x = \exists x$ לפי $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

דה-מורגן

$\neg((x^2 > 0) \rightarrow (x > 0)) \equiv \neg(\neg(x^2>0) \vee (x>0)) \equiv (x^2 > 0) \wedge \neg(x>0) \equiv (x^2>0) \wedge x \le 0$

$\boxed{\exists x \in R ((x^2 > 0) \wedge (x \le 0))}$

"קיים מספר ממשי x, כך ש-x^2 חיובי וx לא חיובי."=

4) $\forall x, y \in R\,((x>y) \rightarrow \exists z \in R\,(x>y+z))$

"עבור כל המספרים הממשיים x ו-y, אם y<x אז קיים מספר ממשי z שמקיים $x>y+z$."

<u>גרסת השלילה:</u>

$\neg \forall x, y \in R = \exists x, y \in R$

$\neg((x>y) \rightarrow \exists z \in R(x>y+z)) \equiv \neg((x>y) \vee \exists z \in R(x>y+z)) \equiv \cancel{(x \le y) \vee \exists z \in R(x \ge y+z)}$

$\equiv \cancel{(x \le y) \vee \exists z \in R(x \ge y+z)}$

לפי: $p \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

$\neg((x \le y) \vee \exists z \in R(x>y+z))$

$\equiv \neg(x \le y) \wedge \neg \exists z \in R(x>y+z) \equiv (x>y) \wedge \forall z \in R(x \le y+z)$

$\cancel{\boxed{\exists x, y \in R((x \le y) \vee \exists z \in R(x>y+z))}}$

~~קיימים מספרים ממשיים x ו-y כך ש $x \le y$ אז קיים מספר ממשי z שמקיים $x>y+z$~~

$\boxed{\exists x, y \in R((x>y) \wedge \forall z \in R(x \le y+z))}$

"קיימים מספרים ממשיים x ו-y כך ש $y<x$ ולכל מספר ממשי z מקיים $x \le y+z$."