// Assignment: 3

// Author: Guy Shitrit, ID: 330707761

שאלה 1

שאלה 1

$U = \{1,2,3,\ldots,15\}$

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$B = \{1,2,4,11\}$

$C = \{1,2,7,9\}$

$D = \{2,7,10,11\}$

1) $(A \cup B) \cap C$

1. $A \cup B = \overbrace{\{1,\ldots 6\}}^{1,2,3,4,5,6} \cup \{1,2,4,11\} = \boxed{\{1,2,3,4,5,6,11\}}$

2. $\underbrace{\{1,2,3,4,5,6,11\}}_{A \cup B} \cap \underbrace{\{1,2,7,9\}}_{C} = \boxed{\{1,2\}}$

2) $A \cup (B \cap C)$

1. $B \cap C = \{1,2,4,11\} \cap \{1,2,7,9\} = \{1,2\}$

2. $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5,6\} \cup \{1,2\} = \boxed{\{1,2,3,4,5,6\}}$

3) $\bar{C} \cup \bar{D}$

1. $\bar{C} = \underbrace{U \setminus C}_{\text{השלמה}} = \{1,\ldots 15\} \setminus \{1,2,7,9\} = \{3,4,5,6,8,10,11,12,13,14,15\}$

2. $\bar{D} = \underbrace{U \setminus D}_{\text{השלמה}} = \{1,\ldots 15\} \setminus \{2,7,10,11\} = \{1,3,4,5,6,8,9,12,13,14,15\}$

3. $\bar{C} \cup \bar{D} = \boxed{\{1,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15\}}$

4) $(A \cup B) \setminus C$

1. $A \cup B = \underbrace{\{1,2,3,4,5,6,11\}}_{\text{תשובה קודם}}$

2. $(A \cup B) \setminus C = \{1,2,3,4,5,6,11\} \setminus \{1,2,7,9\} = \boxed{\{3,4,5,6,11\}}$

5) $A \cup (B \setminus C)$

1. $B \setminus C = \{1,2,4,11\} \setminus \{1,2,7,9\} = \{4,11\}$
2. $A \cup (B \setminus C) = \{1,\ldots 6\} \cup \{4,11\} = \boxed{\{1,2,3,4,5,6,11\}}$

6) $(B \setminus C) \Delta D$

הכל פחות
המשותף
XOR
$\oplus$

1. $B \setminus C = \{4, 11\}$
חישבנו
מקודם

2. $(B \setminus C) \Delta D = \{4, 11\} \Delta \{2, 7, 10, 11\} = \cancel{2, 7,} \boxed{\{2, 4, 7, 10\}}$

7) $B \setminus (C \setminus D)$

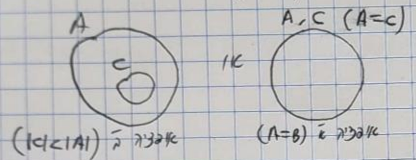
1. $C \setminus D = \{1, 2, 7, 9\} \setminus \{2, 7, 10, 11\} = \{1, 9\}$
2. $B \setminus (C \setminus D) = \{1, 2, 4, 11\} \setminus \{1, 9\} = \boxed{\{2, 4, 11\}}$

8) $(B \cup A) \Delta (C \cap D)$

1. $C \cap D = \{1, 2, 7, 9\} \cap \{2, 7, 10, 11\} = \{2, 7\}$
2. $B \cup A = \{1, 2, 4, 11\} \cup \{1, \ldots, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11\}$
3. $(B \cup A) \Delta (C \cap D) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11\} \Delta \{2, 7\} = \boxed{\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}}$

שאלה 2

1) $C \subseteq A \rightarrow (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ צ"ל:



נניח ש $C \subseteq A$. אם כך:

נשים לב ש- $A \cap C = C$, וש- $A \cup C = A$.

$\cancel{A \cap B}$ $(A \cap B) \cup C = \cancel{(A \cup C) \cap (A \cup B)}$ $\underbrace{(C \cup A)}^{A} \cap (C \cup B) = A \cap (C \cup B)$

חוק הפילוג

$= A \cap (B \cup C)$

$\cancel{A \cap (B \cup C)}$ $\underbrace{(A \cap B) \cup C}_{\text{אגף שמאל}} = \underbrace{A \cap (B \cup C)}_{\text{אגף ימין}}$ כלומר הראינו ש:

ולכן הטענה נכונה.

2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = A \cap (\overline{B \cap C})$

זהות קבוצה משלימה   פילוג   דה מורגן

$= \boxed{A \setminus (B \cap C)}$

זהות קבוצה משלימה

3) $A \triangle (A \triangle B) = B$

טענה זו נכונה ונוכיח זאת.

הסימן "הפרש סימטרי" ($\triangle$) שקול לקשר הלוגי והפעולה הלוגית XOR ($\oplus$).

אם עבור כל מספר X מתקיים: $\forall x (x \in A \triangle (A \triangle B))$

צריך להראות שמתקיים: $\forall x (x \in A \triangle (A \triangle B)) \leftrightarrow \forall x (x \in B)$

נצטרך להוכיח שהפרש סימטרי שקול לקשר XOR ($\oplus$) תחילה.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$x \in A \triangle B \longleftrightarrow x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \setminus B \longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \\ x \in B \setminus A \longleftrightarrow (x \in B \wedge x \notin A) \end{array}\right\} (x \in A \wedge x \notin B) \cup (x \in B \wedge x \notin A)$$

$$\rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

נסמן:

P - $x \in A$ $\leftarrow$ $\neg P$ - $x \notin A$

Q - $x \in B$ $\leftarrow$ $\neg Q$ - $x \notin B$

$$(P \wedge \neg Q) \vee \underbrace{(Q \wedge \neg P)}_{\neg P \wedge Q} \equiv P \oplus Q \Rightarrow x \in A \oplus x \in B$$

ע"פ הגדרת XOR

כלומר הראינו ש: $\forall x \, (x \in A \triangle B \longleftrightarrow (x \in A \oplus x \in B))$

עכשיו נוכל להשתמש בזה:

$$x \in A \triangle (A \triangle B) \longleftrightarrow (x \in A) \oplus (x \in A \triangle B) \longleftrightarrow (x \in A) \oplus ((x \in A) \oplus (x \in B))$$

$(x \in A \triangle B \rightarrow (x \in A) \oplus (x \in B))$

(x שייך רק לאחד מהקבוצות)

נסמן $\left\{\begin{array}{l} P = x \in A \\ Q = x \in B \end{array}\right. \Leftarrow$ נראה $P \oplus (P \oplus Q) \equiv Q$

P	Q	$P \oplus Q$	$P \oplus (P \oplus Q)$
T	T	F	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	F

$\Rightarrow P \oplus (P \oplus Q) \equiv Q$

ע"פ טבלת אמת

$$(x \in A) \oplus ((x \in A) \oplus (x \in B)) \equiv x \in B \Rightarrow \forall x (x \in A \triangle (A \triangle B) \longleftrightarrow x \in B)$$

$$\Rightarrow \boxed{A \triangle (A \triangle B) = B}$$

4) $A \setminus (A \setminus B) = A \cup B$

זהות: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ (חיסור קבוצות זה אותו דבר כמו חיתוך עם הקבוצה המשלימה של הקבוצה האחרת)

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{(A \setminus B)} = A \cap \overline{(A \cap \bar{B})} = \cancel{(A \cap (\bar{A} \cup B))}\ A \setminus (A \cap \bar{B})$$

ב.א: זה לא שקול ל-$A \cup B$ כיוון ש $|A \setminus (A \cap \bar{B})| \leq |A \cup B|$ (אנחנו מורידים מקבוצה A במקום להוסיף ולאחד). לכן הטענה שגויה, משום ששני הצדדים לא בהכרח תמיד שווים בגודלם.

שאלה 3

שאלה 3

1) $\emptyset \subset \emptyset$

כאשר $A \subset B$, $|A|<|B|$ וכל מה שב-A חייב להיות ב-B.

אז $0=|\emptyset|=|\emptyset|$ ולכן טענה זו שגויה.

2) $\emptyset \subseteq \emptyset$

כאשר $A \subseteq B$, $|A| \le |B|$ וכל מה שב-A חייב להיות ב-B.

$0=|\emptyset|=|\emptyset|$ ולכן טענה זו נכונה.

3) $\emptyset \in \emptyset$

כאשר $x \in U$, x נמצא כאיבר בתוך הקבוצה U. $\emptyset$ נמצא ב-$\emptyset$
ולכן טענה זו נכונה. (למעשה $\emptyset$ שייך לכל קבוצה כי זה פשוט קבוצה ריקה).

4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

כאמור, $\emptyset$ שייך לכל קבוצה כי זאת קבוצה ריקה ולכן טענה זו כבר נכונה.

5) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

עם אותו הסבר ממקודם, טענה זו גם נכונה.

6) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

$\{\emptyset\}$ זו בעצם קבוצה שמכילה קבוצה ריקה, אך הקבוצה החיצונית לא קיימת כאיבר
בקבוצה $\{\emptyset\}$ ולכן טענה זו שגויה.

7) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

טענה זו נכונה כי $\{\emptyset\}$ קיים כאיבר בתוך הקבוצה $\{\{\emptyset\}\}$.

8) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$|A| \neq |B|$ וגם כל האיברים בקבוצה השמאלית (האיבר $\{\emptyset\}$) נמצאים
בקבוצה הימנית ולכן טענה זו נכונה.

9) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

פה יש מלכודת. קבוצות אינן יכולות להכיל כפילויות, כלומר הקבוצה $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$
היא פשוט $\{\{\emptyset\}\}$. ולכן פה $|A|=|B|$ מה שסותר את הדרישה של "הכלה ממש",
ומכאן שהטענה שגויה.

שאלה 4

שאלה 4

תזכורת: $P(A)$ מוגדרת להיות אוסף כל תתי הקבוצות של A כולל הקבוצה עצמה וקבוצה ריקה $(\emptyset)$. $|P(A)| = 2^{|A|}$.

~~נעבוד עם הארגומנט הכי שאלה בקבוצה A~~

1) $P(\{\emptyset\})$

$\cancel{|A|}\ |\{\emptyset\}| = 1$

$|P(\{\emptyset\})| = 2^1 = 2$

2 תתי קבוצות אפשריים: $\emptyset$ ~~$\emptyset$~~ ו- $\{\emptyset\}$

$$\boxed{P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}}$$

2) $P(P(\{a,b\}))$

נעבוד עם הארגומנט קודם.

1. $P(\{a,b\})$

$|\{a,b\}| = 2$, $|P(\{a,b\})| = 2^2 = 4$

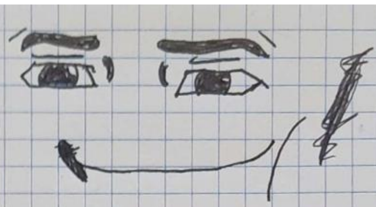
4 תתי קבוצות אפשריים: $P(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

נסמן קבוצה זו ב-A. $|A| = 4$.

2. $|P(A)| = 2^{|A|} = \underset{\text{תתי קבוצות}}{2^4 = 16}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}$$
$$\{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a,b\}\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a,b\}\},$$
$$\{\{b\}, \{a,b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}\},$$
$$\{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}\}$$

3) $P(P(P(\emptyset)))$



בואו נעבוד עם הארגומנט הפנימי ביותר

1. $P(\emptyset) \Rightarrow \quad |\emptyset| = 0 \,,\ |P(\emptyset)| = 2^0 = 1$

תת קבוצה אחת כלומר: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

2. $P(P(\emptyset)) = P(\{\emptyset\}) \Rightarrow \quad |\{\emptyset\}| = 1 \,,\ |P(\{\emptyset\})| = 2^1 = 2$

2 תתי קבוצות: $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

3. $P(P(P(\emptyset))) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \Rightarrow \quad |P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})| = 2^2 = 4$

4 תתי קבוצות:

$$\boxed{P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}$$

שאלה 5

שאלה 5

1) $P(A\cap B) \cup P(A\cap C) = P(A\cap(B\cup C))$

נצטרך להציב על מנת להוכיח/להפריך.

$A=\{1,2\},\ B=\{1\},\ C=\{2\}$

$A\cap B = \{1\}\ ,\ P(A\cap B)=\{\emptyset,\{1\}\}$

$A\cap C = \{2\}\ ,\ P(A\cap C)=\{\emptyset,\{2\}\}$

$A\cap(B\cup C) \Rightarrow \cancel{\{\emptyset,\{1\}\}}\quad B\cup C=\{1,2\}\ ;\ A\cap(B\cup C)=\{1,2\} \Rightarrow P(A\cap(B\cup C))=\cancel{\{\emptyset,1,2,\{1,2\}\}}$

$\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$P(A\cap B)\cup P(A\cap C)=\{\emptyset,\{1\}\}\cup\{\emptyset,\{2\}\}=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$

שני האגפים לא שווים לכן הטענה שגויה.

2) $\left(P(A)=P(B)\right) \rightarrow A=B$

הגדרת קבוצת חזקה:

$P(A) \overset{def}{=} \{x\in U \mid x\in A\}\ \forall x$

$P(B) \overset{def}{=} \forall x\{x\in U \mid x\in B\}$

אם נניח כי $P(A)=P(B)$: $\forall x\{x\in U \mid x\in A\} = \forall x\{x\in U \mid x\in B\}$

~~נסתכל רק על החלקים השונים שתלויים זוגית:~~

$\cancel{x\in A \quad x\in B}$

~~אם עבור כל מספר x מתקיים כי x∈A ו-x∈B, אז קיבלנו כי:~~

$\cancel{x\in A \leftrightarrow x\in B}$

לפי קבוצת חזקה, $A\in P(A)$ ו- $B\in P(B)$. משום ש$P(A)=P(B)$, זה גם אומר ש-$A\in P(B)$. ולכן $A\subseteq B$ (בקבוצת חזקה יש תמיד בתוכה גם את הקבוצה עצמה)
אותו דבר רק הפוך: $P(A)=P(B)$ לכן $B\in P(B)$ וגם $B\in P(A)$, לכן $B\subseteq A$.
מצאנו כי $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq A$ ולכן $A=B$ (הכלה דו-כיוונית).

3) $P(A \triangle B) = P(A) \triangle P(B)$ ניקח דוגמאות קלות להדגים בהם.

$A = \{1\}, \quad B = \{2\}$

$A \triangle B = \{1,2\} \Rightarrow P(A \triangle B) = \underline{\underline{\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}}}$ שמאלי

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}, \quad P(B) = \{\emptyset, \{2\}\} \Rightarrow P(A) \triangle P(B) = \underline{\underline{\{\{1\},\{2\}\}}}$ ימני

אנו כבר רואים כי האגף השמאלי אינו לשווה לימני ולכן הפרכנו את הטענה (שגויה).

4) $P(A \setminus (B \cup C)) = P(A \setminus B) \cap P(A \setminus C)$ ניקח גם פה דוגמאות קלות להדגים בהם.

$A = \{1\}, \quad B = \{2\} \quad C = \{3\}$

$A \setminus (B \cup C) = \{1\} \setminus (\{2,3\}) = \{1\} \Rightarrow P(\text{השמאלי}) = P(\{1\}) = \underline{\underline{\{\emptyset, \{1\}\}}}$ שמאלי

$A \setminus B = \{1\} \setminus \{2\} = \{1\} \Rightarrow P(A \setminus B) = P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$A \setminus C = \{1\} \setminus \{3\} \Rightarrow \cancel{P(A \setminus C)} = \{1\} \Rightarrow P(A \setminus C) = P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$P(A \setminus B) \cap P(A \setminus C) = \{\emptyset, \{1\}\} \cap \{\emptyset, \{1\}\} = \underline{\underline{\{\emptyset, \{1\}\}}}$ ימני

שני האגפים נכונים לכן הטענה נכונה.
אך נצטרך להוכיח פורמלית כי זה לא מספיק.

נצטרך להראות כי $P(A \setminus B) \cap P(A \setminus C) = P((A \setminus B) \cap (A \setminus C))$.
נסמן $X = A \setminus B$ ו $Y = A \setminus C$.

~~כש~~ עבור $P(X) \cap P(Y)$: עבור קבוצה כלשהי S, היא נמצאת גם ב $P(X)$ וגם ב $P(Y)$ אם ורק אם מתקיים $(S \subseteq Y) \wedge (S \subseteq X)$ משום שקבוצות חזקה של קבוצות כלשהן תמיד כוללות גם את הקבוצות עצמן. מכאן מתקיים $S \subseteq X \cap Y$, לכן $S \in X \cap Y$, לפי הגדרת תכונה של קבוצת חזקה זה גם אומר ש $S \in P(X \cap Y)$. לכן:

$$P(X) \cap P(Y) = P(X \cap Y) \Rightarrow P(A \setminus B) \cap P(A \setminus C) = P((A \setminus B) \cap (A \setminus C))$$

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \underbrace{(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C})}_{\text{חיסור קבוצות זה אותו דבר כמו חיתוך הקבוצה עם הקבוצה המשלימה של הקבוצה לפי השארית}} = \underbrace{A \cap (\bar{B} \cap \bar{C})}_{\text{קיבוץ}} = \underbrace{A \cap (\overline{B \cup C})}_{\text{דה מורגן}}$$

$$\Rightarrow A \setminus (B \cup C) \overset{\text{הרצוי}}{\Rightarrow} (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \setminus (B \cup C)) = P((A \setminus B) \cap (A \setminus C)) \Rightarrow P(A \setminus (B \cup C)) = P(A \setminus B) \cap P(A \setminus C)}$$

$$(A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B))$$