// Assignment: 2

// Author: Guy Shitrit, ID: 330707761

# שאלה 1

שאלה 1

(a.)

טענה: "לכל מספר טבעי n, אם n זוגי אז $n^3+4n$ זוגי."

$\forall n\in\mathbb{N}\ (\underset{\text{זוגי}}{n} \rightarrow \underset{\text{זוגי}}{n^3+4n})$

הוכחה:

בהינתן ש-n הוא מספר טבעי זוגי, אז קיים מספר טבעי a כך ש: $n=2a$

נציב $n=2a$ בביטוי $n^3+4n$:

$$(2a)^3+4\cdot 2a = 8a^3+8a = 2\cdot 4(a^3+a)$$

נסמן $b=4(a^3+a)$, $(b\in\mathbb{Z})$, מכאן ש: $n^3+4n=2b$. $(b\in\mathbb{Z})$

ולכן הביטוי $n^3+4n$ הוא זוגי.

(b.)

טענה: "לכל מספר שלם k, מתקיים שהמספר $k^4-k^2$ זוגי."

$\forall k\in\mathbb{Z}\ (\underset{\text{זוגי}}{k^4-k^2})$

הוכחה:

נפשט את הביטוי $k^4-k^2$:

$$k^4-k^2 = k^2\underbrace{(k^2-1)}_{(k-1)(k+1)} = k^2(k-1)(k+1)$$

נשים לב לביטוי $(k-1)(k+1)$. זוהי המכפלה של ~~המספרים העוקבים לא~~ שני המספרים העוקבים של k. נתמקד בנפרד על המכפלה $k^2(k+1)$:

עבור k זוגי: $k^2$ זוגי, $k+1$ אי-זוגי

עבור k אי-זוגי: $k^2$ אי-זוגי, $k+1$ זוגי

$\Leftarrow$ זוגי = זוגי · אי-זוגי

זוגי = אי-זוגי · זוגי

כלומר $k^2(k+1)$ חייב להיות מספר זוגי עבור $k\in\mathbb{Z}$. נסמן $k^2(k+1)=2a$ | $(k-1)=b$:

$$k^4-k^2 = k^2(k+1)(k-1) = 2a\cdot b = 2ab$$

נסמן $ab=n$, מכאן ש: $k^4-k^2=2n$.

לכן $k^4-k^2$ מספר זוגי.

ג.

"הוכח שלכל מספרים שלמים $a,b$: אם $a$ אי-זוגי ו-$b$ זוגי, אז $a+2b$ אי-זוגי."

צ"ל כי:

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}\left(\left(\underset{\text{אי-זוגי}}{a}\wedge\underset{\text{זוגי}}{b}\right)\rightarrow\underset{\text{אי-זוגי}}{a+2b}\right)$$

<u>הוכחה:</u>

בהינתן שb הוא מספר שלם זוגי, ו-a הוא מספר שלם אי-זוגי, נוכל לסמן:

$$b=2k$$
$$a=2m+1$$

נבטא את הביטוי $a+2b$:

$$\cancel{a+2b=a+2\cdot 2k=a+4k}$$

$$a+2b=2m+1+2\cdot 2k=2m+1+4k=2(m+2k)+1$$

נוכל לסמן $n=m+2k$, מכאן ש: $a+2b=2n+1\quad(n\in\mathbb{Z})$ (בעל "צורת מספר אי-זוגי")

<u>ולכן הביטוי $a+2b$ הוא אי-זוגי.</u>

## **שאלה 2**

שאלה 2

(א.)

טענה: "יהיו y,x מספרים שלמים: אם x+y אי-זוגי אזי x או y זוגיים."

טענה זו מדברת בכללי על שני מספרים כלשהם, כלומר לכל המספרים השלמים y,x.

$$\forall x,y\in Z(P\to A\vee B)\equiv\forall x,y\in Z(P\to Q)$$

P - x+y אי-זוגי

A - x זוגי

B - y זוגי

נסמן $Q\equiv A\vee B$

נצטרך להוכיח בשלילה כי $P\to Q$ ע"י הוכחת $\neg Q\to\neg P$.

<u>הוכחה:</u>

צ"ל כי $\neg Q\to\neg P$. נניח תחילה כי $\neg Q$, כלומר:

$$\neg Q\equiv\neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B$$

כלומר נניח: "x אי-זוגי וy אי-זוגי"

ונצטרך להוכיח כי $\neg P$, כלומר: x+y זוגי $\equiv\neg P$

נניח כי y,x מספרים שלמים אי-זוגיים כך ש:

$$x=2a+1\quad(a\in Z)$$
$$y=2b+1\quad(b\in Z)$$

$$x+y=2a+1+2b+1=2a+2b+1+1=2(a+b)+2$$

נסמן $n=a+b$, מכאן ש: $x+y=2n+2\ (n\in Z)$. כלומר x+y זוגי.

<u>הוכחנו כי $\neg Q\to\neg P$, כלומר הוכחנו את הפסוק השקול $P\to Q$.</u>

(b.) טענה: "יהי $n$ מספר שלם, אם $n^2-6n+4$ אי-זוגי אזי $n$ אי-זוגי."

$P$ - $n^2-6n+4$ אי-זוגי

$Q$ - $n$ אי-זוגי

צ"ל: $\forall n\in \mathbb{Z}\ (P\to Q)$

נוכיח בשלילה ע"י הוכחת $\neg Q \to \neg P$.

$\neg Q \equiv$ $n$ זוגי

$\neg P \equiv$ $n^2-6n+4$ זוגי

הוכחה:

נניח $\neg Q$, כלומר נניח ש-$n$ מספר שלם זוגי, כך ש:

$$n=2k \quad (k\in \mathbb{Z})$$

נצטרך להראות ש-$(n^2-6n+4)$ זוגי, נסמן בביטוי:

$$n^2-6n+4 = (2k)^2-6\cdot 2k+4 = 4k^2-12k+4$$

$$= 4k(k-3)+4 = 2\cdot 2k(k-3)+4$$

נסמן $m=2k(k-3)$, מכאן ש:

$$n^2-6n+4 = 2m+4 \quad (m\in \mathbb{Z}) \Rightarrow$$ $n^2-6n+4$ זוגי $\Rightarrow$ הוכחנו $\neg P$

לכן הוכחנו כי $\neg Q\to \neg P$, כלומר גם הוכחנו את הפסוק השקול $P\to Q$.

(C.)

טענה: "לכל שלם n, אם n אינו מתחלק ב-3 או אינו מתחלק ב-2, אז n אינו מתחלק ב-6."

A - n אינו מתחלק ב-3
B - n אינו מתחלק ב-2
Q - n אינו מתחלק ב-6

נסמן $P \equiv A \vee B$

$$\forall n \in \mathbb{Z}\left((A \vee B) \to Q\right) \equiv \forall n \in \mathbb{Z}\left(P \to Q\right)$$

נצטרך להוכיח ש $P \to Q$ ע"י הוכחת $\neg Q \to \neg P$ . $\neg Q \to \neg P$

$\neg Q \equiv$ n מתחלק ב-6

n מתחלק ב-3 ו-n מתחלק ב-2 $\equiv \neg A \wedge \neg B \equiv \neg(A \vee B) \equiv \neg P$

<u>הוכחה:</u>

נניח $\neg Q$, כלומר ש-n מתחלק ב-6, כך ש:

$$n = 6k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

כידוע, המספר 6 יכול להיכתב גם כ: $(2 \cdot 3)$.

$$n = (2 \cdot 3)k$$

~~כלומר~~ זאת אומרת ש:

$$\frac{n}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot k}{\cancel{2}} = 3k \quad \begin{pmatrix} 2k \in \mathbb{Z} \\ 3k \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$$\frac{n}{3} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot k}{\cancel{3}} = 2k$$

כלומר n מתחלק ב-2 וגם ב-3. הוכחנו כי $\neg P$, ע"י הנחת $\neg Q$.

<u>הוכחנו $\neg Q \to \neg P$ ולכן הוכחנו גם את הפסוק השקול $P \to Q$.</u>

# שאלה 3

שאלה 3:

תזכורת להוכחה בשלילה: הוכחת $P \to Q$ ע"י הוכחת הפסוק השקול $(P \wedge \neg Q) \to \neg P$

א.

טענה: "לא קיים מספר רציונלי הקטן ביותר"

נסמן את הפסוקים הבאים:

$P$ - קיים מספר רציונלי הקטן ביותר.

$Q$ - עבור ט מספר רציונלי $p$, קיים מספר רציונלי קטן יותר. $(\forall p\in R(\text{קיים}_{r<p}(r\in R)))$

נצטרך להוכיח כי $P \to Q$ ע"י הוכחת $(P \wedge \neg Q) \to \neg P$.

הוכחה:

נניח כי $P$ ו- $\neg Q$, כלומר:

$\neg Q \equiv$ עבור ט מספר רציונלי $p$, לא קיים מספר רציונלי קטן יותר

$P \equiv$ קיים מספר רציונלי הקטן ביותר

ננסח את $P$ בצורה יותר כללית: "קיים מספר רציונלי הקטן ביותר, כך שעבור כל מספר רציונלי $r$, קיים מספר רציונלי $t$ שמקיים $t < r$."

כלומר ש-$t$ הוא המספר הרציונלי הקטן ביותר.

אבל אם $t$ הוא המספר הרציונלי הקטן ביותר, זה לא מונע מאיתנו לכתוב את הביטוי $t-1$. נסמן $s=t-1$. מצאנו כי $s<t$, דבר הסותר את הטענה כי קיים מספר $t$ רציונלי שהינו הקטן ביותר.

כלומר תמיד נמצא מספר רציונלי קטן יותר, מה שסותר את הנחת הבסיס $\neg Q$ שקובעת כי זה אינו נכון. מכאן הוכחנו כי לא קיים מספר רציונלי הקטן ביותר, כלומר $\neg P$.

הוכחנו כי $(P \wedge \neg Q) \to \neg P$ ולכן הוכחנו ~~את הפסוק השקול~~ $P \to Q$ כי:

"לא קיים מספר רציונלי הקטן ביותר" =

(6.)

טענה: "יהי $n$ מספר שלם, אם $n^2+7$ אי-זוגי אזי $n$ זוגי."

$P$ - $n^2+7$ אי-זוגי

$Q$ - $n$ זוגי

$$\forall n \in \mathbb{Z} \, (P \rightarrow Q)$$

נצטרך להוכיח כי $P \rightarrow Q$ ע"י הוכחת $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$.

<u>הוכחה:</u>

נניח כי $P$ ו-$\neg Q$, כלומר:

$P \equiv$ $n^2+7$ אי-זוגי

$\neg Q \equiv$ $n$ אי-זוגי

נצטרך להראות כי $\neg P$:

$\neg P \equiv$ $n^2+7$ זוגי

~~מההנחה $\neg Q$~~

מההנחה ש-$n$ מספר שלם אי-זוגי ~~ומההנחה ש $n^2+7$ אי-זוגי~~, נוכל לסמן:

$$n = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

נבדוק בביטוי $n^2+7$:

$$n^2+7 = (2k+1)^2+7 = \cancel{4k^2} + (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2 + 7 = 4k^2 + 4k + 1 + 7$$

(זהות מתמטית: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$)

$$= 4k(k+1) + 1 + 7 = 2 \cdot 2k(k+1) + 8$$

נסמן $m = 2k(k+1)$, מכאן ש:

$$n^2+7 = 2m+8 \Rightarrow n^2+7 \text{ זוגי} \Rightarrow \neg P$$

הראינו כי $\neg P$ ע"י הנחת $P$ ו-$\neg Q$. כלומר הוכחנו כי $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$, ולכן הוכחנו את הפסוק השקול, כלומר: $P \rightarrow Q$,

**"אם $n^2+7$ אי-זוגי, אזי $n$ זוגי."**

טענה: "יהיו $x,y$ שני מספרים ממשיים. הוכח כי אם $x<y$ וגם $x^2>y^2$ אז $x<0$." (C.)

נסמן:
- A - $x<y$
- B - $x^2>y^2$
- Q - $x<0$

$P \equiv A \wedge B$

$$\forall x,y \in R \ (P \to Q)$$

נצטרך להוכיח $P \to Q$ ע"י $\neg P \to (P \wedge \neg Q)$

<u>הוכחה:</u>

נניח כי $P$ ו-$\neg Q$, כלומר:

$$P \equiv A \wedge B \equiv (x<y) \wedge (x^2>y^2)$$

$$\neg Q \equiv \neg(x<0) \equiv x \geq 0$$

נצטרך להראות כי $\neg P$:

$$\neg P \equiv \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \equiv \neg(x<y) \vee \neg(x^2>y^2) \equiv (x \geq y) \vee (x^2 \leq y^2)$$

(כלומר אחד מהפסוקים הבאים: $x \geq y$ או $x^2 \leq y^2$)

<u>הנתונים העכשוויים שלנו:</u>

$$\left.\begin{matrix} x \geq 0 \\ x<y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \leq x < y$$

$$x^2>y^2$$

נוצרה לנו בעיה. אנו יודעים כי $0 \leq x < y$, אך $x^2>y^2$. זה לא ייתכן כיוון ש-$y^2$ תמיד גדול מ-$x^2$ (אם $x<y$) אם שניהם מספרים <u>חיוביים</u>, שזה נכון בהתאם לכוונה.

לכן $x^2$ <u>חייב להיות</u> קטן או שווה ל-$y^2$ ~~על מנת ש~~ בהתאם לטווח $0 \leq x < y$.

הוכחנו כי $x^2 \leq y^2$ שזהו פסוק מספק להוכחה של $\neg P$ (כיוון שאנו צריכים להוכיח רק אם אחד מהפסוקים שם נכון). לסיכום, הראינו כי $\neg P$ ע"י הנחת $P$ ו-$\neg Q$,

כלומר הוכחנו $(P \wedge \neg Q) \to \neg P$ ולכן הוכחנו את הפסוק השקול המקורי $P \to Q$.

לכן:

$\boxed{\text{אם } x<y \text{ וגם } x^2>y^2 \text{ אז } x<0.}$

# שאלה 4

שאלה 4

(א.)

טענה: "לא קיים מספר תלת ספרתי שמתחלק בו זמנית ב 7,11,13."

$\neg\exists n\in\mathbb{Z}\,(n \text{ מתחלק ב } 7,11,13 \wedge n \text{ תלת ספרתי}) \equiv \forall n\in\mathbb{Z}\,(\neg(n \text{ תלת ספרתי} \wedge n \text{ מתחלק ב } 7,11,13))$

דה מורגן

$\equiv \forall n\in\mathbb{Z}\,(\neg n \text{ מתחלק ב } 7,11,13 \vee \neg n \text{ תלת ספרתי}) \equiv \forall n\in\mathbb{Z}\,(\neg n \text{ תלת ספרתי} \vee n \text{ לא מתחלק ב } 7,11,13)$

$P\to Q \equiv \neg P \vee Q$: $\forall n\in\mathbb{Z}\,(n \text{ תלת ספרתי} \to n \text{ לא מתחלק ב } 7,11,13)$

הטענה השקולה המפורשת לה: "עבור כל מספר שלם n, אם הוא תלת ספרתי, אז הוא לא מתחלק ב 7,11,13."

P - המספר תלת ספרתי
Q - המספר לא מתחלק ב- 7,11,13

כיוון שנוח לעבוד עם מספרים שכן מתחלקים ב- 7,11,13, נשתמש בהוכחה לא ישירה. כלומר נוכיח $P\to Q$ ע"י הוכחת $\neg Q\to\neg P$.

הוכחה:

נניח $\neg Q$: נניח שהמספר מתחלק ב 7,11,13 $\equiv \neg Q$

ונראה $\neg P$: נראה שהמספר לא תלת ספרתי $\equiv \neg P$

כיוון שהמספר n מתחלק ב 7,11,13, נוכל לכתוב אותו כך:

$$n = 7\cdot 11\cdot 13\cdot k \quad (k\in\mathbb{Z}) \Rightarrow n = 1001k \quad (k\in\mathbb{Z})$$

כיוון שהמספר k שבעזרתו ביטאנו את n הוא מספר שלם, ניתן לראות כי n אינו יכול להיות מספר תלת ספרתי:

$k=0$: $n = 1001\cdot 0 = 0$
$k=1$: $n = 1001\cdot 1 = 1001$

זאת אומרת שהמספר יכול להיות לכל הפחות או מספר חד-ספרתי (0) או מספר גדול 4-ספרתי (1001), ולכן המספר לא יכול להיות תלת-ספרתי.

הראינו ש $\neg Q\to\neg P$ ולכן הוכחנו את הפסוק המקורי $P\to Q$ בהוכחה לא ישירה. הטענה נכונה.

(b.)

טענה: "קיים מספר טבעי הגדול ביותר"

נגדיר P פסוק המקיים את ה-טענה המקורית, ונמצא פסוק Q התואם בפסוק P כך שיעזור לנו להוכיח או להפריך את הטענה המקורית.

כידוע, הכוונה של מספר טבעי הגדול ביותר, אומרת שאין מספר שגדול יותר ממספר זה.

כלומר קיים מספר טבעי n שעבורו כל מספר טבעי m מקיים $m \le n$:

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ (m \le n)$$

לפי הגדרה זו, נסמן את הפסוקים שלנו:

P - קיים מספר טבעי הגדול ביותר

Q - (נגדיר ההפך מ-P) - עבור כל מספר טבעי n, קיים מספר טבעי m שמקיים $m > n$

¬Q - קיים מספר טבעי m שעבורו כל מספר טבעי n מקיים $n < m$

$$\neg Q \equiv \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}\ (m \le n)$$

$$Q \equiv \neg(\neg Q) \equiv \neg(\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}\ (m \le n)) \equiv \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ (m > n)$$

נוכיח/נפריך ע"י הפסוק השקול של $Q \to P$, שהוא $\neg P \to (\neg Q \wedge P)$.

<u>הוכחה:</u>

נניח P ו-¬Q, כלומר שקיים מספר טבעי הגדול ביותר, ושקיים מספר טבעי m שעבורו כל מספר טבעי n מקיים $n < m$ (שני הפסוקים אומרים אותו דבר אך בגישה שונה).

לפי ¬Q, כל מספר טבעי n קטן מהמספר הטבעי m, כלומר ש-m מייצג כמספר הטבעי הגדול ביותר.

נשקול את הטבעי $m+1$. אנו רואים כי בוודאות $m < m+1$, מה שסותר את היותו של m כמספר הטבעי הגדול ביותר. כלומר תמיד נוכל למצוא מספר גדול יותר, ומכאן שלא קיים מספר טבעי הגדול ביותר. הוכחנו כי $\neg P \to (\neg Q \wedge P)$ ולכן הוכחנו כי ¬P, כלומר:

= "לא קיים מספר טבעי הגדול ביותר."
הטענה המקורית שגויה והפרכנו אותה.

(c,)

טענה: "אין מספר אי-זוגי שמתחלק ב-2."

הטענה קובעת כי אין מספר אי-זוגי שמתחלק ב-2. בואו נגדיר מהו מספר אי-זוגי:

<u>הגדרה:</u> מספר אי-זוגי הוא מספר <u>לא</u> זוגי שלם, שאינו מתחלק ב-2 וניתן לסמנו כך:

$n = 2m+1$. $(n, m \in \mathbb{Z})$

עם ההגדרה ניתן לראות כי הטענה המקורית נכונה אך נצטרך להוכיחה.

נוכל לשנות את הטענה למילים אחרות כדי שיהיה יקל עלינו בסימון הטענה:

"לא קיים מספר שלם n שהוא גם אי-זוגי וגם מתחלק ב-2."

$$\neg\left(\exists n\in\mathbb{Z}\left(\overset{n}{\text{אי-זוגי}} \wedge \overset{n}{\text{מתחלק ב-2}}\right)\right) \equiv \forall n\in\mathbb{Z}\left(\neg\overset{n}{\text{אי-זוגי}} \vee \neg\overset{n}{\text{מתחלק ב-2}}\right)$$

דה מורגן

$$\equiv \forall n\in\mathbb{Z}\left(\overset{n}{\text{זוגי}} \vee \overset{n}{\text{לא מתחלק ב-2}}\right)$$

~~= כל המספרים הם עבור כל מספר שלם n, הוא שהוא מספר זוגי או שהוא לא מתחלק ב-2.~~

נצטרך להגיע לצורה של $P \to Q$ דרך השיקול הלוגי $\neg P \vee Q$:

$$\forall n\in\mathbb{Z}\left(\neg\overset{n}{\text{אי-זוגי}} \vee \overset{n}{\text{לא מתחלק ב-2}}\right) \equiv \forall n\in\mathbb{Z}\left(\overset{n}{\text{אי-זוגי}} \to \overset{n}{\text{לא מתחלק ב-2}}\right)$$

= "עבור כל מספר שלם n, אם הוא אי-זוגי אזי הוא לא מתחלק ב-2."

P - המספר אי-זוגי

Q - המספר לא מתחלק ב-2

ההוכחה הקלה יותר שנוכל להשתמש בה עבור טענה שקולה זו היא הוכחה לא ישירה, כלומר $\neg Q \to \neg P$.

<u>הוכחה:</u>

נניח $\neg Q$ ~~ונוכיח~~ ונראה ש-$\neg P$:

$\neg P \equiv$ המספר זוגי , $\neg Q \equiv$ המספר מתחלק ב-2

כיוון שהמספר מתחלק ב-2, נוכל לבטא אותו כך $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$. לפי הגדרת מספר זוגי, מספר זוגי הוא מספר שמתחלק ב-2 ~~שניתן~~ שאכן ניתן לבטא אותו כך: $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$. ולכן הוכחנו שאם מספר מתחלק ב-2 אזי הוא זוגי.

הוכחנו $\neg Q \to \neg P$ ולכן הוכחנו את הפסוק השקול $P \to Q$, מה שאומר שהטענה: "אין מספר אי-זוגי שמתחלק ב-2."

היא נכונה.

ב.

טענה: = "לכל שלם n: לא ייתכן שהמספרים n ו-(n+3) שניהם מתחלקים ב-4."

$$\forall n\in\mathbb{Z}\left(\neg\left(\begin{smallmatrix}n\\ \text{מתחלק}\\ \text{ב-4}\end{smallmatrix} \land \begin{smallmatrix}n+3\\ \text{מתחלק}\\ \text{ב-4}\end{smallmatrix}\right)\right) \equiv \forall n\in\mathbb{Z}\left(\neg\begin{smallmatrix}n\\ \text{מתחלק}\\ \text{ב-4}\end{smallmatrix} \lor \neg\begin{smallmatrix}n+3\\ \text{מתחלק}\\ \text{ב-4}\end{smallmatrix}\right)$$

נמיר $\neg P\lor Q \Rightarrow P\to Q$:

$$\forall n\in\mathbb{Z}\left(\neg\begin{smallmatrix}n\\ \text{מתחלק}\\ \text{ב-4}\end{smallmatrix} \lor \begin{smallmatrix}n+3\\ \text{לא מתחלק}\\ \text{ב-4}\end{smallmatrix}\right) \equiv \forall n\in\mathbb{Z}\left(\begin{smallmatrix}n\\ \text{מתחלק}\\ \text{ב-4}\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}n+3\\ \text{לא מתחלק}\\ \text{ב-4}\end{smallmatrix}\right)$$

לפי שקילויות לוגיות מצאנו שבמילים אחרות ניתן לנסח את הטענה כך:

= "עבור כל מספר שלם n, אם n מתחלק ב-4 אז (n+3) לא מתחלק ב-4."

P - n מתחלק ב-4

Q - n+3 לא מתחלק ב-4

ההוכחה הכי פשוטה לטענה זו היא הוכחה ישירה.

הוכחה:

נניח שP. כלומר נניח ש-n מתחלק ב-4, כך ש:

$$n=4k \quad (k\in\mathbb{Z})$$

נבדוק את n+3:

$$n+3=4k+3$$

כידוע, עבור כל מספר שלם p שהוא זוגי ומספר שלם t שהוא אי-זוגי, מתקבל ש:

$\underset{\text{זוגי}}{p}+\underset{\text{אי-זוגי}}{t}$ = תוצאה אי-זוגית $\left(\underset{\text{זוגי}}{2k}+\underset{\text{אי-זוגי}}{(2m+1)}=2k+2m+1=2(k+m)+1=\text{אי-זוגי}\right) \longleftarrow (p=2k,\ t=2m+1)$

ולפיכך, כיוון ש-4k תמיד זוגי ו-3 הוא מספר אי-זוגי מתקבל שסכומם אי-זוגי, ומכאן ש-(n+3) אי-זוגי. כיוון ש-(n+3) אי-זוגי הוא אינו יכול להתחלק ב-4 כיוון ש:

$$\frac{n+3}{4}=\frac{n}{4}+\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z} \quad \left(\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z}\right)$$

ולכן (n+3) אינו מתחלק ב-4.

הוכחנו $P\to Q$, כלומר הטענה המקורית היא נכונה.

(e.)

טענה: "אם $n$ מתחלק ב-8 - אז $2n$ מתחלק ב-16."

הוכחה זו פשוטה מאוד ולכן נשתמש בהוכחה ישירה $(P \to Q)$

<u>הוכחה:</u>

נניח $P$ ונראה $Q$ כאשר:

$P$ - $n$ מתחלק ב-8

$Q$ - $2n$ מתחלק ב-16

כיוון ש-$n$ מתחלק ב-8 וכמובן שהוא מספר שלם כיוון שהוא מתחלק בשלם, ניתן לבטא אותו כך:

$$n = 8k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

~~נב~~ נציב ב-$2n$:

$$2n = 2 \cdot 8k = 16k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

הראינו ש-$2n$ הוא מספר שמתחלק ב-16 כלומר הראינו ש-$Q$.
הוכחנו $P \to Q$ ~~...~~, כלומר הטענה המקורית נכונה.

(f.)

טענה: "אם $a$ ו-$b$ שלמים זוגיים - אז $a^2+b^2$ מתחלק ב-4."

הוכחה זו גם ניתן להוכיח ישירות ע"י $P \to Q$.

<u>הוכחה:</u>

נניח $P$ ונראה $Q$ כך ש:

$P$ - $a$ ו-$b$ מספרים שלמים זוגיים

$Q$ - $a^2+b^2$ מתחלק ב-4

כיוון ש-$a$ ו-$b$ זוגיים ניתן לבטא אותם כך:

$$a = 2k, \; b = 2m$$

נציב בביטוי:

$$a^2+b^2 = (2k)^2 + (2m)^2 = 4k^2 + 4m^2 = 4(k^2+m^2) \quad (k^2+m^2 \in \mathbb{Z})$$

הוכחנו שהביטוי מתחלק ב-4. כלומר הוכחנו $P \to Q$ ולכן הטענה המקורית נכונה.

טענה: = "לא קיימים מספרים שלמים $a,b$ שבעבורם $2a+4b=1$." (9.)

~~$\forall a,b\in\mathbb{Z}\,(2a+4b\neq1) \equiv \neg\exists a,b\in\mathbb{Z}\,(2a+4b=1)$~~

~~"עבור כל המספרים השלמים $a,b$ מתקיים $2a+4b\neq1$."~~

~~[illegible] מספר שניתן לכתוב ללא חלק שברי/עשרוני~~

~~$\forall a,b$ (שלמים $2a+4b\neq1$)~~

~~[illegible]~~

הטענה טוענת במילים אחרות, שעבור מספרים $b$, $a$, אם הם שלמים אז לא מתקבל ש $2a+4b=1$."

קודם כל נוכיח שהביטוי $2a+4b$ תמיד זוגי עבור $a,b$ שלמים.

$$2a+4b = 2a+2\cdot 2b \quad (a,b\in\mathbb{Z}) \Rightarrow 2(a+2b) \Rightarrow \text{זוגי}$$

נשתמש בפסוק בעובדה שביטוי זה זוגי. נסמן פסוקים:

$P$ - קיימים מספרים שלמים $a,b$ שעבורם $2a+4b=1$

$Q$ - $2a+4b$ אי-זוגי, $\sim Q$ - $2a+4b$ זוגי

נשתמש בהוכחה בשלילה $(\sim P \to (Q\wedge \sim Q))$ כדי לראות אם הטענה המקורית נכונה.

הוכחה:

נניח $P$ ו- $\sim Q$ ונראה $\sim P$. כלומר נניח שקיימים מספרים שלמים $a,b$ שעבורם $2a+4b=1$, ול- $2a+4b$ זוגי.

כיוון ש-$(2a+4b)$ הוא מספר זוגי, נסמן $2k=(2a+4b)$ $(k\in\mathbb{Z})$. מתקבל ש:

$$2a+4b=1 \Rightarrow 2k=1 \overset{/:2}{\Rightarrow} k=\tfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$$

אבל אנו יודעים ש- $k\in\mathbb{Z}$ כיוון ש-$k$ הוא מספר שלם כשהוא שמסמן את הזוגיות של $a$ ו-$b$, אך קיבלנו ש $k=\frac{1}{2}$ עבור המשוואה. $\frac{1}{2}$ הוא לא מספר שלם ולכן נוצרה לנו סתירה. כלומר לא יכול להיות שסכום של שני מספרים שלמים נקבל $1$ כיוון שהסכום זוגי.

הראינו ש $\sim P$ ע"י הוכחת $\sim P\to(Q\wedge\sim Q)$, כלומר הטענה המקורית __נכונה__.