TD1 : Paramétrage - MGI MGD d'un robot SCARA

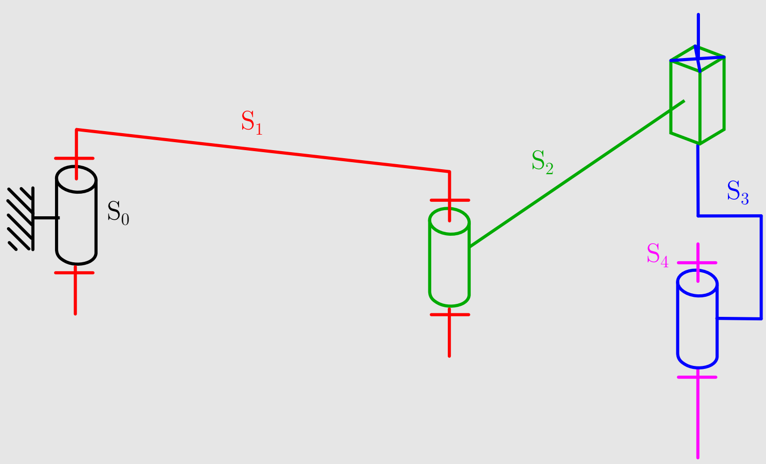
On étudie le robot Scara 4 axes, référencé « s600 » de marque Adept donné en **Figure 1** :

FIGURE 1 – Robot SCARA s600

1 Paramétrage

Question 1.1 • En se basant sur la documentation technique fournie en Annexes, proposer un schéma cinématique de ce robot.

Question 1.1 • Solutions



Question 1.2 • Construire sur le schéma, la paramétrisation au sens de Denavit et Hartenberg modifée. Synthétiser les résultats dans le tableau associé.

Question 1.2 • Solutions

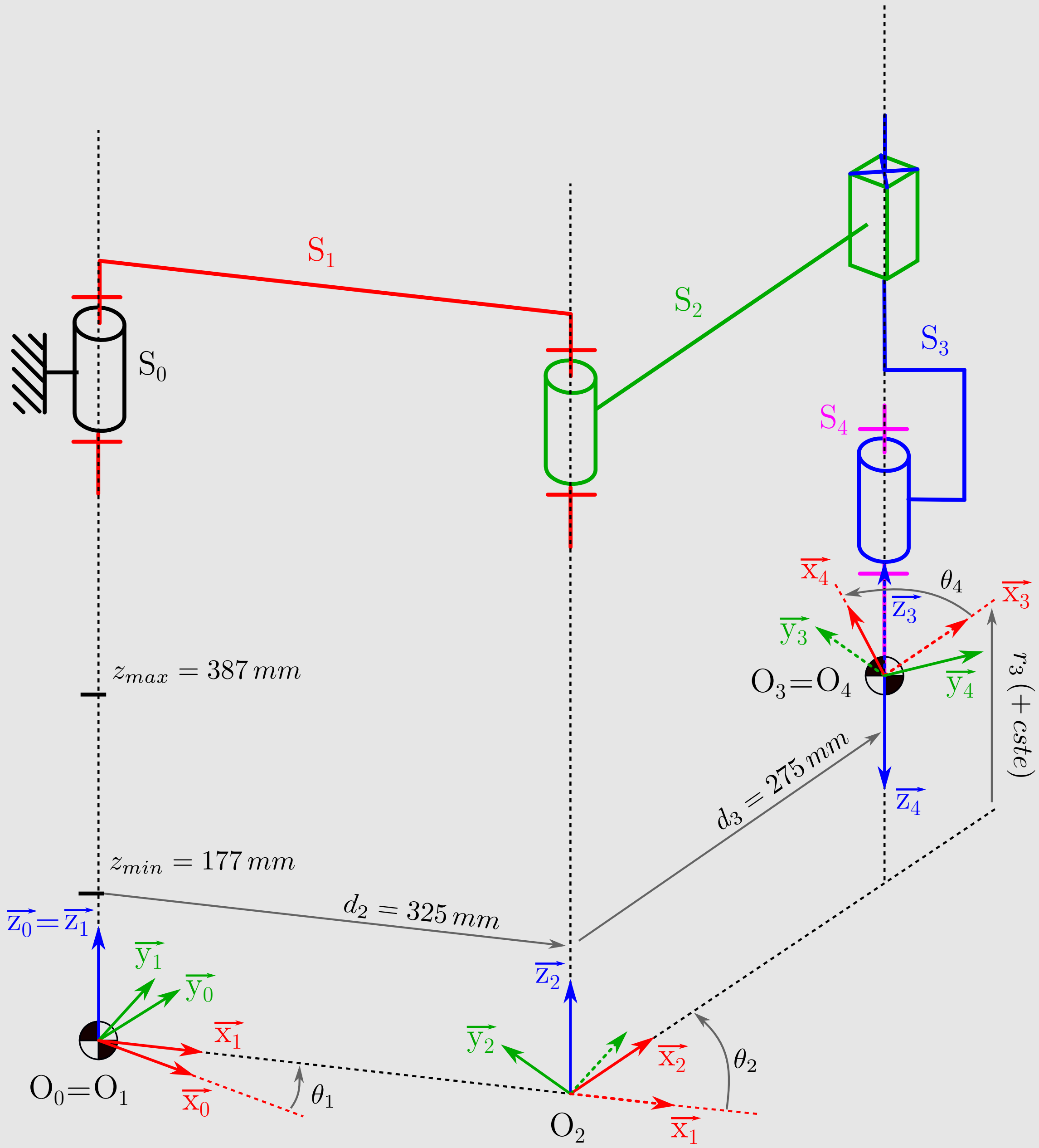


Tableau de paramètres DHm pour le robot

	d_i	α_i	r_i	θ_i
T_{01}	0	0	0	θ_1
T_{12}	d_2	0	0	θ_2
T_{23}	d_3	0	$r_3\,(+r_{30})$	0
T_{34}	0	180°	0	θ_4

Les paramètres d_i et α_i sont toujours constants.
Les paramètres r_i et θ_i sont les variables articulaires et sont définies à une constante près.

Question 1.3 • Déterminer chaque matrice homogène de transformation $\mathbf{T}_{ij}$ entre les différents corps.

Question 1.3 • Solutions

Matrices homogènes élémentaires de transformations entre repères :

$$\mathbf{T}_{01} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & d_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour $\mathbf{T}_{34}$: la matrice de rotation $\mathbf{R}_{34}$ est composée de 2 rotations :

$$\mathbf{R}_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(\pi) & -S(\pi) \\ 0 & S(\pi) & C(\pi) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 \\ S\theta_4 & C\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{34} = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 \\ -S\theta_4 & -C\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On trouve ainsi :

$$\mathbf{T}_{34} = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & 0 \\ -S\theta_4 & -C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 1.4 • En déduire l'expression de la transformation globale permettant de passer d'un vecteur exprimé dans le référentiel associé à l'effecteur $\mathscr{R}_{\text{eff.}}$, à son expression dans le référentiel associé à la base du robot $\mathscr{R}_0$:

$$^{0}\mathbf{P} = \mathbf{T}_{\mathbf{0}\,\text{eff.}}\,^{\text{eff.}}\mathbf{P} \tag{1}$$

Question 1.4 • Solutions

$$^{0}\mathbf{P} = \mathbf{T}_{01}\,\mathbf{T}_{12}\,\mathbf{T}_{23}\,\mathbf{T}_{34}\,^{4}\mathbf{P}$$

Calcul de l'expression de $\mathbf{T}_{04}$.

1 - On commence par calculer le produit $\mathbf{T}_{23} \times \mathbf{T}_{34}$ car $\mathbf{T}_{23}$ est seulement une matrice de translation.

$$\mathbf{T}_{24} = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -S\theta_4 & 0 & d_3 \\ -S\theta_4 & -C\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & r_3 + cste \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 - Calcul du produit $\mathbf{T}_{12} \times \mathbf{T}_{24}$

$$\mathbf{T}_{14} = \begin{bmatrix} C\theta_2 C\theta_4 + S\theta_2 S\theta_4 & -C\theta_2 S\theta_4 + S\theta_2 C\theta_4 & 0 & d_3 C\theta_2 + d_2 \\ S\theta_2 C\theta_4 - C\theta_2 S\theta_4 & -S\theta_2 S\theta_4 - C\theta_2 C\theta_4 & 0 & d_3 S\theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & r_3 + cste \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C(\theta_2 - \theta_4) & S(\theta_2 - \theta_4) & 0 & d_3 C\theta_2 + d_2 \\ S(\theta_2 - \theta_4) & -C(\theta_2 - \theta_4) & 0 & d_3 S\theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & r_3 + cste \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rappel trigonométrique

$$S(a+b) = S(a)C(b) + C(a)S(b)$$
$$C(a+b) = C(a)C(b) - S(a)S(b)$$

3 - Calcul du produit $\mathbf{T}_{01} \times \mathbf{T}_{14}$

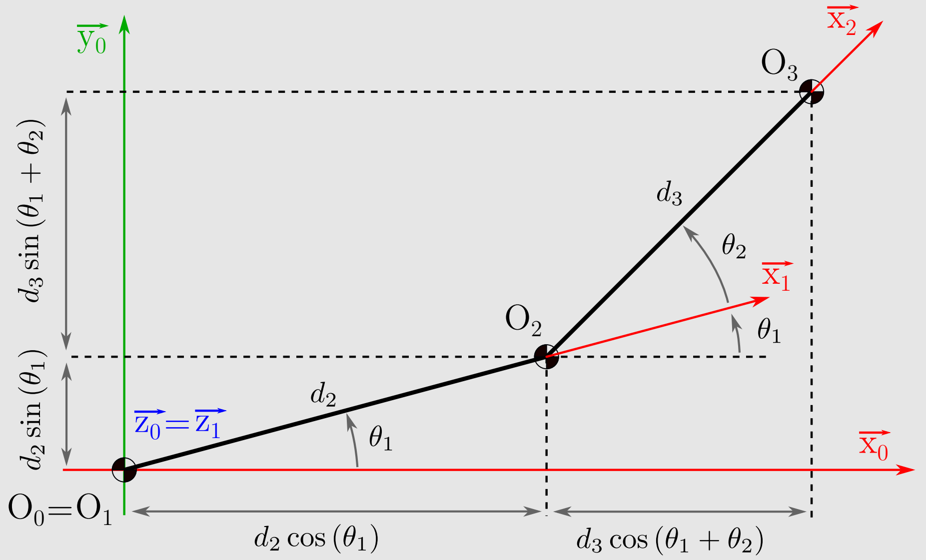
$$\mathbf{T}_{04} = \begin{bmatrix} C\theta_1 C(\theta_2 - \theta_4) - S\theta_1 S(\theta_2 - \theta_4) & C\theta_1 S(\theta_2 - \theta_4) + S\theta_1 C(\theta_2 - \theta_4) & 0 & C\theta_1 (d_3 C\theta_2 + d_2) - S\theta_1 (d_3 S\theta_2) \\ S\theta_1 C(\theta_2 - \theta_4) - C\theta_1 S(\theta_2 - \theta_4) & S\theta_1 S(\theta_2 - \theta_4) - C\theta_1 C(\theta_2 - \theta_4) & 0 & S\theta_1 (d_3 C\theta_2 + d_2) + C\theta_1 (d_3 S\theta_2) \\ 0 & 0 & -1 & r_3 + cste \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C(\theta_1 + \theta_2 - \theta_4) & S(\theta_1 + \theta_2 - \theta_4) & 0 & d_3 C(\theta_1 + \theta_2) + d_2 C\theta_1 \\ S(\theta_1 + \theta_2 - \theta_4) & -C(\theta_1 + \theta_2 - \theta_4) & 0 & d_3 S(\theta_1 + \theta_2) + d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & -1 & r_3 + cste \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 1.5 • Retrouver par un raisonnement géométrique simple les équations définissant le vecteur translation entre le repère $\mathscr{R}_0$ et le repère de l'effecteur $\mathscr{R}_{\text{eff.}}$.

Question 1.5 • Solutions

Pour retrouver les équations liées à la position de l'effecteur, il suffit de réaliser un schéma dans le plan.



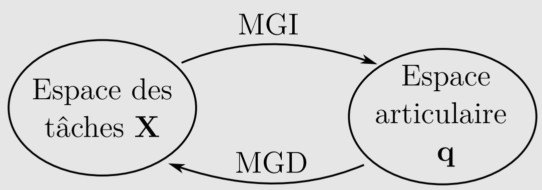
Si on nomme (x, y, z) le vecteur translation entre le repère $\mathcal{R}_0$ et le repère de l'effecteur $\mathcal{R}_{\text{eff}}$. On retrouve bien :

$$\begin{cases} x = d_3 \mathrm{C}(\theta_1 + \theta_2) + d_2 \mathrm{C}\theta_1 \\ y = d_3 \mathrm{S}(\theta_1 + \theta_2) + d_2 \mathrm{S}\theta_1 \end{cases}$$

2 Modélisation Géométrique Directe et Inverse

Question 2.1 • Proposer un paramétrage du repère effecteur $\mathcal{R}_{\text{eff.}}$ par rapport au repère de base du robot $\mathcal{R}_0$.

Question 2.1 • Solutions



Pour le robot scara la position et l'orientation de l'organe terminal sont caractérisé par :
— 3 composantes pour la position : x, y, z
— 1 composante pour l'orientation dans le plan : ω

Soit $\mathbf{X} = (x, y, z, \omega)$ le vecteur contenant les paramètres de l'espace des tâches et $\mathbf{q} = (\theta_1, \theta_2, r_3, \theta_4)$ le vecteur contenant les paramètres de l'espace articulaire.

Modèle géométrique directe :

$$\mathbf{X} = f_{MGD}(\mathbf{q})$$

Modèle géométrique inverse :

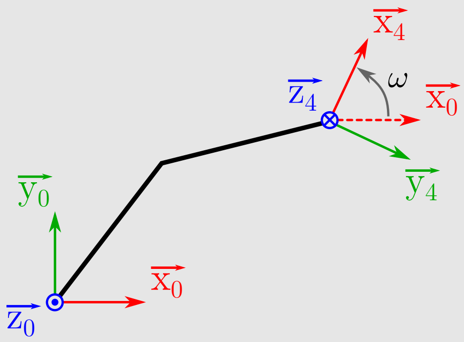
$$\mathbf{q} = f_{MGI}(\mathbf{X})$$

Question 2.2 • En étudiant successivement le problème en orientation puis en position, exprimer le MGD.

Question 2.2 • Solutions

1 - MGD en orientation :

$$^0\mathbf{P} = \mathbf{T}_{04}\,{}^4\mathbf{P}$$



Orientation de $\overrightarrow{z_4}$ opposé à $\overrightarrow{z_0}$.

ω correspond à l'angle entre $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_4})$. On cherche donc a exprimer $\overrightarrow{x_4}$ dans le repère $\mathscr{R}_0$

$$\begin{aligned}
{}^0\overrightarrow{x_4} &= \mathbf{T}_{04}\,{}^4\overrightarrow{x_4} && (2)\\
&= \mathbf{T}_{04}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} && (3)\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2-\theta_4)\\ \sin(\theta_1+\theta_2-\theta_4)\\ 0\\ 0\end{pmatrix} && (4)
\end{aligned}$$

Par identification de l'expression de $\overrightarrow{x_4}$ exprimé dans le repère $\mathscr{R}_0$ on trouve :

$$\omega = \theta_1 + \theta_2 - \theta_4$$

2 - MGD en position : on détermine les coordonnées de O_4 dans le repère $\mathscr{R}_0$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} = \mathbf{T}_{04}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

On trouve ainsi le MGD :

$$\begin{cases}
\omega = \theta_1 + \theta_2 - \theta_4 & (1)\\
x = d_3\mathrm{C}(\theta_1+\theta_2) + d_2\mathrm{C}\theta_1 & (2)\\
y = d_3\mathrm{S}(\theta_1+\theta_2) + d_2\mathrm{S}\theta_1 & (3)\\
z = r_3 + cste & (4)
\end{cases}$$

Question 2.3 • A l'aide des formulations géométriques données en Annexe des « Notes de cours », exprimer le MGI.

Question 2.3 • Solutions

1 - Déterminer θ_1 et θ_2 en fonction de x et y
2 - Déterminer θ_4 permettant de réaliser ω étant donnés θ_1 et θ_2 imposés

$$\begin{cases} x = d_3 \mathrm{C}(\theta_1+\theta_2) + d_2 \mathrm{C}\theta_1 \\ y = d_3 \mathrm{S}(\theta_1+\theta_2) + d_2 \mathrm{S}\theta_1 \end{cases} \quad \text{équations de type 8 (notes de cours)}$$

2 solutions (cf. démonstration en annexe) :

$$\theta_2 = \mathrm{atan2}\left(\pm\sqrt{1-\cos^2(\theta_2)}, \cos(\theta_2)\right) \quad \text{avec} \quad \cos(\theta_2) = \frac{x^2+y^2-d_2^2-d_3^2}{2d_2d_3}$$

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}\left(\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \cos(\theta_1) = \dfrac{xB_1+yB_2}{B_1^2+B_2^2} \\ \sin(\theta_1) = \dfrac{yB_1-xB_2}{B_1^2+B_2^2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} B_1 = d_2 + d_3\cos(\theta_2) \\ B_2 = d_3\sin(\theta_2) \end{cases}$$

Ensuite, une fois θ_1 et θ_2 résolus, on peut déterminer θ_4.

$$\theta_4 = \theta_1 + \theta_2 - \omega$$

La dernière relation est évidente :

$$r_3 = z - cste$$

On trouve ainsi le MGI :+

$$\begin{cases} \theta_2 = \mathrm{atan2}\left(\pm\sqrt{1-\cos^2(\theta_2)}, \cos(\theta_2)\right) \quad \text{avec} \quad \cos(\theta_2) = \dfrac{x^2+y^2-d_2^2-d_3^2}{2d_2d_3} \\ \theta_1 = \mathrm{atan2}\left(\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \cos(\theta_1) = \dfrac{xB_1+yB_2}{B_1^2+B_2^2} \\ \sin(\theta_1) = \dfrac{yB_1-xB_2}{B_1^2+B_2^2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} B_1 = d_2 + d_3\cos(\theta_2) \\ B_2 = d_3\sin(\theta_2) \end{cases} \\ \theta_4 = \theta_1 + \theta_2 - \omega) \\ r_3 = z - cste \end{cases}$$

3 Synthèse

Analyser le modèle du robot implémenté dans l'application « RoboDK ».

Question 3.0 • Solutions

RoboDK : Logiciel permettant de simuler pour différents robots, différentes trajectoires.

1 - Ouvrir la librairie en ligne (icône avec la planète). De nombreux robot dont le robots à architecture Scara utilisé dans ce TP sont disponibles.

2 - Ouvrir le robot Scara utilisé dans le TP. Par défaut, on a directement le repère de référence qui s'affiche et le repère de l'organe terminal. Correspondance des couleurs (X -> rouge, Y -> vert, Z -> bleu)

3 - Double clic sur le robot pour faire apparaitre la fenêtre des propriétés.
— Expliquer les différentes sous-parties disponibles.
— Décoché tous les repères

— Faire apparaitre le repère 1 et le repère 2, faire varier l'angle θ_1 et l'angle θ_2. Comme vu précédemment on peut placer les origines au même endroit : il n'y a qu'un paramètre d_1 qui apparait.
— Faire le lien avec la variation des paramètres que l'on a dans les différents repères : Attention les notations ne sont pas les mêmes

4 - Montrer les autres configurations possibles : Attention il n'y a pas 4 configurations, mais seulement 2 : la variation de θ_4 n'est pas entre $-360\,\deg$ et $360\,\deg$ mais uniquement entre $0\,\deg$ et $360\,\deg$ (1 seul tour possible).

5 - Montrer l'espace de travail complet que l'on peut obtenir.

6 - Cliquer sur paramètres en haut à droite afin d'accéder au modèle géométrique du robot : Attention, les paramètres géométriques sont décrits au sens du modèle de Denavit Hartenberg (DH) et non au sens de Denavit Hartenberg modifié (DHm)

4 Annexes

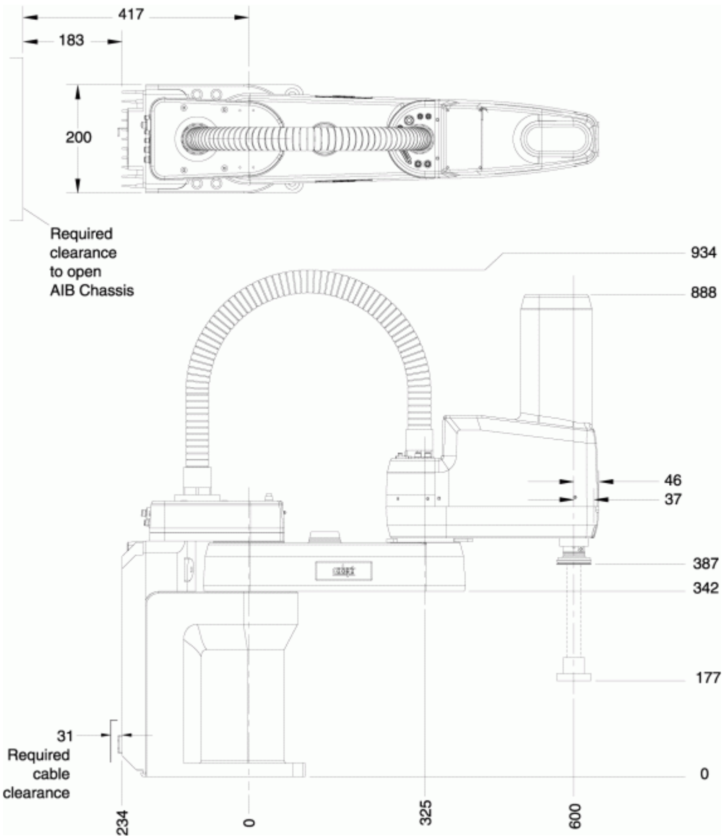


FIGURE 2 – Caractéristiques dimensionnelles

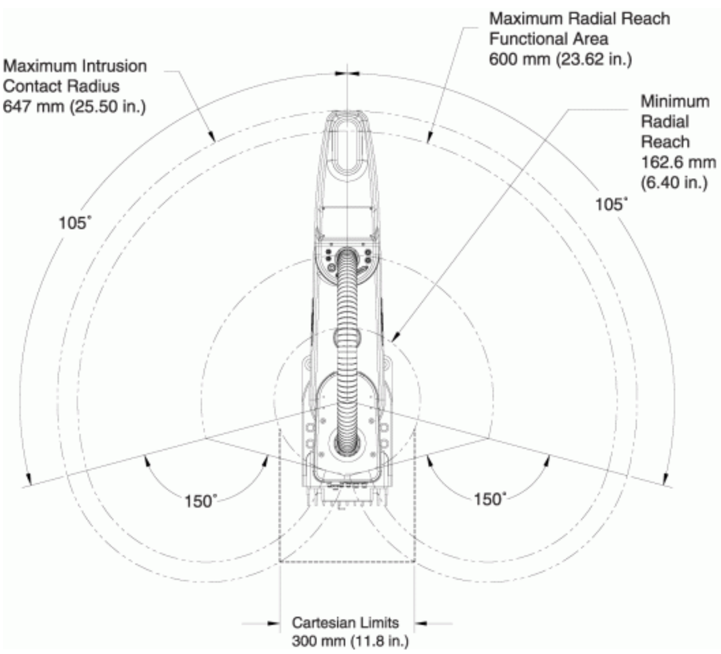


FIGURE 3 – Surface balayée par l'effecteur

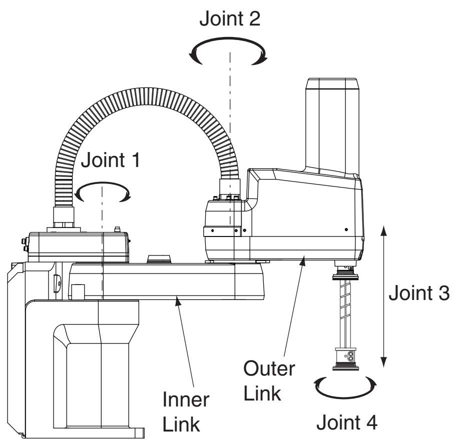


FIGURE 4 – Extrait de documentation : cinématique

Specifications	
Reach	600 mm
Payload	Rated 2 kg
	Max. 5.5 kg
Adept Cycle	
Burst Mode	0.42 sec
Sustained (20°C)	0.45 sec
Joint Ranges	
Joint 1	± 105°
Joint 2	± 150°
Joint 3	210 mm
Joint 4	± 360°
Joint Speeds	
Joint 1	386°/sec
Joint 2	720°/sec
Joint 3	1100 mm/se
Joint 4	1200°/sec
Repeatability	
XY	± 0.017 mm
Z	± 0.003 mm
Theta	± 0.019°

FIGURE 5 – Extrait de documentation : spécifications techniques

Démonstration des solutions de l'équation de type 8 :

Le système a résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} x = d_3\mathrm{C}(\theta_1+\theta_2)+d_2\mathrm{C}\theta_1 \\ y = d_3\mathrm{S}(\theta_1+\theta_2)+d_2\mathrm{S}\theta_1 \end{cases} \quad \text{équations de type 8 (notes de cours)}$$

par identification au cours on a $\theta_1 = \theta_i$, $\theta_2 = \theta_j$, $d_2 = X$, $d_3 = Y$, $x = Z_1$ et $y = Z_2$.

L'équation générique est donc :

$$\begin{cases} X\mathrm{C}\theta_i + Y\mathrm{C}(\theta_i+\theta_j) = Z_1 \\ X\mathrm{S}\theta_i + Y\mathrm{S}(\theta_i+\theta_j) = Z_2 \end{cases}$$

<u>Résolution pour trouver θ_j</u>

On élève au carré les deux équations et on additionne :

$$X^2\mathrm{C}^2(\theta_i)+X^2\mathrm{S}^2(\theta_i)+Y^2\mathrm{C}^2(\theta_i+\theta_j)+Y^2\mathrm{S}^2(\theta_i+\theta_j)+2XY\underbrace{\left[\mathrm{C}(\theta_i)\mathrm{C}(\theta_i+\theta_j)+\mathrm{S}(\theta_i)\mathrm{S}(\theta_i+\theta_j)\right]}_{\mathrm{C}(\theta_i+\theta_j-\theta_i)\text{ ou }\mathrm{C}(\theta_i-(\theta_i+\theta_i))} = Z_1^2+Z_2^2$$

La partie avec une accolade correspond soit à $\cos(\theta_j)$ soit à $\cos(-\theta_j)$. On utilise la propriété du $\mathrm{C}^2(a)+\mathrm{S}^2(a)=1$ pour simplifier l'équation précédente. On trouve donc :

$$\cos(\theta_j) = \frac{Z_1^2+Z_2^2-X^2-Y^2}{2XY} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_j) = \sqrt{1-\cos(\theta_j)}$$

d'ou :

$$\theta_j = \mathrm{atan2}\left(\pm\sqrt{1-\cos^2(\theta_j)}, \cos(\theta_j)\right)$$

<u>Résolution pour trouver θ_i</u>

Développement du $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$

$$\begin{cases} X\mathrm{C}\theta_i + Y\left(\mathrm{C}\theta_i\mathrm{C}\theta_j-\mathrm{S}\theta_i\mathrm{S}\theta_j\right) = Z_1 \\ X\mathrm{S}\theta_i + Y\left(\mathrm{S}\theta_i\mathrm{C}\theta_j+\mathrm{C}\theta_i\mathrm{S}\theta_j\right) = Z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{C}\theta_i\left[X+Y\mathrm{C}\theta_j\right]+\mathrm{S}\theta_i\left[-Y\mathrm{S}\theta_j\right] = Z_1 \\ \mathrm{C}\theta_i\left[Y\mathrm{S}\theta_j\right]+\mathrm{S}\theta_i\left[X+Y\mathrm{C}\theta_j\right] = Z_2 \end{cases}$$

On note $B_1 = Y\mathrm{S}\theta_j$ et $B_2 = X+Y\mathrm{C}\theta_j$. On obtient le système suivant que l'on note $(S1)$

$$\begin{cases} \mathrm{C}\theta_i B_1 - \mathrm{S}\theta_i B_2 = Z_1 \\ \mathrm{C}\theta_i B_2 + \mathrm{S}\theta_i B_1 = Z_2 \end{cases}$$

1 - On multiplie la première équation de (S1) par B_2 et la seconde par B_1. On obtient :

$$\begin{cases} \mathrm{C}\theta_i B_1 B_2 - \mathrm{S}\theta_i B_2^2 = Z_1 B_2 & (1) \\ \mathrm{C}\theta_i B_1 B_2 + \mathrm{S}\theta_i B_1^2 = Z_2 B_1 & (2) \end{cases}$$

En soustrayant l'équation (1) à l'équation (2) on obtient :

$$\mathrm{S}\theta_i(B_1^2+B_2^2) = Z_2B_1 - Z_1B_2$$

d'ou :

$$S\theta_i = \frac{Z_2 B_1 - Z_1 B_2}{B_1^2 + B_2^2} \qquad \text{avec} B_1^2 + B_2^2 \neq 0$$

2 - On multiplie la première équation de (S1) par B_1 et la seconde par B_2. On obtient :

$$\begin{cases} C\theta_i B_1^2 - S\theta_i B_2 B_1 = Z_1 B_1 & (3) \\ C\theta_i B_2^2 + S\theta_i B_1 B_2 = Z_2 B_2 & (4) \end{cases}$$

En additionnant l'équation (3) et (4) on obtient :

$$C\theta_i = \frac{Z_1 B_1 + Z_2 B_2}{B_1^2 + B_2^2} \qquad \text{avec} B_1^2 + B_2^2 \neq 0$$

Maintenant que l'on a connaisance de $\cos(\theta_i)$ et $\sin(\theta_i)$ on peu dire :

$$\theta_i = \text{atan2}(S\theta_i, C\theta_i)$$