CISE 11120010

电磁场与电磁波

第4讲

矢量分析与场论

积分与微分形式的麦克斯韦方程

积分形式

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{t}}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

微分形式

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_V$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

积分形式的麦氏方程反映场在局部区域的平均性质，而微分形式的麦氏方程反映场在空间每一点的性质。显然，当所考虑局部区域→0，积分形式麦氏方程就变为微分形式麦氏方程，微分形式麦氏方程是积分形式麦氏方程当局部区域→0时的极限。

怎么从积分形式麦氏方程得出微分形式麦氏方程?

∇是什么？　∇·是什么？　∇×是什么？

标量、矢量与场

标量：只有大小，没有方向，这种物理量称为标量，如温度T、电荷密度ρ。

矢量：要用大小及方向同时表示的物理量称为矢量。如速度$\boldsymbol{V}$、电场强度$\boldsymbol{E}$。

场：如果在空间域Ω上，每一点都存在一确定的物理量$\boldsymbol{A}$，我们就说：场域Ω上存在由场量A构成的场。

如果A是标量，我们就说场域Ω上存在一标量场；同理如果$\boldsymbol{A}$是矢量，则说明场域Ω上存在一矢量场。

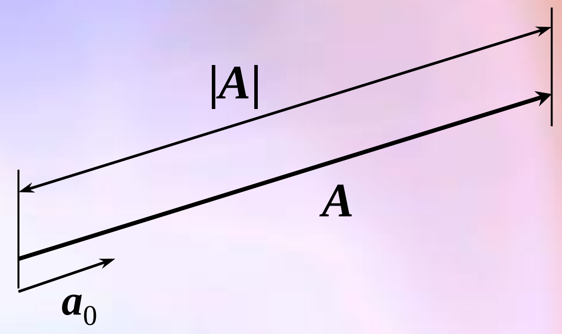
场是物质存在的一种形态，但有别于实物粒子。在空间同一点上同时允许存在多种场，或者一种场的多种模式。这与实物粒子的不可入性和排他性有天壤之别。

你能列举多少标量、矢量、场?

矢量*A*在空间 的表示及自由矢量

矢量***A***在空间可用一有向线段表示

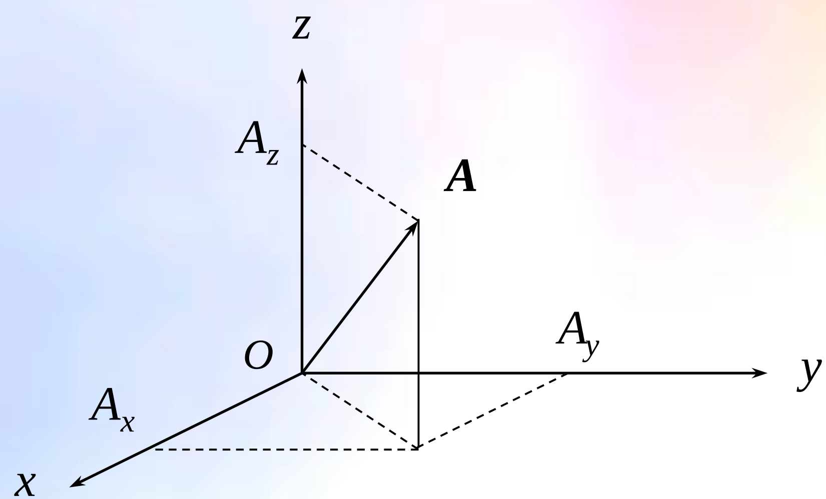
$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{a}_0$$



矢量***A***的有向线段表示

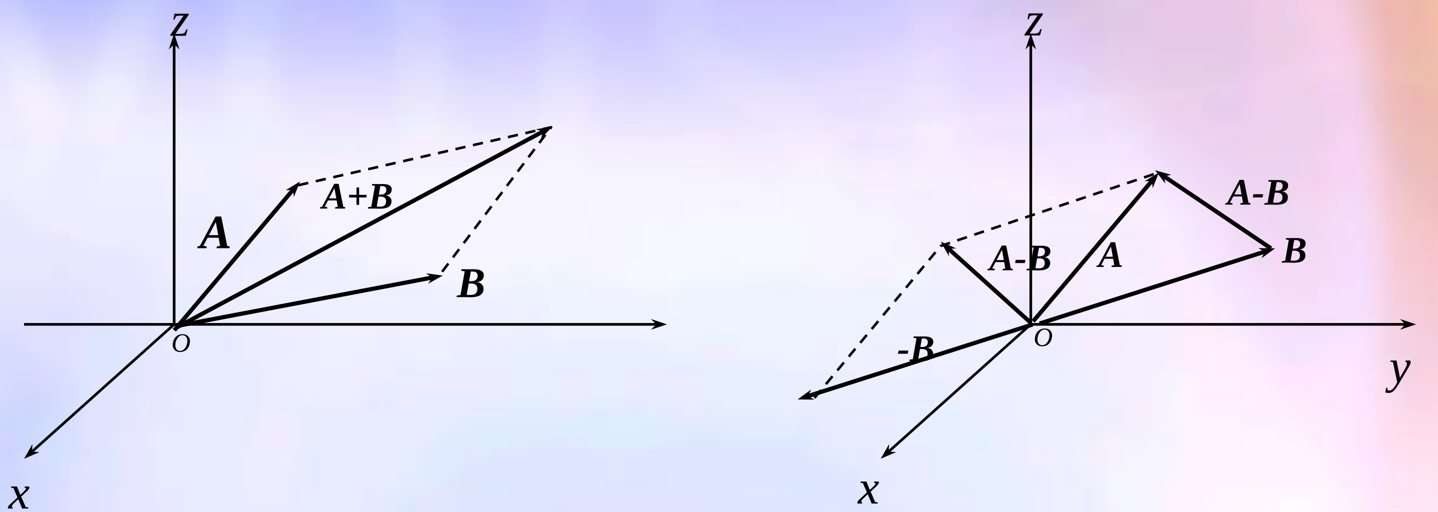
自由矢量：两矢量的模和方向都相同时就可以认为此两矢量是彼此相等的一类矢量 。

对于自由矢量常常把矢量的起点平移到坐标原点，以使分析简化。



矢量***A***在直角坐标系中表示

矢量的加法和减法运算



矢量***A***和***B***通过加法运算定义一个新的矢量***C***

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

矢量加法按平行四边形法则进行

矢量***A***和***B***的减法运算***A***–***B***定义为***A*** + (–***B***)，即

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \left(-\boldsymbol{B}\right)$$

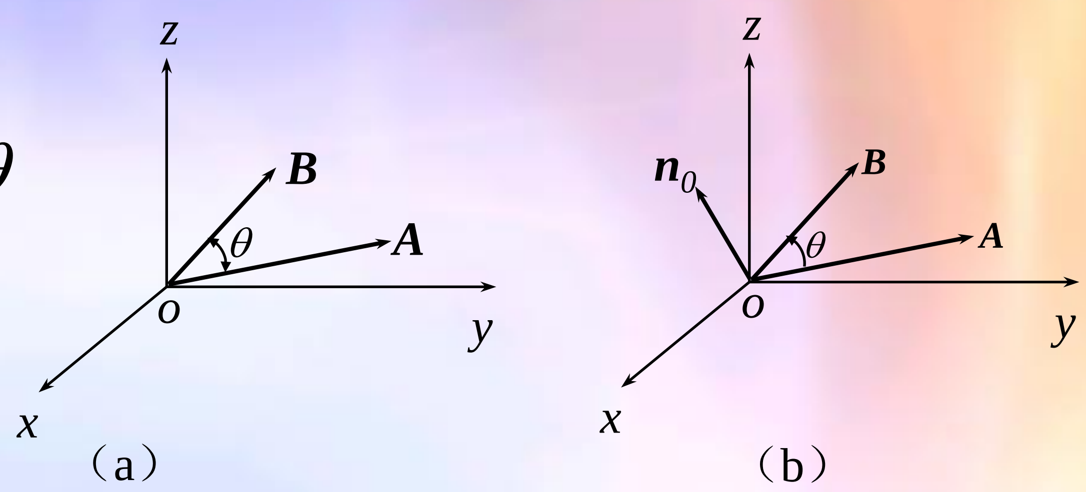
两矢量的标积与矢积

两矢量***A***、***B***的标积为一标量*C*，其定义是

$$C=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$$

$\boldsymbol{\theta}$是矢量***A***、***B***间夹角

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$



两矢量的积

（a）矢量***A***、***B***间夹角（b）$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$是平行于$\boldsymbol{n}_0$的矢量

两矢量***A***、***B***的矢积为一新的矢量***D***，其模为

$$|\boldsymbol{D}|=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$$

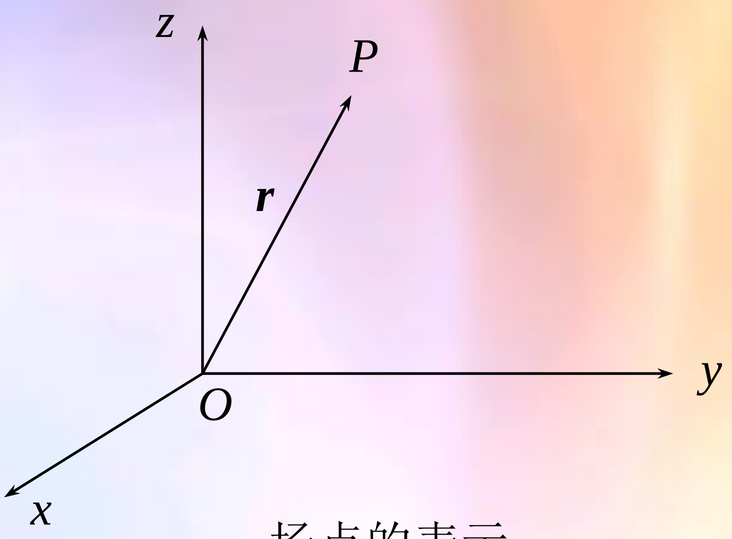
而***D***的方向由单位矢量$\boldsymbol{n}_0$表示，$\boldsymbol{n}_0$与***A***、***B***构成右手螺旋关系。$\boldsymbol{\theta}$定义为从矢量***A***到***B***的夹角。

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

矢径$\boldsymbol{r}$

场量的空间位置在确定的坐标系中用矢径$\boldsymbol{r}$表示，如电荷密度ρ、电场强度$\boldsymbol{E}$，可表示为

$$\rho(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$



场点的表示

在直角坐标系中，表示场量空间位置的矢径$\boldsymbol{r}$可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 + z\boldsymbol{z}_0$$

$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{z}_0$分别为坐标轴x、y、z增加方向的单位矢量,彼此正交,故具有性质

$$\boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0 \cdot \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{z}_0 = 1$$

$$\boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}_0 \cdot \boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{x}_0 = 0$$

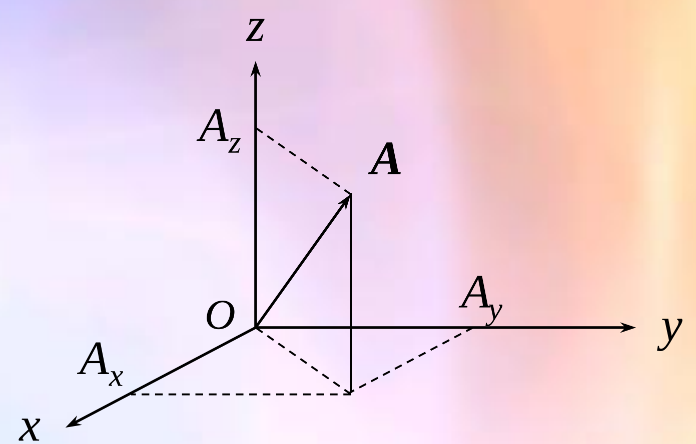
以及 $\boldsymbol{x}_0 \times \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{z}_0,\quad \boldsymbol{y}_0 \times \boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{x}_0,\quad \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0$

矢径$\boldsymbol{r}$的模为 $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

场量的空间位置表示

在直角坐标系中，场矢量**A**可表示成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_x(\boldsymbol{r})\boldsymbol{x}_0 + A_y(\boldsymbol{r})\boldsymbol{y}_0 + A_z(\boldsymbol{r})\boldsymbol{z}_0$$



矢量**A**在直角坐标系中表示

或

$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0 + A_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0 + A_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0$$

并简记为 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{x}_0 + A_y\boldsymbol{y}_0 + A_z\boldsymbol{z}_0$

式中，A_x、A_y、A_z为矢量**A**在x、y、z轴上的投影，它们都是空间位置**r**的函数。

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$计算

设矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可表示成

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{x}_0 + B_y \boldsymbol{y}_0 + B_z \boldsymbol{z}_0$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在直角坐标系中的标积、矢积为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= \left(A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(B_x \boldsymbol{x}_0 + B_y \boldsymbol{y}_0 + B_z \boldsymbol{z}_0\right)\\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \left(A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0\right)\times\left(B_x \boldsymbol{x}_0 + B_y \boldsymbol{y}_0 + B_z \boldsymbol{z}_0\right)\\ &= \boldsymbol{x}_0\left(A_y B_z - A_z B_y\right) + \boldsymbol{y}_0\left(A_z B_x - A_x B_z\right) + \boldsymbol{z}_0\left(A_x B_y - A_y B_x\right)\\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

算符∇

算符 $$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

∇是一个矢量。

∇与一般的矢量不同，它有微分运算功能。

∇作用于一标量场$\Phi(x, y, z)$可得到一个矢量

$$\nabla\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

算符∇

∇作用于一矢量场**A**(*x*, *y*, *z*)，如果是点乘运算得到一标量场

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0\right)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

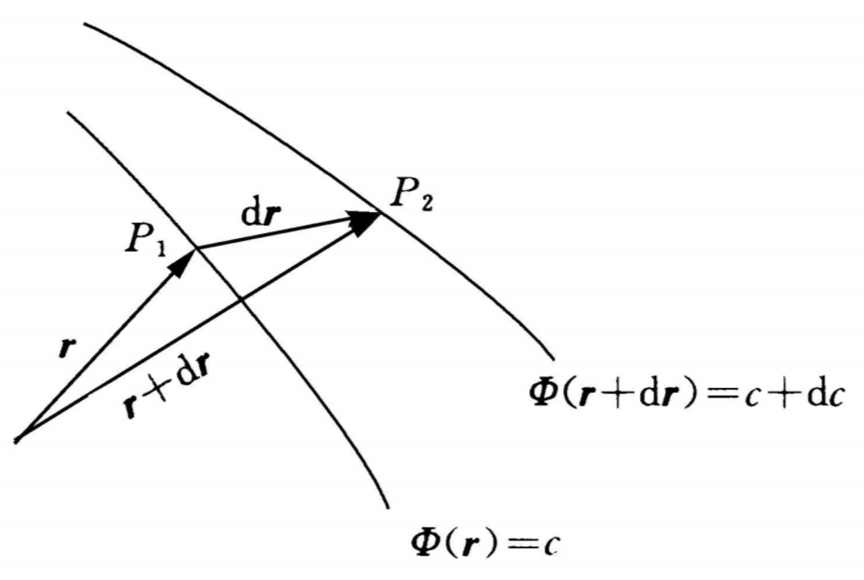
∇作用于一矢量场，如果是叉积运算，得到一个新的矢量场

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{x}_0+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{y}_0+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{z}_0$$

$$\nabla\cdot\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

等值面、方向导数与梯度的定义

等值面：标量场Φ中数值相同的点构成的曲面



方向导数：场在指定方向变化率称为场在该方向的方向导数

$\mathrm{d}c/\mathrm{d}r$ 当$\mathrm{d}r\to 0$时的极限就是$\mathrm{d}r$方向的方向导数。

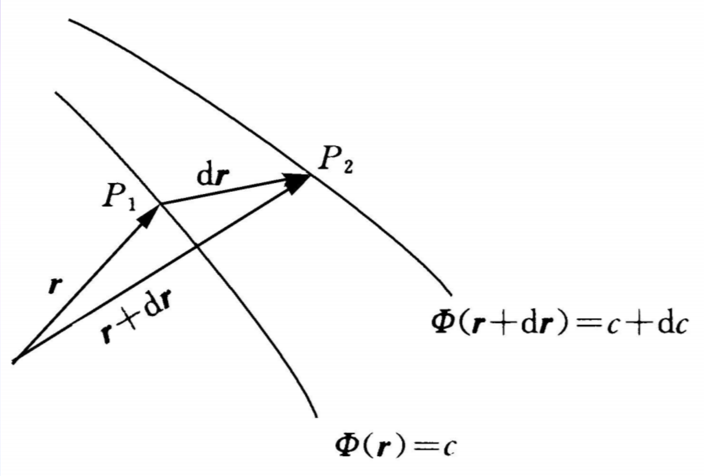
梯度(gradΦ)：梯度是一个矢量，方向为Φ变化最陡的方向，即最大方向导数的方向，大小为Φ变化最大方向的变化率，即最大方向导数。

梯度grad $\Phi = \nabla \Phi$

设 $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{x}_0 + dy\boldsymbol{y}_0 + dz\boldsymbol{z}_0$

当|d**r**|很小时

$$\mathrm{d}\Phi = \Phi(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) - \Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$



按照算符∇的定义 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

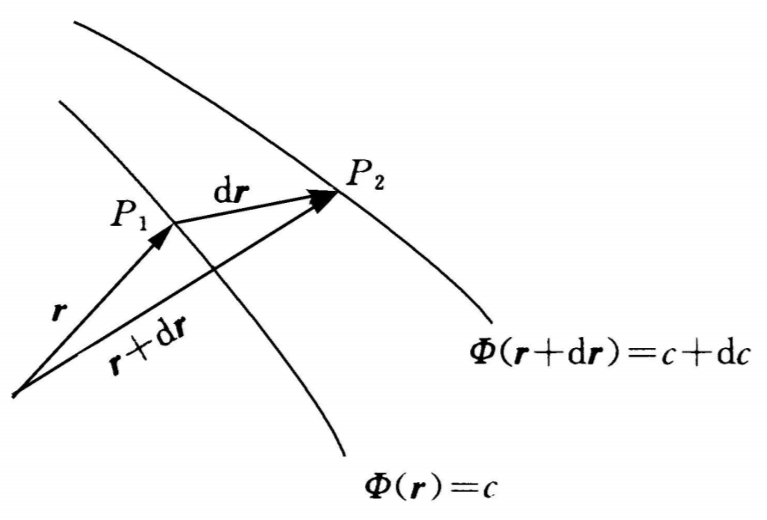
利用∇Φ的这一定义 $\mathrm{d}\Phi = \Phi(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) - \Phi(\boldsymbol{r}) = \nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$

因为 $\nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) \cdot (\mathrm{d}x\boldsymbol{x}_0 + \mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0 + \mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0)$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

梯度grad $\Phi=\nabla\Phi$

$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$



(1)$\nabla\Phi$是一个矢量。

(2)$\nabla\Phi$的方向即等位面的法线方

因为，如果d$\boldsymbol{r}$与等位面$\Phi(\boldsymbol{r})=c$相切

$$\mathrm{d}\Phi=\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

所以$\nabla\Phi$的方向就是等位面的法线方向，而等位面的法线方向是场变化最陡的方向。所以梯度$\nabla\Phi$的方向就是Φ变化最陡的方向。

(3)$\nabla\Phi$的大小为最大变化率方向的变化率(即最大变化率)。

设$\nabla\Phi$与d$\boldsymbol{r}$的夹角为θ，则 $\mathrm{d}\Phi=|\nabla\Phi||\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\theta$

当d$\boldsymbol{r}$与等位面法线重合时，

$\theta=0$，dΦ 最大，此时 $|\nabla\Phi|=\left.\dfrac{d\Phi}{dr}\right|_{r\text{在等位面法线方向}}$

梯度$\nabla\Phi$充分描述了标量场Φ在空间变化的特征

标量场空间任一点（x，y，z）沿任一方向的变化率（即方向导数）是不一样的。

最大变化率（即最大方向导数）的方向就是梯度$\nabla\Phi$的方向，最大变化率（即最大方向导数）就是梯度$\nabla\Phi$的大小。

梯度$\nabla\Phi$在任一方向$\boldsymbol{l}_0$ 的投影（$\nabla\Phi\cdot\boldsymbol{l}_0$）就是该方向的变化率（即该方向的方向导数）。

因此梯度$\nabla\Phi$是描述标量场Φ随空间变化特性非常好的一个物理量。

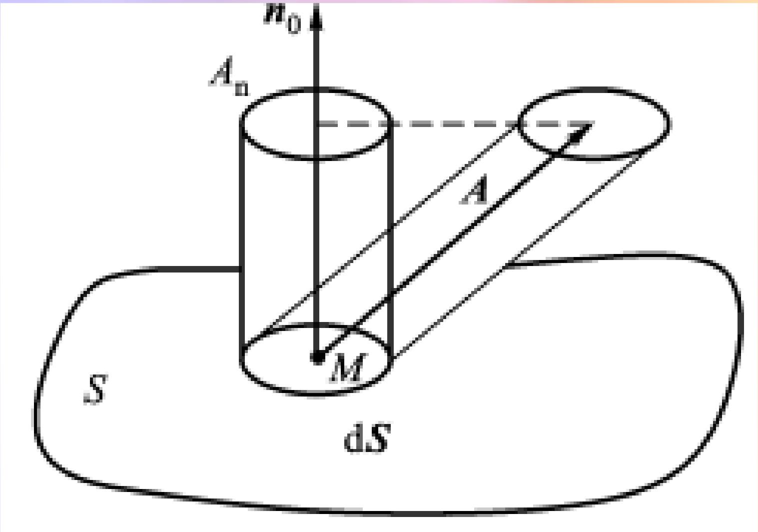
经过梯度运算，可由一个标量场得到一个矢量场。

说明经过梯度运算由标量场得到矢量场的例子。

矢量场通量的定义

矢量场***A***沿有向曲面***S***的曲面积分

称为矢量场***A***向正侧穿过曲面S的通量。



$$\psi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S_x \boldsymbol{x}_0 + \mathrm{d}S_y \boldsymbol{y}_0 + \mathrm{d}S_z \boldsymbol{z}_0$$

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{x}_0 + A_y \mathbf{y}_0 + A_z \mathbf{z}_0$$

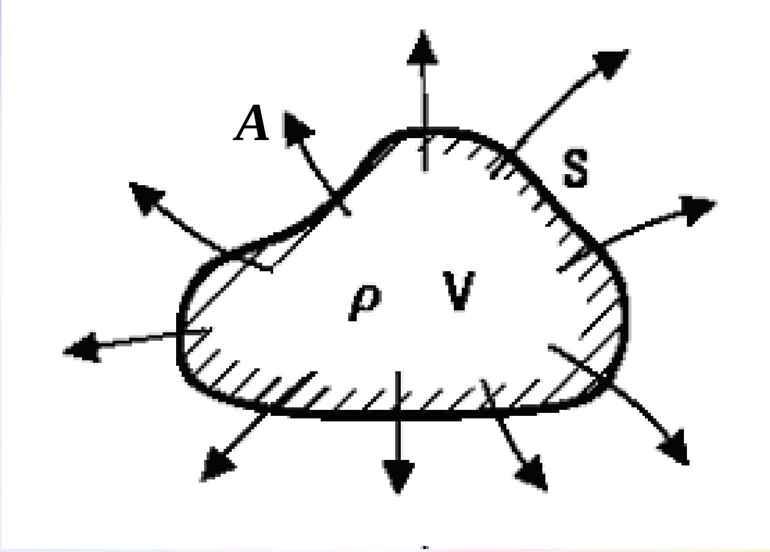
所以

$$\psi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \left(A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0 \right) \cdot \left(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_x \boldsymbol{x}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{S}_y \boldsymbol{y}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{S}_z \boldsymbol{z}_0 \right)$$

$$= \int_S A_x \mathrm{d}\boldsymbol{S}_x + A_y \mathrm{d}\boldsymbol{S}_y + A_z \mathrm{d}\boldsymbol{S}_z$$

矢量场A通量的体密度——散度div $\boldsymbol{A}$

$$\psi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$



称为矢量场$\boldsymbol{A}$向正侧穿过曲面S的通量

如果S是一个闭曲面，并取其外侧为正侧，则

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

表示$\boldsymbol{A}$从闭曲面流出的通量。

对于流体而言，当通量为正时，表示有净流量流出，说明存在着流体的源。当通量为负时，表示有净的流量流入，说明存在着流体的负源。当通量为零时，表示流入与流出的流量相等，说明体积内正负源的总和为零。

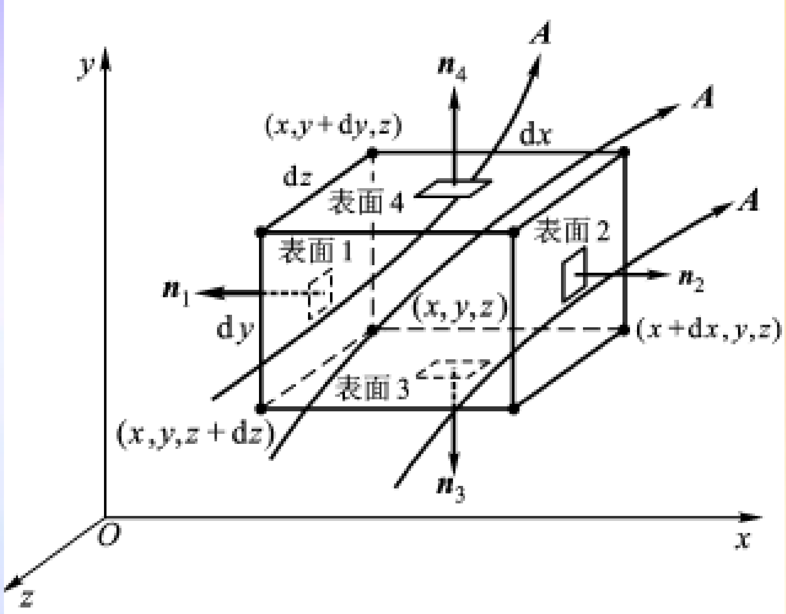
定义通量的体密度称为矢量场$\boldsymbol{A}$的散度记为div $\boldsymbol{A}$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

所以div $\boldsymbol{A}$是一个标量。

散度div $\boldsymbol{A}$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$



ΔV 为一立方体，边长为dx、dy、dz，通量计算可在立方体的六个侧面上进行。在$x = x_0$与x_0 + dx两个侧面，A_y、A_z分量对积分没有贡献，只要考虑A_x分量

$$\int_{\Delta S(x=x_0)+S(x=x_0+\mathrm{d}x)} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

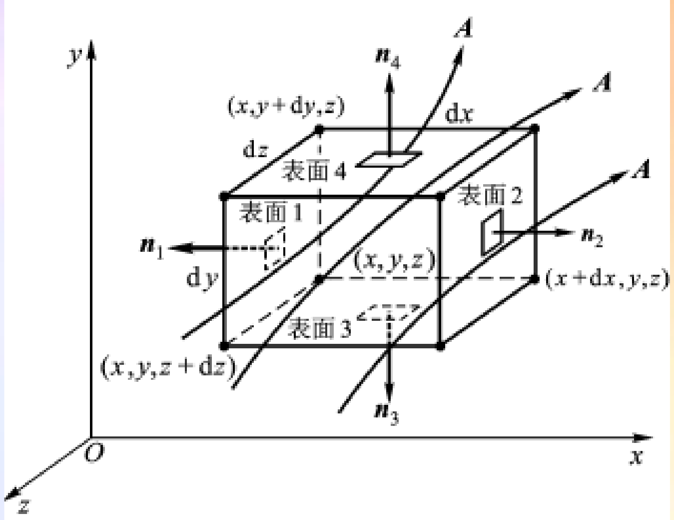
$$= \int_{\Delta S(x=x_0)} \left(A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0\right) \cdot \left(-x_0\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int_{\Delta S(x=x_0+\mathrm{d}x)} \left(A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0\right) \cdot \left(x_0\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\Delta S(x=x_0)} -A_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int_{\Delta S(x=x_0+\mathrm{d}x)} A_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \underbrace{= \left(A_x\big|_{x=x+dx} - A_x\big|_{x=x_0}\right) dydz}_{\text{dy、dz很小，在dydz小面积内，}A_x\text{为常数}}$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\int_{\Delta S(x=x_0)+S(x=x_0+\mathrm{d}x)} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\left(A_x\big|_{x=x_0+\mathrm{d}x} - A_x\big|_{x=x_0}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{A_x\big|_{x=x_0+\mathrm{d}x} - A_x\big|_{x=x_0}}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

散度div $\boldsymbol{A}$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}\quad \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{\Delta S(x=x_0)+S(x=x_0+\mathrm{d}x)}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\frac{\partial A_x}{\partial x}$$



在$y=y_0$与$y_0+\mathrm{d}y$两个侧面，A_x、A_z两个分量对积分没有贡献，只要考虑A_y分量

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{\Delta S(y=y_0)+S(y=y_0+\mathrm{d}y)}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\frac{\partial A_y}{\partial y}$$

在$z=z_0$与$z_0+\mathrm{d}z$两个侧面，A_x、A_y分量对积分没有贡献，只要考虑A_z分量

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{\Delta S(z=z_0)+S(z=z_0+\mathrm{d}z)}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

所以

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$ 所以 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

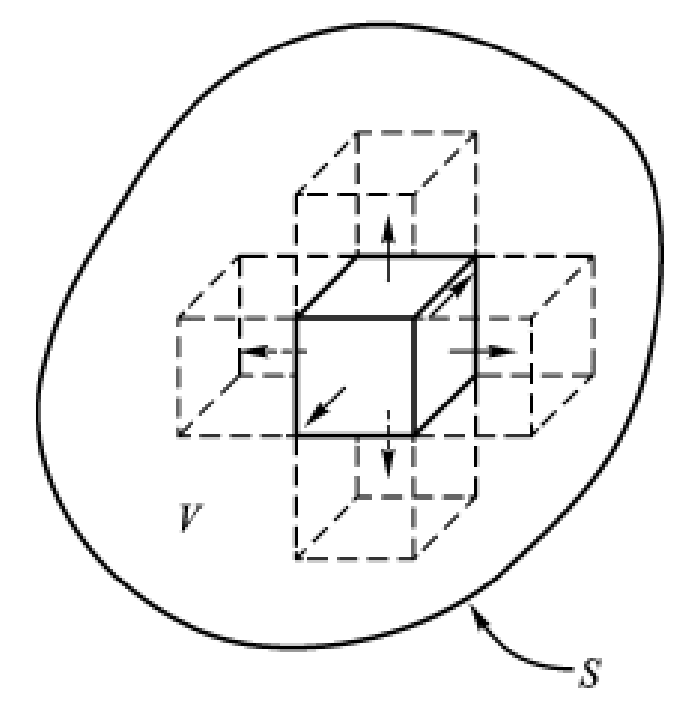
散度定理

对于由N个体积元ΔV构成的体积V，根据散度定义

$$\sum_N \left(\oint_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \right) = \sum_N (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \Delta V$$

当 $N \to \infty, \quad \Delta V \to \mathrm{d}V$，

上式求和变成积分。因为除了包围体积V的闭曲面S外，所有相邻体积元交界面上$\oint_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$相互抵消，这样我们就得到



$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V$$

这就是著名的散度定理。它表示矢量$\boldsymbol{A}$沿闭曲面的面积分$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$（或矢量场$\boldsymbol{A}$流出闭合曲面$S$的通量）等于矢量$\boldsymbol{A}$的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 的体积分，积分域V为S包围的体积。

拉普拉斯算符∇²

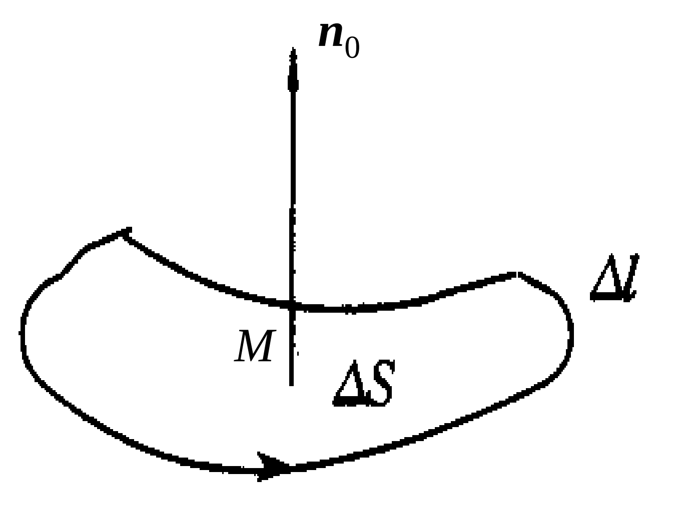
如果要求梯度的散度，就要进行“∇·∇”的运算，∇·∇记作∇²，称为拉普拉斯符，在直角坐标系下，按算符∇的定义

$$\nabla\cdot\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

所以量场$\varPhi$梯度的散度为

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\varPhi\right)&=\nabla\cdot\nabla\varPhi\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial\varPhi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial\varPhi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\\&=\frac{\partial^2\varPhi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varPhi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varPhi}{\partial z^2}\\&=\nabla^2\varPhi\end{aligned}$$

矢量场*A*沿有向闭合曲线*l*的环量



环量面密度

矢量场*A*在有向闭合曲线上的线积分

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

定义为矢量场*A*沿有向闭合曲线*l* 的环量

环量是标量。

矢量场*A*中任一点*M*，在*M*点任取一个方向*n*，过*M*点作一微小曲面Δ*S*，其法线方向与*n*一致。ΔS的周界为Δ*l*。*n*和Δ*l*构成右手螺旋关系，计算积分，$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ ，

这就是*n*方向环量。因为*n*可任取，故从*M*点可计算出无限多个环量。这些无限多环量描述场在*M*点的涡旋性质。

在直角坐标系中

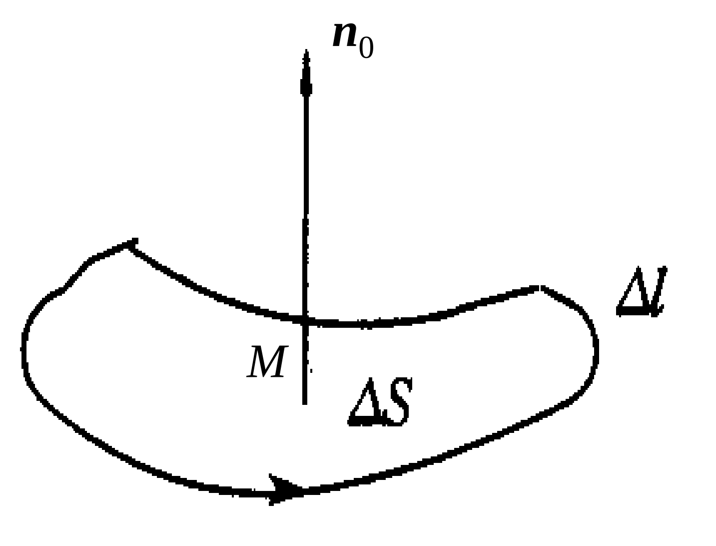
$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint \left(A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0\right) \cdot \left(\mathrm{d}x\boldsymbol{x}_0 + \mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0 + \mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0\right)$$

$$= \oint_l \left(A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z\right)$$

环量面密度

若矢量场$\boldsymbol{A}$沿正Δl方向的环量$\Delta\Gamma$与面积ΔS在M点处保持以$\boldsymbol{n}$为法线方向条件下，以任意方式缩向M点时，其极限

$$\lim_{\substack{\Delta S\to M\\(\text{或}\Delta S\to 0)}}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\lim_{\substack{\Delta S\to M\\(\text{或}\Delta S\to 0)}}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$



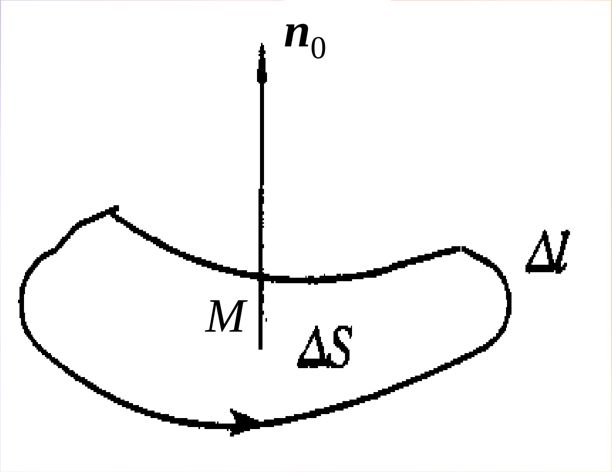
环量面密度

存在，则称它为矢量场$\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{M}$处沿方向$\boldsymbol{n}$的环量面密度。
从环量面密度的定义可知，它是一个与方向有关的量。
空间给定点有无数个方向，每一个方向对应一个环量面密度。

旋度Curl $\boldsymbol{A}$的定义

矢量场$\boldsymbol{A}$的旋度Curl $\boldsymbol{A}$定义为

$$\left(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{n}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{dl}}{\Delta S}$$



环量面密度

这就是说，矢量场$\boldsymbol{A}$的旋度Curl $\boldsymbol{A}$在空间某一点给定方向的投影就是该方向的环量面密度。

这跟标量场中梯度和方向导数之间的关系类似，梯度在某一方向投影就是该方向的方向导数。

当$\boldsymbol{n}$ 的方向与Curl $\boldsymbol{A}$的方向一致时，得到最大的环量面密度。

旋度Curl $\boldsymbol{A}$是一个矢量，其大小为最大环量面密度，方向为最大环量面密度时面积元法线$\boldsymbol{n}$的方向。

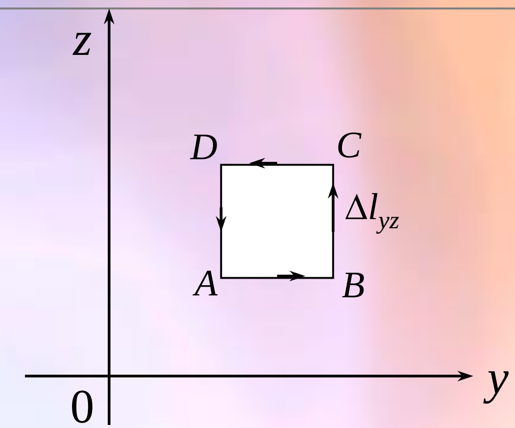
龙卷风

旋度Curl $\boldsymbol{A}$的计算

Curl $\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{x}$方向投影（或矢量场$\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{x}$方向的环量面密度）为

$$(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{x}_0=\lim_{\Delta S_x\to 0}\frac{\oint_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}}{\Delta S_x}$$

$$\boldsymbol{A}_{yz}=A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}=\mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0+\mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0$$



矢量场旋度在一个面积元上的计算

$$\int_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}$$

$$=\int_{\overline{ABCD}}\left[A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{AB}}\mathrm{d}y+A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{BC}}\mathrm{d}z+\left(-A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{CD}}\mathrm{d}y\right)+\left(-A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{DA}}\mathrm{d}z\right)\right]$$

$$=\underbrace{\left(A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{AB}}\right)}_{\Uparrow\ \text{矩形}ABCD\text{无穷小}}\Delta y-\left(A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{CD}}\right)\Delta y+\left(A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{BC}}\right)\Delta z-\left(A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{DA}}\right)\Delta z$$

$$(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{x}_0=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\int_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}}{\Delta S_x}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left(\frac{\left(A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{AB}}\right)\Delta y-\left(A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{CD}}\right)\Delta y+\left(A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{BC}}\right)\Delta z-\left(A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{DA}}\right)\Delta z}{\Delta y\Delta z}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left(\frac{A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{BC}}-A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{DA}}}{\Delta y}-\frac{A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{CD}}-A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{AB}}}{\Delta z}\right)=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

旋度Curl **A**的计算

$$\left(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A}\right)\cdot \boldsymbol{x_0} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\int_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}}{\Delta S_x} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

同理，**A**的旋度在y方向投影为

$$\left(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A}\right)\cdot \boldsymbol{y_0} = \lim_{\Delta S_y\to 0}\frac{\int_{\Delta l_{xz}}\boldsymbol{A}_{xz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{xz}}{\Delta S_y} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

A的旋度在z方向投影为

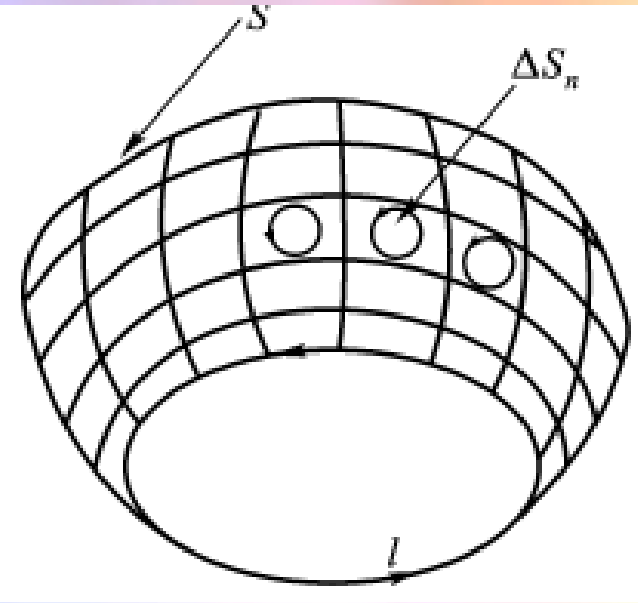
$$\left(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A}\right)\cdot \boldsymbol{z_0} = \lim_{\Delta S_z\to 0}\frac{\int_{\Delta C_{xy}}\boldsymbol{A}_{xy}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{xy}}{\Delta S_z} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

由（Curl**A**）矢量在x、y、z方向的三个分量，故Curl**A**可表示为

$$\mathrm{Curl}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{x}_0 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{y}_0 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{z}_0 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

斯托克斯定理

对于有限面积S，如果将S分成无限多小矩形面积元S_n之和；当ΔS_n足够小时，根据旋度定义，可得



$$\sum_n (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\Delta S_n = \sum_n \oint_{\Delta l_n} \boldsymbol{A}_n\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_n$$

左边即（$\nabla\times\boldsymbol{A}$）穿过面积$S$总的通量

$$\sum_n (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\Delta S_n = \int (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

而右边n个线积分，除了包围面积S的周边C以外，所有相邻面积元交界线的线积分都抵消，故有

$$\sum_n \oint_{\Delta l_n} \boldsymbol{A}_n\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_n = \oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

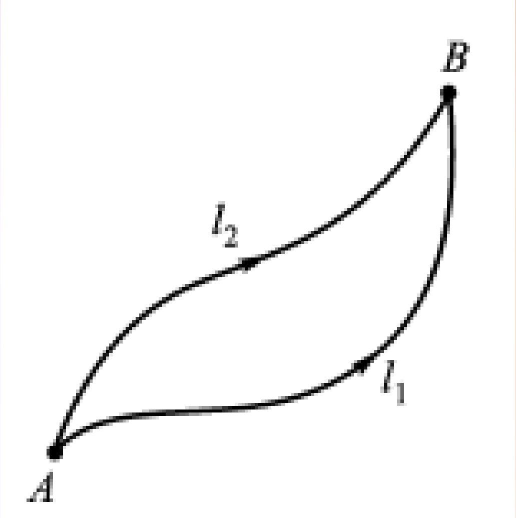
由此得到

$$\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

这就是著名的斯托克斯定理，它表示矢量$\boldsymbol{A}$沿闭曲线C的线积分（或环量）等于$\boldsymbol{A}$的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 穿过曲线C包围的面积S的面积分。

矢量场的分类

若矢量场$\boldsymbol{A}_1$的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}_1=0$, 称其为无旋场。
无旋场可以表示为一个标量场Φ的负梯度



$$\boldsymbol{A}_1=-\nabla\Phi$$

称Φ为$\boldsymbol{A}_1$的势函数，并称能有上式表示的矢量场为有势场。无旋场也是有势场。
利用斯托克斯定理可以得出

$$\oint_l \boldsymbol{A}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

满足上式的矢量场称为保守场，无旋场也是保守场。保守场中场量的线积分与路径无关，即

$$\int_{l_1}\boldsymbol{A}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1=\int_{l_2}\boldsymbol{A}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$$

若$\boldsymbol{A}_2$的散度恒为零，则称此矢量场为管形场，也称为无源场（此处是指散度源）。无源场总能表示为另一个矢量场的旋度，即

$$\boldsymbol{A}_2=\nabla\times\boldsymbol{F}$$

若在给定区域，矢量场的散度、旋度恒为零，则称此矢量场为调和场。
调和场是指既无旋又无源的矢量场。

亥姆霍兹定理

一个矢量场的性质由激发场的源来确定。

源有两个，一个是散度源（也称为通量源），另一个叫旋度源（也称为涡旋源）。

那么反过来，若已知一个矢量场的散度和旋度，能否唯一确定该矢量场？答案是肯定的，这就是亥姆霍兹定理。

亥姆霍兹定理：如果在体 $\boldsymbol{V}$ 内矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度和旋度已知，在 $\boldsymbol{V}$ 的边界 $\boldsymbol{S}$ 上 $\boldsymbol{A}$ 的值也已知，则在 $\boldsymbol{V}$ 内任意一点 $\boldsymbol{A}$ 的值能唯一确定。

这一定理的证明略去。据此定理，可以将任一矢量场 $\boldsymbol{A}$ 分解为一个无旋场与一个无源场之和，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是无旋场，$\boldsymbol{A}_2$ 是无源（散度源）场。

矢量运算的几个恒等关系

根据以上关于梯度、散度、旋度及拉普拉斯算符∇^2的定义，可得以下矢量运算的恒等关系:

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

$$\nabla\times(\nabla\Phi)=0$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$\nabla\cdot(\varPhi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\varPhi+\varPhi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\times(\varPhi\boldsymbol{A})=\nabla\varPhi\times\boldsymbol{A}+\varPhi\nabla\times\boldsymbol{A}$$

主教材【例1-10】

在直角坐标系下证明

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

解：等式左边按矢量运算规则可写为

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla\times[\boldsymbol{x}_0(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})+\boldsymbol{y}_0(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})+\boldsymbol{z}_0(\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial y})]$$

$$=\boldsymbol{x}_0\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)-\boldsymbol{y}_0\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}\right)+$$

$$\boldsymbol{z}_0\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}\right)$$

$$=\boldsymbol{x}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2 A_x\right)+\boldsymbol{y}_0\left(\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2 A_y\right)+\boldsymbol{z}_0\left(\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2 A_z\right)$$

$$=\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

从恒等关系可知，旋度的散度等于零，而梯度的旋度等于零。对矢量场的讨论就用到这些性质。

主教材【例1-11】

设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 + z\boldsymbol{z}_0 \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

证明（1）$\nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ （2）$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$ （3）$\nabla \cdot \nabla r = \nabla^2 r = \frac{2}{r}$

（4）$\nabla \times \boldsymbol{r} = 0$ （5）$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ （6）$\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = \nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$

解：因为 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 + z\boldsymbol{z}_0 \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

所以

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad \nabla \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{r} = \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{r}}{r} + \boldsymbol{r} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{3}{r} - \boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

主教材【例1-11】

设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 + z\boldsymbol{z}_0 \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

证明 (5) $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ (6) $\nabla \cdot \nabla \dfrac{1}{r} = \nabla^2 \dfrac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$

解：$\nabla \dfrac{1}{r} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\dfrac{1}{r})\nabla r = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = \nabla \cdot (-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) = -[\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} + \boldsymbol{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3}]$$

$$= -[\frac{3}{r^3} + \boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\frac{1}{r^3})\nabla r] = -[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3}] = 0$$ 由于 $r \neq 0$

$$V = \int_V \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r}\mathrm{d}V = \int_S \nabla \frac{1}{r} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = -\int_s \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}S}{r^2} = -\int \mathrm{d}\Omega = -4\pi$$

因为 $-4\pi\int_V \delta(\boldsymbol{r})dV = -4\pi$ ，所以 $\nabla^2 \dfrac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

第4讲复习

复习要点

- 算符∇既是矢量，又有微分运算功能。∇作用于一标量场$\varPhi$可得到一矢量场$\nabla\varPhi$。∇作用于一矢量场$\boldsymbol{A}$，如进行点积运算得到一标量场$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，如果进行一矢积运算可得到一矢量$\nabla\times\boldsymbol{A}$。
- 标量场$\varPhi$的梯度grad$\varPhi$是一矢量，其模为最大方向导数，方向为场最大变化率方向

$$\mathrm{grad}\varPhi=\nabla\varPhi$$

- 矢量场$\boldsymbol{A}$的散度div$\boldsymbol{A}$反映矢量场的通量体密度，是一标量。div$\boldsymbol{A}$=$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，矢量场$\boldsymbol{A}$的旋度Curl$\boldsymbol{A}$反映矢量场的环量面密度，是一矢量，其模等于最大环量面密度，最大环量面密度时，曲面法线方向即旋度方向。Curl$\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}$。
- 矢量运算恒等关系要记牢。

复习范围

1.5

帮助理解的多媒体演示：MMS1