电磁场与电磁波

第16讲

1. 介质交界面对TM波的反射、透射
2. 临界角与布儒斯特角
3. 吸收交界面

场量匹配法求介质交界面对TM波的反射与折射

入射波场： $H_y^{\mathrm{i}} = a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z}$

从 $\nabla\times\boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$ 得到

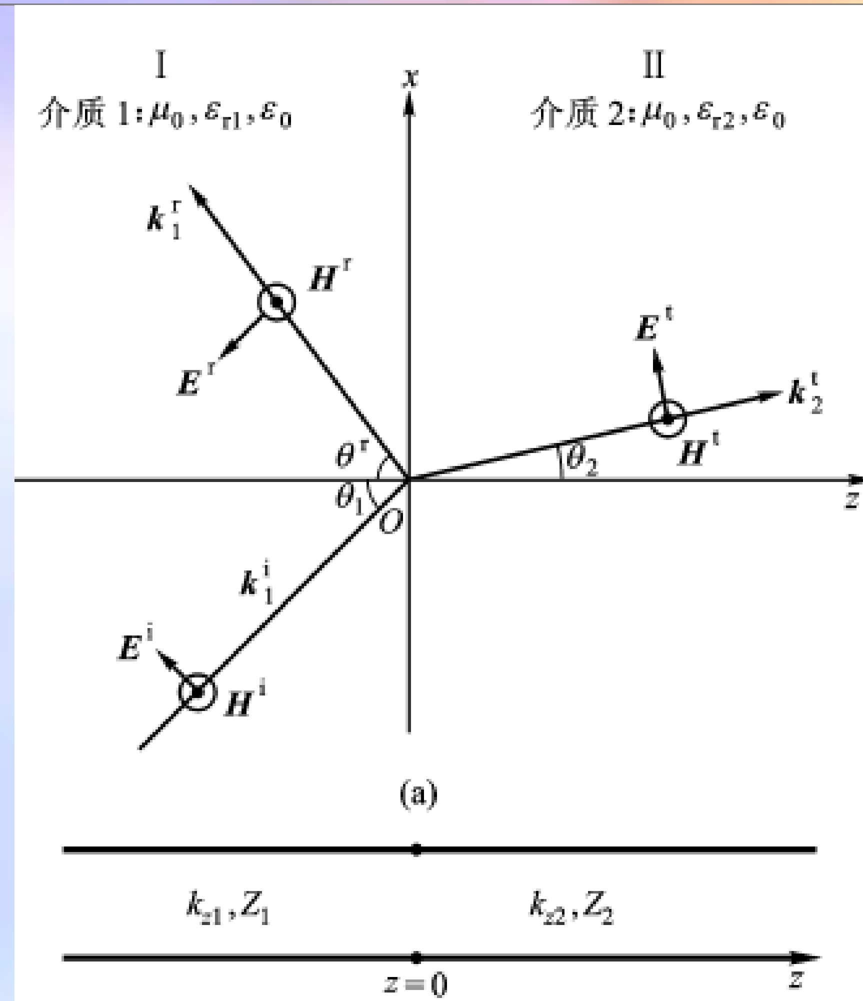
$$E_x^{\mathrm{i}} = \frac{k_z^{\mathrm{i}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\varepsilon_0} a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z}$$

$$E_z^{\mathrm{i}} = -\frac{k_x^{\mathrm{i}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\varepsilon_0} a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z}$$

同样写出反射波场 $H_y^{\mathrm{r}} = b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x+\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z}$

$$E_x^{\mathrm{r}} = -\frac{k_z^{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\varepsilon_0} b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z}$$

$$E_z^{\mathrm{r}} = -\frac{k_x^{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\varepsilon_0} b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z}$$



同样写出折射波场 $H_y^{\mathrm{t}} = b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z}$

$$E_x^{\mathrm{t}} = \frac{k_z^{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_2}\varepsilon_0} c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z} \qquad E_z^{\mathrm{t}} = -\frac{k_x^{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_2}\varepsilon_0} c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z}$$

场量匹配法求介质交界面对TM波的反射与折射

边界条件关系式

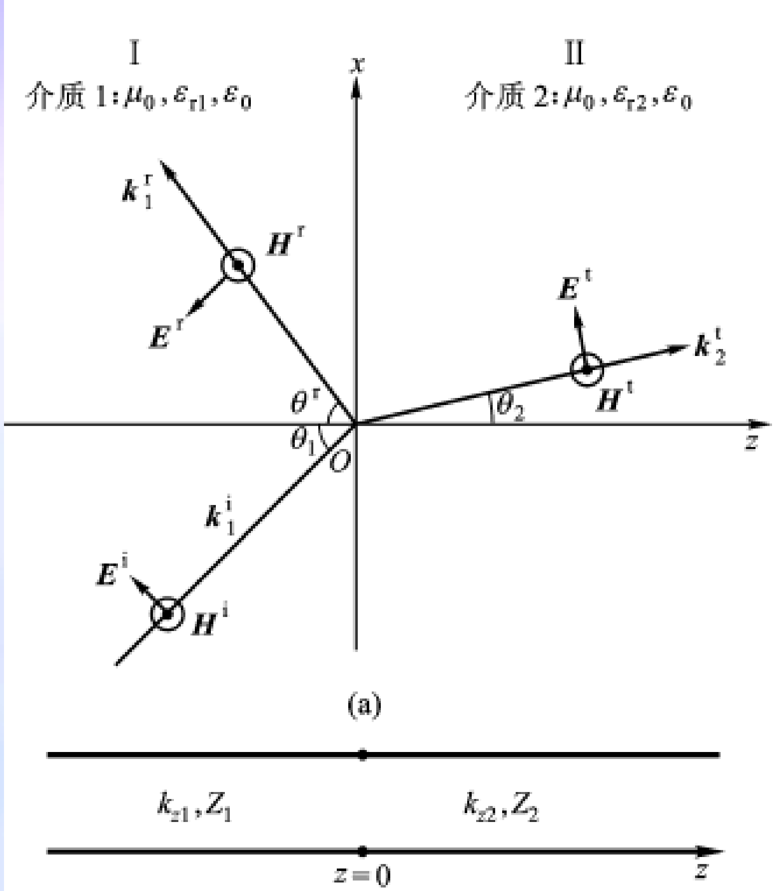
$$H_y^{\mathrm{i}}(x,0)+H_y^{\mathrm{r}}(x,0)=H_y^{\mathrm{t}}(x,0)$$

$$E_x^{\mathrm{i}}(x,0)+E_x^{\mathrm{r}}(x,0)=E_x^{\mathrm{t}}(x,0)$$

可以得到与TE波类似的关系式

$$a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}+b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}=c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}$$

$$\frac{k_z^{\mathrm{i}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\varepsilon_0}a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}-\frac{k_z^{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\varepsilon_0}b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}=\frac{k_z^{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_2}\varepsilon_0}c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}$$



(a)

由此得到： $k_x^{\mathrm{i}}=k_x^{\mathrm{r}}=k_x^{\mathrm{t}}=k_x=k_1\sin\theta_1$

$$k_z^{\mathrm{i}}=k_z^{\mathrm{r}}=k_{z_1}=k_1\cos\theta_1$$

$$k_z^{\mathrm{t}}=k_{z_2}=\sqrt{k_2^2-k_x^{\mathrm{t}2}}=k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}_2}-\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\sin^2\theta_1}$$

由介质1的色散关系也可得出入射角与反射角相等的结论，折射角θ_2与入射角θ_1也满足斯耐尔定律。

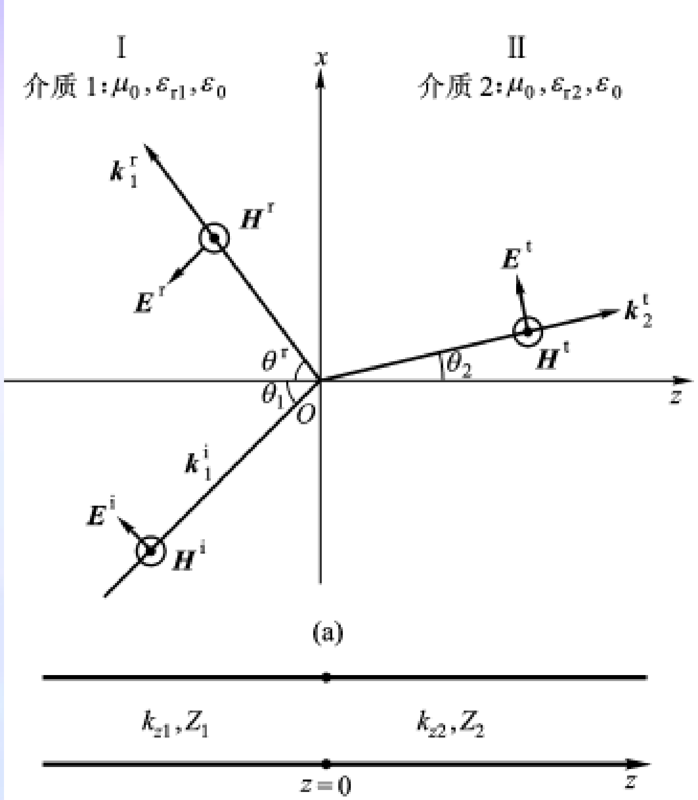
场量匹配法求介质交界面对TM波的反射与折射

$$ae^{-jk_x^{i}x}+be^{-jk_x^{r}x}=ce^{-jk_x^{t}x}$$

$$\frac{k_z^{i}}{\omega\varepsilon_{r_1}\varepsilon_0}ae^{-jk_x^{i}x}-\frac{k_z^{r}}{\omega\varepsilon_{r_1}\varepsilon_0}be^{-jk_x^{r}x}=\frac{k_z^{t}}{\omega\varepsilon_{r_2}\varepsilon_0}ce^{-jk_x^{t}x}$$

边界面z=0，得到

$$\begin{cases} a+b=c \\ Z_1(a-b)=Z_2c \end{cases} \qquad Z_i=\frac{k_{z_i}}{\omega\varepsilon_{r_i}\varepsilon_0}$$



反射系数 $\Gamma(z=0)$ 与透射系数 $T(z=0)$

$$\Gamma(z=0)=\frac{E_x^{r}}{E_x^{i}}=-\frac{b}{a}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}=\frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2}=\frac{\varepsilon_{r_1}k_{z_2}-\varepsilon_{r_2}k_{z_1}}{\varepsilon_{r_1}k_{z_2}+\varepsilon_{r_2}k_{z_1}}$$

$$T(z=0)=\frac{H_y^{t}}{H_y^{i}}=\frac{c}{a}=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}=1-\Gamma(z=0)=\frac{2\varepsilon_{r_2}k_{z_1}}{\varepsilon_{r_1}k_{z_2}+\varepsilon_{r_2}k_{z_1}}$$

传输线模型求介质交界面对TM波的反射与折射

区域I与II z方向波的传播用传输线等效

交界面(z=0)切向场连续可导出

$$U_1\left(z=0^-\right)=U_2\left(z=0^+\right),\ \ I_1\left(z=0^-\right)=I_2\left(z=0^+\right)$$

传输线1与2可以直接连起来，故

$$\boldsymbol{\Gamma}\left(z=0\right)=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}$$

电流

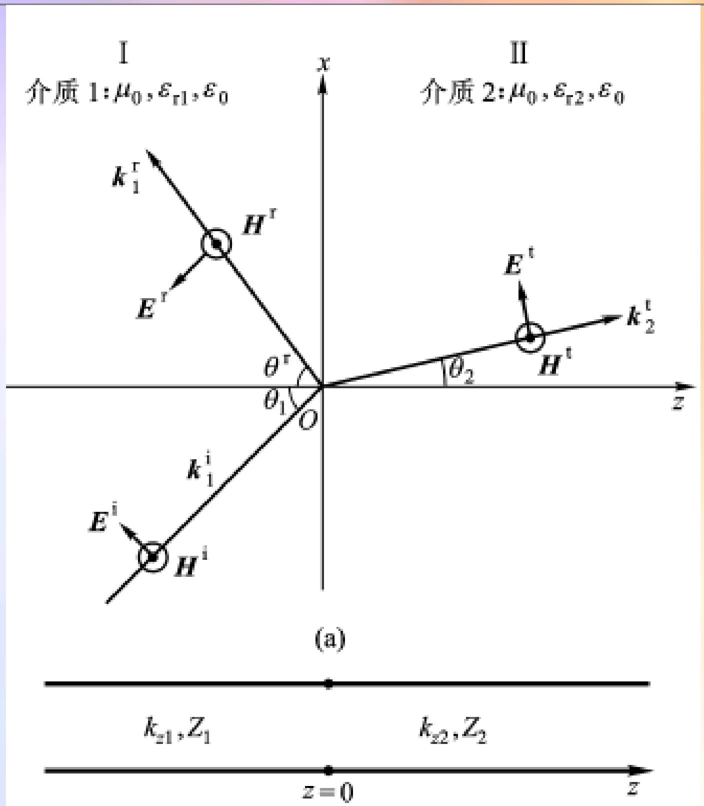
$$I_1\left(z\right)=I_1^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}+I_1^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z z}=\left(1-\boldsymbol{\Gamma}_1\left(z\right)\right)I_1^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z_1} z}$$

$$I_2\left(z\right)=I_2^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$$

由z=0处 $I_1\left(z=0\right)=I_2\left(z=0\right)$ 得到

$$I_1^{\mathrm{i}}\left(1-\boldsymbol{\Gamma}\left(z=0\right)\right)=I_2^{\mathrm{i}}$$

$$T\left(z=0\right)=\frac{H_y^{\mathrm{t}}}{H_y^{\mathrm{i}}}=\frac{I_2^{\mathrm{i}}}{I_1^{\mathrm{i}}}=1-\boldsymbol{\Gamma}\left(z=0\right)$$



$$\begin{cases}\kappa_1=k_{z_1}\\ Z_1=\dfrac{k_{z_1}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_1}\varepsilon_0}\end{cases}\qquad \begin{cases}\kappa_2=k_{z_2}\\ Z_2=\dfrac{k_{z_2}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}_2}\varepsilon_0}\end{cases}$$

欧几里得与【几何原本】

欧几里得（Euclid）的逻辑推理在人类科学史上第一个伟大的创举。他采用少数定义和公理把整个平面几何领域推演的天衣无缝。之后的牛顿力学，甚至相对论，其思想都来源于欧几里得。

欧几里得，公元前300年，来到亚历山大城，创办的数学学校，撰写了【几何原本】，留下了13卷羊皮文稿。

中国的徐光启翻译了【几何原本】。当时牛顿尚未出生，可惜我们国家没有出现现代科学革命。为什么？

传统的仕途文化的影响？朱熹礼教思想的影响？还是其它原因？　可悲！可叹！

几次科学革命中数学和物理的关系

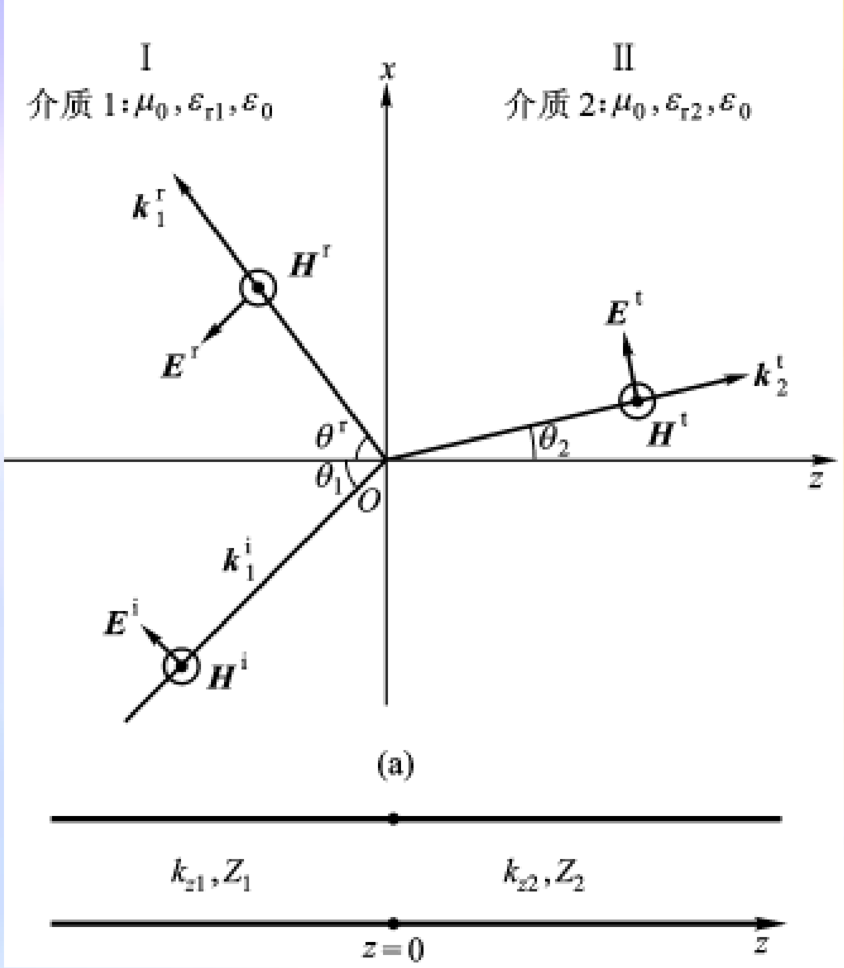
欧几里得几何 微积分	牛顿经典力学、热力学、光学及电磁学
非欧几何（闵可夫斯基几何学和黎曼几何）	狭义相对论 广义相对论
希尔伯特空间 泛函分析	量子力学
纤维丛理论 （微分几何）	**Yang-Millers规范场论**

介质交界面对波传播的影响

介质交界面对平面波的反射、折射的传输线模型可以这样理解：

在特定坐标系下，以波矢为特征的平面波倾斜投射到介质交界面时，在区域I与II，y方向没有波的传播，x方向有 $e^{-jk_x x}$ 的行波传播；

在z方向，与z垂直的横向电场、磁场沿z 轴的传播与级联传输线上电压、电流波的传播等效。



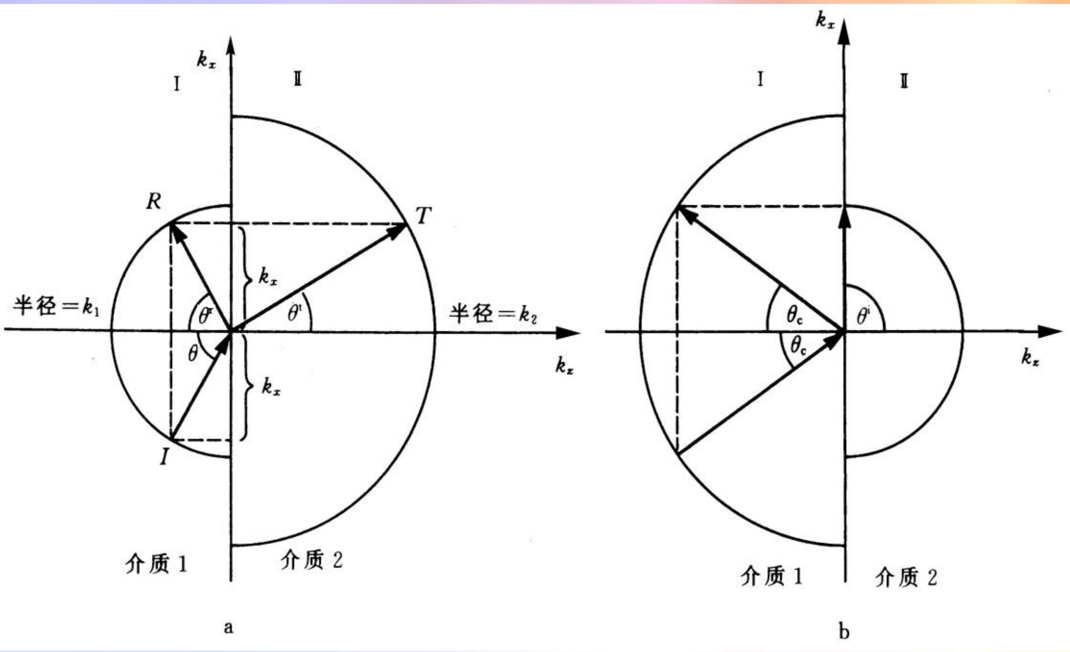
（a）介质交界面对TM波（平行极化波）的反射、折射（b）传输线类比

当n_1大于n_2、入射角大于临界角θ_c时介质2中没有波的传播

$n_1 < n_2$ ： 反射、透射都发生

$n_1 > n_2$ 当 $\theta > \theta_c$

$$\theta_c = arc\sin(\frac{k_2}{k_1}) = arc\sin(\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}})$$



k_x比k_2还要大，此时

$$k_{z2}^2 = k_2^2 - k_x^2 < 0$$

$$k_{z2} = \pm j\alpha \qquad \alpha = \sqrt{k_x^2 - k_2^2}$$

折射波 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{y}_0 Ta\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}$

$\boldsymbol{E}^{\mathrm{t}}$的瞬态表达式 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{y}_0 Ta\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - k_x x)$

波沿x方向传播，但$\boldsymbol{E}^{\mathrm{t}}$的大小沿z作指数衰减（$\mathrm{e}^{-\alpha z}$）。
即介质2中没有波的传播，但沿界面有波的传播。

当n_1大于n_2、入射角大于临界角θ_c时介质交界面发生全反射

临界角 $\theta_c = \arcsin(\frac{k_2}{k_1}) = \arcsin(\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}})$ 当$\theta_1 > \theta_c$ 时，k_{z2} 为

$$k_{z2} = k_0\sqrt{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}\sin^2\theta_1} = \mathrm{j}k_0\sqrt{\varepsilon_{r1}\sin^2\theta_1 - \varepsilon_{r2}^2} = \mathrm{j}\alpha_2 \qquad \alpha_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_{r1}\sin^2\theta_1 - \varepsilon_{r2}^2}$$

此时特征导纳Y_2为

$$Y_{2TE} = \frac{k_{z2}}{\omega\mu} = \frac{\mathrm{j}\alpha_2}{\omega\mu} \qquad Y_{2TM} = -j\frac{\omega\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}{\alpha_2}$$

此时交界面的反射系数Γ

$$\Gamma_{TE} = \frac{\cos\theta_1 - \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi_{TE}} \qquad \Gamma_{TM} = \frac{-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi_{TM}}$$

$$\varphi_{TE} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\cos\theta_1}\right) \qquad \varphi_{TM} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1}\right)$$

表示介质交界面发生全反射。

介质—介质交界面与介质—导体交界面对波的反射的区别

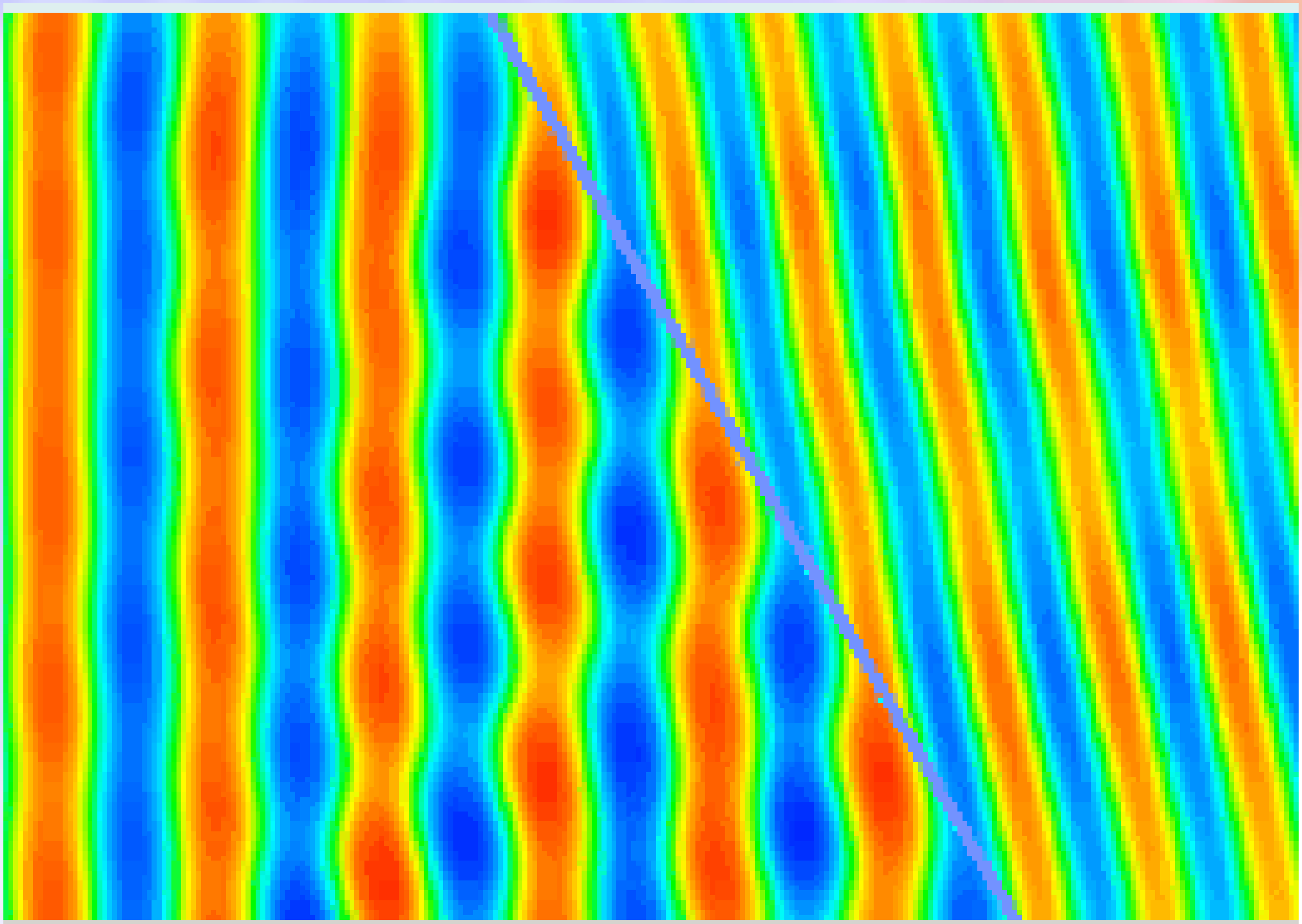
从上面分析可知，介质—介质交界面对波的反射与介质—导体交界面对波的反射是不一样的。

对于介质—导体交界面，不管入射波是TE模还是TM模，不管入射角是大是小，都是全反射，对于切向电场入射波与反射波还有180°相移。

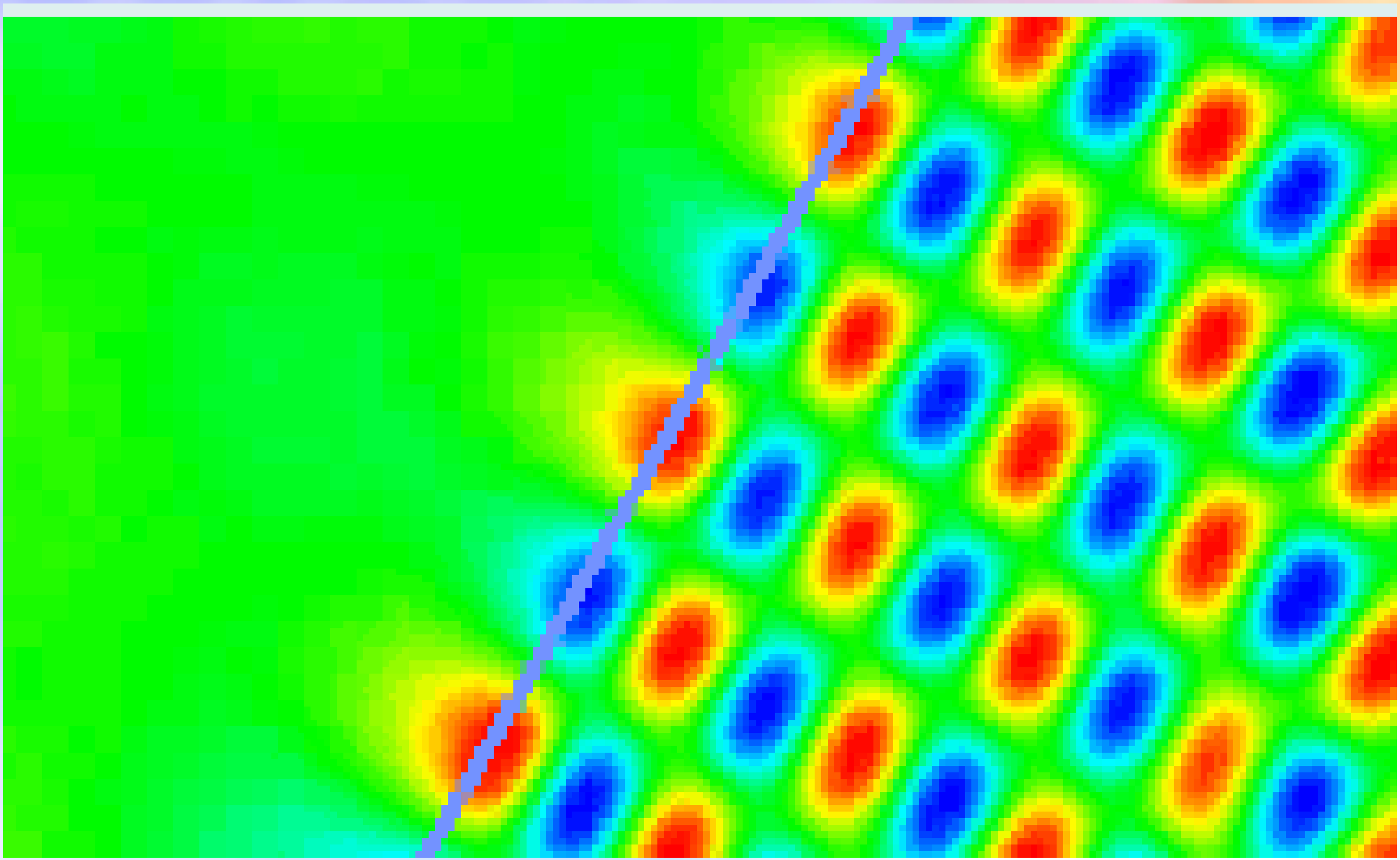
对于介质—介质交界面，反射系数不仅与入射波型（TE模或TM模）有关还与入射角大小有关。只有从密媒质到疏媒质（即从ε大的介质到ε小的介质）且入射角θ大于临界角θ_c时才发生全反射。$\theta > \theta_c$时入射波与反射波相移不是π，而是

$$\varphi_{TE} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\cos\theta_1}\right) \qquad \varphi_{TM} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_1}\right)$$

介质交界面，入射角小于临界角



介质交界面，入射角大于临界角



布儒斯特（Brewster）角

当入射波为TM波时，存在一个特定入射角θ_b，当$\theta=\theta_b$时，反射系数$\Gamma_{TM}=0$。

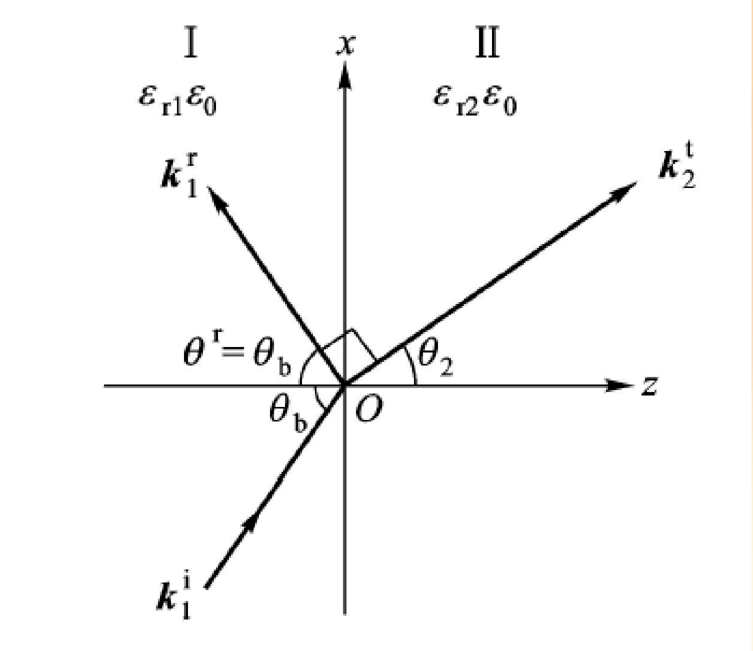
就要求 $$\Gamma(z=0)=\frac{\varepsilon_{r_1}k_{z_2}-\varepsilon_{r_2}k_{z_1}}{\varepsilon_{r_1}k_{z_2}+\varepsilon_{r_2}k_{z_1}}=0$$

当然也要满足斯奈尔定律，

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\cos\theta_b=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\cos\theta_2$$

解上述两个方程，得到

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\sin\theta_b=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\sin\theta_2$$



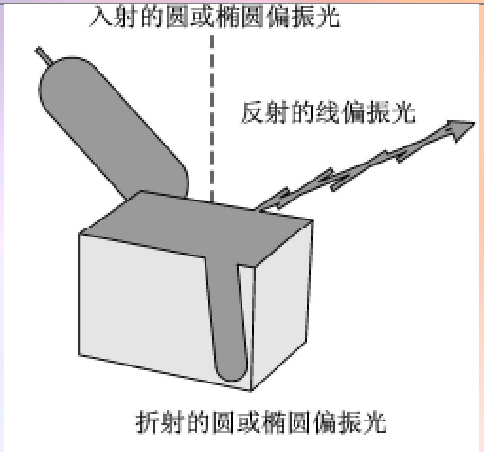
入射角等于布儒斯特角时平行极化平面波的反射和折射

式中使$\Gamma=0$的这一特定入射角θ_b，称为布儒斯特角。

$$\theta_2+\theta_b=\pi/2 \qquad \theta_b=\arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)$$

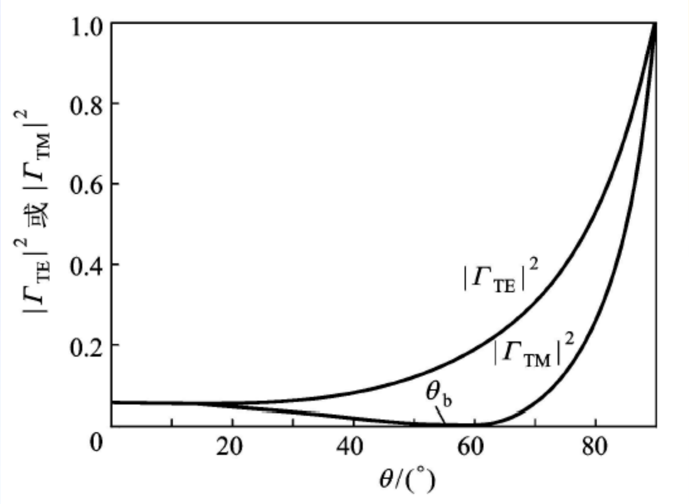
非极化光从介质表面的反射

如果非极化光以布儒斯特角θ_b投射到介质交界面，那么非极化光中TM模成分全部折射到介质2，而TE模成分部分折射到介质2，部分反射回介质1。
所以反射光中只有TE极化波。



利用布儒斯特现象从非极化光得到极化光输出

非极化光从空气投射到介质界面，假定介质界面是水平的，相对介电常数为2.25，我们想要知道其反射波的组成。可以设想入射波可分解为等量的两个极化波，一个水平极化，一个垂直极化。$|\Gamma_{TE}|^2$、$|\Gamma_{TM}|^2$比例于相应极化波的反射功率。由图可见$|\Gamma_{TE}|^2$比$|\Gamma_{TM}|^2$来得大。所以反射光中水平方向极化的波比其他方向极化的波占有较大的份额。



反射功率与入射角关系
$\varepsilon=2.25\varepsilon_0$,布儒斯特角$\theta_b=56°$

吸收介质交界面—等幅面与等相位面分离

区域II $\varepsilon_2 = \varepsilon'_2 - \mathrm{j}\varepsilon''_2$

$$k_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_{r2}} = k_{r2} - \mathrm{j}k_{i2}$$

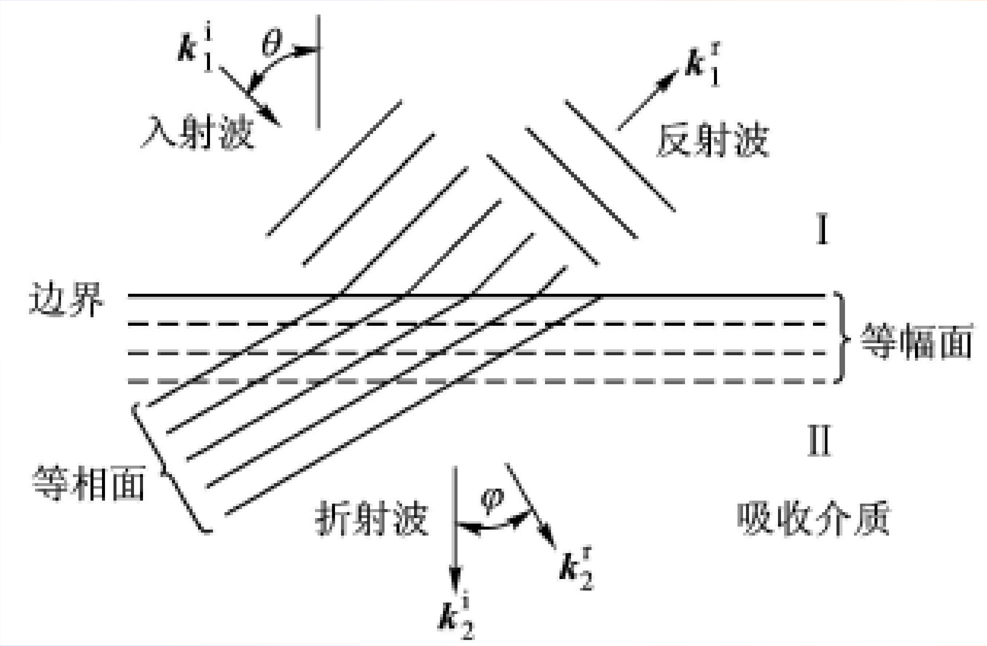
相位匹配

$$\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_{r2} \cdot \boldsymbol{r} - \mathrm{j}\boldsymbol{k}_{i2} \cdot \boldsymbol{r}$$

由此得到

$$\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_{r2} \cdot \boldsymbol{r}$$

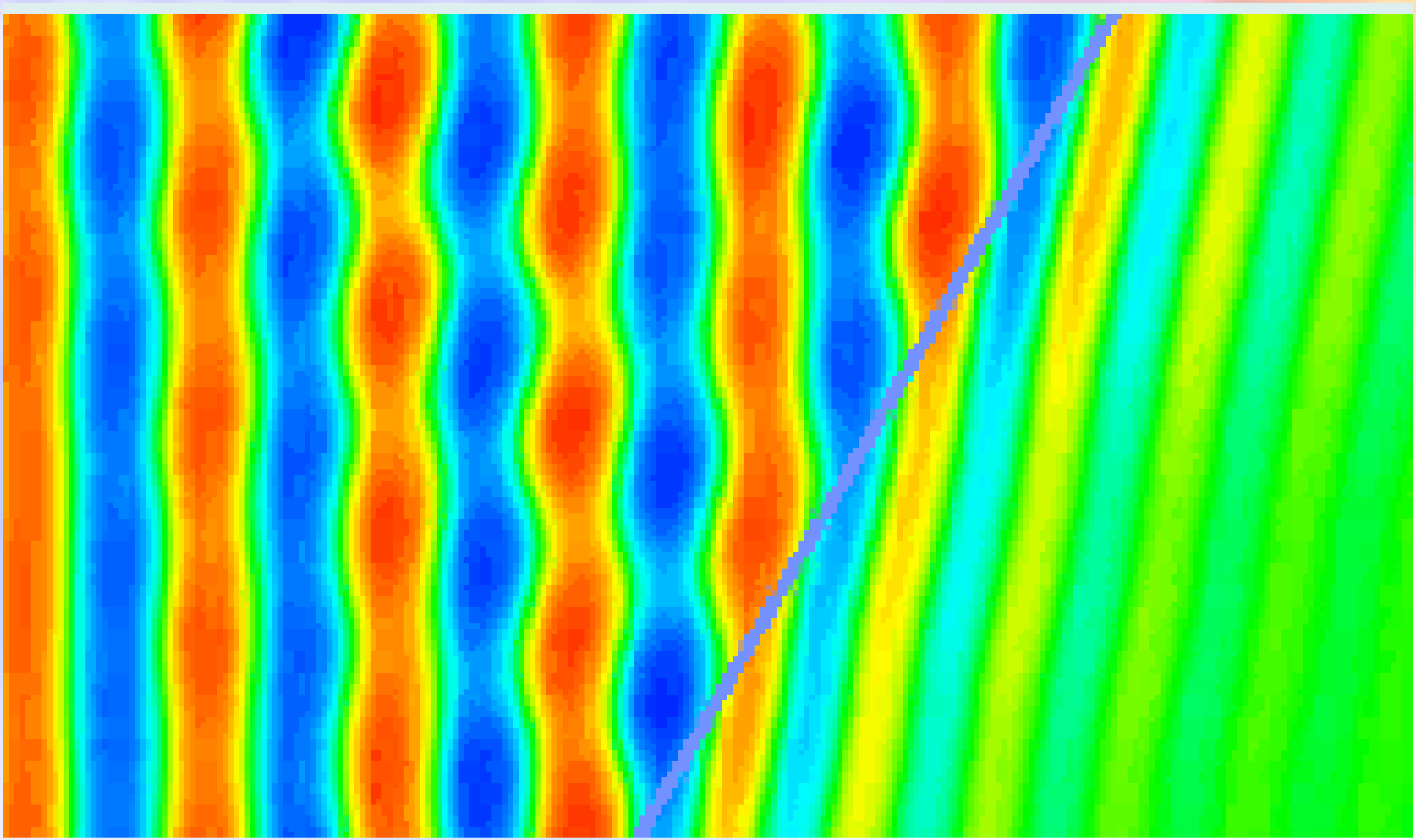
$$\boldsymbol{k}_{i2} \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$$



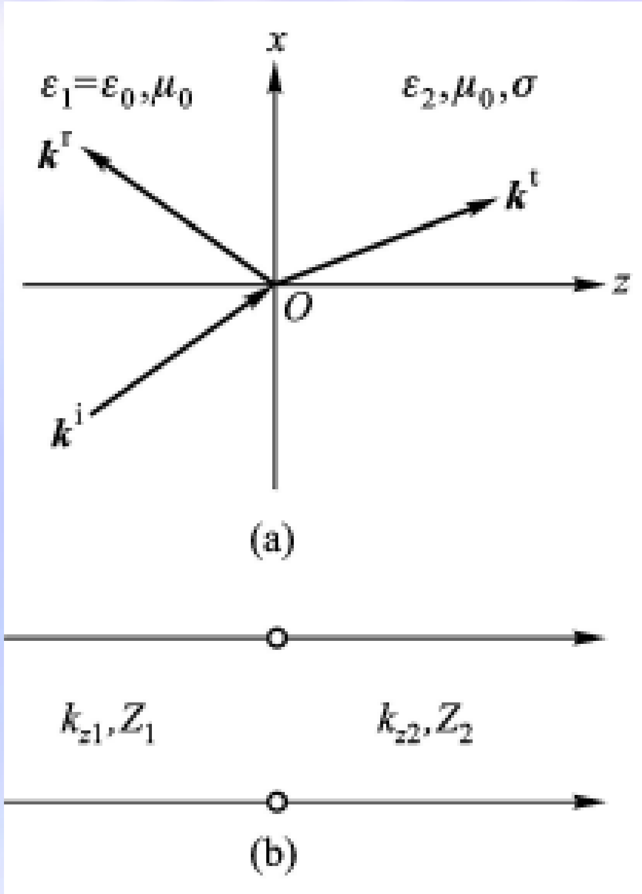
确定等相位面$\boldsymbol{k}_{r2}$的方向是任意的，取决于$\boldsymbol{k}_{r1}$的方向，确定等幅的方向$\boldsymbol{k}_{i2}$与边界面正交。

等幅面与等相位面不一致，是非均匀平面波。

介质1无损耗，介质2有损耗



吸收交界面的传输线模型



$$k_{z1}=k_1\cos\theta=k_0\cos\theta$$

$$Z_1=\frac{1}{Y_1}=\begin{cases}\omega\mu/k_{z1}\\ k_{z1}/\omega\varepsilon_0\end{cases}$$

$$k_2=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_{r2}}\qquad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{r2}=\varepsilon_{r2}-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0},$$

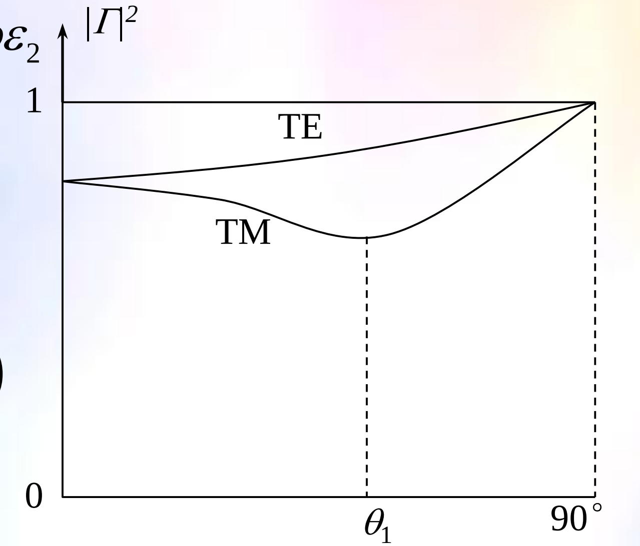
$$k_{z2}=\sqrt{k_2^2-(k_0\sin\theta)^2}=k_0\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{r2}-\sin^2\theta}$$

$$Z_2=\frac{1}{Y_2}=\begin{cases}\omega\mu/k_{z2}\\ k_{z2}/\omega\varepsilon_2\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}$$

$$T=1+\boldsymbol{\Gamma}\qquad (\mathrm{TE})$$

$$=1-\boldsymbol{\Gamma}\qquad (\mathrm{TM})$$



一种典型金属的反射系数模的平方$|\Gamma|^2$
与入射角的关系（在光频范围）

第16讲复习

复习要点

- 介质交界面对TM波的反射、透射分析也可用场匹配与传输线模型两种方法分析。
- 介质交界面对平面波的反射，如$\varepsilon_1<\varepsilon_2$，不管什么入射角$\theta$，不会全反射，总有一部分能量透射到介质2，如 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$，当$\theta>\theta_c$，发生全反射，且相移与入射角有关。对于TM模，当$\theta=\theta_b$（布儒斯特角）入射波可无反射 全部透射到介质2。
- 介质II为吸收介质时，介质II中透射波等幅面与等相位面不再重合，称为非均匀平面波。

复习范围

5.2.2，5.43

帮助理解的多媒体演示：MMS13