3. 设 $X(t)=At+(1-|A|)B$, $t\geqslant 0$, 这里 A 和 B 独立同分布,

$$P(A=0)=P(A=1)=P(A=-1)=\frac{1}{3}.$$

(1) 写出 $\{X(t)\}$ 的所有样本函数;

(2) 计算 $P(X(1)=1)$, $P(X(2)=1)$ 和 $P(X(1)=1, X(2)=1)$.

(1) $X(t)=0$ $\quad X(t)=t$ $\quad X(t)=-t$

$X(t)=1$ $\quad X(t)=-1$

(2) $X(1)=1 \Leftrightarrow A+(1-|A|)B=1 \Leftrightarrow A=1$ 或 $A=0, B=1$

A, B 独立同分布

$\Rightarrow P(X(1)=1)=P(A=1)+P(A=0, B=1)=\frac{4}{9}$

$X(2)=1 \Leftrightarrow 2A+(1-|A|)B=1 \Leftrightarrow A=0. B=1$

A, B 独立同分布

$\Rightarrow P(X(2)=1)=P(A=0. B=1)=\frac{1}{9}$

$P(X(1)=1, X(2)=1)=P(A=0, B=1)=\frac{1}{9}$

4. 设 $Z(t)=AXt+1-A$, $t\geqslant 0$, 这里 A 和 X 相互独立, $P(A=0)=P(A=1)=\frac{1}{2}$, $X\sim N(1,1)$.

(1) 计算 $P(Z(1)<1)$, $P(Z(2)<2)$, $P(Z(1)<1, Z(2)<2)$;

(2) 计算 $\mu_Z(t)$, $R_Z(s,t)$.

(1) $Z(1)<1 \Leftrightarrow AX+1-A<1 \Leftrightarrow A(X-1)<0 \Leftrightarrow A=1, X<1$

$\Rightarrow P(Z(1)<1)=P(A=1)\cdot P(X<1)=\frac{1}{4}$

$Z(2)<2 \Leftrightarrow 2AX+1-A<2 \Leftrightarrow A=0$ 或 $A=1, X<1$

$\Rightarrow P(Z(2)<2)=P(A=0)+P(A=1)P(X<1)=\frac{3}{4}$

$P(Z(1)<1, Z(2)<2)=P(A=1, X<1)=P(A=1)P(X<1)=\frac{1}{4}$

(2) $\mu_Z(t)=E(AX)t+1-E(A)=E(A)\cdot E(X)t+1-E(A)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

$R_Z(s,t)=E[Z(s)Z(t)]=P(A=0)+P(A=1)E(X^2st)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(E^2(X)+\sigma^2(X))st \quad =\frac{1}{2}+st$

9. 设 $X(t)=At+B, t\geqslant 0$, 这里 A 和 B 独立同分布, $E(A)=\mu$, $D(A)=\sigma^2>0$.
(1) 计算 $\mu_X(t)$, $R_X(s,t)$ 和 $C_X(s,t)$;
(2) 若 $A\sim N(0,1)$, 证明 $\{X(t)\}$ 是正态过程; 并求出 $X(t)$, $X(t)-X(s)$, $X(t)+X(s)$ 的分布.

(1) $\mu_X(t) = \mu(A)t+\mu(B) = \mu t+\mu$

$E(A^2) = E^2(A)+D(A) = \mu^2+\sigma^2 \qquad E(B^2) = E^2(B)+D(B) = \mu^2+\sigma^2$

$R_X(s,t) = E(A^2st+B^2+AB(s+t))$

$= E(A^2)st + E(B^2) + E(A)E(B)(s+t)$

$= (\mu^2+\sigma^2)st + \mu^2+\sigma^2 + \mu^2(s+t)$

$C_X(s,t) = R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t) = \sigma^2(st+1)$

(2) $X(t) = At+B$ 是正态分布的线性组合

$\Rightarrow X(t)$ 正态分布

$\Rightarrow \forall a_1, a_2 \cdots a_n \in R \quad \sum_{i=1}^{n} a_i X(t_i)$ 正态分布

$\Rightarrow \{X(t)$ 是正态过程$\}$

$X(t) \sim N(0, t^2+1)$

$E(X(t)-X(s)) = E(X(t))-E(X(s)) = 0$

$D(X(t)-X(s)) = D(X(t))+D(X(s)) - 2C_X(s,t)$

$= (t-s)^2$

$\Rightarrow X(t)-X(s) \sim N(0, (t-s)^2)$

$E(X(t)+X(s)) = E(X(t))+E(X(s)) = 0$

$D(X(t)+X(s)) = D(X(t))+D(X(s)) + 2C_X(s,t)$

$= (t+s)^2+4$

10. 设 $X_0, X_1, \cdots$ 独立同分布,

$$P(X_0=1)=p=1-P(X_0=0),\quad 0<p<1.$$

令 $Y_n=X_n+X_{n+1}+X_{n+2}$. 计算

(1) Y_n 的分布律;

(2) 在 $\{Y_0=2\}$ 条件下, Y_1 的条件分布律;

(3) $P(Y_0=1, Y_1=0, Y_2=1)$;

(4) $\{Y_n\}$ 的均值函数和自协方差函数.

(1) $P(Y_n=0)=(1-p)^3 \qquad P(Y_n=1)=3p(1-p)^2$

$P(Y_n=2)=3p^2(1-p) \qquad P(Y_n=3)=p^3$

(2) $Y_0=X_0+X_1+X_2 \qquad Y_1=X_1+X_2+X_3$

$P(Y_1=0 \mid Y_0=2)=0$

$$P(Y_1=1 \mid Y_0=2)=\frac{P(Y_1=1, Y_0=2)}{P(Y_0=2)}=\frac{2p^2(1-p)^2}{3p^2(1-p)}=\frac{2}{3}(1-p)$$

$$P(Y_1=3 \mid Y_0=2)=\frac{P(Y_1=3, Y_0=2)}{P(Y_0=2)}=\frac{p^3(1-p)}{3p^2(1-p)}=\frac{1}{3}p$$

$$P(Y_1=2 \mid Y_0=2)=\frac{P(Y_1=2, Y_0=2)}{P(Y_0=2)}=\frac{p^2(1-p)^2+2p^3(1-p)}{3p^2(1-p)}=\frac{1+p}{3}$$

(3) $Y_0=X_0+X_1+X_2 \qquad Y_1=X_1+X_2+X_3 \qquad Y_2=X_2+X_3+X_4$

$P(Y_0=1, Y_1=0, Y_2=1)=P(X_0=1, X_1=X_2=X_3=0, X_4=1)=p^2(1-p)^3$

(4) $\mu(X_n)=p, \quad D(X_n)=p(1-p)$

$\mu(Y_n)=\mu(X_n)+\mu(X_{n+1})+\mu(X_{n+2})=3p$

$E(X_n^2)=\mu^2(X_n)+D(X_n)=p$

$R_Y(m,n)=E(Y_mY_n)=E[(X_m+X_{m+1}+X_{m+2})(X_n+X_{n+1}+X_{n+2})]$

$$=\begin{cases} 9p^2, & |n-m|\geqslant 3 \\ 9p^2+(3-|n-m|)(p-p^2), & |n-m|<3 \end{cases}$$

$C_Y(m,n)=R_Y(m,n)-\mu_Y(m)\mu_Y(n)$

$$=\begin{cases} 0, & |n-m|\geqslant 0 \\ (3-|n-m|)(p-p^2), & |n-m|<3 \end{cases}$$

14. 设随机过程 $\{X(t);t\in T\}$ 和 $\{Y(t);t\in T\}$ 不相关,

$$Z(t)=a(t)X(t)+b(t)Y(t)+c(t),\quad t\in T,$$

这里 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ 都是通常的函数. 已知 $\mu_X(t)$, $\mu_Y(t)$, $C_X(s,t)$, $C_Y(s,t)$, 求 $\mu_Z(t)$ 和 $C_Z(s,t)$.

$$\mu_Z(t)=a(t)E(X(t))+b(t)E(Y(t))+c(t)$$

$$=a(t)\mu_X(t)+b(t)\mu_Y(t)+c(t)$$

$\{X(t),t\in T\}$ 和 $\{Y(t);t\in T\}$ 不相关 $\Rightarrow Cov(X(s),Y(t))=0$

$$C_Z(s,t)=C_Z(a(s)X(s)+b(s)Y(s)+c(s),\ a(t)X(t)+b(t)Y(t)+c(t))$$

$$=a(s)a(t)Cov(X(s),X(t))+b(s)b(t)Cov(Y(s),Y(t))$$

$$=a(s)a(t)C_X(s,t)+b(s)b(t)C_Y(s,t)$$

16. 设随机过程 $\{X(t);t\in(-\infty,\infty)\}$ 和 $\{Y(t);t\in(-\infty,\infty)\}$ 相互独立, 已知它们的均值函数和自相关函数. 令 $Z(t)=X(t)Y(t)$, $t\in(-\infty,\infty)$, 求 $\mu_Z(t)$, $R_Z(s,t)$, $R_{XZ}(s,t)$.

$$\mu_Z(t)=E(X(t)Y(t))=E(X(t))E(Y(t))=\mu_X(t)\cdot\mu_Y(t)$$

$$R_Z(s,t)=E(X(s)Y(s)X(t)Y(t))=E(X(s)X(t))\cdot E(Y(s)Y(t))$$

$$=R_X(s,t)\cdot R_Y(s,t)$$

$$R_{XZ}(s,t)=E(X(s)X(t)Y(t))=E(X(s)X(t))E(Y(t))$$

$$=R_X(s,t)\cdot\mu_Y(t)$$