第11讲复习



复习要点

- 引入复介电常数 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon j \frac{\sigma}{\omega}$ 后,传播常数 $k = k_{\rm r} j k_{\rm i}$ 波阻抗 $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}}$ 均为复数。
- k的实部 k_r 表示波的传播 $\lambda = \frac{2\pi}{k_r}$, $v_p = \frac{\omega}{k_r}$, 虚部表示 传播方向波的衰减。
- 波传播速度与频率有关称为色散,色散关系可用k— ω 表示,相速 $v_p = \frac{\omega}{k}$,群速 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ 。如果 $k \sim \omega$ 表示为 k— ω 平面上的曲线,则曲线任一点与原点连线斜率就 是 v_p ,切线斜率就是 v_g 。

什么是各向异性介质?



最简单的各向异性介质是单轴介质。单轴介质张量表示为

$$oldsymbol{arepsilon} = egin{pmatrix} arepsilon_{oldsymbol{\perp}} & arepsilon_{oldsymbol{\perp}} & 0 & 0 \ 0 & arepsilon_{oldsymbol{\perp}} & 0 \ 0 & 0 & arepsilon_{//} \end{pmatrix}$$

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned\\ egin{aligned} egi$$

展开后我们发现:单轴介质中D与E不再平行。

电离层对低频波来说是各向异性介质(回旋介质),其介质张量表示为

$$oldsymbol{arepsilon} oldsymbol{arepsilon} = egin{pmatrix} arepsilon_{oldsymbol{oldsymbol{arepsilon}}} & jg & 0 \ -jg & arepsilon_{oldsymbol{oldsymbol{arepsilon}}} & 0 \ 0 & 0 & arepsilon_{oldsymbol{oldsymbol{arepsilon}}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} & jg & 0 \\ -jg & \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{//} \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{x} \\ \boldsymbol{D}_{y} \\ \boldsymbol{D}_{z} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} & jg & 0 \\ -jg & \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\varepsilon}_{//} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{x} \\ \boldsymbol{E}_{y} \\ \boldsymbol{E}_{z} \end{bmatrix}$$

展开后同样发现:回旋介质中D与E也不平行。

再后来,出现了更复杂电磁特性的人造材料,例如双各向异性介质等。

各向异性介质中的本构关系



在电各向异性介质中,电场强度 E 与电通量密度 D 不再平行,E 与 D 一般的线性 关系为

$$\begin{pmatrix}
D_{x} \\
D_{y} \\
D_{z}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\
\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\
\varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
E_{x} \\
E_{y} \\
E_{z}
\end{pmatrix} \tag{1}$$

而在磁各向异性介质中,磁感应强度 B 与磁场强度 H 不再平行,其关系为

$$\begin{pmatrix} B_{x} \\ B_{y} \\ B_{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{x} \\ H_{y} \\ H_{z} \end{pmatrix} \tag{2}$$

式(1)表示在电各向异性介质中,外加电场 E_x 分量可感应 D_x 、 D_y 、 D_z 三个分量,而式(2)表示,外加磁场 B_x 分量可感生 H_x 、 H_y 、 H_z 三个分量。其余类推。

并矢的概念



在物理问题中也可能碰到两矢量的直接相乘, 如

$$\vec{C} = AB = (A_x x_0 + A_y y_0 + A_z z_0)(B_x x_0 + B_y y_0 + B_z z_0)$$

$$= A_x B_x x_0 x_0 + A_x B_y x_0 y_0 + A_x A_z x_0 z_0 + A_y B_x y_0 x_0 + A_y B_y y_0 y_0 + A_y B_z y_0 z_0 + A_z B_z z_0 z_0$$

称 \hat{C} 为并矢。所以在三维空间,标量用一个元素表示,矢量用三个元素表示,而并矢就要用 9 个元素表示。

并矢的一次标积 $\vec{A} \cdot \vec{B}$,其运算法则是夹在中间两个单位矢量按标积运算。如

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0$$
$$\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0 = 0$$

并矢的二次标积 \vec{A} : \vec{B} ,其运算法则是夹在中间的两个单位矢量先按标积运算,剩下的两边的两个单位矢量再进行一次标积运算。如

$$x_0 x_0 : x_0 x_0 = x_0 \cdot x_0 = 1$$

 $x_0 x_0 : x_0 y_0 = x_0 \cdot y_0 = 0$

各向异性介质本构关系的并矢表示



而 $\mathbf{D} = D_x \mathbf{x}_0 + D_y \mathbf{y}_0 + D_z \mathbf{z}_0$ $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x}_0 + E_y \mathbf{y}_0 + E_z \mathbf{z}_0$ 那么引入并矢 $\mathbf{\ddot{\epsilon}}$ 后, \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 关系可简写为 $\mathbf{D} = \mathbf{\ddot{\epsilon}} \cdot \mathbf{E}$ 因为

$$\vec{\varepsilon} \cdot E = (\varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z) x_0 + (\varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z) y_0 + (\varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z) z_0$$

同样引入并矢
$$\vec{\mu}$$

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0 & \mu_{12} \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 & \mu_{13} \mathbf{x}_0 \mathbf{z}_0 \\ \mu_{21} \mathbf{y}_0 \mathbf{x}_0 & \mu_{22} \mathbf{y}_0 \mathbf{y}_0 & \mu_{23} \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0 \\ \mu_{31} \mathbf{z}_0 \mathbf{x}_0 & \mu_{32} \mathbf{z}_0 \mathbf{y}_0 & \mu_{33} \mathbf{z}_0 \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$$

$$B$$
与 H 关系可记为

$$B = \ddot{\mu} \cdot H$$

电各向异性介质中的波方程



电各向异性介质中麦克斯韦方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega \mu \boldsymbol{H} \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D} = \mathrm{j}\omega \varepsilon_0 \vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_r \cdot \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

由此可导出电磁场满足的矢量波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - \omega^2 \mu \boldsymbol{\tilde{\varepsilon}} \boldsymbol{E} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - k_0^2 \boldsymbol{\tilde{\varepsilon}}_r \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \times (\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{-1} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H}) - k_0^2 \boldsymbol{H} = 0 \qquad k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0$$

假定各向异性介质中波方程也有平面波形式的解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$
 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

代入波动方程, 经过矢量运算得到

$$k^{2}\boldsymbol{E}_{0}-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_{0})-k_{0}^{2}\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}_{r}\cdot\boldsymbol{E}=0 \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\tilde{\varepsilon}}_{r}^{-1}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_{0})+k_{0}^{2}\boldsymbol{H}_{0}=0$$

这就是平面波复振幅应当滿足的矢量方程

电各向异性介质中D,H,k三者互相垂直



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_0 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

代入散度方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

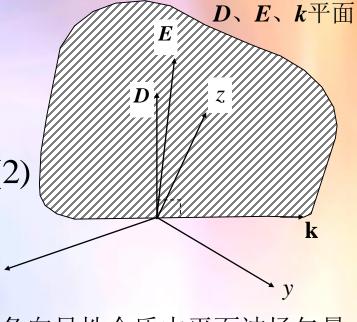
得到
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$$
 (1) $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mu \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$ (2)

说明D和B(或H)均与波矢量垂直。

再以平面波解代入H的旋度方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega \boldsymbol{D}$$

得到 $\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}$ (3)



各向异性介质中平面波场矢量 与波矢量的关系

式(1)、式(2)、式(3)说明D,H(B)和 k 三个矢量是按右手螺旋关系互相垂直的。

电各向异性介质中D与E不再平行



$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_0 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

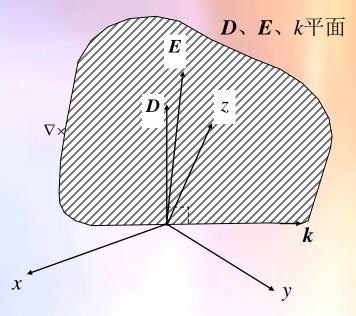
由于介电常数 \mathcal{E} 是张量,D与E一般是不平行的将平面波解代入矢量波方程

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{\mu} \; \boldsymbol{\dot{\varepsilon}} \; \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

或
$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - \omega^2 \mu \boldsymbol{D} = 0$$
 (1)

因为
$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \boldsymbol{E} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E})$$

$$= k^2 \left(\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}}{k^2} \boldsymbol{k} \right) = k^2 \boldsymbol{E}_{\perp} \quad (2)$$



各向异性介质中平面波场矢量与 波矢量的关系

 E_{\perp} 是电场垂直于波矢量k方向的分量式(1)与式(2) 比较,得到

$$\boldsymbol{D} = \frac{k^2}{\omega^2 \mu} \boldsymbol{E}_{\perp}$$

因此E的垂直于k的分量与矢量D平行,E矢量处于D与k构成的平面内。

单轴介质的色散方程



矢量波方程 $k^2 \mathbf{E}_0 - \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) - k_0^2 \mathbf{\vec{\varepsilon}}_r \cdot \mathbf{E}_0 = 0$

单轴介质张量表示

将单轴介质张量表达式代入 $k \cdot D = 0$ 得到

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = \left(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_z E_z$$

$$arepsilon = egin{pmatrix} arepsilon_{ot} & 0 & 0 \ 0 & arepsilon_{ot} & 0 \ 0 & 0 & arepsilon_{//} \end{pmatrix}$$

再将上式代入矢量波动方程,分解为直角坐标分量方程后可写成下面的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} k^{2} - \omega^{2} \mu \varepsilon_{\perp} & 0 & -\left(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_{x} k_{z} \\ 0 & k^{2} - \omega^{2} \mu \varepsilon_{\perp} & -\left(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_{y} k_{z} \\ 0 & 0 & k_{x}^{2} + k_{y}^{2} + \frac{\varepsilon_{//} k_{z}^{2}}{\varepsilon_{\perp}} - \omega^{2} \mu \varepsilon_{//} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

矩阵方程与数学家华罗庚



矩阵理论很复杂,应用也很广泛。该如何理解矩阵呢?



数学大师华罗庚玩弄矩阵就像玩弄整数一样。**华罗庚**,1910年生,出生在江苏金坛县,自学成才。36-38年英国剑桥的访问学者。46-50分别在普林斯顿大学和伊利诺大学任教。50年回国,85年去世。

对于描述电磁波在单轴介质中传播的矩阵方程而言,发现其中的玄妙:

- (1) 矩阵方程的特征值(即特征方程的解),对应于相位(波数);
- (2) 矩阵的**特征矢量**,对应于**幅度**。

对于更复杂的情况,矩阵方程的特征值和特征矢量都对应于波的相位和幅度。

单轴介质色散方程



$$\det \begin{pmatrix} k^{2} - \omega^{2} \mu \varepsilon_{\perp} & 0 & -(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}) k_{x} k_{z} \\ 0 & k^{2} - \omega^{2} \mu \varepsilon_{\perp} & -(1 - \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}) k_{y} k_{z} \\ 0 & 0 & k_{x}^{2} + k_{y}^{2} + \frac{\varepsilon_{//} k_{z}^{2}}{\varepsilon_{\perp}} - \omega^{2} \mu \varepsilon_{//} \end{pmatrix} = 0$$

它有两个解
$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp}$$
 $k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}} k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{//}$

设θ是波矢k与z轴的夹角,第二个解可写成更方便的形式

$$k^{2}(\sin^{2}\theta + \frac{\varepsilon_{//}}{\varepsilon_{\perp}}\cos^{2}\theta) = \omega^{2}\mu\varepsilon_{//}$$

在单轴介质中可能传播的两种平面波,它们具有不同的物理特征,分别称为 寻常波和非寻常波。

寻常波

$$\begin{pmatrix} k^{2} - \omega^{2} \mu \varepsilon_{\perp} & 0 & -\left(1 - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_{x} k_{z} \\ 0 & k^{2} - \omega^{2} \mu \varepsilon_{\perp} & -\left(1 - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_{y} k_{z} \\ 0 & 0 & k_{x}^{2} + k_{y}^{2} + \frac{\varepsilon_{\parallel} k_{z}^{2}}{\varepsilon_{\perp}} - \omega^{2} \mu \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

寻常波解
$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp}$$
,由此得到 $v_{\rm p} = \omega/k = 1/\sqrt{\mu \varepsilon_{\perp}}$

将 $k^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} = 0$ 代入波方程还得到 $E_z = 0$

$$k \cdot D = 0$$
 \rightarrow $k \cdot E = \left(1 - \frac{\mathcal{E}_{//}}{\mathcal{E}_{\perp}}\right) k_z E_z = 0$ 将单轴晶体的 $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 代入

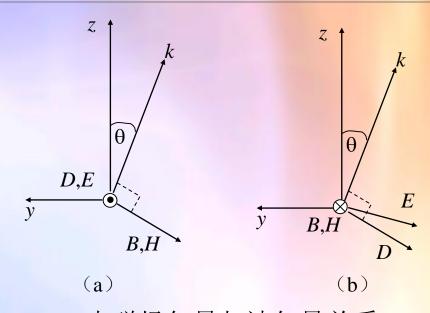
表明波的电场矢量E 没有平行于波矢量k的分量,E与D的方向重合。由于 E_z =0,所以E (以及D) 与光轴z方向垂直,因此E及D垂直于k和z轴构成的平面。可见 $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_\perp$ 的解表示的波是相对于传播方向k 的横电磁波(TEM),与各向同性介质中的平面波性质相同,所以称为寻常波。

非寻常波



取光轴z和波矢k构成的截面为y–z平面在如此选取的坐标系中 k_x =0 E_x = 0 电场矢量E处于y–z平面内,电位移矢量D也在y–z平面内。但现在E有沿波传播方向的分量,而D与k总是垂直的,所以D与E不再保持平行。

可得出
$$v_p = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\mu \varepsilon_{//}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu \varepsilon_{\perp}}}$$



电磁场矢量与波矢量关系 (a) 寻常波 (b) 非寻常波

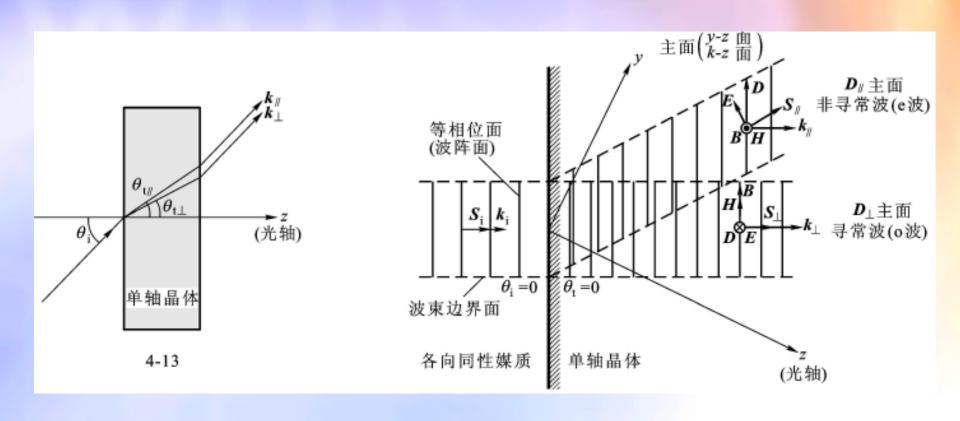
可见波的相速与传播方向有关。

当一极化方向任意的线极化波入射到单晶片上时将分解为极化方向垂直于y-z平面的寻常波和极化在y-z平面内的非寻常波。

由于两种波的k值不同, 折射角不同, 在晶片内这两个波的射线将分离, 这就是**双折射现象**。

双折射





单轴晶体中的双折射

发生双折射时的波矢与功率流

应用举例一: 怎样产生圆极化光

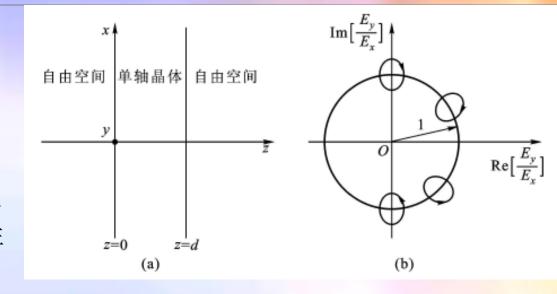
假定一个线极化波从左边

入射,并表示为

$$\boldsymbol{E} = E_0(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}_0)e^{-jkz}$$

$$(z < 0, \ k = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0})$$

忽略在z=0和z=d边界波的反射效应,则波刚通过该各向异性 媒质板时可表示为



$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{x}_0 e^{-jk_e d} + \mathbf{y}_0 e^{-jk_0 d}) e^{-jk(z-d)} \qquad (z > d)$$

波通过各向异性媒质板后其极化形式可由右式决定 $E_y/E_x=e^{(-jk_0d+jk_ed)}$

如果
$$-k_0 d + k_e d = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$
 得到圆极化波

满足上式的最短距离

$$d = \frac{\pi/2}{k_e - k_o}$$

应用举例二: 二色性和极化太阳镜



很多晶体,如方解石、石英在光频中呈现各向异性特性。对于方解石晶体, $\varepsilon_{//}=2.21\,\varepsilon_0$, $\varepsilon_{\perp}=2.76\,\varepsilon_0$,是实数。所以在方解石晶体中波传播的速度与波的极化有关。

还有些各向异性介质,对于一个极化方向的波是透明传播的,但对另一极化方向的波就有吸收。所以对于某一极化方向,介电常数是实数,另一极化方向,介电常数是复数,这种性质称为二色性(dichroism)。

1928年,一个叫做Edwin H. Land的年轻人发现了一种薄膜,当随机极化的太阳光经过该薄膜后就成为线极化了。这种材料几经改进,现称为做偏振片。偏振片是一种人工的二色性材料。

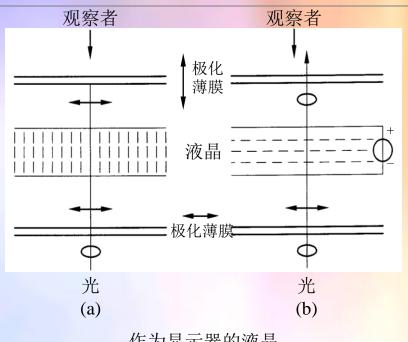
我们曾讨论过从介质表面反射的太阳光包含较多的水平极化分量,因此,如果太阳镜用极化薄膜制作,且选择薄膜的极化方向使得垂直极化光容易通过,水平极化光不容易通过,那么这种太阳镜与一般的浅色镜相比可较好滤掉部分耀眼的光,因为对于一般的**浅色太阳镜**,任何极化方向光同样衰减。

应用举例三:液晶

18

我们使用的ipad和电脑屏幕都是液晶显示屏,从不同的方向看是不一样的。

液晶是一种液体,其分子有序排列,液晶可以被电场激活。在非激活态,液晶是各向同性的,当加上电场后,液晶中分子将平行于电场或垂直于电场排列,并成为各向异性介质。



作为显示器的液晶 (a) 正常态(非激活态) (b) 激活态

上图给出一个典型的液晶显示器原理结构,它是工作于所谓的"扭曲" (DAP)模式。图(a)表示激活前的正常态,进入液晶的光已被偏振片极化,该极化光通过液晶时极化方向不变。当通过第二个偏振片时全部被吸收。最终结果没有光通过显示器。而在激活态,液晶改变通过光的极化方向,第二个偏振片对于改变了极化方向的通过光是透明的,所以光能通过显示器。

第12讲复习



复习要点

复习范围

4.6