CISE 11120010

电磁场与电磁波

第11讲

1. 有耗介质中的平面波
2. 色散与群速

复习

复习要点

- 由麦克斯韦方程可得到E与H去耦的波方程 $\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$

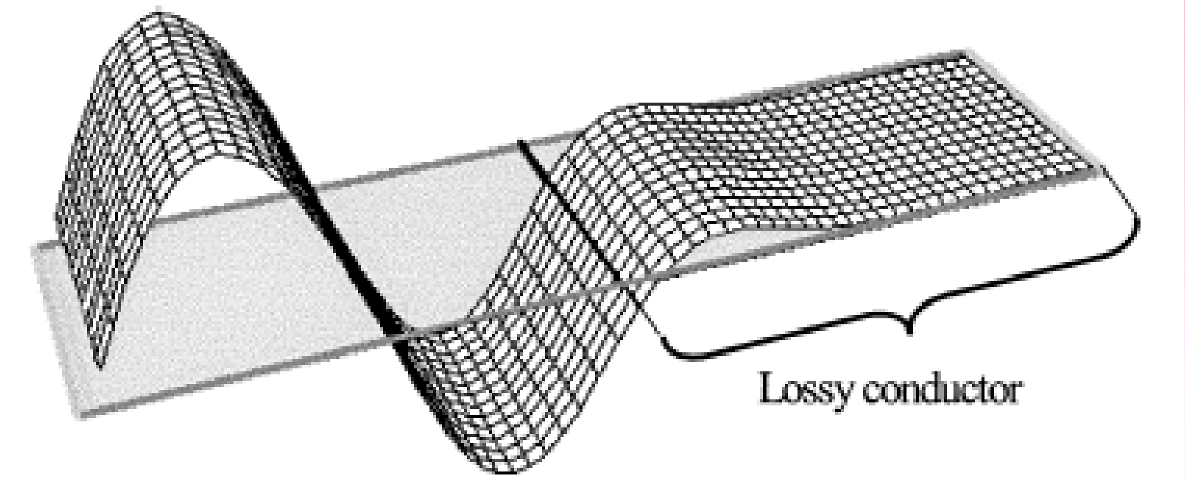
  在无源简单介质中，其解为$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\end{cases}$

  这个解叫平面波，其特征是$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$三者相互垂直构成右手螺旋关系。$|\boldsymbol{E}|$与$|\boldsymbol{H}|$之比为波阻抗 $\eta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$，在与$\boldsymbol{k}$垂直的平面内相位到处相等。波矢$\boldsymbol{k}$的方向就是波传播的方向。

- 波的极化可以用固定点的电场矢量末端点在与波矢$\boldsymbol{k}$垂直的平面内的投影随时间运动的轨迹来描述。有线极化、圆极化、椭圆极化之分。圆极化、椭圆极化还有左旋与右旋之分。

- 为了讲解这节课的内容，我们回顾一次第6讲讲解的内容：复数坡印廷能流密度（即功率流密度）。

波在传播方向幅度按指数衰减，即波传播的方向与衰减的方向一致。



分析方法:

导电介质中电导率σ为有限值，可用复数介电系数表示:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}$$

有耗介质(导电介质)用复介电系数表示的麦氏方程

对于电导率为σ的各向同性导体 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}} = \sigma \boldsymbol{E}$

安培全电流定律的微分形式为 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}$

将$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}=\sigma\boldsymbol{E}$代入安培全电流定律描述的方程，得到

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\left(\varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E}$$

定义复介电常数， $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega}$ ，其虚部就表示介质电导率的影响

引入复介电常数后，麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

注：引入复介电常数后有耗介质中麦氏方程与无耗介质中相同。

有耗介质中波方程及其解

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\mathrm{j}\omega\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad(\nabla^2+k^2)\boldsymbol{E}=0\qquad k^2=\omega^2\mu\tilde{\varepsilon}$$

其解也是平面波，如在特定坐标系下，使得$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 都只有一个分量，便得到

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}_0E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\qquad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{y}_0\left(\frac{E_0}{\eta}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\qquad \eta=\sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}}$$

η为**导电介质的波阻抗**。因为 $\tilde{\varepsilon}$ 是复数，所以**导电介质中 k,η 都是复数**。

定义 $$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^{1/2}=k_\mathrm{r}-\mathrm{j}k_\mathrm{i}$$

$$\eta=|\eta|e^{j\varphi}$$

$\sigma/\omega\varepsilon$ 称为导电介质的**损耗正切**。所以导电介质中尽管也取平面波形式的解，但k,η都是复数。

学习和科研方法总结

（1）如果没有引入复介电常数的概念，而直接将导电介质中电导率σ用到Maxwell方程中去，最终虽然也能得到一致的研究结果，但最终所导出的波动方程及求解过程将相对复杂得多。

人的创造力表现形式之一即是复杂问题简单化处理。

（2）类比法将是我们学习和科研中最重要的方法之一。

（3）优美的数学表达是完美的物理规律的体现。

李政道的教学思想

李政道的科学贡献是大家熟悉的，我们想谈谈他的教材和教学思想。李政道的“**物理学中的数学方法**”体现了数学的简单美（别人根据李的讲课笔记整理而成）。教学思想如下：

1）要“**学**”，更要“**悟**”；**学少悟多**，重要的是**培养创造力**。

2）要活学，不要为考试而学习；Einstein说，***即使是一头健康的野兽，在不饥饿的情况下，还用鞭子强迫不停的吞食，一定会使野兽丧失贪吃的天性。***我们的大学教育**窒息创造力**。

3）老师的授课关键是对学生的**启迪**，而不是仅仅是教授知识。

有耗介质中平面波解的特点

有耗介质中

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{x}_0 E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{y}_0 \left(\frac{E_0}{\eta}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \end{aligned}\right\} \text{其中} \qquad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right]^{1/2} = k_{\mathrm{r}} - \mathrm{j}k_{\mathrm{i}} \qquad \eta = |\eta|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

将复数形式的k、η代入$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$表达式

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 E_0 \mathrm{e}^{-k_{\mathrm{i}} z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{r}} z} \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{y}_0 \frac{E_0}{|\eta|} e^{-k_{\mathrm{i}} z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{r}} z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$

$\boldsymbol{E}$的瞬时值为 $$E_x = E_0 \mathrm{e}^{-k_{\mathrm{i}} z} \cos(\omega t - k_{\mathrm{r}} z)$$

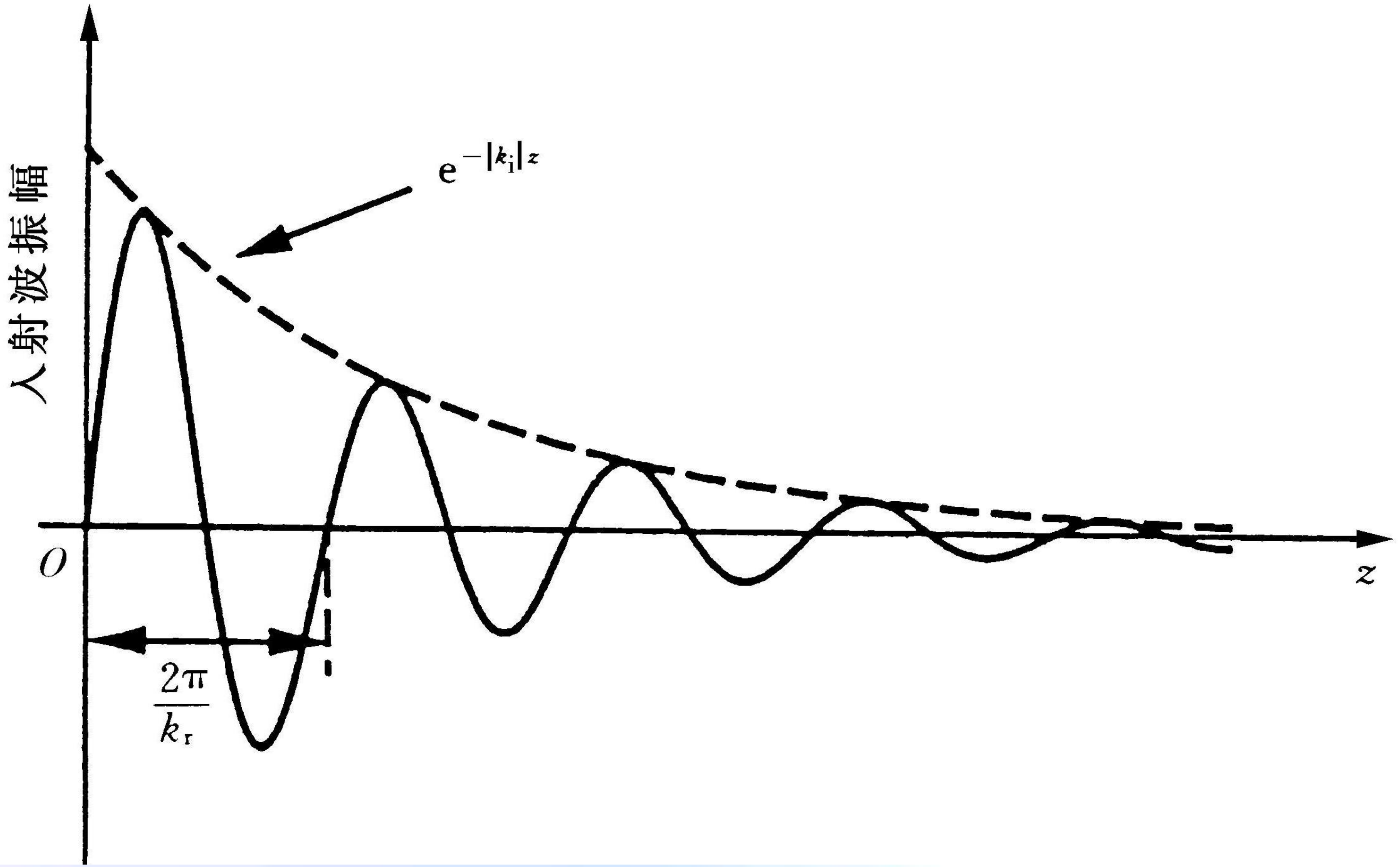
z方向传播的速度为 $$v_{\mathrm{p}} = \omega / k_{\mathrm{r}}$$

随着波向+z方向传播，幅度则按指数规律衰减。当$k_i z = k_i d_p = 1$时，场幅度衰减到$z=0$处的1/e。定义**穿透深度** d_p

$$d_{\mathrm{p}} = 1 / k_{\mathrm{i}}$$

当介电常数= $\varepsilon_{\mathrm{r}} - \mathrm{j}\varepsilon_{\mathrm{i}}$为复数时，虚部$\varepsilon_i$的影响就是使正$z$方向传播的波衰减，故虚部$\varepsilon_i$表示介质的损耗。

有耗介质中波的传播



观看多媒体演示.

电导率很小与很大的的介质

1、电导率很小的介质，其$\sigma/\omega\varepsilon$<<1，k可近似为

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon(1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})}\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon}(1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon})$$

其中$\begin{cases} k_{\mathrm{r}}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \\ k_{\mathrm{i}}=\dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \end{cases}$

因此在电导率很小的介质中，波以传播常数k_r沿正z方向传播，其幅度不断衰减，衰减速率为k_{i}（N/m），每行进d_{p}距离，波衰减到$1/e$ ，d_{p}称为穿透深度。

$$d_p=\frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

2、电导率很大的介质叫良导体，$\sigma/\omega\varepsilon$>>1，此时k近似为

$$k\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon}[1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}]^{1/2}=\sqrt{\omega\mu(\frac{\sigma}{2})}(1-\mathrm{j})$$

k的实部与虚部相等

因此**穿透深度**为 $$d_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\delta$$

δ表示d_{p}很小很小，习惯上称为**趋肤深度**。这就是说对于良导体电磁场主要集中在表面趋肤深度δ厚度的薄层内，这种效应称为**趋肤效应**。

理想导体和理想介质

对于理想导体，$\sigma\to\infty$，**趋肤深度**

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}\to 0$$

理想导体内没有电磁场。

此时欧姆定律 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ ，因为$\sigma\to\infty$，欲保证表面电流有限，$\boldsymbol{E}\to 0$。

对于Au，Ag，Cu，Al等良导体，可被视为理想导体，例如Cu的电导率σ=5.8×10^{7}S/m。某些金属在极低温度下呈超导特性，称为超导体，超导铅在4.2K对于直流其电导率σ大于2.7×10^{20}S/m。 **理想（完纯）介质 σ = 0**

超导体的研究成果：华人科学家朱经武 (香港科大校长)。

所谓的理想导体和介质 ，都是相对的，没有绝对的理想（完纯）导体和理想（完纯）介质 。介质可以称为不良导体，导体也可以称为导电介质。

应用一、潜艇间的通信

由于电磁波在海水中传播衰减很快，这给潜艇间通信带来了困难。海水的相对介电常数差不多为 81，平均电导率为 4S/m，可得衰减常数 k_i 为

$$k_{\mathrm{i}} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}[1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2]^{1/4}\sin[\frac{1}{2}\arctan^{-1}(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})]$$

随着频率增加，损耗不断增加，在很高的频率，

$$k_{\mathrm{i}} = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = 83.8\mathrm{N/m} = 728\mathrm{dB/m}$$

这个衰减系数非常大，波每传播 4mm 距离，功率就衰减一半。

为使损耗减小，工作频率必须降低，但是，即使 f=1kHz，衰减还是较大

$$k_{\mathrm{i}} = 0.126\mathrm{N/m} = 1.1\mathrm{dB/m} \quad (1\mathrm{kHz}\ 时)$$

因此，在 1kHz 频率，电磁波在海水中传播 100m，其衰减达到 110dB。如应用更低的频率，可传播的信号速率就很小。

潜艇之间距离稍远时，潜艇之间的通信更多的采用其它方式。

应用二、电磁波穿透冰层传播

冰的电导率很小，$\sigma\approx10^{-6}$S/m，$\varepsilon\approx3.2\varepsilon_0$损耗正切=$10^{-6}/[2\pi f\times3.2\times8.85\times10^{-12}]=5.6\times10^3/f$，当频率在兆赫范围，损耗正切是很小的。其穿透深度$d_p\approx$9.5km，这就是说在兆赫频率范围，电磁波用于探测冰层厚度是很好的。美国阿波罗登月飞行也利用兆赫范围频率电磁波，因在该频率范围月球表面电导率也很低，电磁波有较大的穿透深度。**也可以用低频波。**

对于更高的频率，由于冰层中含有气泡，气泡中空气对高频电磁波产生散射，上面简单的模型对于更高频率的电磁波不再适用。

利用冰的电导率很小的特点，可用于潜艇隐蔽和通信。相比于中国，俄罗斯对美国有着天然的战略优势。

应用三、微波炉

微波炉中的磁控管将50Hz的市电功率转换为微波功率（一般工作频率为915MHz，2450MHz），再用微波对食物加热。用微波加热食物的原理是多数食物对于微波为有耗介质，微波穿透这些食物时，在食物内部的微波损耗就转变为热。特点是升温速度快，而且可从食物内部热起来。

牛排的损耗正切很大，所以牛排可用微波烹饪。因为Polystyrene的介电常数接近自由空间介电常数，损耗很小，对微波可看作透明。所以这种材料可做加热食物的容器。

牛排的介电常数近似为$\varepsilon=40(1-j0.3)\varepsilon_0$，在$f$=3GHz时，其复数波数$k$为

$$k = 402 - j59$$

穿透深度$d_p=1/k_i=1.7$cm，所以在接近牛排表面0.85cm的范围内，微波功率损耗63%，微波损耗转变为热能（尚有37%功率可用于加热离表面0.85cm以内的牛排）。

色　散

色散定义：电磁波在介质中传播速度与频率的关系称为色散。

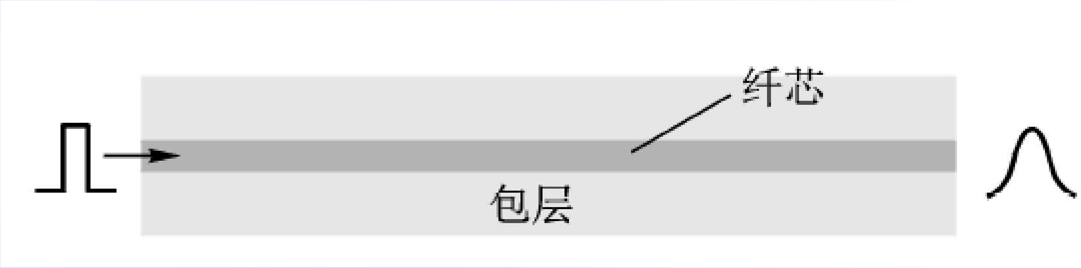
对于理想介质　　$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

k与ω成正比，相速v_p与频率ω无关，所以理想介质是非色散介质。

如果k与ω不成线性关系，相速v_p与ω有关，这种介质就称为色散介质。

对于有耗介质　　$k=\omega\sqrt{\mu\tilde{\varepsilon}}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}$

k是ω的复杂函数，v_p与ω有关，所以有耗介质一定是色散的。反过来，色散介质一定有损耗。引起色散的原因是多方面的，介质色散只是其一。**温度色散时间色散。** 色散引起波导传输信号的畸变。



光纤色散引起传输信号的畸变

群　速

$E(z,t)=E_0\cos(\omega t-kz)$　称为单色波（单频波）。信号加到电磁波上就不再是单色波。设传播的信号只含两个频率分量，一个比载波ω_c略高，另一个比ω_c略低，其瞬时表达式为

$$E(t)=E_0\cos(\omega_c-\mathrm{d}\omega)t+E_0\cos(\omega_c+\mathrm{d}\omega)t$$

此信号沿波导传播z 距离后，两个波的合成为

$$E(z,t)=E_0\left\{\cos[(\omega_c-\mathrm{d}\omega)t-(k_{z_c}-\mathrm{d}k_z)z]+\cos[(\omega_c+\mathrm{d}\omega)t-(k_{z_c}+\mathrm{d}k_z)z]\right\}$$
$$E(z,t)=2E_0\cos[(\mathrm{d}\omega)t-(\mathrm{d}k_z)z]\cos(\omega_c t-k_{z_c}z)$$

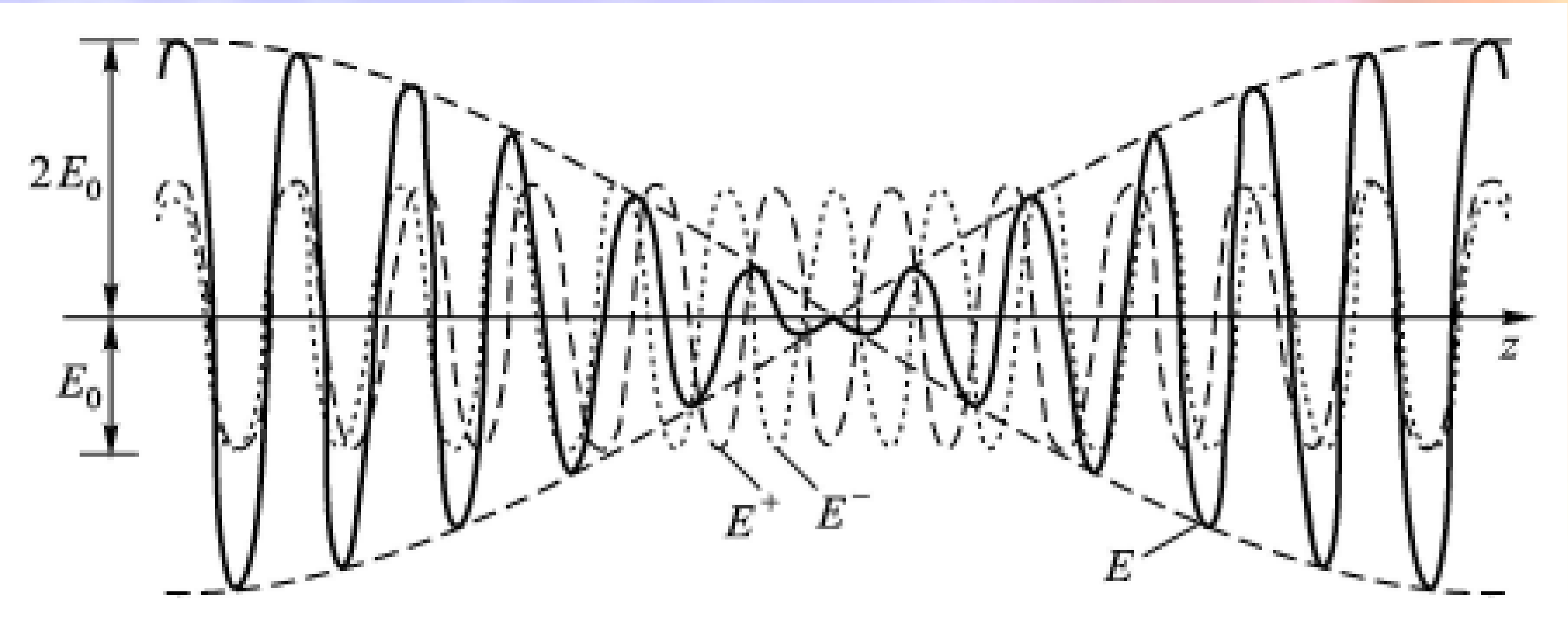
该信号可看成是一高频载波 $\cos(\omega_c t-k_{z_c}z)$ ，其振幅被低频波 $\cos[(\mathrm{d}\omega)t-(\mathrm{d}k_z)z]$ 调制。

振幅包络的传播速度为　$v_g=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k_z$

如果信号中包含更多的频率分量，那么在一个不大的频率范围内，整个信号包络可近似为以v_g速度在传播，称v_g为**群速**。

如何理解相速和群速的概念?

合成波的振幅被$\Delta\omega$的波所调制



合成波的振幅被$\Delta\omega$的波所调制

色散特性曲线

色散特性曲线:

在ω—k平面上表示$k(\omega)$为一条曲线。曲线上任一点与原点连线斜率$\tan\theta_p$表示该点相速v_p,

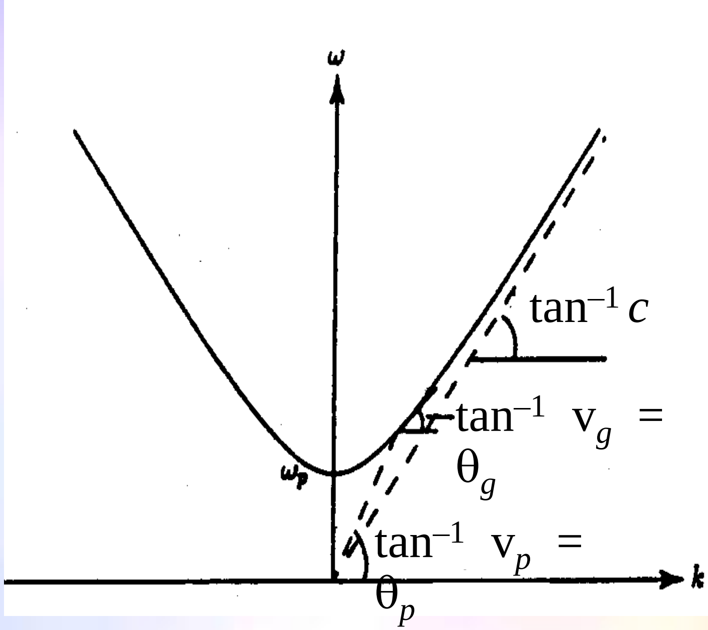
$$v_p = \omega / k_z$$

而切线斜率$\tan\theta_g$表示该点群速v_g

$$v_g = d\omega / dk_z$$

群速可进一步表示为

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p}\left(\frac{dv_p}{d\omega}\right)}$$



等离子体色散曲线

如果v_p与频率无关，则群速等于相速，$v_g = v_p$。

当$dv_p / d\omega \neq 0$时，$v_p \neq v_g$。又分两种情况:

当$\frac{dv_p}{d\omega} < 0$，$v_g < v_p$时称为正常色散　　当$\frac{dv_p}{d\omega} > 0$，$v_g > v_p$时称为非正常色散

第11讲复习

复习要点

- 引入复介电常数 $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega}$ 后，传播常数 $k=k_{\mathrm{r}}-\mathrm{j}k_{\mathrm{i}}$ ，波阻抗 $\eta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}}$ 均为复数。
- k的实部k_{r}表示波的传播 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k_{\mathrm{r}}}$, $v_{\mathrm{p}}=\dfrac{\omega}{k_{\mathrm{r}}}$ ，虚部表示传播方向波的衰减。
- 波传播速度与频率有关称为色散，色散关系可用k—ω表示，相速$v_{\mathrm{p}}=\dfrac{\omega}{k}$，群速 $v_{\mathrm{g}}=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ 。如果$k\sim\omega$表示为k—ω平面上的曲线，则曲线任一点与原点连线斜率就是v_{p}，切线斜率就是v_{g}。

复习范围

4.4，4.5

帮助理解的多媒体演示：MMS6

MMS18