CISE 11120010

电磁场与电磁波

第10讲

波方程及其平面波解与极化

Maxwell肖像

1873年Maxwell的巨著《A Treatise of Electricity and Magnetism》预言电磁波的存在

$$
\begin{cases}
\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0
\end{cases}
$$

从麦克斯韦方程到波动方程

Maxwell方程受力学方程的启发，在没有算符和复矢量等数学工具的情况下，导出了无源自由空间中的波动方程。

Maxwell的数学工具：**偏导，**得到波动方程。

后来者导出波动方程的数学工具：**微分算符，**得到同样的结果。

$$\Rightarrow \left(\nabla^2 + k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H}\end{cases} = 0$$

从无源空间的麦克斯韦方程到波方程

无源空间麦氏方程 波方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}&=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\underbrace{\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0}_{\boldsymbol{E}\text{与}\boldsymbol{H}\text{去耦}}$$

因为 $\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right)=-\mathrm{j}\omega\mu\left(\nabla\times\boldsymbol{H}\right)=-\mathrm{j}\omega\mu\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\right)=\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}$

利用恒等关系 $\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{E}\right)-\nabla^2\boldsymbol{E}$ 以及 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 得到

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}=0$$

同理 $\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{H}\right)=\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\left(-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}\right)=\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{H}$ 而 $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$

得到 $\nabla^2\boldsymbol{H}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{H}=0$

合并写成 $\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$ $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$

算符∇对$e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$的作用

设

$$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_y\boldsymbol{y}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{x}_0+y\boldsymbol{y}_0+z\boldsymbol{z}_0$$

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

则

$$\nabla\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(k_xx+k_yy+k_zz\right)}$$

$$=-\mathrm{j}\left(k_x\boldsymbol{x}_0+k_y\boldsymbol{y}_0+k_z\boldsymbol{z}_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(k_xx+k_yy+k_zz\right)}$$

$$=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

利用 $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi+\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

$$\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A})=\nabla\Phi\times\boldsymbol{A}+\Phi\nabla\times\boldsymbol{A}$$

得到 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)=\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0$

$$=-j\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)=\nabla\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)\times\boldsymbol{E}_0+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla\times\boldsymbol{E}_0$$

$$=-j\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\nabla\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)=\nabla^2\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)=-k^2\boldsymbol{E}$$

边界趋于无穷远时无源、简单介质中波方程的解

波方程

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$$

其解$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$可表示成一个常数矢量$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{H}_0$与一个指数函数$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$的乘积(Sommerfeld**辐射条件**)。

$$\boldsymbol{E}(r)=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

式中

$$\boldsymbol{E}_0=E_{0x}\boldsymbol{x}_0+E_{0y}\boldsymbol{y}_0+E_{0z}\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{H}_0=H_{0x}\boldsymbol{x}_0+H_{0y}\boldsymbol{y}_0+H_{0z}\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_y\boldsymbol{y}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{x}_0+y\boldsymbol{y}_0+z\boldsymbol{z}_0$$

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

因为

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=\left(-k^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$$

分离变量法解 $(\nabla^2+k^2)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{Bmatrix}=0$ 方程

矢量波方程 $(\nabla^2+k^2)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{Bmatrix}=0$ 可简化到解 $(\nabla^2+k^2)\Phi(x,y,z)=0$

设

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=E_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0+E_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0+E_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0$$
$$\boldsymbol{H}(x,y,z)=H_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0+H_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0+H_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0$$

代入波方程便得

$$(\nabla^2+k^2)\begin{Bmatrix}\left[E_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0+E_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0+E_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0\right]\\ \left[H_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0+H_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0+H_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0\right]\end{Bmatrix}=0$$

要使上式成立，只有等式左边每个分量都等于零，即

$$(\nabla^2+k^2)\begin{Bmatrix}E_x(x,y,z)\\ E_y(x,y,z)\\ E_z(x,y,z)\end{Bmatrix}=0 \qquad (\nabla^2+k^2)\begin{Bmatrix}H_x(x,y,z)\\ H_y(x,y,z)\\ H_z(x,y,z)\end{Bmatrix}=0$$

所以对波方程的求解归结为解标量波方程

$$(\nabla^2+k^2)\varPhi(x,y,z)=0$$

分离变量法解 $(\nabla^2+k^2)\Phi(x,y,z)=0$ 方程

$$(\nabla^2+k^2)\Phi(x,y,z)=0$$ 设 $\Phi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$ 得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)X(x)Y(y)Z(z)=0$$

等式两边除以 $X(x)Y(y)Z(z)$ 得到

$$\frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{X(x)}+\frac{\frac{\partial^2 (Y)}{\partial y^2}}{Y(y)}+\frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)}+k^2=0$$

等式左边第一、二、三项分别只是x、y、z的函数，要使它们加起来为常数$-k^2$只能是每一项都等于某一待定常数 $-k_x^2,-k_y^2,-k_z^2$。

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X(x)=0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2}+k_y^2Y(y)=0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2Z(z)}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2Z(z)=0$$

以及 $k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon$

分离变量法解$(\nabla^2 + k^2)\Phi(x,y,z) = 0$方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 X(x)}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2 X(x) = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2 Y(y)}{\mathrm{d}y^2} + k_y^2 Y(y) = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2 Z(z)}{\mathrm{d}z^2} + k_z^2 Z(z) = 0$$

其解分别为 $X(x) - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}$ $\quad Y(y) - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_y y}$ $\quad Z(z) - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$

$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}$表示沿$x$方向传播到无穷远的波，另一个解$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x}$ 表示逆x方向由无穷远传播来的波，因为假定边界趋于无穷远，不存在反射波，这个解可以不予考虑。

可得 $\quad \Phi(x.y.z) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

式中 $\quad \boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{x}_0 + k_y \boldsymbol{y}_0 + k_z \boldsymbol{z}_0 \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$

$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 + z\boldsymbol{z}_0$

$\boldsymbol{k}$称为波矢，其绝对值k称为传播常数，k^2满足的方程称为介质的色散方程。

矢量波方程$(\nabla^2+k^2)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{H}\end{Bmatrix}=0$ 的解

所以电场$\boldsymbol{E}$和磁场$\boldsymbol{H}$在均匀介质中每一分量的解为

$$E_i(x,y,z)=E_{0i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\quad i=x,y,z$$

$$H_i(x,y,z)=H_{0i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}},\quad i=x,y,z$$

进一步得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{x}_0E_{0x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{y}_0E_{0y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{z}_0E_{0z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$
$$=\mathbf{E}_0e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\boldsymbol{E}_0=E_{0x}\boldsymbol{x}_0+E_{0y}\boldsymbol{y}_0+E_{0z}\boldsymbol{z}_0$$

同理 $$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}(x,y,z)=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{H}_0=H_{0x}\boldsymbol{x}_0+H_{0y}\boldsymbol{y}_0+H_{0z}\boldsymbol{z}_0$$

计及时间因子$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$后，其解为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$$

从形式上看表示电场$\boldsymbol{E}$和磁场$\boldsymbol{H}$的解是一个常数矢量$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{H}_0$与一个指数函数$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$的乘积。

$E(r)=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$与 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$的内涵

1. $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$三者相互垂直，且构成右手螺旋关系

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}&=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\text{代入平面波解}\left\{\begin{aligned}\boldsymbol{H}_0&=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\\ \boldsymbol{E}_0&=-\frac{1}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0\\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}_0&=0\\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0&=0\end{aligned}\right.$$

2. 模$|\boldsymbol{E}|$与$|\boldsymbol{H}|$之比为一常数，称为波阻抗

引入单位波矢$\boldsymbol{\kappa}_0$使得$\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\boldsymbol{\kappa}_0=1$，$\mathbf{k}=k\boldsymbol{\kappa}_0$则得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_0&=Y\kappa_0\times\boldsymbol{E}_0\\ \boldsymbol{E}_0&=-Z\kappa_0\times\boldsymbol{H}_0\end{aligned}\qquad Z=\frac{1}{Y}=\omega\mu/k=k/\omega\varepsilon=\sqrt{\mu/\varepsilon}$$

Z、Y称为均匀介质中平面波的本征阻抗(特性阻抗)或本征导纳（特性导纳），表示模$|\boldsymbol{E}|$与$|\boldsymbol{H}|$之比。

本征阻抗也叫波阻抗。

对于自由空间，波阻抗为 377Ω，习惯上用η_0表示。

自然界存在各种常数?

自由空间的波阻抗是常数， $\eta_0 = 377\Omega$;

物理学中的各种常数举例：**光速（介电常数、磁导率）；电子质量；质子质量；电子电荷；Newton引力常数；哈勃常数；宇宙平均密度**等等。

物理学中除了基本常数外，还由一些由此导出的其它常数。对于这些**常数**，究竟该怎么理解?

客观存在？上帝安排？是科学问题？还是哲学问题？甚至是宗教问题?

狄拉克（Dirac）与大数假设

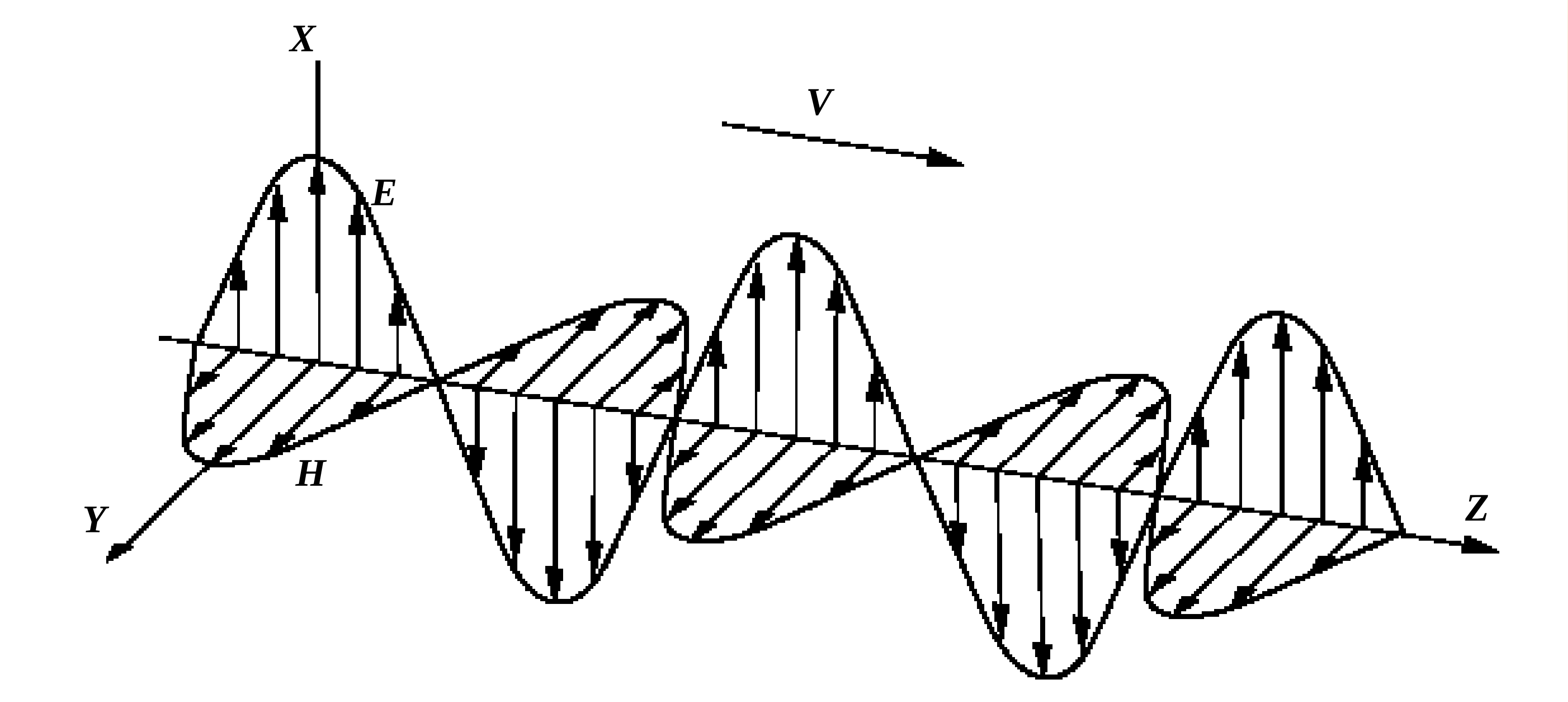
Dirac的主要贡献：（1）**Dirac**方程（和**波动方程**相似的方程）；（2）**磁单极**的讨论；**（3）提出了惊世骇俗的大数假设，这是Dirac守恒思想的体现。他抓住了物理微观粒子和最大宇宙的两头，具体给出了最小最大常数比；原子静力/万有引力=常数（10^{39}量级）。**

杨振宁对Dirac的评价：秋水文章不染尘；

本人对Dirac的评价：文由心生（相由心生）——文章一尘不染源于心灵的一尘不染。

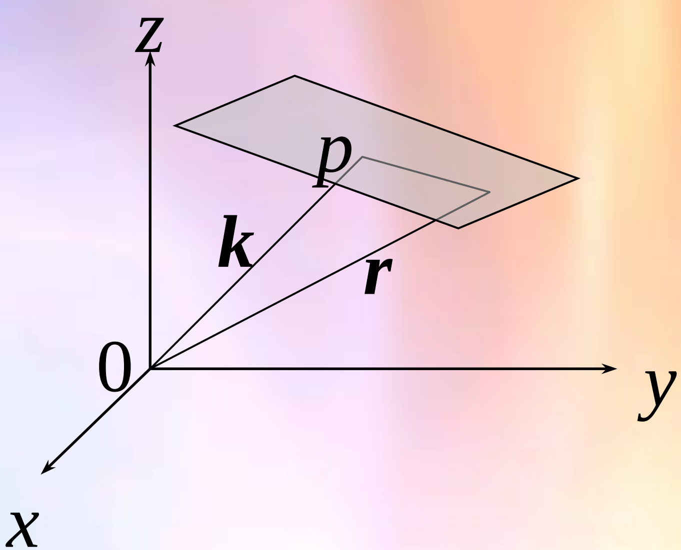
对于四种相互作用（强相互作用、电磁、弱相互作用、引力），如果强相互作用力是1，电磁为10^{-2}，弱相互作用10^{-13}，引力为10^{-38}。

E、***H***、***k***三者相互垂直并构成右手螺旋关系



$E(r)=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 与 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 的内涵

3. 在与$\boldsymbol{k}$垂直的平面内，波的相位到处都相等。这就是平面波名称的由来。



对 $E(r)=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 乘 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 取实部得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$
$$=\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

在与$\boldsymbol{k}$垂直的平面内，$\boldsymbol{r}$在$\boldsymbol{k}$上的投影都等于 $\overline{OP}$ ，即相位都相等。

4. 波长与相速

为方便，选择一个特定的坐标系使得 $\boldsymbol{E}_0=E_0\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{H}_0=H_0\boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{z}_0$

在这个特定坐标系中，电场、磁场、波矢各只有一个分量。

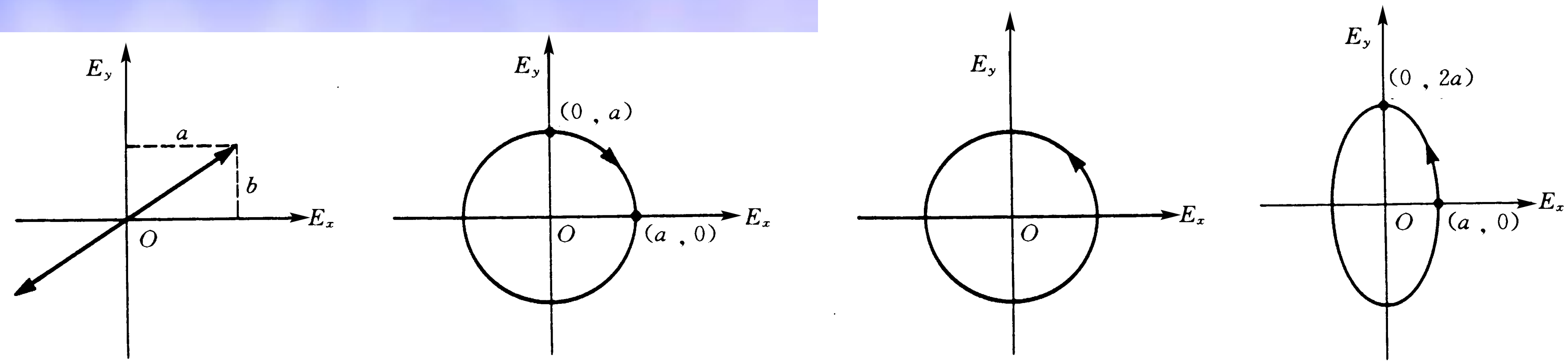
于是平面波解成为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{x}_0E_0\cos(\omega t-kz)$$

故得

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}\qquad v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

极化



a　　b　　c　　d

电磁波的极化描述电磁波运动的空间性质。

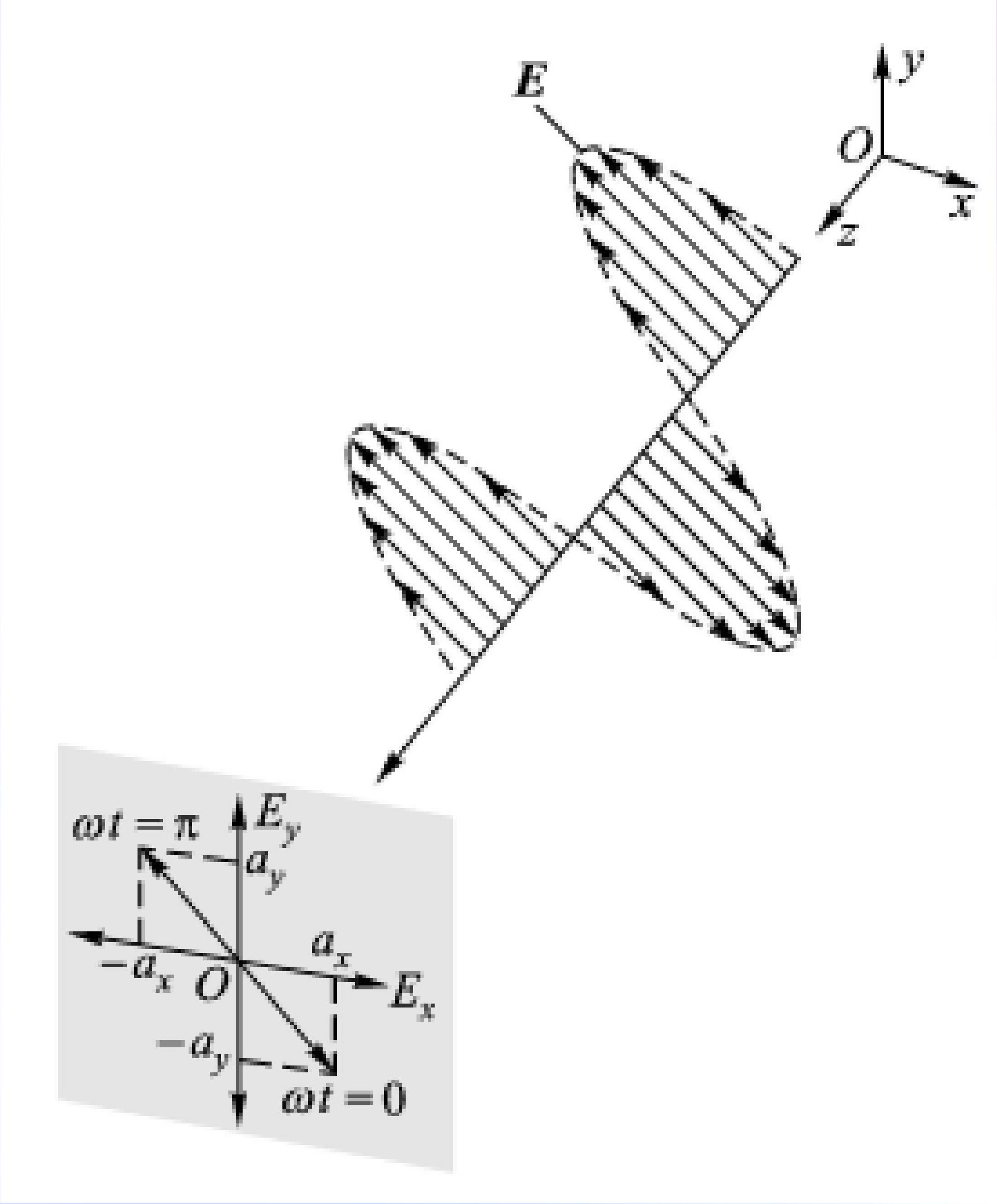
波的极化可以用固定点的电场矢量末端点在与波矢**k**垂直的平面内投影随时间运动的轨迹来描述。

如果电场矢量末端点运动轨迹是一条直线，这种波称为线极化波。

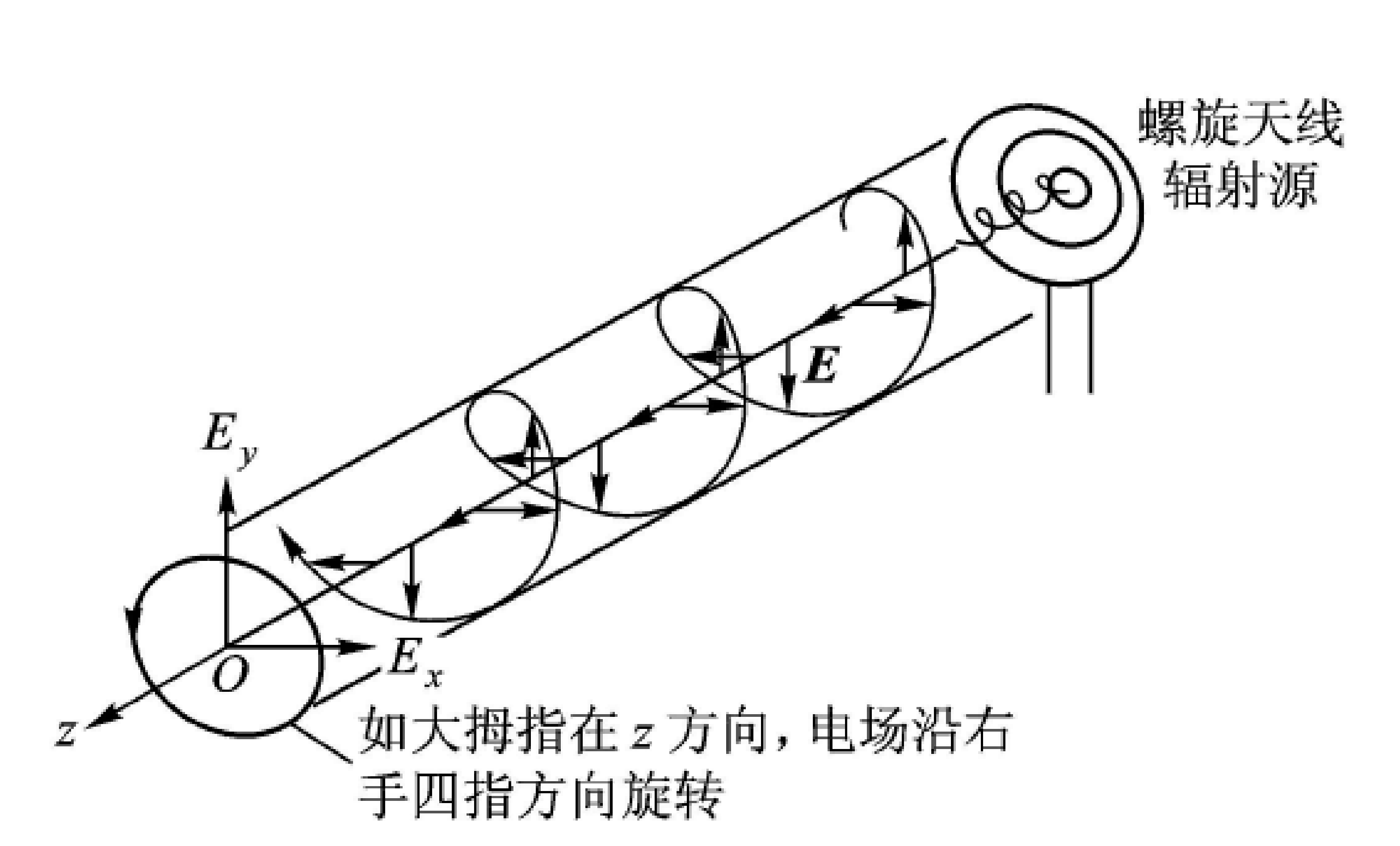
如果末端点运动轨迹是一个圆，称为圆极化波。

如果末端点运动轨迹是一个椭圆，称为椭圆极化波。

线极化平面波



圆极化波



圆极化（右旋）

如何判定波的极化?

取$\boldsymbol{k}$为z轴，电场与$\boldsymbol{k}$垂直，只有$\boldsymbol{E}_x$、$\boldsymbol{E}_y$两个分量，可表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}_0 E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_\mathrm{a})}+\boldsymbol{y}_0 E_{ym}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_\mathrm{b})}$$

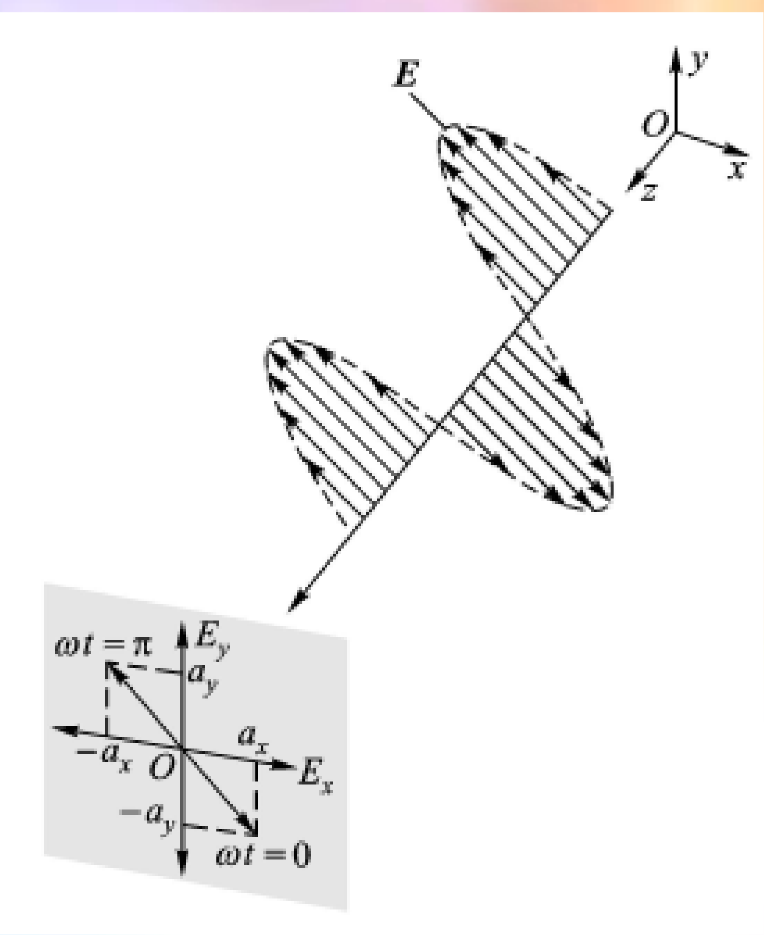
根据时谐矢量的复矢量表示的定义，可得

$$E_x(z,t)=\mathrm{Re}\left[E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_\mathrm{a})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_\mathrm{a})$$

$$E_y(z,t)=\mathrm{Re}\left[E_{ym}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_\mathrm{b})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\varphi_\mathrm{b})$$



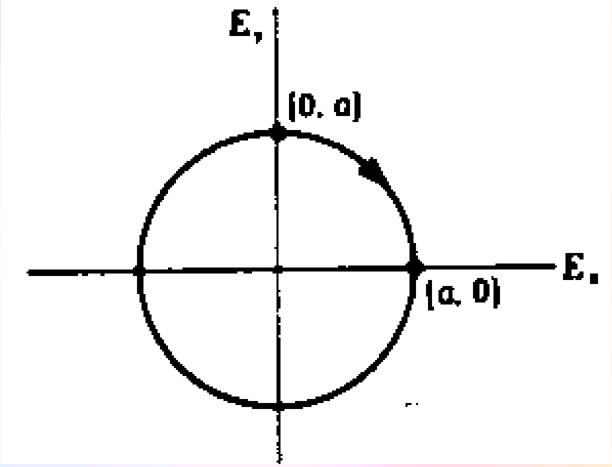
如果E_x, E_y相位满足 $\varphi=\varphi_\mathrm{b}-\varphi_\mathrm{a}=0$或$\pi$

那么E_x, E_y满足的方程为 $E_y=\pm(\dfrac{E_{ym}}{E_{xm}})E_x$

这是关于斜率为$(\pm\dfrac{E_{ym}}{E_{xm}})$ 的直线。故是线极化的。

φ=0取正号，φ=π取负号。

如何判定波的极化?



圆极化波 $$E_x(z,t)=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_a)$$
$$E_y(z,t)=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\varphi_b)$$

定义 $$\varphi=\varphi_b-\varphi_a=\pm\frac{\pi}{2},\quad A=\frac{E_{ym}}{E_{xm}}=1$$

先考虑 $\varphi=\pi/2$，$A=1$得到

$$E_x=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_a)\qquad E_y=-E_{xm}\sin(\omega t-kz+\varphi_a)$$

消去t，得到 $$E_x^2+E_y^2=E_{xm}^2$$

其图解在E_x-E_y平面这是一个圆，所以是圆极化的。圆的半径等于E_{xm}。注意电场矢量$\boldsymbol{E}$末端点随时间是顺时针转的，如果用左手顺着旋转方向，大拇指就指向z，故称左手极化波。

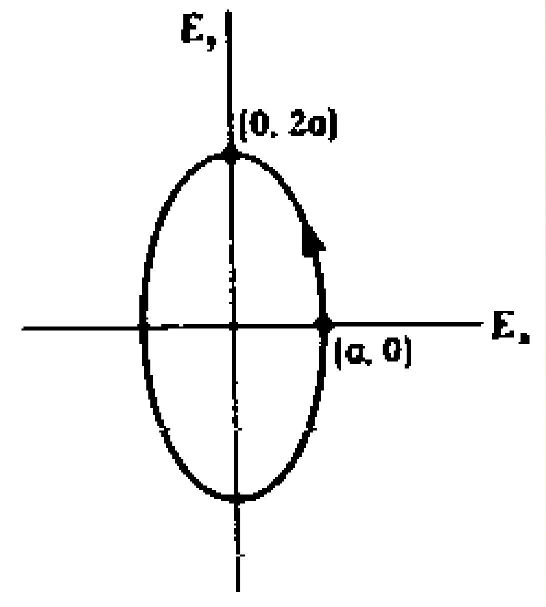
当φ=-π/2，A=1时，也得到一个圆极化波，但这是右手圆极化波 。

如何判定波的极化?

椭圆极化

$$E_x(z,t)=\mathrm{Re}\left[E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_a)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_{\mathrm{a}})$$

$$E_y(z,t)=\mathrm{Re}\left[E_{ym}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_b)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\varphi_{\mathrm{b}})$$



考虑 $\varphi=-\pi/2$, $A=E_{ym}/E_{xm}=2$

$$E_x=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_{\mathrm{a}})$$

$$E_y=2E_{xm}\sin(\omega t-kz+\varphi_{\mathrm{a}})$$

消去t 得到

$$\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{2E_{xm}}\right)^2=1$$

所以是椭圆极化的。对于其他的φ与A，一般都是椭圆极化的。

如何判定波的极化?

邦加球

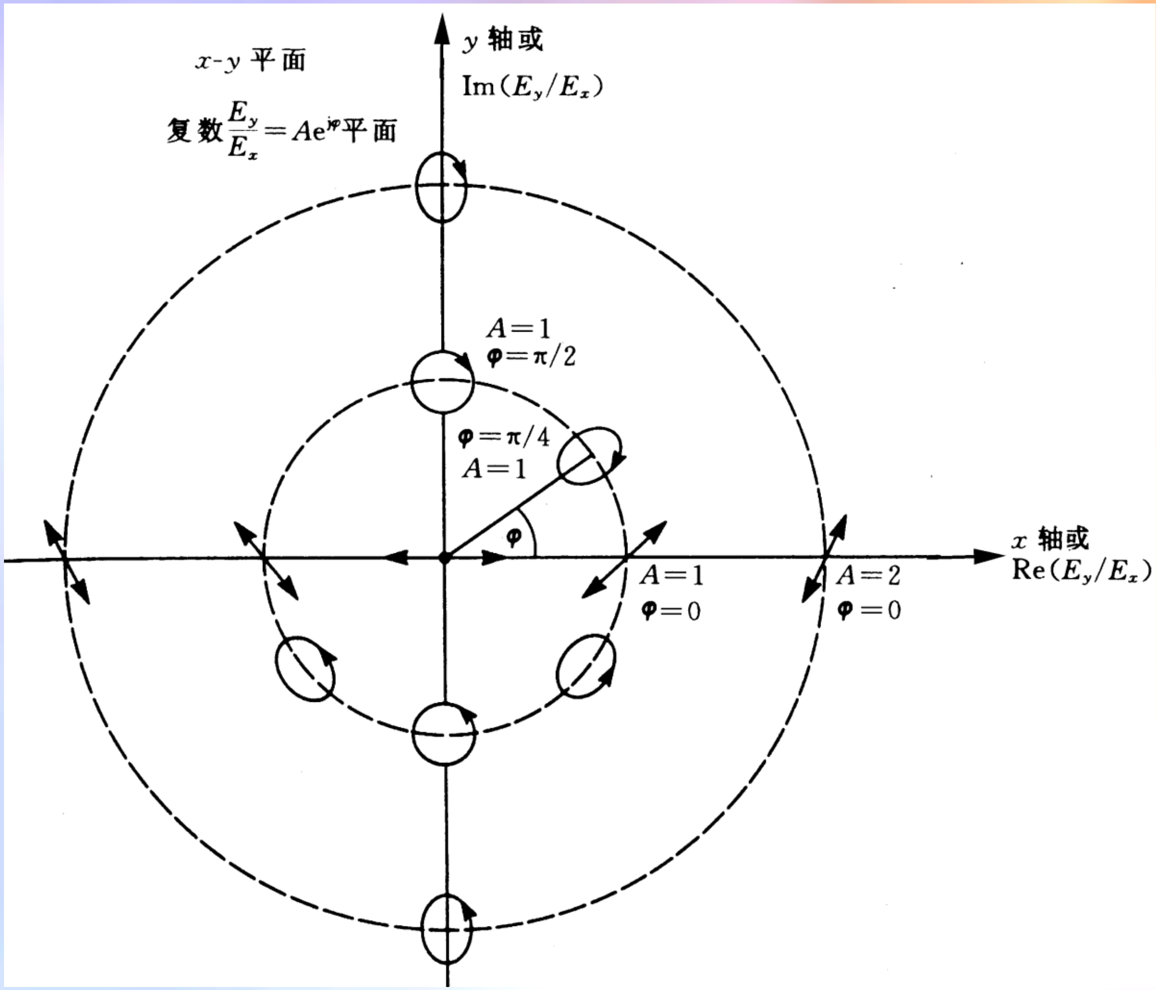
假定复矢量表示的电场$\boldsymbol{E}$为

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{x}_0 E_x+\boldsymbol{y}_0 E_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

定义A和φ　　$E_y/E_x=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$

对于线极化波，E_y/E_x 在该复平面对应的点就是实轴，φ=0或π。

对于圆极化，在该复平面对应的点就是A=1，φ=±π/2。



如果 E_y/E_x 落在上半平面，都是左手椭圆极化的，E_y/E_x 落在下半平面都是右手椭圆极化的。

极化应用举例

无线电波与电视信号的接收

调幅电台辐射的电磁波其电场垂直于地面平行于天线塔。所以收音机天线就要安置得与电场方向平行，即与地面垂直接收效果才最好。但是对于电视广播，电场$\boldsymbol{E}$与地面平行，所以电视机接收天线就要与地面平行，且对准电视发射台方向。很多调频广播电台，波是圆极化的，接收天线就可任意放置，只要对准电视信号发来的方向。

应用正交极化的通信系统

为了增加特定频率范围内的通信容量，某些卫星通信系统利用正交极化的两个波束，使通信容量比单极化通信系统增加一倍。

第10讲复习

复习要点

- 由麦克斯韦方程可得到$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{H}$去耦的波方程 $\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$

在无源简单介质中，其解为$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\end{cases}$

这个解叫平面波，其特征是$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$三者相互垂直构成右手螺旋关系。$|\boldsymbol{E}|$与$|\boldsymbol{H}|$之比为波阻抗 $\eta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$，在与$\boldsymbol{k}$垂直的平面内相位到处相等。波矢$\boldsymbol{k}$的方向就是波传播的方向。

- 波的极化可以用固定点的电场矢量末端点在与波矢$\boldsymbol{k}$垂直的平面内的投影随时间运动的轨迹来描述。有线极化、圆极化、椭圆极化之分。圆极化、椭圆极化还有左旋与右旋之分。