

电磁场与电磁波

第15讲

1. 边界条件
2. 介质交界面对TE模的反射、透射

复习要点

- 电磁波的传播可用传输线上电压、电流波的传播等效，这就是所谓波传播的传输线模型。传输线模型的要点是，首先将场分解成TE与TM两种模式，再将场量分解为横向场量 (\mathbf{E}_t 、 \mathbf{H}_t) 与纵向场量 (E_z 、 H_z)，进一步又将横向场量分解为模函数与其幅值乘积，即

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})U(z), \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{h}(\boldsymbol{\rho})I(z)$$

模式函数的幅值 $U(z)$ 、 $I(z)$ 满足传输线方程，其传播常数等于纵向传播常数 k_z ，特征阻抗 $Z_c = \omega\mu/k_z$ (对于TE模) 或 $Z_c = k_z/\omega\epsilon$ (对于TM模)，传输线传送功率等于波的纵向功率流 p_z 。电磁波传播的传输线模型将使我们可以利用成熟的传输线理论来处理复杂的场问题。

复习范围

4.9

对于反射和透射的宏观认识



最初认识：运动物体遇到障碍物被弹回；

类比的结果：电磁波遇到障碍物也将被“弹回”（反射）；

设想：如果没有障碍物，电磁波将一直“大胆的朝前走，不回头”。

一般说来，上述概念是正确的。但有例外：

反例一：电磁波遇到很小窗口的金属门却“畅通无阻”；

反例二：电磁波入射到很宽的喇叭口可能反射很大。

电磁波反射由空间阻抗变化决定的，而不取决于障碍物。如果有障碍物，而阻抗未发生变化，则遇到障碍物也没有反射。法国小说家凡尔纳的科幻小说《隐身人》最早提出了隐身衣的思想，对最近隐身衣的研究有了重要的启发。

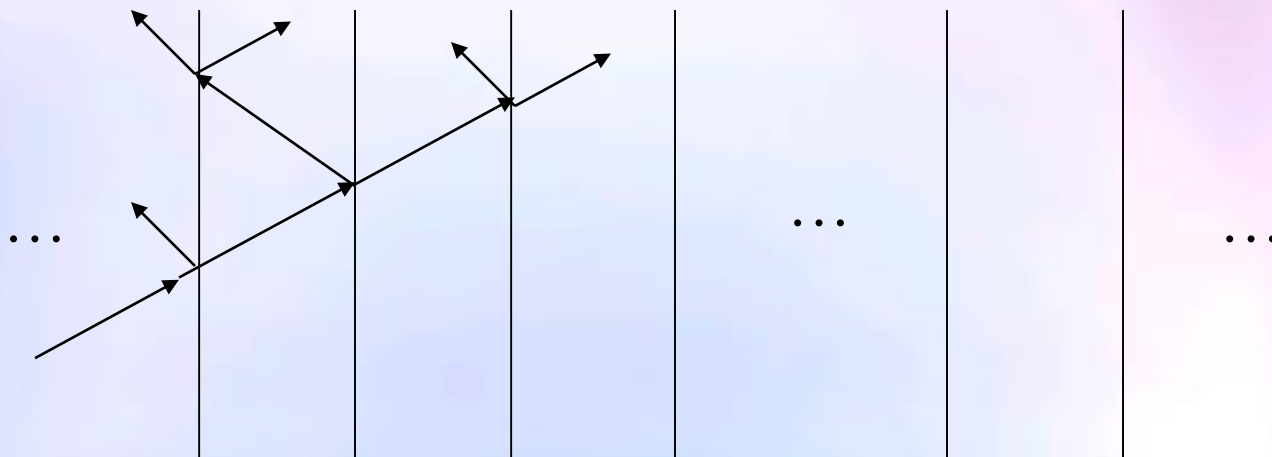
波的反射与折射是研究不均匀介质中波传播的基本问题



4

不均匀介质中波的传播（以一维不均匀介质为例）：

1. 将一维不均匀介质用多层均匀介质代替



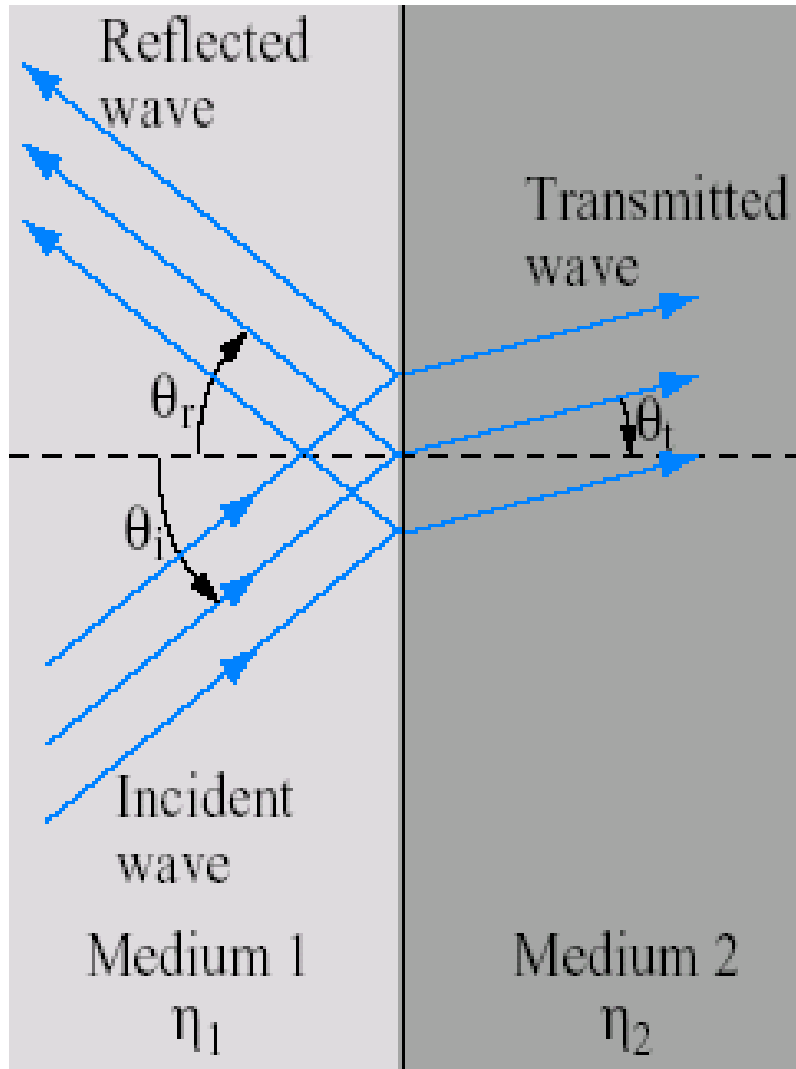
2. 每一层均匀介质中波的传播属于均匀介质中波传播的问题

3. 介质交界面波的反射与透射（本章研究的问题）

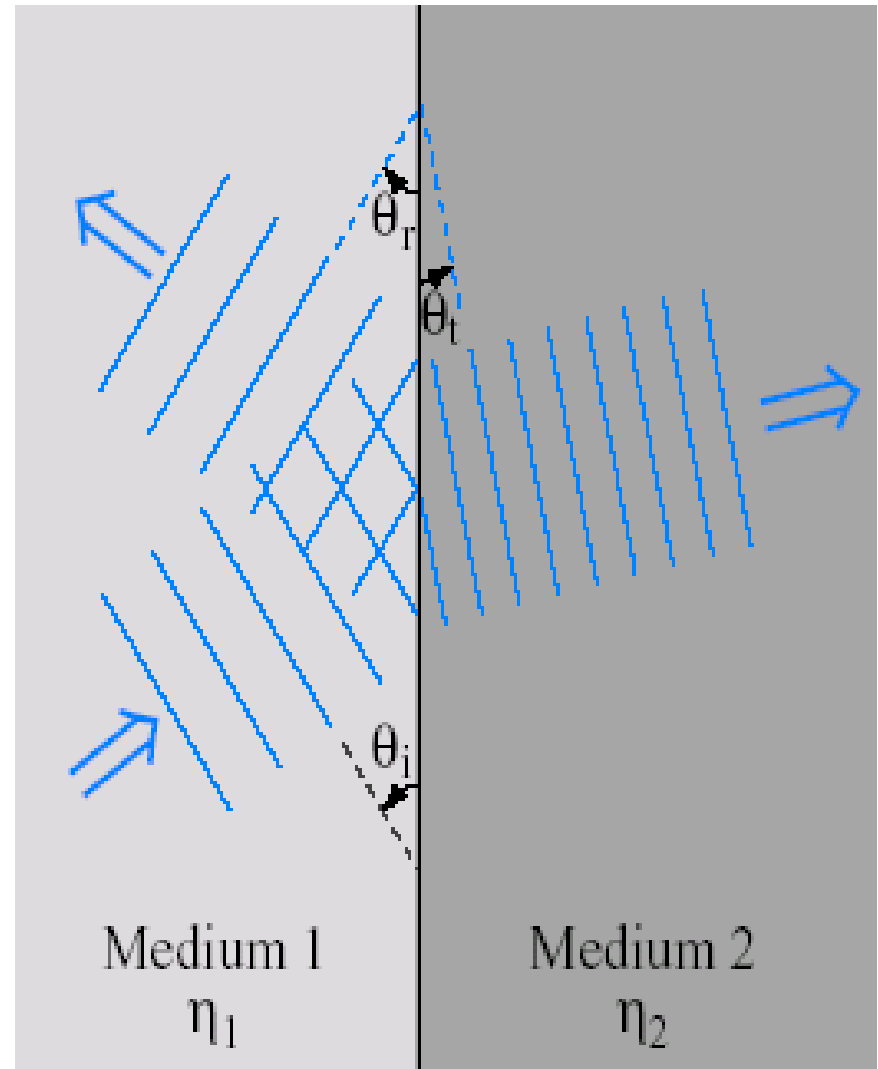
所以介质交界面对波的反射、透射是研究不均匀介质中波传播的基本问题。

介质交界面波反射、透射的图示

射线表示



波阵面表示



介质交界面波的反射、折射必须服从麦克斯韦方程



6

电磁波在两介质交界面的反射、折射必须服从麦克斯韦方程。

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

要注意的是在介质交界面 ϵ 不连续，导数不存在，微分形式的麦克斯韦方程不能直接应用，但我们可以用差分近似微分,或从积分形式的麦克斯韦方程出发导出交界面电磁场量必须满足的关系——边界条件。

用一句话表示，边界条件是什么？

边界条件



介质交界面波的反射与透射特性由边界条件决定。

边界条件：麦克斯韦方程在介质交界面的形式

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

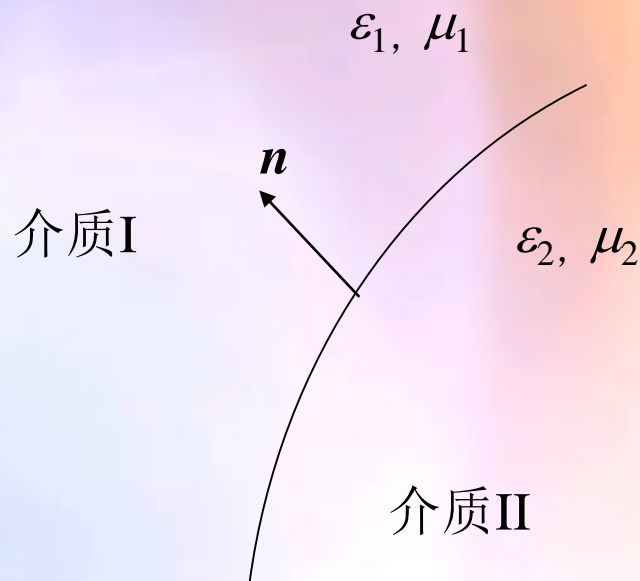
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

特殊情况：介质——导体交界面（导体中场量=0）

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = E_{t1} = 0$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = H_{t1} = \mathbf{J}_S$$



边界条件的导出

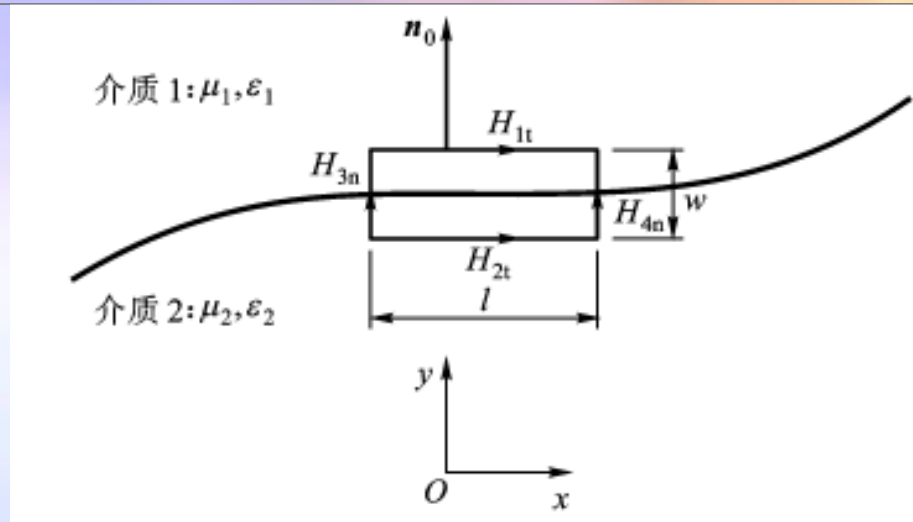
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{j}\omega\mathbf{D}$ 的z分量

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \mathbf{j}\omega D_z$$

其差分形式是

$$\frac{H_{4n} - H_{3n}}{l} - \frac{H_{1t} - H_{2t}}{w} = J_z + \mathbf{j}\omega D_z$$

$$H_{2t} - H_{1t} = J_z w + (\mathbf{j}\omega D_z + \frac{H_{3n} - H_{4n}}{l})w$$



使矩形截面收缩到一个点，且窄边 w 比长边 l 更快趋于零，并定义 $\mathbf{J}_S = \lim_{w \rightarrow 0} \mathbf{J}_V w$

得到 $(H_{2t} - H_{1t}) = J_S$ 或 $\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S$

同样的分析应用于 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}\omega\mathbf{B}$ 的z分量

可得 $E_{1t} = E_{2t}$ 或 $\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$

边界条件的表述

$$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S$$

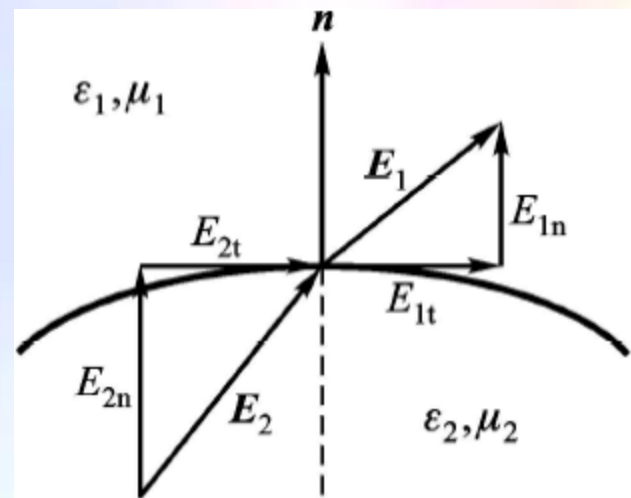
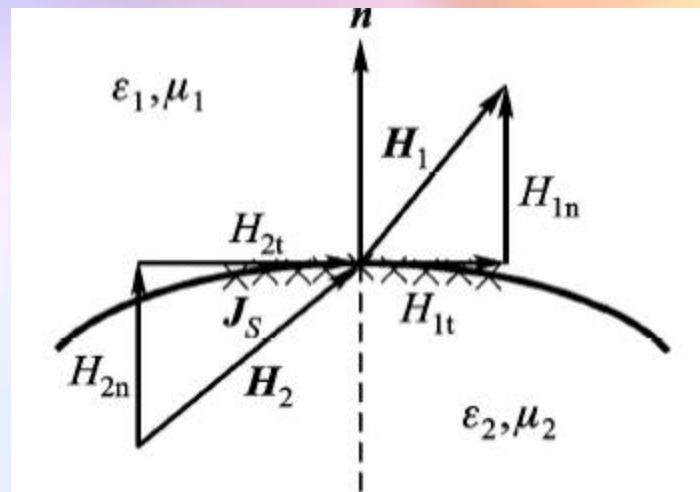
$$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

在介质交界面切向电场连续，而切向磁场不连续，其值等于表面电流。

常规材料的电导率总是有限，趋肤深度 δ 不等于零，为一有限值。当 $w \rightarrow 0$ ，即使体电流密度不为零，面电流密度还是等于零。所以面电流密度仅对于完纯导体才存在。因此边界条件的陈述又可归结为

(1) 两个具有有限电导率的介质，交界面切向电场和切向磁场都连续。

(2) 对于完纯导体交界面切向电场为零， $E_{1t}=0$ ，表面电流 $\mathbf{J}_S = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}$ ， \mathbf{n}_0 是导体表面的单位法向矢量。



边界条件的导出

跨越交界面取一小盒子，并将

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$$

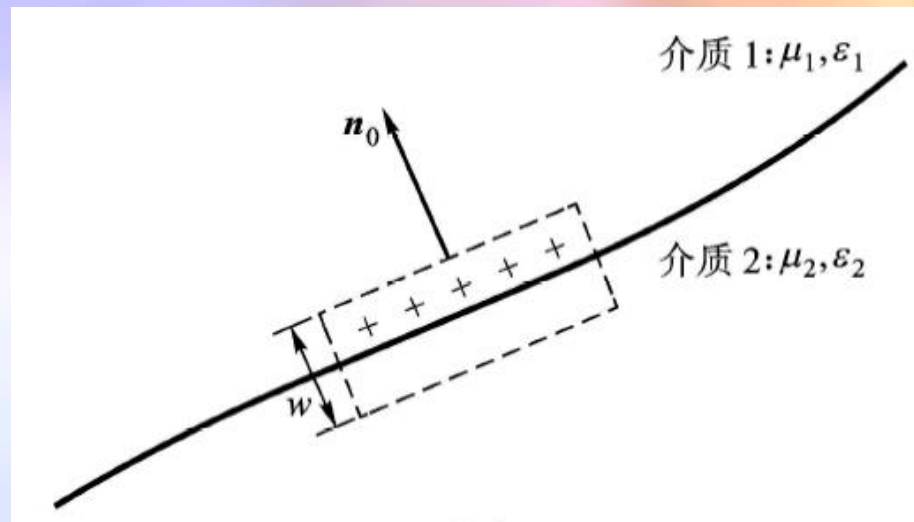
用于该小盒子，即流出该小盒子的电通量等于该小盒子内电荷。

当高度 w 比底面积更快趋于零时，

$$\underbrace{[D_{1n} - D_{2n}] \cdot [\text{底面积}]}_{\text{流出小盒的电通量}} = \underbrace{\rho_S \cdot [\text{底面积}]}_{\text{小盒内总电荷}}$$

这样从 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V$ 得到

同样从 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 得到



矢量 \mathbf{D} 的边界条件

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$$

$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0$$

$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

边界条件表述

$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s$$

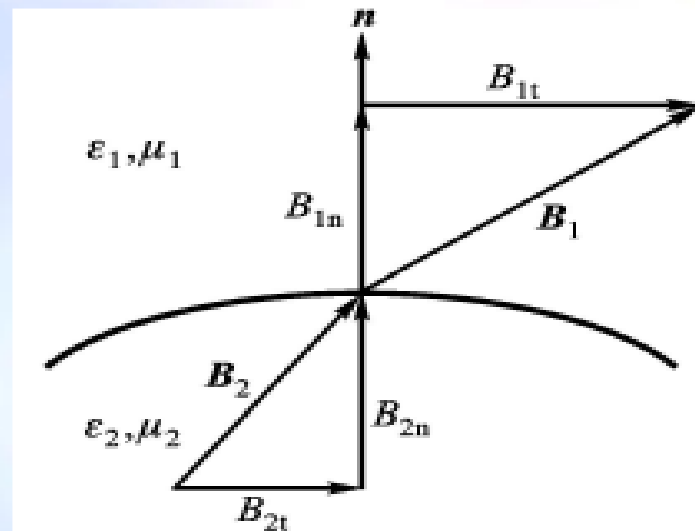
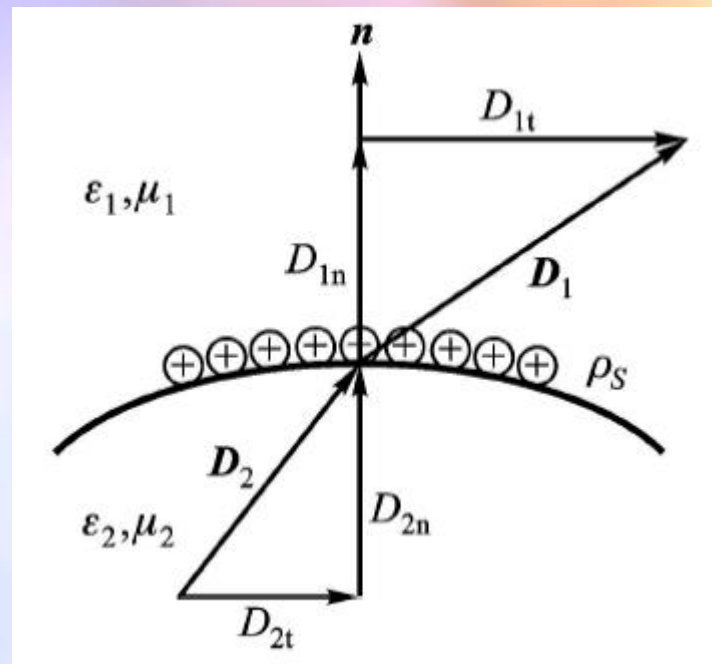
$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

磁通量密度 B 的法向分量在交界面两旁连续，电通量密度 D 的法向分量在交界面两旁的不连续等于交界面表面电荷密度 ρ_s 。

完纯导体内部不存在电磁场，即 $E_{2n} = 0$ ， $D_{2n} = 0$ ，所以完纯导体表面

$$B_n = 0, \quad D_n = \rho_s,$$

即完纯导体表面磁场的法线分量等于零，电通量密度的法向分量等于导体表面电荷密度 ρ_s 。



介质交界面反射透射的两种情况 (本征坐标系中)

12

TE (垂直极化)

\mathbf{k} 只有两个分量, $\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_z \mathbf{z}_0, k_y = 0$

\mathbf{E} 只有y分量, $\mathbf{E} = y_0 E_y$, 没有纵向z分量

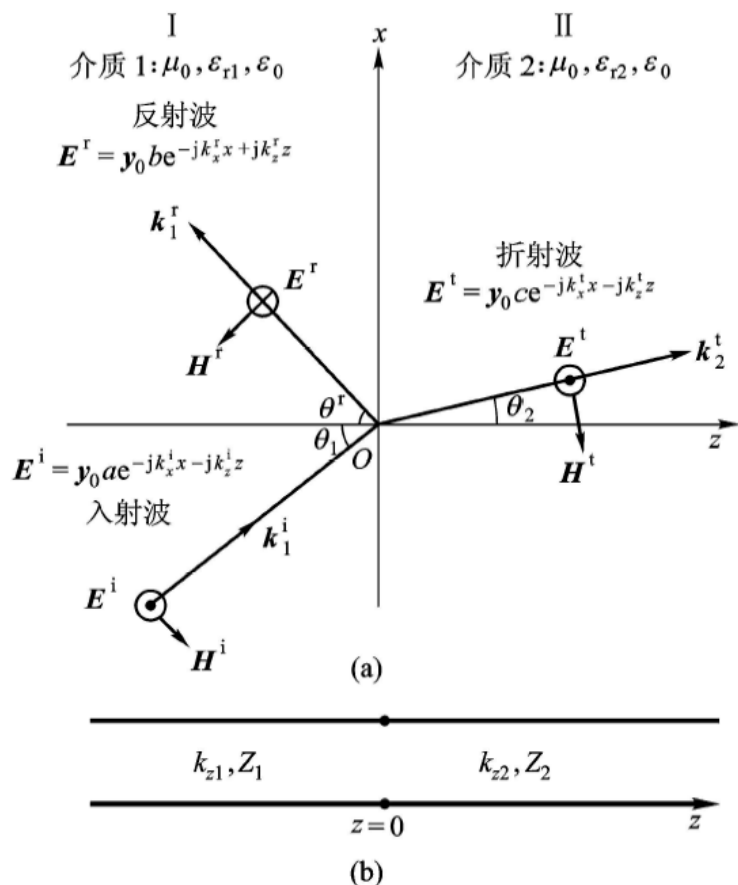
\mathbf{H} 有纵向z分量, $\mathbf{H} = H_x \mathbf{x}_0 + H_z \mathbf{z}_0$

\mathbf{E} 垂直于入射面 (\mathbf{k} 与法线组成的平面)

$$\text{定义反射系数 } \Gamma = \frac{E_y^r}{E_y^i}$$

$$\text{定义透射系数 } T = \frac{E_y^t}{E_y^i}$$

介质交界面对波的反射、透射归结为求反射系数 Γ 与透射系数 T 。



介质交界面对TE平面波
(垂直极化波) 的反射和透射

介质交界面反射透射的两种情况 (本征坐标系中)

13

TM (平行极化)

\mathbf{k} 只有两个分量, $\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_z \mathbf{z}_0, k_y = 0$

\mathbf{H} 只有y分量, $\mathbf{H} = y_0 H_y$, 没有纵向z分量

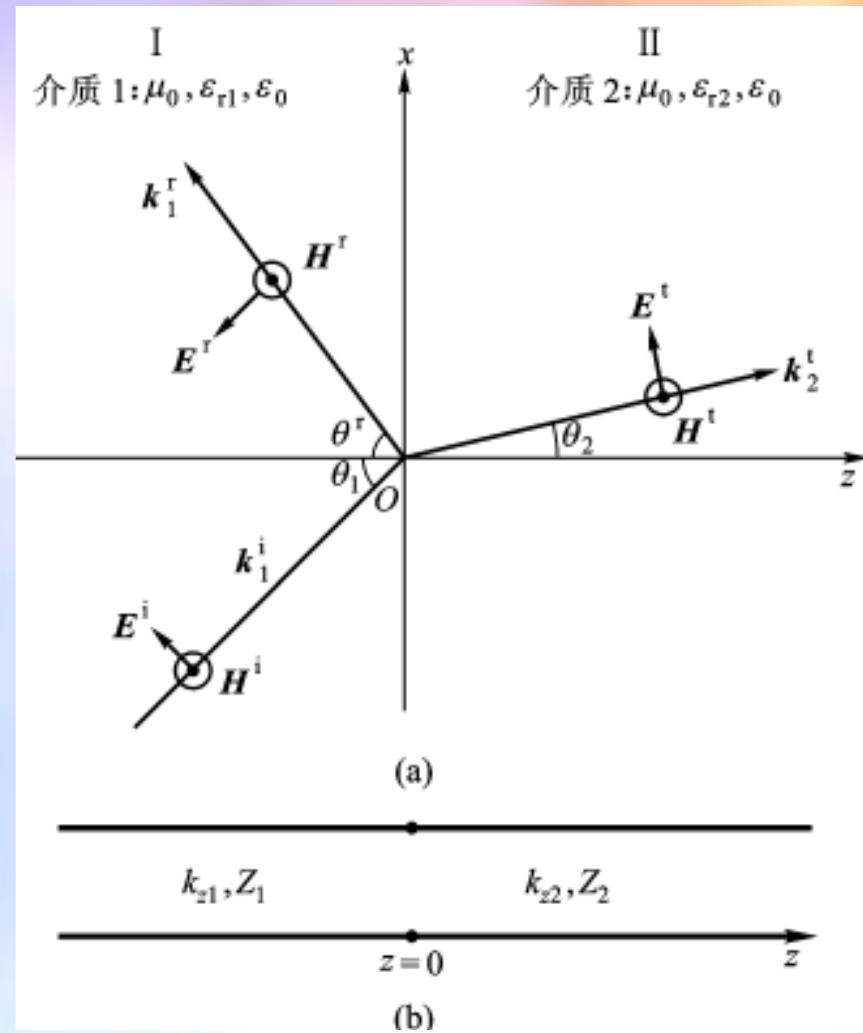
\mathbf{E} 有纵向z分量, $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x}_0 + E_z \mathbf{z}_0$

\mathbf{E} 在入射面内 (\mathbf{k} 与法线组成的平面)

定义反射系数 $\mathcal{R} (z=0) = \frac{E_x^r}{E_x^i}$

定义透射系数 $T(z=0) = \frac{H_y^t}{H_y^i}$

介质交界面的反射与透射, 归结为求反射系数 \mathcal{R} 与透射系数 T 。



介质交界面对TM波平行极化波的反射、透射

介质交界面反射、透射的分析方法

14

TE (垂直极化)

已知: 入射波 $E^i = y_0 E_y = y_0 a e^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z}$

由麦克斯韦方程求出 $H^i = x_0 H_x^i + z_0 H_z^i$

引入反射系数 Γ' , ($E_y^r = \Gamma' E_y^i$), 写出

反射波 E_y^r, H_x^r .

引入透射系数 T' , ($E_y^t = T' E_y^i$), 写出

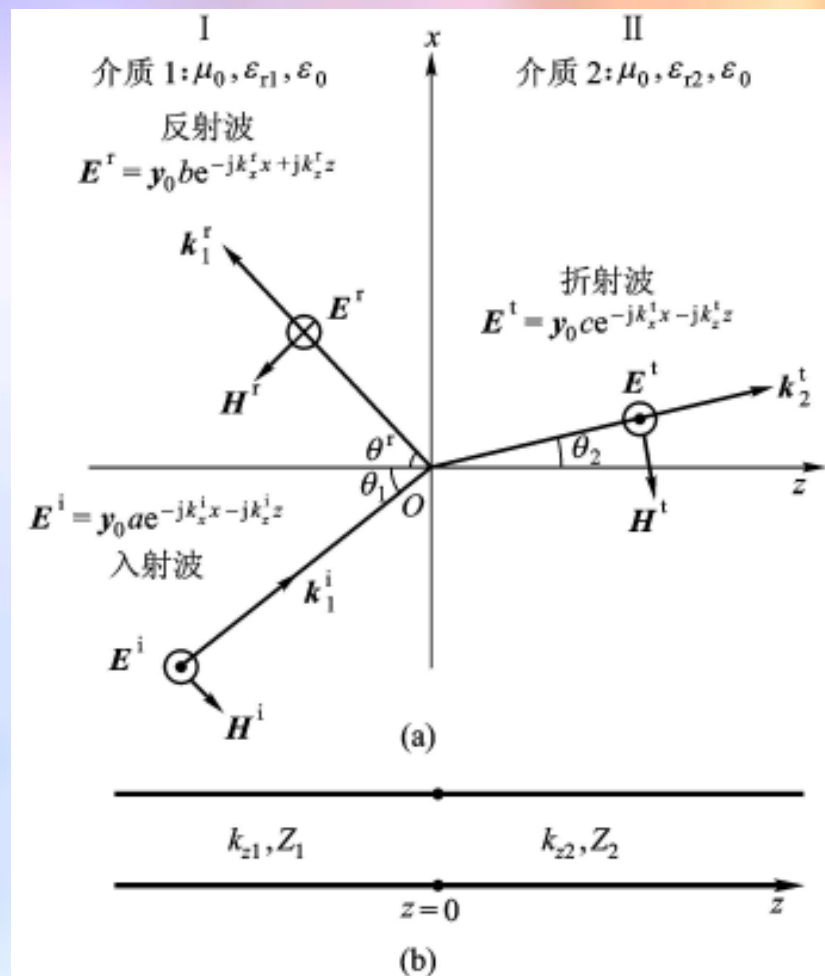
透射波 E_y^t, H_x^t .

在介质交界面两旁切向场量连续

$$E_y^i + E_y^r = E_y^t$$

$$H_x^i + H_x^r = H_x^t$$

求出 Γ', T' .



介质交界面对TE平面波
(垂直极化波) 的反射和透射

介质交界面反射、透射的分析方法

15

TM (垂直极化)

入射波 $H^i = \mathbf{y}_0 H_y = \mathbf{y}_0 a e^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z}$

由麦克斯韦方程求出 $\mathbf{E}^i = \mathbf{x}_0 E_x^i + \mathbf{z}_0 E_z^i$

引入反射系数 Γ'' , ($E_x^r = \Gamma'' E_x^i$), 写出

反射波 H_y^r, E_x^r

引入透射系数 T'' , ($H_y^t = T'' H_y^i$), 写出

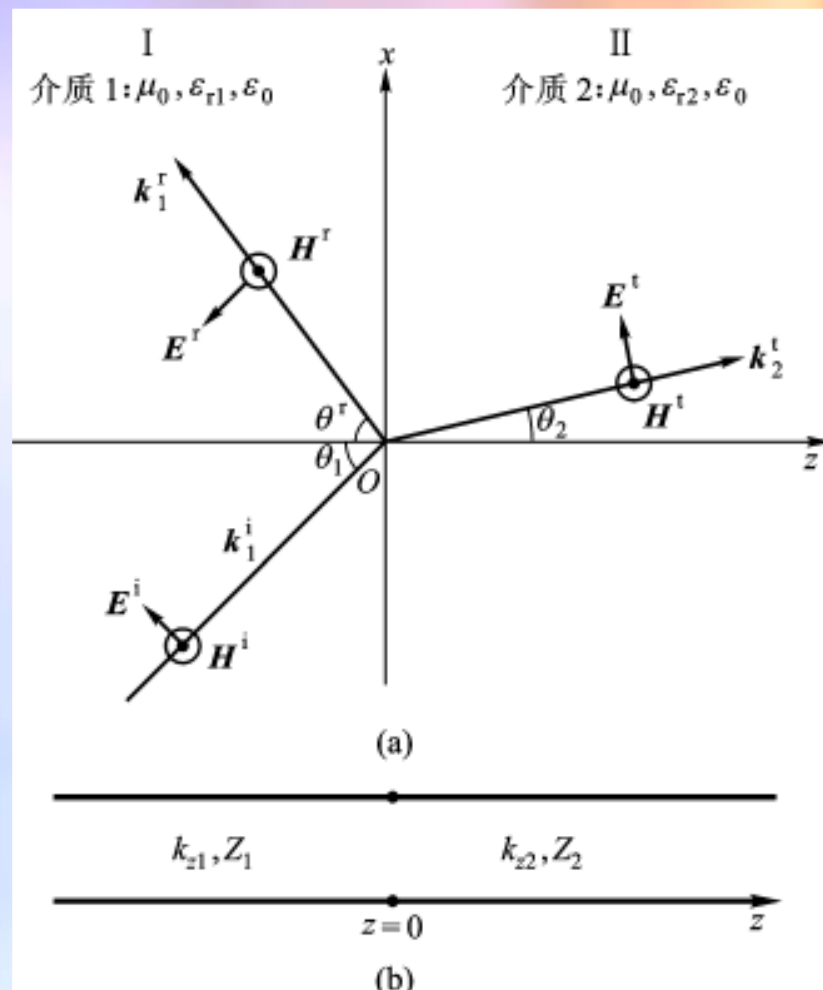
透射波 H_y^t, E_x^t

在介质交界面两旁切向场量连续

$$H_y^i + H_y^r = H_y^t$$

$$E_x^i + E_x^r = E_x^t$$

求出 Γ'' , T'' .



介质交界面对TM波平行板化
波的反射、透射

场量匹配法求介质交界面对TE波的反射与折射

场量匹配法：介质交界面两旁电场与磁场的切向分量连续

入射波场：TE入射平面波电场只有y分量

$$E_y^r(x, z) = be^{-jk_x^r x} e^{jk_z^r z}$$

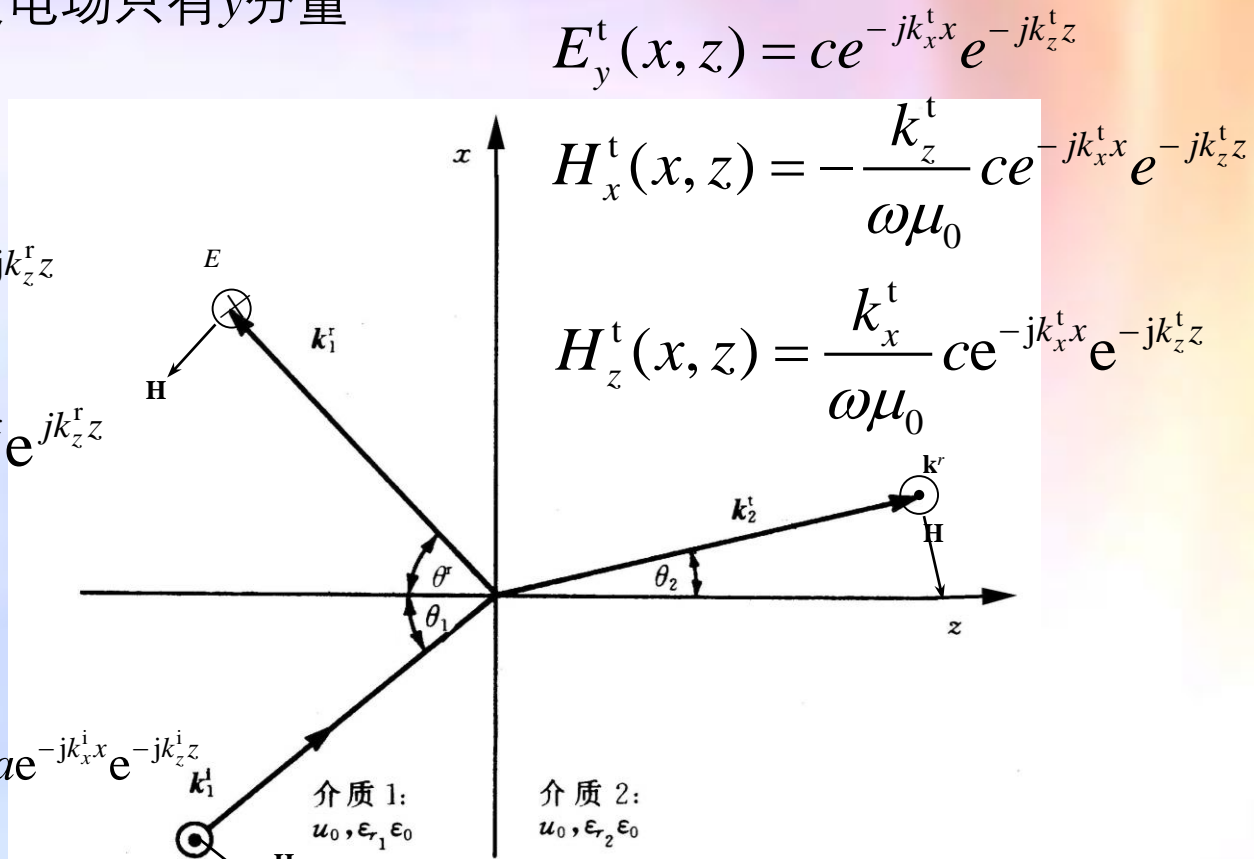
$$H_x^r(x, z) = \frac{k_z^r}{\omega\mu_0} be^{-jk_x^r x} e^{jk_z^r z}$$

$$H_z^r(x, z) = \frac{k_x^r}{\omega\mu_0} be^{-jk_x^r x} e^{jk_z^r z}$$

$$E_y^i(x, z) = ae^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z}$$

$$H_x^i(x, z) = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y^i}{\partial z} = -\frac{k_z^i}{\omega\mu_0} ae^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z}$$

$$H_z^i(x, z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y^i}{\partial x} = \frac{k_x^i}{\omega\mu_0} ae^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z}$$



介质交界面对TE波（垂直极化波）
的反射和折射

边界条件的应用

17

交界面两边电场、磁场切向分量连续，要求对于任何 x 有关系

$$E_y^i(x, 0) + E_y^r(x, 0) = E_y^t(x, 0)$$

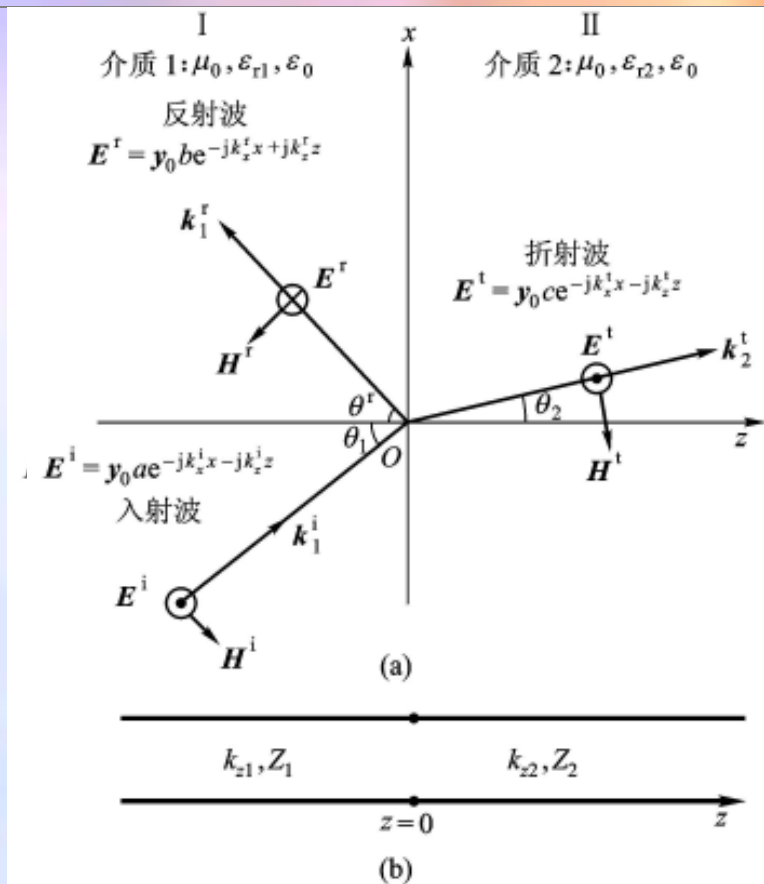
$$H_x^i(x, 0) + H_x^r(x, 0) = H_x^t(x, 0)$$

或

$$ae^{-jk_x^i x} + be^{-jk_x^r x} = ce^{-jk_x^t x}$$

$$-\frac{k_z^i}{\omega\mu_0} ae^{-jk_x^i x} + \frac{k_z^r}{\omega\mu_0} be^{-jk_x^r x} = \frac{k_z^t}{\omega\mu_0} ce^{-jk_x^t x}$$

从这两个方程可得到什么信息？



介质交界面对TE平面波
(垂直极化波) 的反射和透射

反射定理和折射定理

18

$$ae^{-jk_x^i x} + be^{-jk_x^r x} = ce^{-jk_x^t x}$$

$$-\frac{k_z^i}{\omega\mu_0} ae^{-jk_x^i x} + \frac{k_z^r}{\omega\mu_0} be^{-jk_x^r x} = \frac{k_z^t}{\omega\mu_0} ce^{-jk_x^t x}$$

要使上两式对任意 x 都成立，只有

$$k_x^i = k_x^r = k_x^t = k_x$$

由此可得

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$$

$$\sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \theta_1 = \sqrt{\epsilon_{r2}} \sin \theta_2$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad n = \sqrt{\epsilon_r}$$

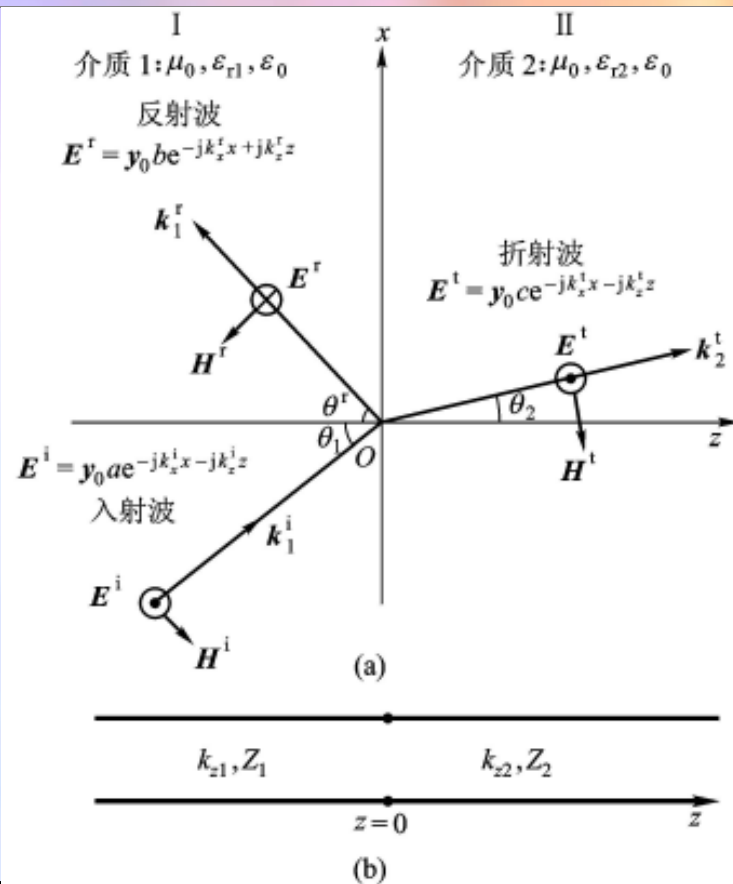
这就是物理学中熟知的斯耐尔定律

$$k_x^i = k_x^r = k_x = k_1 \sin \theta_1 \quad k_z^r = k_z^i = \sqrt{k_1^2 - k_x^2}$$

由上两式可知，入射角与反射角的正切

具有相同的数值 k_x / k_{z1} 即 $\theta_1 = \theta^r$

这就是**反射定理**。**折射定理为：** $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$



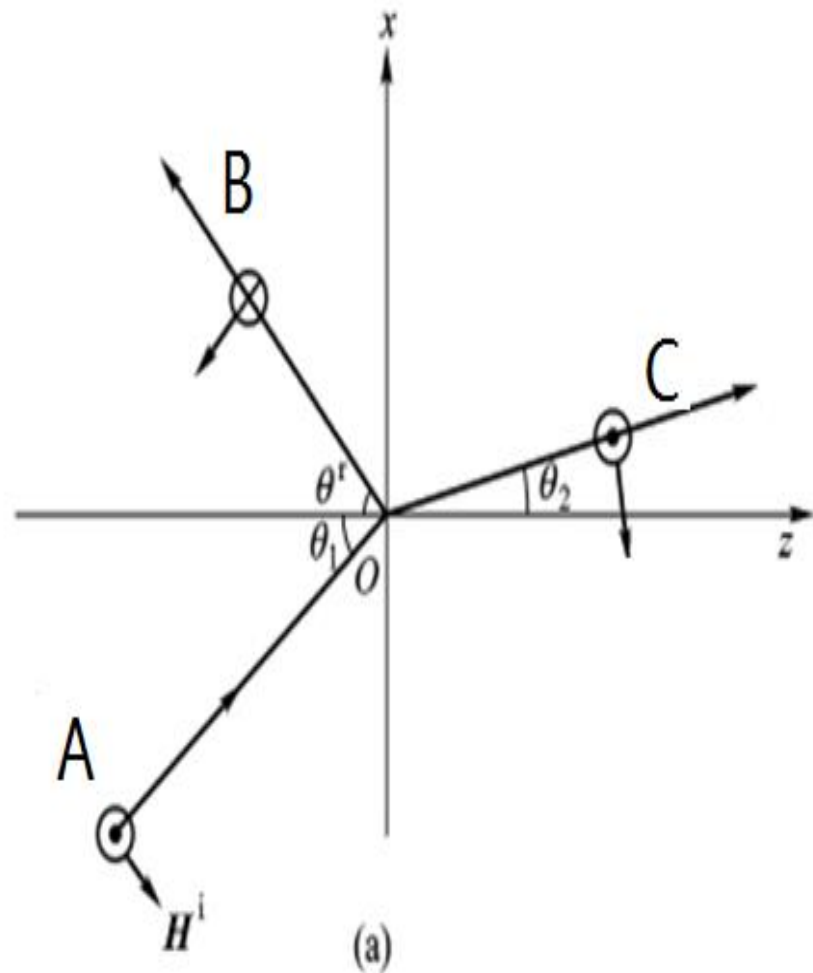
介质交界面对TE平面波
(垂直极化波) 的反射和透射

反射定理和折射定理与最小作用原理

19

最小作用原理：光或者电磁波从A到B或者从A到C，行程最短。

对行程对 z 求导等于0的情况，即取极值，可以导出反射和折射定理。同时也等价于相位取极值。



反射系数与折射系数

$$ae^{-jk_x^i x} + be^{-jk_x^r x} = ce^{-jk_x^t x}$$

$$-\frac{k_z^i}{\omega\mu_0} ae^{-jk_x^i x} + \frac{k_z^r}{\omega\mu_0} be^{-jk_x^r x} = -\frac{k_z^t}{\omega\mu_0} ce^{-jk_x^t x}$$

在边界面上 $z=0$

得到 $a + b = c$ $Y_i = \frac{k_{zi}}{\omega\mu_0} \quad i = 1 \text{ 或 } 2$

$$Y_1(a - b) = Y_2 c \quad k_z^t = k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^{t2}} = k_0 \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_1}$$

Y_i 具有导纳量纲，叫做 z 方向特征波导纳，其倒数 $Z_i = 1/Y_i$ 具有阻抗量纲，叫做 z 方向特征波阻抗。

由此得到反射系数 $\Gamma(z=0)$ 与透射系数 $T(z=0)$

$$\Gamma(z=0) = \frac{E_y^r(z=0)}{E_y^i(z=0)} = \frac{b}{a} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{k_{z1} - k_{z2}}{k_{z1} + k_{z2}}$$

$$T(z=0) = \frac{E_y^t(z=0)}{E_y^i(z=0)} = \frac{c}{a} = \frac{2Y_1}{Y_1 + Y_2} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2k_{z1}}{k_{z1} + k_{z2}} = 1 + \Gamma(z=0)$$

传输线模型法求介质交界面对TE波的反射与折射

21

区域I、II z方向波的传播都可用特定参数的传输线等效。

$$\kappa_1 = k_{z_1} = k_1 \cos \theta_1 \quad Z_1 = \omega\mu/k_{z_1}$$

$$\kappa_2 = k_{z_2} = \sqrt{k_2^2 - k_{x_1}^2}$$

$$= \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta_1)^2} \quad Z_2 = \omega\mu/k_{z_2}$$

边界条件 $\mathbf{E}_{t_1} = \mathbf{E}_{t_2} \quad \mathbf{H}_{t_1} = \mathbf{H}_{t_2}$

$$\mathbf{E}_{t_1} = \mathbf{y}_0 E_{y_1} = -\mathbf{y}_0 \varphi(x) U_1(z)$$

$$\mathbf{H}_{t_1} = \mathbf{x}_0 H_{x_1} = \mathbf{x}_0 \varphi(x) I_1(z)$$

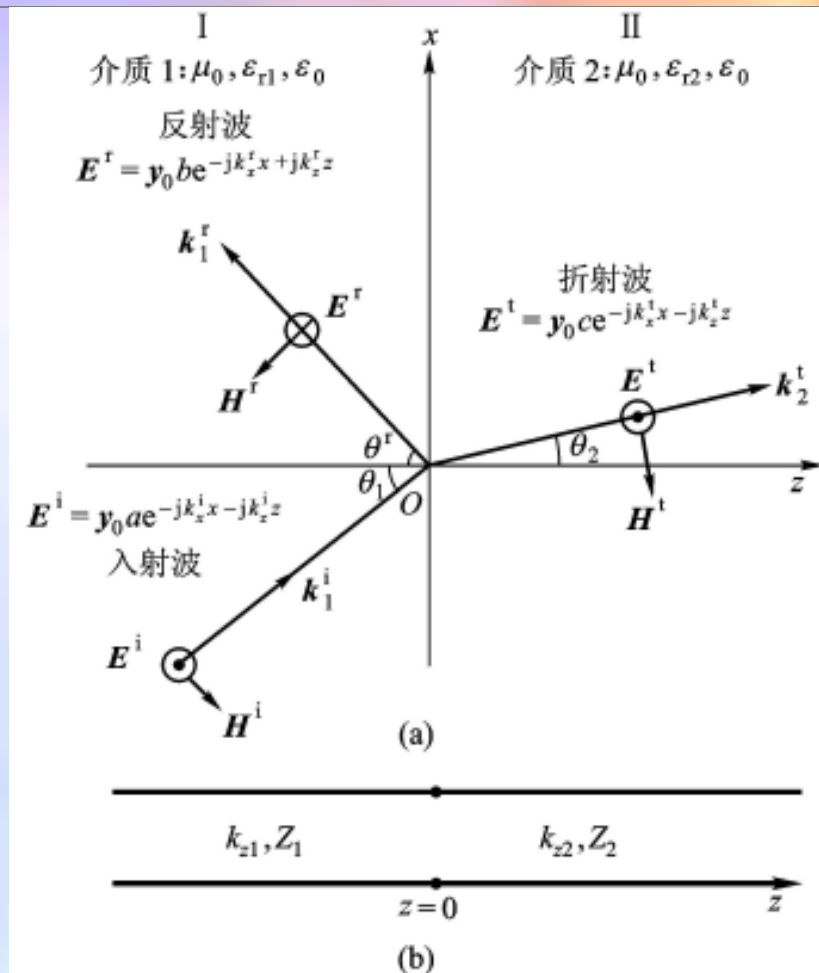
$$\mathbf{E}_{t_2} = \mathbf{y}_0 E_{y_2} = -\mathbf{y}_0 \varphi(x) U_2(z)$$

$$\mathbf{H}_{t_2} = \mathbf{x}_0 H_{x_2} = \mathbf{x}_0 \varphi(x) I_2(z)$$

模式函数满足

其解为

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_x^2 \right) \varphi(x) = 0 \quad \varphi(x) = e^{-jk_x x}$$



所以

$$U_1(z=0) = U_2(z=0)$$

$$I_1(z=0) = I_2(z=0)$$

传输线模型法求介质交界面对TE波的反射与折射

22

$$U_1(z=0) = U_2(z=0)$$

$$I_1(z=0) = I_2(z=0)$$

两传输线在界面可直接连接，故有

$$\Gamma(z=0) = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$\text{因为 } U_1(z) = U_1^i [1 + \Gamma(z)] e^{-jk_{z1}z}$$

$$U_2(z) = U_2^i e^{-jk_{z2}z}$$

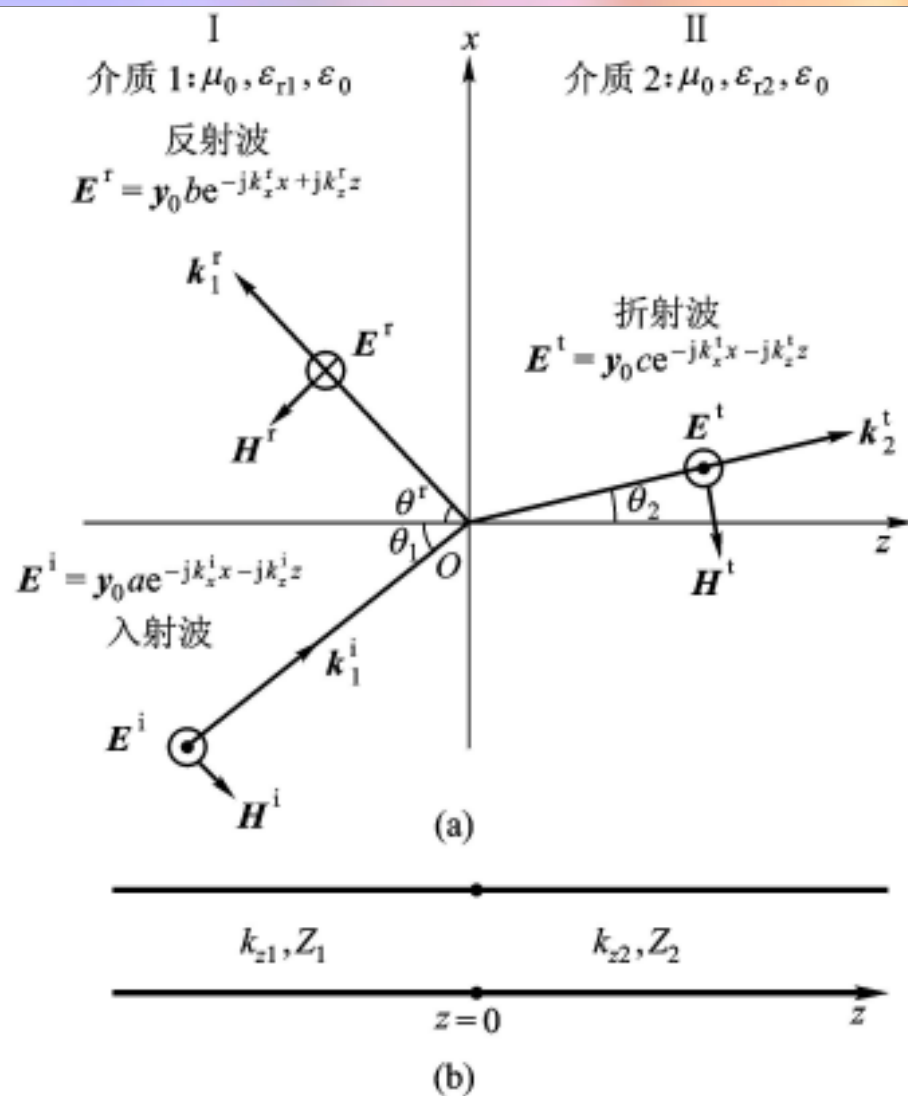
$$\text{在 } z=0 \text{ 界面, } U_1(0) = U_2(0)$$

$$U_1^i (1 + \Gamma(z=0)) = U_2^i$$

$$\text{所以折射系数 } T(z=0) = \frac{E_y^t}{E_y^i} = \frac{U_2^i}{U_1^i}$$

$$T(z=0) = 1 + \Gamma(z=0)$$

与前面用场量匹配法得到的结果一致。



纵向场分布

横向场量沿纵向的分布与电压 U 、
电流 I 沿传输线分布相同。

$Z < 0$ 区域 I

$$U_1(z) = [1 + \Gamma_1(z)] U_1^i e^{-jk_{z1}z}$$

$$I_1(z) = [1 - \Gamma_1(z)] \frac{U_1^i}{Z_1} e^{-jk_{z1}z}$$

$Z > 0$ 的区域 II

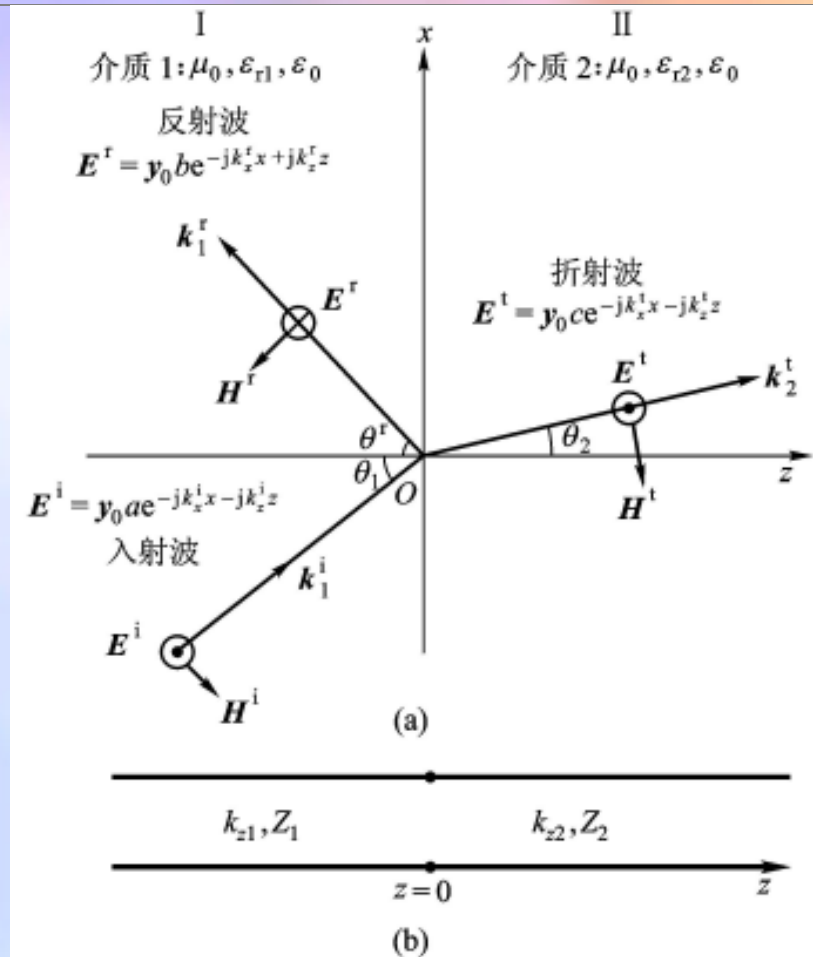
$$U_2(z) = U_2^i e^{-jk_{z2}z}$$

$$I_2(z) = \frac{U_2^i}{Z_2} e^{-jk_{z2}z}$$

$z = 0$ 处电压 U 连续

$$[1 + \Gamma_1(z = 0)] U_1^i = U_2^i$$

$$\frac{U_2^i}{U_1^i} = 1 + \Gamma_1(z = 0) = T(z = 0)$$



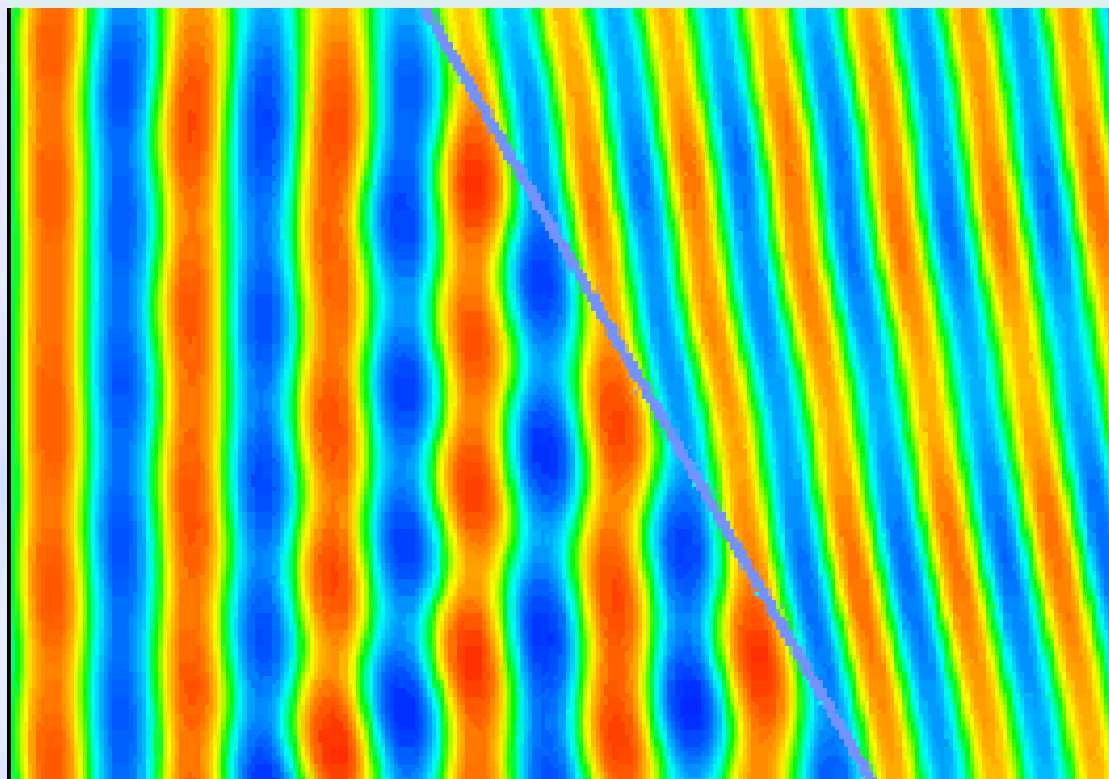
区域I与II波传播的特征

区域I、II都有沿界面分量的波 $e^{-jk_x x}$ 传播。

区域I入射波与反射波的叠加，与界面垂直的方向形成驻波。

沿界面方向为以 $e^{-jk_x x}$ 表示的行波。

区域II则是以 k_z 为特征的平面波。



复习要点

- 麦克斯韦方程在介质交界面形式就是边界条件。它是处理波在交界面行为的出发点。
 - 介质交界面对波的反射、透射可用反射系数 Γ 与透射系数 T 表示。
 - 介质交界面对波的反射、透射可分为TE、TM两种情况处理，其分析既可以用场量匹配法，也可用传输线模型法，两种方法等价。
- 区域I入射波与反射波的干涉，在与界面垂直方向形成驻波，沿界面方向为 $e^{-jk_x x}$ 的行波。

复习范围

5.1, 5.2.1

帮助理解的多媒体演示：MMS13