

离散数学

Discrete Mathematics

第2章 关系

宋牟平 songmp@zju.edu.cn 玉泉校区 行政楼 325

第2章 关系

关系的概念也是最基本的。

自然界和日常生活中的事物常常是相互关联的，存在着各种各样的关系。如师生关系，同学关系，同事关系，亲戚关系，同乡关系。自然数集 N 中的数满足 $1<2$, $2<3$, $3<4$, $4<5$, $5<6$。

2.1 笛卡尔积

定义2-1 有序n元组：由 n 个具有给定次序的元素 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的序列，记 (a_1, a_2, \dots, a_n) 。注意

$$1) (a,b,c) \neq (b,a,c)$$

$$2) (a,a,a) \neq (a,a) \neq (a,a)$$

定义2-2 有序n元组相等：设 (a_1, a_2, \dots, a_n) 和 (b_1, b_2, \dots, b_n) 是两个有序 n 元组，若 $a_1=b_1, a_2=b_2, \dots, a_n=b_n$ ，则

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

定义2-3 笛卡尔积：设 A_1, A_2, \dots, A_n 是任意集合，所有有序 n 元组 (a_1, a_2, \dots, a_n) 的集合称为 A_1, A_2, \dots, A_n 的笛卡尔积，记

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \left(\times_{i=1}^n A_i \right) = \{ (a_1, a_2, \cdots a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots n \}$$

也称**n**阶笛卡积。若**A_i**相同，可记为

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_n = A^n$$

笛卡积元素的数目

$$\# \left(\times_{i=1}^n A_i \right) = \prod_{i=1}^n \# A_i$$

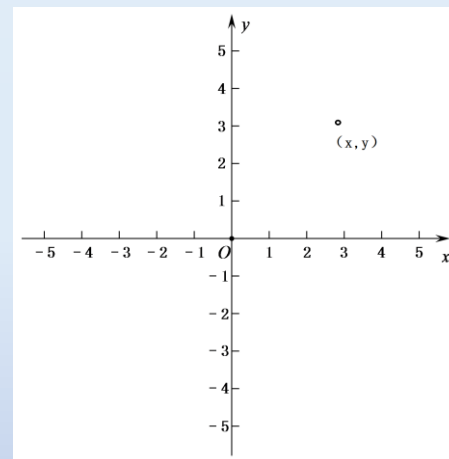
例 $A_1 = \{0, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{1, 4\}$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(0, 2, 1), (0, 2, 4), (0, 3, 1), (0, 3, 4), (2, 2, 1), (2, 2, 4), (2, 3, 1), (2, 3, 4)\}$$

例 二维实数平面可以看作实数**R**构成的笛卡积

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{R} \}$$

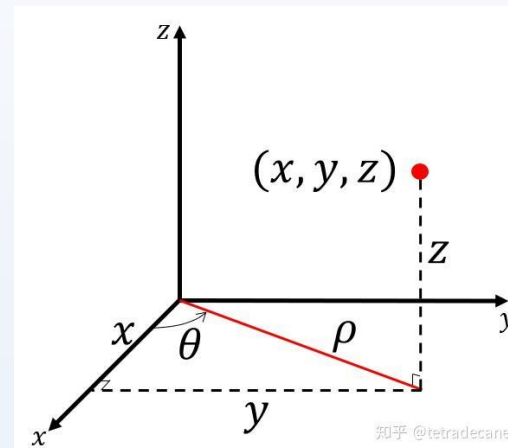
(x,y)为平面上的一个点。



例 三维空间可以看作实数 \mathbf{R} 构成的三阶笛卡积

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

(x, y, z) 是空间中的一个点。



对二阶笛卡尔积可以证明有分配律成立

$$(1) \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(2) \quad (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

$$(3) \quad (A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

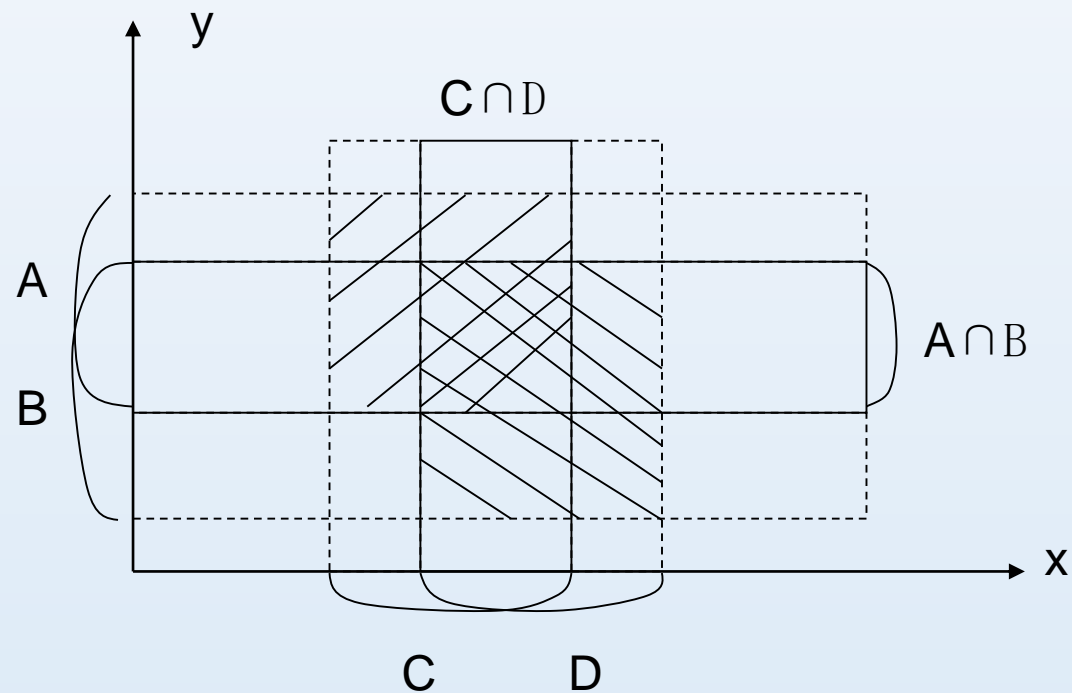
$$(4) \quad A \subseteq C, B \subseteq D \Leftrightarrow A \times B \subseteq C \times D$$

但交换律不成立

$$(5) \quad A \times B \neq B \times A$$

书中给出了(1)的证明，(2)和(3)的证明为书中的习题。

如 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$



2.2 关系

自然界和日常生活中的事物存在着各种各样的关系。这些关系可以用集合来表示。（最终要分解到0—1关系）

定义2-4 关系： n 阶笛卡尔积 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的任一个子集 ρ 称为 A_1, A_2, \dots, A_n 上的一个 **n 元关系**。即，若

$$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

则 ρ 是 A_1, A_2, \dots, A_n 上的一个 n 元关系。特别地，若 $n=2$ ， ρ 称为 A, B 上的 **二元关系**。

例 $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$

$\rho \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ，是 \mathbb{R} 上的一个二元关系，是实数平面上半径为1的圆的点集。

例 设 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ ，定义

$$\rho=\{(x,y)|x,y\in A, (x-y)\text{可被}2\text{ 整除, 且}(x-y)\in A\}$$

$$\rho=\{(2,0),(4,0),(6,0),(4,2),(6,2),(6,4),(3,1),(5,1),(5,3),(7,1),\\(7,3),(7,5)\}$$

关系也常用表格表示，如数据库中的数据。

部门	姓名	性别	部门电话
水产部	史文心	男	2786
石油部	罗林	男	2482
工业部	卢依人	女	3133
石油部	秦如	女	2482
石油部	李英	男	2482
工业部	王义	男	3133
电力部	王小英	女	3025

$$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$$

$$A_1=\{\text{水产部, 石油部, 工业部, 电力部}\}$$

$$A_2=\{\text{史文心, 罗林, 卢依人, 秦如, 李英, 王义, 王小英}\}$$

$$A_3=\{\text{男, 女}\}$$

$$A_4=\{2786, 2482, 3133, 3025\}$$

特殊
关系

空关系

$$\rho = \emptyset;$$

满关系

$$\rho = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \quad \text{笛卡尔积}$$

定义2-5 A, B上的二元关系也称为A到B的二元关系, 对二元关系 ρ 有定义

定义域 $D_\rho = \{a | a \in A, \text{ 存在 } b \in B, \text{ 使得 } (a, b) \in \rho\}$

值域 $R_\rho = \{b | b \in B, \text{ 存在 } a \in A, \text{ 使得 } (a, b) \in \rho\}$

显然

$$D_\rho \subseteq A, \quad R_\rho \subseteq B$$

逆关系

定义2-6 逆关系: 若 ρ 是A到B的关系, 则B到A的关系

$$\tilde{\rho} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \rho\}$$

称为 ρ 的**逆关系**。

例 $\rho = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2)\}$ 的逆关系为 $\tilde{\rho} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$

例 工资单

成员	工资
张扬	3000
黎明	2500
王凡	5000

工资	成员
3000	张扬
2500	黎明
5000	王凡

上面的表格互为逆关系。由左表查某成员的工资, 由右表查拿某挡工资的成员。

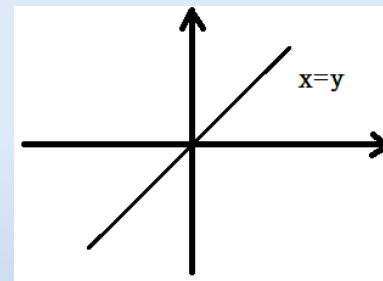
A到A的二元关系称为**A上的二元关系**。对A上的二元关系, 有**恒等关系**

特殊关系

$$I_A = \{(a_i, a_i) \mid a_i \in A\}$$

例

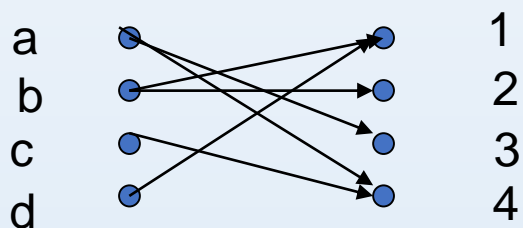
$$I_R = \{(x, y) \mid x, y \in R, x = y\}$$



关系的表示方法

关系除了用集合的定义表示外，还可用表格、图示和矩阵表示。表格在前面已提到，如工资单、成绩单、报名表等。关系图，如家谱、目录、地图、联络图等。矩阵，如计算机里存储数据。

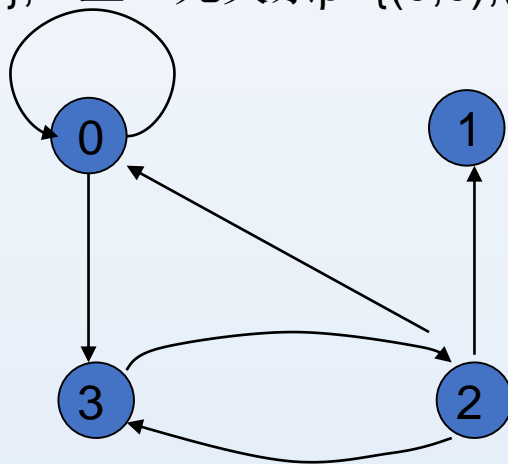
例 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{1,2,3,4\}$



$$M_{\rho} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & & \end{matrix}$$

A上二元关系图

例 $A=\{0,1,2,3\}$, A上二元关系 $\rho=\{(0,0),(0,3),(2,3),(3,2),(2,1),(2,0)\}$



三种（表格、图示和矩阵）关系表示方法各有特点，用于不同场合。

集合A上的关系：由集合A到A自身的关系（是 A^2 的一个子集）。

特殊
二元
关系

普遍关系：若 $\rho=A^2$ ，用 \mathbf{U}_A 表示， $\mathbf{U}_A=\{(a_i, a_j) \mid a_i, a_j \in A\}$

恒等关系：A上的恒等关系用 \mathbf{I}_A 表示， $\mathbf{I}_A=\{(a_i, a_i) \mid a_i \in A\}$

2.3 关系的复合

二元关系运算

设 ρ_1 和 ρ_2 都是A到B的关系（笛卡尔积子集，集合）

$$(1) \rho_1 \cup \rho_2;$$

$$(2) \rho_1 \cap \rho_2$$

$$(3) \rho_1 - \rho_2;$$

$$(4) \rho' = (A \times B) - \rho$$

$$(5) \tilde{\rho}$$

关系运算的性质

关系是集合，集合的运算定律都适用，下面是逆运算(不是补)的性质。

$$(1) \tilde{\tilde{\rho}} = \rho$$

$$(2) \overline{(\rho_1 \cup \rho_2)} = \overline{\rho_1} \cap \overline{\rho_2}$$

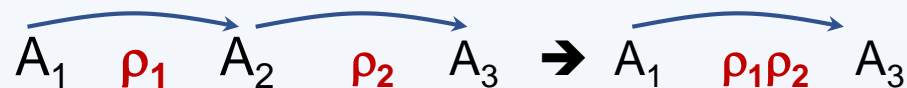
$$(3) \overline{(\rho_1 \cap \rho_2)} = \overline{\rho_1} \cup \overline{\rho_2}$$

$$(4) \overline{(\rho_1 - \rho_2)} = \overline{\rho_1} - \overline{\rho_2}$$

$$(5) \quad \widetilde{A \times B} = B \times A$$

$$(6) \quad \rho_1 \subseteq \rho_2 \Leftrightarrow \tilde{\rho}_1 \subseteq \tilde{\rho}_2$$

关系的复合运算



定义2-7 复合关系: 设 ρ_1 是一个 A_1 到 A_2 的关系, ρ_2 是一个 A_2 到 A_3 的关系, 则 ρ_1 和 ρ_2 的复合关系 $\rho_1 \cdot \rho_2$ 是一个 A_1 到 A_3 的关系, 定义为当且仅当存在某个 $a_k \in A_2$ 时, 使得 $a_i \rho_1 a_k$, $a_k \rho_2 a_j$ 时, 有 $a_i (\rho_1 \cdot \rho_2) a_j$ 。

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{(a_i, a_j) \mid (a_i, a_k) \in \rho_1 \text{ 且 } (a_k, a_j) \in \rho_2\}$$

例 $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$

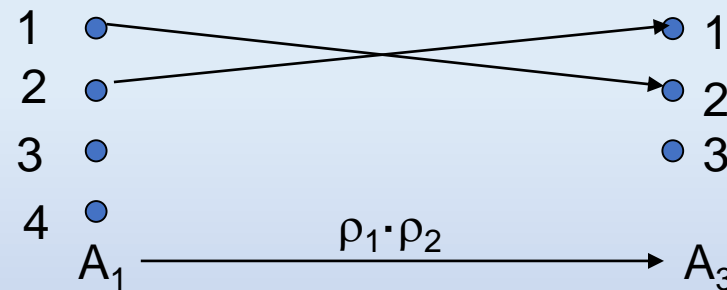
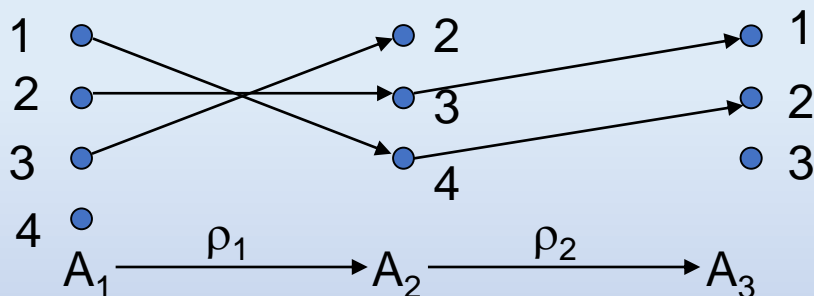
$$\rho_1 = \{(a_i, a_k) \mid a_i + a_k = 5\} = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$\rho_2 = \{(a_k, a_j) \mid a_k - a_j = 2\} = \{(3, 1), (4, 2)\}$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

路径 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 。

4、3是中间结点。



例 选课

$A = \{\text{张华}a_1, \text{王岳}a_2, \text{陈平}a_3, \text{李兰}a_4\}$ 学生

$B = \{\text{软件}b_1, \text{硬件}b_2, \text{自动化}b_3, \text{遥感}b_4\}$ 专业

$C = \{\text{工程制图}c_1, \text{电子线路}c_2, \text{操作系统}c_3, \text{离散数学}c_4\}$ 课程

$\rho_1 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_2, b_4), (a_3, b_3), (a_3, b_4), (a_4, b_1), (a_4, b_4)\}$

学生选双学位专业的情况

$\rho_2 = \{(b_1, c_3), (b_1, c_4), (b_2, c_2), (b_2, c_3), (b_2, c_4), (b_3, c_1), (b_3, c_2), (b_4, c_2), (b_4, c_4)\}$

本学期各专业的必修课

$\rho_3 = \rho_1 \cdot \rho_2$

$= \{(a_1, c_1), (a_1, c_2), (a_1, c_3), (a_1, c_4), (a_2, c_2), (a_2, c_3), (a_2, c_4), (a_3, c_1), (a_3, c_2), (a_3, c_4), (a_4, c_2), (a_4, c_3), (a_4, c_4)\}$

学生本学期必修的课程

定理2-1 设 ρ 是集合A到B的关系, 则 $I_A \cdot \rho = \rho \cdot I_B = \rho$

定理2-2 设 ρ_1 是集合 A_1 到 A_2 的关系, ρ_2 是集合 A_2 到 A_3 的关系, ρ_3 是集合 A_3 到 A_4 的关系, 则有 $(\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot \rho_3 = \rho_1 \cdot (\rho_2 \cdot \rho_3)$

证明 根据复合关系的定义, $(\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot \rho_3$ 和 $\rho_1 \cdot (\rho_2 \cdot \rho_3)$ 同是由 A_1 到 A_4 的关系.

下面证明 $(\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot \rho_3 \subseteq \rho_1 \cdot (\rho_2 \cdot \rho_3)$.

设 $(a, d) \in (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot \rho_3$, 由复合关系的定义, 必有 $c \in A_3$ 使得 $a(\rho_1 \cdot \rho_2)c$, $c\rho_3d$, 又由 $a(\rho_1 \cdot \rho_2)c$, 必有 $b \in A_2$ 使得 $a\rho_1b$, $b\rho_2c$. 由 $b\rho_2c$, $c\rho_3d$, 可得 $b(\rho_2 \cdot \rho_3)d$, 于是由 $a\rho_1b$, $b(\rho_2 \cdot \rho_3)d$, 可得 $a(\rho_1 \cdot (\rho_2 \cdot \rho_3))d$, 即 $(a, d) \in \rho_1 \cdot (\rho_2 \cdot \rho_3)$, 故有 $(\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot \rho_3 \subseteq \rho_1 \cdot (\rho_2 \cdot \rho_3)$.

类似地可以证明 $\rho_1 \cdot (\rho_2 \cdot \rho_3) \subseteq (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot \rho_3$.

由此 $(\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot \rho_3 = \rho_1 \cdot (\rho_2 \cdot \rho_3)$ 得证.

下面证明

2.4 复合关系的关系矩阵和关系图

用上面的方法运算比较麻烦，也很难用计算机进行。

关系矩阵与关系的运算，引入布尔运算

\cup	逻辑加 $+$: $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 1$
\cap	逻辑乘 \cdot : $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$
$'$	逻辑非 $\bar{}$: $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$

设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

$\rho_1 = (r_{ij}^{(1)})$ 和 $\rho_2 = (r_{ij}^{(2)})$ 是 A 到 B 的关系。

则 $\rho_1 \cup \rho_2 = (r_{ij}^{(1)}) + (r_{ij}^{(2)})$

$\rho_1 \cap \rho_2 = (r_{ij}^{(1)}) \cdot (r_{ij}^{(2)})$

$\rho_1' = (\bar{r}_{ij}^{(1)})$

$\rho_1 - \rho_2 = (r_{ij}^{(1)}) \cdot (\bar{r}_{ij}^{(2)})$

$$\rho_1 = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix}$$

$$\rho_2 = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix}$$

$$\rho_1 \cup \rho_2 = \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix}$$

定义2-8 关系矩阵与关系的复合运算

设 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, $C=\{c_1, c_2, \dots, c_l\}$

$\rho_1=(r_{ij}^{(1)})_{n \times m}$ 是A到B的关系, $\rho_2=(r_{ij}^{(2)})_{m \times l}$ 是B到C的关系。

$$\text{则 } \rho_1 \cdot \rho_2 = (r_{ij})_{n \times l} = \sum_{k=1}^m (r_{ik}^{(1)} \square r_{kj}^{(2)}) \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, l)$$

与普通矩阵乘法的公式一样, 只是将普通加法改为布尔加, 普通乘法改为布尔乘。

选课的例子

$$\rho_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} & \end{matrix} \quad \rho_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} & \end{matrix} \quad \rho_3 = \rho_1 \circ \rho_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} & \end{matrix}$$

行标姓名, 列标课程, 或打印成二维表格。用计算机处理很方便。

定理2-3 设 ρ_1 是A到B的关系， ρ_2 是B到C的关系（这里的A、B和C都是有限集），它们的关系矩阵分别为 M_{ρ_1} 、 M_{ρ_2} ，则复合关系的关系矩阵

$$M_{\rho_1 \rho_2} = M_{\rho_1} \cdot M_{\rho_2}$$

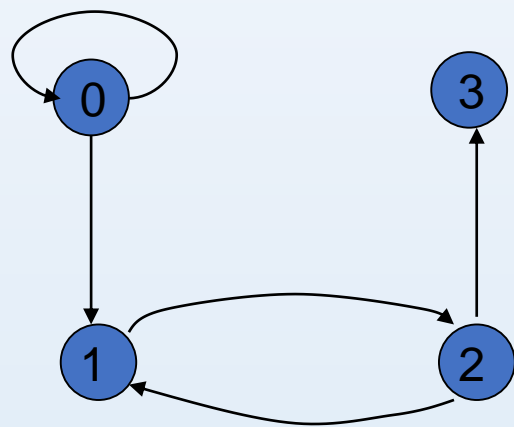
定理2-4 设 ρ_1 是 A_1 到 A_2 的关系， ρ_2 是 A_2 到 A_3 的关系， \dots ， ρ_n 是 A_n 到 A_{n+1} 的关系（这里的 A_1, A_2, \dots, A_{n+1} 都是有限集），它们的关系矩阵分别为 $M_{\rho_1}, M_{\rho_2}, \dots, M_{\rho_n}$ ，则复合关系 $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n$ 的关系矩阵

$$M_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n} = M_{\rho_1} \cdot M_{\rho_2} \cdot \dots \cdot M_{\rho_n}$$

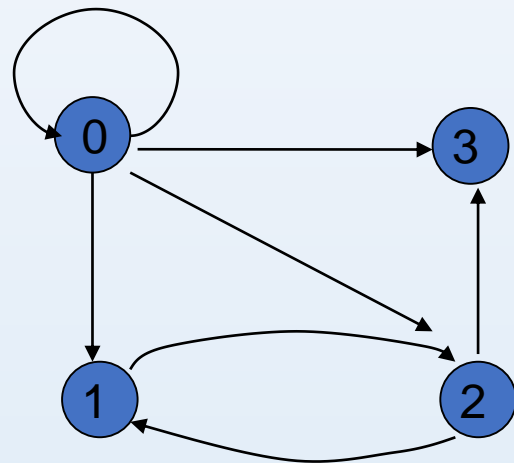
定理2-5 设 ρ 是有限集A上的一个具有关系矩阵 M_ρ 的关系，则复合关系 ρ^n 的关系矩阵

$$M_{\rho^n} = M_\rho^n$$

A上二元关系的关系图与复合运算



ρ



ρ^3

2.5 关系的性质与闭包运算

A上二元关系的性质

设 ρ 是集合A上的二元关系

(1) **自反**与反自反、非自反:

$\forall a \in A$, 有 $(a, a) \in \rho$, 则称 ρ 是**自反的**, 否则是非自反的。

$\forall a \in A$, 有 $(a, a) \notin \rho$, 则称 ρ 是**反自反的**。

显然, **ρ 自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq \rho \Leftrightarrow I_A \cup \rho = \rho$**

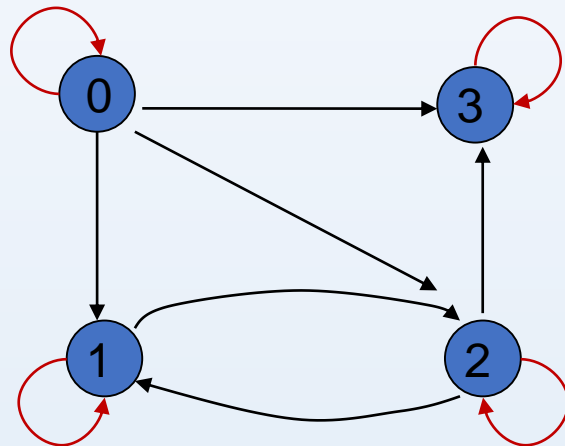
ρ 反自反 $\Leftrightarrow \rho \cap I_A = \emptyset$

从关系矩阵看, 其对角线元素均为1, 例如

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从关系图上看所有点都有自环，例如



(2) 对称、反对称、非对称

若有 $(a, b) \in \rho$ ，必有 $(b, a) \in \rho$ ，则称 ρ 是对称的，否则是非对称的。

若有 $(a, b) \in \rho$ 和 $(b, a) \in \rho$ ，必有 $a = b$ ，则称 ρ 是反对称的。

反对称的等价定义

若 $a \neq b$ ，且 $(a, b) \in \rho$ ，则必有 $(b, a) \notin \rho$ ，即 (a, b) 和 (b, a) 不能同时属于 ρ 。

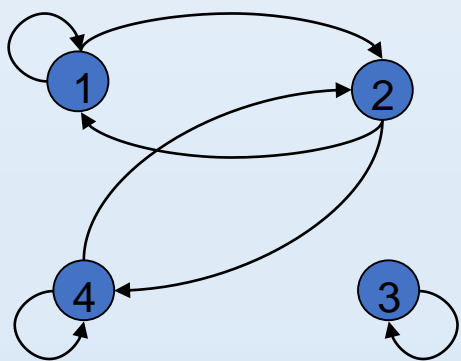
$$\rho \text{ 对称} \Leftrightarrow \rho = \tilde{\rho} \Leftrightarrow \rho \cup \tilde{\rho} = \rho$$

其关系矩阵是对称矩阵，例如 ρ_s 对称的， ρ_t 是反对称

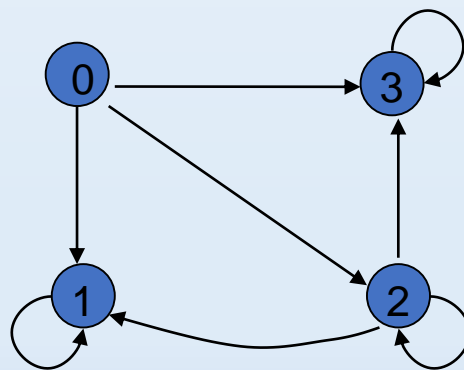
$$\rho_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

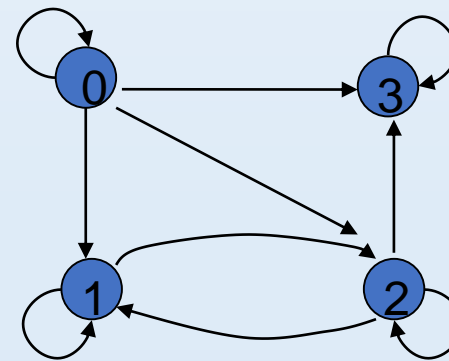
关系图



对称



反对称



非对称

$$\rho \text{ 反对称} \Leftrightarrow \rho \cap \tilde{\rho} \subseteq I_A$$

I_A 既是对称的，又是反对称的。

若关系既是对称的，又是反对称的，必有对角线外的元素都为0。

(3) 传递性

若 $(a, b), (b, c) \in \rho$ ，则 $(a, c) \in \rho$ ，称 ρ 是**可传递的**，否则是不可传递的。

注意：若 $(a, b) \in \rho$ ，但 $(b, c) \notin \rho$ ，则 $(a, c) \in \rho$ 是否满足，都不影响传递性。

$\rho_1 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ 可传递的

$\rho_2 = \{(a, b), (a, c)\}$ 可传递的

$\rho_3 = \{(a, b), (b, c)\}$ 不可传递的

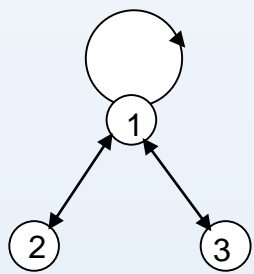
$$\rho \text{ 传递} \Leftrightarrow \rho^2 \subseteq \rho$$

例 $A=\{a,b,c,d\}$, $\rho_1=\{(a,b),(c,d)\}$,
可传递、反对称、反自反

例 $\rho_2=\{(a,b)|a\leq b, a,b\in\mathbb{N}\}$ 小于等于关系
对一切的 $a\in\mathbb{N}$, 必有 $a=a$, 即 $(a,a)\in\rho_2$, ρ_2 自反;
对任意的 $a,b\in\mathbb{N}$, 若 $(a,b), (b,a)\in\rho_2$, 即 $a\leq b, b\leq a$, 则必有 $a=b$, ρ_2 反对称;
对任意的 $a,b,c\in\mathbb{N}$, 若 $(a,b), (b,c)\in\rho_2$, 即 $a\leq b, b\leq c$, 则必有 $a\leq c$, 故
 $(a,c)\in\rho_2$, ρ_2 可传递。
小于等于关系是自反的、反对称的、传递的

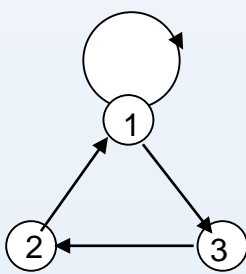
例 $\rho_3=\{(a,b)| a|b, a,b\in\mathbb{N}\}$ 整除关系
对一切的 $a\in\mathbb{N}$, 必有 $a|a$, 即 $(a,a)\in\rho_3$, 自反;
对任意的 $a,b\in\mathbb{N}$, 若 $a|b$ 且 $b|a$, 则 $a=b$, 反对称;
对任意的 $a,b,c\in\mathbb{N}$, 若 $a|b$ 且 $b|c$, 则 $a|c$, 故 $(a,c)\in\rho_3$, 传递。
整除关系是自反、反对称、传递

例 判断下图的性质



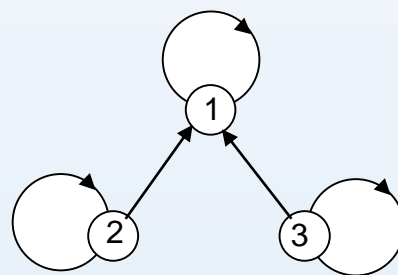
A

对称的



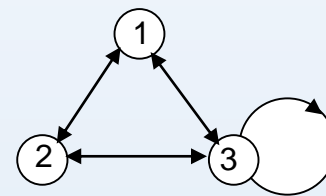
B

反对称的



C

自反的
反对称的
可传递的



D

对称的

闭包运算

闭包

对某一个关系 ρ ，若它不具备自反、对称、传递性质中的某性质，我们可将它扩充，增加一些元素使它具备这一性质。则增加最少元素、使它具备这一性质的关系，称之为 ρ 的具有该性质的闭包。

定义2-10 自反闭包

$$r(\rho) = \rho \cup I_A$$

对称闭包

$$s(\rho) = \rho \cup \tilde{\rho}$$

传递闭包

$$t(\rho) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$$

定理2-6 ρ 是集合 A 上的一个关系，则 ρ 的 $r(\rho) = \rho \cup I_A$ ：

(1) $\rho \subseteq r(\rho)$

(2) $r(\rho)$ 是自反的

(3) 对于 A 上任何自反关系 ρ_r ，

若 $\rho \subseteq \rho_r$ ，则 $r(\rho) \subseteq \rho_r$ ，

称 $r(\rho)$ 是自反闭包。

自反闭包 $r(\rho)=\rho \cup I_A$ 的证明。

证明：

(1) 显然 $\rho \subseteq \rho \cup I_A$

(2) 因 $I_A \subseteq \rho \cup I_A$ ，所以 $\rho \cup I_A$ 自反

(3) 对A上的任意自反关系 ρ_r ，有

$$I_A \subseteq \rho_r$$

若 $\rho \subseteq \rho_r$ ，

则 $\rho \cup I_A \subseteq \rho_r$

故 $r(\rho)=\rho \cup I_A$ 是自反闭包

定理2-7 ρ 是集合A上的一个关系，则 ρ 的 $\mathbf{s}(\rho)=\rho \cup \tilde{\rho}$:

- (1) $\rho \subseteq \mathbf{s}(\rho)$
- (2) $\mathbf{s}(\rho)$ 是是对称的
- (3) 对于A上任何对称关系 ρ_s ,
若 $\rho \subseteq \rho_s$, 则 $\mathbf{s}(\rho) \subseteq \rho_s$,

称 $\mathbf{s}(\rho)$ 是对称闭包。

定理2-8 ρ 是集合A上的一个关系，则 ρ 的 $\mathbf{t}(\rho)=\bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$:

- (1) $\rho \subseteq \mathbf{t}(\rho)$
- (2) $\mathbf{t}(\rho)$ 是传递的
- (3) 对于A上任何传递关系 ρ_t ,
若 $\rho \subseteq \rho_t$, 则 $\mathbf{t}(\rho) \subseteq \rho_t$,

称 $\mathbf{t}(\rho)$ 是传递闭包

对称闭包 $s(\rho)=\rho \cup \tilde{\rho}$ 的证明

证明:

(1) 显然 $\rho \subseteq \rho \cup \tilde{\rho}$

(2) $\overline{(\rho \cup \tilde{\rho})} = \bar{\rho} \cup \bar{\tilde{\rho}} = \rho \cup \bar{\rho}$ 对称

(3) 对A上的任意对称关系 ρ_s , 有

$$\rho_s = \tilde{\rho}_s$$

若 $\rho \subseteq \rho_s$, 则 $\tilde{\rho} \subseteq \tilde{\rho}_s$

因此 $\rho \cup \tilde{\rho} \subseteq \rho_s \cup \tilde{\rho}_s = \rho_s$

故 $s(\rho)=\rho \cup \tilde{\rho}$ 是对称闭包。

传递闭包 $t(\rho) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$ 证明

证明:

(1) 显然 $\rho \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$

(2) 设 $(a,b), (b,c) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$ 则必存在 h 和 k , 使

$$(a,b) \in \rho^h, (b,c) \in \rho^k$$

因此, $(a,c) \in \rho^{h+k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$

(3) 设 ρ_t 是 A 上的任意一个可传递关系, 且 $\rho \subseteq \rho_t$,

则对任意 $(a,b) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$,

必有 $(a,b) \in \rho^k$ 。

因此必存在元素 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in A$,

使 $(a, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_{k-1}, b) \in \rho$

但 $\rho \subseteq \rho_t$ ，所以

$$(a, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_{k-1}, b) \in \rho_t$$

而 ρ_t 是传递的，所以 $(a, b) \in \rho_t$ ，即

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i \subseteq \rho_t$$

对 $\#A=n$ ，则存在 $k \leq n$ ，使

$$t(\rho) = \bigcup_{i=1}^n \rho^i$$

2.6 等价关系

等价关系

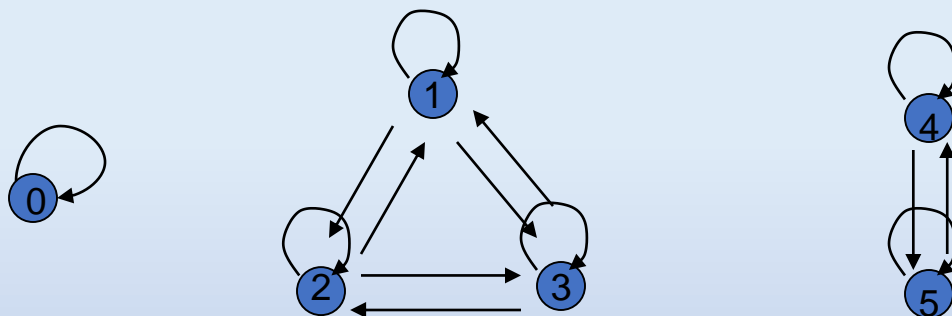
集合 A 上的关系 ρ ，如果它是自反的、对称的、可传递的，则称 ρ 为 A 上的等价关系。

三角形的相似关系，直线间的平行关系，在一个城市“住同一条街的居民”，都是等价关系的例子。

例 A 是学生的集合，定义 ρ 为当且仅当 a 与 b 住同一寝室时， $(a,b) \in \rho$ 。

例 设 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ ，定义 A 上的关系

$$\rho = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$$



$$\begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5
 \end{array}$$

等价关系恰好把元素分成三部分：0；1、2、3；4、5。这使我们联想到分划，彼此有关联的元素构成分划的块，这个块称为**等价类**。

元素等价：设 ρ 是集合 A 上的等价关系，若 $(a,b) \in \rho$ ，称 a 与 b 等价，记 $a=b$ 。

等价类：设 ρ 是集合 A 上的等价关系， a 是 A 中某个元素，则 A 中等价于 a 的所有元素的集合称为 a 所生成的等价类，记 $[a]_\rho$ 。

$$[a]_\rho = \{b | b \in A, (a,b) \in \rho\}$$

从举的例子看出等价关系定义的等价类恰好构成 A 的一个分划。

0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0
2	0	1	1	1	0	0
3	0	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	1	1
	0	1	2	3	4	5

定理2-11: 设 ρ 是集合 A 上的等价关系, 则等价类的集合构成 A 的一个分划:

$$\pi_\rho^A = \{[a]_\rho | a \in A\}$$

前例 $\pi_\rho^A = \{[0], [1], [4]\} = \{\{0\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$

反之, 设 $\pi = \{A_i\}_{i \in K}$ 是集合 A 的一个分划, 则存在 A 上的等价关系 ρ , 使 π 是 A 上由 ρ 导出的等价关系。

证明: 先 (等价关系 \rightarrow 分划)

(1) 对一切的 $a \in A$, 有 $(a, a) \in \rho$, 即 $a \in [a]_\rho$, 所以

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]_\rho$$

而

$$\bigcup_{a \in A} [a]_\rho \subseteq A$$

所以

$$A = \bigcup_{a \in A} [a]_\rho$$

(2) 由(1)可知 $[a]_\rho$ 非空, 且

若

$$[a]_\rho \neq [b]_\rho$$

则 $[a]_\rho \cap [b]_\rho = \emptyset$
否则, 必存在一个元素 x , 使

$$x \in [a]_\rho \cap [b]_\rho$$

有等价类的定义可知

$$(a, x) \in \rho, \quad (b, x) \in \rho$$

由等价关系的对称性可知

$$(x, b) \in \rho$$

由传递性可知, 有

$$(a, x) \in \rho, \quad (x, b) \in \rho$$

必有

$$(a, b) \in \rho$$

即

$$[a]_\rho = [b]_\rho$$

第二部分的证明 (分划 \rightarrow 等价关系)

设

$$\pi = \{A_i\}_{i \in K}$$

定义关系

$$\rho = \{(a, b) \mid a, b \in A_i\}$$

(1) 对一切的 $a \in A$, 有 $a, a \in A_i$, 所以

$$(a, a) \in \rho$$

自反

(2) 若 $(a, b) \in \rho$, 由 ρ 的定义

$$a, b \in A_i$$

当然

$$b, a \in A_i$$

因此

$$(b, a) \in \rho$$

对称

(3) 若 $(a, b), (b, c) \in \rho$, 则

$$a, b \in A_i, \quad b, c \in A_i$$

即

$$a, b, c \in A_i$$

所以

$$(a, c) \in \rho$$

传递

定义2-11 **商集**: A 上等价关系导出的分划 π_ρ^A 也称为 **A 关于 ρ 的商集**, 记

$$A/\rho = \{[a]_\rho | a \in A\}$$

秩: A/ρ 的基数。

显然恒等关系 I_A 和满关系 U_A 都是等价关系, I_A 对应“最细”分划, U_A 对应最粗分划。

例, 同余关系也是等价关系, 如

$$\rho = \{(a, b) | a \equiv b \pmod{3}, a, b \in I\} \quad \text{模3同余}$$

若 ρ 是等价关系, 可以证明

$$\rho^n = \rho$$

***相容关系**: 若 ρ 是自反的、对称的, 称 ρ 是相容关系。显然等价关系是相容关系。

2.7 偏序

定义2-16 **偏序关系**: 集合A上的一个关系 ρ , 若 ρ 是自反的、反对称的、可传递的, 称 ρ 为**偏序关系**, 常用符号“ \leq ”表示。

(1) 对所有的 $a \in A$, 有 $a \rho a$;

(2) 对所有的 $a, b \in A$, 若 $a \rho b$ 且 $b \rho a$, 就必有 $a=b$;

(3) 对所有的 $a, b, c \in A$, 若 $a \rho b$ 且 $b \rho c$, 就必有 $a \rho c$ 。

一个偏序的逆也是一个偏序, 通常用符号“ \geq ”表示。

例 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$$\rho_1=\{(a,b) \mid a \leq b, a,b \in A\}$$

$$\rho_2=\{(a,b) \mid a|b, a,b \in A\} \quad a \text{ 整除 } b$$

例 $B=\{a,b,c\}$

$$\rho_3=\{(s_1,s_2) \mid s_1 \subseteq s_2, s_1,s_2 \in 2^B\}$$

定义2-17 **全序**：一个集合A上的偏序，若对于所有的 $a, b \in A$ ，有 $a \leq b$ 或 $b \leq a$ ，则称它为A上的一个全序。

例，任意实数都是可比较大小， $\{R; \leq\}$ 。但复数 $\{C; \leq\}$ ？

定义2-18 **良序**：一个集合A上的偏序，若对于A的每一个非空子集 $S \subseteq A$ ，在S中存在一个元素 a_s （称为S的最小元素），使得对于所有的 $s \in S$ ，有 $a_s \leq s$ ，则称它为A上的一个良序。

例，任意自然数集都有最小数 $\{[n1, n2]; \leq\}$ 。但实数 $\{(r1, r2); \leq\}$ 、复数？

例

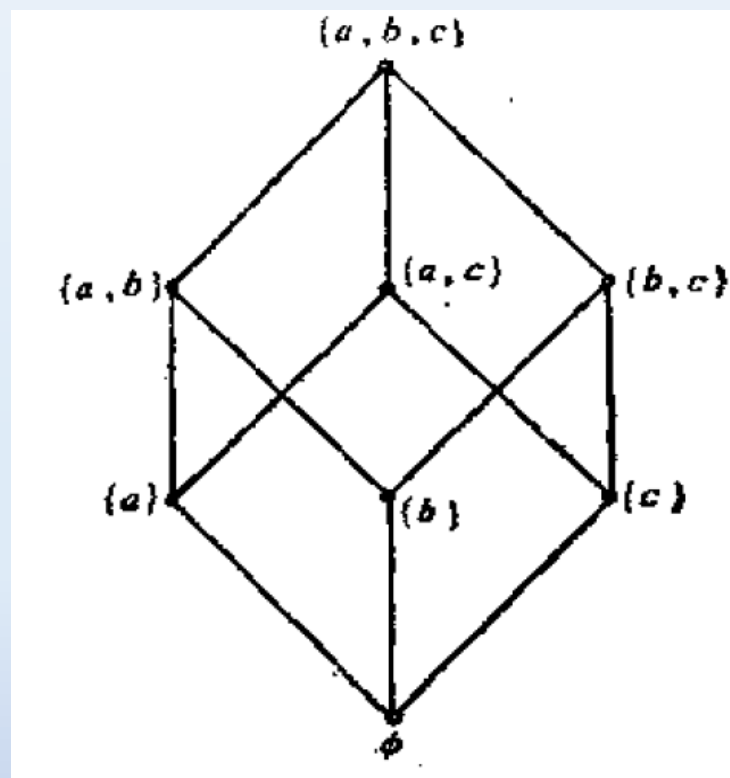
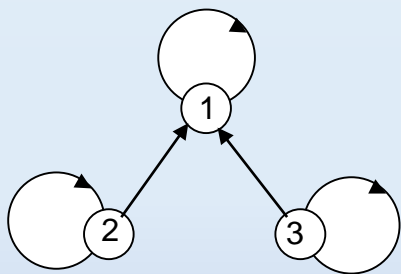
定义在实数集R上的“小于或等于”关系 \leq ，是R上的偏序关系，也是一个全序，但它不是R上的良序。例如开区间 $(0, 1)$ 是R的子集，但其没有最小元素。

定义在正整数集N上的“小于或等于”关系 \leq ，是N上的偏序关系，也是一个全序和良序。

实数集R上的小于关系“ $<$ ”和大于关系“ $>$ ”都不是偏序关系。

可以用前面讨论的关系图来表示有限集A上的偏序关系，但通常是使用**次序图（Hasse图）**

1. 有 $\#A$ 个结点，每个结点代表A的一个元素，画作一个带有元素标号的小圆圈；
2. 若结点 $a \neq b$ 且 $a \leq b$ ，则结点a出现在结点b的下面；
3. 边（线段）连接两个结点a和b： $a \neq b$ 且 $a \leq b$ ，且不存在任何其它元素c，使得 $a \leq c \leq b$ ；
4. 所有边的方向都是从下朝上，略去边的方向。



例 6 $J = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 36, 60\}$ 上的整除关系 \mid 是一个偏序，图 2-6 给出了该偏序的次序图。

例 7 定义在全集合 U 的幂集上的包含关系 \subseteq 是一个偏序。设 $U = \{a, b, c\}$ ，则该偏序的次序图由图 2-7 给出。

例 8 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， \leq 是“小于或等于”关系，则 \leq 是集合 A 上的一个全序。其次序图由图 2-8 给出。

显然，全序的次序图仅由一条竖直边上结点的序列组成。

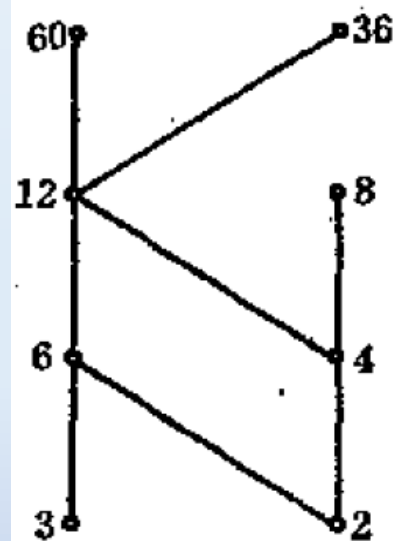


图 2-6

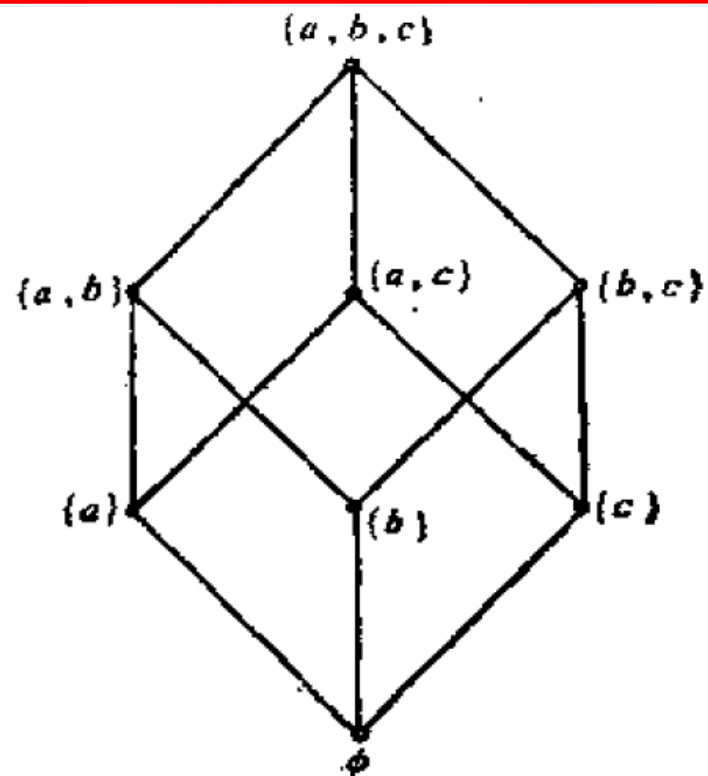


图 2-7



图 2-8

作业

书后面的习题：

1, 3(3), 6, 12(1)(2), 15, 16, 19, 21, 34, 35, 40

小结

1. 集合的笛卡尔积

- 有序 n 元组 (a_1, a_2, \dots, a_n) ;
- 有序二元组 (a, b) , 亦称为序偶;
- n 个集合的笛卡尔积

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, \quad i=1, 2, \dots, n\};$$

- 两个集合的笛卡尔积

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

2. 关系

- 由集合 A 到集合 B 的关系;
- 集合 A 上的关系;
- 恒等关系和普遍关系;
- 关系的逆关系;
- 复合关系;
- 集合 A 上关系 ρ 的传递闭包、对称闭包和自反闭包.

3. 关系的表示方法

- 集合表示法——列举法和描述法；
- 矩阵表示法——用矩阵表示由有限集 A 到有限集 B 的关系；
- 关系图表示法——用有向图表示有限集 A 上的关系；
- 次序图——用无向图来特定地表示有限集 A 上的偏序关系。

4. 关系的复合运算和闭包运算

- 由给定的关系 ρ_1 和 ρ_2 , 求 复合关系 $\rho_1 \cdot \rho_2$ ；
- 由给定的集合 A 上的关系 ρ , 求复合关系 ρ^n ；
- 由给定的集合 A 上的关系 ρ , 求 传递闭包 $t(\rho)$ 求 对称闭包 $S(\rho)$ 、求 自反闭包 $r(\rho)$ 。

$$t(\rho) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$$

$$s(\rho) = \rho \cup \tilde{\rho}$$

$$r(\rho) = \rho \cup I_A$$

5. 集合 A 上关系的性质

- 集合 A 上的自反关系；
- 集合 A 上的对称关系；
- 集合 A 上的反对称关系；
- 集合 A 上的可传递的关系。

上述这些具有特殊性质的关系的定义及判别。

6. 集合 A 上两类重要的关系

- 等价关系、等价类和等价分划；
- 偏序关系、全序和良序。

例题讲解

例 2-1 集合 $\{1,3,5,9\} = \{3,9,5,1\} = \{9,5,1,3\}$, 但有序四元组 $(1,3,5,9) \neq (3,9,5,1) \neq (9,5,1,3)$.

n 个集合的笛卡尔积是一个以 有序 n 元组 为元素的集合, 因此两个集合的笛卡尔积就是一个以序偶为元素的集合.

例 2-2 设 $A = \{1,3\}, B = \{1,2,4\}$, 则

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,4), (3,1), (3,2), (3,4)\};$$

$$B \times A = \{(1,1), (2,1), (4,1), (1,3), (2,3), (4,3)\}.$$

注意到 $(1,2) \neq (2,1), (1,4) \neq (4,1), \dots$, 所以 $A \times B \neq B \times A$, 即笛卡尔积不满足交换律.

例 2-3 设 $A=\{1,2,4,7,8\}$, $B=\{2,3,5,7\}$, 定义由 A 到 B 的关系

$$\rho = \left\{ (a, b) \mid \frac{a+b}{5} \text{ 是整数} \right\},$$

试问 ρ 由哪些序偶组成?

解 根据 ρ 的定义, ρ 中的序偶 (a, b) 应满足三个条件: $a \in A$; $b \in B$; $a+b$ 能被 5 整除. 于是

$$\rho = \{(2, 3), (7, 3), (8, 2), (8, 7)\}.$$

集合 A 、 B 的基数分别是 $\#A=5$, $\#B=4$, 因此笛卡尔积 $A \times B$ 的基数 $\#(A \times B) = \#A \times \#B = 20$. 即集合 $A \times B$ 由所有 20 个可能的序偶组成. 而 ρ 中的四个序偶只是其中的一部分, 即 $\rho \subseteq A \times B$. $A \times B$ 还有许多其他的子集, 如 $\{(1, 3), (2, 5), (4, 7), (8, 7)\}$ 、 \emptyset 、 $A \times B$ 等均可看做是由 A 到 B 的关系.

例 2-7 例 2-3 中由集合 A 到 B 的关系 ρ 的逆关系

$$\tilde{\rho} = \{(3, 2), (3, 7), (2, 8), (7, 8)\},$$

它是一个由集合 B 到 A 的关系.

例 2-4 设有集合 A, B , $\#A=n$, $\#B=m$, 试问由 A 到 B 有多少个不同的关系?

解 因为笛卡尔积 $A \times B$ 的任意一个子集都称为由 A 到 B 的一个关系, 所以该问题等价于计算 $A \times B$ 有多少个子集. 由幂集的定义, 该问题又等价于计算 $A \times B$ 的幂集的基数是多少.

$$\#(2^{A \times B}) = 2^{\#(A \times B)} = 2^{\#A \times \#B} = 2^{nm},$$

故由 A 到 B 有 2^{nm} 个不同的关系.

若集合 A 和 B 中至少有一个是无限集, 则 $A \times B$ 是无限集. 因此 $A \times B$ 有无限多个子集, 这也就意味着由 A 到 B 有无限多个不同的关系.

*** 例 2-6** 设 $\rho_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3)\}$, $\rho_2 = \{(1, 3), (2, 4), (4, 2)\}$, 试求出 $D_{\rho_1}, D_{\rho_2}, D_{\rho_1 \cup \rho_2}, R_{\rho_1}, R_{\rho_2}$ 和 $R_{\rho_1 \cap \rho_2}$.

解 虽然本题没有给出 ρ_1 和 ρ_2 是由什么集合到什么集合的关系, 但是这对解答此题是无关紧要的. 事实上, 不论 ρ_1 和 ρ_2 是定义在什么样的集合上的关系, 根据 D_ρ 和 R_ρ 的定义, 均有

$$D_{\rho_1} = \{1, 2, 3\}, \quad R_{\rho_1} = \{2, 3, 4\};$$

$$D_{\rho_2} = \{1, 2, 4\}, \quad R_{\rho_2} = \{2, 4, 3\}.$$

又因为 $\rho_1 \cup \rho_2 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (1, 3), (4, 2)\};$

$$\rho_1 \cap \rho_2 = \{(2, 4)\},$$

所以 $D_{\rho_1 \cup \rho_2} = \{1, 2, 3, 4\}; \quad R_{\rho_1 \cap \rho_2} = \{4\}.$

例 2-8 设有集合 $A=\{4,5,8,15\}$, $B=\{3,4,5,9,11\}$, $C=\{1,6,8,13\}$, ρ_1 是由 A 到 B 的关系, ρ_2 是由 B 到 C 的关系, 分别定义为

$$\rho_1 = \{(a, b) \mid |b - a| = 1\},$$

$$\rho_2 = \{(b, c) \mid |b - c| = 2 \text{ 或 } |b - c| = 4\}.$$

试求复合关系 $\rho_1 \cdot \rho_2$.

解 由题意知

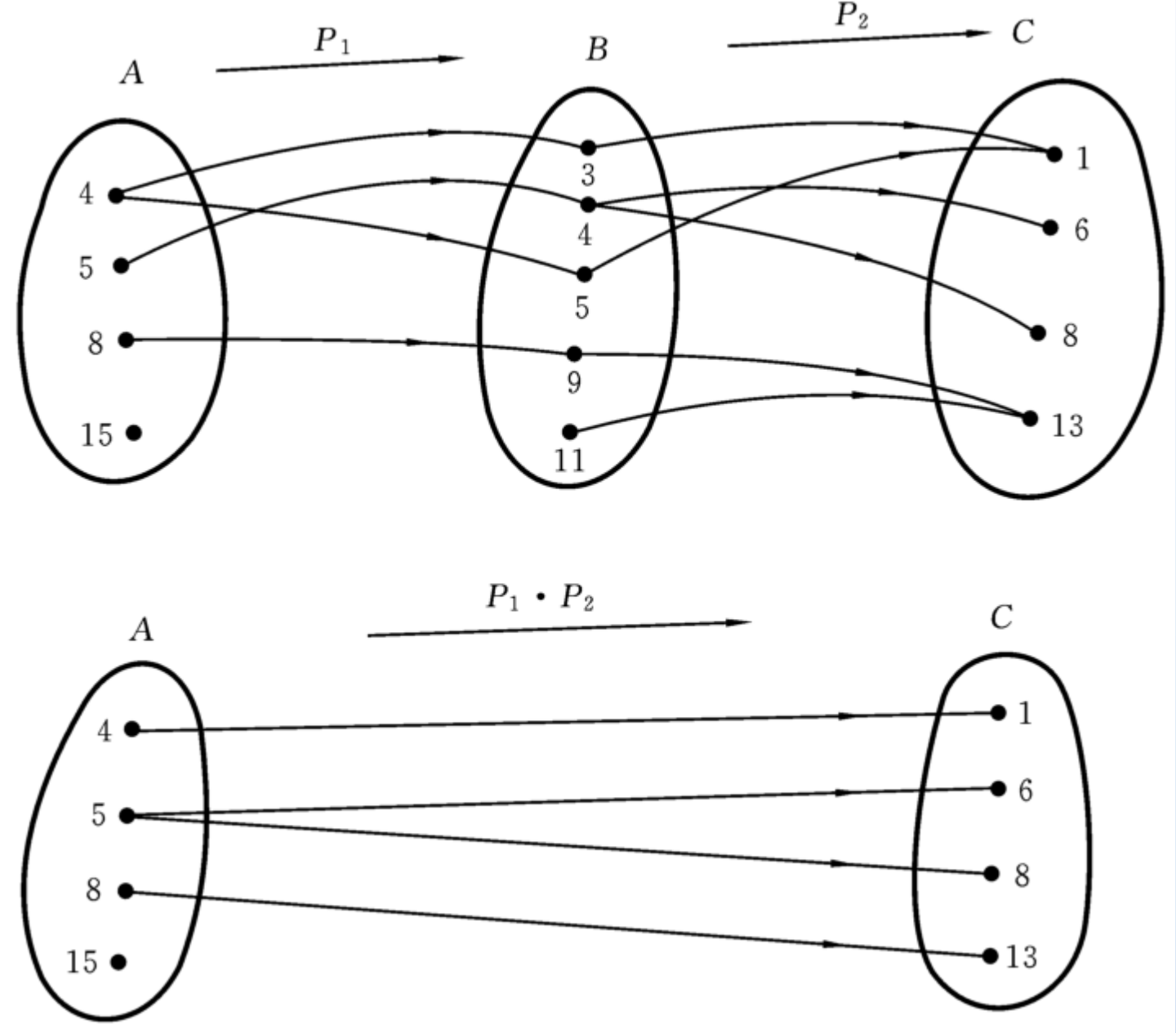
$$\rho_1 = \{(4, 3), (4, 5), (5, 4), (8, 9)\},$$

$$\rho_2 = \{(3, 1), (4, 6), (4, 8), (5, 1), (9, 13), (11, 13)\}.$$

根据复合关系的定义知

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{(4, 1), (5, 6), (5, 8), (8, 13)\}.$$

关系 ρ_1, ρ_2 以及复合关系 $\rho_1 \cdot \rho_2$ 如图 2-1 所示.



例 2-9 对于例 2-8 中的关系 ρ_1, ρ_2 和复合关系 $\rho_1 \cdot \rho_2$, 分别求出其逆关系 $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2$ 和 $\widetilde{\rho_1 \cdot \rho_2}$, 再求出复合关系 $\tilde{\rho}_2 \cdot \tilde{\rho}_1$. 试问 $\widetilde{\rho_1 \cdot \rho_2}$ 与 $\tilde{\rho}_2 \cdot \tilde{\rho}_1$ 有什么关系?

$$\rho_1 = \{(4, 3), (4, 5), (5, 4), (8, 9)\},$$

$$\rho_2 = \{(3, 1), (4, 6), (4, 8), (5, 1), (9, 13), (11, 13)\}$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{(4, 1), (5, 6), (5, 8), (8, 13)\}$$

解 根据逆关系的定义, $\tilde{\rho}_1$ 是由 B 到 A 的关系, $\tilde{\rho}_2$ 是由 C 到 B 的关系, $\widetilde{\rho_1 \cdot \rho_2}$ 是由 C 到 A 的关系. 它们分别为

$$\tilde{\rho}_1 = \{(3, 4), (5, 4), (4, 5), (9, 8)\},$$

$$\tilde{\rho}_2 = \{(1, 3), (6, 4), (8, 4), (1, 5), (13, 9), (13, 11)\},$$

$$\widetilde{\rho_1 \cdot \rho_2} = \{(1, 4), (6, 5), (8, 5), (13, 8)\}.$$

根据复合关系的定义, $\tilde{\rho}_2 \cdot \tilde{\rho}_1$ 是由 C 到 A 的关系, 且

$$\tilde{\rho}_2 \cdot \tilde{\rho}_1 = \{(1, 4), (6, 5), (8, 5), (13, 8)\}.$$

$\widetilde{\rho_1 \cdot \rho_2}$ 与 $\tilde{\rho}_2 \cdot \tilde{\rho}_1$ 都是由 C 到 A 的关系, 且由完全相同的四个序偶所组成, 因此 $\widetilde{\rho_1 \cdot \rho_2} = \tilde{\rho}_2 \cdot \tilde{\rho}_1$. 即 $\widetilde{\rho_1 \cdot \rho_2}$ 与 $\tilde{\rho}_2 \cdot \tilde{\rho}_1$ 表示的是由 C 到 A 的同一个关系.

在一般情形下, 等式 $\widetilde{\rho_1 \cdot \rho_2} = \tilde{\rho}_2 \cdot \tilde{\rho}_1$ 也是成立的, 将在后面给出其证明 (参见

本章例 2-26).

例 2-10 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$, A 上的关系 ρ 定义为

$$\rho=\{(a,b),(b,a),(a,c),(c,e),(d,b)\},$$

试对所有的 $n \in \mathbf{N}$ (\mathbf{N} 表示正整数集), 求出 ρ^n .

解 $\rho^2 = \rho \cdot \rho = \{(a,a), (a,e), (b,b), (b,c), (d,a)\},$

由于关系的复合运算满足结合律, 因此 ρ^3 可以看做是 $\rho \cdot \rho^2$, 也可看做是 $\rho^2 \cdot \rho$, 故

$$\rho^3 = \rho \cdot \rho^2 = \{(a,b), (a,c), (b,a), (b,e), (d,b), (d,c)\}.$$

类似地,

$$\begin{aligned}\rho^4 &= \rho \cdot \rho^3 = \rho^2 \cdot \rho^2 = \rho^3 \cdot \rho \\ &= \{(a,a), (a,e), (b,b), (b,c), (d,a), (d,e)\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho^5 &= \rho \cdot \rho^4 = \rho^2 \cdot \rho^3 = \rho^3 \cdot \rho^2 = \rho^4 \cdot \rho \\ &= \{(a,b), (a,c), (b,a), (b,e), (d,b), (d,c)\}.\end{aligned}$$

关系 ρ 由上可知, $\rho^5 = \rho^3$. 根据复合关系的定义, 则有

$$\begin{aligned}\rho^6 &= \rho^5 \cdot \rho = \rho^3 \cdot \rho = \rho^4, \\ \rho^7 &= \rho^6 \cdot \rho = \rho^4 \cdot \rho = \rho^5 = \rho^3, \\ \rho^8 &= \rho^7 \cdot \rho = \rho^5 \cdot \rho = \rho^6 = \rho^4, \dots\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\rho^3 &= \rho^5 = \rho^7 = \rho^9 = \dots \\ \rho^4 &= \rho^6 = \rho^8 = \rho^{10} = \dots\end{aligned}$$

即当 $n \geq 3$ 时,

$$\begin{aligned}\rho^{2n-1} &= \rho^3, \\ \rho^{2n} &= \rho^4.\end{aligned}$$

例 2-11 试求出例 2-10 中关系 ρ 的传递闭包 ρ^+ .

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6, \rho^7, \dots$$

中,除 ρ 、 ρ^2 、 ρ^3 和 ρ^4 这四个关系互不相同外,其他关系均与关系 ρ^3 或 ρ^4 相同,由集合并运算的等幂律

$$\begin{aligned}\rho^+ &= \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \rho^4 \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, e), (c, e), \\ &\quad (d, a), (d, b), (d, c), (d, e)\}.\end{aligned}$$

例 2-12 设 $A=\{5,4,35,49\}$, $B=\{8,15,7\}$, 由 A 到 B 的关系 P 定义为

$$\rho=\{(a,b) \mid a \text{ 与 } b \text{ 互素}\},$$

试写出 ρ 的关系矩阵 \mathbf{M}_ρ .

解 由定义 $\rho=\{(5,8),(5,7),(4,15),(4,7),(35,8),(49,8),(49,15)\}$, 所以关系矩阵

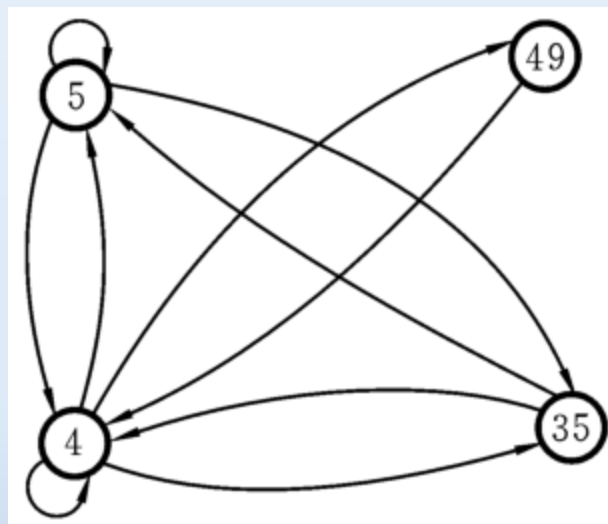
$$\mathbf{M}_\rho = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8 & 15 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 35 \\ 49 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

例 2-13 设 $A = \{5, 4, 35, 49\}$, 定义 A 上的关系

$$\rho = \{(a_i, a_j) \mid a_i + a_j \leq 53\},$$

试画出 ρ 的关系图.

解 由定义 $\rho = \{(5, 5), (5, 4), (5, 35), (4, 5), (4, 4), (4, 35), (4, 49), (35, 5), (35, 4), (49, 4)\}$. 因此 ρ 的关系图如图 2-2 所示.



* 例 2-14 设 $A=\{4,6,9,10\}$, ρ_1 和 ρ_2 是 A 上的两个关系

$$\rho_1 = \left\{ (a, b) \mid \frac{a-b}{2} \text{ 是正整数} \right\},$$

$$\rho_2 = \left\{ (a, b) \mid \frac{a-b}{3} \text{ 是正整数} \right\},$$

试求 $\rho_1 \cup \rho_2, \rho_1 \cap \rho_2, \rho_1', \rho_1 - \rho_2$.

解 因

$$\rho_1 = \{(6, 4), (10, 4), (10, 6)\};$$

$$\rho_2 = \{(9, 6), (10, 4)\};$$

因此

$$\rho_1 \cup \rho_2 = \{(6, 4), (9, 6), (10, 4), (10, 6)\};$$

$$\rho_1 \cap \rho_2 = \{(10, 4)\};$$

$$\begin{aligned} \rho_1' &= (A \times A) - \rho_1 \\ &= \{(4, 4), (4, 6), (4, 9), (4, 10), (6, 6), (6, 9), (6, 10), \\ &\quad (9, 4), (9, 6), (9, 9), (9, 10), (10, 9), (10, 10)\}; \end{aligned}$$

$$\rho_1 - \rho_2 = \{(6, 4), (10, 6)\}.$$

因为 ρ_1 和 ρ_2 都是 A 上的关系, $\rho_1 \subseteq A \times A, \rho_2 \subseteq A \times A$, 所以 $\rho_1 \cup \rho_2 \subseteq A \times A, \rho_1 \cap \rho_2 \subseteq A \times A, \rho_1' \subseteq A \times A, \rho_1 - \rho_2 \subseteq A \times A$, 即 $\rho_1 \cup \rho_2, \rho_1 \cap \rho_2, \rho_1', \rho_1 - \rho_2$ 也都是集合 A 上的关系. 对这些关系也可用描述法定义如下:

$$\rho_1 \cup \rho_2 = \left\{ (a, b) \mid \frac{a-b}{2} \text{ 是正整数 或者 } \frac{a-b}{3} \text{ 是正整数} \right\};$$

$$\rho_1 \cap \rho_2 = \left\{ (a, b) \mid \frac{a-b}{2} \text{ 和 } \frac{a-b}{3} \text{ 均为正整数} \right\};$$

$$\rho'_1 = \left\{ (a, b) \mid \frac{a-b}{2} \text{ 不是正整数} \right\};$$

$$\rho_1 - \rho_2 = \left\{ (a, b) \mid \frac{a-b}{2} \text{ 是正整数, 但 } \frac{a-b}{3} \text{ 不是正整数} \right\}.$$

例 2-15 设 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的关系

$$\rho = \{(a, a), (a, b), (b, d), (c, a), (d, c)\},$$

试求复合关系 ρ^2 .

解法一 根据关系 ρ 中所列出的序偶, 按复合关系的定义求出 ρ^2 中的序偶. 只要有 $(x, y) \in \rho$ 和 $(y, z) \in \rho$, 便有 $(x, z) \in \rho^2$. 因此

$$\rho^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a)\}.$$

这里特别要注意 $(a, a) \in \rho^2$ 不要遗漏, 它是由 $(a, a) \in \rho, (a, a) \in \rho$ 而得来的.

解法二 构造出 ρ 的关系矩阵 \mathbf{M}_ρ , 利用 ρ^2 的关系矩阵 $\mathbf{M}_{\rho^2} = \mathbf{M}_\rho \cdot \mathbf{M}_\rho$ 求出 \mathbf{M}_{ρ^2} , 从而得到 ρ^2 . 在进行关系矩阵的乘法运算时, 矩阵中元素的相乘和相加均使用布尔运算.

$$\mathbf{M}_\rho = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\mathbf{M}_{\rho^2} = \mathbf{M}_\rho \cdot \mathbf{M}_\rho = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

解法三 构造出 ρ 的关系图,在图中从每一结点 x 出发,找出经过长为 2 的路径能够到达的所有结点 y_1, y_2, \dots, y_r ,于是在 ρ^2 的关系图中有 r 条边 $(x, y_1), (x, y_2), \dots, (x, y_r)$.

本例 ρ 的关系图如图 2-3 所示. 从结点 a 出发,经过长为 2 的路径可以到达的结点分别是 a, b 和 d ; 从结点 b 出发,经过长为 2 的路径可以到达的结点仅有 c 一个; 从结点 c 出发,经过长为 2 的路径可以到达的结点分别是 a 和 b ; 从结点 d 出发,经过长为 2 的路径仅可以到达结点 a . 于是 ρ^2 的关系图的构造如图 2-4 所示.

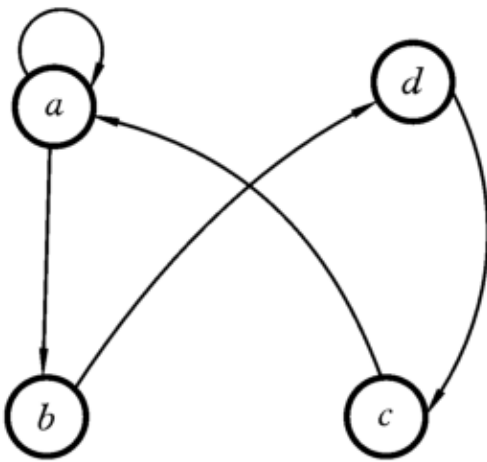


图 2-3 ρ 的关系图

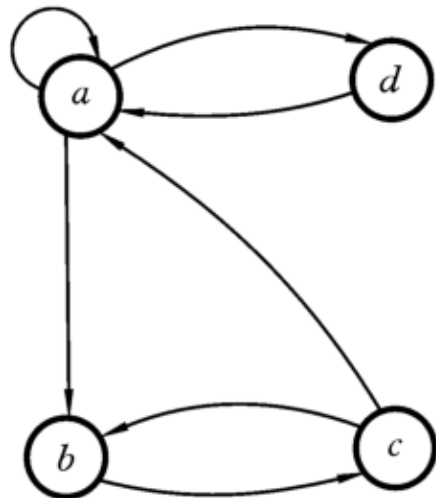


图 2-4 ρ^2 的关系图

例 2-16 设有集合 $A=\{2,3,4\}, B=\{4,6,7\}, C=\{8,9,12,14\}$, ρ_1 是由 A 到 B 的关系, ρ_2 是由 B 到 C 的关系, 分别定义为

$$\rho_1 = \{(a, b) \mid a \text{ 是素数且 } a \text{ 整除 } b\},$$

$$\rho_2 = \{(b, c) \mid b \text{ 整除 } c\};$$

试用关系矩阵表示法求复合关系 $\rho_1 \cdot \rho_2$.

解

$$\rho_1 = \{(2, 4), (2, 6), (3, 6)\};$$

$$\rho_2 = \{(4, 8), (4, 12), (6, 12), (7, 14)\}.$$

因此

$$\mathbf{M}_{\rho_1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \mathbf{M}_{\rho_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8 & 9 & 12 & 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\mathbf{M}_{\rho_1 \cdot \rho_2} = \mathbf{M}_{\rho_1} \cdot \mathbf{M}_{\rho_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8 & 9 & 12 & 14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

故

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{(2, 8), (2, 12), (3, 12)\}.$$

例 2-17 用构造 ρ^+ 的关系图的方法, 求例 2-10 中关系 ρ 的传递闭包 ρ^+ .
解 (1) 先构造出 ρ 的关系图(见图 2-5).

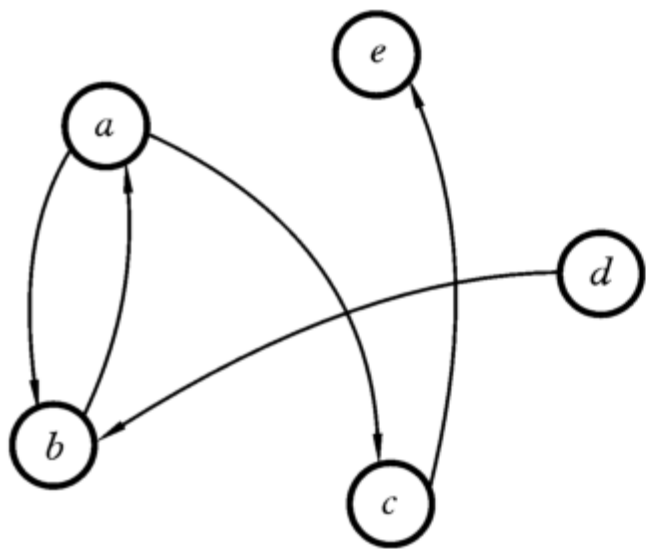


图 2-5 ρ 的关系图

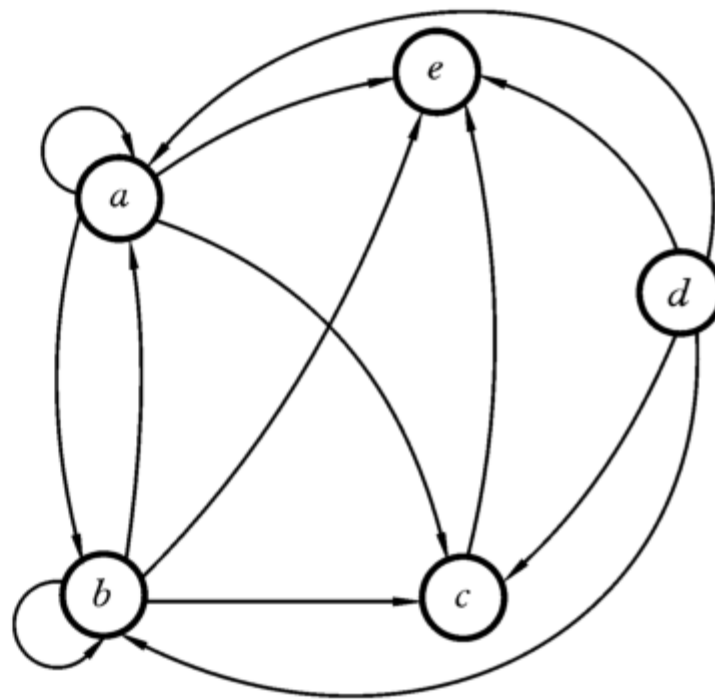


图 2-6 ρ^+ 的关系图

(2) 在 ρ 的关系图中, 对每一结点 x , 找出从 x 出发能到达的所有结点. 从结点 a 出发可分别到达 a, b, c, e , 从结点 b 出发可分别到达结点 a, b, c, e , 从结点 c 出发可到达结点 e , 从结点 d 出发可分别到达 b, a, c, e .

(3) 构造 ρ^+ 的关系图(见图 2-6).

(4) 根据 ρ^+ 的关系图写出 ρ^+ 的相应序偶.

$$\rho^+ = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), \\ (b, e), (c, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, e)\}.$$

例 2-18 设 $A = \{a, b, c, d\}$.

(1) 判断下列关系是否自反关系.

$$\rho_1 = \{(a, b), (b, c)\};$$

$$\rho_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, a)\};$$

$$\rho_3 = \{(a, a), (a, b), (d, d), (c, c), (b, b)\};$$

$$\rho_4 = \{(a, a), (b, b), (d, d), (c, c)\}.$$

(2) 判断下列关系是否对称关系或反对称关系.

$$\rho_5 = \{(a, b), (a, a), (b, a), (b, c), (c, b)\};$$

$$\rho_6 = \{(a, b), (a, a), (b, c), (d, c)\};$$

$$\rho_7 = \{(c, b), (a, a), (d, c), (c, d)\};$$

$$\rho_8 = \{(b, b), (d, d)\}.$$

(3) 判断下列关系是否可传递的关系.

$$\rho_9 = \{(b, c), (c, c), (c, d), (b, d)\};$$

$$\rho_{10} = \{(b, c), (c, b), (b, b), (a, d)\};$$

$$\rho_{11} = \{(b, c), (d, a), (d, c)\}.$$

解 (1) ρ_1 不是自反关系, 因为对于所有的 $x \in A$, (x, x) 均不在 ρ_1 中.

ρ_2 不是自反关系, 因为 $(d, d) \notin \rho_2$.

ρ_3 是自反关系, 但不是恒等关系.

ρ_4 是自反关系, 也是恒等关系.

(2) ρ_5 是对称关系. 它不是反对称关系, 因为 $a \neq b$, 但 (a, b) 和 (b, a) 均出现在 ρ_5 中. 同样 $b \neq c$, 但 (b, c) 和 (c, b) 均出现在 ρ_5 中.

ρ_6 不是对称关系, 因为 $(a, b) \in \rho_6$, 但 $(b, a) \notin \rho_6$. 同样 $(b, c) \in \rho_6$, 但 $(c, b) \notin \rho_6$, $(d, c) \in \rho_6$ 但 $(c, d) \notin \rho_6$. 而上述这几条原因正好说明 ρ_6 是反对称关系.

ρ_7 不是对称关系, 因为 $(c, b) \in \rho_7$ 但 $(b, c) \notin \rho_7$. 它也不是反对称关系, 因为 $c \neq d$, 但 (c, d) 和 (d, c) 均在 ρ_7 中.

ρ_8 既是对称关系, 也是反对称关系.

(3) ρ_9 是可传递的关系.

ρ_{10} 不是可传递的关系. 因为 $(c, b) \in \rho_{10}$, $(b, c) \in \rho_{10}$, 但 $(c, c) \notin \rho_{10}$.

ρ_{11} 是可传递的关系. 在此例中没有出现 $(x, y) \in \rho_{11}$ 同时 $(y, z) \in \rho_{11}$ 的情形, 因此也就无所谓 $(x, z) \in \rho_{11}$ 的要求.

例 2-19 设 $A = \{a, b, c, d\}$, ρ_1 和 ρ_2 是 A 上的关系

$$\rho_1 = \{(d, c), (c, a), (b, b), (d, a)\},$$

$$\rho_2 = \{(b, c), (c, d), (c, b)\},$$

试求 ρ_1^+, ρ_2^+ .

解 因为 $\rho_1 \subseteq \rho_1$ 且 ρ_1 是可传递的, 而 ρ_1 显然是满足(1), (2)这两条件中最小的关系, 所以 $\rho_1^+ = \rho_1$.

ρ_2 不是可传递的, 因为有 $(b, c) \in \rho_2, (c, d) \in \rho_2$, 但 $(b, d) \notin \rho_2$. 所以必须添加 (b, d) . 类似地道理, 也必须添加 (b, b) 和 (c, c) .

注意到序偶 $(b, d), (b, b)$ 和 (c, c) 是必须添加的, 否则无法使 ρ_2 变成可传递关系. 而添加了这三个序偶后, ρ_2 变成可传递了, 因此不能再添加其它的序偶, 故

$$\rho_2^+ = \{(b, c), (c, d), (c, b), (b, d), (b, b), (c, c)\}.$$

例 2-20 设 $A = \{a, b, c, d, e\}$, A 上的关系

$$\rho_1 = \{(a, a), (b, a), (b, b), (d, e), (a, b), (e, d), (d, d), (c, c), (e, e)\},$$

$$\rho_2 = \{(b, b), (b, a), (a, b), (d, d), (d, e), (c, c)\},$$

试判断 ρ_1 和 ρ_2 是否是等价关系.

解 ρ_1 是等价关系. 因为它具有自反性、对称性和可传递性.

ρ_2 不是等价关系. 原因是: 1) $(a, a) \notin \rho_2, (e, e) \notin \rho_2$, 所以 ρ_2 不具有自反性; 2) $(d, e) \in \rho_2$, 但 $(e, d) \notin \rho_2$, 所以 ρ_2 不具有对称性; 3) $(a, b) \in \rho_2, (b, a) \in \rho_2$, 但 $(a, a) \notin \rho_2$, 所以 ρ_2 不具有可传递性.

虽然有以上三条原因, 然而其中单独任何一条均可使得 ρ_2 不成为等价关系.

例如

$$\rho_3 = \{(b, a), (a, b), (b, e), (a, c), (b, b), (a, a), (e, b), \\ (c, a), (c, c), (d, d), (e, e)\}$$

是 A 上的自反且对称的关系, 但因 ρ_3 不是可传递的, 所以 ρ_3 不是等价关系.

$$\rho_1 = \{(a, a), (b, a), (b, b), (d, e), (a, b), (e, d), (d, d), (c, c), (e, e)\}$$

例 2-21 试对例 2-20 中等价关系 ρ_1 写出集合 A 中每一个元素生成的等价类.

解 对于元素 a , 因为 $(a, a) \in \rho_1, (b, a) \in \rho_1$, 所以 a 生成的等价类 $[a]_{\rho_1} = \{a, b\}$.

对于元素 b , 因为 $(b, b) \in \rho_1, (a, b) \in \rho_1$, 所以 b 生成的等价类 $[b]_{\rho_1} = \{a, b\}$.

类似地, $[c]_{\rho_1} = \{c\}, [d]_{\rho_1} = \{e, d\}, [e]_{\rho_1} = \{e, d\}$.

由上看出 $[a]_{\rho_1} = [b]_{\rho_1}, [d]_{\rho_1} = [e]_{\rho_1}$, 这说明不同的元素可能生成的等价类是相同的.

例如, 上例中集合 A 上由 ρ_1 导出的等价分划是

$$\Pi_{\rho_1}^A = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\} = \{[a]_{\rho_1}, [c]_{\rho_1}, [d]_{\rho_1}\}.$$

例 2-22 设 $A = \{2, 3, 4, 6, 8\}$, ρ 是 A 上的关系, 定义为

$$\rho = \{(a, b) \mid a \text{ 整除 } b\}.$$

试问 ρ 是偏序关系吗?

解 由 ρ 的定义, ρ 由以下序偶组成:

$$\rho = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 8), (6, 6), (8, 8)\}.$$

因为 $(2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (8, 8)$ 均在 ρ 中, 所以 ρ 是自反的.

当 $a \neq b$ 时, 序偶 (a, b) 和 (b, a) 至多只有一个在 ρ 中, 所以 ρ 是反对称的.

检查每一对序偶可以看出, 每当有 $(a, b), (b, c) \in \rho$ 时, 便有 $(a, c) \in \rho$. 例如 $(2, 4), (4, 8) \in \rho$, 也有 $(2, 8) \in \rho$. 所以 ρ 是可传递的.

由上可知, ρ 是 A 上的偏序关系.

事实上, 只要 A 是由一些正整数组成的集合, 则 A 上的整除关系一定是偏序关系.

$$\rho = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6), (4,4), (4,8), (6,6), (8,8)\}$$

例 2-23 分别用关系图和次序图表示例 2-22 中的偏序关系 ρ .

解 偏序关系 ρ 的关系图和次序图分别如图 2-7 和图 2-8 所示.

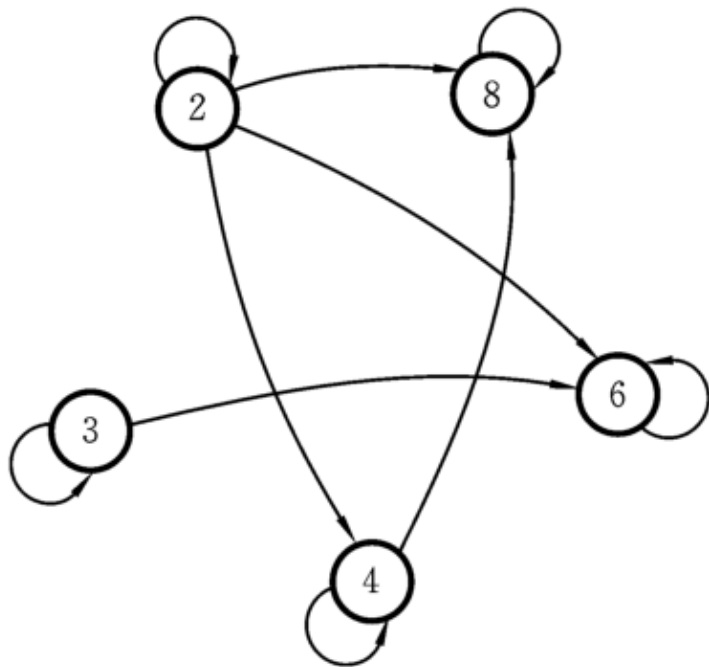


图 2-7 ρ 的关系图

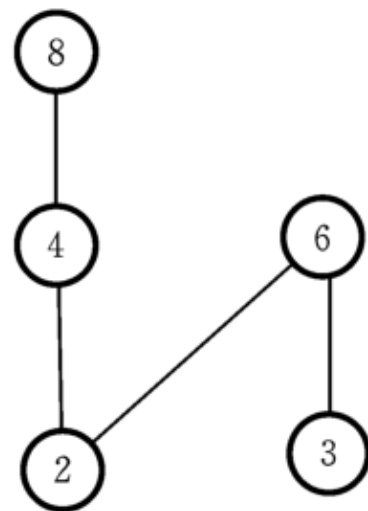


图 2-8 ρ 的次序图

偏序关系又称为部分序关系,它使得集合 A 中部分元素之间呈现一种次序关系. 这种次序关系在关系图中体现不出来,但在次序图中却表现得很清楚.

*** 例 2-30** 设 ρ_1 和 ρ_2 是集合 A 上的两个关系, 试证明 $\rho_1^+ \cup \rho_2^+ \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+$. 又 $(\rho_1 \cup \rho_2)^+ \subseteq \rho_1^+ \cup \rho_2^+$ 成立吗? 为什么?

证法一(根据 ρ^+ 的定义进行推理)

设 $(a, b) \in \rho_1^+ \cup \rho_2^+$, 则 $(a, b) \in \rho_1^+$ 或 $(a, b) \in \rho_2^+$.

若 $(a, b) \in \rho_1^+$, 则必存在正整数 k , 使得 $(a, b) \in \rho_1^k$, 于是存在元素 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}} \in A$, 使得

$$a \rho_1 a_{i_1}, a_{i_1} \rho_1 a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}} \rho_1 b.$$

因为 $\rho_1 \subseteq \rho_1 \cup \rho_2$, 所以又有

$$a(\rho_1 \cup \rho_2)a_{i_1}, a_{i_1}(\rho_1 \cup \rho_2)a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}}(\rho_1 \cup \rho_2)b,$$

于是

$$a(\rho_1 \cup \rho_2)^k b, \quad \text{即} \quad (a, b) \in (\rho_1 \cup \rho_2)^k.$$

由 $(\rho_1 \cup \rho_2)^k \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+$, 因此

$$(a, b) \in (\rho_1 \cup \rho_2)^+.$$

若 $(a, b) \in \rho_2^+$, 类似地可以证明 $(a, b) \in (\rho_1 \cup \rho_2)^+$. 由 (a, b) 的任意性, 可得 $\rho_1^+ \cup \rho_2^+ \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+$.

证法二(根据 ρ^+ 的性质进行推理)

由 ρ^+ 的定义知, $\rho^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \dots$, 因此

$$\rho_1 \subseteq \rho_1^+, \text{ 又 } \rho_1 \subseteq \rho_1 \cup \rho_2 \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+,$$

根据传递闭包的性质, ρ_1^+ 包含于每一个包含 ρ_1 的可传递关系中, 由于 $(\rho_1 \cup \rho_2)^+$ 是 A 上包含 ρ_1 的可传递关系, 所以 $\rho_1^+ \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+$.

类似地, 可以证明 $\rho_2^+ \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+$.

因此 $\rho_1^+ \cup \rho_2^+ \subseteq (\rho_1 \cup \rho_2)^+.$

又 $(\rho_1 \cup \rho_2)^+ \subseteq \rho_1^+ \cup \rho_2^+$ 不成立. 可举反例如下.

设 $A = \{1, 2, 3\}$, A 上的关系 $\rho_1 = \{(1, 2)\}$, $\rho_2 = \{(2, 3)\}$, 则 $\rho_1^+ = \{(1, 2)\}$, $\rho_2^+ = \{(2, 3)\}$, 于是

$$\rho_1^+ \cup \rho_2^+ = \{(1, 2), (2, 3)\}.$$

而 $(\rho_1 \cup \rho_2)^+ = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, 显然

$$(\rho_1 \cup \rho_2)^+ \not\subseteq \rho_1^+ \cup \rho_2^+.$$

End of Chapter 2