随机过程复习总结

Peter_H

1. Markov 过程

状态转移矩阵

$p_{ij}^n = P(X_{t_0+n} = j \mid X_{t_0} = i)$

CK方程： $\vec{\mu}^{(n)} = \vec{\mu}^0 P^n$

常返和暂留

常返：状态 i 出发有限次可回

常见考点：求出所有互达等价类，各状态的周期和常返性，计算所有正常返态的平均回转时，计算极限概率

是否常返：

- 有限马尔可夫链可以利用闭互达等价类直接判断：如果状态空间 I 有限，则状态 i 常返当且仅当 i 的互达等价类是闭的，且这时 i 一定是正常返
- 利用互达等价类减少计算：若状态 i 和 j 互达，则 $d(i) = d(j)$ （周期相等）， i 常返/正常返当且仅当 j 常返/正常返
- 通过计算来判断：计算 $f_{ii} = \sum\limits_n f_{ii}^{(n)}$, $f_{ii} = 1$ 常返， $f_{ii} < 1$ 暂留。其中 $f_{ij}^{(n)}$ 是 i 出发在第 n 步首次击中 j 的概率。对于非封闭的互达等价类，通过计算 f_{ii} 说明暂留性。
- 是否正常返：计算平均回转时 $\mu_i = \sum\limits_n n f_{ii}^{(n)}$, 看是否有限, 若无限则为零常返

极限概率：

- 利用平稳分布
- 若状态 j 为暂留或零常返，则对所有 i, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

平稳分布

初始分布与一步分布相同：$\pi P = \pi$。

比如：$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2$, 是指从初始状态 π_1 一步后到 π_1 再从 π_1 以 $\frac{1}{2}$ 概率回到 π_1， 一步后到 π_2 再从 π_2 以 $\frac{1}{3}$ 概率回到 π_1 。

对互达等价类（不可约状态集）的计算：

- 闭的 $\Longrightarrow$ 正常返 $\Longrightarrow$ 平稳分布存在且唯一，$\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$
- 若为非周期正常返，则任何状态 $i, j, \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$

吸收概率和平均吸收时间

用递推的思想。

设 $h_i = P(T_a < \infty \mid X_0 = i)$ 表示从状态 i 出发在有限时间内能访问状态 a 的概率，其中 T_a 为首次访问状态 a 的时间，有 $h_i = \sum\limits_j p_{ij} h_j$.

设 $a_i = E(T_a \mid X_0 = i)$ 表示从 i 出发首次访问 a 的平均步数，有 $a_i = 1 + \sum\limits_j p_{ij} a_j$.

2. 独立增量过程

泊松过程

定义

- 独立增量过程

- $N(0) = 0$
- $N(t) - N(s) \sim \pi(\lambda(t-s))$
- $P(N(t) - N(s) = k) = \dfrac{[\lambda(t-s)]^k e^{-\lambda(t-s)}}{k!}$

数字特征

- 均值 $\mu_N(t) = E(N(t)) = \lambda t$
- 方差 $D_N(t) = \lambda t$
- 自协方差函数 $C_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$
- 自相关函数 $R_N(s,t) = E(N(s)N(t)) = \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$

推广

- 合成、分解后依旧是泊松过程
- 非齐次：$\lambda = \lambda(t)$
- $\{N(t)\}$ 为强度 λ 的泊松过程 $\iff$ 时间间隔 $T_1, T_2, \cdots$ 相互独立，且服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布

布朗运动

特殊的正态过程

定义

- 独立增量过程
- $X(0) = 0$
- $X(t) - X(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$

数字特征

对标准布朗运动 $B(t) = \{X(t)/\sigma\}$

- $\mu_B(t) = 0$
- $D_B(t) = t$
- $C_B(s,t) = \min\{s,t\}$
- $R_B(s,t) = \min\{s,t\}$

推广

$\{B(t); t \geq 0\}$ 是标准布朗运动，则：

- $\{B(t+\tau) - B(\tau)\}$ 也是
- $\{\frac{1}{c}B(c^2t)\}$ 也是
- $\widetilde{B}(t) = tB(\frac{1}{t})$ 也是（定义 0 处为 0）

布朗桥过程：

- $\{B(t); 0 \leq t \leq 1 \mid B(1) = 0\}$
- $\mu = 0$
- $\sigma^2 = t(1-t)$
- 对 $0 \leq s \leq t \leq 1, \operatorname{Cov}(B(s), B(t) \mid B(1) = 0) = s(1-t)$

首中时间相关

$$P(\max_{0\le s\le t} B(s) \ge y) = P(T_y \le t) = 2P(B(t) \ge y)$$

3. 平稳过程

宽平稳过程

- 均值为常数
- 自相关函数只和时间差有关

各态历经性

记 $\langle X(t)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$

- 均值各态历经性：$\langle X(t)\rangle = \mu_X$
- 自相关函数各态历经性：$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$
- （宽）各态历经过程：均值函数和自相关函数都有各态历经性

重要推论：

若 $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau)$ 存在，则 $\{X(t)\}$ 对均值具有各态历经性当且仅当 $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = \mu_X^2$

频率域表述

- 平均功率 $= R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega$
- 维纳-辛钦公式：$S_X(\omega)$ 和 $R_X(t)$ 互为傅立叶变换对

常用变换：$e^{-a|\tau|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^w}$