3. 下面是实数集合 **R** 上的二元运算 $*$ 的不同定义. 在每一情况下，判定 $*$ 是否是可交换的，是否是可结合的，**R** 对于 $*$ 是否有单位元？如果有单位元的话，**R** 中的每一元素对于 $*$ 是否都是可逆的？

(1) $r_1 * r_2 = |r_1 - r_2|$；　(2) $r_1 * r_2 = (r_1^2 + r_2^2)^{1/2}$；

(3) $r_1 * r_2 = r_1 + 2r_2$；　(4) $r_1 * r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

(1) ① $r_1 * r_2 = |r_1 - r_2| = |r_2 - r_1| = r_2 * r_1 \Rightarrow *$ 可交换

② $(r_1 * r_2) * r_3 = |r_1 - r_2| * r_3 = ||r_1 - r_2| - r_3|$

$r_1 * (r_2 * r_3) = r_1 * |r_2 - r_3| = |r_1 - |r_2 - r_3||$

取 $r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 3$

$(r_1 * r_2) * r_3 = 2 \quad r_1 * (r_2 * r_3) = 0 \Rightarrow *$ 不可结合

③ 没有单位元

若有单位元 e，$e * r = |r - e| = r$，$r < 0$ 时不成立

(4) ① $r_1 * r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}(r_2 + r_1) = r_2 * r_1 \Rightarrow *$ 可交换

② 取 $r_1 = 1,\ r_2 = 3,\ r_3 = 3$

$(r_1 * r_2) * r_3 = 2 * 3 = \frac{5}{2} \quad r_1 * (r_2 * r_3) = 1 * 3 = 2$

③ 没有单位元

若有单位元 e，$e * r = \frac{1}{2}(e + r) = r \Leftrightarrow e = r$

无法对 $\forall r \in R$ 成立

6. $\langle A; * \rangle$ 是一个代数系统，这里 $*$ 是可结合的二元运算，并且对于所有的 $a_i, a_j \in A$，由 $a_i * a_j = a_j * a_i$，可推得 $a_i = a_j$. 试证明对于任意的 $a \in A$，有 $a * a = a$.

$(a * a) * a = a * (a * a) \Rightarrow a * a = a$

7. 若$\langle J;+,\cdot\rangle$是一整环，证明：

(1) 对所有的 $i,j,k\in J$，若 $i+j=i+k$，则 $j=k$；

(2) 对所有的 $i,j\in J$，方程 $i+x=j$ 在 J 上有唯一解；

(3) 对所有的 $i\in J$，有 $i\cdot 0=0\cdot i=0$；

(4) 对所有的 $i,j\in J$，若 $i\cdot j=0$，则 $i=0$ 或 $j=0$；

(5) 对所有的 $i\in J$，有 $-(-i)=i$；

(6) 对所有的 $i\in J$，有 $-i=(-1)\cdot i$；

(7) 对所有的 $i,j\in J$，有 $-(i+j)=(-i)+(-j)$；

(8) 对所有的 $i,j\in J$，有 $(-i)\cdot j=i\cdot(-j)=-(ij)$；

(9) 对所有的 $i,j\in J$，有 $(-i)\cdot(-j)=i\cdot j$.

(1) $\forall i\in J$，$\exists\ i^{-1}$，$i^{-1}+i=0$

$i+j=i+k \Rightarrow i^{-1}+i+j=i^{-1}+i+k \Rightarrow 0+j=0+k$

$\forall m\in J$，有 $0+m=m+0=m$

$\Rightarrow j=k$

(3) $0+i\cdot 0=i\cdot 0=i\cdot(0+0)=i\cdot 0+i\cdot 0 \Rightarrow$ 由(1)可得 $i\cdot 0=0\cdot i=0$

(5) $-(-i)+(-i)=i+(-i)=0 \Rightarrow$ 由(1)可得 $-(-i)=i$

10. 设有代数系统$\langle \mathbf{N};\cdot\rangle$和$\langle\{0,1\};\cdot\rangle$，这里 $\cdot$ 是通常的乘法. 证明函数 $h:\mathbf{N}\to\{0,1\}$ 是一个从$\langle \mathbf{N};\cdot\rangle$到$\langle\{0,1\};\cdot\rangle$的同态，这里

$$h(n)=\begin{cases}1 & n=2^k\ (k\geqslant 0)\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$\forall x_1,x_2\in N$　$h(x_1\cdot x_2)=1$ 时，$x_1\cdot x_2=2^k \Rightarrow \exists m,n\in N$，使 $x_1=2^m$，$x_2=2^n$

$\Rightarrow h(x_1)\cdot h(x_2)=1=h(x_1\cdot x_2)$

$h(x_1\cdot x_2)=0$ 时，x_1,x_2 必有一个不是2的幂次

$\Rightarrow h(x_1)$，$h(x_2)$ 必有一个为0 $\Rightarrow h(x_1)\cdot h(x_2)=0=h(x_1\cdot x_2)$

综上 $h(x_1\cdot x_2)=h(x_1)\cdot h(x_2)$，函数 h 是一个 $\langle N;\cdot\rangle$ 到 $\langle\{0,1\};\cdot\rangle$ 的同态

12. 考虑代数系统$\langle C;+,\cdot\rangle$（这里 C 是复数集合，$+$ 和 $\cdot$ 是复数的加法和乘法）和代数系统$\langle H;+,\cdot\rangle$（这里 H 是所有形如

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2\\ -r_2 & r_1\end{bmatrix}\ (r_1,r_2\in\mathbf{R})$$

的 2×2 矩阵的集合，$+$ 和 $\cdot$ 是矩阵的加法和乘法），证明这两个代数系统同构.

设 $h(z)=\begin{bmatrix} Re(z) & Im(z)\\ -Im(z) & Re(z)\end{bmatrix}$　显然，$h:C\to H$ 是双射

$\forall z_1,z_2\in C$，设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$

$h(z_1+z_2)=h((a+c)+(b+d)i)=\begin{bmatrix} a+c & b+d\\ -(b+d) & a+c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b\\ -b & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & d\\ -d & c\end{bmatrix}$

$=h(z_1)+h(z_2)$

$$h(z_1 \cdot z_2) = h(ac-bd+(bc+ad)i) = \begin{bmatrix} ac-bd & bc+ad \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = h(z_1) \cdot h(z_2)$$

$\Rightarrow$ 这两个代数系同构

15. 设 $f: X \to Y$ 是从 $V_1 = \langle X; \circ \rangle$ 到 $V_2 = \langle Y; * \rangle$ 的同态，$g: Y \to Z$ 是从 V_2 到 $V_3 = \langle Z; \times \rangle$ 的同态，其中运算 $\circ$、$*$ 和 $\times$ 都是二元运算. 试证明：$gf: X \to Z$ 是从 V_1 到 V_3 的同态.

16. 设函数 $h: S_1 \to S_2$ 是从代数系统 $V_1 = \langle S_1; o_{11}, o_{12}, \cdots, o_{1n} \rangle$ 到 $V_2 = \langle S_2; o_{21}, o_{22}, \cdots, o_{2n} \rangle$ 的同态. 试证明 $\langle h(S_1); o_{21}, o_{22}, \cdots, o_{2n} \rangle$ 是 V_2 的子代数.

15. $\forall x_1, x_2 \in X$, $f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$

$\forall y_1, y_2 \in Y$, $g(y_1 * y_2) = g(y_1) \times g(y_2)$

$\Rightarrow gf(x_1 \circ x_2) = g(f(x_1) * f(x_2)) = gf(x_1) \times gf(x_2)$

$\Rightarrow gf: X \to Z$ 是从 V_1 到 V_3 的同态

16. $h(S_1) \subseteq S_2$，下面只需证明 $\langle h(S_1); O_{21}, O_{22}, \cdots O_{2n} \rangle$ 是代数系统

$\forall r_1, r_2 \in h(S_1)$，$\exists x_1, x_2 \in S_1$，$h(x_1) = r_1$，$h(x_2) = r_2$

$r_1 O_{2k} r_2 = h(x_1) O_{2k} h(x_2) = h(x_1 O_{1k} x_2) \in h(S_1)$，$k = 1, 2, \cdots n$

$\Rightarrow \langle h(S_1); O_{21}, O_{22}, \cdots O_{2n} \rangle$ 对每个运算封闭

$\Rightarrow \langle h(S_1); O_{21}, O_{22}, \cdots O_{2n} \rangle$ 是代数系统

$\Rightarrow \langle h(S_1); O_{21}, O_{22}, \cdots O_{2n} \rangle$ 是 V_2 的子代数