电磁场与电磁波

第5讲

1. 微分形式的麦克斯韦方程
   复矢量形式的麦克斯韦方程
2. 连续方程
3. 物质的本构关系

第4讲复习

复习要点

- 算符∇既是矢量，又有微分运算功能。∇作用于一标量场Φ可得到一矢量场$\nabla\Phi$。∇作用于一矢量场$\boldsymbol{A}$，如进行点积运算得到一标量场$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，如果进行一矢积运算可得到一矢量$\nabla\times\boldsymbol{A}$。
- 标量场Φ的梯度gradΦ是一矢量，其模为最大方向导数，方向为场最大变化率方向

$$\mathrm{grad}\,\Phi = \nabla\ \Phi$$

- 矢量场$\boldsymbol{A}$的散度div$\boldsymbol{A}$反映矢量场的通量体密度，是一标量。div$\boldsymbol{A}$=$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，矢量场$\boldsymbol{A}$的旋度Curl$\boldsymbol{A}$反映矢量场的环量面密度，是一矢量，其模等于最大环量面密度，最大环量面密度时，曲面法线方向即旋度方向。Curl$\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A}$。
- 矢量运算恒等关系要记牢。

复习范围

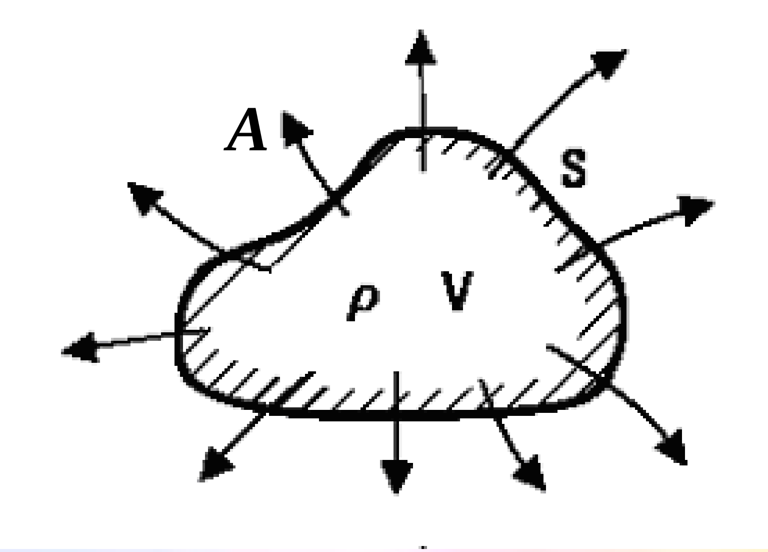
1.5

帮助理解的多媒体演示：MMS1

矢量场$\boldsymbol{A}$通量的体密度—散度div $\boldsymbol{A}$

$$\psi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

称为矢量场$\boldsymbol{A}$向正侧穿过曲面S的通量



如果S是一个闭曲面，并取其外侧为正侧，则

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

表示$\boldsymbol{A}$从闭曲面流出的通量。

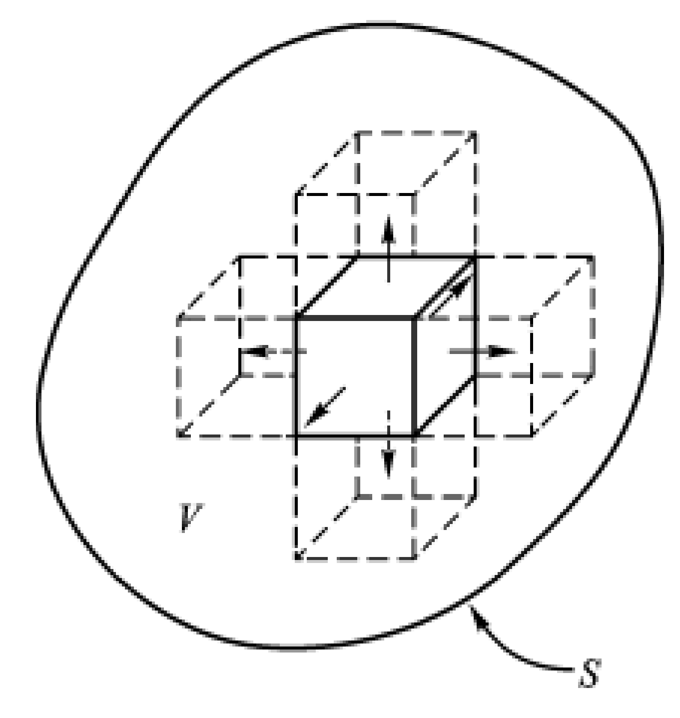
对于流体而言，当通量为正时，表示有净流量流出，说明存在着流体的源。当通量为负时，表示有净的流量流入，说明存在着流体的负源。当通量为零时，表示流入与流出的流量相等，说明体积内正负源的总和为零。

定义通量的体密度称为矢量场$\boldsymbol{A}$的散度记为div $\boldsymbol{A}$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

所以div $\boldsymbol{A}$是一个标量。

散度定理



对于由N个体积元ΔV构成的体积V，根据散度定义

$$\sum_N \left(\oint_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \right) = \sum_N (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \Delta V$$

当 $N \to \infty$, $\Delta V \to \mathrm{d}V$，

上式求和变成积分。因为除了包围体积V的闭曲面S外，所有相邻体积元交界面上$\oint_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$相互抵消，这样我们就得到

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V$$

这就是著名的散度定理。它表示矢量$\boldsymbol{A}$沿闭曲面的面积分$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$（或矢量场$\boldsymbol{A}$流出闭合曲面$S$的通量）等于矢量$\boldsymbol{A}$的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 的体积分，积分域V为S包围的体积。

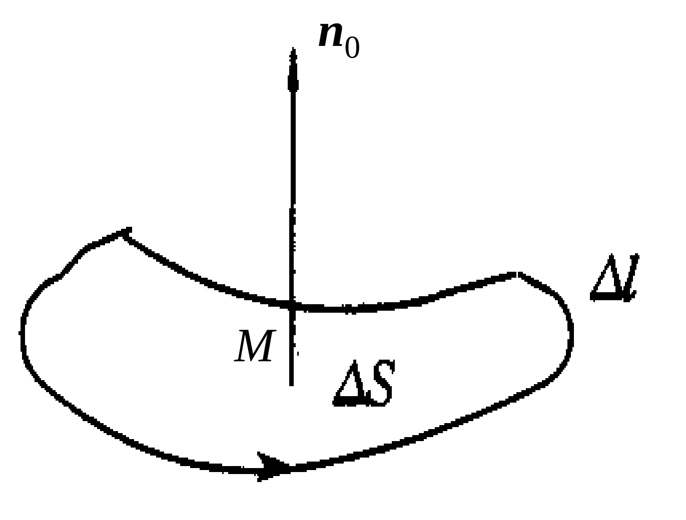
矢量场*A*沿有向闭合曲线*l*的环量

矢量场***A***在有向闭合曲线上的线积分

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

定义为矢量场***A***沿有向闭合曲线***l*** 的环量

环量是标量。



环量面密度

矢量场***A***中任一点*M*，在*M*点任取一个方向***n***，过*M*点作一微小曲面Δ*S*，其法线方向与***n***一致。ΔS的周界为Δ*l*。***n***和Δ*l*构成右手螺旋关系，计算积分，$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ ，

这就是***n***方向环量。因为***n***可任取，故从***M***点可计算出无限多个环量。这些无限多环量描述场在***M***点的涡旋性质。

在直角坐标系中

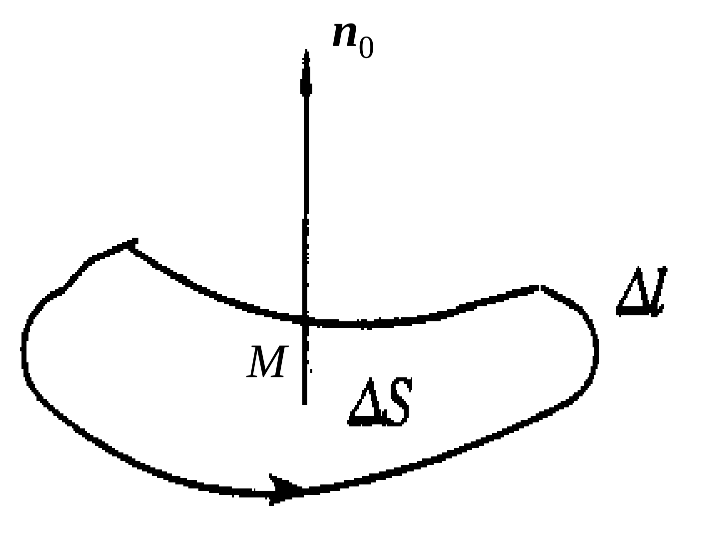
$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint \left(A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0 \right) \cdot \left(\mathrm{d}x\boldsymbol{x}_0 + \mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0 + \mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0 \right)$$

$$= \oint_l \left(A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z \right)$$

环量面密度

若矢量场**A**沿正Δ*l*方向的环量Δ*Γ*与面积Δ*S*在*M*点处保持以**n**为法线方向条件下，以任意方式缩向*M*点时，其极限

$$\lim_{\substack{\Delta S\to M\\(\text{或}\Delta S\to 0)}}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S}=\lim_{\substack{\Delta S\to M\\(\text{或}\Delta S\to 0)}}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$



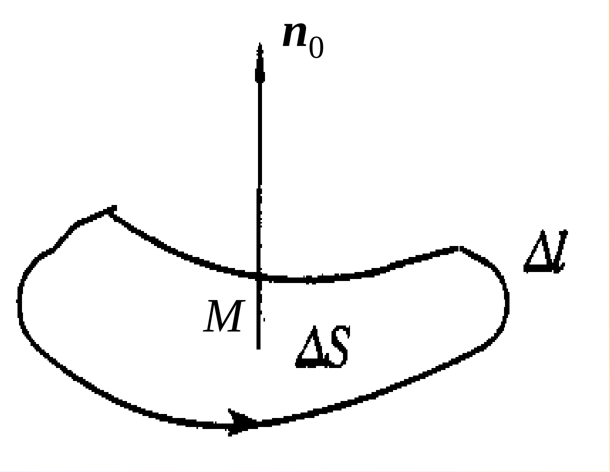
环量面密度

存在，则称它为矢量场**A**在**M**处沿方向**n**的环量面密度。
从环量面密度的定义可知，它是一个与方向有关的量。
空间给定点有无数个方向，每一个方向对应一个环量面密度。

旋度Curl **A**的定义

矢量场**A**的旋度Curl **A**定义为

$$(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{dl}}{\Delta S}$$



环量面密度

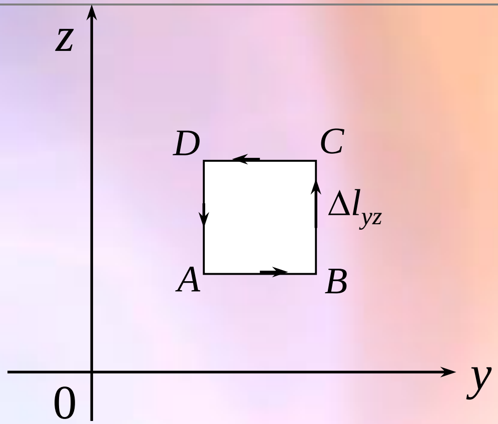
这就是说，矢量场**A**的旋度Curl **A**在空间某一点给定方向的投影就是该方向的环量面密度。

这跟标量场中梯度和方向导数之间的关系类似，梯度在某一方向投影就是该方向的方向导数。

当$\boldsymbol{n}$ 的方向与Curl **A**的方向一致时，得到最大的环量面密度。

旋度Curl **A**是一个矢量，其大小为最大环量面密度，方向为最大环量面密度时面积元法线$\boldsymbol{n}$的方向。

旋度Curl $\boldsymbol{A}$的计算



矢量场旋度在一个面积元上的计算

Curl $\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{x}$方向投影（或矢量场$\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{x}$方向的环量面密度）为

$$(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{x}_0=\lim_{\Delta S_x\to 0}\frac{\oint_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}}{\Delta S_x}$$

$$\boldsymbol{A}_{yz}=A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}=\mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0+\mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0$$

$$\int_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}$$

$$=\int_{\overline{ABCD}}\left[A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{AB}}\mathrm{d}y+A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{BC}}\mathrm{d}z+\left(-A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{CD}}\mathrm{d}y\right)+\left(-A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{DA}}\mathrm{d}z\right)\right]$$

$$=\underbrace{\left(A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{AB}}\right)}_{\Uparrow\ \text{矩形}ABCD\text{无穷小}}\Delta y-\left(A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{CD}}\right)\Delta y+\left(A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{BC}}\right)\Delta z-\left(A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{DA}}\right)\Delta z$$

$$(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{x}_0=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\int_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}}{\Delta S_x}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left(\frac{\left(A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{AB}}\right)\Delta y-\left(A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{CD}}\right)\Delta y+\left(A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{BC}}\right)\Delta z-\left(A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{DA}}\right)\Delta z}{\Delta y\Delta z}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left(\frac{A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{BC}}-A_z\big|_{\mathrm{on}\,\overline{DA}}}{\Delta y}-\frac{A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{CD}}-A_y\big|_{\mathrm{on}\,\overline{AB}}}{\Delta z}\right)=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

旋度Curl $\boldsymbol{A}$的计算

$$\left(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{x_0}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\int_{\Delta l_{yz}}\boldsymbol{A}_{yz}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}}{\Delta S_x}=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

同理，$\boldsymbol{A}$的旋度在y方向投影为

$$\left(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{y_0}=\lim_{\Delta S_y\to 0}\frac{\int_{\Delta l_{xz}}\boldsymbol{A}_{xz}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{xz}}{\Delta S_y}=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}$$

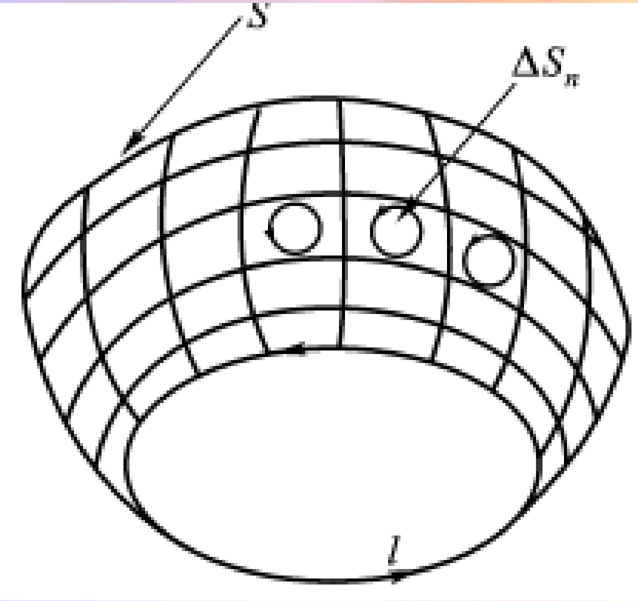
$\boldsymbol{A}$的旋度在z方向投影为

$$\left(\mathrm{Curl}\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{z_0}=\lim_{\Delta S_z\to 0}\frac{\int_{\Delta C_{xy}}\boldsymbol{A}_{xy}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_{xy}}{\Delta S_z}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

由（Curl$\boldsymbol{A}$）矢量在x、y、z方向的三个分量，故Curl$\boldsymbol{A}$可表示为

$$\mathrm{Curl}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{x}_0+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{y}_0+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{z}_0=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

斯托克斯定理



对于有限面积S，如果将S分成无限多小矩形面积元S_n之和；当ΔS_n足够小时，根据旋度定义，可得

$$\sum_n (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\Delta S_n = \sum_n \oint_{\Delta l_n} \boldsymbol{A}_n\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_n$$

左边即（$\nabla\times\boldsymbol{A}$）穿过面积$S$总的通量

$$\sum_n (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\Delta S_n = \int(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

而右边n个线积分，除了包围面积S的周边C以外，所有相邻面积元交界线的线积分都抵消，故有

$$\sum_n \oint_{\Delta l_n} \boldsymbol{A}_n\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_n = \oint_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

由此得到
$$\oint_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

这就是著名的斯托克斯定理，它表示矢量$\boldsymbol{A}$沿闭曲线C的线积分（或环量）等于$\boldsymbol{A}$的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 穿过曲线C包围的面积S的面积分。

亥姆霍兹定理

一个矢量场的性质由激发场的源来确定。

源有两个，一个是散度源（也称为通量源），另一个叫旋度源（也称为涡旋源）。

那么反过来，若已知一个矢量场的散度和旋度，能否唯一确定该矢量场？答案是肯定的，这就是亥姆霍兹定理。

亥姆霍兹定理：如果在体 $\boldsymbol{V}$ 内矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度和旋度已知，在 $\boldsymbol{V}$ 的边界 $\boldsymbol{S}$ 上 $\boldsymbol{A}$ 的值也已知，则在 $\boldsymbol{V}$ 内任意一点 $\boldsymbol{A}$ 的值能唯一确定。

这一定理的证明略去。据此定理，可以将任一矢量场 $\boldsymbol{A}$ 分解为一个无旋场与一个无源场之和，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是无旋场，$\boldsymbol{A}_2$ 是无源（散度源）场。

矢量运算的几个恒等关系

根据以上关于梯度、散度、旋度及拉普拉斯算符∇^2的定义，可得以下矢量运算的恒等关系：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

$$\nabla\times(\nabla\Phi)=0$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$\nabla\cdot(\varPhi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\varPhi+\varPhi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\times(\varPhi\boldsymbol{A})=\nabla\varPhi\times\boldsymbol{A}+\varPhi\nabla\times\boldsymbol{A}$$

从积分形式到微分形式的麦克斯韦方程组

根据矢量场的斯托克斯定律 $\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

麦克斯韦方程中两个旋度方程可写为

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由上两式可得 $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$

矢量场的散度定律 $\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}V$

麦氏方程中两个散度方程可写成 由此可得

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V = \int_V \rho_V \mathrm{d}V \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_V$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = 0 \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

微分形式的麦克斯韦方程组

法拉第定律

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

高斯定律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_V$$

推广的安培定律

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

磁通连续性原理

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

积分形式的麦克斯韦方程组反映电磁运动在某一局部区域的平均性质。微分形式的麦克斯韦方程反映场在空间每一点的性质，它是积分形式的麦克斯韦方程当积分域缩小到一个点的极限。

以后我们对电磁问题的分析一般都从微分形式的麦克斯韦方程出发。

从麦克斯韦方程组能看出什么？

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_V$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

两个旋度方程表示变化的磁场产生电场，变化的电场产生磁场。

两个散度方程，一个表示磁通的连续性，即磁场线既没有起始点也没有终点。这意味着空间不存在自由磁荷，或者说在人类研究所能达到的空间区域中至今还没有发现单独的磁荷存在。另一个表明电场是有源的。

时变场中电场的散度和旋度都不为零，所以电场线起始于正电荷而终止于负电荷。磁场的散度恒为零，而旋度不为零，所以磁场线是与电流交链的闭合曲线，并且磁场线与电场线两者还互相交链。在远离场源的无源区域中，电场和磁场的散度都为零，这时磁场线和电场线将自行闭合，相互交链，在空间形成电磁波。

积分与微分形式的麦克斯韦方程

积分形式

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{t}}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho_V \mathrm{d}V$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

微分形式

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_V$$

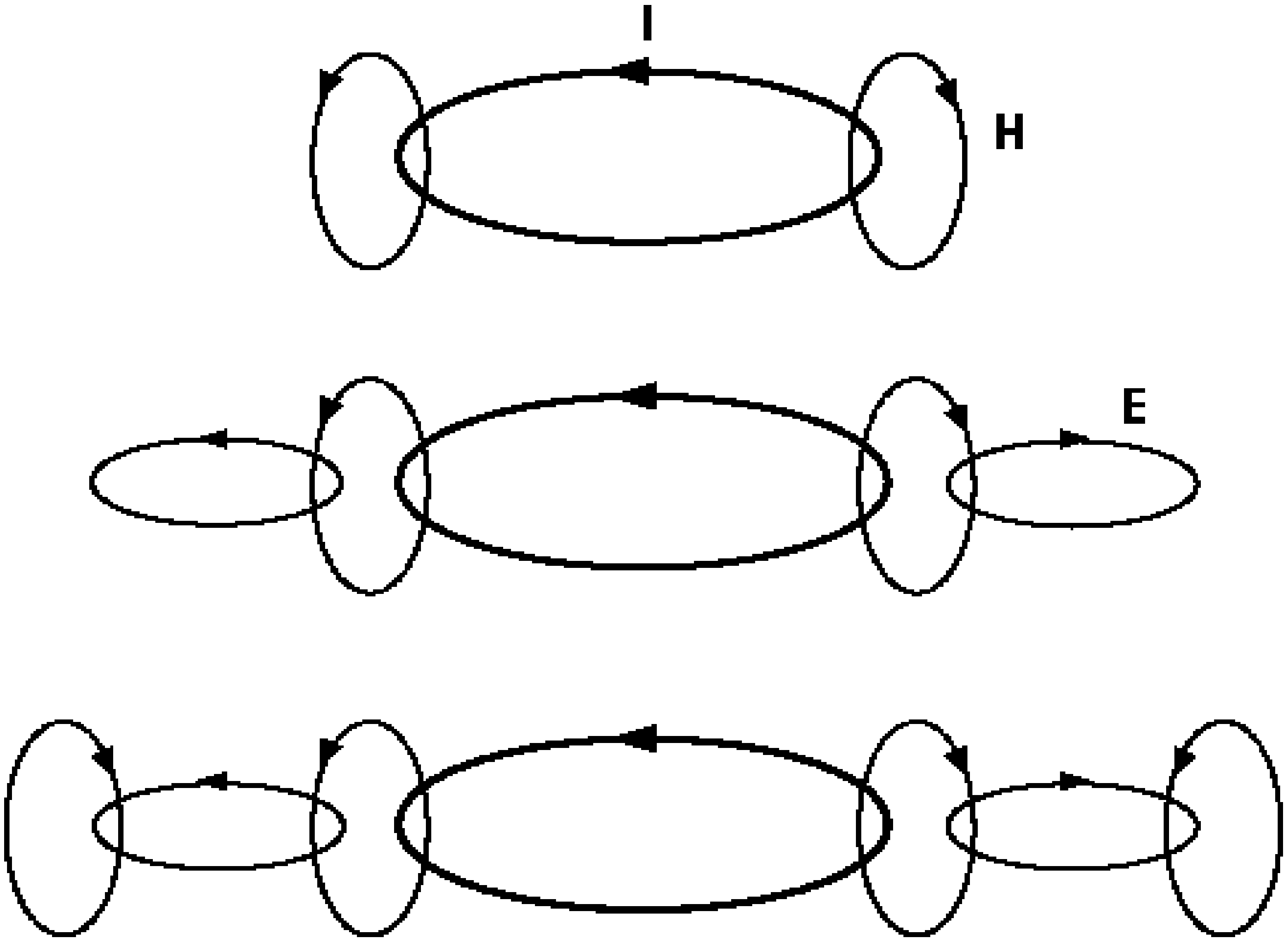
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

积分形式的麦氏方程反映场在局部区域的平均性质，而微分形式的麦氏方程反映场在空间每一点的性质。显然，当所考虑局部区域→0，积分形式麦氏方程就变为微分形式麦氏方程，微分形式麦氏方程是积分形式麦氏方程当局部区域→0时的极限。

怎么从积分形式麦氏方程得出微分形式麦氏方程?

∇是什么？　∇·是什么？　∇×是什么？

从麦克斯韦方程组能看出什么?



时谐场量$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{J}$与ρ的复量表示

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \qquad \boldsymbol{D}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{D}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \qquad \boldsymbol{H}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{H}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\boldsymbol{J}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{J}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \qquad \rho_V(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\rho_V(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

复矢量

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,)=\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z)$$

等不是时间t的函数，它们是矢量，有三个分量，每个分量是复数。

根据复矢量的定义，对时谐矢量的运算与对应的复矢量乘以jω等效，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x,y,z,t)\leftrightarrow\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)$$

复矢量形式的麦克斯韦方程

引入**E**、**B**的复矢量后麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$$

可表示为

$$\nabla\times\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=-\mathrm{Re}\left[\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

因为算符∇只对空间求导数，所以∇运算与取实部运算Re可调换次序，即

$$\mathrm{Re}\left[\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

由此得到

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z)=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)$$

同理

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(x,y,z)=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}(x,y,z)+\boldsymbol{J}(x,y,z)$$

$$\nabla\bullet\boldsymbol{D}(x,y,z)=\rho_V(x,y,z)$$

$$\nabla\bullet\boldsymbol{B}(x,y,z)=0$$

引入复矢量表示后，两时谐矢量叉积的时间平均值计算可简化为取实部运算，所以时谐矢量$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$与$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$叉积的时间平均值计算就归结为

$$\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\rangle\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\right]$$

麦克斯韦方程

麦克斯韦方程

	微分形式	积分形式	时谐场的复矢量形式
法拉第定理律	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint_C\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$
安培定理	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint_C\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$
高斯定理	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$	$\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V\rho_V\mathrm{d}V$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$
磁通连续性原理	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$	$\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$

这里要再次强调一下，微分形式的麦克斯韦方程与积分形式的麦克斯韦方程中有关场量等都是时间坐标与空间坐标的函数，而复矢量形式的麦克斯韦方程中有关场量等只是空间坐标的函数，复矢量形式的场量乘上 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 取实部才是微分形式、积分形式麦克斯韦方程中的场量。

电流连续性原理

麦克斯韦方程包含电流连续性原理。

用算符∇点乘 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ 两边，并利用矢量运算恒等关系 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$ 得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})=0$$

而根据式$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$，所以上式成为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho_V}{\partial t}=0 \qquad \text{或} \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho_V}{\partial t}$$

这是关于电流和电荷的连续方程。其物理意义就是流出体积元的电流等于体积元内电荷随时间的减少率。

$\boldsymbol{J}(x, y, z, t)$和 $\rho_V(x, y, z, t)$随时间作简谐变化时，引入与$\boldsymbol{J}(x, y, z, t)$对应的复矢量 $\boldsymbol{J}(x, y, z)$ 以及与 $\rho_V(x, y, z, t)$对应的复数 $\rho_V(x, y, z)$，则有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}\left(x,y,z\right)=-\mathrm{j}\omega\rho_V\left(x,y,z\right)$$

这就是时谐场的电荷守恒定律 。

麦克斯韦方程组中有几个是独立的?

式 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 包含在式 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 中。

因为对式 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ ，两边取散度可得到

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

如果把电荷与电流的连续方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\dfrac{\partial\rho_V}{\partial t}$ 作为基本方程，

$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$ 也不是独立的方程，因为

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)=\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})=0$$

将上两式比较便得到 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_V$

所以如果将电流连续方程看作基本方程,麦克斯韦方程组中只有两个旋度方程是独立的。

麦克斯韦方程+物质本构关系(一组自洽方程)

麦克斯韦方程、电荷守恒与电流连续方程组中独立的方程是

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\dfrac{\partial\rho_V}{\partial t} \end{cases}$$

其中独立的标量变量共16个，而独立的标量方程只7个，尚需9个独立的标量方程才能求解。

这另外的9个标量方程就由物质的本构关系提供

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{J}_c = \sigma\boldsymbol{E} \end{cases}$$

物质的本构关系作为辅助方程与麦克斯韦方程组一起构成一组自洽的方程。

物质可以按ε、μ、σ进行分类

线性与非线性:

ε、μ、σ与$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$的强度无关，就是线性介质，否则就是非线性介质。

均匀与非均匀:

ε、μ、σ与空间坐标无关，就是均匀介质，否则就是不均匀介质。

各向同性与各向异性:

ε、μ、σ与电磁波在空间传播的方向性无关，称为各向同性介质，否则就是各向异性介质。

线性、均匀、各向同性介质称为简单介质。

色散与非色散:

ε、μ、σ与频率无关称为非色散介质，否则就是色散介质。

色散介质一定有损耗，有损耗的介质一定色散。

$\sigma \neq 0$的介质有损耗，可用复介电系数的介质表示。

当ε、μ为复数时，其虚部表示介质损耗。

完纯介质：$\sigma = 0$的介质

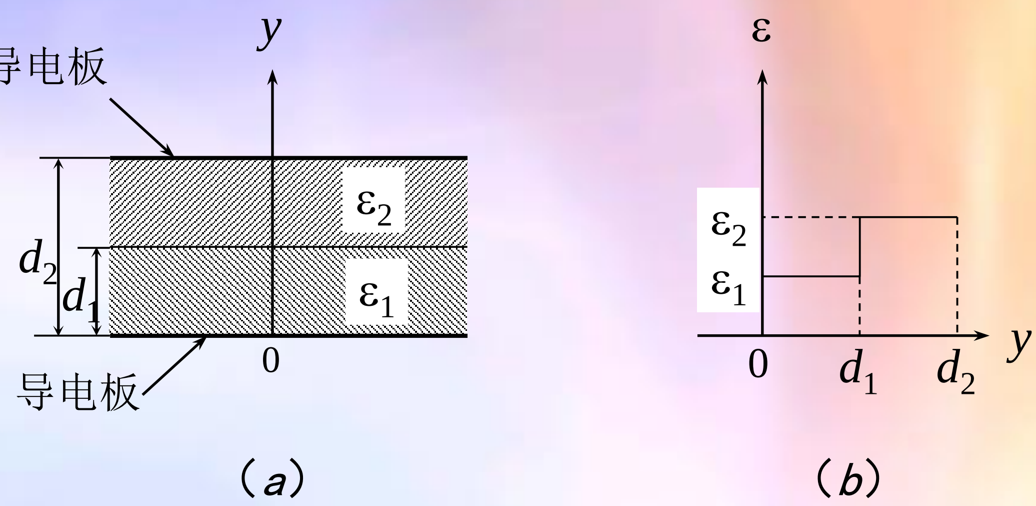
完纯导体：$\sigma = \infty$的介质

用麦克斯韦方程求解电磁问题时，只有当所研究空间ε、μ、σ的具体表达式知道后，才能对麦克斯韦方程求解。

介质的特性ε、μ、σ描述举例

在图示情况下介电常数ε是y的函数，可表示为

$$\varepsilon(y)=\begin{cases}\varepsilon_1 & 0\le y<d_1\\ \varepsilon_2 & d_1<y\le d\end{cases}$$



（a）两层状介质填充的平行导电板系统
（b）导电板间介质介电系数分布

如果假定介质1、2是绝缘介质，不导电，其磁导率μ_1、μ_2近似为μ_0，则得到

$$\mu_1=\mu_2=\mu_0$$
$$\sigma_1=\sigma_2=0$$

这就是对图示空间介质特性的具体描述，由此我们就能从麦克斯韦方程及物质的本构关系并在一定的边值条件下得出图示系统场问题的解。

因此我们对电磁问题的研究，一定要学会如何用ε、μ、σ描述介质的特性。

第5讲复习

复习要点

- 积分形式的麦氏方程反映场在某局部空间的平均性质。微分形式的麦氏方程反映场在每一点的性质。积分形式麦氏方程当所研究区域→0就得到微分形式麦氏方程。时谐场可用复矢量形式的麦克斯韦方程表示。
- 麦氏方程告诉我们电荷与电流是产生电场磁的源。随时间变化的电场产生磁场，随时间变化的磁场产生电场。电场与磁场垂直，交链在一起以电磁波形式运动。
- 麦克斯韦方程包含电流连续与电荷守恒方程。但电流连续与电荷守恒方程一般作为独立的方程给出。
- 麦克斯韦方程加上物质的本构关系才构成一组自洽的方程组。物质可按ε、μ、σ进行分类。

复习范围

3.1，3.2，3.3, 3.4

帮助理解的多媒体演示软件： MMS1