1. 若 $A=\{0,1\}, B=\{1,2\}$，确定集合：

(1) $A\times\{1\}\times B$；　　(2) $A^2\times B$；　　(3) $(B\times A)^2$.

(1) $\{(0,1,1)\ (0,1,2)\ (1,1,1)\ (1,1,2)\}$

(2) $\{(0,0,1)\ (0,0,2)\ (0,1,1)\ (0,1,2)$
$(1,0,1)\ (1,0,2)\ (1,1,1)\ (1,1,2\}$

(3) $\{(1,0,1,0)\ (1,0,1,1)\ (1,0,2,0)\ (1,0,2,1)$
$(1,1,1,0)\ (1,1,1,1)\ (1,1,2,0)\ (1,1,2,1)$
$(2,0,1,0)\ (2,0,1,1)\ (2,0,2,0)\ (2,0,2,1)$
$(2,1,1,0)\ (2,1,1,1)\ (2,1,2,0)\ (2,1,2,1)\}$

3. 设 A,B,C 和 D 是任意的集合，证明：

(1) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$；　　(2) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$；

(3) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

3(3) 设 $p=(a,b)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$

$\Rightarrow a\in A\cap B,\ b\in C\cap D \Rightarrow a\in A,\ a\in B,\ b\in C,\ b\in D$

$\Rightarrow (a,b)\in A\times C,\ (a,b)\in B\times D$

$\Rightarrow p\in(A\times C)\cap(B\times D)$

$\Rightarrow (A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq(A\times C)\cap(B\times D)$

设 $q=(c,d)\in(A\times C)\cap(B\times D)$

$\Rightarrow (c,d)\in A\times C,\ (c,d)\in B\times D$

$\Rightarrow c\in A,\ d\in C,\ c\in B,\ d\in D$

$\Rightarrow c\in A\cap B,\ d\in C\cap D \Rightarrow (c,d)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$

$\Rightarrow (A\times C)\cap(B\times D)\subseteq(A\cap B)\times(C\cap D)$

综上 $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

6. 设 $\rho_1=\{(1,2),(2,4),(3,3)\}$ 和 $\rho_2=\{(1,3),(2,4),(4,2)\}$，试求出 $\rho_1\cup\rho_2$，$\rho_1\cap\rho_2$，D_{ρ_1}，D_{ρ_2}，$D_{(\rho_1\cup\rho_2)}$，R_{ρ_1}，R_{ρ_2} 和 $R_{(\rho_1\cap\rho_2)}$，并证明：

$$D_{(\rho_1\cup\rho_2)}=D_{\rho_1}\cup D_{\rho_2};R_{(\rho_1\cap\rho_2)}\subseteq R_{\rho_1}\cap R_{\rho_2}$$

$\rho_1\cup\rho_2=\{(1,2)(2,4)(3,3)(1,3)(4,2)\}$

$\rho_1\cap\rho_2=\{(2,4)\}$

$D_{\rho_1}=\{1,2,3\}$ $D_{\rho_2}=\{1,2,4\}$ $D_{(\rho_1\cup\rho_2)}=\{1,2,3,4\}$

$R_{\rho_1}=\{2,3,4\}$ $R_{\rho_2}=\{2,3,4\}$ $R_{(\rho_1\cap\rho_2)}=\{4\}$

$D_{\rho_1}\cup D_{\rho_2}=\{1,2,3,4\}$ $\Rightarrow$ $D_{(\rho_1\cup\rho_2)}=D_{\rho_1}\cup D_{\rho_2}$

$R_{\rho_1}\cap R_{\rho_2}=\{2,3,4\}$ $\Rightarrow$ $R_{(\rho_1\cap\rho_2)}\subseteq R_{\rho_1}\cap R_{\rho_2}$

12. 给定集合 A_1,A_2,A_3，设 ρ_1 是由 A_1 到 A_2 的关系，ρ_2 和 ρ_3 是由 A_2 到 A_3 的关系，试证明：

(1) $\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)=(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)$;

(2) $\rho_1\cdot(\rho_2\cap\rho_3)\subseteq(\rho_1\cdot\rho_2)\cap(\rho_1\cdot\rho_3)$.

(1) 设 $(a_1,a_3)\in\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)$

$\Rightarrow\exists a_2$, $(a_1,a_2)\in\rho_1$, $(a_2,a_3)\in\rho_2\cup\rho_3$

$\Rightarrow(a_2,a_3)\in\rho_2$ 或 $(a_2,a_3)\in\rho_3$

$\Rightarrow(a_1,a_3)\in\rho_1\cdot\rho_2$ 或 $(a_1,a_3)\in\rho_1\cdot\rho_3$

$\Rightarrow(a_1,a_3)\in(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)$

$\Rightarrow\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)\subseteq(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)$

设 $(a_1,a_3)\in(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)$

$\Rightarrow(a_1,a_3)\in\rho_1\cdot\rho_2$ 或 $\rho_1\rho_3$

$\Rightarrow\exists a_2$, $(a_1,a_2)\in\rho_1$, $(a_2,a_3)\in\rho_2$ 或 ρ_3

$\Rightarrow(a_1,a_2)\in\rho_1$, $(a_2,a_3)\in\rho_2\cup\rho_3$

$\Rightarrow(a_1,a_3)\in\rho_1(\rho_2\cup\rho_3)$ $\Rightarrow$ $(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)\subseteq\rho_1(\rho_2\cup\rho_3)$

综上 $(\rho_1\cdot\rho_2)\cup(\rho_1\cdot\rho_3)=\rho_1(\rho_2\cup\rho_3)$

(2) 设 $(a_1,a_3)\in\rho_1\cdot(\rho_2\cap\rho_3)$

$\Rightarrow\exists a_2$, $(a_1,a_2)\in\rho_1$, $(a_2,a_3)\in\rho_2\cap\rho_3$

$\Rightarrow(a_2,a_3)\in\rho_2$, $(a_2,a_3)\in\rho_3$

$\Rightarrow(a_1,a_3)\in\rho_1\cdot\rho_2$, $(a_1,a_3)\in\rho_1\cdot\rho_3$

$\Rightarrow(a_1,a_3)\in(\rho_1\cdot\rho_2)\cap(\rho_1\cdot\rho_3)$

$\Rightarrow\rho_1\cdot(\rho_2\cup\rho_3)\subseteq(\rho_1\cdot\rho_2)\cap(\rho_1\cdot\rho_3)$

15. 设 A 是有 n 个元素的有限集，ρ 是 A 上的关系，试证明必存在两个正整数 k 和 t，使得 $\rho^k=\rho^t$.

$\rho \subseteq A\times A \Rightarrow$ A上至多 2^{n^2} 个关系

ρ 为A上的关系 $\Rightarrow \rho^m$，$m\in N$ 也为A上的关系

A的关系数有限 $\Rightarrow$ 必存在 k,t，使 $\rho^k=\rho^t$

16. 设 ρ_1 是由 A 到 B 的关系，ρ_2 是由 B 到 C 的关系，试证明 $\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}=\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$.

(1) $\forall (a_1,a_3)\in \rho_1\cdot\rho_2$，$\exists a_2$，$(a_1,a_2)\in\rho_1$，$(a_2,a_3)\in\rho_2$

$(a_3,a_1)\in\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$，$(a_2,a_1)\in\tilde{\rho}_1$，$(a_3,a_2)\in\tilde{\rho}_2$

$\Rightarrow (a_3,a_1)\in\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1 \Rightarrow \widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}\subseteq\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$

(2) $\forall (a_1,a_3)\in\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$，$\exists a_2$，$(a_1,a_2)\in\tilde{\rho}_2$，$(a_2,a_3)\in\tilde{\rho}_1$

$\Rightarrow (a_2,a_1)\in\rho_2$，$(a_3,a_2)\in\rho_1$

$\Rightarrow (a_3,a_1)\in\rho_1\cdot\rho_2 \Rightarrow (a_1,a_3)\in\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$

$\Rightarrow \tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1\subseteq\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}$

综上 $\widetilde{\rho_1\cdot\rho_2}=\tilde{\rho}_2\cdot\tilde{\rho}_1$

19. 试证明：若 ρ 是基数为 n 的集合 A 上的一个关系，则 ρ 的传递闭包为 $\rho^+=\bigcup_{i=1}^{n}\rho^i$.

A的传递闭包 $t(\rho)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\rho^i$ $\quad\rho^+\subseteq t(\rho)$

下面证明 $t(\rho)\subseteq\rho^+$

设 $(a,b)\in t(\rho)$

设 $(a,b)\in\rho^k$，其中k为满足条件的最小值

$\Rightarrow \exists\ a_1,a_2,\cdots a_{k-1}$

$(a,a_1)\in\rho$，$(a_1,a_2)\in\rho$ $\cdots$ $(a_{k-2},a_{k-1})\in\rho$ $(a_{k-1},b)\in\rho$

其中 $a,a_1,a_2,\cdots a_{k-1},b$ 两两不同，否则可将二者之间的关系删去，与K的最小性矛盾

ex. $(a_1,1)\in\rho$ $\underbrace{(1,a_m)\in\rho\ \cdots\ (a_p,1)\in\rho}_{\text{可删去}}$ $,(1,a_q)\in\rho$

$\#A=n \Rightarrow 2+k-1\le n \Rightarrow k\le n-1 \Rightarrow (a,b)\in\rho^+$

$\Rightarrow t(\rho)\subseteq\rho^+$

$\Rightarrow t(\rho)=\rho^+$

21. 设 ρ_1 和 ρ_2 是集合 A 上的任意两个关系，判断下列命题是否正确，并说明理由.

(1) 若 ρ_1 和 ρ_2 是自反的，则 $\rho_1 \cdot \rho_2$ 也是自反的；

(2) 若 ρ_1 和 ρ_2 是非自反的，则 $\rho_1 \cdot \rho_2$ 也是非自反的；

(3) 若 ρ_1 和 ρ_2 是对称的，则 $\rho_1 \cdot \rho_2$ 也是对称的；

(4) 若 ρ_1 和 ρ_2 是反对称的，则 $\rho_1 \cdot \rho_2$ 也是反对称的；

(5) 若 ρ_1 和 ρ_2 是可传递的，则 $\rho_1 \cdot \rho_2$ 也是可传递的.

(1) 正确 $\forall a \in A$ ，$(a,a) \in \rho_1$ ，$(a,a) \in \rho_2 \Rightarrow (a,a) \in \rho_1 \cdot \rho_2 \Rightarrow \rho_1 \cdot \rho_2$ 自反

(2) 不正确 $A = \{1,2\}$ $\rho_1 = \{(2,2)(1,2)(2,1)\}$ $\rho_2 = \{(1,1),(1,2)(2,1)\}$

$(1,1) \notin \rho_1$ ，$(2,2) \notin \rho_2 \Rightarrow \rho_1, \rho_2$ 非自反

$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{(1,1)(2,2)(2,1)\} \Rightarrow \rho_1 \cdot \rho_2$ 自反

(3) 不正确 $A = \{1,2,3\}$ $\rho_1 = \{(1,2)(2,1)\}$ $\rho_2 = \{(2,3)(3,2)\}$

$\Rightarrow \rho_1 \cdot \rho_2 = \{(1,3)\}$ 不对称

(4) 不正确 $A = \{1,2,3\}$ $\rho_1 = \{(1,2)(2,3)\}$ $\rho_2 = \{(2,2)(3,1)\}$

$\Rightarrow \rho_1 \cdot \rho_2 = \{(1,2)(2,1)\}$ 对称

(5) 不正确 $A = \{1,2,3,4\}$ $\rho_1 = \{(1,2)(3,4)\}$ $\rho_2 = \{(2,3)(4,1)\}$

$\rho_1 \cdot \rho_2 = \{(1,3)(3,1)\}$ 不可传递

34. 已知 ρ_1 和 ρ_2 是集合 A 上分别有秩 r_1 和 r_2 的等价关系，试证明 $\rho_1 \cap \rho_2$ 也是 A 上的等价关系，它的秩至多为 $r_1 r_2$. 再证明 $\rho_1 \cup \rho_2$ 不一定是 A 上的等价关系.

35. 设 ρ_1 是集合 A 上的一个关系，$\rho_2 = \{(a,b) \mid$ 存在 c，使 $(a,c) \in \rho_1$ 且 $(c,b) \in \rho_1\}$. 试证明：若 ρ_1 是一个等价关系，则 ρ_2 也是一个等价关系.

34. 规定等价关系 ρ 的关系矩阵 M 对角线上满足下面条件之一的点、M_{ii} 为结点 $(1<i<n)$

(1) $M_{i+1,i} = 1$ ，$M_{i,i+1} = 1$ ，$M_{i-1,i} = 0$ ，$M_{i,i-1} = 0$

(2) $M_{i+1,i} = M_{i-1,i} = M_{i,i+1} = M_{i,i-1} = 0$ (3) $i = 1$

ex. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

结点 结点

ρ_1 秩 $r_1 \Rightarrow$ 结点 r_1 个，设为 $M^{(1)}_{i_1,i_1}$ ... $M^{(1)}_{i_{r_1},i_{r_1}}$

ρ_2 秩 $r_2 \Rightarrow$ 结点 r_2 个，设为 $M^{(2)}_{i_1,i_1}$ ... $M^{(2)}_{i_{r_1},i_{r_1}}$

$M^{(1)}$ 两结点之间若有 $M^{(2)}$ 的 k 个结点

$M^{(1)}_{p,p}$ ，$M^{(1)}_{q,q}$

则 $M^{(1)} .* M^{(2)}$ 时，有 $M^{(1)}$ 两点间的全1块被 $M^{(2)}$ 结点分割成 $k+1$ 个全1块 $\Rightarrow M^{(1)} .* M^{(2)}$ 结点数 $\leq r_1+r_2-1$ （$M^{(1)}_{1,1}$ 与 $M^{(2)}_{1,1}$ 重合）

$\Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2$ 也为等价关系，且秩至多 $r_1+r_2-1 \leq r_1 r_2$

34. $\forall a \in A$，有 $(a,a) \in \rho_1$，$(a,a) \in \rho_2 \Rightarrow (a,a) \in \rho_1 \cap \rho_2 \Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2$ 自反

若 $(a,b) \in \rho_1 \cap \rho_2$，$(a,b) \in \rho_1$，$(a,b) \in \rho_2 \Rightarrow (b,a) \in \rho_1$，$(b,a) \in \rho_2$

$\Rightarrow (b,a) \in \rho_1 \cap \rho_2 \Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2$ 对称

若 $(a,b) \in \rho_1 \cap \rho_2$，$(b,c) \in \rho_1 \cap \rho_2 \Rightarrow (a,b) \in \rho_1$，$(a,b) \in \rho_2$

$(b,c) \in \rho_1$，$(b,c) \in \rho_2 \Rightarrow (a,c) \in \rho_1$，$(a,c) \in \rho_2$

$\Rightarrow (a,c) \in \rho_1 \cap \rho_2 \Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2$ 传递

$\Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2$ 为等价关系

设 ρ_1 分划等价类 $[a_1]_{\rho_1} \cdots [a_{r_1}]_{\rho_1}$　ρ_2 分划等价类 $[b_1]_{\rho_2} \cdots [b_{r_2}]_{\rho_2}$

ρ_1 每个等价类至多被 ρ_2 分划为 r_2 个等价类 $\Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2$ 等价类至多 $r_1 \cdot r_2$

反例　$A=\{1,2,3\}$　$\rho_1=\{(1,1)(2,2)(3,3)(1,3)(3,1)\}$ 等价

$\rho_2=\{(1,1)(2,2)(3,3)(1,2)(2,1)\}$ 等价

$\rho_1 \cup \rho_2=\{(1,1)(2,2)(3,3)(1,3)(3,1)(1,2)(2,1)\}$ 不可传递

$(3,1) \in \rho_1 \cup \rho_2$　$(1,2) \in \rho_1 \cup \rho_2$　$(3,2) \notin \rho_1 \cup \rho_2$

35. ① $\forall a \in A$，$(a,a) \in \rho_1$，$(a,a) \in \rho_1 \Rightarrow (a,a) \in \rho_2 \Rightarrow \rho_2$ 自反

② $\forall (a,c) \in \rho_2$，$\exists b$，$(a,b) \in \rho_1$，$(b,c) \in \rho_1$

ρ_1 等价 $\Rightarrow (b,a) \in \rho_1$，$(c,b) \in \rho_1 \Rightarrow (c,a) \in \rho_2$

$\Rightarrow \rho_2$ 对称

③ $(a,b) \in \rho_2$，$(b,c) \in \rho_2$，$\exists m,n$，$(a,m) \in \rho_1$，$(m,b) \in \rho_1$
$(b,n) \in \rho_1$，$(n,c) \in \rho_1$

ρ_1 等价 $(a,b) \in \rho_1$ $(b,c) \in \rho_1 \Rightarrow (a,c) \in \rho_2 \Rightarrow \rho_2$ 传递

综上，ρ_1 等价，则 ρ_2 等价

偏序，自反，反对称，可传递

40. 如果 ρ 是集合 A 中的偏序关系，且 $B \subseteq A$，试证明：$\rho \cap (B \times B)$ 是 B 上的偏序关系.

① $\forall\ b \in B \Rightarrow b \in A \Rightarrow (b,b) \in \rho$ 同时 $(b,b) \in B \times B \Rightarrow (b,b) \in \rho \cap (B \times B)$

$\Rightarrow$ 自反

② $\forall\ (a,b) \in \rho \cap (B \times B) \Rightarrow (a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \notin \rho \Rightarrow (b,a) \notin \rho \cap (B \times B)$

$\Rightarrow$ 反对称

③ $\forall (a,b) \in \rho \cap (B \times B)$，$(b,c) \in \rho \cap (B \times B)$

$\Rightarrow (a,b) \in \rho$，$(b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$

同时 $(a,b) \in B \times B$，$(b,c) \in B \times B \Rightarrow a,b,c \in B \Rightarrow (a,c) \in B \times B$

$\Rightarrow (a,c) \in \rho \cap (B \times B) \Rightarrow$ 可传递

$\Rightarrow \rho \cap (B \times B)$ 是 B 上的偏序关系