电磁场与电磁波

第6讲

1.洛伦兹力方程、等离子体的电磁特性
2.坡印廷定理
3.电磁场的几个基本原理与定理

洛伦兹力

带电荷量q、速度为v的质点在电磁场中受到的力为洛伦兹力方程所描述

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

力F的单位是牛顿（N），电荷量q的单位是库仑（C）。

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ 是电场力，它是带电体相互作用规律的实验总结。

$\boldsymbol{F}_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ 是磁场力，也是实验规律的总结。

$\boldsymbol{F}_\mathrm{m}$正比于$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{B}$的叉积。静止电荷$v = 0$，所以磁场对静止电荷不起作用。对运动电荷也仅当其速度$\boldsymbol{v}$有与$\boldsymbol{B}$垂直的分量时，$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \neq 0$ ，磁场才对运动电荷起作用。

(举例: **美国NASA发射的系留卫星**)

磁场对运动电荷的作用力总是与运动电荷的速度v垂直，所以磁场力总是使电荷质点运动轨迹弯转。

洛伦兹方程描述了电磁场对构成物质的基本单元——电子和核的作用，而物质对电磁场的作用则由麦克斯韦方程和物质的本构关系反映出来。

等离子体

什么是等离子体?

等离子体是电离了的气体，含有大量带正电的离子和带负电的电子，与束缚在原子中的带负电的电子和带正电的核不同，等离子体中的电子和离子可以自由运动。

离开地面80~120km高空的电离层就是一个等离子体，电离层是由太阳辐射来的紫外光电离高空大气而形成的。

等离子体分析模型:

如果时谐电场作用于等离子体，等离子体中的电子和离子将受电场力作用而运动。因为电子质量比离子质量小得多，离子的运动可忽略，电子将在平衡位置附近作简谐振动。

电子离开平衡位置振荡，电子和离子的重心不重合，形成电偶极子。

所以时谐电场扰动下的等离子体可看成无限多振荡电偶极子的集合。

等离子体单位体积中的电偶极矩

时谐场作用于等离子体，电子受到的力，按洛伦兹力方程为

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} \qquad (1)$$

假设$\boldsymbol{x}$为电子离开正离子的位移，在电子作简谐振荡假定下，有

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2\boldsymbol{x} \qquad (2)$$

根据偶极子定义，偶极矩密度$\boldsymbol{P}$为

$$\boldsymbol{P} = -Ne\boldsymbol{x} \qquad (3)$$

由式（1）与式(2)求得$\boldsymbol{x}$，再将此$\boldsymbol{x}$代入式（3) 得到

$$\boldsymbol{P} = \frac{-Ne^2}{m\omega^2}\boldsymbol{E}$$

等离子体的等效介电常数

任何介质中$\boldsymbol{D}$由自由空间部分与介质极化产生的电偶极矩$\boldsymbol{P}$两部分构成。

等离子体也是一种介质，所以等离子体中$\boldsymbol{D}$也由自由空间部分与电偶极矩$\boldsymbol{P}$两部分构成，即

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} - \frac{Ne^2}{m\omega^2}\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{P}}^2}{\omega^2}\right)\boldsymbol{E}$$

式中

$$\omega_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

称为等离子体频率。所以等离子体可用一有效介电常数为

$$\varepsilon_{\mathrm{e}} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{P}}^2}{\omega^2}\right)$$

的介质等效。

电离层中等离子体对电磁波传播的影响

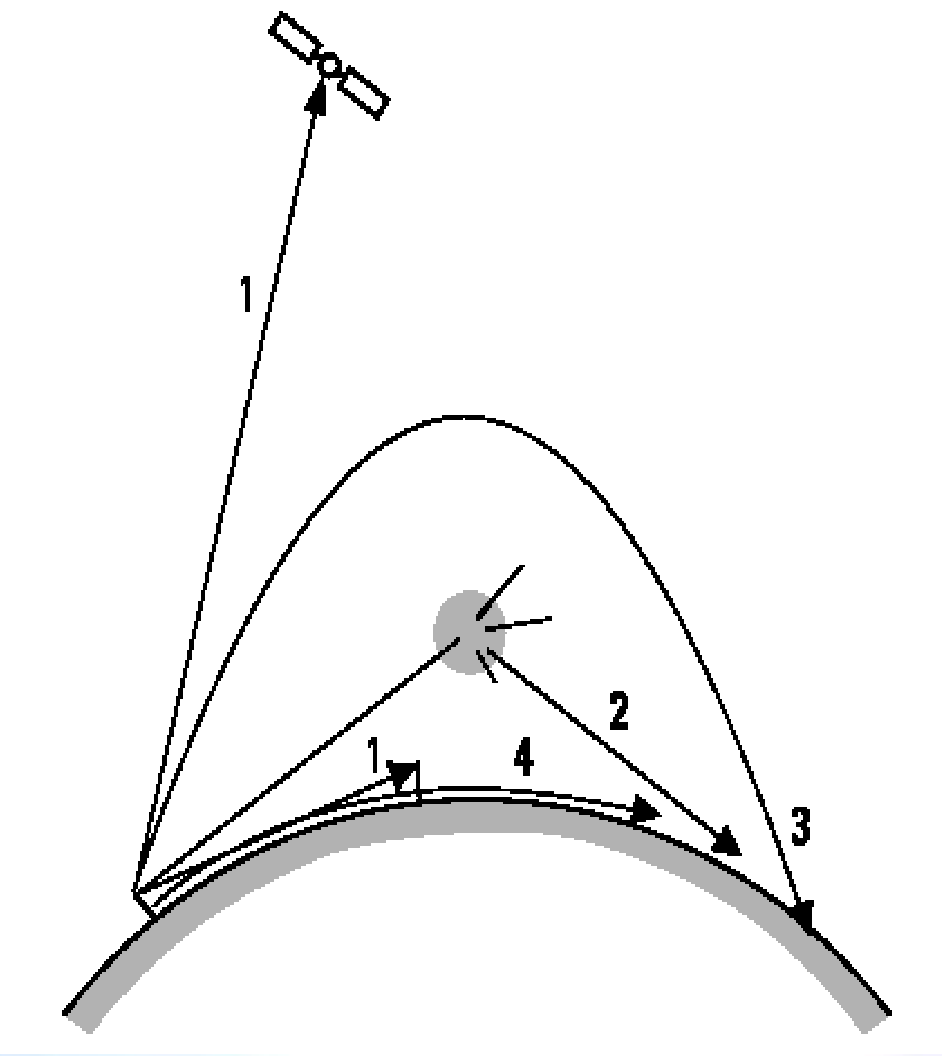
电离层中电子浓度随电离层离开地面的高度以及昼夜时间而变化。

白天的典型值为10^{12}电子/m^3，相应的ω_P=5.64×10^7radls，或f_P=9MHz。

因此，如果电磁场的频率f>>f_P，电离层与自由空间无多大差别。

但是**对于较低频率的电磁场，ε可以为负，对电磁波全反射，可作为电磁波的反射体。**

This sentence is not true.



MIT学派与微波专家Collin

（1）MIT辐射实验室的建立

二战对雷达、天线及导航等方面的需要，20世纪40年代，电磁波传播及应用得到了大发展。Harvard大学校长是个反战派，MIT得到了政府的大量资助，建立的林肯实验室，产生了一系列重要的研究成果。其中MIT辐射实验室取得了一系列重要的研究成果。

（2）MIT学派的灵魂人物：**R.E. Collin**。

《波导场论》：提出了本征模正交，归一化及完备 理论。特点：理论深奥；

《微波工程基础》：数学极其简单，非常方便工程师使用，对工程应用帮助很大。

坡印廷功率流 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$

电磁波有能量，电磁波传播时，其功率流怎么表示?

电场$\boldsymbol{E}$的单位是V/m，磁场$\boldsymbol{H}$的单位是A/m，$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{H}$乘积的单位是W/m^2，与功率流密度的单位相同。

定义矢量$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$（**能流密度**），它是$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$与$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$的叉积，即

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$$

显然，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$ 是矢量，它具有功率流的量纲。

这个$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$ 是否就是我们要找的电磁功率流呢？为此我们考察它的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{S}(r,t)$，即通量体密度, 所包含的物理意义。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}(r,t)=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}(r,t)\times\boldsymbol{H}(r,t)\right)=\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}(r,\ t)-\boldsymbol{E}(r,t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}(r,t)$$

因此, $\nabla\cdot\boldsymbol{S}(r,t)$ 具体表达式可从麦克斯韦方程得到

坡印廷功率流$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ 表示的物理意义

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\right)=\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\ t)-\boldsymbol{E}(r,t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}(r,t)$$

而从麦克斯韦方程可得

$$\boldsymbol{H}(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}(t)=-\mu\boldsymbol{H}(t)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}(t)}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{E}(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{J}(t)+\varepsilon\boldsymbol{E}(t)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}(t)}{\partial t}$$

所以

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right)-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$$

对上式两边在域V内作体积分并利用散度定理得到

$$\oint_S\boldsymbol{S}(t)\cdot d\boldsymbol{S}=\int_V\left(\nabla\cdot\boldsymbol{S}(t)\right)\mathrm{d}V$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}(t)\cdot\boldsymbol{H}(t)\right)\mathrm{d}V-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\right)\mathrm{d}V-\int_V\left(\boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\right)\mathrm{d}V$$

坡印廷功率流**密度** $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ 表示的物理意义

$$\oint_S \boldsymbol{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla\cdot\boldsymbol{S})\mathrm{d}V = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V - \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V - \int_V(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}V$$

$\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}(t)\cdot\boldsymbol{H}(t)$ 表示单位体积中瞬时储存的磁场能,即磁场能密度;

$\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)$ 表示单位体积中瞬时储存的电场能,即电场能密度。

$\left[-\boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\right]$ 表示源提供的功率密度。

所以上式的右边表示体积*V*内源提供的功率以及*V*内储存能量随时间的减少率。根据能量守恒定律，它应当等于从体积*V*流出的功率。

所以上式左边就表示从*V*流出的电磁功率，而$\boldsymbol{S}(t)$就表示电磁功率流**密度**。

上式表示的电磁能流关系称为坡印廷定理，而矢量$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$称为瞬时坡印廷功率流**密度**。

$S(t)$表示单位时间内流过与电磁波传播方向相垂直的单位面积上的电磁能量,即电磁功率流密度(能流密度）。

复数坡印廷功率流密度

对于时谐场，定义复数坡印廷功率流$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$，它是复矢量$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$与$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$的共轭复矢量$\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$的叉积。

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$$

通过复数坡印廷功率流$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$求瞬态坡印廷功率流S($t$)的时间平均值<$\boldsymbol{S}(t)$>极为方便

$$\begin{aligned}\left\langle\boldsymbol{S}(t)\right\rangle &=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{E}(x,y,z,t)\times\boldsymbol{H}(x,y,z,t)\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{E}(x,y,z,t)\times\boldsymbol{H}(x,y,z,t)\mathrm{d}(\omega t)\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})]\end{aligned}$$

因此时间平均坡印廷功率流<$\boldsymbol{S}(t)$>的计算可简化为取复数坡印廷功率流[$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$]实部的运算。

复数坡印廷功率流的物理意义

因为 $\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ $\qquad\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''$ $\qquad\boldsymbol{J}_c(r)=\sigma\boldsymbol{E}(r)$

$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{J}$ $\qquad\mu=\mu'-j\mu''$

所以 $\nabla\cdot(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r}))=-\mathrm{j}\omega[\mu|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2-\varepsilon^*|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2]-\sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$

或者

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega[\mu|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2-\varepsilon^*|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2]-\sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$$

$$=-\omega(\mu''|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2+\varepsilon''|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2)-\sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2-j2\omega\left(\frac{1}{2}\mu'|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2-\frac{1}{2}\varepsilon'|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2\right)$$

$$=-p_\mathrm{r}-j2\omega(w_\mathrm{m}-w_\mathrm{e})$$

式中 $p_\mathrm{r}=\mathrm{Re}[-\nabla\cdot\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})]=\omega(\mu''|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2+\varepsilon''|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2)+\sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$

$$w_\mathrm{m}=\frac{1}{2}\mu'|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2 \qquad w_\mathrm{e}=\frac{1}{2}\varepsilon'|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$$

w_e、w_m分别表示时间平均电场能密度与磁场能密度，p_r代表单位体积内电阻损耗与介质损耗。

复数坡印廷功率流的物理意义

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}=-\mathrm{j}\omega[\mu|\boldsymbol{H}|^2-\varepsilon^*|\boldsymbol{E}|^2]-\sigma|\boldsymbol{E}|^2=-p_{\mathrm{r}}-j2\omega(w_{\mathrm{m}}-w_{\mathrm{e}})$$

利用散度定理

$$-\oint_{S}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S=\int_V(p_{\mathrm{r}}+\mathrm{j}2\omega(w_{\mathrm{m}}-w_{\mathrm{e}}))dV$$

$$=P_{\mathrm{R}}+\mathrm{j}2\omega(W_{\mathrm{m}}-W_{\mathrm{e}})$$

式中 $P_{\mathrm{R}}=\int_V\omega(\mu''|\boldsymbol{H}|^2+\varepsilon''|\boldsymbol{E}|^2)\mathrm{d}V+\int_V\sigma|E|^2\,\mathrm{d}V$

$$W_{\mathrm{m}}=\int_V w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V \qquad W_{\mathrm{e}}=\int_V w_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V$$

表示流入闭曲面*S*包围的体积*V*内的复数坡印廷功率的实部等于体积*V*内平均损耗的功率。

当体积*V*内储存的磁场能与电场能的时间平均值不相等时，对于时间呈现电性的或磁性的这部分平均净储能，需要用复数坡印廷功率流的虚部来平衡。

电磁场的几个基本原理和定理—叠加定理

满足叠加定理的基本条件:

如果在我们所研究的区域内及边界上，媒质的ε、μ、σ都与场强无关，即我们处理的是线性媒质。

那么麦克斯韦方程所描述的系统就是线性系统，满足线性系统的叠加定理。

电磁场的叠加定理是指:

若$\boldsymbol{E}_i$、$\boldsymbol{D}_i$、$\boldsymbol{B}_i$、$\boldsymbol{H}_i$，i从1到n，是给定边界条件下麦克斯韦方程的多个解，则

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i \qquad \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{D}_i \qquad \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{B}_i \qquad \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{H}_i$$

必是麦克斯韦方程在同一边界条件下的解。

电磁场的唯一性定理

唯一性定理要回答在什么条件下麦克斯韦方程组的解才是唯一的。

假设V内的一组源对场量产生两个不同的解 $\begin{cases}\boldsymbol{E}_a \\ \boldsymbol{H}_a\end{cases}$, $\begin{cases}\boldsymbol{E}_b \\ \boldsymbol{H}_b\end{cases}$,且均满足麦氏方程。

这两组解之差 $\begin{cases}\delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{E}_b \\ \delta\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_a - \boldsymbol{H}_b\end{cases}$ 也满足麦氏方程

$$\nabla\times\delta\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\delta\boldsymbol{E} + \sigma\delta\boldsymbol{E} \qquad \nabla\times\delta\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\delta\boldsymbol{H}$$

重复类似于导出复数坡印廷定理的步骤，可得到关系

$$\nabla\cdot\left(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*\right) = -\mathrm{j}\omega\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2 - \varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right] - \sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2$$

或

$$\int_S \delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\mathrm{j}\omega\int_V\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2 - \varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right]\mathrm{d}V - \int_V \sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}V$$

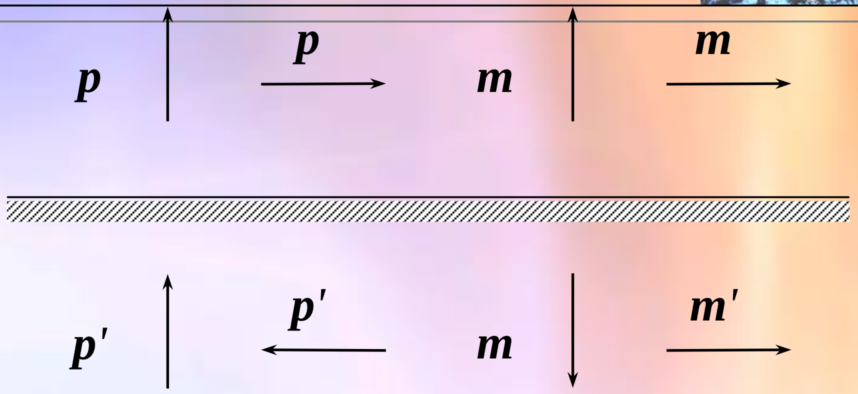
唯一性定理要求 $|\delta\boldsymbol{E}|^2$及$|\delta\boldsymbol{H}|^2$均为零，如果对于所假定的V内的两组解在边界S面上切向电场或切向磁场唯一指定，则V内的解唯一的。

如果S面上的电场或磁场的切向分量给定，或者在S面上的部分区域给定$\boldsymbol{E}$的切向分量，在S的其余表面给定$\boldsymbol{H}$的切向分量

$$\left.\begin{array}{l}\left(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1\right)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \\ \left(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1\right)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\end{array}\right\}\rightarrow$$ 那么在区域V内的电磁场是唯一确定的。

镜像定理

镜像定理源于唯一性定理。



电偶极子及磁偶极子在理想导体表面的镜像

镜像定理指：

当源靠近理想导体壁时，所产生的场相当于原有的源和它对该壁作为镜面产生的镜像一起建立的场。

确定镜像的原则：

镜像与原有的源共同建立的场在边界上满足理想导体的边界条件（理想导体的边界条件在第5章专门讨论）。

这样求源靠近理想导体壁产生的场转化为求原有的源与其镜像产生的场，使场的求解大为简化。

电荷对平面理想导体壁的镜像是另一侧等距处与原电荷大小相等、符号相反的电荷 。

电流元即交变电偶极子对理想导体平面表面的镜像如图所示。

镜像法研究的最新进展及最新的科学问题。

镜像法研究的最新进展及最新的科学问题

1984年芬兰教授Lindell对镜像理论进行了深入研究，得到了一系列重要的研究成果。例如：点源或者偶极子源在介质球中的镜像源的求解。

一道科学难题：点源在介质柱体中的镜像源的求解。

可能的求解步骤：（1）先求线源的镜像源；（2）点源是线源的特例。

等效原理、电型源与磁型源

等效原理也源于唯一性定理。

等效原理指：

在某一空间区域内，能够产生同样场的两种源，称其在该区域内是等效的。

如果源在闭曲面S包围的体积V内，闭曲面上有切向场$\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}$和$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}_0$，欲求$V$外某一点场时，有两种处理方法：

(1)直接由V内的一次源求V外的场；

(2)按照等效原理，假设V内为零场，而在界面S上有二次源$\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}$和$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}_0$，求该二次源在$V$外产生的场。

根据唯一性定理，二次源可以产生唯一的与真实源相同的场。因为它们在界面上有相同的切向场。

二次源是一种等效源，或者说是一种虚源。

$\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}$相当于电流密度矢量，记作$\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_s$，称为电型源。

对偶地把$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}_0$称为磁流密度矢量，记作$\boldsymbol{J}_{ms}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}_0$。称为磁型源。

注意，这里所引进的新的波源磁流，实际上就是切向电场，这纯粹是为了数学上的方便。但是真正的波源还是电荷和电流，因为切向电场实际上也由电荷和电流产生的。

磁型源作用下的麦克斯韦方程

位移电流密度和传导电流密度与磁场强度$\boldsymbol{H}$的关系为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$$

引进磁流密度后，仿此也可写出

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$$

引入虚拟磁流后，按照连续性原理，必定有磁荷，于是有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}=\frac{-\partial\rho_{\mathrm{m}}}{\partial t}$$

由于旋度的散度为零，可以推出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_{\mathrm{m}}$$

引进磁荷和磁流后，麦克斯韦方程组变为

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_{\mathrm{m}}\end{cases}$$

电的量和磁的量具有对偶性

电型源	磁型源
$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=0$	$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$
$\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}$	$\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=0$
$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$
$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\rho_{\mathrm{m}}/\mu$
$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\rho=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}+\mathrm{j}\omega\rho_{\mathrm{m}}=0$

这两组方程式之间存在着明显的对应关系，如果将上两组方程式中的所有场量和源量作如下代换

$\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{H}$
$\boldsymbol{H}\Rightarrow-\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{H}\Rightarrow-\boldsymbol{E}$
$\varepsilon\Rightarrow\mu$	$\varepsilon\Rightarrow\mu$
$\mu\Rightarrow\varepsilon$	$\mu\Rightarrow\varepsilon$
$\rho\Rightarrow\rho_{\mathrm{m}}$	$\rho_{\mathrm{m}}=-\rho$
$\boldsymbol{J}\Rightarrow\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$	$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}\Rightarrow-\boldsymbol{J}$

电型源方程变为磁型源方程，而磁型源方程则变为电型源方程。电型源方程和磁型源方程式的这种对应形式称为二重性或对偶性。

电和磁对偶性的应用

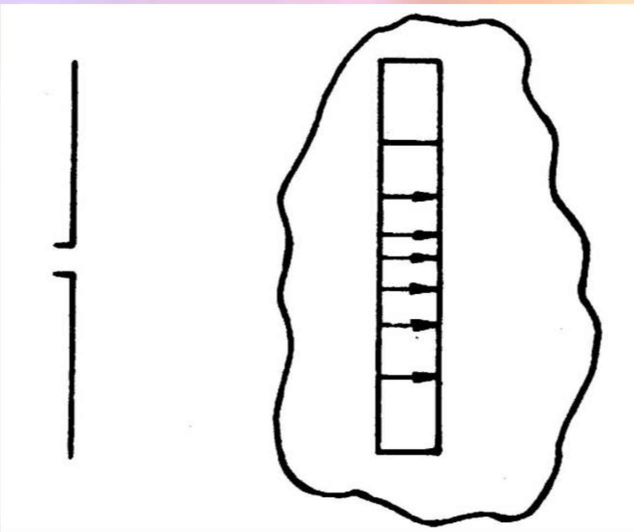
电磁场方程式的二重性提供了这样一种便利，如果知道一个问题（例如电型源问题）的解就可由对偶关系得出它的对偶问题（为一磁型源问题）的解，而无需重复求解方程。

由电基本振子[图(a)]的辐射场写出磁基本振子[图 (b)]的辐射场可作为二重性应用的简单例子。

引入磁流、磁荷概念后，这两种基本辐射单元极其相似。

电基本振子天线表面上有交变电流，在天线的两端电流为零，而有电荷的堆积，电流和电荷之间满足连续性方程。

作为实际可行的磁振子的裂缝天线，其口径上有切向电场，相当于磁流密度，在裂缝的两端切向电场为零，即磁流为零，因而裂缝的两端也相当于磁荷的堆积。



(a) (b)

电振子与磁振子的对偶

(a) 电振子 (b) 磁振子（裂缝）

互易定理

电磁互易定理反映两组不同的场源之间的影响和响应关系。

考虑同一线性介质中的两组频率相同的源$\boldsymbol{J}^a$、$\boldsymbol{J}_\mathrm{m}^a$和$\boldsymbol{J}^b$、$\boldsymbol{J}_\mathrm{m}^b$。我们用$\boldsymbol{E}^a$、$\boldsymbol{H}^a$表示源$a$产生的场，用$\boldsymbol{E}^b$、$\boldsymbol{H}^b$表示源b产生的场

互易定理是指：$\int_V \left(\boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{J}^b-\boldsymbol{H}^a\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{m}^b\right)\ \mathrm{d}V=\int_V \left(\boldsymbol{E}^b\cdot\boldsymbol{J}^a-\boldsymbol{H}^b\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{m}^a\right)\ \mathrm{d}V$

积分区域V是全空间。

注意积分中的量不是复共轭量，因此一般来说式中的积分并不表示功率。Rumsey将这两个积分称为反应（reaction）。

例如，式的左方的积分是场a对于源b的反应，并利用符号表示为

$$\langle a,b\rangle=\int_V \left(\boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{J}^b-\boldsymbol{H}^a\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{m}^b\right)\ \mathrm{d}V$$

而式右方的积分是场b对于源a的反应，用符号$\langle b,a\rangle$表示。于是互易定理用反应可表示为

$$\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle$$

反应概念可以看作是彼此独立的场与源之间响应的量度。电路的互易定理是电磁互易定理的特例。

互易定理举例

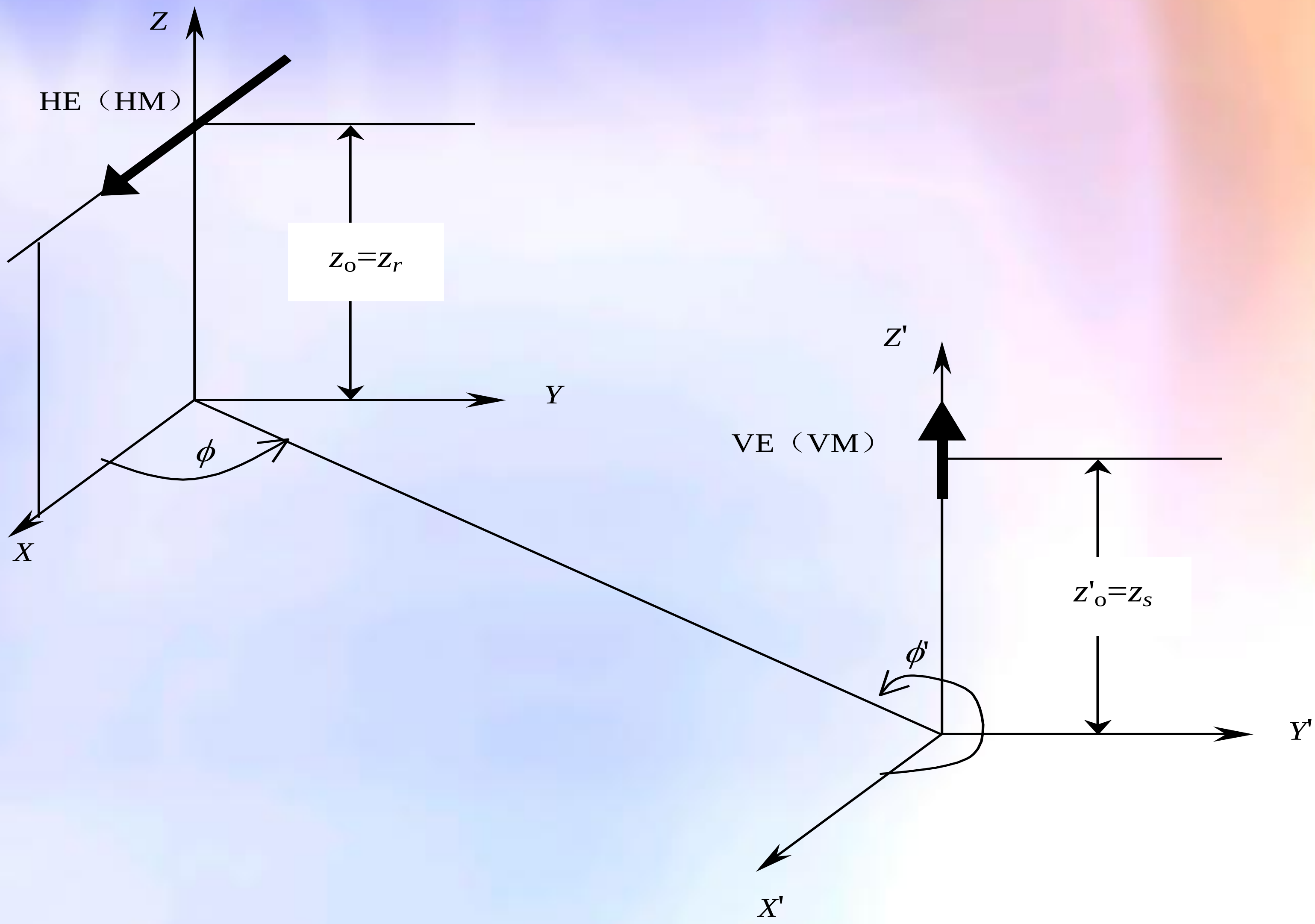


图3.10 互易定理收发天线相互几何关系示意图

复习

复习要点

- 麦克斯韦方程反映电荷、电流产生场，洛伦兹力方程反映场对电荷、电流的作用。
- 等离子体是一种特殊的介质，其介电常数与频率有关，当$\omega<\omega_p$时，介电常数可以为负。
- 坡印廷定理反映电磁运动符合能量守恒定律。
- 只要媒质是线性的，电磁场满足叠加定理。只要边界面上切向场量给定，边界内的场是唯一的，这就是唯一性定理。由唯一性定理可得出镜像定理与等效原理。引入虚拟的磁流与磁荷后，麦克斯韦方程可分为电型源激励的与磁型源激励的方程，它们具有对偶性，这就是电磁对偶定理。互易定理反映彼此独立的场与源之间的响应。