离 散 数 学

Discrete Mathematics

第3章 函 数

宋牟平 songmp@zju.edu.cn　玉泉校区 行政楼 325

函数是一种特殊的关系。

3.1 函数

定义3-1 函数：设有集合A、B，f是A到B的关系，如果对于每一个$a \in A$，存在唯一的$b \in B$，使得$(a,b) \in f$，记

$$b=f(a)$$

则称关系f是A到B的一个**函数**，或**映射**（**变换**），记

$$f: A \to B$$

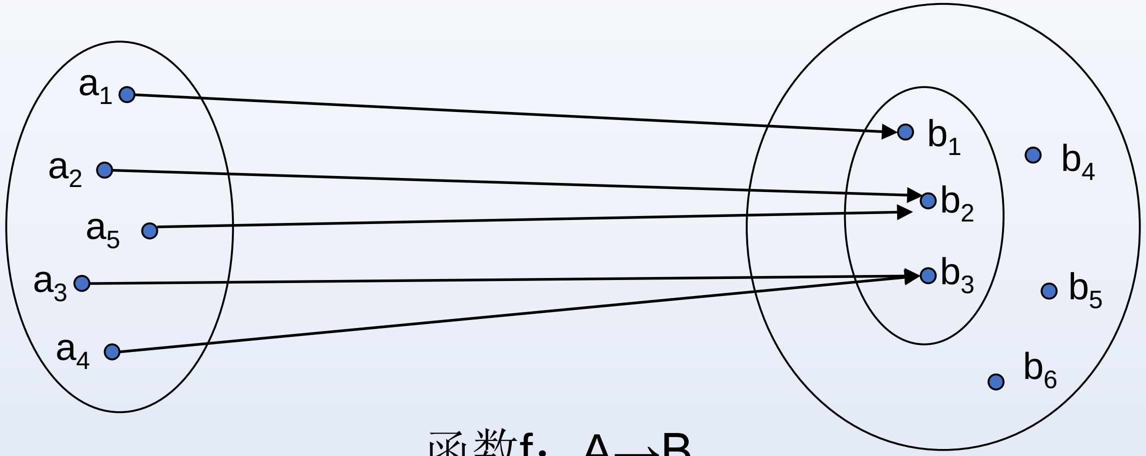
显然 $D_f=A$，$R_f \subseteq B$

B称**值域包**。**值域**R_f常表示为

$$f(A)=\{b|b \in B，存在a \in A，使f(a)=b\}$$

a也称**自变量**，b称函数f在a处的**值**。

另外，从映射的角度看，a称为b的**源**，b称为a的**像**。



函数f：A→B

D_f=A　　　　　$R_f \subseteq$B

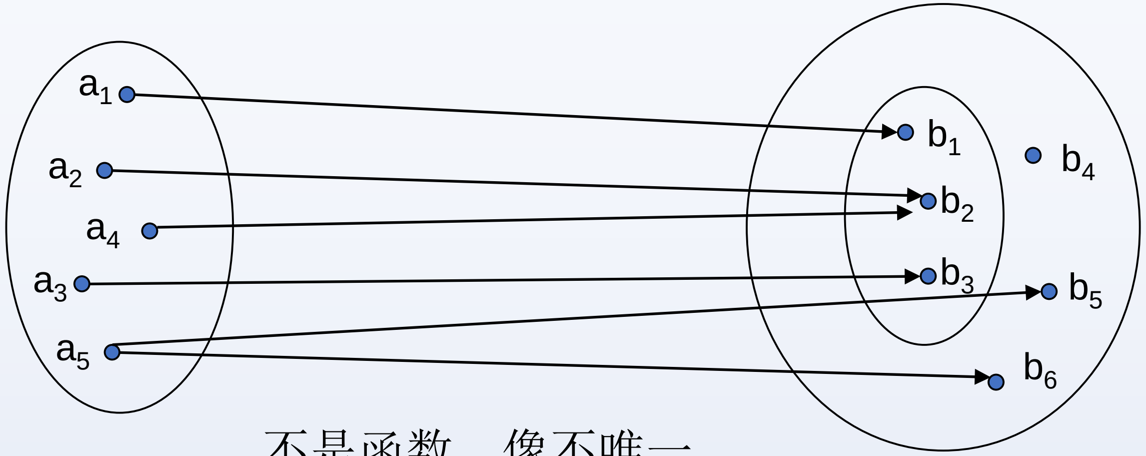
注意，<u>函数的定义有三个要点</u>：

（1）**函数是关系**。

（2）**像的唯一性**。*一个像源不能对应两个像，但一个像可以对应两个像源。*

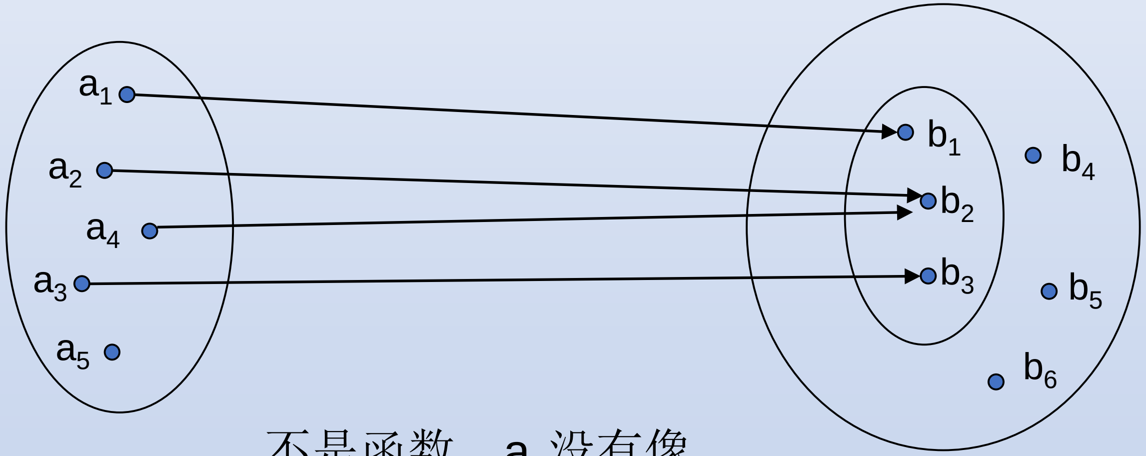
对于$b_1,b_2 \in B$，若存在$a_1,a_2 \in A$，使$b_1=f(a_1)$，$b_2=f(a_2)$，

则$b_1 \neq b_2$必有$a_1 \neq a_2$，或$a_1=a_2$必有$b_1=b_2$。



不是函数，像不唯一。

（3）定义域中任意一个像源都有像。



不是函数，a_5没有像。

定义3-2 **函数相等**：设有两个函数f：A→B和g：C→D，*若A=C，B=D，且对一切的a∈A，都有f(a)=g(a)，则称 f=g*。

定义3-3 **扩充与限制**：设有函数f：A→B和g：S→B，*如果**S⊆A**，且对一切的a∈S，都有**g(a)=f(a)***，称g是f在S上的限制，f是g在A上的扩充。

例　函数g：Z→N，定义为 g(z)=2z+1

函数f：I→N，定义为 f(i)=2|i|+1

则g是函数f在Z上的限制，而f是g在I上的扩充。

A到B的所有函数构成的集合，即**函数族**，

$$B^A=\{f \mid f: A\to B\}$$

集合A到B能定义多少函数？设#A=m，#B=n，则函数的数目为

$$\#(B^A)=(\#B)^{\#A}=n^m$$

集合A到B能定义多少关系？

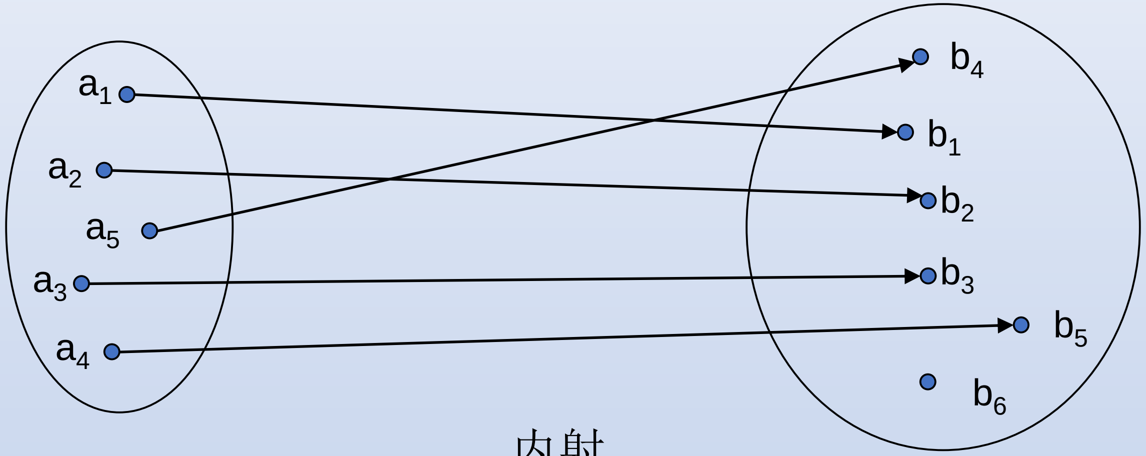
$$2^{\#A\times\#B}=2^{m\times n}$$

特殊性质的函数

定义3-4 设 f：A→B

单射（内射）：*若*$a_i \neq a_j$*时，有*$f(a_i) \neq f(a_j)$，即$f(a_i)=f(a_j)$时，有$a_i=a_j$，则称f是单射（内射）。

单射要求一个像，仅有唯一的像源与其对应。只有#A≤#B时，才有内射存在。

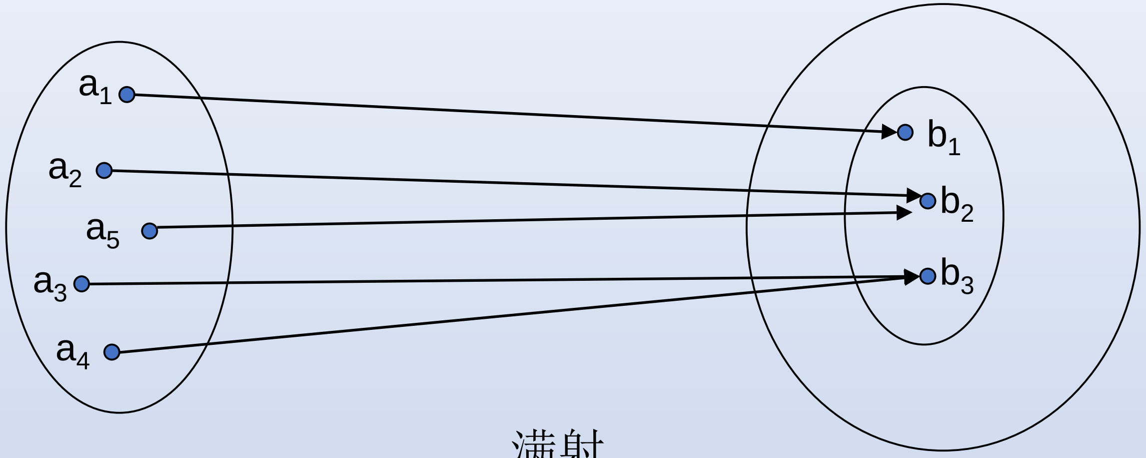


内射

浙江大学 信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

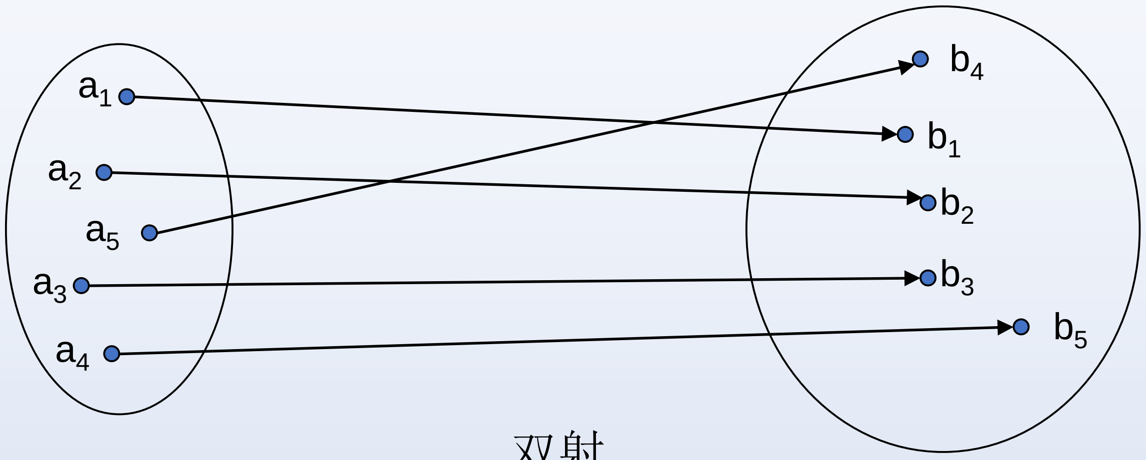
满射：若f(A)=B，则称f为满射。即对任意的b∈B，存在a∈A，使b=f(a)。

只有#A≥#B时，才有满射存在。



满射

双射：<u>若f 既是满射又是单射</u>，则称f为**双射**。只有#A=#B时，才有双射存在。



双射

<u>例</u>　I_A是A到A的双射。

<u>例</u>　函数f：$2^U \to 2^U$，$f(s)=s'$，是双射函数。

<u>例</u>　f：$(2^U)^2 \to (2^U)^2$，$f(s_1,s_2)=(s_1 \cup s_2, s_1 \cap s_2)$。

因　$f(s_1,s_2)=(s_1 \cup s_2, s_1 \cap s_2)=(s_2 \cup s_1, s_2 \cap s_1)=f(s_2,s_1)$，故不是内射。

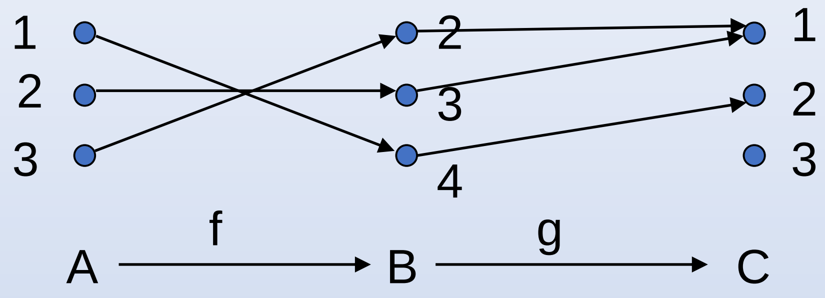
因不存在$(s_1,s_2) \in (2^U)^2$，使$s_2 \cup s_1=\varnothing$, $s_2 \cap s_1=U$，所以$(\varnothing,U)$不存在像源，f不是满射。当然不是双射。

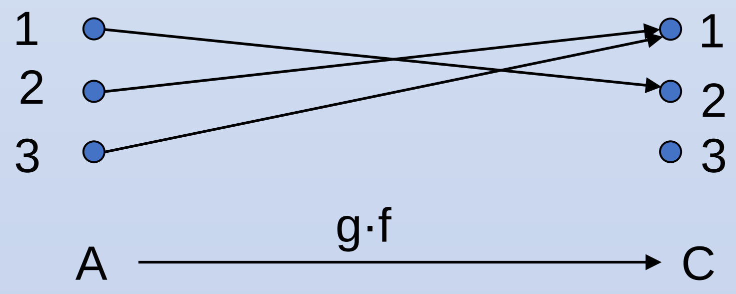
3.2 函数的复合

定义3-5 **复合函数**：设有函数f：A→B，g：B→C，则复合关系f·g也是A到C的函数，称为**f和g的复合函数**。*为与一般的符合函数表示习惯一致，记为g·f（或gf）。*

同一般的复合函数　　gf(a)=g(f(a))=g(b)=c

同复合关系　　(a,b)∈f，(b,c)∈g ⇒ (a,c)∈g·f





浙江大学 信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

复合函数的性质

函数的复合也是关系的复合，因此关系复合的性质，对函数也是成立的，例如结合律

$$h(gf)=(hg)f=hgf$$

定义3-6 **幂等函数**：f：A→A，且$f=f^2$

显然 $f=f^2 \Rightarrow f=f^n$

定理3-2 单射、满射、双射与复合

（1）f和g是单射，则gf也是单射；

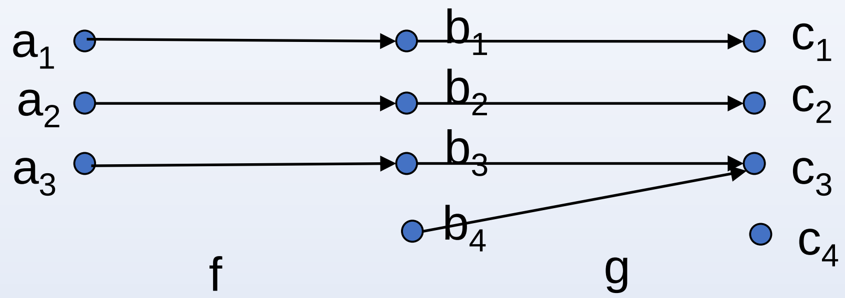
（2）f和g是满射，则gf也是满射；

（3）f和g是双射，则gf也是双射。

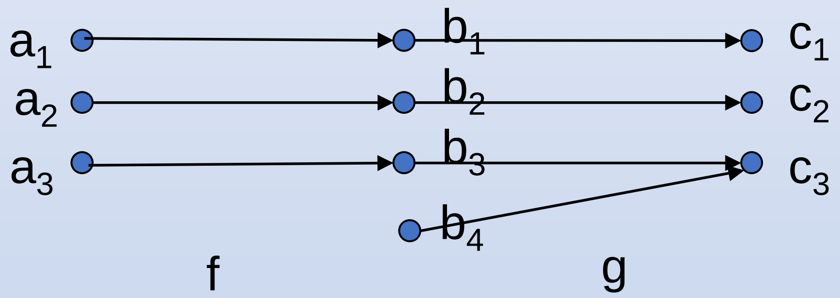
（2）的证明：对任一$c\in C$，由于g是满射，因此必存在某个$b\in B$，使得$g(b)=c$。又由于f也是满射，必存在某个$a\in A$，使得$f(a)=b$，因此有$gf(a)=g(f(a))=g(b)=c$，即对任一$c\in C$，有$gf(a)=c$，故gf是满射。

定理3-3 设有函数f：A→B和g：B→C，那么：

（4）**gf是单射，则f是单射，g可以不是**。



（5）**gf是满射，则g是满射，f可以不是**。



（6）**gf是双射，则f是单射，g是满射**。上图就是例子。

(5)的证明：**gf是满射，则g是满射，f可以不是。**

因gf是满射，所以对任意的$c \in C$，存在$a \in A$，使$gf(a)=c$。

又由复合函数的定义，必存在$b \in B$，使得$gf(a)=g(f(a))=g(b)=c$，即对任意的$c \in C$，必存在$b \in B$，使$g(b)=c$。

从关系看，对$(a,c) \in gf$，必存在$b \in B$，使$(a,b) \in f$，$(b,c) \in g$。

3.3 逆函数

定义3-7 **逆函数**：当函数f：A→B的逆关系 同时满足函数的条件时， 称为f的逆函数， 记f^{-1}。逆函数是一个B到A的函数。逆函数存在称**可逆的**。

注意逆函数有两个条件：逆关系，函数。

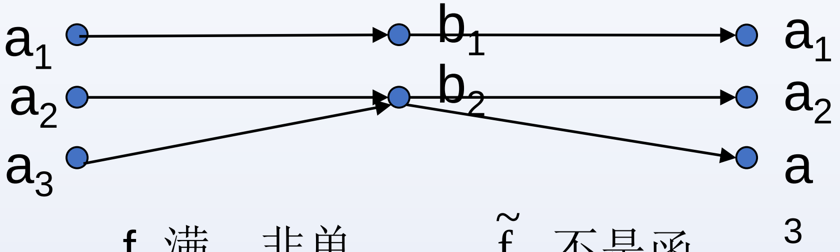
函数条件：对任意的$b\in B$，存在唯一的$a\in A$，使$(b,a)\in f^{-1}$， 即$f^{-1}(b)=a$且使$f(a)=b$。

要满足前述两个条件，***f必须是满射***，否则必存在$b_i\in B$，使$b_i\notin f(A)$，逆关系不满足函数条件。***f必须是单射***，否则必存在$a_i,a_j\in A$，$a_i\neq a_j$，使$f(a_i)=f(a_j)=b$，逆关系不满足唯一性条件。

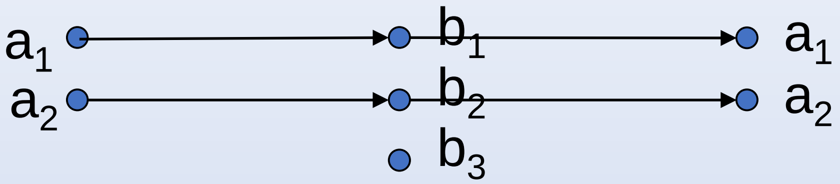
定理：当且仅当函数f：A→B是双射函数时，有唯一的逆函数f^{-1}：B→A存在。

定理3-4 设函数f：A→B是双射，则逆函数f^{-1}：B→A也是一个双射。

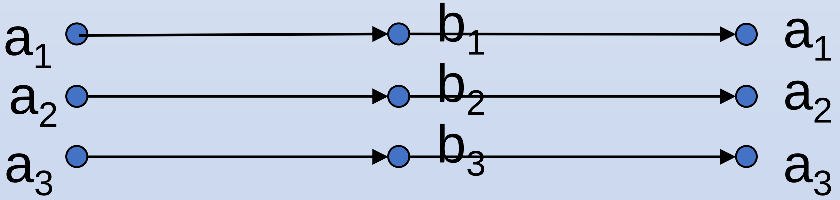
定理3-5 设函数f：A→B是一个双射，则$(f^{-1})^{-1}=f$。



f 满、非单 $\quad \tilde{f}$ 不是函数



f 单、非满 $\quad \tilde{f}$ 不是函数



f 双射 $\quad \tilde{f} = f^{-1}$ 是函数

显然，**f和f^{-1}都是双射函数，且互为逆函数**。

对恒等函数有：$I_A=(I_A)^{-1}$

逆函数性质

(1) **定理3-5** $(f^{-1})^{-1}=f$

(2) **定理3-6** $f^{-1}f=I_A$，$f f^{-1}=I_B$

(3) **定理3-7** 设有函数f：A→B，g：B→A，

当且仅当 $gf=I_A$，$fg=I_B$ 时，有 $g=f^{-1}$，$f=g^{-1}$

(4) **定理3-8** 函数f：A→B可逆，g：B→A可逆，则

$$(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$$

定义3-8 左逆函数和**右逆函数**：设有函数f：A→B和g：B→A，*若gf=I_A，即gf(a)=a，(a,a)∈gf*，则称**g**是f的**左逆函数**，**f**是g的**右逆函数**。

定理3-9 (1) 左逆函数存在的条件：当且仅当f是单射时，f有左逆函数。

(2) 右逆函数存在的条件：当且仅当f是满射时，f有右逆函数。

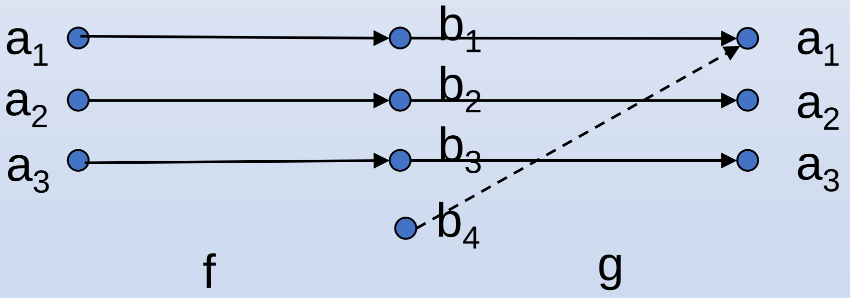
证明：

设f是A到B的函数，若f是内射，则对于任意的a_i,a_j∈A，如果$a_i \neq a_j$，那么必有$f(a_i) \neq f(a_j)$。即对任意的b∈B，如果b∈f(A)，则有唯一的元素a∈A，使f(a)=b。

定义函数g：B→A，使得对于任意的元素b∈B，

若b∈f(A)且f(a)=b，则g(b)=a

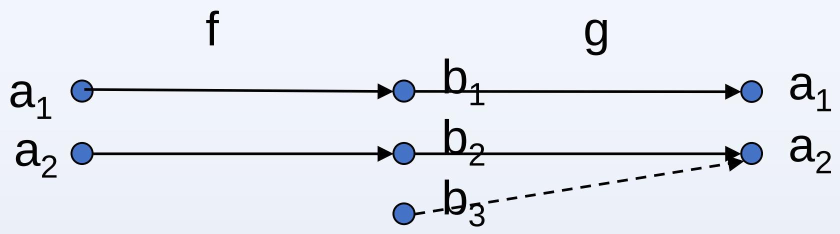
若b∉f(A)，则g(b)=a_1（对f(A)进行扩充）



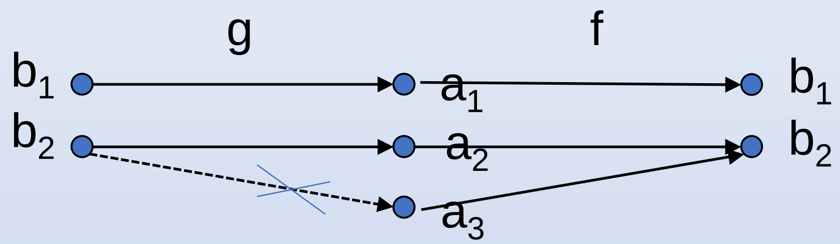
于是对于任意的a∈A，若f(a)=b，则

gf(a)=g(f(a))=g(b)=a，即gf=I_A， f有左逆函数g

反之，若f有左逆函数g：B→A，则gf=I_A。因I_A是双射，故是内射。



f是内射，$b_3 \notin f(A)$，定义$g(b_3)=a_2$



f 是满射

3.4 置 换

置换

置换：设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$是有限集合，称A到A的双射函数p()为**集合A上的置换**，n称为置换的阶。

$$P=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ p(a_1) & p(a_2) & \cdots & p(a_n) \end{pmatrix}$$

置换是A中元素的一个排列，A上不同置换的数目应为n!。

恒等置换

$$P=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

逆置换

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} p(a_1) & p(a_2) & \cdots & p(a_n) \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

固体物理中的对称操作就是置换。

作业

3，4，6，9，11，14，19，21

内容提要

1. 函数的概念

- 由集合 A 到集合 B 的函数；
- 函数的定义域和值域；
- 恒等函数；
- 复合函数；
- 逆函数.

2. 三种特殊的函数

- 由集合 A 到集合 B 的内射；
- 由集合 A 到集合 B 的满射；
- 由集合 A 到集合 B 的双射.

3. 函数的复合运算及其性质

- 函数复合运算的可结合性.

设有函数 $f:A\to B$，$g:B\to C$，$h:C\to D$，则有

$$h\cdot(g\cdot f)=(h\cdot g)\cdot f;$$

- 设 I_A 和 I_B 分别是集合 A,B 上的恒等函数，则对于任一函数 $f:A\to B$，有

$$f\cdot I_A=I_B\cdot f=f.$$

4. 复合函数的性质

• 设有函数 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$,那么

(1) 如果 f 和 g 都是内射,则 $g\cdot f$ 也是内射;

(2) 如果 f 和 g 都是满射,则 $g\cdot f$ 也是满射;

(3) 如果 f 和 g 都是双射,则 $g\cdot f$ 也是双射.

• 设有函数 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$,那么

(1) 如果 $g\cdot f$ 是内射,则 f 是内射;

(2) 如果 $g\cdot f$ 是满射,则 g 是满射;

(3) 如果 $g\cdot f$ 是双射,则 f 是内射,g 是满射.

5. 逆函数的有关性质

• 只有双射函数才有逆函数;

• f 的逆函数就是 f 的逆关系;

• f 的逆函数也是一个双射,且 f 和 f^{-1} 互为逆函数;

• 如果函数 $f:A\to B$ 是可逆的,则

$$f^{-1}\cdot f=I_A,\quad f\cdot f^{-1}=I_B;$$

• 如果函数 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 均是可逆的,则

$$(g\cdot f)^{-1}=f^{-1}\cdot g^{-1}.$$

例 3-1 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$分别确定下列各式中的 f 是否为由 A 到 B 的函数.

$$f=\{(1,8),(3,9),(4,10),(2,6),(5,9)\}; \tag{1}$$

$$f=\{(1,9),(3,10),(2,6),(4,9)\}; \tag{2}$$

$$f=\{(1,7),(2,6),(4,5),(1,9),(5,10),(3,9)\}. \tag{3}$$

解 (1) 式中 f 是由 A 到 B 的函数. 因为对于 A 中的每一个元素，在 B 中都有唯一一个元素与它对应.

(2) 式中 f 不是由 A 到 B 的函数. 因为 A 中的元素 5 在 B 中没有任何元素与它对应，不满足像的存在性.

(3) 式中 f 不是由 A 到 B 的函数. 因为 A 中的元素 1 在 B 中有 7 和 9 两个元素与它对应，不满足像的唯一性.

例 3-2 集合 $A=\{1,2,3\}$上的下列关系，哪些是由 A 到 A 的函数？

$$f=\{(1,3),(2,3),(3,1)\}; \tag{1}$$

$$g=\{(1,2),(3,1)\}; \tag{2}$$

$$h=\{(1,3),(2,1),(2,2)\}. \tag{3}$$

解 f 是由 A 到 A 的函数，但 g 和 h 不是由 A 到 A 的函数. 其理由读者可参照例 3-1 分析得出.

例 3-3 设 $A=\{1,2,3,4\}$，则 $I_A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$既称为 A 上的恒等关系，又称为 A 上的恒等函数.

若 $\rho_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$，则 ρ_1 不是 A 上的恒等函数. 因为它缺少$(4,4)$这一序偶.

若 $\rho_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(4,4)\}$，则 ρ_2 也不是 A 上的恒等函数. 因为 $1\neq3$，但序偶$(1,3)$出现在 ρ_2 中.

例 3-4 设有函数 $f:A\to A$，试证明：

(1) 若 $f\subseteq I_A$，则 $f=I_A$；

(2) 若 $I_A\subseteq f$，则 $f=I_A$.

说明 这里应注意函数 f 和恒等函数 I_A 既是由集合 A 到 A 的函数，又可看做是集合 A 上的关系，而它们自身又是一个以序偶为元素的集合.

证 (1) 由题设 $f\subseteq I_A$，因此只要证明 $I_A\subseteq f$.

设 $(a,a)\in I_A$，因为 f 是由 A 到 A 的函数，所以对于元素 a，必有唯一的元素 $b\in A$，使得 $(a,b)\in f$，因为 $f\subseteq I_A$，所以 $(a,b)\in I_A$，但 I_A 是恒等函数，必有 $b=a$，因此 $(a,a)\in f$. 由 a 的任意性，有 $I_A\subseteq f$，于是 $f=I_A$.

(2) 由题设 $I_A\subseteq f$，因此只要证明 $f\subseteq I_A$.

设 $(a,b)\in f$，则 $a\in A$，因为 I_A 是恒等函数，所以 $(a,a)\in I_A$，由 $I_A\subseteq f$ 可知 $(a,a)\in f$，由 $(a,b)\in f$ 和 $(a,a)\in f$ 且 f 是函数，必有 $a=b$，即 $(a,b)=(a,a)$，所以 $(a,b)\in I_A$，即 $f\subseteq I_A$. 于是 $f=I_A$.

例 3-6 设有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 和 $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$（$\mathbf{R}$ 表示实数集），且有 $f(x)=x+5$，$g(x)=3x+1$，$h(x)=\frac{x}{2}$. 试求复合函数$g\cdot f$，$f\cdot g$ 和 $f\cdot h$.

解 由复合函数的定义，所求的复合函数均是由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数.

$$g\cdot f(x)=g(f(x))=g(x+5)=3(x+5)+1=3x+16;$$

$$f\cdot g(x)=f(g(x))=f(3x+1)=3x+1+5=3x+6;$$

$$f\cdot h(x)=f(h(x))=f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}+5.$$

例 3-7 设有函数 f:**R**→**R** 和 g:**R**→**R**(**R** 表示实数集)

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geqslant 3; \\ -2 & x<3, \end{cases} \quad g(x)=x+2,$$

试求复合函数 $f\cdot g$ 和 $g\cdot f$.

解 复合函数 $f\cdot g$ 和 $g\cdot f$ 均是由 **R** 到 **R** 的函数.

$$f\cdot g(x)=f(g(x))=f(x+2)=\begin{cases} (x+2)^2, & x+2\geqslant 3; \\ -2, & x+2<3, \end{cases}$$

即

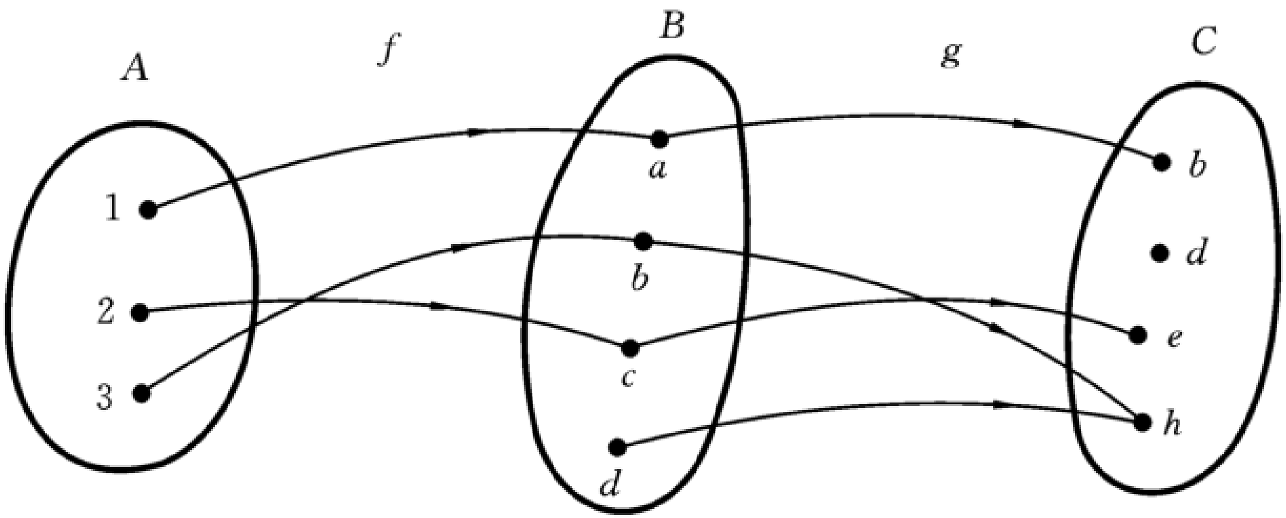
$$f\cdot g(x)=\begin{cases} (x+2)^2, & x\geqslant 1; \\ -2, & x<1, \end{cases}$$

$$g\cdot f(x)=g(f(x))=\begin{cases} g(x^2), & x\geqslant 3 \\ g(-2), & x<3 \end{cases}=\begin{cases} x^2+2, & x\geqslant 3; \\ 0, & x<3. \end{cases}$$

例 3-10 设有函数 $f:A\to B$，$g:B\to A$ 且 $g\cdot f$ 是 A 上的恒等函数，试证明 f 是内射，g 是满射.

证 因为 $g\cdot f:A\to A$ 是恒等函数，所以 $g\cdot f$ 是双射. 由复合函数的性质，f 必是内射而 g 必是满射.

要注意的是，当复合函数 $g\cdot f:A\to C$ 是内射时，虽然可推出 f 一定是内射，但 g 可以不是内射. 图 3-1 给出了这种情形的一个例子. 但如果我们限定 f 是一个满射时，则又是不同的结果了.



例 3-13 设有函数 $f:A\to A$，若存在一正整数 n 使得 $f^n=I_A$，试判断 f 是否内射、满射或双射？

解 若 $n=1$，则 $f=I_A$. 因为恒等函数 I_A 是双射，所以 f 是双射.

若 $n>1$，则由复合函数的可结合性，得

$$f^n=f^{n-1}\cdot f=f\cdot f^{n-1}=I_A.$$

由 $f^{n-1}\cdot f=I_A$ 和 I_A 是内射，可知 f 是内射.

由 $f\cdot f^{n-1}=I_A$ 和 I_A 是满射，可知 f 是满射，故可判断 f 是一个双射.

例 3-16 下列四个函数是否存在逆函数？若有，则求出其逆函数（$\mathbf{R}$ 表示实数集）.

(1) $f_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f_1(x)=x^2$；

(2) $f_2:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f_2(x)=2^x$；

(3) $f_3:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f_3(x)=x^2-2x-3$；

(4) $f_4:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f_4(x)=x^3$.

解 要判断上述函数是否存在逆函数，实际上是要判断上述函数是否为双射.

(1) 因为 $f_1(2)=f_1(-2)=4$，且当 y 为负数时，没有像源，所以 f_1 既不是内射，又不是满射. 因此 f_1 没有逆函数.

(2) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $f_2(x)>0$，因此 f_2 不是满射，所以 f_2 没有逆函数.

(3) $f_3(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=(x-1)^2-4$，显然 $f_3(-1)=f_3(3)=0$，因此 f_3 不是内射. 又对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f_3(x)\geqslant-4$，因此 f_3 也不是满射，故 f_3 没有逆函数.

(4) f_4 既是内射，又是满射，所以 f_4 是双射. 它有逆函数 $f_4^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f_4^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$.

浙江大学 信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

例 3-20 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{p,q\}$，试问有多少个由 A 到 B 的函数？有多少个由 A 到 B 的满射？

解 记由 A 到 B 的所有函数的集合为 B^A，即

$$B^A=\{f \mid f:A\to B\}.$$

由 $\#(B^A)=\#B^{\#A}$ 可知，本例中由 A 到 B 的函数的个数 $\#B^{\#A}=2^3=8$（个）.

由 $\#A>\#B$ 可知，由 A 到 B 不存在双射，也不存在内射，但存在满射是可能的. 有多少个满射呢？可分别用以下两种方法计算.

方法一 计算非满射的函数个数.

函数 $f:A\to B$ 若不是满射，则只有两种情形，或者 $f(a)=f(b)=f(c)=p$，或者 $f(a)=f(b)=f(c)=q$，因此非满射的函数仅 2 个，故由 A 到 B 的满射为 6 个.

方法二 直接计算满射函数的个数.

函数 $f:A\to B$ 若为满射，则必是 A 中两个元素对应于 B 中同一个元素，而另一个元素对应于 B 中剩下的那个元素.

若是两个元素对应于 p，则函数个数为 C_3^2.

若是两个元素对应于 q，则函数个数也为 C_3^2. 因此满射函数个数为 $2C_3^2=2\times 3=6$（个）.

例 3-21 试证明若 $A\subseteq B$，则 $A^C\subseteq B^C$.

分析 A^C 和 B^C 正如例 3-20 中所解释的，它们分别表示由集合 C 到集合 A 的所有函数的集合和由集合 C 到集合 B 的所有函数的集合.

证 设 $f\in A^C$，则 f 是一由 C 到 A 的函数，于是对于任意 $c\in C$，必有唯一的 $a\in A$，使得 $f(c)=a$，因为 $A\subseteq B$，所以 $a\in B$，因此，对于任意 $c\in C$，必有唯一的 $a\in B$，使得 $f(c)=a$. 根据函数的定义，f 也是一由 C 到 B 的函数. 即 $f\in B^C$，故 $A^C\subseteq B^C$.

例 3-25 设有函数 $f:A\to A$，$g:A\to A$ 和 $h:A\to A$，使得复合函数 $h\cdot f=h\cdot g$. 试证明若 h 是一内射，则 $f=g$.

证 用反证法证明之. 假设 $f\neq g$，则必存在元素 $a\in A$，使得 $f(a)\neq g(a)$，因为 h 是内射，所以 $h(f(a))\neq h(g(a))$，即 $h\cdot f(a)\neq h\cdot g(a)$. 这与题设 $h\cdot f=h\cdot g$ 相矛盾. 故 $f=g$.

例 3-27 设有集合 A,B，其中 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，又设 $F=\{f\mid f:A\to B\}$，函数 $g:F\to B^n$ 定义为对于每一 $f\in F$，$g(f)=(f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n))$，试证明 g 是一个双射.

分析 注意记号 B^n 表示笛卡尔积，

$$\underbrace{B\times B\times\cdots\times B}_{n\text{个}}=\{(b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_n})\mid b_{i_j}\in B,j=1,2,\cdots,n\},$$

集合中的每一个元素是一个有序 n 元组.

证 对于任意的 $f_1,f_2\in F$，

$$g(f_1)=(f_1(a_1),f_1(a_2),\cdots,f_1(a_n)),$$

$$g(f_2)=(f_2(a_1),f_2(a_2),\cdots,f_2(a_n)).$$

若 $f_1\neq f_2$，则至少存在一个整数 i $(1\leqslant i\leqslant n)$，使得 $f_1(a_i)\neq f_2(a_i)$，因此 $g(f_1)\neq g(f_2)$，故 g 是内射.

对于任意的 $(b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_n})\in B^n$，定义函数 $f:A\to B$，使得 $f(a_1)=b_{i_1}$，$f(a_2)=b_{i_2}$，$\cdots$，$f(a_n)=b_{i_n}$，显然 $f\in F$，且 $g(f)=(b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_n})$，因此 g 是一个满射.

由上证得 $g:F\to B^n$ 是一个双射.

例 3-33 设有函数 $f:A \to B$，定义函数 $g:2^B \to 2^A$，使得对于任一 $S \in 2^B$，有

$$g(S)=\{a \mid a \in A \text{ 且 } f(a) \in S\},$$

试问(1) 当 f 是内射时，g 是否满射？

(2) 当 f 不是内射时，g 是否一定不是满射？

解 (1) 当 f 是内射时，g 是满射.

为了确定在题设条件下，g 是否满射，可考察集合 2^A 中任一元素 H，看它在 g 作用下是否一定有像源. 这里要注意的是 $H \in 2^A$，即 $H \subseteq A$，亦即 H 是 A 的任一子集.

另外，符号 $g(S)$ 中的 $S \in 2^B$，即 S 是 B 的子集，根据 $g(S)$ 的定义，$g(S)$ 是 S 中所有元素在 f 作用下的像源的集合.

下面给出这一结论的证明.

证 对任一 $H \in 2^A$，设 $H \neq \varnothing$，并令

$$S = f(H) = \{b \mid b \in B, 存在\ a \in H\ 使得\ f(a) = b\},$$

即 S 是 H 中所有元素在 f 作用下的像的集合. 也就是说，对于任一 $b \in S$，必有 $a \in H$，使 $f(a) = b$，且因为 f 是内射，所以对于 A 中任一元素 $a' \notin H$，有 $f(a') \neq b$. 因此必有 $g(S) = H$，即 S 是 H 在 g 作用下的像源.

因为 $g(\varnothing) = \varnothing$，所以 2^A 中的元素 $\varnothing$ 也有像源.

由上证得，g 是满射.

(2) 当 f 不是内射时，g 一定不是满射.

证 若 f 不是内射，则必存在元素 $a_i, a_j \in A, a_i \neq a_j$，但 $f(a_i) = f(a_j) = b$. 由 $g(S)$ 的定义知，$\{a_i\}$ 和 $\{a_j\}$ 在 g 作用下，在 2^B 中均不存在像源. 故 g 不是满射.

End of Chapter 3