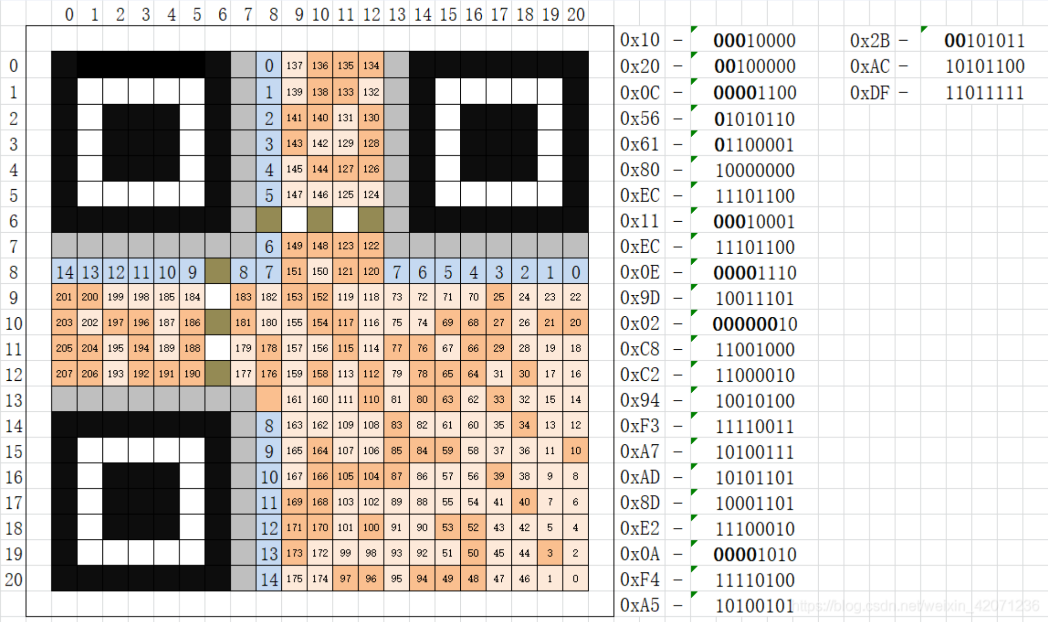
离 散 数 学

Discrete Mathematics

第5章 群

二维码采用二元域GF上的线性群结构构建纠错码。每个二进制位构成有限域元素，通过异或运算生成冗余校验位，形成满足封闭性、结合律的交换群系统。



二维码定位标记采用置换群描述的位置对称性（如三个定位角标），通过群作用原理确保不同旋转角度下的快速识别。

一、密码学与信息安全

1.非对称加密算法

群结构（如循环群、有限域）是RSA和椭圆曲线加密等算法的数学基础，利用群元素运算的不可逆性实现数据安全传输。

2.数字签名与密钥交换

基于离散对数问题的群运算（如Diffie-Hellman协议）用于生成安全密钥，确保通信双方身份验证。

二、通信与编码理论

1.纠错码设计

线性群（如循环群）用于构建海明码、里德-所罗门码等纠错码，提升数据传输可靠性。

2.信号调制技术

群论中的置换群应用于正交频分复用（OFDM）等调制方案，优化信道资源分配

浙江大学 信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

宋牟平 songmp@zju.edu.cn 玉泉校区 行政楼 325

第5章 群——伽罗瓦理论

群是非常重要的二元代数，对于代码的差错、纠错，自动机理论等各方面的研究，群是基础。

5.1 半群和独异点

定义5-1 半群：对代数系统<S; * >，若运算 * 是**可结合的**，则该代数系统称为**半群**。

代数系统：封闭性

半群满足：**封闭性**，**结合性**。

例 <N;+>，<I;+>，<N;×>半群；<R;÷>，<R;－>不是半群。

定义5-2 独异点（幺半群）：对半群<S; * >，若运算 * 存在**单位元e**，则称该半群为**独异点**。

独异点满足：封闭性，结合性，**单位元**。

例 <Z;×>，<Z;＋>，$<2^U;\cup>$，$<2^U;\cap>$独异点。

例 运算 * ：$\pi_1 * \pi_2 = \{x \mid x \in \pi_1 \cap \pi_2\}$, 集合P(S)={S上的所有分划}

代数系统<P(S); * >是独异点。

（思考：∪行不行？）

定义5-3 交换独异点：若独异点<S; * >中的运算 * 是可交换的，则称为交换独异点。

例 ⟨Z;×⟩，⟨Z;+⟩，⟨2^U;∪⟩，⟨2^U;∩⟩，⟨P(S);*⟩交换独异点。

例 设R_A为A上所有关系的集合，即$R_A=2^{A\times A}$，•为关系的复合运算，代数系统⟨R_A;•⟩是独异点，但不是交换独异点。

若运算存在单位元，可特别定义

$$a^0 = e$$

定义5-4 循环独异点：设⟨S;*⟩为独异点，若存在元素g∈A，使得每一个元素a∈A，都可表示为

$$a = g^i \qquad i\in Z$$

则该独异点称为**循环独异点**，g称为生成元。

例 **⟨Z;+⟩，⟨Z_6;$\oplus_6$⟩是循环独异点，1是生成元。**

例 b是生成元，c也是生成元。

$a=b^0$，$b=b^1$，$c=b^2$

$a=c^0$，$c=c^1$，$b=c^2$

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

浙江大学 信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

对循环独异点<S; * >，S可表示成

$S=\{e, g, g^2, \ldots, g^i, \ldots\}$

性质:

定理5-1（1）所有循环独异点都是可交换的。

定理5-2（2）若<S; * >是有限循环独异点，则必存在正整数n和m，m≤n，使

$$g^n=g^m$$

证：因由生成元可得到无穷序列

$$e, g, g^2, \ldots, g^i, \ldots$$

但$g^i \in S$，若不成立，则S为无限集。如n是满足前式的最小正整数，则

$$e,g,g^2,\ldots,g^m,g^{m+1},\ldots,g^{n-1},\mathbf{g^n=g^m},g^{m+1},\ldots$$

#S=n

（3）有限循环独异点至少有一个除单位元e以外的幂等元。

证明：设<S; * >为有限循环独异点，#S=n，则必存在正整数n和m，m≤n，使

$g^n=g^m$　　　　$e,g,g^2,\ldots,g^m,g^{m+1},\ldots,g^{n-1},\mathbf{g^n=g^m},g^{m+1},\ldots$

令l=n-m，则对于任意的i≥m，有$g^i=g^{i+hl}$(h∈Z)。取i=kl，k是使得kl≥m的最小正整数，同时取h=k，则有

$g^{kl}=g^{kl} * g^{kl}$

g^{kl}是一幂等元。

<u>推论</u>：设<S; * >是一有限独异点，则对于每一个a∈S，存在j≥1，使得

$\mathbf{a^j * a^j=a^j}$

<u>还可推广到有限半群</u>，见习题。<u>*证明*</u>*：构造有限循环独异点*<{a^0，a^1，…}; * >

<u>注意</u>：<S; * >不一定是循环独异点。

*	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	a	b	d	d
b	b	b	d	a	a
c	c	d	a	b	b
d	d	d	a	b	b

例　生成元c $1=c^0,c=c^1,b=c^2,a=c^3,d=c^4$

$a^2=a,c^3*c^3=c^3=a,b^3*b^3=b^3=a$

有一个除单位元的幂等元a。

定义5-5 **子半群**：设<S；＊>和<T；＊>是半群，若T⊆S，则称<T；＊>是<S；＊>的子半群。

因条件T⊆S成立，运算在T上必然满足结合性，故条件可弱化为<T；＊>是半群<S；＊>的子代数。

定义5-6 **子独异点**：设<S；＊>和<T；＊>是独异点，若T⊆S，且<S；＊>的单位元e∈T，则称<T；＊>是<S；＊>的**子独异点**。

例

*	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	a	b	d	d
b	b	b	d	a	a
c	c	d	a	b	b
d	d	d	a	b	b

*	a	b	d
a	a	b	d
b	b	d	a
d	d	a	b

右是左的子半群，不是子独异点，尽管两者都是独异点（单位元不一样）。

生成子：<S；＊>半群，T⊆S。若S中任意元素均可由T中的元素经过运算表达出来，称T是<S；＊>的**生成子**。

例 <N;×>是独异点，所有素数的集合P是<N;×>的生成子。

定理5-3 若<S; * >是可交换的独异点，则S上的所有幂等元的集合形成<S; * >的一个子独异点。

证明：

（1）设T是所有幂等元的集合，则T⊆S。

（2）单位元e是幂等元，e∈T，T非空。

（3）对任意的a,b∈T，有

$a*a=a,\ b*b=b$

因此由可交换性有

$(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)=a*b$

即a*b∈T，封闭性满足，<T; * >是<S; * >的一个子独异点，问题得证。

定理5-4：设h是从代数系统V1= <S1; *>到V2= <S2; ◦>的满同态，其中运算*和◦都是二元运算，则

（1）若V1是半群，则V2也是半群；

（2）若V1是独异点，则V2也是独异点。

证明：

（1）因为V1= <S1; *> 是半群，所以运算*是可结合的，而h是从V1到V2的满同态，由定理4-5可知，运算◦也是可结合的，所以V2= <S2; ◦> 也是半群；

（2）若V1是独异点，所以运算*是可结合的，且有单位元e，而h是从V1到V2的满同态，由定理4-5可知，运算◦也是可结合的，且有单位元h(e)，所以V2= <S2; ◦> 也是独异点。

5.2 群的定义

群：设<G; * >是一个独异点，若对于每一个a∈G，存在a^{-1}∈G，使得

$$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$$

则<G; * >称为**群**。

半群：封闭性，结合性。

独异点：封闭性，结合性，单位元。

群：**封闭性，结合性，单位元，逆元**。

例 <I;+>**是群**；<I;×>是半群，是独异点，但不是群。

例 <Z_6; $\oplus_6$>**是群**。

例 由右表定义的代数系统是群。

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

定义5-8 **交换群（阿贝尔群）**：若<G; * >的运算*是可交换的，则称为交换群。

<u>例</u> 集合A={a, b, c}上的所有置换的集合P={1, α, β, γ, δ, ε}，其中

$$1=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \alpha=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \quad \beta=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \delta=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad \varepsilon=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

代数系统<P;•>是群，其中•是复合运算。这种群称为**对称群**，其任意子群称**置换群**。固体物理中的晶格对称操作就是置换群。书中例5给出了对称操作的例子。

<u>**定义**</u> 幂

$a^0=e^0$

$a^{n+1}=a^n*a$

$a^{-n}=(a^{-1})^n=(a^n)^{-1}$

和一般的幂运算相同。

浙江大学 信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

定义5-9 **循环群**：<G; * >是一个群，若存在一个元素g，使得每一个a∈G，都可表示成

$$a=g^i \quad (i\in I)$$

称该群为**循环群**，g称为**生成元**。

例 <I;+>， <Z_6;$\oplus_6$> 生成元是1

例 右表的b,c是生成元

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

定义5-10 **有限群**： <G; * >是一个群，若G有限，称**有限群**，若G无限，称**无限群**。#G称**群的阶**。

定义5-11 **元素周期**：对于群<G; * >元素a，若存在一最小正整数r，使

$$a^r=e$$

称r为**元素a的周期**。若不存在则称a具有**无限周期**。

单位元e的周期为1。

定理5-5：设<G; * >是一个循环群，则生成元g的周期与群的阶相等。

证明：

（1）g的周期有限，设为n，则

$$g^n=e$$

对于任一元素$g^k \in G$，令 $k=nq+r \ (0 \leqslant r \leqslant n)$

则 $g^k=g^{nq+r}=(g^n)^q * g^r=e*g^r=g^r$

故<G; * >中任意元素都可表示成g^r，而$0 \leqslant r \leqslant n-1$，因此G中只有n个不同元素。

（2）若g的周期无限，由封闭性可知，G中必有无限多个元素。

<u>在阶大于1的群中没有零元</u>。*（零元没有逆元；加法没零元，乘法有零元）*

<u>除单位元外，群没有任何幂等元</u>。

证明：设a是幂等元，则

$$a=(a^{-1}*a)*a=a^{-1}*(a*a)=a^{-1}*a=e$$

5.3群的基本性质

定理5-6 可解性：若〈G;＊〉是一个群，则对于任意的a, b∈G，有

（1）存在唯一的元素x∈G，使得a*x=b

（2）存在唯一的元素y∈G，使得y*a=b

证明：

（1）因

$$a*(a^{-1}*b)=(a*a^{-1})*b=e*b=b$$

故至少存在一个元素

$$x=a^{-1}*b$$

使 $a*x=b$

设有另一元素h也使

$a*h=b$ 成立

则

$$h=e*h=(a^{-1}*a)*h=a^{-1}*(a*h)=a^{-1}*b=x$$

定理5-7 消去律：若 <G; * >是一个群，则对于任意的a, b, c∈G，有

（1）若$a*b=a*c$，则$b=c$

（2）若$b*a=c*a$，则$b=c$

可解性和消去律都是逆元存在所导致的。

消去律的一个重要推论是，对于任意a∈G，有

$$a*G=G$$

运算表的每一行和每一列都是一个排列或置换

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

定理5-9：若群<G; * >的元素a有周期r，则当且仅当k是r的整数倍时，

$a^k=e$

定理5-10：群中任一元素与它的逆元具有相同的周期。

证明：若a具有有限周期r，则$a^r=e$，

由此可知

$$(a^{-1})^r=(a^r)^{-1}=e^{-1}=e$$

a^{-1}有有限周期，设为r'，则$r'\leq r$。

又，

$$a^{r'}=((a^{r'})^{-1})^{-1}=((a^{-1})^{r'})^{-1}=e^{-1}=e$$

所以$r\leq r'$，因此$r=r'$。

浙江大学信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

定理5-11：有限群<G;*>的任一元素具有有限周期，且不大于群的阶。

证明：设a是G中一任意元素，构造序列

$$a^0, a^1, \ldots, a^{\#G}$$

由封闭性，序列中的每一个元素都是G中的元素，因此至多有#G个是不同的，但该序列有#G+1个元素，故必有两个是相同的，记

$$a^r = a^p \qquad 1 \leqq p < r \leqq \#G$$

$$a^{r-p}=a^r*a^{-p}=a^p*a^{-p}=a^0=e$$

因此　　a的周期≦r−p≦#G

5.4 子群及陪集

子群及其陪集

定义5-12 子群： 设<G; * >和<H; * >是群，如果H是G的非空子集，即$H \subseteq G$，且$e_G=e_H$，则**<H; * >是<G; * >的子群**。

子群要满足6个条件

（1）　封闭性

（2）　结合性

（3）　单位元

（4）　逆元

（5）　$H \subseteq G$

（6）　$e_G=e_H$

上面六条性质中，

当（1）和（5）满足时，**结合性**自然满足，不需要。

（6）**条**也是自然满足的，因对任意的$a\in H$，有

$$a*e_H=e_H*a=a$$

而$H\subseteq G$，可知

$$a*e_G=e_G*a=a$$

由**消去律**

$$e_G=e_H=e$$

<u>六条性质只需保留四条</u>

（1） **封闭性**

（3） 单位元 $e\in H$

（4） **逆元**

（5） $H\subseteq G$

可定义：设<G; ∗ >是群，如果<H; ∗ >是<G; ∗ >的非空子代数，且满足

（1）单位元$e\in H$

（2）对任意的$a\in H$，有逆元存在$a^{-1}\in H$，

称<H; * >是<G; * >的**子群**。

真子群：H是G的真子集，称<H; * >是<G; * >的真子群。

平凡子群：<G; *>，<{e}; *>

例 <I;+>是<R;+>的子群。

例 3次对称群<P;·>。P={1,α,β,γ,δ,ε}是集合A={a,b,c}上的所有置换的集合，其中

$$1=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad \alpha=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \quad \beta=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \delta=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad \varepsilon=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

<{1,α};·>，<{1,β};·>，<{1,ε};·>和<{1,γ,δ};·>是<P;·>的子群。

子群成立的条件中，单位元也可去掉。

因（大系统中）逆元存在，即对$a \in H$，存在$a^{-1} \in H$，使

$$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$$

由封闭性$e \in H$。

定理5-12：设<H; * >是<G; * >的子代数，则<H; * >是<G; * >的子群的充要条件是对于任意的$a \in H$，有$a^{-1} \in H$。

对*封闭性和逆元*还可以进一步合并成一个条件。

定理5-13：设<G; * >是群，H是G的非空子集，则当且仅当由$a,b \in H$，可推得$a*b^{-1} \in H$时，<H; * >是<G; * >的子群。

证明：

（1）设<H; * >是<G; * >的子群，则对于$a,b \in H$，必有$b^{-1} \in H$，由封闭性可得

$$a*b^{-1} \in H$$

（2）假定由$a,b \in H$，可推得$a*b^{-1} \in H$，则对$a \in H$有

$$a*a^{-1}=e \in H$$

进一步　　$e*a^{-1}=a^{-1}\in H$

若a,b∈H，由前面的结果$b^{-1}\in H$，即$a,b^{-1}\in H$，则

$$a*b=a*(b^{-1})^{-1}\in H$$

每一个元素都有逆元，且封闭的，<H; * >是<G; * >的子群。

对有限群，逆元的条件也是多余的，可去掉，只需要

（1）$H\neq\varnothing$，$H\subseteq G$

（2）<H; * >是封闭的

定理5-14：<G;*>是一个有限群，若<H;*>是<G;*>的子代数，则<H;*>是<G;*>的子群。

证明：设a∈H，因H是有限的，故a有一有限周期r，即

$$a^r=e$$

由封闭性，$a^{r-1}\in H$，但

$$a^{r-1}=a^r*a^{-1}=e*a^{-1}=a^{-1}$$

故$a^{-1}\in H$。

子群的条件还可弱化。（以上证明过程中没有要求G是有限的）

定理5-15：<G;*>是一个群，若<H;*>是<G;*>的有限子代数，则<H;*>是<G;*>的子群。

定义5-13 **左陪集 右陪集**：<H;*>是<G;*>的子群，a是G的任意一个元素，则

（1） $H*a=\{h*a|h\in H\}$ 称为**右陪集**，

（2） $a*H=\{a*h|h\in H\}$ 称为**左陪集**。

若$a\in H$，$H*a=a*H=H$，H既是左陪集，又是右陪集。

证明：因$a,h\in H$，由封闭性

$a*h\in H$，即$a*H\subseteq H$ <1>

又，对任意的$h\in H$，有

$h=e*h=a*(a^{-1}*h)=a*h'$

因$a^{-1},h\in H$，故$h'=a^{-1}*h\in H$，由右陪集定义知

$h=a*h'\in a*H$

即 $H\subseteq a*H$ <2>

定义5-14 **正规子群与陪集**：<H;*>是<G;*>的子群，如果对于每一个$a\in G$，有$\mathbf{a*H=H*a}$，即所有的左右陪集相等，则称<H;*>是<G;*>的**正规子群**，左右陪集不用区分，称**陪集**。

如果群是可交换的，它的所有子群都是正规子群。

正规子群的判断?

定理5-16 **设**<H; *>是群<G; *>的一个子群，当且仅当对于任意的$a\in G$，有$\mathbf{a*H*a^{-1} = H}$时，<H;*>是<G;*>的**正规子群。**

证明： **设**<H; *>是群<G; *>的正规子群，则对于任意的$a\in G$，

有 $a*H = H*a$，因此由运算*的可结合性和符号$a*H*a^{-1}$的定义可知

$$a*H*a^{-1} = (a*H)*a^{-1} = (H*a)*a^{-1} =H*(a*a^{-1})=H*e = H$$

反之，假设对任意的$a\in G$，有$a*H*a^{-1} = H$

则 $H*a = (a*H*a^{-1})*a = (a*H)*(a^{-1} *a) = (a*H) * e = a*H$

所以，<H; *>是群<G; *>的正规子群。

上述<H; *>为正规子群的充要条件可以削弱，即有：

定理5-17 **设**<H; *>是群<G; *>的一个子群，当且仅当对于任意的$a \in G$，有$a*H*a^{-1} \subseteq H$时，<H;*>是<G;*>的**正规子群。**

证明：

必要性显然成立。

设对任意的$a \in G$，有$a*H*a^{-1} \subseteq H$，　(1)

由于$a^{-1} \in G$，因此以a^{-1}代a仍有$a^{-1}*H*a \subseteq H$成立，以a左乘，以a^{-1}右乘得：

$$a*(a^{-1}*H*a)*a^{-1} \subseteq a*H*a^{-1}$$

即 $H \subseteq a*H*a^{-1}$　(2)

由(1)和(2)得：

$$a*H*a^{-1} = H$$

因此，<H;*>是<G;*>的**正规子群。证毕**

定理5-18 **设**<H; *>是群<G; *>的一个子群，则

(1) 当且仅当$b*a^{-1} \in H$时， $b\in H*a$

(2) 当且仅当$a^{-1}*b \in H$时， $b\in a*H$

证明：根据消去律

(1) 当且仅当存在某一$h \in H$，使得 $b=h*a$ 时，有

$b \in H*a$

因此，当且仅当存在某一$h \in H$，使得 $b*a^{-1}=h$ 时，有

$b\in H*a$

这即是当且仅当$b*a^{-1}\in H$ 时，有$b\in H*a$

(2) 的证明与（1）的证明类似。

定理5-19 设<H; *>是群<G; *>的一个子群，a和b是G的任意两个元素，则有

(1) $H * a = H*b$ 或者 $(H*a) \cap (H*b) = \Phi$

(2) $a * H = b*H$ 或者 $(a*H) \cap (b*H) = \Phi$

证明：

(1) 设 $(H*a) \cap (H*b) \neq \Phi$，并设 $x \in (H*a) \cap (H*b)$，

则 $x=h_1*a = h_2 *b$ $(h1, h2 \in H)$.

而 $e=x^{-1}*x=a^{-1}*h_1^{-1}*h_2*b$，

因此 $a*b^{-1}=h_1^{-1}*h_2 \in H$，由定理5-18，$a\in H*b$，因此

$a=h*b$ $(h\in H)$, $h'*a=(h'*h)*b$ $(h',h\in H)$, 因此 $H*a \subseteq H*b$ <1>

类似，$e=x^{-1}*x=b^{-1}*h_2^{-1}*h_1*a$，

因此 $b*a^{-1}=h_2^{-1}*h_1 \in H$，由定理5-18，$b\in H*a$，因此

$b=h*a$ $(h\in H)$), $h'*b=(h'*h)*a$ $(h',h\in H)$, 因此 $H*b \subseteq H*a$ <2>

故，$H*b = H*a$

(2) 的证明与(1)的证明类似。

例 3次对称群<P;·>，P={1,α,β,γ,δ,ε}，其中，

$$1=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \qquad \alpha=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \qquad \beta=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad \delta=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \qquad \varepsilon=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

它有4个子群：<{1,α};·>，<{1,β};·>，<{1,ε};·>和<{1,γ,δ};·>。

<{1,α};·>的右陪集：仅有三个不同

$\{1,\alpha\}\cdot 1=\{1,\alpha\}$ $\{1,\alpha\}\cdot\alpha=\{\alpha,1\}$ $\{1,\alpha\}\cdot\beta=\{\beta,\gamma\}$

$\{1,\alpha\}\cdot\gamma=\{\gamma,\beta\}$ $\{1,\alpha\}\cdot\delta=\{\delta,\varepsilon\}$ $\{1,\alpha\}\cdot\varepsilon=\{\varepsilon,\delta\}$

<{1, α}; •>的左陪集：仅有三个不同

$1\bullet\{1,\alpha\}=\{1,\alpha\}$ $\alpha\bullet\{1,\alpha\}=\{\alpha,1\}$ $\beta\bullet\{1,\alpha\}=\{\beta,\delta\}$

$\gamma\bullet\{1,\alpha\}=\{\gamma,\varepsilon\}$ $\delta\bullet\{1,\alpha\}=\{\delta,\beta\}$ $\varepsilon\bullet\{1,\alpha\}=\{\varepsilon,\gamma\}$

从该例可以看出，所有相异的左陪集构成P的一个分划，相异的右陪集也构成P的一个分划。

定理5-20：设<H;∗>是<G;∗>的子群，则<H;∗>的所有相异左陪集构成G的一个分划，称<u>左陪集分划</u>，所有相异右陪集也构成G的一个分划，称<u>右陪集分划</u>。

证明：

（1）因<H;*>是G的子群，e∈G，所以对任意的a∈G，有a=a*e∈a*H，即a*H非空，

且 $G \subseteq \bigcup_{a\in G} a*H$，又 $\bigcup_{a\in G} a*H \subseteq G$ ，所以

$$\bigcup_{a\in G} a*H = G$$

（2）设元素a,b∈G，且

$$(a*H)\cap(b*H)\neq\varnothing$$

则必存在元素x，满足

$$x \in (a*H) \cap (b*H)$$

即 $x = a*h_1 = b*h_2$ $(h_1, h_2 \in H)$

$$a = b*(h_2*h_1^{-1}) = b*h_3 \qquad (h_3 \in H)$$

对任意的$h \in H$，有

$$a*h = b*(h_3*h) = b*h_4 \qquad (h_4 \in H)$$

因此 $\mathbf{a*H \subseteq b*H}$ 〈1〉

同理可证 $\mathbf{b*H \subseteq a*H}$ 〈2〉

故有 $a*H = b*H$

两左陪集要么相等，要么交为空：

$$a*H = b*H \quad 或 \quad (a*H) \cap (b*H) = \varnothing$$

也就是相异左陪集的交为空

$$(a*H) \cap (b*H) = \varnothing \qquad (\ a*H \neq b*H\ )$$

同样的可证明相异右陪集构成G的一个分划。

当<H;*>是正规子群时，左右陪集相等，称**陪集分划**。

定理5-21：设<H;*>是<G;*>的子群，则对任意的$a \in G$，有

$$\#(a*H)=\#(H*a)=\#H。$$

证明：

定义函数$f:H \to a*H$，$f(h)=a*h$，显然f是满射。

因有一个$a*h \in a*H$，必存在一个$h \in H$，使$f(h)=a*h$。

设$a*h_1 \neq a*h_2$，则由消去律必有$h_1 \neq h_2$，f是单射。

因此f是双射，有

$$\#(a*H)=\#(H*a)=\#H$$

所有的陪集中的元素数目相等，且等于子群的阶。

定理5-22 **拉格朗日定理：**$\#G=\#(\bigcup_{a\in G} a*H)=d\#(a*H)=d\#H$

d是#G的因子，**或#G是#H的整数倍**，拉格朗日定理非常有用。

推论1：素数阶的群只有平凡子群。当#G为素数时，d只能取1和#G。

d=1，则#H=#G，<H;*>=<G;*>；d=#G，则#H=1，<H;*>=<{e};*>。

推论2：任一有限群子群的阶必为该群的因子，即#H是#G的因子。

定理5-23 推论3：有限群<G;*>中，每个元素的周期都是#G的因子。

证明：设a∈G，且a的周期为r，则a作为生成元可构成<G;*>的子群

$\langle\{e, a^1, a^2, \cdots, a^{r-1}\};*\rangle$

而该子群的的阶等于元素a的周期r，由拉格朗日定理，r是#G的因子。

推论4：素数阶的群必为循环群，且每个元素都是生成元。（书中习题）

例 求群G=<Z_6；$\oplus_6$>的所有子群和陪集。

解：Z_6={0，1，2，3，4，5}，#Z_6=6=2×3=3×2=1×6=6×1，有1、2、3、6四个因子，根据拉格朗日定理，有四个子群：

<H_1；⊕6>=<{0}；$\oplus_6$>　　平凡子群

<H_2；⊕6>=<{0，2，4}；$\oplus_6$ >

<H_3；⊕6>=<{0，3}；$\oplus_6$ >

<H_4；⊕6>=<{0，1，2，3，4，5}；$\oplus_6$ >　平凡子群

陪集：因<Z_6；$\oplus_6$>是循环群，所以它的所有子群也是循环群，可交换，故左右陪集相等，不用区分左右陪集。

<H_1；$\oplus_6$>有6个陪集：{0}、{1}、{2}，{3}、{4}、{5}

<H_2；$\oplus_6$>有2个陪集：{0，2，4}、{1，3，5}

<H_3；$\oplus_6$>有3个陪集：{0，3}、{1，4}、{2，5}

<H_4；$\oplus_6$>有1个陪集：{0，1，2，3，4，5}

作 业

3，7，9，13，17，23，25，29

内容提要

1. 半群和独异点

- 半群；
- 独异点；
- 循环独异点；
- 子半群和子独异点.

2. 群

- 群；
- 循环群；
- 元素的周期与群的阶.

3. 群的基本性质

- 群的消去律；
- 元素运算后求逆元；
- 元素的周期.

4. 子群及其陪集

- 子群及其判别；
- 子群的陪集；
- 正规子群及其判别；
- 群中与子群相关的左(右)陪集分划；
- 拉格朗日定理.

例题讲解

例 5-1 设 $\mathbf{R}$ 是实数集，$\mathbf{R}$ 上的二元运算$\times$定义为，$a\times b=|a|\cdot b$（$\cdot$ 表示数的乘法运算），问 $\mathbf{R}$ 与运算$\times$能否构成半群？

解 对于任意的 $a,b,c\in\mathbf{R}$，有

$$(a\times b)\times c=(|a|\cdot b)\times c=||a|\cdot b|\cdot c=|a|\cdot|b|\cdot c,$$

$$a\times(b\times c)=|a|\cdot(b\times c)=|a|\cdot(|b|\cdot c)=|a|\cdot|b|\cdot c,$$

所以 $$(a\times b)\times c=a\times(b\times c),$$

故 $\langle\mathbf{R};\times\rangle$ 是一个半群.

例 5-2 考察例 5-1 中的半群 $\langle S;*\rangle$，它是否是一个独异点？

解 对任意的 $b\in S$，若 a 是左单位元，则

$$a\times b=|a|\cdot b=b. \tag{1}$$

要使式(1)成立，只有 $|a|=1$. 即 $a=1$ 或 $a=-1$. 因此 1 和 -1 均是运算 $\times$ 的左单位元.

对任意的 $a\in S$，若 b 是右单位元，则有

$$a\times b=|a|\cdot b=a. \tag{2}$$

当 $a>0$ 时，要使式(2)成立，必须 $b=1$.

当 $a<0$ 时，要使式(2)成立，必须 $b=-1$.

因此，1 和 -1 均不能成为运算 $\times$ 的右单位元. 于是运算 $\times$ 不存在单位元. 故半群 $\langle S;*\rangle$ 不是独异点.

例 5-3 设 $A=\{0,1,2,3\}$，$\odot_4$ 为模 4 乘法，即

$$a\odot_4 b=\mathrm{res}_4(a\cdot b).$$

试问 A 和$\odot_4$ 能否构成独异点？

解 构造模 4 乘法在 A 上的运算表(见表 5-1). 显然运算结果均是 A 中的元素，所以$\langle A;\odot_4\rangle$构成一代数系统.

表 5-1

$\odot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

对于任意的 $a,b,c\in A$，令

$$a \cdot b = 4m_1 + \mathrm{res}_4(a \cdot b), \quad b \cdot c = 4m_2 + \mathrm{res}_4(b \cdot c),$$

则

$$\begin{aligned}(a \odot_4 b) \odot_4 c &= \mathrm{res}_4(a \cdot b) \odot_4 c = \mathrm{res}_4((\mathrm{res}_4(a \cdot b)) \cdot c) \\ &= \mathrm{res}_4((4m_1 + \mathrm{res}_4(a \cdot b)) \cdot c) = \mathrm{res}_4((a \cdot b) \cdot c),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \odot_4 (b \odot_4 c) &= a \odot_4 \mathrm{res}_4(b \cdot c) = \mathrm{res}_4(a \cdot \mathrm{res}_4(bc)) \\ &= \mathrm{res}_4(a \cdot (4m_2 + \mathrm{res}_4(b \cdot c))) = \mathrm{res}_4(a \cdot (b \cdot c)).\end{aligned}$$

因为数的乘法运算 · 是可结合的，所以

$$(a \odot_4 b) \odot_4 c = a \odot_4 (b \odot_4 c),$$

即 $\odot_4$ 满足结合律.

由运算表可看出，1 是 $\odot_4$ 的左单位元，也是右单位元，因此 1 是 $\odot_4$ 的单位元. 故 $\langle A; \odot_4 \rangle$ 是一独异点.

例 5-4 考察例 5-3 中的独异点是否为循环独异点?

解 例 5-3 中的独异点 $\langle A; \odot_4 \rangle$ 不是循环独异点. 因为 A 中不存在元素 g 能满足循环独异点的定义条件.

例如，$0^0 = 1, 0^1 = 0^2 = 0^3 = \cdots = 0$;

$1^0 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = \cdots = 1$;

$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 2^3 = 2^4 = \cdots = 0$;

$3^1 = 3^3 = 3^5 = \cdots = 3, 3^0 = 3^2 = 3^4 = \cdots = 1$.

例 5-6 设 $S=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a,b\in \mathbf{R}\right\}$（$\mathbf{R}$ 是实数集），$\cdot$ 是矩阵的乘法运算，则 $\langle S;\cdot\rangle$ 是一个半群. 因为矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是其单位元，所以 $\langle S;\cdot\rangle$ 也是一个独异点. 设

$$T=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a\in \mathbf{R}\right\},$$

则 $T\subseteq S$，且 $\cdot$ 在 T 上封闭，所以 $\langle T;\cdot\rangle$ 是 $\langle S;\cdot\rangle$ 的子半群.

在 $\langle T;\cdot\rangle$ 中，$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是单位元，所以 $\langle T;\cdot\rangle$ 是一独异点. 但因为 $\langle S;\cdot\rangle$ 的单位元 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\notin T$，所以 $\langle T;\cdot\rangle$ 不是 $\langle S;\cdot\rangle$ 的子独异点. 设

$$H=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a\in \mathbf{R}\right\},$$

则 $H\subseteq S$，且 $\cdot$ 在 H 上是封闭的，所以 $\langle H;\cdot\rangle$ 是 $\langle S;\cdot\rangle$ 的子半群. 因为单位元 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in H$，所以 $\langle H;\cdot\rangle$ 是 $\langle S;\cdot\rangle$ 的子独异点.

例 5-7 设 $G=\mathbf{Q}-\{1\}$（$\mathbf{Q}$ 为有理数集），定义 G 上的二元运算 $*$ 为 $a*b=a+b-ab$. 试问 $\langle G;*\rangle$ 是群吗？

解 对任意的 $a,b,c\in G$，有

$$\begin{aligned}(a*b)*c&=(a+b-ab)*c=a+b-ab+c-(a+b-ab)c\\&=a+b+c-ab-ac-bc+abc,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a*(b*c)&=a*(b+c-bc)=a+b+c-bc-a(b+c-bc)\\&=a+b+c-bc-ab-ac+abc,\end{aligned}$$

所以
$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

又对于任意 $a\in G$，$0*a=a*0=a$，所以 0 是 $\langle G;*\rangle$ 的单位元.

对任意 $a\in G$，有 $a*\dfrac{a}{a-1}=\dfrac{a}{a-1}*a=0$. 所以每一元素 a 均有逆元，其逆元为 $\dfrac{a}{a-1}$.

由上可知，$\langle G;*\rangle$ 是一个群.

若将集合 $G=\mathbf{Q}-\{1\}$ 改为 $G=\mathbf{Q}$，则 $\langle \mathbf{Q};*\rangle$ 不是群. 因为 1 没有逆元，不符合群的定义.

例 5-8 设有代数系统$\langle \mathbf{Z};\circ\rangle$，其中 $\mathbf{Z}$ 为整数集，运算$\circ$定义为，对于任意 $a,b\in\mathbf{Z}$，

$$a\circ b=a+b-2.$$

试问$\langle \mathbf{Z};\circ\rangle$是否为循环群？

解 对任意 $a,b,c\in\mathbf{Z}$，有

$$(a\circ b)\circ c=(a+b-2)\circ c=a+b-2+c-2=a+b+c-4,$$

$$a\circ(b\circ c)=a\circ(b+c-2)=a+b+c-2-2=a+b+c-4,$$

因此

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c).$$

又对于任意的 $a\in\mathbf{Z}$，$a\circ 2=a+2-2=a$ 且运算$\circ$是可交换的，所以有单位元 2.

对任意 $a\in\mathbf{Z}$，若 $a\circ b=a+b-2=2$，则 $b=4-a$. 因此每一元素 a 均有逆元 $a^{-1}=4-a$.

由上可知$\langle \mathbf{Z};\circ\rangle$是一个群.

$\langle \mathbf{Z};\circ\rangle$也是一循环群. 生成元是 1，不难验证，对于任意整数 n，$1^n=2-n$. 因此对于任意整数 n，$n=1^{2-n}$. 3 也是生成元，对于任意整数 n，$3^n=n+2$.

例 5-9 设有群$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$，其中$Z_6=\{0,1,2,3,4,5\}$，$\oplus_6$是模 6 加法，即对于任意的$a,b\in Z_6$，$a\oplus_6 b=\mathrm{res}_6(a+b)$. 试求出群$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$的阶和群中每一元素的周期.

解 因为Z_6的元素个数是 6，所以群$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$的阶为 6.

因为 0 是单位元，所以 0 的周期是 1.

因为$1^1=1$，$1^2=1\oplus_6 1=2$，$1^3=1^2\oplus_6 1=2\oplus_6 1=3$，$1^4=1^3\oplus_6 1=3\oplus_6 1=4$，$1^5=1^4\oplus_6 1=4\oplus_6 1=5$，$1^6=1^5\oplus_6 1=5\oplus_6 1=0$，所以 1 的周期是 6.

因为$2^1=2$，$2^2=2\oplus_6 2=4$，$2^3=2^2\oplus_6 2=4\oplus_6 2=0$，所以 2 的周期是 3.

因为$3^1=3$，$3^2=3\oplus_6 3=0$，所以 3 的周期是 2.

因为$4^1=4$，$4^2=4\oplus_6 4=2$，$4^3=2\oplus_6 4=0$，所以 4 的周期是 3.

因为$5^1=5$，$5^2=5\oplus_6 5=4$，$5^3=4\oplus_6 5=3$，$5^4=3\oplus_6 5=2$，$5^5=2\oplus_6 5=1$，$5^6=1\oplus_6 5=0$，所以 5 的周期是 6.

由上也可看出，群$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$是一循环群. 1 或 5 是其生成元，且生成元的周期与循环群$\langle G;*\rangle$的阶相等.

例 5-11　设$\langle G;*\rangle$是一个独异点，且对于任意的$a\in G$，均有$a*a=e$. 试证明$\langle G;*\rangle$是交换群.

证　因为对于任意$a\in G$，均有$a*a=e$，所以任意元素a均有逆元，且$a^{-1}=a$. 因此$\langle G;*\rangle$是一个群. 于是对于任意的$a,b\in G$，有

$$a*b=(a*b)^{-1}.$$

又根据上述群的性质得$(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$，因此

$$a*b=b^{-1}*a^{-1}=b*a.$$

故$\langle G;*\rangle$是一交换群.

群$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$

0 是单位元，所以 0 的周期是 1.

$1^1=1,1^2=1\oplus_6 1=2,1^3=1^2\oplus_6 1=2\oplus_6 1=3,1^4=1^3\oplus_6 1=3\oplus_6 1=4,1^5=1^4\oplus_6 1=4\oplus_6 1=5,1^6=1^5\oplus_6 1=5\oplus_6 1=0$，所以 1 的周期是 6.

$2^1=2,2^2=2\oplus_6 2=4,2^3=2^2\oplus_6 2=4\oplus_6 2=0$，所以 2 的周期是 3.

$3^1=3,3^2=3\oplus_6 3=0$，所以 3 的周期是 2.

$4^1=4,4^2=4\oplus_6 4=2,4^3=2\oplus_6 4=0$，所以 4 的周期是 3.

$5^1=5,5^2=5\oplus_6 5=4,5^3=4\oplus_6 5=3,5^4=3\oplus_6 5=2,5^5=2\oplus_6 5=1,5^6=1\oplus_6 5=0$，所以 5 的周期是 6.

例 5-14 例 5-9 中群$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$的阶为 6，$G$ 中每一元素的周期均是 6 的因子. 1 和 5 互为逆元，其周期均为 6；2 和 4 互为逆元，其周期均为 3；3 以自身为逆元，其周期为 2. 单位元 0 的周期为 1. $\langle Z_6;\oplus_6\rangle$是一循环群，生成元 1 和 5 的周期与群的阶相等.

群$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$中周期大于 2 的元素个数是 4 个. 它们分别是 1、5、2、4. 周期等于 2 的元素个数是 1 个，仅元素 3.

设 $V_1=\langle S_1;*\rangle$ 和 $V_2=\langle S_2;\circ\rangle$ 是两个代数系统，f 是从 V_1 到 V_2 的同态. 如果 f 不是满同态，那么 S_1 关于 $*$ 的单位元 e_1 通过 f 映射的像不一定是 S_2 关于 $\circ$ 的单位元. S_1 中任一元素 a 的逆元 a^{-1} 通过 f 映射的像 $f(a^{-1})$ 不一定是 $f(a)$ 的逆元. 但是，若 V_1 和 V_2 这两个代数系统都是群，则情形就不一样了.

例 5-15 设 f 是由群 $\langle G_1;*\rangle$ 到群 $\langle G_2;\circ\rangle$ 的同态，e_1 和 e_2 分别是这两个群的单位元，则

(1) $f(e_1)=e_2$；

(2) 对任意的 $a\in G$，有 $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$.

证 (1) 因为 f 是同态，所以 $f(e_1)=f(e_1*e_1)=f(e_1)\circ f(e_1)$，即 $f(e_1)$ 是 $\langle G_2;\circ\rangle$ 中的幂等元. 但群中除单位元外，没有其他任何幂等元，因此 $f(e_1)=e_2$. 下面给出这一结论的证明.

$$\begin{aligned}f(e_1)&=e_2\circ f(e_1)=((f(e_1))^{-1}\circ f(e_1))\circ f(e_1)\\&=(f(e_1))^{-1}\circ(f(e_1)\circ f(e_1))=(f(e_1))^{-1}\circ f(e_1)=e_2.\end{aligned}$$

(2) 对于任意 $a\in G_1$，

$$f(e_1)=f(a*a^{-1})=f(a)\circ f(a^{-1})=e_2.$$

又因 $f(a)\circ(f(a))^{-1}=e_2$，因此

$$f(a)\circ f(a^{-1})=f(a)\circ(f(a))^{-1}.$$

由群的消去律，得 $$f(a^{-1})=(f(a))^{-1}.$$

例 5-19 设 f 和 g 都是由群 $\langle G_1;*\rangle$ 到群 $\langle G_2;\circ\rangle$ 的同态，令

$$H=\{a\mid a\in G_1, f(a)=g(a)\},$$

试证明 H 对于运算 $*$ 构成 $\langle G_1;*\rangle$ 的子群.

证 f 和 g 都是由群 $\langle G_1;*\rangle$ 到群 $\langle G_2;\circ\rangle$ 的同态，由例 5-15 可知 $f(e_1)=g(e_1)=e_2$（e_1 和 e_2 分别是 $\langle G_1;*\rangle$ 和 $\langle G_2;\circ\rangle$ 的单位元），因此 $e_1\in H$，H 非空.

设 $a,b\in H$，则 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，又由例 5-15 知，$f(b^{-1})=(f(b))^{-1}$，$g(b^{-1})=(g(b))^{-1}$，于是

$$\begin{aligned}f(a*b^{-1})&=f(a)\circ f(b^{-1})=f(a)\circ(f(b))^{-1}=g(a)\circ(g(b))^{-1}\\&=g(a)\circ g(b^{-1})=g(a*b^{-1}).\end{aligned}$$

因此 $a*b^{-1}\in H$. 故 $\langle H;*\rangle$ 是群 $\langle G_1;*\rangle$ 的子群.

例 5-20 试对例 5-9 中的群$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$，找出它的所有子群.

解 因为群$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$是一阶为 6 的有限群，所以只要找出对运算$\oplus_6$封闭的子集. 根据这一判别条件，$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$有如下子群：

(1) $\langle\{0\};\oplus_6\rangle$；

(2) $\langle\{0,3\};\oplus_6\rangle$；

(3) $\langle\{0,2,4\};\oplus_6\rangle$；

(4) $\langle Z_6;\oplus_6\rangle$.

例 5-21 非零实数集 $\mathbf{R}-\{0\}$对于通常数的乘法运算构成群$\langle \mathbf{R}-\{0\};\cdot\rangle$. 集合$\{-1,1\}$是 $\mathbf{R}-\{0\}$的有限子集,且运算 · 在$\{-1,1\}$上是封闭的,因此$\langle\{-1,1\};\cdot\rangle$是群$\langle \mathbf{R}-\{0\};\cdot\rangle$的子群.

例 5-22 例 5-21 中群$\langle \mathbf{R}-\{0\};\cdot\rangle$的子群$\langle\{-1,1\};\cdot\rangle$关于 1,2,3 以及关于 $-1,-2,-3$ 的左陪集如下:

$$1\cdot\{-1,1\}=\{-1,1\};\quad -1\cdot\{-1,1\}=\{1,-1\};$$
$$2\cdot\{-1,1\}=\{-2,2\};\quad -2\cdot\{-1,1\}=\{2,-2\};$$
$$3\cdot\{-1,1\}=\{-3,3\};\quad -3\cdot\{-1,1\}=\{3,-3\}.$$

由上可以看出,对于任意非零实数 a,子群$\langle\{-1,1\};\cdot\rangle$关于 a 和关于 $-a$ 的左陪集是相等的. 即对于任意 $a\in\mathbf{R}-\{0\}$,有 $a\cdot\{-1,1\}=-a\cdot\{-1,1\}$.

因为运算 · 是可交换的,所以对于任意 $a\in\mathbf{R}-\{0\}$,又有

$$a\cdot\{-1,1\}=\{-a,a\},\{-1,1\}\cdot a=\{-a,a\},$$

因此子群$\langle\{-1,1\};\cdot\rangle$关于元素 a 的左陪集和右陪集是相等的,即对于任意的 $a\in\mathbf{R}-\{0\}$,有 $a\cdot\{-1,1\}=\{-1,1\}\cdot a$.

例 5-23 列出例 5-9 中群 $\langle Z_6;\oplus_6\rangle$ 的子群 $\langle\{0,2,4\};\oplus_6\rangle$ 的所有右陪集.

解 $\{0,2,4\}\oplus_6 0=\{0,2,4\}$; $\{0,2,4\}\oplus_6 1=\{1,3,5\}$;

$\{0,2,4\}\oplus_6 2=\{2,4,0\}$; $\{0,2,4\}\oplus_6 3=\{3,5,1\}$;

$\{0,2,4\}\oplus_6 4=\{4,0,2\}$; $\{0,2,4\}\oplus_6 5=\{5,1,3\}$.

由上看出

$$\{0,2,4\}\oplus_6 0=\{0,2,4\}\oplus_6 2=\{0,2,4\}\oplus_6 4;$$

$$\{0,2,4\}\oplus_6 1=\{0,2,4\}\oplus_6 3=\{0,2,4\}\oplus_6 5.$$

因此子群 $\langle\{0,2,4\};\oplus_6\rangle$ 在群 $\langle Z_6;\oplus_6\rangle$ 中只有两个不同的右陪集.

对于群$\langle G;*\rangle$的子群$\langle H;*\rangle$，如何判别$\langle H;*\rangle$是否为$\langle G;*\rangle$的正规子群呢？有如下三种方法.

(1) 根据正规子群的定义，如果对于每一个$a\in G$，都有$a*H=H*a$，则$\langle H;*\rangle$是群$\langle G;*\rangle$的正规子群.

(2) 如果对于每一个$a\in G$，都有$a*H*a^{-1}=H$，则$\langle H;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的正规子群.

(3) 如果对于每一个$a\in G$，都有$a*H*a^{-1}\subseteq H$，则$\langle H;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的正规子群.

例 5-25 设$\langle G;*\rangle$是一个群，定义G的子集H为

$$H=\{a\mid a*x=x*a,\text{对于任意的 } x\in G\}.$$

分析 在例 5-17 中证明了$\langle H;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子群. 实际上，$\langle H;*\rangle$也是$\langle G;*\rangle$的正规子群. 对此，只要证明对于任意的$b\in G$，$b*H*b^{-1}\subseteq H$即可.

证 因为对于任意的$a\in H$和任意的$b\in G$，有

$$b*a*b^{-1}=b*(a*b^{-1})=b*(b^{-1}*a)=(b*b^{-1})*a=e*a=a\in H,$$

所以，$b*H*b^{-1}\subseteq H$. 故$\langle H;*\rangle$是群$\langle G;*\rangle$的正规子群.

$$\{0,2,4\}\oplus_6 0=\{0,2,4\};\quad \{0,2,4\}\oplus_6 1=\{1,3,5\};$$
$$\{0,2,4\}\oplus_6 2=\{2,4,0\};\quad \{0,2,4\}\oplus_6 3=\{3,5,1\};$$
$$\{0,2,4\}\oplus_6 4=\{4,0,2\};\quad \{0,2,4\}\oplus_6 5=\{5,1,3\}.$$

例 5-26 对于例 5-23 求出群$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$中与子群$\langle\{0,2,4\};\oplus_6\rangle$相关的右陪集分划和左陪集分划.

解 在例 5-23 中,已求出子群$\langle\{0,2,4\};\oplus_6\rangle$关于 Z_6 中每一元素的右陪集,易发现它只有两个不同的右陪集.这两个右陪集构成 G 的一个分划.因此与子群$\langle\{0,2,4\};\oplus_6\rangle$相关的右陪集分划

$$\Pi=\{\{0,2,4\},\{1,3,5\}\}.$$

因为$\langle Z_6;\oplus_6\rangle$是交换群,对于任意 $a\in Z_6$,均有 $a\oplus_6\{0,2,4\}=\{0,2,4\}\oplus_6 a$,所以与子群$\langle\{0,2,4\};\oplus_6\rangle$相关的左陪集分划也是 Π.

例 5-27 对于群$\langle \mathbf{Q}^*;\cdot\rangle$(其中 $\mathbf{Q}^*$ 为非零有理数集，$\cdot$ 是通常数的乘法)，若令 $H=\{-1,1\}$，则$\langle H;\cdot\rangle$构成$\langle \mathbf{Q}^*;\cdot\rangle$的子群. 试求出子群$\langle H;\cdot\rangle$的所有左陪集.

解 对于每一个正有理数 q，相应的左陪集为

$$q\cdot H=q\cdot\{-1,1\}=\{-q,q\}.$$

对于每一个负有理数$-q$，相应的左陪集为

$$-q\cdot H=-q\cdot\{-1,1\}=\{q,-q\}.$$

因此有
$$q\cdot H=-q\cdot H.$$

但对于任意两个正有理数 q_1 和 q_2，若 $q_1\neq q_2$，则

$$q_1\cdot H\neq q_2\cdot H.$$

因此$\langle H;*\rangle$的所有左陪集由每一个 $q\in\mathbf{Q}^+$($\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集)相关的左陪集 $q\cdot H=\{-q,q\}$组成. 这些左陪集构成 $\mathbf{Q}^*$ 的一个分划，即

$$\Pi=\{q\cdot H\mid q\in\mathbf{Q}^+\}.$$

因为运算 $\cdot$ 是可交换的，对于每一个 $a\in\mathbf{Q}^*$，$a*H=H*a$，所以上述与子群$\langle H;*\rangle$相关的左陪集分划 Π，也是与$\langle H;\cdot\rangle$相关的右陪集分划. 每一个分划块都由 2 个元素组成.

例 5-28 对于群$\langle \mathbf{Q};+\rangle$(其中$\mathbf{Q}$为有理数集,$+$为通常数的加法运算),若令$\mathbf{Z}$为所有整数的集合,则$\langle \mathbf{Z};+\rangle$构成$\langle \mathbf{Q};+\rangle$的子群,试求出子群$\langle \mathbf{Z};+\rangle$的所有右陪集.

解 任意两个相邻的整数i与$i+1$之间都有无穷多个有理数.在区间$[0,1)$内任取一有理数a,则

$$\cdots,-3+a,-2+a,-1+a,0+a,1+a,2+a,3+a,\cdots$$

也都是有理数,这些有理数构成的集合是$\langle \mathbf{Z};+\rangle$的一个右陪集

$$\mathbf{Z}+a=\{i+a \mid i\in \mathbf{Z}\}.$$

于是,子群$\langle \mathbf{Z};+\rangle$的所有右陪集由与区间$[0,1)$中的每一个有理数$a$相关的右陪集组成.注意到当$a=0$时,$\mathbf{Z}+a=\mathbf{Z}$也是子群$\langle \mathbf{Z};+\rangle$的一个右陪集.上述这些右陪集构成$\mathbf{Q}$的与子群$\langle \mathbf{Z};+\rangle$相关的右陪集分划

$$\Pi=\{\mathbf{Z}+a \mid 0\leqslant a<1\}.$$

由于运算$+$可交换,对于任意$a\in\mathbf{Q}$,$\mathbf{Z}+a=a+\mathbf{Z}$,所以这个分划简称为与$\langle \mathbf{Z};+\rangle$相关的陪集分划.

例 5-29 设$\langle S;\circ\rangle$是一个有单位元 e 的半群，令

$$G=S^S=\{f \mid f:S\to S\}.$$

对任意的 $f,g\in G$，任意的 $x\in S$，定义$(f*g)(x)=f(x)\circ g(x)$，试证明 G 相对于运算 $*$ 也构成一个有单位元的半群.

证 因为$\circ$在 S 上是封闭的，所以对于任意的 $f,g\in G$，有$f*g\in G$，因此$\langle G;*\rangle$是一个代数系统.

对于任意的 $f,g,h\in G$ 和任意的 $x\in S$，因为 S 上的运算$\circ$是可结合的，故有

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(x)&=(f*g)(x)\circ h(x)=(f(x)\circ g(x))\circ h(x)\\&=f(x)\circ(g(x)\circ h(x))=f(x)\circ(g*h)(x)\\&=(f*(g*h))(x).\end{aligned}$$

因此$(f*g)*h=f*(g*h)$，即 $*$ 是可结合的，故$\langle G;*\rangle$是一个半群.

定义 $f_0:S\to S$，对于任意 $x\in S$，$f_0(x)=e$. 于是对于任意 $f\in G$ 和任意 $x\in S$，有

$$(f*f_0)(x)=f(x)\circ f_0(x)=f(x)\circ e=f(x).$$

类似地，有$(f_0*f)(x)=f(x)$. 因此 f_0 是$\langle G;*\rangle$中的单位元.

由上证得，$\langle G;*\rangle$是一个有单位元的半群.

例 5-30 设$\langle S;*\rangle$是一半群，令 $G=S^S$（S^S 的意义同例 5-29）. 函数的复合运算$\circ$在 G 上显然是封闭的，且因为函数的复合运算满足结合律，所以$\langle G;\circ\rangle$是一个半群. 现令 G 的子集

$$H=\{f_a \mid a\in S \text{ 且 } f_a(x)=a*x\}.$$

试证明 H 相对于运算$\circ$构成$\langle G;\circ\rangle$的子半群.

分析 根据子半群的定义，只要证明运算$\circ$在 H 上封闭即可.

证 对于任意的 $f_a, f_b\in H$ 和任意的 $x\in S$，有

$$(f_a\circ f_b)(x)=f_a(f_b(x))=f_a(b*x)=a*(b*x)=(a*b)*x.$$

因为$\langle S;*\rangle$是半群，所以 $a*b\in S$，因此$(f_a\circ f_b)=f_{a*b}\in H$. 故$\circ$在 H 上是封闭的，$\langle H;\circ\rangle$是$\langle G;\circ\rangle$的子半群.

例 5-31 设$\langle S;*\rangle$是一个半群，且对于任意的 $a,b\in S$，由 $a\neq b$，必有 $a*b\neq b*a$. 试证明：

(1) 对任意的 $a\in S$，有 $a*a=a$；

(2) 对任意的 $a,b\in S$，有 $a*b*a=a$；

(3) 对任意的 $a,b,c\in S$，有 $a*b*c=a*c$.

证 "由 $a\neq b$，必有 $a*b\neq b*a$"这一条件等价于"由 $a*b=b*a$ 必有 $a=b$". 根据与之等价的后一条件来证明.

(1) 因为运算 $*$ 是可结合的，所以对于任意 $a\in S$，有$(a*a)*a=a*(a*a)$. 于是，根据题设条件必有 $a*a=a$.

(2) 对任意的 $a,b\in S$，有

$$(a*b*a)*a=(a*b)*(a*a)=a*b*a,$$

$$a*(a*b*a)=(a*a)*(b*a)=a*b*a,$$

因此 $$(a*b*a)*a=a*(a*b*a),$$

故 $$a*b*a=a.$$

(3) 对任意的 $a,b,c\in S$，有

$$(a*b*c)*(a*c)=(a*b)*(c*a*c)=a*b*c,$$

$$(a*c)*(a*b*c)=(a*c*a)*(b*c)=a*b*c,$$

因此 $$(a*b*c)*(a*c)=(a*c)*(a*b*c),$$

故 $$a*b*c=a*c.$$

例 5-34 试证明凡阶分别为 1,2,3,4 的群都是交换群,举一个阶为 6 且不可交换的群的例子.

证 若$\langle G;*\rangle$是阶为 1 的群,则 G 中只有单位元 e 这唯一个元素,$e*e=e$. 显然$\langle G;*\rangle$是一交换群.

若$\langle G;*\rangle$阶为 2,设 $G=\{e,a\}$,因为 $e*e=e$,由逆元的唯一性,必有 $a*a=e$,又由 e 是单位元,有 $a*e=e*a=a$,因此$\langle G;*\rangle$是交换群. 这种群的运算表如表 5-4 所示.

表 5-4

e	e	a
e	e	a
a	a	e

若$\langle G;*\rangle$阶为 3,设 $G=\{e,a,b\}$,则因为 $e*b=b$,由群的消去律,$a*b\neq b$;因为 $a*e=a$,由群的消去律得 $a*b\neq a$,因此 $a*b=e$. 于是有

$$b*a=b*a*b*b^{-1}=b*(a*b)*b^{-1}=b*e*b^{-1}=e,$$

因此 $a*b=b*a$. 故$\langle G;*\rangle$是一交换群.

这种群的运算表如表 5-5 所示.

表 5-5

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

由于 $a*e=a$,$a*b=e$,由群的消去律,$a*a$必等于 b. 类似地,$b*b$ 只能等于 a.

若$\langle G;*\rangle$阶为 4,设 $G=\{e,a,b,c\}$,下面分两种情形讨论.

浙江大学 信息与电子工程学院 电子系 宋牟平

(1) 若 a,b,c 中有两个元素互为逆元. 不妨设 $a*b=b*a=e$, 于是 $c*c=e$. 又由 $e*c=c, a*e=a$, 根据消去律, 只能满足 $a*c=b$. 又因为 $e*a=a, c*e=c$, $b*a=e$, 所以只能是 $c*a=b$. 因此 $a*c=c*a$.

类似地, 因为 $e*c=c, b*e=b, b*a=e$, 所以只能是 $b*c=a$. 因为 $c*e=c$, $e*b=b, a*b=e$, 所以只能是 $c*b=a$. 因此 $b*c=c*b$.

由上可知, $\langle G;*\rangle$是一交换群. 这种群的运算表如表 5-6 所示.

表 5-6

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

（2）若 a,b,c 中每一元素都以自身为逆元，即若 $a*a=e, b*b=e, c*c=e$，则

由
$$a*e=a, e*b=b, b*b=e, \text{得 } a*b=c;$$
由
$$e*a=a, a*a=e, b*e=b, \text{得 } b*a=c;$$
因此
$$a*b=b*a.$$

类似地，可以证明 $b*c=c*b=a$；$a*c=c*a=b$. 因此 $\langle G;*\rangle$ 是一交换群. 这种群的运算表如表 5-7 所示.

表 5-7

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

例 5-24 中集合 $A=\{a,b,c\}$ 上所有置换构成的三次对称群 $\langle P;\circ\rangle$ 是一个阶为 6 的非交换群.

例 5-35 设$\langle G;\circ\rangle$是一个群，$u\in G$，在 G 中定义新的运算 $*$，使得对于任意的 a，$b\in G$，$a*b=a\circ u^{-1}\circ b$. 试证明$\langle G;*\rangle$也是一个群.

证 因为$\langle G;\circ\rangle$是一个群，所以运算 $*$ 在 G 上封闭.

对于任意的 $a,b,c\in G$，有

$$\begin{aligned}(a*b)*c&=(a\circ u^{-1}\circ b)*c=(a\circ u^{-1}\circ b)\circ u^{-1}\circ c\\&=a\circ u^{-1}\circ(b\circ u^{-1}\circ c)=a*(b*c),\end{aligned}$$

所以运算 $*$ 可结合.

设$\langle G;\circ\rangle$的单位元为 e，则对于任意的 $a\in G$，有

$$a*u=a\circ u^{-1}\circ u=a\circ e=a,$$
$$u*a=u\circ u^{-1}\circ a=e\circ a=a,$$

所以运算 $*$ 有单位元 u.

对于任意的 $a\in G$，设 a 关于运算$\circ$的逆元是 a^{-1}，则

$$a*(u\circ a^{-1}\circ u)=a\circ u^{-1}\circ u\circ a^{-1}\circ u=u,$$
$$(u\circ a^{-1}\circ u)*a=u\circ a^{-1}\circ u\circ u^{-1}\circ a=u,$$

所以每一元素 a 关于运算 $*$ 有逆元 $u\circ a^{-1}\circ u$.

由上证得，$\langle G;*\rangle$是一个群.

例 5-38 设⟨G; $*$⟩是一循环群，f 是从⟨G; $*$⟩到⟨G'; $\circ$⟩的满同态（$\circ$是二元运算）. 试证明⟨G'; $\circ$⟩也是循环群.

证 因为 f 是从群⟨G; $*$⟩到⟨G'; $\circ$⟩的满同态，由满同态的性质，⟨G'; $\circ$⟩也是一个群.

设 g 是群⟨G; $*$⟩的生成元，且 $f(g)=g'$. 对任一 $a'\in G'$，由 f 是满射，必存在 $a\in G$，使得 $f(a)=a'$.

设 $a=g^i$（i 为某一整数），则

$$a'=f(a)=f(g^i).$$

若 $i=0$，则 $a'=f(g^0)=f(e)=e'=(g')^0$.

若 $i>0$，则

$$a'=f(g^i)=f\underbrace{(g*g*\cdots*g)}_{i\text{个}}=\underbrace{f(g)\circ f(g)\circ\cdots\circ f(g)}_{i\text{个}}=(g')^i.$$

若 $i<0$，则 $i=-|i|$，于是由满同态的性质，得

$$a'=f(g^i)=f((g^{|i|})^{-1})=(f(g^{|i|}))^{-1}=((g')^{|i|})^{-1}=(g')^i.$$

由 $a'\in G'$ 的任意性知，⟨G'; $\circ$⟩是一循环群.

例 5-40 设$\langle A;*\rangle$和$\langle B;*\rangle$都是群$\langle G;*\rangle$的正规子群，试证明 $A*B$ 对于运算 $*$ 也构成$\langle G;*\rangle$的正规子群.

分析 (1) $\langle A;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的正规子群意味着对于任意的 $g\in G$，有 $g*A=A*g$. 同样地，$\langle B;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的正规子群意味着对于任意的 $g\in G$，有 $g*B=B*g$.

(2) $g*A=A*g$ 意味着对于任意的 $a\in A$，必存在元素 $a'\in A$，使得 $g*a=a'*g$.

特别要注意的是，这里不能写作 $g*a=a*g$.

(3) 要证明 $A*B$ 与运算 $*$ 能构成$\langle G;*\rangle$的正规子群，需要证明以下两点.

① $A*B$ 与运算 $*$ 能构成$\langle G;*\rangle$的子群：由 $a_1*b_1, a_2*b_2\in A*B$，可推出 $(a_1*b_1)*(a_2*b_2)^{-1}\in A*B$.

② $\langle A*B;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的正规子群：对于任意 $g\in G$，有 $g*(A*B)*g^{-1}\subseteq A*B$；即对于任意的 $g\in G$ 和任意的 $a*b\in A*B$，有 $g*(a*b)*g^{-1}\in A*B$.

证 因为 $e\in A, e\in B$，所以 $e\in A*B$，因此 $A*B$ 非空.

对于任意的 $a_1*b_1, a_2*b_2\in A*B$，因为 $\langle A;*\rangle$ 是 $\langle G;*\rangle$ 的正规子群，所以

$$\begin{aligned}(a_1*b_1)*(a_2*b_2)^{-1}&=(a_1*b_1)*(b_2^{-1}*a_2^{-1})=a_1*(b_1*b_2^{-1})*a_2^{-1}\\&=a_1*(b_3*a_2^{-1})=a_1*(a_3*b_3)\\&=(a_1*a_3)*b_3\in A*B.\end{aligned}$$

由上式知，$\langle A*B;*\rangle$ 是群 $\langle G;*\rangle$ 的子群.

对于任意的 $g\in G$ 和任意的 $a*b\in A*B$，因为 $\langle B;*\rangle$ 也是 $\langle G;*\rangle$ 的正规子群，所以

$$\begin{aligned}g*(a*b)*g^{-1}&=(g*a)*(b*g^{-1})=(a'*g)*(g^{-1}*b')\\&=a'*(g*g^{-1})*b'=a'*b'\in A*B.\end{aligned}$$

这说明对于任意的 $g\in G$，$g*(A*B)*g^{-1}\subseteq A*B$，故 $\langle A*B;*\rangle$ 是 $\langle G;*\rangle$ 的正规子群.

例 5-41 设$\langle A;*\rangle$和$\langle B;*\rangle$都是群$\langle G;*\rangle$的子群，试证明$\langle A*B;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子群的充要条件是 $A*B=B*A$.

证 先证充分性. 因为 $e\in A$，$e\in B$，所以 $e\in A*B$，因此 $A*B$ 非空.

对于任意的 a_1*b_1，有 $a_2*b_2\in A*B$，因为$\langle A;*\rangle$和$\langle B;*\rangle$都是$\langle G;*\rangle$的子群，所以

$$(a_1*b_1)*(a_2*b_2)^{-1}=(a_1*b_1)*(b_2^{-1}*a_2^{-1})=a_1*(b_1*b_2^{-1})*a_2^{-1}$$
$$=a_1*(b_3*a_2^{-1})(b_3\in B, a_2^{-1}\in A).$$

因为 $A*B=B*A$，所以必有 $a_3\in A$，$b_4\in B$，使得

$$b_3*a_2^{-1}=a_3*b_4,$$

于是

$$(a_1*b_1)*(a_2*b_2)^{-1}=a_1*(a_3*b_4)=(a_1*a_3)*b_4\in A*B.$$

由此可知，$\langle A*B;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子群.

再证必要性. 设 $b*a\in B*A$，则有 $b^{-1}\in B$，$a^{-1}\in A$，所以 $a^{-1}*b^{-1}\in A*B$. 因为$\langle A*B;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子群，所以又有$(a^{-1}*b^{-1})^{-1}\in A*B$，即 $b*a\in A*B$，因此 $B*A\subseteq A*B$.

设 $a*b\in A*B$，则由$\langle A*B;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子群，必有元素 $a_1*b_1\in A*B$，使得 $a*b=(a_1*b_1)^{-1}$，即 $a*b=b_1^{-1}*a_1^{-1}$，而 $b_1^{-1}*a_1^{-1}\in B*A$，所以 $a*b\in B*A$，因此 $A*B\subseteq B*A$.

由上证得，$A*B=B*A$.

例 5-42 设$\langle G;*\rangle$是一个群，H 是 G 的非空子集，试证明$\langle H;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子群的充要条件$\langle H;*\rangle$是一个群.

证 先证充分性. 设$\langle H;*\rangle$是群，则显然$\langle H;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子代数. 设 e'是$\langle H;*\rangle$的单位元，则有 $e'*e'=e'$. 由 e 是群$\langle G;*\rangle$的单位元，则有 $e*e'=e'$. 于是 $e'*e'=e*e'$. 由消去律得 $e'=e$. 因此 $e\in H$.

对任意 $a\in H$，设 a'是 a 在群$\langle H;*\rangle$中的逆元，于是有 $a*a'=e$. 另一方面，因 $a*a^{-1}=e$，由消去律 $a'=a^{-1}$. 因此 $a^{-1}\in H$.

由此证得，$\langle H;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子群.

再证必要性. 设$\langle H;*\rangle$是$\langle G;*\rangle$的子群，则$\langle H;*\rangle$显然是一代数系统，且运算 $*$ 在 H 上可结合. 单位元 $e\in H$，显然 e 也是$\langle H;*\rangle$中的单位元，对于任一 $a\in H$，有 $a^{-1}\in H$，满足 $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$. 因此$\langle H;*\rangle$是一个群.

End of Chapter 5