《随机过程》

竝

第一章、随机过程基本概念

1、定义

随机过程

$\{X(t);t\in T\}$ 在 T 中取任一 t 的随机变量集合。

样本函数

$X(t)$，为 t 的函数。（所有随机变量取到可能出现的值）

状态

给定 t_0，$X(t_0)$ 的与随机变量相关的值。

状态空间

所有状态取值构成的集合。

2、数字特征

均值函数

$\mu_X(t)=E[X(t)]$

方差函数

$\sigma_X^2(t)=D_X(t)=D[X(t)]=E[X^2(t)]-E^2[X(t)]$

自相关函数

$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$

自协方差函数

$C_X(t_1,t_2)=Cov[X(t_1),X(t_2)]=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]-E[X(t_1)]\cdot E[X(t_2)]$

互相关函数

$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)\cdot Y(t_2)]$

$R_{YX}(t_1,t_2)=E[Y(t_1)\cdot X(t_2)]$

互协方差函数

$C_{XY}(t_1,t_2)=Cov[X(t_1),Y(t_2)]=E[X(t_1)\cdot Y(t_2)]-E[X(t_1)]\cdot E[Y(t_2)]$

$C_{YX}(t_1,t_2)=Cov[Y(t_1),X(t_2)]=E[Y(t_1)\cdot X(t_2)]-E[Y(t_1)]\cdot E[X(t_2)]$

3、例题

$X(t)=At+B$, A、B 独立同分布，$P(A=1)=0.6$ ，$P(A=-1)=0.4$ 。

则

（1）$X(t)$ 的所有样本函数为 $X(t)=t+1$ ；$X(t)=-t+1$ ；$X(t)=t-1$ ；$X(t)=-t-1$

（2）$X(1)=A+B$ 的分布律为 $P[X(1)=0]=0.48$ ； $P[X(1)=2]=0.36$ ；$P[X(1)=-2]=0.16$

（3）$\{\ X(t);t\in T\ \}$ 的均值函数为 $E[X(t)]=tE(A)+E(B)=0.2t+0.2$

（4）自相关函数为

$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[(At_1+B)(At_2+B)]=t_1t_2E(A^2)+(t_1+t_2)E(AB)+E(B^2)=t_1t_2+0.04(t_1+t_2)+1$

（$\because E(A)=0.2\ D(A)=0.96\quad E(A^2)=E(B^2)=D(A)+E^2(A)=0.96+0.2^2=1$ ）

第二章、Markov 链

1、Markov 性

以现在预测将来，结果与过去无关，**即过去与将来相互独立**。

2、转移概率

m 时处于状态 i 的条件下，到 n 时转移到状态 j 的概率 $P(X_n=j\mid X_m=i)\overset{\text{记为}}{\Longrightarrow}p_{ij}(m,n)$ 。

3、转移矩阵

① 各元素非负 ② 各行元素之和为 1

4、时齐 Markov 链

若 $\forall\, i,j\quad P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$ 不依赖于 n ，则称 $\{X_n\}$ **是时齐的** $Markov$ 链

一步转移概率

$P(X_{n+1}=j\mid X_n=i)\overset{\text{记为}}{\Longrightarrow}p_{ij}$

一步转移矩阵

$\mathbf{P}=[\ p_{ij}\ ]_{I\times I}$

m 步转移概率

$P(X_{n+m}=j\mid X_n=i)\overset{\text{记为}}{\Longrightarrow}p_{ij}^{(m)}$

m 步转移矩阵

$\mathbf{P}^m=[\ p_{ij}^{(m)}\ ]_{I\times I}$

4、C-K方程

$\forall\, m,n,l\geq 0\quad i,j\in I\qquad p_{ij}(m,m+n+l)=\sum_k p_{ik}(m,m+n)\cdot p_{kj}(m+n,m+n+l)$

① $\forall\, n\geq 1\quad P(X_n=j)=\sum_i P(X_0=i)\cdot p_{ij}^{(n)}$ 。

② $\forall\, n_1<n_2<\cdots<n_k\quad P(X_{n_1}=i_1,\ldots,X_{n_k}=i_k,)=P(X_{n_1}=i_1)\cdot p_{i_1i_2}^{(n_2-n_1)}\ldots p_{i_{k-1}i_k}^{(n_k-n_{k-1})}$

时齐 $Markov$ 链的有限维分布完全由**初始分布**与**一步转移矩阵**决定。

5、常返和暂留

定义

$\tau_i=min(n\geq 1;X_n=i)$ 为首次击中状态 i 的时间（首中时）。

$f_{ij}^{(n)}$ 为从状态 i 出发在 n 步首次击中状态 j 的概率。

$f_{ij} = P(\tau_j < \infty \mid X_0 = i)$ 为从状态 i 出发在有限步能够击中状态 j 的概率，显然有 $f_{ij} = \sum f_{ij}^{(n)}$ 。

常返

从状态 i 出发能在有限时间内返回状态 i ，即 $P(\tau_i < \infty \mid X_o = i) = 1$ 。

暂留

不满足**常返**的。

平均回转时

$$\mu_i = \sum n f_{ii}^{(n)} = \begin{cases} < \infty & \text{正常返} \\ = \infty & \text{零常返} \end{cases}$$

6、状态空间的划分

可达

i 能到达 j 。$i \searrow j$ 。

互达

i 能到达 j 且 j 能到达 i 。$i \leftrightarrow j$ 。有 $d(i) = d(j)$ 且各状态有**相同的周期性与常返性**。

$\forall\ i\ j$ 互达 $\Leftrightarrow Markov$ 链**不可约**

互达等价类

所有处于同一互达状态的集合。状态空间可分为不交的**互达等价类**的并集。

闭集

一旦进入此互达等价类中的状态便不再进入非该互达等价类的其他状态。

周期

$d(i)$ 为所有返回步数可能取值的最大公约数。

① i 非周期 $\Leftrightarrow d(i) = 1$ 。② i 遍历 $\Leftrightarrow i$ 非周期正常返。 ③ $\{\, X_n \,\}$ 遍历 $\Leftrightarrow \{\, X_n \,\}$ 不可约非周期正常返。

7、平稳分布

$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$ 代表稳态时各个状态的含量。满足 ① $\pi = \mathbf{P}\pi$ （$\mathbf{P}$ 为一步转移矩阵）② $\sum \pi_i = 1$

不可约 $Markov$ 链的性质

① 若 $\{\, X_n \,\}$ 正常返，则 π 存在且唯一，$\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$ 。

② 若 $\{\, X_n \,\}$ 遍历，则 $\forall\ i\ j \quad \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j \quad \to \quad \lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j$ 。

③ 若状态空间有限，则 $\{\, X_n \,\}$ 正常返。

可约 $Markov$ 链的性质

① i 的互达等价类不闭 $\to i$ 暂留， i 常返 $\to i$ 的互达等价类关闭。

② i 的互达等价类是有限闭集 $\to i$ 正常返。

③ 若 j 暂留或零常返，则 $\forall\ i \quad \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

有限 $Markov$ 链的状态分解

可将状态空间分解为所有不交的互达等价类 C_i 与余下状态 T 的并集，则 C_i 中各状态正常返，T 中各状态暂留。则将 $\{\, X_n \,\}$ 限制在 C_i 上得到一个不可约正常返的 $Markov$ 链，其满足 $\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$ 。

8、吸收概率与平均吸收时间

☆先走一步法

设状态 a 为吸收态，P_i 为状态 i 进入状态 a 的概率/时间，则 $P_b = \sum p_{bc_i} \cdot P_{c_i}$ （求平均步数需 +1）

其中 p_{bc_i} 为一步转移概率。

9、例题

设 $\{ X_n ; n \geq 0 \}$ 是时齐的 $Markov$ 链，状态空间 I = {1,2,3,4,5,6}，一步转移概率为：$p_{11} = p_{54} = p_{62} = 0.4$，$p_{12} = p_{56} = p_{65} = 0.6$，$p_{21} = p_{34} = p_{43} = 1$。

则

（1）所有互达等价类为 C_1={1,2}　C_2={3,4}　C_3={5,6}　其中 C_1 C_2 是闭的。

（2）$d(1) = d(2) = 1$　$d(3) = d(4) = d(5) = d(6) = 2$　即状态 1、2非周期。

（3）状态 1、2、3、4 正常返，状态 5、6 暂留。

（4）$\because \pi = (\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$　$\therefore (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (\frac{8}{5}, \frac{8}{3}, 2, 2)$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = \pi_2 = \frac{3}{8}$　$\lim\limits_{n\to\infty} p_{55}^{(n)} = 0$

（6）$\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = 3) = \pi_3 = \frac{1}{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = 6) = 0$

10、解题方式

① 画出状态转移图，写出一步转移矩阵。**观察**状态转移图：

② 只要某几个状态两两互达，则为一互达等价类。若任一状态**常返**，则闭；反之不闭。

③ 对周期的判断则看返回步数的所有可能取值，若出现质数，则**非周期**；反之，周期为其最大公约数。

④ 若某一状态一旦出去就回不来了，则**暂留**；若还能回来，则**正常返**。

⑤ 求**平均回转时**可先进行状态分解，在**互达等价类**内部求平稳分布 π，**平均回转时**即倒数。

⑥ 求 n 步转移概率/稳态概率，方法同 ⑤ 。若某一状态**暂留**，则 n 步后到该状态的概率/稳态概率为 0；反之为对应的 π 值。

第三章、泊松过程与布朗运动

1、独立增量过程

$\forall\, n \geq 2$ 且 $n \in Z$ 与 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，增量 $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ 相互独立。

若 $\forall\, 0 \leq s < t$，增量 $X(t) - X(s)$ 的分布只依赖于 $t - s$，则为平稳独立增量过程。

2、齐次泊松过程

定义 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 内发生的“事件”数。

若计数过程 $\{ N(t); t \leq 0 \}$ 是强度为 λ 的**齐次泊松过程**，则

① $N(0) = 0$

② $\{ N(t); t \leq 0 \}$ 为独立增量过程

③ 对于 $\forall\, 0 \leq s < t$，有 $P(N(t) - N(s) = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k \cdot e^{-\lambda(t-s)}}{k!}$,　$k = 0, 1, 2, ...,$

④ 对于 $\forall\, t > s$　$n \leq m$　$P(N_s = m \mid N_t = n) = C_n^m (\frac{s}{t})^m \cdot (1 - \frac{s}{t})^{n-m}$

$$P(N_t = n \mid N_s = m) = P(N(t) - N(s) = n - m)$$

均值函数

$\mu_N(t) = E[N(t)] = \lambda t$

方差函数

$D_N(t) = D[N(t)] = \lambda t$

自相关函数

$R_N(t_1, t_2) = E[N(t_1) \cdot N(t_2)] = \lambda min(t_1, t_2)$

自协方差函数

$C_N(t_1,t_2)=Cov[N(t_1),N(t_2)]=\lambda min(t_1,t_2)+\lambda^2 t_1 t_2$

泊松过程的合成

若 $\{\,X(t);t\le 0\,\}$ 与 $\{\,Y(t);t\le 0\,\}$ 是相互独立的分别具有强度 λ_1 和 λ_2 的泊松过程，

则 $\{\,N(t)=X(t)+Y(t);t\le 0\,\}$ 是强度为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松过程。

泊松过程的分解

若计数过程 $\{\,N(t);t\le 0\,\}$ 是强度为 λ 的**泊松过程**，且对于事件 N，其中类型 X 发生的概率为 p，类型 Y 发生的概率为 $1-p$，则 $\{\,X(t);t\le 0\,\}$ 与 $\{\,Y(t);t\le 0\,\}$ 是相互独立的分别具有强度 λp 和 $\lambda(1-p)$ 的泊松过程。

与泊松分布相关的若干分布

① W_n 是第 n 个事件发生的时刻。

$F_{W_n}(t)=P(W_n\le t)=P(N(t)\ge n)=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$

$f_{W_n(t)}=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

② $T_i=W_i-W_{i-1}$ 为第 i 个事件和第 $i-1$ 个事件发生的时间间隔，则 $\forall\, i\quad T_i$ 均服从均值为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布。

$F_{T_i}(t)=P(T_i\le t)=1-P(T_i>t)=1-P(N(t)<1)=1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t}$

③ 若已知 $(0,t]$ 内恰好有一事件发生，则此事件的发生时刻在 $(0,t]$ 内均匀分布。

$P(T_1\le s\mid N(t)=1)=\frac{s}{t}\qquad 0<s\le t$

3、非齐次泊松过程

λ 不再为常数，而是 t 的函数。

若计数过程 $\{\,N(t);t\le 0\,\}$ 是强度为 $\lambda(t)$ 的**非齐次泊松过程**，则

① $N(0)=0$

② $\{\,N(t);t\le 0\,\}$ 为独立增量过程

③ 对于 $\forall\,0\le s<t$，有$P(N(t)-N(s)=k)=\frac{[\int_s^t\lambda(u)du]^k\cdot e^{-\int_s^t\lambda(u)du}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots,$

④ 均值函数 $E[N(t)]=\int_0^t\lambda(u)du$

4、布朗运动

直线上一质点每隔 Δt 等概率向左或向右移动距离 Δx，且每次移动相互独立，$X(t)$ 为 t 时刻质点的位置。

① $X(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$

② $X(0)=0$

③ $\forall\,0\le s<t\quad X(t)-X(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s))$

一般考虑**标准布朗运动**，即 $B(t)\sim N(0,t)\qquad(\sigma^2=1)$ 且 $C_B(t_1,t_2)=min(t_1,t_2)$

标准布朗运动的性质

$Markov$ 性：$\forall\,t\qquad\{\,B(t+s)-B(t);s\ge 0\,\}$ 是标准布朗运动。

自相似性：$\forall\,a\ne 0\qquad\{\,\frac{1}{a}B(a^2t);t\ge 0\,\}$ 是标准布朗运动。

0 与 ∞ 对称性：令 $\widetilde{B}(t)=\begin{cases}tB(\frac{1}{t}) & t>0\\ 0 & t=0\end{cases}$ 则 $\{\,\widetilde{B}(t);t\ge 0\,\}$ 是标准布朗运动。

与布朗运动相关的若干分布

① T_a 是首次击中 a 的时间。

$\forall\,a>0\quad F_{T_a}(t)=P(T_a\le t)=\underline{P(\max_{0\le s\le t}B(s)\ge a)=2P(B(t)\ge a)}=2[1-\Phi(\frac{|a|}{\sqrt{t}})]$

② $X(t) = |\min_{0\le s\le t} B(s)|$

$$F_{X(t)}(y) = P(X(t) \le y) \overset{B_1(s)=-B(s)}{=\!=\!=\!=} P(\max_{0\le s\le t} B_1(s) \le y) = 1 - 2P(B_1(t) > y) = 2\Phi(\frac{y}{\sqrt{t}}) - 1 \qquad (t \ge 0)$$

③ $P(\min_{0\le s\le t} B(s) \le -y) = P(\max_{0\le s\le t} B(s) \ge y)$ （对称性）

布朗桥运动

$X(t) = B(t) - tB(1) \quad 0 \le t \le 1$

① $X(0) = X(1) = 0$ ② 为正态过程 ③ $\mu_X(t) = 0$ 且 $\forall\, 0 < s < t < 1 \quad C_X(s,t) = s(1-t)$

5、例题

① 用 $N(t)$ 表示在 $(0,t]$ 小时内收到的短信数目。设 $\{N(t); t \le 0\}$ 是强度为 $\lambda = 5$ 条的泊松过程，且每条短信独立地以概率 0.6 是垃圾短信。

设垃圾短信的数目为 $N_1(t)$，正常短信的数目为 $N_2(t)$。

$\{N_1(t); t \le 0\}$ 是强度为 $\lambda p = 5 \times 0.6 = 3$ 条的泊松过程，$\{N_2(t); t \le 0\}$ 是强度为 $\lambda(1-p) = 5 \times 0.4 = 2$ 条的泊松过程。

则

（1）1 小时内收到 2 条短信的概率为 $P(N(1) = 2) = \frac{5^2 \cdot e^{-5}}{2!} = \frac{25}{2} e^{-5}$

（2）1 小时内收到的垃圾短信数目为 2 条的概率为 $P(N_1(1) = 2) = \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = \frac{9}{2} e^{-3}$

（3）若已知 3 小时内恰好收到一条短信，则这条短信是在第 2 个小时内收到的概率为

$$P(N(2) - N(1) = 1 \mid N(3) = 1) = \frac{P(N(3)-N(2)+N(1)=0, N(2)-N(1)=1)}{P(N(3)=1)} = \frac{P(N(3)-N(2)=0 \cdot P(N(2)-N(1)=1) \cdot P(N(1)=0)}{P(N(3)=1)} = \frac{e^{-5} \cdot 5e^{-5} \cdot e^{-5}}{15e^{-15}} = \frac{1}{3}$$

（4）1 小时内至少收到 1 条短信，且在 3 小时内恰好收到两条短信的概率为

$$P(N(3) - N(1) = 1, N(1) = 1) + P(N(3) - N(1) = 0, N(1) = 2) = 10e^{-10} \cdot 5e^{-5} + e^{-10} \cdot \frac{5^2}{2!} e^{-5} = 62.5e^{-15}$$

（5）若已知 1 小时内至多收到 2 条短信，则至少有 1 条垃圾短信的概率为

$$P(N_1(1) \ge 1 \mid N(1) \le 2) = \frac{P(N_1(1)=1, N(1)\le 2) + P(N_1(1)=2, N(1)\le 2)}{P(N(1)\le 2)} = \frac{P(N_1(1)=1, N_2(1)=1) + P(N_1(1)=1, N_2(1)=0) + P(N_1(1)=2, N_2(1)=0)}{P(N(1)\le 2)}$$

$$= \frac{e^{-5} \cdot (3\times 2 + 3 + 3^2/2)}{e^{-5} \cdot (1 + 5 + 12.5)} = \frac{27}{37}$$

② 设 $\{B(t); t \ge 0\}$ 是标准布朗运动，则

（1）$B(3) - 2B(1)$ 服从 $N(0,3)$ 分布（$B(3) - 2B(1) = B(3) - B(1) - B(1) \sim N(0, 2+1) = N(0,3)$）

（2）$Cov(B(3) - 2B(1), B(2)) = D[B(2) - B(1)] - D[B(1)] = 0$

（3）$P(B(5.5) > 5 \mid B(1.1) = 3, B(1.5) = 1) = P(B(5.5) - B(1.5) > 4) = 1 - \Phi(2) = 0.02$

（4）$P(\max_{0\le t\le 6.25} B(t) < 2.5) = 1 - P(\max_{0\le t\le 6.25} B(t) \ge 2.5) = 1 - 2[1 - P(B(6.25) < 2.5)] = 2\Phi(1) - 1 = 0.68$

6、解题方式

① 泊松过程的合成与分解。

② 一定要将不独立的变量转化为独立增量。

③ 布朗运动的 $Markov$ 性。

④ 各种相关分布的结论。

第四章、平稳过程

1、严平稳过程

$\{X(t);t\in T\}$ 中所有 X_t 同分布，且 $\forall\, n\geq 2\quad (X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n},)$ 的分布仅与时间差 t_i-t_{i-1} 有关，而与起始时间 t_1 无关。

2、宽平稳过程

存在二阶矩的严平稳过程。平稳过程均指**宽平稳过程**。

均值函数

$\mu_X(t)=E[X(t)]=E[X(0)]\stackrel{\text{记为}}{\Longrightarrow}\mu_X$ (常数)

方差函数

$D[X(t)]=R_X(0)-\mu_X^2$ (常数)

自相关函数

$E[X(t)X(t+\tau)]=E[X(0)X(\tau)]=R_X(\tau)$ (为时间差的函数)

$E[X^2(t)]=R_X(0)$ (常数)

$E[X_{t_1}X_{t_2}]=R_X(t_2-t_1)$

自协方差函数

$C_X(\tau)=R_X(\tau)-\mu_X^2$

平稳相关

若 $\{X(t);t\in T\}$、$\{Y(t);t\in T\}$ 是两个平稳过程，$X(t),Y(t)$ 的互相关函数也为时间差 τ 的函数$\stackrel{\text{记为}}{\Longrightarrow}R_{XY}(\tau)$

称 $X(t),Y(t)$ 是平稳相关/联合（宽）平稳的。

① $R_X(0)=E[X^2(t)]=\psi_X^2\geq 0$

② $R_X(-\tau)=R_X(\tau)$ (偶函数)　　$R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$ (非奇非偶)

③ $|R_X(\tau)|\leq R_X(0)$　　　$|C_X(\tau)|\leq C_X(0)=\sigma_X^2$

$|R_{XY}(\tau)|^2\leq R_X(0)R_Y(0)$　　$|C_{XY}(\tau)|^2\leq C_X(0)C_Y(0),$

相关/协方差函数在时间差 τ 为 0 时取得最大值。

④ $R_X(\tau)$ 是非负定的，即 $\forall\, t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$ 和 $\forall\, a_1,a_2,\ldots,a_n\in R$，有$\sum_{i,j=1}^n R_X(t_i-t_j)a_ia_j\geq 0$

⑤ $\{X(t);t\in T\}$ 是周期为 T_0 的平稳过程 $\Leftrightarrow R_X(t)$ 是周期为 T_0 的函数。

3、各态历经性

时间均值

$<X(t)>=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$

$<X_n>=\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n$

时间相关函数

$<X(t)X(t+\tau)>=\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt$

$<X_nX_{n+m}>=\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_nX_{n+m}$

各态历经性

均值具有各态历经性：$P(<X(t)>=\mu_X)=1\,/\,P(<X_n>=\mu_X)=1$　（即时间均值恒等于均值函数）

自相关函数具有各态历经性：$\forall\,\tau\quad P(<X(t)X(t+\tau)>=R_X(\tau))=1$　（即时间相关函数恒等于自相关函数）

各态历经过程：均值和自相关函数都具有各态历经性。

均值各态历经定理

在 $\lim_{\tau\to+\infty} R_X(\tau)$ 存在的条件下，若 $\lim_{\tau\to+\infty} R_X(\tau)=\mu_X^2$ ，则**均值具有各态历经性**，反之不具有。

4、平稳过程的功率谱密度

谱密度

$S_X(\omega)$ 是 ω 的非负实偶函数，与自相关函数 $R_X(\tau)$ 是一对 $Fourier$ 变换对。

$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$

统称**维纳-辛钦公式**。

因为 S_X R_X 都是实偶函数，所以 $R_X \xleftrightarrow{F} S_X \quad S_X \xleftrightarrow{F} 2\pi R_X$

常用 $Fourier$ 变换对

① $e^{-a|\tau|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

② $\begin{cases} 1-\frac{|\tau|}{T} & |\tau|\leq T \\ 0 & |\tau|>T \end{cases} \xleftrightarrow{F} (\frac{sin(\omega T/2)}{\omega T/2})^2$

③ $\frac{sin\omega_0\tau}{\pi\tau} \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1 & |\omega|\leq\omega_0 \\ 0 & |\omega|>\omega_0 \end{cases}$

④ $1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$

⑤ $\delta(\tau) \xleftrightarrow{F} 1$

⑥ $cos\omega_0\tau \xleftrightarrow{F} \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

⑦ $R_X(\tau)cos\omega_0\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}[S_X(\omega+\omega_0)+S_X(\omega-\omega_0)]$

5、例题

设 $\{\,X(t);-\infty<t<\infty\,\}$ 是宽平稳过程，$X(t)=Acos(t+2\pi B)$ ，A,B 独立且服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，

$E[A]=\frac{1}{2} \quad D[A]=\frac{1}{12} \quad E[A^2]=E^2[A]+D[A]=\frac{1}{3}$

则

（1）均值函数 $\mu_X=E[Acos(2\pi B)]=0$

（2）自相关函数 $R_X(\tau)=E[X(0)X(\tau)]=E[A^2]\cdot E[cos(2\pi B)\cdot cos(\tau+2\pi B)]=\frac{cos\tau}{6}$

（3）谱密度 $S_X(\omega)=\frac{\pi}{6}[(\omega+1)+(\omega-1)]$

（4）时间均值 $<X(t)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{AsinTcos(2\pi B)}{T}\equiv\mu_X$ ，具有各态历经性。

（5）时间相关函数 $<X(t)X(t+\tau)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt=\frac{A^2cos\tau}{2}\neq R_X(\tau)$ ，不具有各态历经性。

（6）综合（4）（5），$X(t)$ 不是各态历经过程。

6、解题方式

① 证明是宽平稳过程，只需证 $E[X(t)]$ 为常数且 R_X 为只和 τ 有关的函数。

② 证明是各态历经过程，只需证 $<X(t)>\equiv\mu_X$ 且 $<X(t)X(t+\tau)>\equiv R_X(\tau)$

③ 在 $\lim_{\tau\to+\infty} R_X(\tau)$ 存在的条件下，证明均值具有各态历经性，也可转而证 $\lim_{\tau\to+\infty} R_X(\tau)=\mu_X^2$