

1. 设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是时齐的 Markov 链, 状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4\}$, 一步转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。 已知 $P(X_0 = 1) = 1/4, P(X_0 = 2) = 3/4$ 。 计算 (1)$$

$$P(X_2 = 2); \quad (2) P(X_1 = 2, X_3 = 2, X_4 = 4); \quad (3) P(X_0 = 1 | X_1 = 1);$$

$$(4) \text{ 令 } T_4 = \min\{n \geq 0 : X_n = 4\}, \text{ 求 } P(T_4 < \infty)。$$

$$(1) = \frac{5}{4} \times \frac{5}{16} = \frac{9}{64}$$

$$(2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{1024}$$

$$(3) = \frac{P(X_0 = 1, X_1 = 1)}{P(X_1 = 1)} = \frac{4}{7}$$

$$(4) \quad h_2 = \frac{1}{4}(h_2 + h_3 + 1), \quad h_3 = \frac{1}{2}(h_2 + 1)$$

$$\text{得 } h_2 = \frac{3}{5}$$

$$\therefore P(T_4 < \infty) = \frac{3}{4}h_2 = \frac{9}{20}$$

2. 设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是时齐的 Markov 链, 状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 一步转移概率

为: $p_{12} = p_{13} = p_{43} = p_{45} = p_{54} = p_{56} = p_{65} = p_{63} = \frac{1}{2}, p_{21} = \frac{1}{3}, p_{23} = \frac{2}{3}, p_{32} = 1;$

初始分布为 $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 6) = 1/2$ 。

- (1) 求出所有的互通等价类, 并指出哪些是闭的;
- (2) 求出各状态的周期和常返性;
- (3) 计算所有正常返态的平均回转时;
- (4) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 2)$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 5)$ 。

(1) 互达等价类有: $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ ↵

其中 $\{1, 2, 3\}$ 闭 ↵

(2) 1, 2, 3 正常返, 非周期 ↵

4, 5, 6 暂留, 周期为 2 ↵

(3) $\{X_n\}$ 限制在 $\{1, 2, 3\}$ 上得到一个新的 Markov 链, 其平稳分布满足:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1; \quad \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2; \quad \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \pi_3 \quad \leftarrow$$

$$\text{解得 } \pi_1 = \frac{2}{13}, \pi_2 = \frac{6}{13}, \pi_3 = \frac{5}{13}, \quad \leftarrow$$

$$\therefore \mu_1 = \frac{13}{2}, \quad \mu_2 = \frac{13}{6}, \quad \mu_3 = \frac{13}{5} \quad \leftarrow$$

$$(4) \lim P(X_n = 2) = \frac{6}{13}, \lim P(X_n = 5) = 0 \quad \leftarrow$$

3. 甲乙两人玩游戏，每局甲赢一元的概率为 0.4，输一元的概率为 0.3，平局的概率为 0.3，假设一开始甲有 1 元，乙有 2 元，游戏直到某人输光为止， X_n 为第 n 局后甲拥有的钱数，则 $\{X_n; n \geq 1\}$ 是一个时齐的 Markov 链，状态空间 $I = \{0, 1, 2, 3\}$ ，求 (1) 一步转移矩阵 P ；

(2) $P(X_2 = 1)$ ； (3) $P(X_2 = 1, X_4 = 2)$ ； (4) 甲输的概率。

3. (1)
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)
$$P(X_2 = 1) = p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} = 0.3 \times 0.3 + 0.4 \times 0.3 = 0.21$$

(3)
$$P(X_2 = 1, X_4 = 2) = P(X_2 = 1)(p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}) = 0.0504$$

$$h_1 = 0.3h_0 + 0.3h_1 + 0.4h_2$$

(4)
$$h_2 = 0.3h_1 + 0.3h_2 + 0.4h_3$$

$$h_0 = 1, h_3 = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{21}{37}$$

4. 设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是时齐的 Markov 链, 状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 一步转移概率为:

$p_{11} = p_{54} = p_{62} = 0.4, p_{12} = p_{56} = p_{65} = 0.6, p_{21} = p_{34} = p_{43} = 1$ 。(1) 求出所有的互达等价类, 并指出哪些是闭的; (2) 求出各状态的周期和常返性; (3) 计算所有正常返态的平均回转时; (4) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{12}^{(n)}$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{55}^{(n)}$ 。

4. (1) 互达等价类: $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$, 其中 $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ 是闭的

(2) 1, 2, 3, 4 正常返, 5, 6 暂留, 1, 2 非周期, 3, 4, 5, 6 周期为 2

(3) $0.6\pi_1 = \pi_2, \pi_1 + \pi_2 = 1, \pi_3 = \pi_4, \pi_3 + \pi_4 = 1$

得 $(\pi_1, \pi_2) = (\frac{5}{8}, \frac{3}{8}), (\pi_3, \pi_4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 所以 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (\frac{8}{5}, \frac{8}{3}, 2, 2)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{12}^{(n)} = \pi_2 = \frac{3}{8}, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{55}^{(n)} = 0$