电磁场与电磁波

第19讲(2)

1. Bessel函数的渐进表达式
2. 球Bessel函数的渐进表达式

贝塞尔函数

第一类贝塞尔函数 $J_n(k_\rho\rho)$ ，其渐近公式为

$$J_n(k_\rho\rho)\xrightarrow{k_\rho\rho\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho\rho}}\cos(k_\rho\rho-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$$

第一类Bessel函数描述柱面驻波的波动特性。

上式可以理解为：**第一类贝塞尔函数 $J_n(k_\rho\rho)$ 的大宗量近似（远区近似），可以理解为幅度随距离衰减，相位用余弦函数来表达的类似余弦函数的函数**

贝塞尔函数

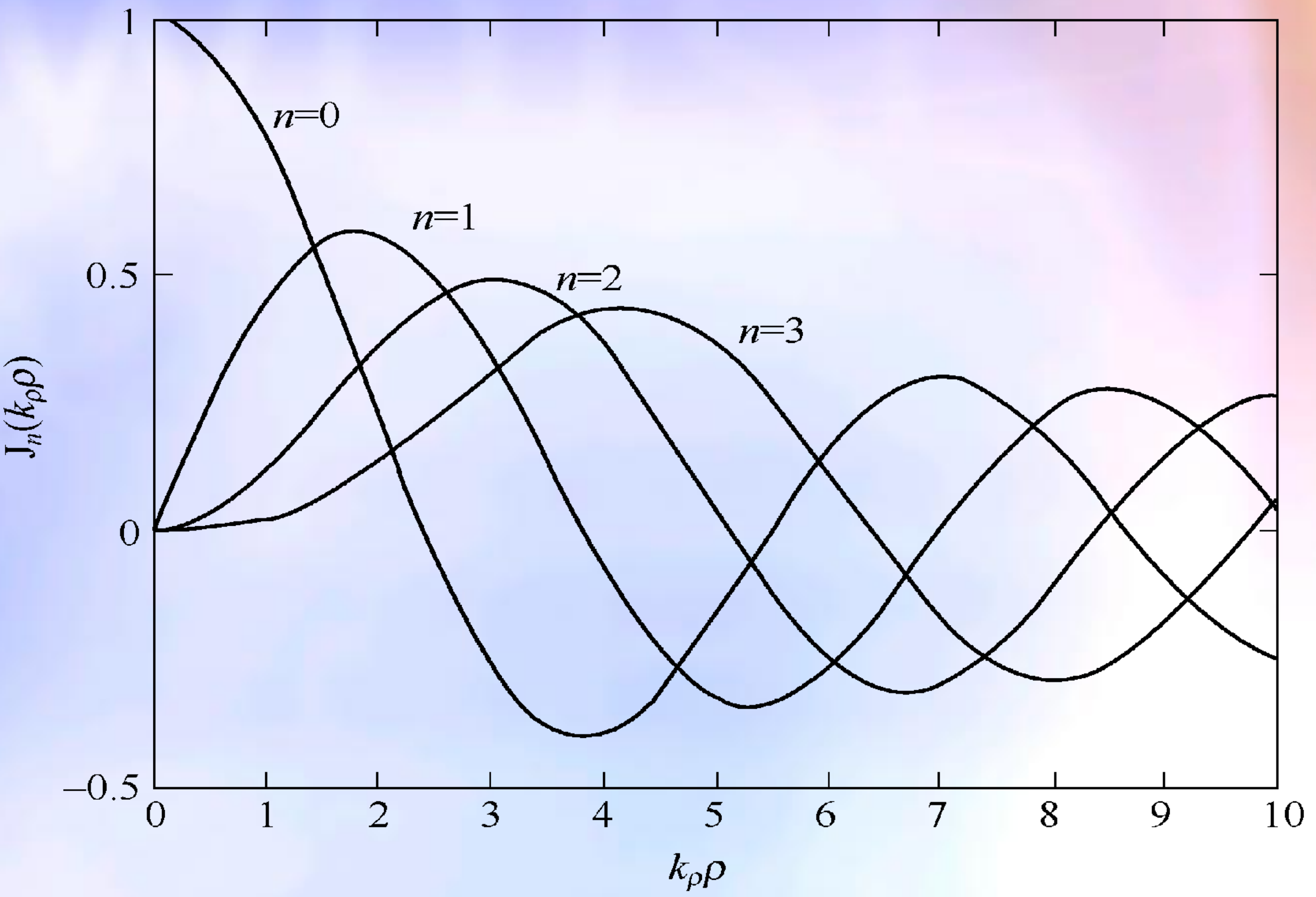

图1 第一类贝塞尔函数 $J_n(k_\rho \rho)$

贝塞尔函数

第二类贝塞尔函数 $J_n(k_\rho\rho)$,也称Neuman函数，用 $N_n(k_\rho\rho)$ 表示,与第一类Bessel函数的关系为

$$\mathrm{N_n}(k_\rho\rho)=\lim_{m\to n}\frac{\cos m\pi J_m(k_\rho\rho)-J_{-m}(k_\rho\rho)}{\sin m\pi}$$

第二类贝塞尔函数 $N_n(k_\rho\rho)$ 的渐近公式为

$$N_n(k_\rho\rho)\xrightarrow{k_\rho\rho\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho\rho}}\sin(k_\rho\rho-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$$

第二类Bessel函数描述柱面驻波的波动特性。

上式可以理解为：**第二类贝塞尔函数 $N_n(k_\rho\rho)$ 的大宗量近似（远区近似），可以理解为幅度随距离衰减，相位用正弦函数来表达的类似正弦函数的函数。**

贝塞尔函数

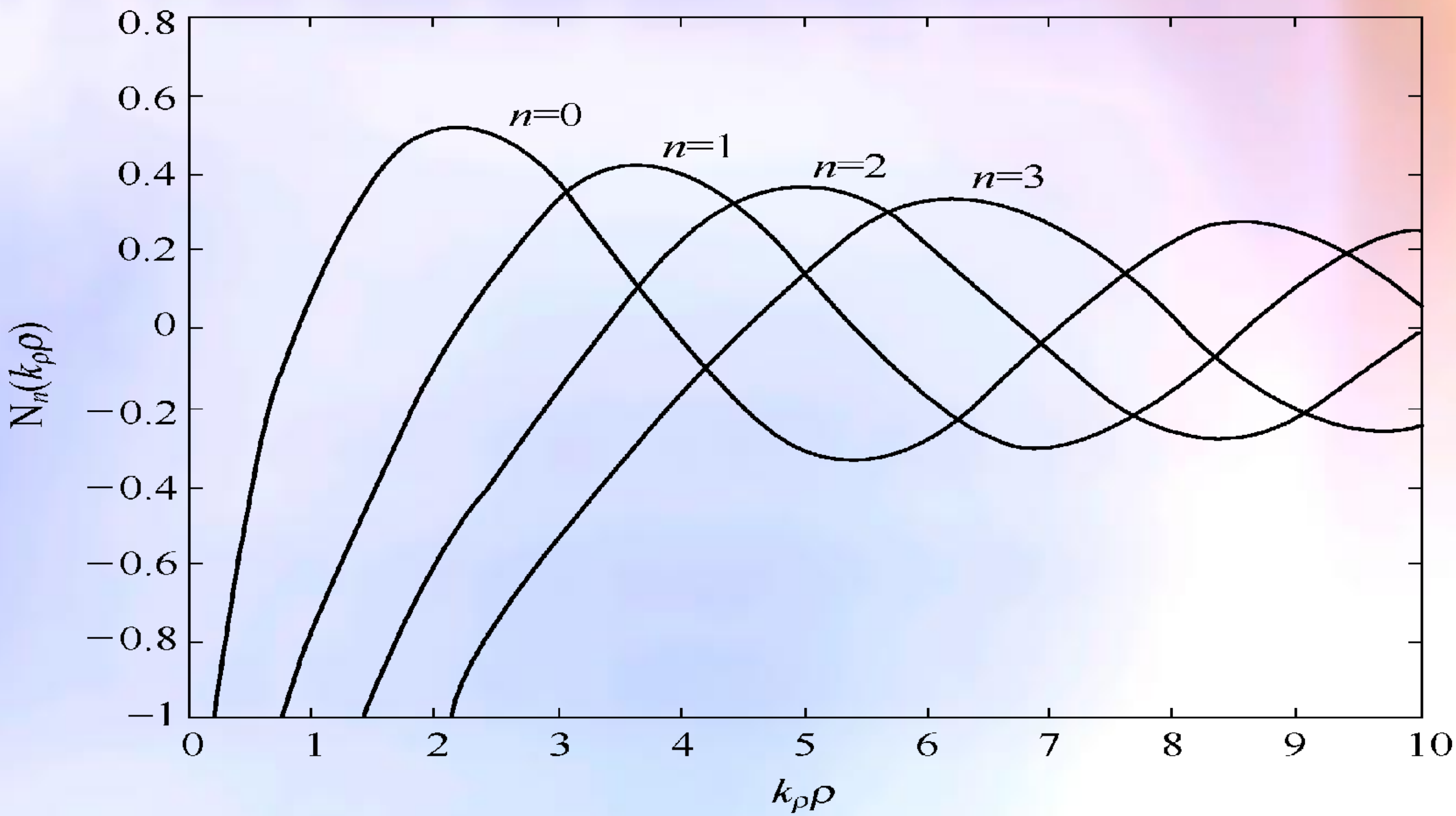

图2 第二类Bessel函数的变化特性

贝塞尔函数

第三类Bessel函数也称为Hankel函数， Hankel函数可分为两类，分别称为第一类Hankel函数和第二类Hankel函数。

第一类Hankel函数用 $H_n^{(1)}(k_\rho \rho)$ 表示, 其物理意义表示圆柱体内行波的波动特性, 其渐进表达式:

$$H_n^1(k_\rho \rho) \xrightarrow{k_\rho \rho \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} e^{j(k_\rho \rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}$$

第一类Hankel函数可理解为：**第一类Hankel函数的大宗量近似（远区近似），可以理解为幅度随距离衰减，相位用复数相位来表达的函数。**

贝塞尔函数

第二类Hankel函数用$H_n^{(2)}(k_\rho\rho)$ 表示, 其物理意义表示圆柱体内行波的波动特性, 其渐进表达式:

$$H_n^2(k_\rho\rho)\xrightarrow{k_\rho\rho\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho\rho}}e^{-j(k_\rho\rho-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}$$

第二类Hankel函数可理解为：**第二类Hankel函数的大宗量近似（远区近似），可以理解为幅度随距离衰减，相位用复数相位来表达的函数。**

贝塞尔函数

Hankel函数也为是第一类Bessel函数和第二类Bessel函数的线性组合。其关系为

$$H_n^{(1)}(k_\rho \rho) = J_n(k_\rho \rho) + jN_n(k_\rho \rho)$$

$$H_n^{(2)}(k_\rho \rho) = J_n(k_\rho \rho) - jN_n(k_\rho \rho)$$

当 $k_z^2 > k^2$时，k_ρ为虚数，令 $k_\rho = j\tau$，则有修正Bessel函数

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - (\tau^2 \rho^2 + n^2) R = 0$$

其解即为修正Bessel函数。

贝塞尔函数

修正Bessel函数可分为两类。第一类修正Bessel函数用$I_n(\tau\rho)$表示，其定义为

$$I_n(\tau\rho) = j^{-n} J_n(jk_\rho \rho)$$

第二类修正Bessel函数用$K_n(\tau\rho)$表示，它与第一类修正Bessel函数的关系为

$$K_n(\tau\rho) = \frac{\pi}{2} \lim_{m\to n} \frac{I_{-m}(\tau\rho) - I_m(\tau\rho)}{\sin m\pi}$$

球Bessel函数

在球坐标中，标量波动方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+k^2\phi=0$$

采用分离变量法，令 $\phi = f_1(r)f_2(\theta)f_3(\gamma)$ 得到

$$r^2\frac{d^2f_1}{dr^2}+2r\frac{df_1}{dr}+(k^2r^2-p^2)f_1=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{df_2}{d\theta})+(p^2-\frac{q^2}{\sin^2\theta})f_2=0$$

$$\frac{d^2f_3}{d\varphi^2}+q^2f_3=0$$

球Bessel函数

连带Legendre函数的表达式为

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

式中，$P_n(x)$为Legendre函数。与$\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)$相应的另一独立解为$Q_n^m(\cos\theta)$，方程一般解可写为：

$$P_{(x)}=AP_n{}^m{}_{(x)}+BQ_n{}^m{}_{(x)}$$

球Bessel函数

令 $f_1(r)=\sqrt{\frac{1}{kr}}v(r)$，则 $v(r)$ 满足：

$$r^2\frac{d^2v}{dr^2}+r\frac{dv}{dr}+[kr^2-(n+\frac{1}{2})^2]v=0$$

这是一个半奇数的Bessel方程，其解为

$$f_1(r)=\frac{1}{\sqrt{kr}}Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

球Bessel函数

定义球Bessel函数为

$$z_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}Z_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \qquad j_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$$

$$y_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}y_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \qquad h_n^{(1)}(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho)$$

$$h_n^{(2)}(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho)$$

球Bessel函数

球Bessel函数的物理意义与Bessel函数的物理意义相似

零阶球Bessel函数有简单的表达式为

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x} \qquad n_0(x)=-\frac{\cos x}{x}$$

$$h_0^{(1)}(x)=\frac{e^{jx}}{jx} \qquad h_0^{(2)}(x)=\frac{e-^{jx}}{-jx}$$

高阶球Bessel函数也有显明的初等函数表达式 。