# 电磁场与电磁波

## 第14讲

## 波传播的传输线模型

# 第13讲复习

复习要点

- 铁氧体未经磁化是各向同性的。当一恒定磁场$\boldsymbol{H}_0$加在铁氧体上时，它变成一块各向异性介质。如果$\omega$=0，铁氧体成为一种磁性单轴晶体。磁导率$\mu_{11}$、$\mu_{12}$都是外加直流磁场$\boldsymbol{H}_0$、饱和磁化强度$\boldsymbol{M}_0$和外加频率$\omega$的函数。因此可以用改变$\boldsymbol{H}_0$的办法改变$\mu_{11}$和$\mu_{12}$。
- 铁氧体中传播的波可以分为纵向传播的波与横向传播的波。纵向传播的波是圆极化波。左旋波和右旋波相速不等。右旋波有共振特性，有通带止带纵向传播的波是非互易的，存在法拉第旋转效应。横向传播的波分为寻常波与非寻常波。寻常波就是普通的TEM波，非寻常波是椭圆极化波。其极化特性相互垂直。
- 高斯光束是分析实际激光束的一个十分迫近的模型，可将它展开为无限多平面波的叠加。高斯光束沿z轴传播一段距离后，其宽度与z轴近似线性关系，等相位面成为一柱面。这称为高斯光束衍射。

# 平面波传播的传输线模型

传输线(趋于无穷远)

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+k^2\right)U=0$$

$$U=U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$I=\frac{1}{Z_{\mathrm{c}}}U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

平面波(特定坐标系)

$$\left(\nabla^2+k^2\right)\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{Bmatrix}=0$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

如果把特定坐标系下的关于***E***与***H***平面波解与趋于无穷远的传输线上电压、电流波的解作一比较，不难发现两者十分相似。

如果能将电磁波的传播用传输线上电压、电流波的传播等效，这将十分有助于对电磁波传播的理解，同时也可借用成熟的传输线理论处理电磁波的传播问题。

# 电磁场的比较研究方法

电磁场的研究方法

**场的方法**：以Maxwell方程为基础，求解波动方程及矩阵方程

**路的方法**：以基尔霍夫定律为基础，传输线理论及网络理论

场揭示电磁的内部性质；路反映电磁的外部特性。相互补充，相得益彰。

# TM波、TE波和TEM波



本节将证明如果电磁波按TM 、TE模分解，那么对每种模式的横向电磁场量沿纵向的传播可用传输线上电压、电流的传播等效。

什么是TM波和TE波?

TM波: $H_z(\mathbf{r})=0$ ；　　TE波: $E_z(\mathbf{r})=0$

什么是TEM波?

$$H_z(\mathbf{r})=0 \quad \text{and} \quad E_z(\mathbf{r})=0$$

# TEM模传播的传输线模型

TEM模 $$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{x}_0$$

$$E_x=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\boldsymbol{H}=H_y\boldsymbol{y}_0$$

$$H_y=H_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\frac{E_0}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

如果我们把$E_x$写成模式函数$\varphi$与电压$U$ (z)的乘积，$H_y$写成模式函数$\varphi$与电流$I$ (z)的乘积，即

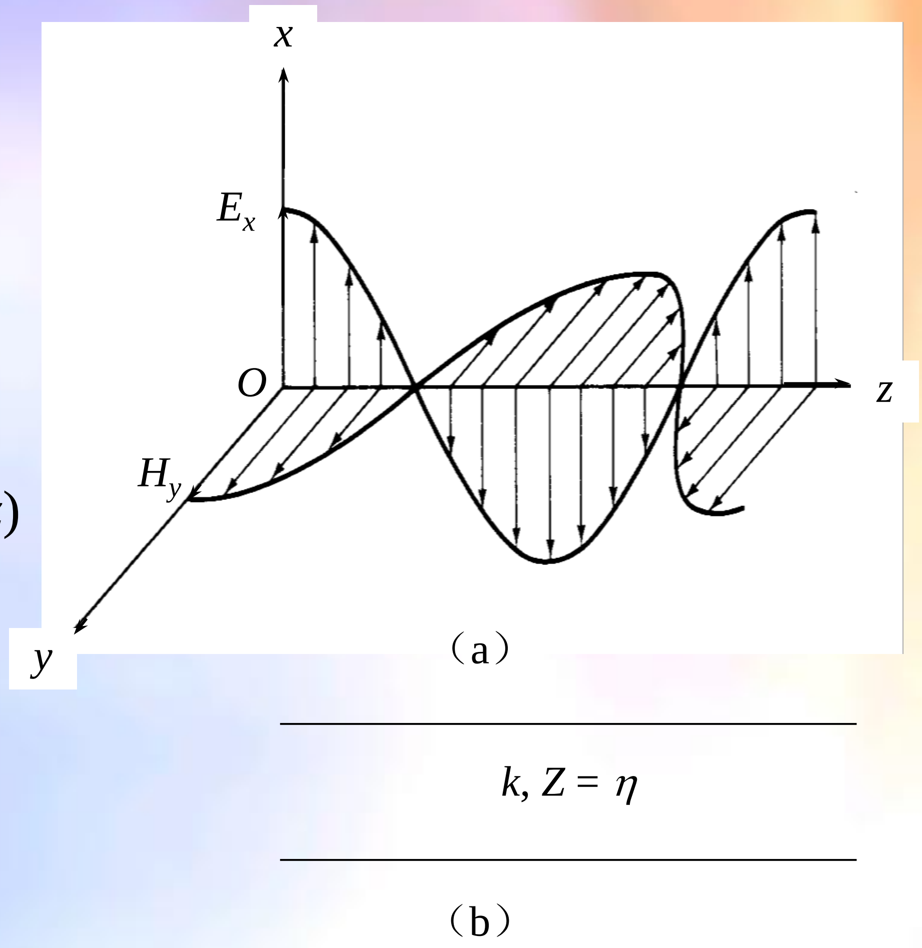
$$E_x=\varphi U\left(z\right)$$

$$H_y=\varphi I\left(z\right)$$

式中 $$U\left(z\right)=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$I\left(z\right)=\frac{E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}{\eta}$$

$$\varphi=1$$




（a）TEM模场 （b）等效传输线

# TEM模传播的传输线模型

$$U(z)=E_0 e^{-jkz} \qquad I(z)=\frac{E_0 e^{-jkz}}{\eta}$$

满足传输线方程

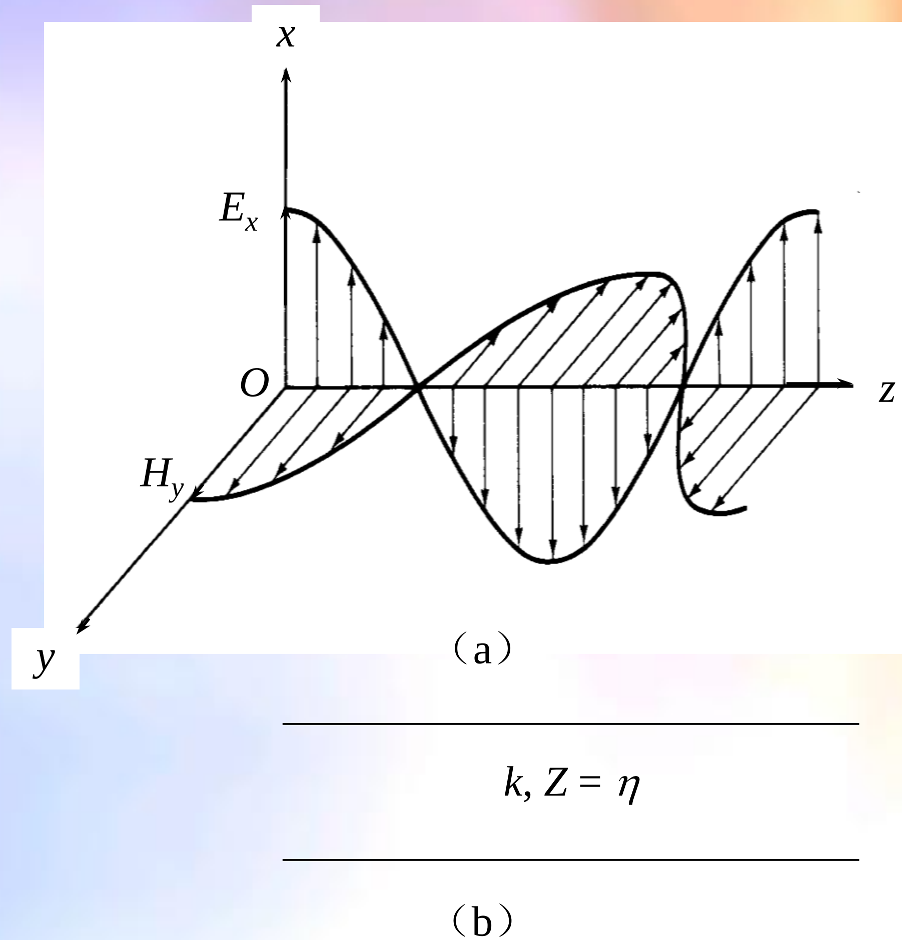
$$\frac{dU(z)}{dz}=-jkZI(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz}=-jkYU(z)$$

$$Z=\frac{1}{Y}=\eta$$

$Z$为传输线的**特征阻抗**，$Y$为**特征导纳**，
$k$为传输线的传播常数。

这就是说就平面波沿波矢$k$方向（$z$方向）的传播与特征阻抗为η，传播常数为$k$的传输线上电压、电流波的传播相当。




（a）TEM模场 （b）等效传输线

# TE模传播的传输线模型



坐标系的选择使得波矢$\boldsymbol{k}$只有$k_x$、$k_z$两个分量，

$$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_z\boldsymbol{z}_0,\quad k_y=0$$

电场与$\boldsymbol{k}$垂直，只有$y$分量$E_y$。

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_x x+k_z z$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{y}_0E_y=-\boldsymbol{y}_0E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$$

$$E_y=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$$

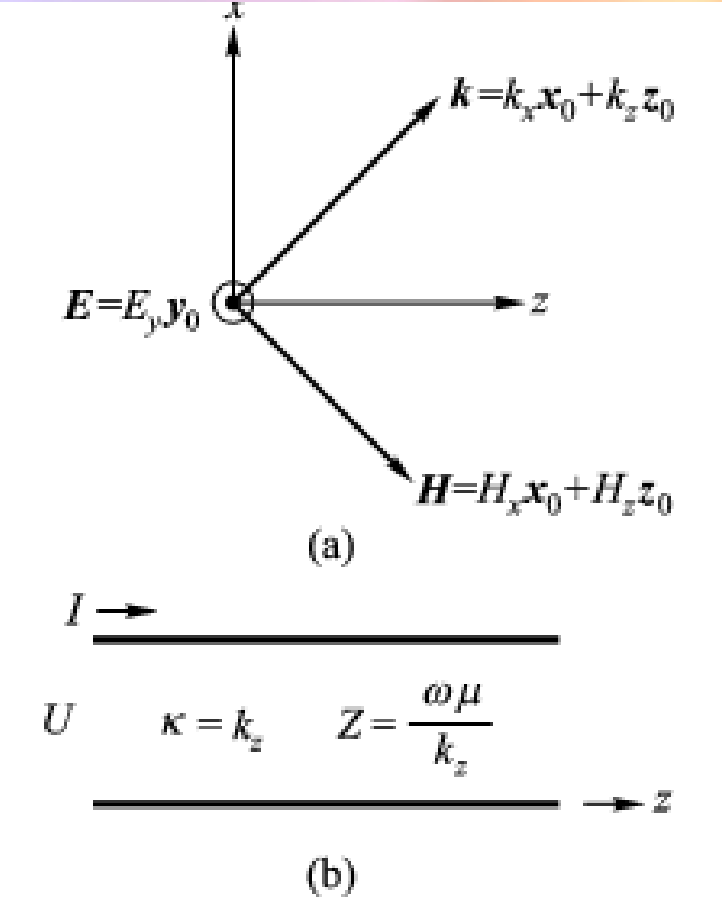
利用旋度方程

$$-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{y}_0E_y=\boldsymbol{z}_0\frac{\partial E_y}{\partial x}-\boldsymbol{x}_0\frac{\partial E_y}{\partial z}$$

得到 $\boldsymbol{H}=H_x\boldsymbol{x}_0+H_z\boldsymbol{z}_0$

$$H_x=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}=\frac{k_z}{\omega\mu}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$$

$$H_z=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{k_x}{\omega\mu}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$$

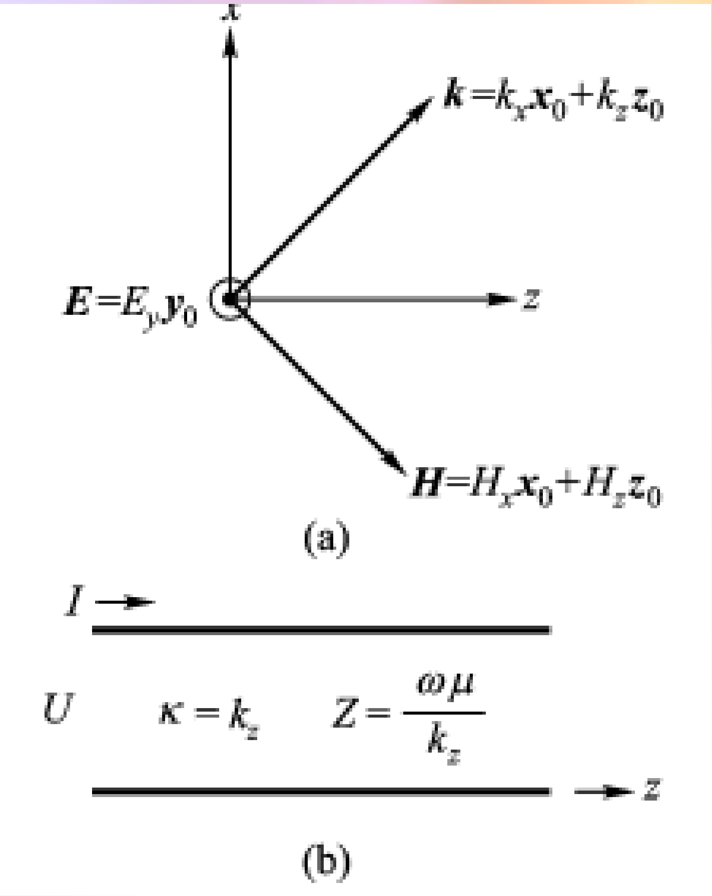


# TE模传播的传输线模型



定义
$$E_y = -E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = -\varphi(x) U(z)$$
$$H_x = \frac{k_z}{\omega\mu} E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) I(z)$$

式中
$$U(z) = E_0 e^{-jk_z z} \qquad I(z) = \frac{k_z}{\omega\mu} E_0 e^{-jk_z z}$$
$$\varphi(x) = e^{-jk_x x}$$




那么$U(z)$、$I(z)$也满足传输线方程

$$\frac{dU(z)}{dz} = -jkZI(z)$$
$$\frac{dI(z)}{dz} = -jkYU(z)$$
$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{\omega\mu}{k_z}$$

$\varphi(x)$表示场在$x$方向的分布，$U(z)$、$I(z)$表示场$E_y$、$H_x$沿纵向$z$的分布，满足传输线方程，传输线的传播常数等于$k_z$，特征阻抗 $Z = \omega\mu / k_z$ 。

# TM模传播的传输线模型

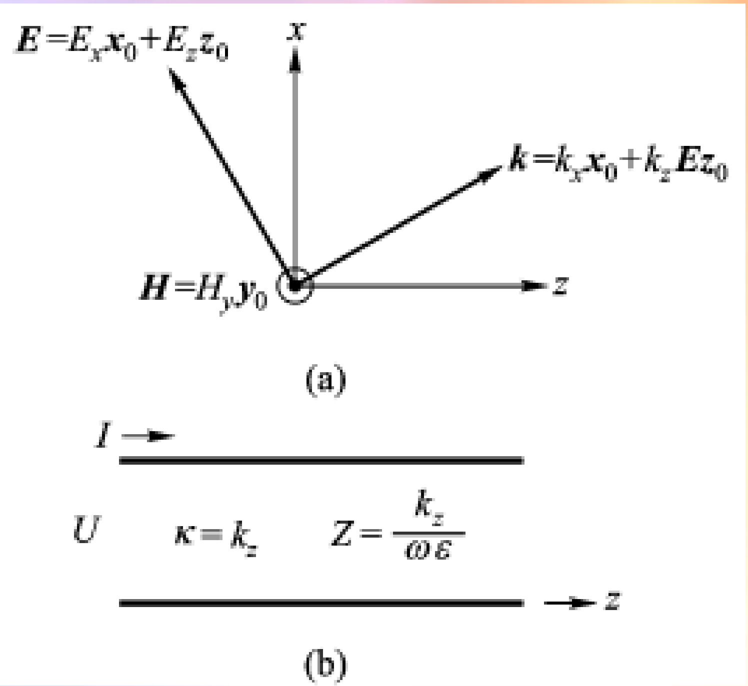


如果定义$H_y = H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) I(z)$

$$E_x = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) U(z)$$

$$U(z) = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} H_0 e^{-jk_z z} \qquad I(z) = H_0 e^{-jk_z z}$$

$$\varphi(x) = e^{-jk_x x}$$




那么U(z)、$I$(z)也满足传输线方程

$$\frac{dU(z)}{dz} = -jkZI(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -jkYU(z)$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon}$$

模式函数$\varphi(x)$表示场在$x$方向变化，$U(z)$、$I(z)$表示场沿纵向的变化, 满足传输线方程，传输线的传播常数等于$k_z$，特征阻抗 $Z = k_z / \omega\varepsilon$。

# 电磁波可分解为TE与TM两种模式的线性组合

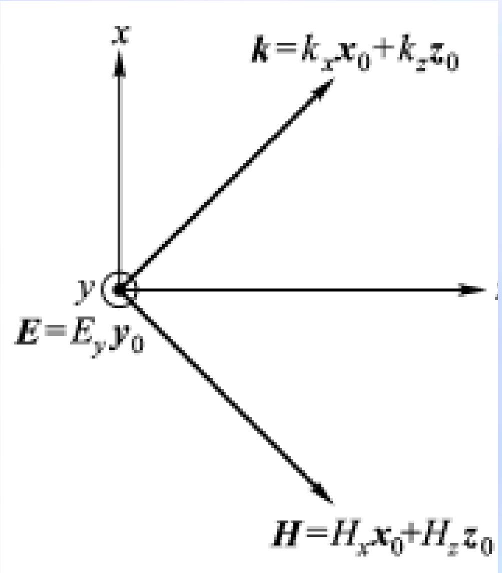


TE模

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})$$

$$E'_z = 0$$

$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) + H'_z \boldsymbol{z}_0$$

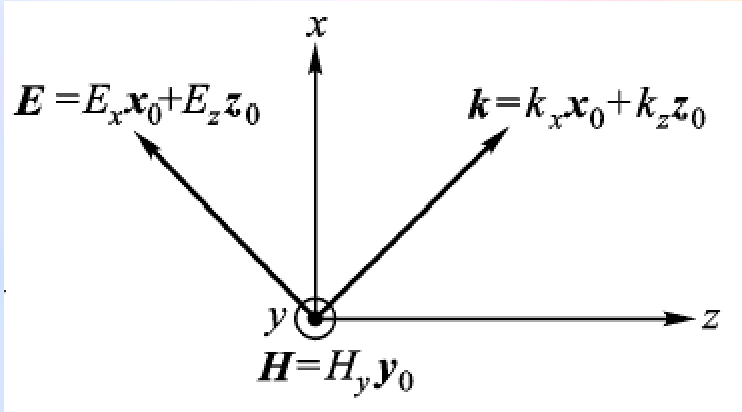



TM模

$$\boldsymbol{E}''(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}''_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) + E''_z(\boldsymbol{r})\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{H}''(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}''_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})$$

$$H''_z(\mathbf{r}) = 0$$



# 电磁波传播的传输线模型的条件与结论



1. 条件

(1)将场分解为TE模、TM模，并将场量分解为横向场量与纵向场量。

TE

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) \\ E'_z = 0 \\ \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) + H'_z \mathbf{z}_0 \end{cases}$$

TM

$$\begin{cases} \mathbf{E}''(\mathbf{r}) = \mathbf{E}''_{\mathrm{t}}(\mathbf{r}) + E''_z(\mathbf{r})\mathbf{z}_0 \\ \mathbf{H}''(\mathbf{r}) = \mathbf{H}''_{\mathrm{t}}(\mathbf{r}) \\ H''_z(\boldsymbol{r}) = 0 \end{cases}$$

(2)将横向场量$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}$再分解成模式函数$\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{h}$与其幅值$U(z)$、$I(z)$的乘积。

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z) \\ \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E}''_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}''(\boldsymbol{\rho})U''(z)$$

$$\boldsymbol{H}''_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{h}''(\boldsymbol{\rho})I''(z)$$

2. 主要结论

$U(z)$、$I(z)$就满足传输线方程。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Z' I'(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}I'(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Y' U'(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U''(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Z'' I''(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}I''(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Y'' U''(z) \end{cases}$$

$$Z' = \frac{1}{Y'} = \frac{\omega\mu}{k_z}$$

$$Z'' = \frac{1}{Y''} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon}$$

$$\left(\nabla_{\mathrm{t}}^2 + k_{\mathrm{t}}^2\right)\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) = 0$$

$$\left(\nabla_{\mathrm{t}}^2 + k_{\mathrm{t}}^2\right)\boldsymbol{h}''(\boldsymbol{\rho}) = 0$$

$$k_{\mathrm{t}}^2 = k^2 - k_z^2$$

$$k_{\mathrm{t}}^2 = k^2 - k_z^2$$

# TE模的传输线模型



将TE模场量表示成横向场量与纵向场量的组合

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})\\ E'_z=0\\ \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})+H'_z\boldsymbol{z}_0\end{cases}$$

横向场量分解为模式函数与模式函数幅值的乘积

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\\ \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z)\end{cases}$$

关键是求模式函数$\boldsymbol{e}'(\rho)$、$\boldsymbol{h}'(\rho)$与其幅值$U'(z)$、$I'(z)$

定义横向算符 $\nabla=\nabla_{\mathrm{t}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$ $\quad\nabla_{\mathrm{t}}=\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0$ $\quad\nabla^2=\nabla_{\mathrm{t}}^2+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

由 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$ 得到 $\left(\nabla_{\mathrm{t}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot E'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})=\left(\nabla_{\mathrm{t}}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot\left(\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right)=0$

进一步得到

$$\nabla_{\mathrm{t}}\cdot\left[\boldsymbol{e}'(\rho)U'(z)\right]=0$$

$$\nabla_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})=0$$

# TE模的传输线模型



将TE模场量表示成横向场量与纵向场量的组合

$$E'(\boldsymbol{r}) = E'_t(\boldsymbol{r})$$
$$E'_z = 0$$
$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}'_t(\boldsymbol{r}) + H'_z \boldsymbol{z}_0$$

横向场量分解为模式函数与模式函数幅值的乘积

$$\boldsymbol{E}'_t(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)$$
$$\boldsymbol{H}'_t(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z)$$

定义横向算符 $\nabla_t = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0$ $\quad \nabla = \nabla_t + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$

由 $\nabla \times H' = \mathrm{j}\omega\varepsilon E'$ 得到

$$\left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) \times \left(\boldsymbol{H}'_t + H_z \boldsymbol{z}_0\right) = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E}' = \mathrm{j}\omega\varepsilon\left(\boldsymbol{E}'_t + E'_z \boldsymbol{z}_0\right)$$

进一步得到 $\nabla_t \times \boldsymbol{H}'_t = \mathrm{j}\omega\varepsilon E'_z = 0$

$$\nabla_t \times \left[\boldsymbol{h}'(\rho) I'(z)\right] = 0$$
$$\nabla_t \times h'(\boldsymbol{\rho}) = 0$$

# TE模的传输线模型



$$E'(r)=E'_t(r)$$
$$E'_z=0$$
$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}'_t(\boldsymbol{r})+H'_z\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{E}'_t(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)$$
$$\boldsymbol{H}'_t(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z)$$

$$\nabla=\nabla_t+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

波方程 $\left(\nabla^2+k^2\right)\boldsymbol{E}=0$

$$\nabla_t^2\left[\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right]+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right]+k^2\left[\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right]=0$$

等式两边用$\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)$去除，得到 $$\frac{\nabla_t^2\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})}{\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})}+\frac{\dfrac{\partial^2U'(z)}{\partial z^2}}{U'(z)}+k^2=0$$

令 $$\frac{\partial^2U'(z)}{\partial z^2}\Big/U'(z)=-k_z^2 \qquad k_t^2=k^2-k_z^2$$

可得 $$\left(\nabla_t^2+k_t^2\right)\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U'(z)}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2U'(z)=0$$

# TE模的传输线模型



$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) \quad E'_{z}=0 \quad \boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z) \quad \nabla=\nabla_{\mathrm{t}}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})+H'_{z}\boldsymbol{z}_0 \quad \boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z)$$

$$\left(\nabla_{\mathrm{t}}^2+k_{\mathrm{t}}^2\right)\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})=0 \qquad k_{\mathrm{t}}^2=k^2-k_z^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U'(z)}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2U'(z)=0 \qquad \left(\nabla_{\mathrm{t}}^2+k_{\mathrm{t}}^2\right)\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})=0$$

二阶微分方程可用两个耦合的一阶微分方程表示

$$\frac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_zZ'I'(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}I'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_zY'U'(z)$$

式中 $Z'=1/Y'$

关键是$Z'$或$Y'$到底是什么？怎么求?

# TE模的传输线模型



利用旋度方程 $\dfrac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_z Z'I'(z)$ (1) $\dfrac{\mathrm{d}I'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_z Y'U'(z)$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}'=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}' \rightarrow \left(\nabla_\mathrm{t}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\times\boldsymbol{E}'_\mathrm{t}=-\mathrm{j}\omega\mu\left(\boldsymbol{H}'_\mathrm{t}+H'_z\boldsymbol{z}_0\right)$$

由横向分量相等，可得

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{E}'_\mathrm{t}\right)=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}'_\mathrm{t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left[\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right]=-\mathrm{j}\omega\mu\left[\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z)\right]$$

引入归一化条件 $\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})\times\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})=\boldsymbol{z}_0$

因此得到 $\dfrac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}\omega\mu I'(z)$

并改写成 $\dfrac{\mathrm{d}U'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_z\dfrac{\omega\mu}{k_z}I'(z)$ (2)

式(2)与式(1)相比 $Z'=\dfrac{1}{Y'}=\dfrac{\omega\mu}{k_z}$

# TE模的传输线模型



时间平均纵向坡印廷功率流

$$
\begin{aligned}
P'_z &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}'^*\right)\cdot\boldsymbol{z}_0\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{E}'_t\times\boldsymbol{H}'^*_t\right)\cdot\boldsymbol{z}_0\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left[\left(\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})U'(z)\right)\times\left(\boldsymbol{h}'^*(\boldsymbol{\rho})I'^*(z)\right)\right]\cdot\boldsymbol{z}_0\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{U'(z)I'^*(z)\left[\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})\times\boldsymbol{h}'^*(\boldsymbol{\rho})\right]\cdot\boldsymbol{z}_0\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[U'(z)I'^*(z)\right]
\end{aligned}
$$

传输线传送的功率$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[U'(z)I'^*(z)\right]$

正好等于坡印廷功率流的纵向（$z$方向）分量，也就是$z$方向的坡印廷功率流。

# 电磁波传播传输线模型



| TE 模 | TM 模 |
| --- | --- |
| $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}$ | $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}''_{\mathrm{t}}+E''_{z}\boldsymbol{z}_0$ |
| $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}+H'_{z}\boldsymbol{z}_0$ | $\mathrm{H}=\mathrm{H}''_{\mathrm{t}}$ |
| $\boldsymbol{E}'_{z}=0$ | $H''_{z}=0$ |
| $\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{e}'(\rho)U'(\mathrm{z})$ | $\boldsymbol{E}''_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{e}''(\rho)U''(\mathrm{z})$ |
| $\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{h}'(\rho)I'(\mathrm{z})$ | $\boldsymbol{H}''_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{h}''(\rho)I''(\mathrm{z})$ |
| $\nabla_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{e}'=0$ | $\nabla_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{h}''=0$ |
| $\nabla_{\mathrm{t}}\times\boldsymbol{h}'=0$ | $\nabla_{\mathrm{t}}\times\boldsymbol{e}''=0$ |
| $(\nabla_{\mathrm{t}}^2+k_{\mathrm{t}}^2)\boldsymbol{e}'=0$ | $(\nabla_{\mathrm{t}}^2+k_{\mathrm{t}}^2)\boldsymbol{h}''=0$ |
| $k_{\mathrm{t}}^2=k^2-k_z^2$ | $k_{\mathrm{t}}^2=k^2-k_z^2$ |
| $\boldsymbol{h}'=\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{e}'$ | $\boldsymbol{e}''=-\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{h}''$ |
| $\dfrac{\mathrm{d}U'(\mathrm{z})}{\mathrm{dz}}=-\mathrm{j}k'_{z}Z'I'(\mathrm{z})$ | $\dfrac{\mathrm{d}U''(z)}{\mathrm{dz}}=-\mathrm{j}k''_{z}Z''I''(\mathrm{z})$ |
| $\dfrac{\mathrm{d}I'(\mathrm{z})}{\mathrm{dz}}=-\mathrm{j}k'_{z}Y'U'(\mathrm{z})$ | $\dfrac{\mathrm{d}I''(z)}{\mathrm{dz}}=-\mathrm{j}k''_{z}Y''U''(\mathrm{z})$ |
| $Z'=\dfrac{1}{Y'}=\dfrac{\omega\mu}{k'_{z}}$ | $Z''=\dfrac{1}{Y''}=\dfrac{k''_{z}}{\omega\varepsilon}$ |

而时间平均纵向坡印廷功率流

$$P'_{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}'^{*}\right)\cdot\boldsymbol{z}_0\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[U'(z)I'^{*}(z)\right]$$

# 从解方程角度看传输线模型的优点



由主教材表 4-1 可见，电磁场用 TE 及 TM 两种模式的场叠加表示后，本来要解耦合的三维波方程简化为解二维的波方程

$$(\nabla^2 + k_\mathrm{t}^2)\begin{cases} \boldsymbol{e}' = 0 & \text{TE模} \\ \boldsymbol{h}'' = 0 & \text{TM模} \end{cases}$$

以及耦合的一维传输线方程

$$\frac{\mathrm{d}U(\mathrm{z})}{\mathrm{dz}} = -\mathrm{j}k_z ZI(\mathrm{z})$$

$$\frac{\mathrm{d}I(\mathrm{z})}{\mathrm{dz}} = -\mathrm{j}k_z YU(\mathrm{z})$$

$$k_\mathrm{z}^2 = k^2 - k_\mathrm{t}^2$$

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{Y} \begin{cases} \omega\mu / k_\mathrm{z} & \text{TE模} \\ k_\mathrm{z}/\omega\varepsilon & \text{TM模} \end{cases}$$

二维特征波方程中的本征值 $k_t$ 也称为横向传播常数，由具体波导的横向边界条件确定。与本征值 $k_t$ 相应的本征函数 e、h 通常称为模式函数。模式函数只与横向坐标有关，表示场在横截面的分布。模式函数的幅值 $U(z)$、$I(z)$ 满足传输线方程。

# 电磁波传播的传输线模型的物理意义



电磁波传播的传输线模型的物理意义:
首先把电磁场按TE、TM模式分解，再将横向场量表示成模式函数与其幅值的乘积。模式函数***e***、***h***只是横向坐标的函数，表示场在横截面分布，由二维波方程描述。

模式函数的幅值$U(z)$、$I(z)$只与纵向坐标有关，并满足传输线方程。传输线的传播常数等于波的纵向传播常数，传输线传送的功率等于波的纵向功率流。波的一个传播模式与一个特定参数（$k_z$、$Z$）的传输线等效。如果存在无限多个模式，就要用无限多对传输线等效。

当波用传输线等效时，按TE、TM模分解后横向场量$\boldsymbol{E}_t$、$\boldsymbol{H}_t$分离为模式函数与其幅值的乘积，只是其幅值沿纵向的变化规律与一特定参数传输线上电压、电流的变化规律相当。

波传播的传输线模型不反映电磁场在横截面内的分布情况。横截面内场分布要通过解模式函数***e***、***h***满足的二维波方程得到。

需要指出的是，纵向、横向是相对而言的，究竟哪一个方向选为纵向，要视具体问题而定。研究不均匀问题时，通常选择不均匀方向为纵向。

# 卢瑟福与卡文迪实验室

**Maxwell建立了Maxwell方程组，并对传输线理论也有重要的贡献。**

**Maxwell另外的贡献是建立了卡文迪实验室。后来经过很多实验室主任的努力，特别是卢瑟福（1919-1937）的杰出贡献，成为世界上最著名的实验室（没有之一）。**

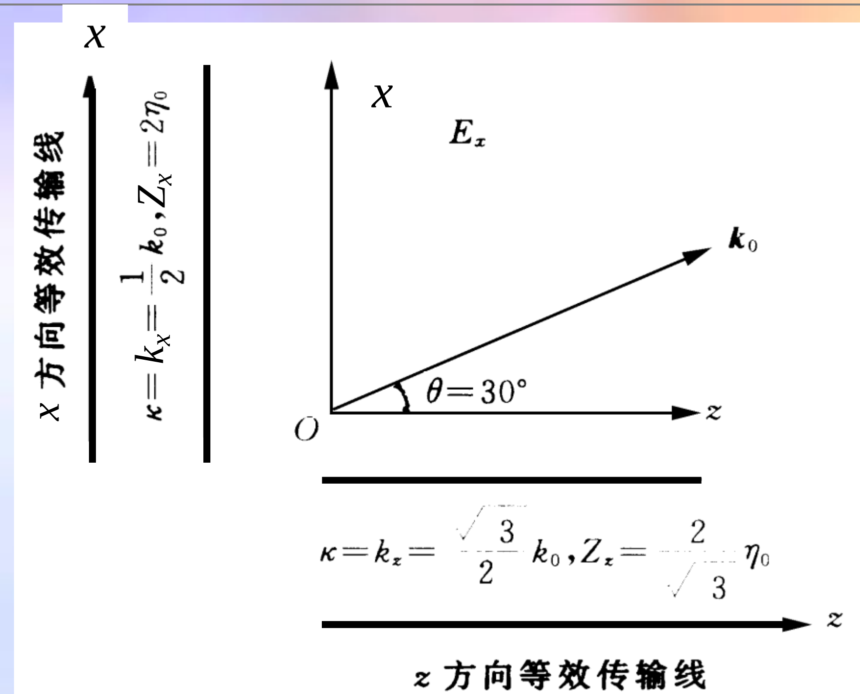
**卢瑟福有三大弟子，严厉且与人为善，把学生看成自己的孩子。不因种族、国家的不同 而又偏见，具有大海般的胸怀。堪称所有研究生生导师的楷模。**

卡文迪实验室是Nobel奖得主的摇篮，至今有23位Nobel奖得主（也许更多）。

卡文迪实验室是剑桥大学的一颗明珠，也是剑桥大学国际排名始终在国际前列贡献最大的实验室。

# 自由空间*TE*平面波沿z方向、x方向传播的传输线模型

【例4-11】自由空间*TE*平面波波矢$\mathbf{k}_0$在$x\neq z$平面内，与z轴夹角$\theta=30°$，给出波在z方向、x方向传播的等效传输线模型。




解：对于x方向波传播的等效传输线，传播常数

$$\kappa=k_x=k_0\sin 30^\circ=\frac{k_0}{2}$$

特征阻抗

$$Z_x=\frac{\omega\mu}{k_x}=\frac{\omega\mu}{k_0/2}=2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=2\eta_0$$

对于z方向波传播的等效传输线：

传播常数 $$\kappa=k_z=k_0\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}k_0$$

特征阻抗 $$Z_z=\frac{\omega\mu}{k_z}=\frac{\omega\mu}{\frac{\sqrt{3}}{2}k_0}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\eta_0$$

# TE模、TM模同时存在时的阻抗矩阵



纵向坡印廷功率流$P_z$, 只与横向电场与横向磁场有关，横向电场与横向磁场之比Z具有阻抗量纲，这个物理量在工程应用中很重要。

在特定坐标系下，如波矢**k**只有*x*、*z*两个分量，$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$ ， 阻抗Z是标量。

$$Z=\frac{1}{Y}\begin{cases}\omega\mu/k_z & \text{TE模}\\ \mathrm{k_z}/\omega\varepsilon & \text{TM模}\end{cases}$$

一般情况下，**k**有三个分量，TE、TM模同时存在，横向电场与横向磁场之比要用矩阵$[Z]$表示。

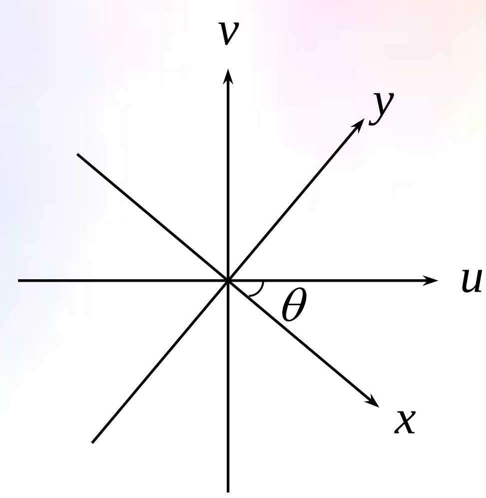
$$\begin{bmatrix}E_y\\E_x\end{bmatrix}=\boldsymbol{Z}\begin{bmatrix}-H_x\\H_y\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Z}$是2×2矩阵

求阻抗矩阵$[Z]$的思路:

(1)在**k**只有两个分量，即 $\boldsymbol{k}=k_u\boldsymbol{u}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$ 的所谓本征坐标系（*u*，v，*z*）中得到表示横向场量之比的TE、TM模的阻抗 $Z_{TE}$，$Z_{TM}$ 。

(2)利用本征坐标系（*u*，v，*z*）与结构坐标系(*x*,*y*,*z*)的变换关系得到(*x*,*y*,*z*)坐标系中的阻抗矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 。




坐标（*u*, *v*）与（*x*, *y*）变换关系

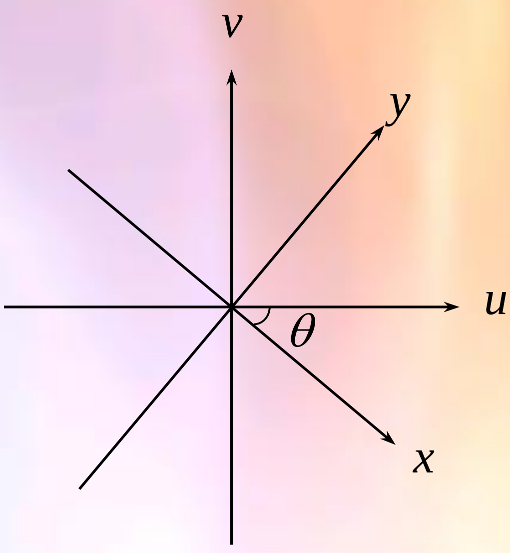
# TE模、TM模同时存在时的阻抗矩阵



在本征坐标系（$u$，$v$，$z$）下，如波矢$\boldsymbol{k}$只有$u$、$z$两个分量，$\boldsymbol{k}=k_u\boldsymbol{u}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$，阻抗Z是标量

$$\frac{E'_v}{-H'_u}=Z_{\mathrm{TE}}=\frac{\omega\mu}{k_z}\qquad\text{(对于TE模)}$$

$$\frac{E''_u}{H''_v}=Z_{\mathrm{TM}}=\frac{k_z}{\omega\varepsilon}\qquad\text{(对于TM模)}$$




坐标（$u$，$v$）与（$x$，$y$）变换关系

坐标（$u$, $v$）与（$x$, $y$）的变换关系

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\qquad T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

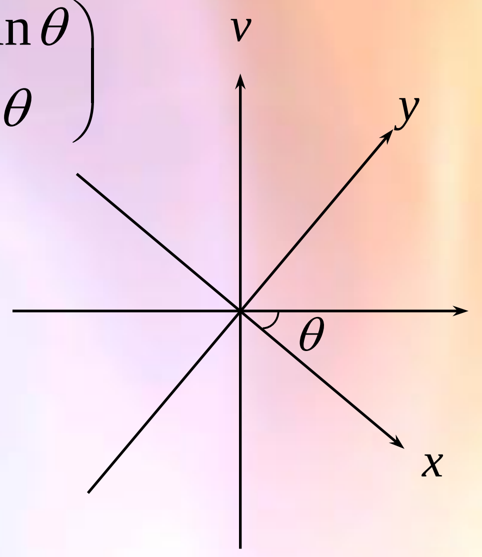
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=T^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\qquad T^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

进一步得到场量变换关系

$$\begin{pmatrix}E_y\\E_x\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}E'_v\\E''_u\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-H'_u\\H''_v\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}-H_x\\H_y\end{pmatrix}$$

# TE模、TM模同时存在时的阻抗矩阵

$$\begin{pmatrix} E_y \\ E_x \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E'_{\mathrm{v}} \\ E''_u \end{pmatrix} (1) \quad \begin{pmatrix} -H'_u \\ H''_{\mathrm{v}} \end{pmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} -H_x \\ H_y \end{pmatrix} (2) \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$




坐标（$u, v$）与（$x, y$）变换关系

变换矩阵元$\cos\theta$、$\sin\theta$可用$k_x, k_y, k_u$表示

$$\cos\theta = \frac{k_x}{k_u} \qquad \sin\theta = \frac{k_y}{k_u}$$

当TE、TM模同时存在时,$[Z_{\mathrm{TE}}$、$Z_{\mathrm{TM}}]$可合并写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} E'_v \\ E''_u \end{pmatrix} = \frac{\omega\mu}{k_z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_z^2}{k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H'_u \\ H''_v \end{pmatrix}$$

将式（1）、式（2）代入，得到

$$\begin{pmatrix} E_y \\ E_x \end{pmatrix} = \boldsymbol{Z} \begin{pmatrix} -H_x \\ H_y \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\omega\mu}{k_z} \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{k_y^2}{k^2} & -\dfrac{k_x k_y}{k^2} \\ -\dfrac{k_x k_y}{k^2} & 1 - \dfrac{k_x^2}{k^2} \end{pmatrix}$$

# 第14讲复习



## 复习要点

– 电磁波的传播可用传输线上电压、电流波的传播等效，这就是所谓波传播的传输线模型。传输线模型的要点是，首先将场分解成TE与TM两种模式，再将场量分解为横向场量（$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}$）与纵向场量（$\boldsymbol{E}_z$、$\boldsymbol{H}_z$），进一步又将横向场量分解为模函数与其幅值乘积，即

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\rho})U(z), \quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\rho})I(z)$$

模式函数的幅值$U(z)$、$I(z)$满足传输线方程，其传播常数等于纵向传播常数$k_z$，特征阻抗 $Z_{\mathrm{c}} = \omega\mu/k_z$（对于TE模） 或 $Z_{\mathrm{c}} = k_z/\omega\varepsilon$（对于TM模），传输线传送功率等于波的纵向功率流$p_z$。电磁波传播的传输线模型将使我们可以利用成熟的传输线理论来处理复杂的场问题。

## 复习范围

4.9