Lect 02 逻辑化简

刘 鹏

浙江大学信息与电子工程学院

https://person.zju.edu.cn/liupeng

复习

- 逻辑公式和表达
  - **公式法**

本节内容

- **公式法化简**
- **卡诺图化简**

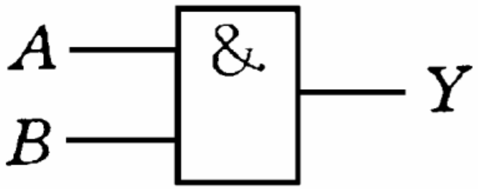
与-AND

复习

- 条件同时具备，结果发生
- $Y = A \text{ AND } B = A\&B = A \cdot B = AB$
- 真值表/truth table　　　　图形符号

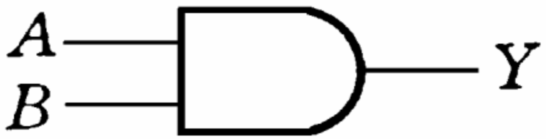
A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

国标



与

国际



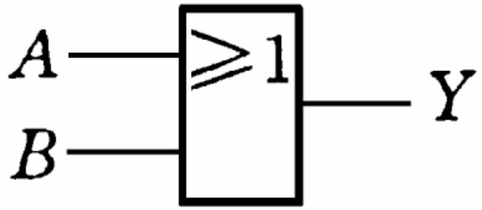
或-OR

复习

- 条件之一具备，结果发生
- $Y = A$ OR $B = A + B$
- 真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

图形符号



或

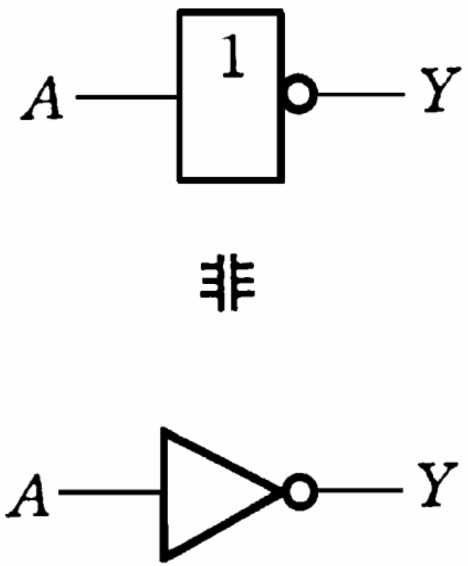
非-NOT(反相器)

复习

- 条件不具备，结果发生
- $Y = A' = NOT \quad A$
- 真值表

A	Y
0	1
1	0

图形符号

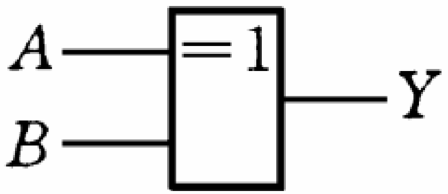


常用的复合逻辑运算异或

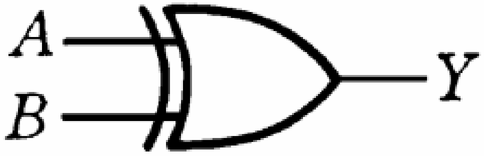
复习

- 异或-EXCLUSIVE OR
- $Y = A \oplus B$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



异或



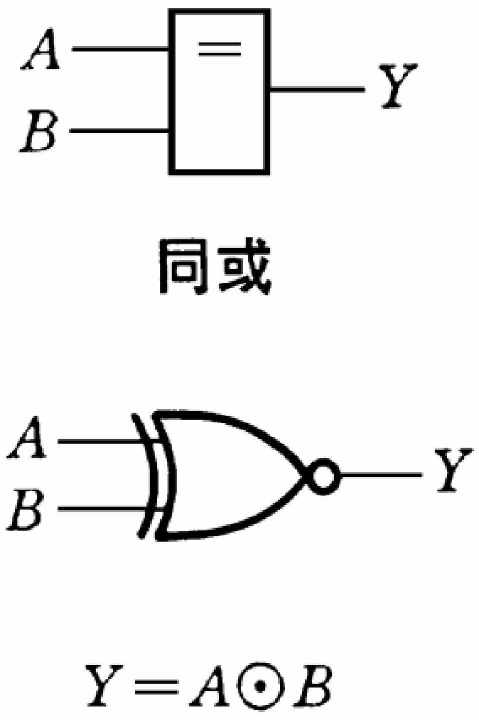
$Y = A \oplus B$

常用的复合逻辑运算同或

复习

- 同或-EXCLUSIVE NOR
- $Y = A \odot B$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



基本公式

证明方法：推演 真值表

复习

- 根据与、或、非的定义，得布尔恒等式

序号	公 式	序号	公 式
		10	$1' = 0;\ 0' = 1$
1	$0\,A = 0$	11	$1 + A = 1$
2	$1\,A = A$	12	$0 + A = A$
3	$A\,A = A$	13	$A + A = A$
4	$A\,A' = 0$	14	$A + A' = 1$
5	$A\,B = B\,A$	15	$A + B = B + A$
6	$A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$	16	$A + (B + C) = (A + B) + C$
7	$A\,(B + C) = A\,B + A\,C$	17	$A + B\,C = (A + B)(A + C)$
8	$(A\,B)' = A' + B'$	18	$(A + B)' = A'B'$
9	$(A')' = A$		

若干常用公式

复习

序　　号	公　　　　式
21	$A + AB = A$
22	$A + A'B = A + B$
23	$AB + AB' = A$
24	$A(A + B) = A$
25	$AB + A'C + BC = AB + A'C$ $AB + A'C + BCD = AB + A'C$
26	$A(AB)' = AB'$; $A'(AB)' = A'$

逻辑代数的基本定理

❑ 代入定理

-------在任何一个包含**A**的逻辑等式中，若以另外一个逻辑式代入式中**A**的位置，则等式依然成立

代入定理1

- 应用举例：

式（17） $A+BC = (A+B)(A+C)$

$$A+B(CD) = (A+B)(A+CD)$$
$$= (A+B)(A+C)(A+D)$$

代入定理2

- 应用举例：

  式（8）

$$(A\cdot B)'=A'+B'$$

以$B\cdot C$代入B

$$\Downarrow$$

$$(A\cdot B\cdot C)'=A'+(BC)'$$

$$A'+B'+C'$$

逻辑代数的基本定理-2

- **反演定理** $Y \Rightarrow Y'$

--------对任一逻辑式

变换顺序先括号，
然后乘，最后加

$\bullet \Rightarrow +,\ \ + \Rightarrow \bullet,\ \ 0 \Rightarrow 1,\ \ 1 \Rightarrow 0,$

原变量 $\Rightarrow$ 反变量

反变量 $\Rightarrow$ 原变量

不属于单个变量的
上的反号保留不变

反演定理

- 应用举例:

$$Y = A(B+C)+CD$$

$$Y' = (A'+B'C')(C'+D')$$

$$= A'C'+B'C'+A'D'+\cancel{B'C'D'}$$

逻辑函数及其表示方法

- 逻辑函数Logic function

- Y=F(*A*,*B*,*C*,……)

  -------若以逻辑变量为输入，运算结果为输出，则输入变量值确定以后，输出的取值也随之而定。输入/输出之间是一种函数关系

注：在二值逻辑中，输入/输出都只有两种取值0/1

逻辑函数的表示方法

- 真值表
- 逻辑式
- 逻辑图logic diagram
- 波形图waveform/timing diagram
- 卡诺图
- 计算机软件中的描述方式-Verilog HDL/VHDL

各种表示方法之间可以相互转换

逻辑真值表

输入变量 $A \quad B \quad C\cdots$	输出 $Y_1 \quad Y_2\cdots$
遍历所有可能的输入变量的取值组合	输出对应的取值

- **逻辑式**

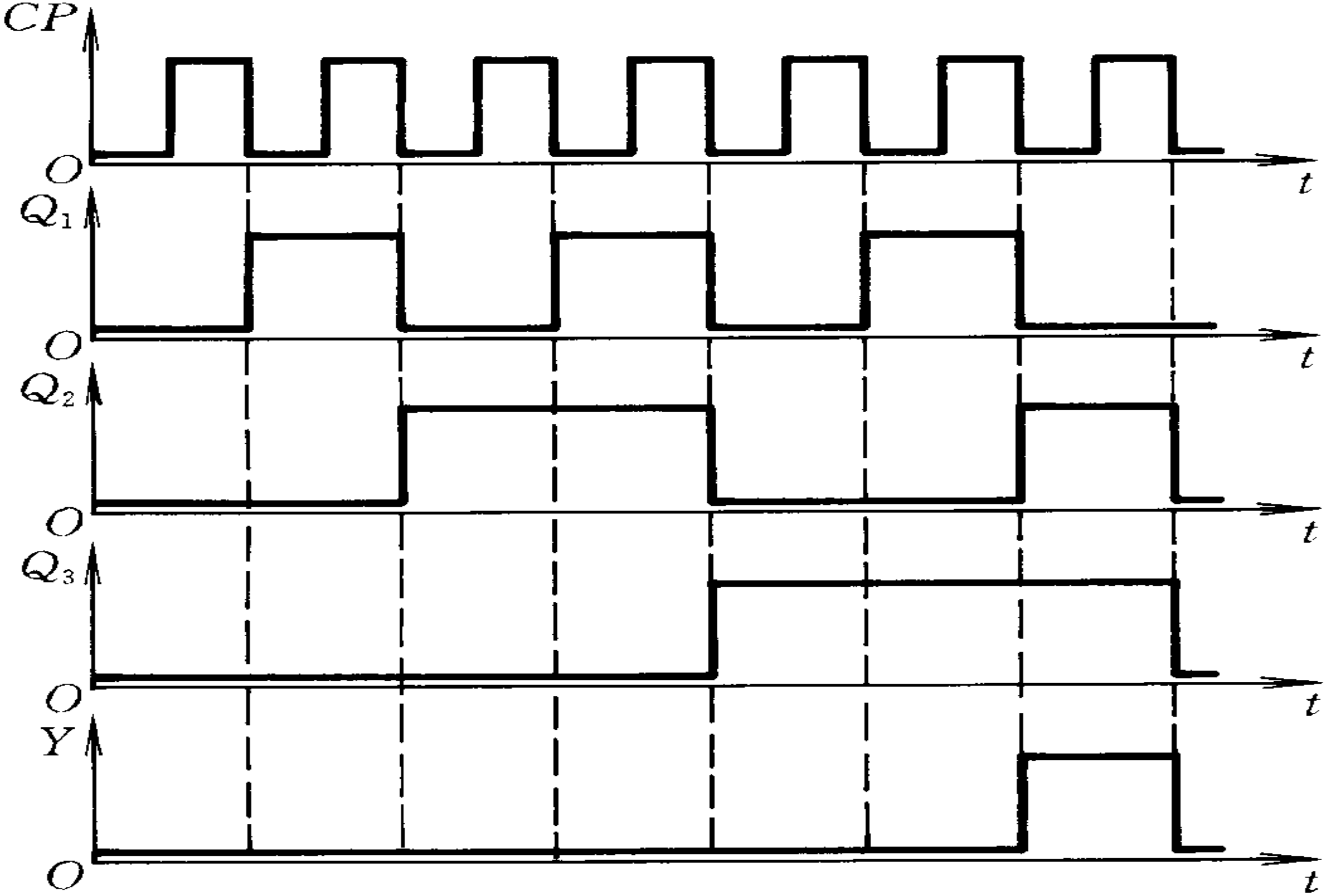
  将输入/输出之间的逻辑关系用与/或/非的运算式表示就得到逻辑式

- **逻辑图**

  用逻辑图形符号表示逻辑运算关系，与逻辑电路的实现相对应

- **波形图**

  将输入变量所有取值可能与对应输出按时间顺序排列起来画成时间波形


CP
O
t
Q1
O
t
Q2
O
t
Q3
O
t
Y
O
t

- ❑ **卡诺图**

- ❑ **EDA中的描述方式**

  HDL (Hardware Description Language)

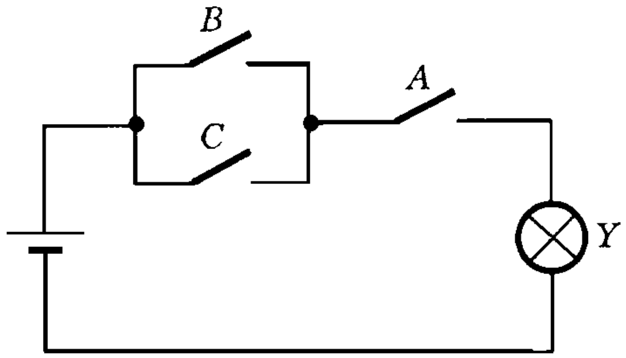
  VHDL (Very High Speed Integrated Circuit Hardware Description Language)

  Verilog HDL

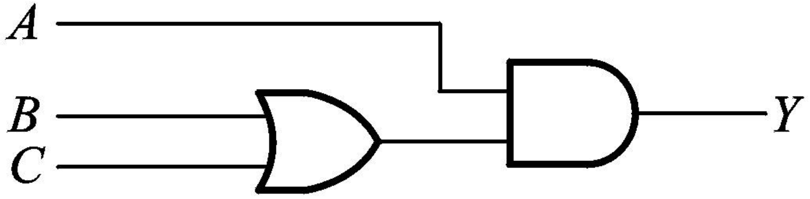
  EDIF(Electronic Design Interchange Format)

  …

举例：举重裁判电路



$$Y = A \cdot (B + C)$$



A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A:主裁判
B/C:副裁判

各种表现形式的相互转换

- 真值表 ⟺ 逻辑式

例：奇偶判别函数的真值表

- $A=0,B=1,C=1$使 $A'BC=1$
- $A=1,B=0,C=1$使 $AB'C=1$
- $A=1,B=1,C=0$使 $ABC'=1$

这三种取值的任何一种都使 $Y=1$,

所以 $Y=$ ？

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

❑ 真值表 ⟷ 逻辑式

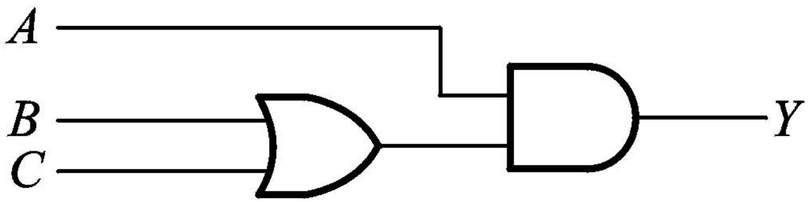
1. 找出真值表中使 Y=1 的输入变量取值组合
2. 每组输入变量取值对应一个乘积项，其中取值为1的写原变量，取值为0的写反变量
3. 将这些变量相加即得 Y

4. 把输入变量取值的所有组合逐个代入逻辑式中求出Y，列表

❑ 逻辑式 ⟷ 逻辑图

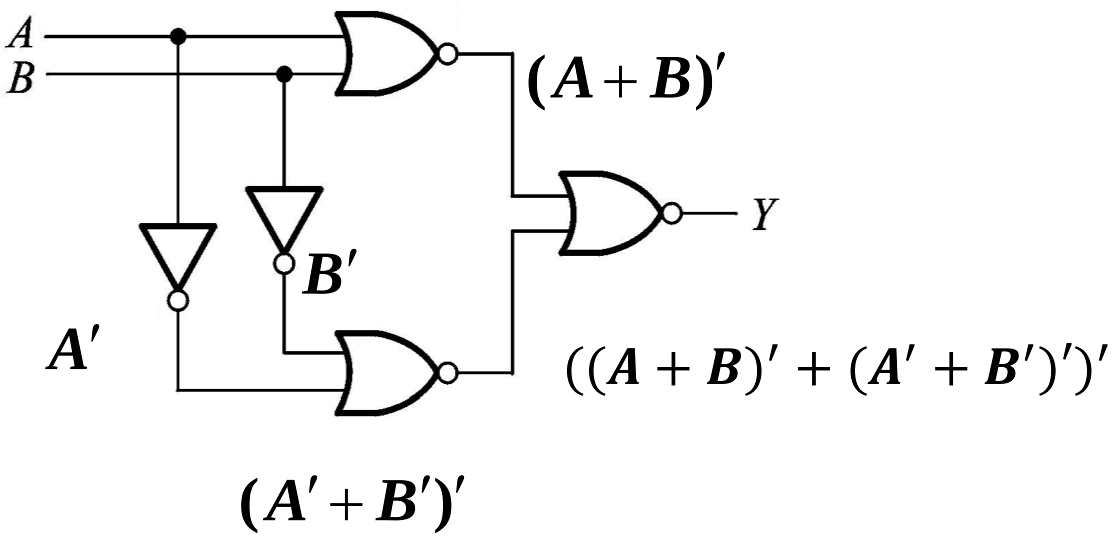
1. 用图形符号代替逻辑式中的逻辑运算符

$$Y = A \cdot (B + C)$$



❑ 逻辑式 ⟷ 逻辑图

1. 用图形符号代替逻辑式中的逻辑运算符
2. 从输入到输出逐级写出每个图形符号对应的逻辑运算式



$$
\begin{aligned}
&((A+B)'+(A'+B')')' \\
&=(A+B)(A'+B') \\
&=AB'+A'B \\
&=A\oplus B
\end{aligned}
$$

❑ 波形图 ⟷ 真值表

- 思考：怎么转换?

逻辑函数的两种标准形式

最小项之和　　　　最大项之积

最小项 *m*:

- *m*是乘积项
- 包含*n*个因子
- *n*个变量均以原变量和反变量的形式在*m*中出现一次
- 编号

对于n变量函数
有2^n个最小项

最小项的编号

最小项	取值	对应	编号
	$A\ B\ C$	十进制数	
$A'B'C'$	0 0 0	0	m_0
$A'B'C$	0 0 1	1	m_1
$A'BC'$	0 1 0	2	m_2
$A'BC$	0 1 1	3	m_3
$AB'C'$	1 0 0	4	m_4
$AB'C$	1 0 1	5	m_5
ABC'	1 1 0	6	m_6
ABC	1 1 1	7	m_7

最小项的性质

- 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最小项的值为1
- 全体最小项之和为1
- 任何两个最小项之积为0
- 两个相邻的最小项之和可以合并，消去一对因子，只留下公共因子

  -------相邻：仅一个变量不同的最小项

  如 $A'BC'$与$A'BC$

  $$A'BC' + A'BC = A'B(C' + C) = A'B$$

逻辑函数最小项之和的形式

利用公式 $A+A'=1$
可将任何一个函数化为 $\sum m_i$

- 例： $Y(A,B,C)= \ ABC'+BC$

逻辑函数最小项之和的形式

利用公式$A+A'=1$
可将任何一个函数化为 $\sum m_i$

- 例： $Y(A,B,C)= ABC'+BC$

$$= ABC'+BC(A+A')$$

$$= ABC'+ABC+A'BC$$

逻辑函数最小项之和的形式

利用公式 $A + A' = 1$
可将任何一个函数化为 $\sum m_i$

- 例：

$$
\begin{aligned}
Y(A,B,C) &= ABC' + BC \\
&= ABC' + BC(A + A') \\
&= ABC' + ABC + A'BC \\
&= \sum m(3,6,7)
\end{aligned}
$$

逻辑函数最小项之和的形式

- 例:

$$Y(A,B,C,D) = AB'C'D + BCD' + B'C$$

逻辑函数最小项之和的形式

- 例:

$$
\begin{aligned}
Y(A,B,C,D) &= AB'C'D + BCD' + B'C \\
&= AB'C'D + (A+A')BCD' + B'C(D+D')
\end{aligned}
$$

逻辑函数最小项之和的形式

- 例:

$$
\begin{aligned}
Y(A,B,C,D) &= AB'C'D + BCD' + B'C \\
&= AB'C'D + (A+A')BCD' + B'C(D+D') \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + B'CD + B'CD'
\end{aligned}
$$

逻辑函数最小项之和的形式

- 例：

$$
\begin{aligned}
Y(A,B,C,D) &= AB'C'D + BCD' + B'C \\
&= AB'C'D + (A+A')BCD' + B'C(D+D') \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + B'CD + B'CD' \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (A+A')B'CD + (A+A')B'CD'
\end{aligned}
$$

最大项

对于n变量函数
2^n个

- M是相加项
- 包含n个因子
- n个变量均以原变量和反变量的形式在M中出现一次

- 如：两变量A, B的最大项

$$A'+B',\ \ A'+B,\ \ A+B',\ \ A+B\ \ (2^2=4\text{个})$$

最大项的性质

- 在输入变量任一取值下，有且仅有一个最大项的值为0
- 全体最大项之积为0
- 任何两个最大项之和为1
- 只有一个变量不同的最大项的乘积等于各相同变量之和

最大项的编号

最大项	取值	对应	编号
	$A\ B\ C$	十进制数	
$A'+B'+C'$	1 1 1	7	M_7
$A'+B'+C$	1 1 0	6	M_6
$A'+B+C'$	1 0 1	5	M_5
$A'+B+C$	1 0 0	4	M_4
$A+B'+C'$	0 1 1	3	M_3
$A+B'+C$	0 1 0	2	M_2
$A+B+C'$	0 0 1	1	M_1
$A+B+C$	0 0 0	0	M_0

$$Y = \sum m_i$$

$$\Downarrow$$

$$Y' = \sum_{k \neq i} m_k$$

$$\Downarrow$$

$$Y = (\sum_{k \neq i} m_k)'$$

$$\Downarrow$$

$$Y = \prod_{i \neq k} m_k' = \prod_{i \neq k} M_k$$

逻辑函数的化简法

- 逻辑函数的最简形式

  最简与或

  -------包含的乘积项已经最少，每个乘积项的因子也最少，称为最简的**与-或逻辑式**

$$Y_1 = ABC + B'C + ACD$$

$$Y_2 = AC + B'C$$

公式化简法

- 反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子

例：

$$Y = AC + B'C + BD' + CD' + A(B + C') + A'BCD' + AB'DE$$

$$A((B + C')')'$$

$$= AC + B'C + BD' + CD' + A(B'C)' + AB'DE$$

公式化简法

- 反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子

例：

$$Y = AC + B'C + BD' + CD' + A(B + C') + A'BCD' + AB'DE$$

$$A((B + C')')'$$

$$= AC + B'C + BD' + CD' + A(B'C)' + AB'DE$$

$$= AC + B'C + BD' + CD' + A + AB'DE$$

公式化简法

- 反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子

例：

$$Y = AC + B'C + BD' + CD' + A(B+C') + A'BCD' + AB'DE$$

$$A((B+C')')'$$

$$= AC + B'C + BD' + CD' + A(B'C)' + AB'DE$$

$$= \boxed{AC} + B'C + BD' + CD' + \boxed{A + AB'D}E$$

$$= \boxed{A} + B'C + BD' + CD'$$

公式化简法

- 反复应用基本公式和常用公式，消去多余的乘积项和多余的因子

例：

$$Y = AC + B'C + BD' + CD' + A(B + C') + A'BCD' + AB'DE$$

$$A((B + C')')'$$

$$= AC + B'C + BD' + CD' + A(B'C)' + AB'DE$$

$$= AC + B'C + BD' + CD' + A + AB'DE$$

$$= A + B'C + BD' + CD'$$

$$= A + B'C + BD'$$

卡诺图化简法

逻辑函数的卡诺图表示法

- 实质：将逻辑函数的最小项之和以图形的方式表示出来

- 以2^n个小方块分别代表 n 变量的所有最小项，并将它们排列成矩阵，而且使**几何位置相邻**的两个最小项在**逻辑上也是相邻的**（只有一个变量不同），就得到表示n变量全部最小项的卡诺图

表示最小项的卡诺图

- 2变量卡诺图

A \ B	0	1
0	$A'B'$ m_0	$A'B$ m_1
1	AB' m_2	AB m_3

表示最小项的卡诺图

- 2变量卡诺图

A \ B	0	1
0	$A'B'$ m_0	$A'B$ m_1
1	AB' m_2	AB m_3

3变量的卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

表示最小项的卡诺图

- 2变量卡诺图

A \ B	0	1
0	$A'B'$ m_0	$A'B$ m_1
1	AB' m_2	AB m_3

3变量的卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

- 4变量的卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

表示最小项的卡诺图

- 5变量的卡诺图

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

用卡诺图表示逻辑函数

1. 将函数表示为最小项之和的形式 $\sum m_i$

2. 在卡诺图上与这些最小项对应的位置上填入1，其余地方填0

用卡诺图表示逻辑函数

例：

$$Y(A,B,C,D) = A'B'C'D + A'BD' + ACD + AB'$$

$$= A'B'C'D + (C + C')A'BD' + A(B + B')CD + AB'(C'D' + C'D + CD' + CD)$$

$$= \sum m(1,4,6,8,9,10,11,15)$$

用卡诺图表示逻辑函数

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	1
11	0	0	1	0
10	1	1	1	1

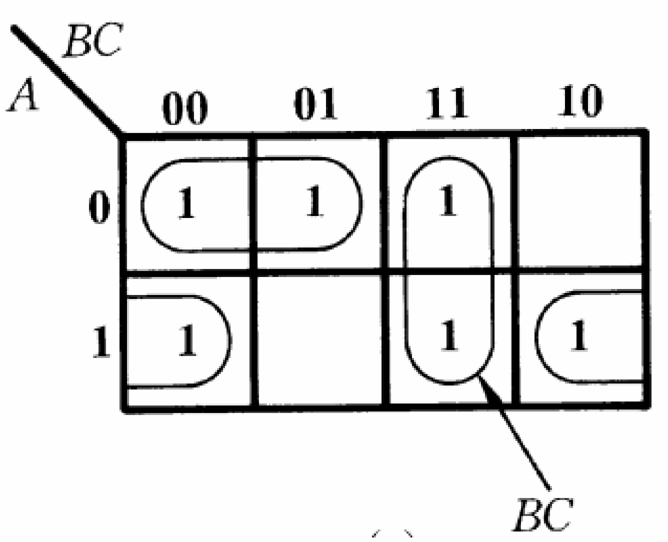
用卡诺图化简函数

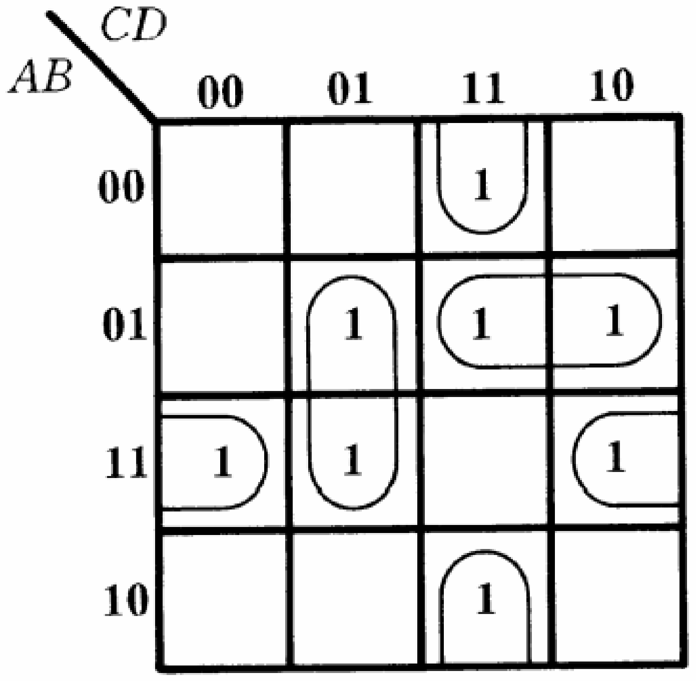
- 依据：具有相邻性的最小项可合并，消去不同因子
- 在卡诺图中，最小项的相邻性可以从图形中直观地反映出来

□合并最小项的原则

- 两个相邻最小项可合并为一项，消去一对因子
- 四个排成矩形的相邻最小项可合并为一项，消去两对因子
- 八个相邻最小项可合并为一项，消去三对因子

两个相邻最小项可合并为一项，消去一对因子





用卡诺图化简函数

- 化简步骤：

  -------用卡诺图表示逻辑函数

  -------找出可合并的最小项

  -------化简后的乘积项相加

  （项数最少，每项因子最少）

卡诺图化简的原则

- 化简后的乘积项应包含函数式的所有最小项，**即覆盖图中所有的1**
- 乘积项的数目最少，**即圈成的矩形最少**
- 每个乘积项因子最少，**即圈成的矩形最大**

例：$Y(A,B,C) = AC' + A'C + B'C + BC'$

A \ BC	00	01	1 1	1 0
0				
1				

例： $Y(A,B,C) = AC' + A'C + B'C + BC'$

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

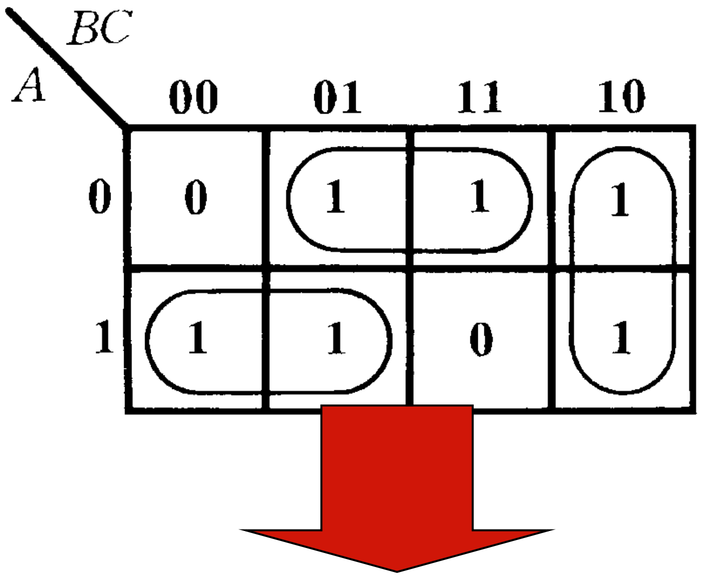
$$AB' + A'C + BC'$$

例：$Y(A,B,C) = AC' + A'C + B'C + BC'$

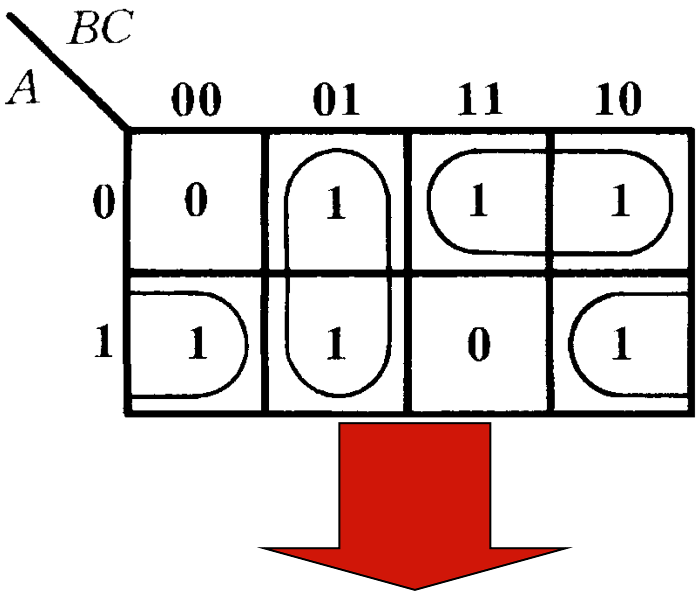
A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

$$AC' + A'B + B'C$$

例： $Y(A,B,C) = AC' + A'C + B'C + BC'$



$AB' + A'C + BC'$



$AC' + A'B + B'C$

化简结果不唯一

例：$Y = ABC + ABD + AC'D + C' \cdot D' + AB'C + A'CD'$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

例：$Y = ABC + ABD + AC'D + C' \cdot D' + AB'C + A'CD'$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$A + D'$$

具有无关项的逻辑函数及其化简

约束项、任意项和逻辑函数式中的无关项

- 约束项
- 任意项

在逻辑函数中，对输入变量取值的限制，在这些取值下为1的最小项称为约束项

在输入变量某些取值下，函数值为1或为0不影响逻辑电路的功能，在这些取值下为1的最小项称为任意项

- 逻辑函数中的无关项：约束项和任意项可以写入函数式，也可不包含在函数式中，因此统称为无关项

无关项在化简逻辑函数中的应用

- 合理地利用无关项，可得更简单的化简结果

- 加入（或去掉）无关项，应使化简后的项数最少，每项因子最少……

  从卡诺图上直观地看，加入无关项的目的是为矩形圈最大，矩形组合数最少

例： $Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C' \cdot D'$

给定约束条件为：

$A'B'CD + A'BC'D + ABC' \cdot D' + AB' \cdot C'D + ABCD + ABCD' + AB'CD' = 0$

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01			1	
11				
10	1			

例：$Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C' \cdot D'$

给定约束条件为：

$$A'B'CD+A'BC'D+ABC' \cdot D'+AB' \cdot C'D+ABCD+ABCD'+AB'CD'=0$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	x	0
01	0	x	1	0
11	x	0	x	x
10	1	x	0	x

例： $Y = A'B'C'D + A'BCD + AB'C' \cdot D'$

给定约束条件为：

$A'B'CD+A'BC'D+ABC' \cdot D'+AB' \cdot C'D+ABCD+ABCD'+AB'CD'=0$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	x	0
01	0	x	1	0
11	x	0	x	x
10	1	x	0	x

$A'D$

AD'

例： $Y(A,B,C,D)=\sum m(2,4,6,8)$

约束条项: $m_5+m_{10}+m_{11}+m_{12}+m_{13}+m_{14}+m_{15}=0$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	x	0	1
11	x	x	x	x
10	1	0	x	x

$$Y = AD' + BD' + CD'$$

作业

- 学在浙大