1. 设$\{X(t);t\geq 0\}$是正态过程，$EX(t)=0$，$EX(t)X(s)=1+ts+0.5(t+s)$，则$X(1)$服从____(5)____分布，$X(0)+X(1)$服从____(6)____分布，$X(1)$与$\mathbf{X(-1)}$独立吗？并说明理由________________。

- $\mathbf{N(0,3)}$，$\mathbf{N(0,7)}$，*是，因为它们是二元联合正态分布且协方差为***0**。

2. 设$\{X(t);t\geq 0\}$是正态过程，$EX(t)=2t, Cov(X(t),X(s))=ts+4$。则

$X(t)$服从________________分布，$X(t)-X(s)$服从________________分布。

$\mathbf{Cov}\big(\mathbf{X}(\mathbf{t}+\mathbf{1})-\mathbf{X}(\mathbf{t}),\mathbf{X}(\mathbf{s}+\mathbf{1})-\mathbf{X}(\mathbf{s})\big)=$________。令$\mathbf{Y}(\mathbf{t})=\mathbf{X}(\mathbf{t}+\mathbf{1})-\mathbf{X}(\mathbf{t})$，随机过程

$\{Y(t);t\geq 0\}$是宽平稳过程吗？为什么？________________________________。

- N（$2t,4+t^2$）　$N(2(t-s),(t-s)^2)$　　1

  是　因为$\mu_t=2$ 是常数 ,$C_X(t,t+\tau)=1$与无关。

3. 设 $X(t)=At^B$, $A\sim N(1,1)$, $P(B=1)=P(B=2)=0.5$, A 和 B 相互独立。计算

(1) 随机过程 $\{X(t);t\geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数；

(2) $P(X(2)<4)$；

(3) $P(X(1)>1,X(2)<4)$。

(1) $\mu_X(t)=\dfrac{t+t^2}{2}$

$R_X(s,t)=ts+t^2s^2$

(2) $=P(B=1)P(A<2)+P(B=2)P(A<1)=0.67$

(3) $=P(B=1)P(1<A<2)+P(B=2)P(A>1,A<1)=0.17$

4. 设 $X(t)=A\cos t+B\sin t, t\geq 0$，$(A,B)$ 服从二元正态分布，$A\sim N(1,2), B\sim N(0,2)$，

A 与 B 相互独立，则自相关函数 $R_X(s,t)=$____________，$X(\frac{3\pi}{4})\sim$____________分布。

5．设 $X(t)=At+B, t\geq 0$，这里 A 和 B 相互独立服从相同分布，$P(A=1)=0.6$，$P(A=-1)=0.4$。(1)写出 $X(t)$ 的全部样本函数；(2)求 $(X(1),X(2))$ 的联合分布律及 $X(2)$ 的边际分布律；(3)求 $\{X(t);t\geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数。

5（1） $x_1(t)=t+1, x_2(t)=t-1, x_3(t)=-t+1, x_4(t)=-t-1.$

(2)

X(1) \ X(2)	-3	-1	1	3
-2	0.16	0	0	0
0	0	0.24	0.24	0
2	0	0	0	0.36
P(X(2)=j)	0.16	0.24	0.24	0.36

（3） $E[X(t)]=EAt+EB=0.2t+0.2$，

$$E[X(t)X(s)]=EA^2ts+E(AB)(s+t)+E(B^2)=ts+0.04(t+s)+1。$$

1. 设$\{X_n;n\geq 0\}$是时齐的 **Markov** 链，状态空间$I=\{1,2,3,4\}$，一步转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

。已知$P(X_0=1)=1/4$,$P(X_0=2)=3/4$。计算 **(1)** $P(X_2=2)$； **(2)** $P(X_1=2,X_3=2,X_4=4)$； **(3)** $P(X_0=1\,|\,X_1=1)$；

(4)令$T_4=\min\{n\geq 0:X_n=4\}$，求$P(T_4<\infty)$。

$$(1) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{16} = \frac{9}{64}$$

$$(2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{1024}$$

$$(3) = \frac{P(X_0 = 1, X_1 = 1)}{P(X_1 = 1)} = \frac{4}{7}$$

$$(4)\ h_2 = \tfrac{1}{4}(h_2 + h_3 + 1), \qquad h_3 = \tfrac{1}{2}(h_2 + 1)$$

得 $h_2 = \frac{3}{5}$

$$\therefore P(T_4 < \infty) = \frac{3}{4} h_2 = \frac{9}{20}$$

2. 设$\{X_n;n\geq 0\}$是时齐的 **Markov** 链，状态空间$I=\{1,2,3,4,5,6\}$，一步转移概率

为：$p_{12}=p_{13}=p_{43}=p_{45}=p_{54}=p_{56}=p_{65}=p_{63}=\frac{1}{2},p_{21}=\frac{1}{3},p_{23}=\frac{2}{3},p_{32}=1$；

初始分布为$P(X_0=1)=P(X_0=6)=1/2$。

(1)求出所有的互达等价类，并指出哪些是闭的；

(2)求出各状态的周期和常返性；

(3)计算所有正常返态的平均回转时；

(4)计算$\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=2)$和$\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n=5)$。

（1）互达等价类有：{1，2，3}，{4，5，6}

其中{1，2，3}闭

（2）1，2，3正常返，非周期

4，5，6暂留，周期为2

（3）　$\{X_n\}$限制在{1，2，3}上得到一个新的 Markov 链，其平稳分布满足：

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1;\quad \pi_1=\frac{1}{3}\pi_2;\quad \pi_2=\frac{1}{2}\pi_1+\pi_3$$

解得$\pi_1=\dfrac{2}{13},\ \pi_2=\dfrac{6}{13},\ \pi_1=\dfrac{5}{13},$

$$\therefore\ \mu_1=\frac{13}{2},\quad \mu_2=\frac{13}{6},\quad \mu_3=\frac{13}{5}$$

（4）$\lim P(X_n=2)=\dfrac{6}{13},\ \lim P(X_n=5)=0$

3．甲乙两人玩游戏，每局甲赢一元的概率为 0.4，输一元的概率为 0.3，平局的概率为 0.3，假设一开始甲有 1 元，乙有 2 元，游戏直到某人输光为止，X_n 为第 n 局后甲拥有的钱数，则$\{X_n;n\geq 1\}$是一个时齐的 Markov 链，状态空间$I=\{0,1,2,3\}$，求（1）一步转移矩阵 P；

（2） $P(X_2=1)$； (3) $P(X_2=1,X_4=2)$； (4) 甲输的概率。

3．（1） $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（2） $P(X_2=1)=p_{11}p_{11}+p_{12}p_{21}=0.3\times0.3+0.4\times0.3=0.21$

（3） $P(X_2=1,X_4=2)=P(X_2=1)(p_{11}p_{12}+p_{12}p_{22})=0.0504$

（4） $$\begin{aligned} h_1 &= 0.3h_0+0.3h_1+0.4h_2 \\ h_2 &= 0.3h_1+0.3h_2+0.4h_3 \\ h_0 &= 1, h_3=0 \Rightarrow h_1=\frac{21}{37} \end{aligned}$$

4．设$\{X_n;n\geq 0\}$是时齐的 **Markov** 链，状态空间$I=\{1,2,3,4,5,6\}$，一步转移概率为：

$p_{11}=p_{54}=p_{62}=0.4,p_{12}=p_{56}=p_{65}=0.6$，$p_{21}=p_{34}=p_{43}=1$。(1)求出所有的互达等价类，并指出哪些是闭的；(2)求出各状态的周期和常返性；(3)计算所有正常返态的平均回转时；(4)计算$\lim\limits_{n\to\infty}p_{12}^{(n)}$和$\lim\limits_{n\to\infty}p_{55}^{(n)}$。

4．(1)互达等价类：$\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}$，其中$\{1,2\},\{3,4\}$是闭的

(2) 1，2，3，4 正常返，5，6 暂留，1，2 非周期，3，4，5，6 周期为 2

(3) $0.6\pi_1=\pi_2$，$\pi_1+\pi_2=1$，$\pi_3=\pi_4$，$\pi_3+\pi_4=1$

得$(\pi_1,\pi_2)=(\frac{5}{8},\frac{3}{8}),(\pi_3,\pi_4)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，所以 $(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4)=(\frac{8}{5},\frac{8}{3},2,2)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}p_{12}^{(n)}=\pi_2=\frac{3}{8}$，$\lim\limits_{n\to\infty}p_{55}^{(n)}=0$

1. 设 $\{N_1(t); t \ge 0\}$ 和 $\{N_2(t); t \ge 0\}$ 是相互独立的泊松过程，**强度分别为 1 和 2。则**

$P(N_1(1)+N_2(1)>0)=$ ____________，$P(N_1(1)=1 \mid N_1(1)+N_2(1)=1)=$ ____________。

- $1-e^{-3}$　　$1/3$

2. 有一大堆灯泡，它们的寿命都服从均值为 30 分钟的指数分布且相互独立。上午 5 点第一个灯泡开始工作，坏掉后马上换上第二个灯泡，再坏掉就马上换上第三个灯泡，…，以此类推。求

(1) 到上午 6 点为止共用坏 1 个灯泡，而到上午 9 点为止共用坏 3 个灯泡的概率；

(2) 第 1 个灯泡在上午 6 点到 7 点之间用坏的概率；

(3)已知到上午 7 点为止共用坏 4 个灯泡，问第二个灯泡在上午 6 点到 7 点之间用坏的概率。

以 N(t)表示到 5 点加 t 小时为止灯泡坏掉的数目，则 $\{N(t);t\geq 0\}$ 是强度为 2 的泊松过程。

(1) $P(N_1=1,N_4=3)=P(N_1=1)P(N_4-N_1=2)=36e^{-8}$

(2) $P(N_1=0)P(N_2-N_1\geq 1)=e^{-2}(1-e^{-2})$

(3) $P(1<W_2<2\,|\,N_2=4)=\dfrac{P(N_1=0,N_2=4)+P(N_1=1,N_2=4)}{P(N_2=4)}=\dfrac{5}{16}$

3. 设 $\{N_i(t); t \geq 0\}, i=1, 2$ 是两个相互独立的强度均为 1 的泊松过程，则

$P(N_1(1)+N_2(2)=2)=$ ____________，$P(N_1(2)=2 \mid N_1(1)+N_2(2)=2)=$ __________。

4． 以$N(t)$表示$(0,t]$内到达某商场的顾客数，设$\{N(t);t\geq 0\}$是强度为$\lambda=5$的泊松过程，进商场的各顾客独立地以概率 0.4 购物，以概率 0.6 不购物。计算 (1) 在$(0,1]$内至少有 1 个顾客达到，且在$(0,3]$内恰有两个顾客到达的概率； (2) 若已知在$(0,3]$内恰有 1 个顾客到达，求他到达的时间在（1，2）之间的概率； (3) 若已知在$(0,1]$内至多有 2 个顾客到达，求至少有 1 个顾客购物的概率。

4． $N_1(t), N_2(t)$分别表示$(0,t]$内购物的顾客数和不购物的顾客数。

(1) $P\{N(1)=1,N(3)-N(1)=1\}+P\{N(1)=2,N(3)-N(1)=0\}=62.5e^{-15}=1.91\times 10^{-5}$

(2) $P(N(1)=0,N(2)=1\mid N(3)=1)=\dfrac{P(N(1)=0,N(2)-N(1)=1,N(3)-N(2)=0)}{P(N(3)=1)}=\dfrac{1}{3}$，

(3) $P(N_1(1)\geq 1\,|N(1)\leq 2)=P(N_1(1)=1\,|N(1)\leq 2)+P(N_1(1)=2\,|N(1)\leq 2)=\dfrac{20}{37}$。

4. 设 $\{B(t);t\geq 0\}$ 是标准布朗运动，则 $P(\max\limits_{0\leq t\leq 4} B(t)\geq 2)=$ ________，

$P(B(3)<3\mid B(1)=1,B(2)=1)=$ ________。设 $A\sim N(1,1)$，且 A 与过程 $\{B(t);t\geq 0\}$

独立。令 $X(t)=B(t)+At$，则 $X(1)$ 服从________分布，

$X(1)+X(2)$ 服从________分布，$Cov(X(1)+X(2),X(1))=$ ________。

- 0.32, 0.98, $N(1,2)$, $N(3,14)$, 5

6．设 $\{B(t); t \geq 0\}$ 是标准布朗运动，则 $B(3)-2B(1)$ 服从____________分布，

$Cov(B(3)-2B(1), B(2)) =$ ________，$P(B(5.5)>5 \mid B(1.1)=3, B(1.5)=1) =$

____________，$P(\max\limits_{0\leq t\leq 6.25} B(t) < 2.5) =$ ____________。

6. N(0,3)，0，0.02，0.68 。

1. 设$\{X(t);-\infty < t < \infty\}$是宽平稳过程，若自相关函数$R_X(\tau)=2\delta(\tau)+2$，则谱密度$S_X(\omega)=$ ___(7)___ ，$\{X(t)\}$的均值各态历经当且仅当均值$\mu_X=$ ___(8)___ 。

(7) $2+4\pi\delta(\omega)$ (8) $\pm\sqrt{2}$

2. 设$\{X(t);-\infty<t<\infty\}$是宽平稳过程，若均值函数$\mu_X=2$，自相关函数$R_X(\tau)=e^{-|\tau|}+a$，则$\{X(t)\}$的谱密度$S_X(\omega)=$____________________，均值各态历经当且仅当均值$a=$____________________。

- $\dfrac{2}{1+\omega^2}+2\pi a\delta(\omega)$ 4

3. 设$\{B(t);t\geq 0\}$是标准布朗运动，$A\sim N(1,1)$, 且A与$\{B(t);t\geq 0\}$独立。

设$X(t)=A[B(t+1)-B(t)]$，$t\geq 0$。

(1) 计算$\{X(t)\}$的均值函数和自相关函数, 并证明它是宽平稳过程;

(2) 判断$\{X(t)\}$的均值是否具有各态历经性，并说明理由。

- $(1)\mu_X(t) = EX(t) = 0$

$$R_X(t,t+\tau) = EX(t)X(t+\tau) = \begin{cases} 2(1-|\tau|), & |\tau| \le 1; \\ 0, & |\tau| > 1. \end{cases}$$

因为$\mu_X(t)$是常数,$R_X(t,t+\tau)$只与τ有关，所以$\{X(t)\}$是宽平稳过程。

$(2)\lim\limits_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = 0 = \mu_X^2$,所以均值具有各态历经性

4. 设 $X(t)=A\cos(t+\Theta)+B, -\infty<t<\infty$，这里 A,B,Θ 相互独立,

$A\sim N(1,1)$，$\Theta\sim U(0,2\pi)$， B 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases} |x|, & -1<x<1; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(1) 计算 $\{X(t)\}$ 的均值函数和自相关函数，并证明它是一个宽平稳过程;

(2) 计算时间的均值 $<X(t)>$ 和时间的相关函数 $<X(t)X(t+\tau)>$；

(3) 判断过程 $\{X(t)\}$ 的均值和自相关函数有没有各态历经性。

（1） $\mu_X(t)=0$

$$R_X(t,t+\tau)=\frac{1}{2}+\cos\tau$$

因为 $\mu_X(t)$ 是常数，$R_X(t,t+\tau)$ 只与 τ 有关，所以是宽平稳

（2） $$<X(t)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=B$$

$$<X(t)X(t+\tau)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt=\frac{A^2}{2}\cos\tau+B^2$$

（3）都不具有

5．设 $X(t)=A\cos(t+2\pi B)$，$-\infty<t<\infty$，这里 A,B 相互独立同服从区间

（0，1）上的均匀分布。 (1)计算 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 的均值函数和自相关函数，并证明它

是一个宽平稳过程；(2)计算 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 的时间均值 $<X(t)>$ 和时间相关函数

$<X(t)X(t+\tau)>$，判断 $\{X(t);-\infty<t<\infty\}$ 是否为各态历经过程，说明理由。

(公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.)

（1） $E(A)=0, E(A^2)=\frac{1}{3}$, $\mu_X(t)=0$, $R_X(t,t+\tau)=\frac{\cos\tau}{6}$,

(2) $<X(t)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(A\cos(t+2\pi B)dt=0$；

$\because P(<X(t)>=\mu_X)=1, \therefore$ 均值具各态历经性。

$$<X(t)X(t+\tau)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A^2\cos(t+2\pi B)\cos(t+\tau+2\pi B)dt=\frac{A^2\cos\tau}{2}$$；

$\because P(<X(t)X(t+\tau>=\frac{\cos\tau}{6})\neq 1, \therefore$ 相关函数不具各态历经性，不是各态历经过程。