2. 用描述法表示下列集合.

(1) $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$;　　(2) $\{2,4,8,\cdots\}$;

(3) $\{0,2,4,\cdots,100\}$.

(1) $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\} = \{a \mid a=a_1$ 或 $a=a_2$ 或 $a=a_3$ 或 $a=a_4$ 或 $a=a_5\}$

(2) $\{2,4,8,\cdots\} = \{n \mid n=2k,\ k\in N\}$

(3) $\{0,2,4,\cdots 100\} = \{n \mid n=2k,\ k\in Z,\ 0\le k\le 50\}$

6. 给出下列集合的幂集.

(1) $\{a,\{b\}\}$;　　(2) $\{\varnothing,a,\{a\}\}$.

(1) Φ, $\{a\}$, $\{\{b\}\}$, $\{a,\{b\}\}$

(2) Φ, $\{\Phi\}$, $\{a\}$, $\{\{a\}\}$, $\{\Phi,a\}$ $\{\Phi,\{a\}\}$ $\{a,\{a\}\}$ $\{\Phi,a,\{a\}\}$

14. 设 A、B、C 和 D 是集合,判断下述论断哪些是正确的,哪些是错误的,并说明理由.

(1) 若 $A\subseteq B, C\subseteq D$,则 $(A\cup C)\subseteq(B\cup D)$;

(2) 若 $A\subseteq B, C\subseteq D$,则 $(A\cap C)\subseteq(B\cap D)$;

(3) 若 $A\subset B, C\subset D$,则 $(A\cup C)\subset(B\cup D)$;

(4) 若 $A\subset B, C\subset D$,则 $(A\cap C)\subset(B\cap D)$.

(2) 正确

$\forall x\in A\cap C$, 有 $x\in A$, $x\in C$

$A\subseteq B$, $C\subseteq D \Rightarrow x\in B$, $x\in D \Rightarrow x\in B\cap D$

$\Rightarrow (A\cap C)\subseteq(B\cap D)$

(4) 错误

$A=\{1,2\}$　$B=\{0,1,2\}$

$C=\{2,3\}$　$D=\{2,3,4\}$

则 $A\cap C=\{2\}=B\cap D$

16. 设 A、B 是任意的集合,判断下述论断哪些是正确的,哪些是错误的,并说明理由.

(1) $2^{A\cup B}=2^A\cup 2^B$;　　(2) $2^{A\cap B}=2^A\cap 2^B$;

(3) $2^{A'}=(2^A)'$.

(1) 错误　取 $A=\{0,1\}$　$B=\{2,3\}$

则 $\{0,1,2,3\}\in 2^{A\cup B}$, $\{0,1,2,3\}\notin 2^A\cup 2^B$

(2) 正确

① $A\cap B \subseteq A$ 且 $A\cap B \subseteq B \Rightarrow 2^{A\cap B} \subseteq 2^A$, $2^{A\cap B} \subseteq 2^B$

$\Rightarrow 2^{A\cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$

② $\forall m \in 2^A \cap 2^B$, 有 $m \in 2^A$, $m \in 2^B$

$\Rightarrow m \subseteq A$, $m \subseteq B \Rightarrow m \subseteq A\cap B$

$\Rightarrow m \in 2^{A\cap B} \Rightarrow 2^A \cap 2^B \subseteq 2^{A\cap B}$

综上 $2^{A\cap B} = 2^A \cap 2^B$

20. $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 为 U 的子集, $A_1, A_2, \cdots, A_r$ 至多能产生多少不同的子集?

2^r, $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_r$, 其中 $\bar{A}_i = A_i$ 或 A_i'

22. 设 A、B、C 是任意集合, 运用集合运算定律证明:

(1) $B \cup ((A' \cup B) \cap A)' = U$;

(2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$;

(3) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C)$.

(2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) = B\cup(A\cap C)\cap(C\cup A)$

$= [B\cap(C\cup A)] \cup [(A\cap C)\cap(C\cup A)]$

$= B\cap(C\cup A) \cup (A\cap C)$

$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A) = B\cap(A\cup C)\cup(C\cap A)$

$\Rightarrow (A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A) = (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

24. 设 A_i 为某些实数的集合, 定义为

26 [redacted] 离散数学基础

$$A_0 = \{a \mid a < 1\}$$

$$A_i = \left\{a \,\middle|\, a \leqslant 1 - \frac{1}{i}\right\} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

试证明: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_0$.

① $\forall m \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$\exists k \in N$. $m \in A_k$

$\Rightarrow m \leq 1 - \frac{1}{k} < 1$

$\Rightarrow m \in A_0$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_0$

② $\forall m \in A_0$, $m < 1$

设 $m = 1 - n$, $n > 0$, 且 $p < n < p+1$, $p \in Z$

$\Rightarrow m = 1 - n \leq 1 - \frac{1}{p+1}$

$\Rightarrow m \in A_{p+1} \Rightarrow m \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$\Rightarrow A_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

综上 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_0$

25. 设$\{A_1, A_2, \cdots, A_r\}$是集合$A$的一个分划，试证明：$A_1 \cap B, A_2 \cap B, \cdots, A_r \cap B$中所有非空集合构成$A \cap B$的一个分划.

① $i \neq j$ 时. $\forall m \in A_i \cap B$，有 $m \in A_i$ 且 $m \in B$

若 $m \in A_j \cap B$，则 $m \in A_j$，$m \in B$ 则 $A_i \cap A_j \neq \phi$

与 $\{A_1, \cdots A_r\}$ 是 A 的一个分划矛盾

$\Rightarrow$ 当 $i \neq j$ 时，$(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \phi$

② $\forall m \in A_i \cap B$，有 $m \in A_i$，$m \in B$

$A_i \subseteq A \Rightarrow m \in A$，$m \in B \Rightarrow m \in A \cap B$

$\Rightarrow (A_i \cap B) \subseteq (A \cap B)$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{r} (A_i \cap B) \subseteq A \cap B$

$\forall m \in A \cap B$，有 $m \in A$. $m \in B$

$\{A_1, \cdots A_r\}$ 为 A 的分划 $\Rightarrow \exists k \in N$，$1 \leq k \leq r$，$m \in A_k$

$\Rightarrow m \in A_k \cap B \Rightarrow m \in \bigcup_{i=1}^{r} (A_i \cap B)$

$\Rightarrow A \cap B \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} (A_i \cap B)$

综上 $\bigcup_{i=1}^{r} A_i \cap B = A \cap B$

$A_1 \cap B$，$A_2 \cap B$，$\cdots$，$A_r \cap B$ 中所有非空集合构成 $A \cap B$ 的分划.