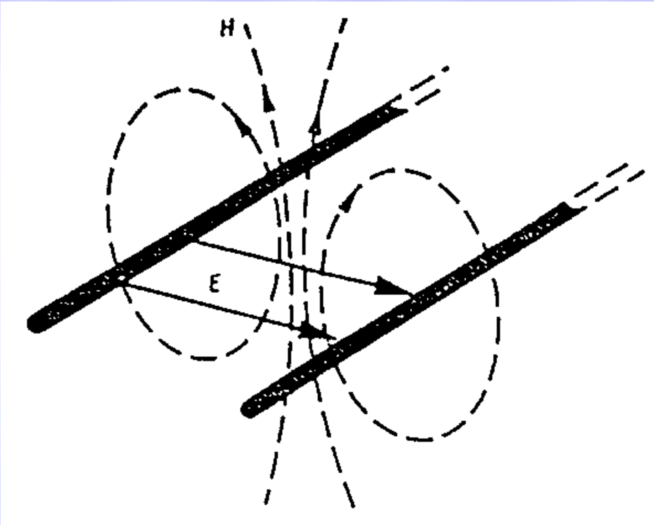
CISE 11120010

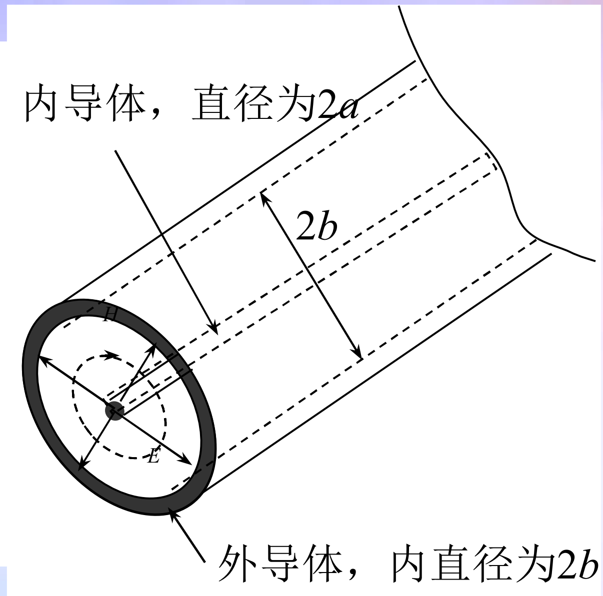
电磁场与电磁波

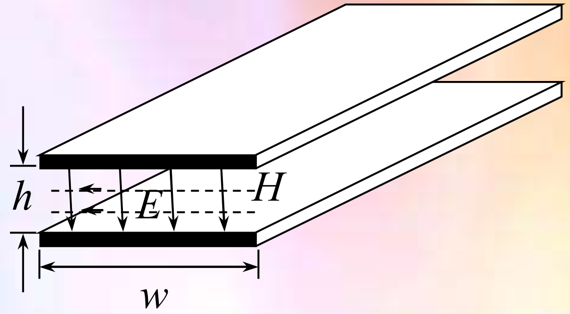
第3讲

传输线方程及其解

常用传输线及其场结构







平行双导线　　　同轴线　　　平行平板波导

平行双导线、同轴线、微带线是常用的传输线。其横向尺寸比波长小得多，纵向尺寸比波长大得多，至少与波长可比。

就场分布而言，它们的共同点是电磁场都在横截面内，称为横电磁模（TEM模）。

电话网用平行双导线，有线电视网都用同轴线，平行平板波导应用不多，其变形微带线则广泛用于集成电路。

传输线在电路中相当于一个二端口网络

传输线在电路中相当于一个二端口网络，一个端口连接信号源，通常称为输入端，另一个端口连接负载，称为输出端。

u_g 是信号源，信号可以是数字脉冲串，但本节主要针对随时间作简谐变化的连续波信号。

R_g 是信号源的内阻。

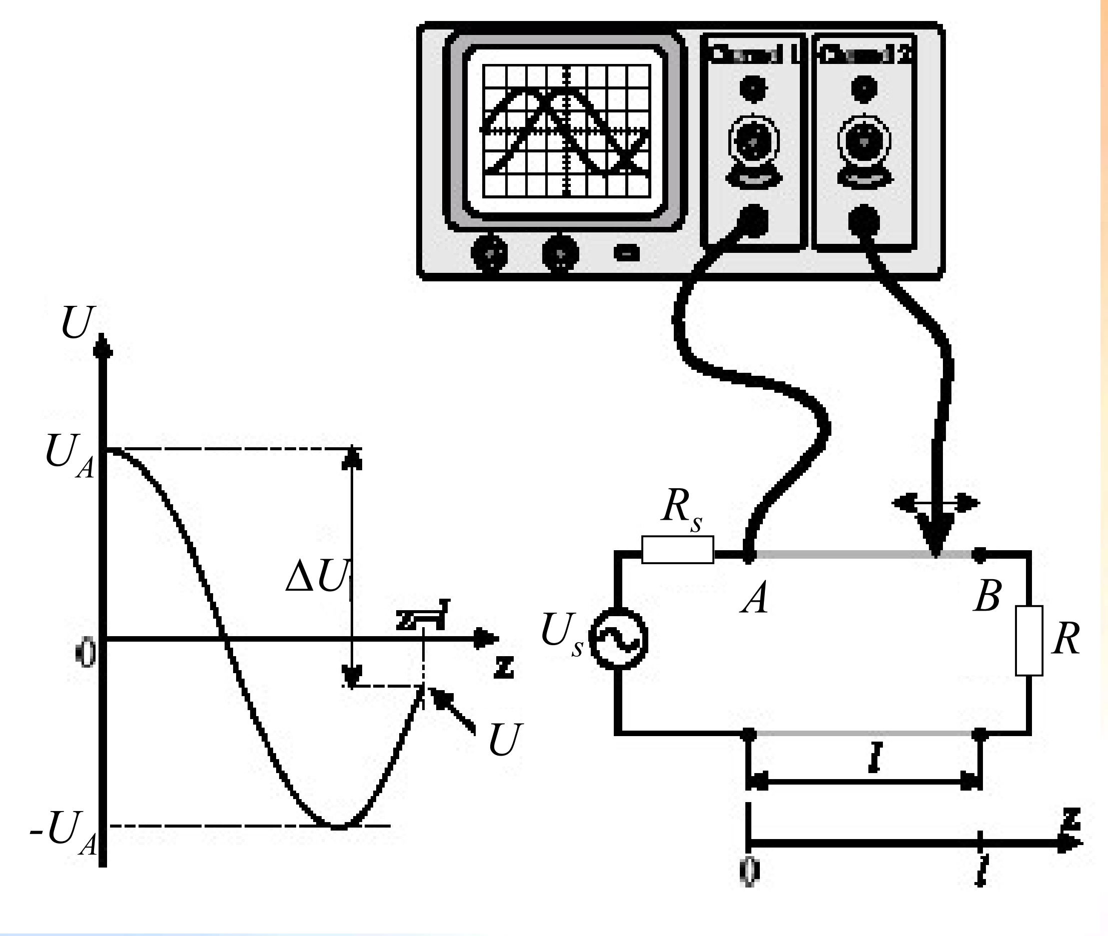
R_L 是负载。

传输线上电压、电流是纵向位置z的函数

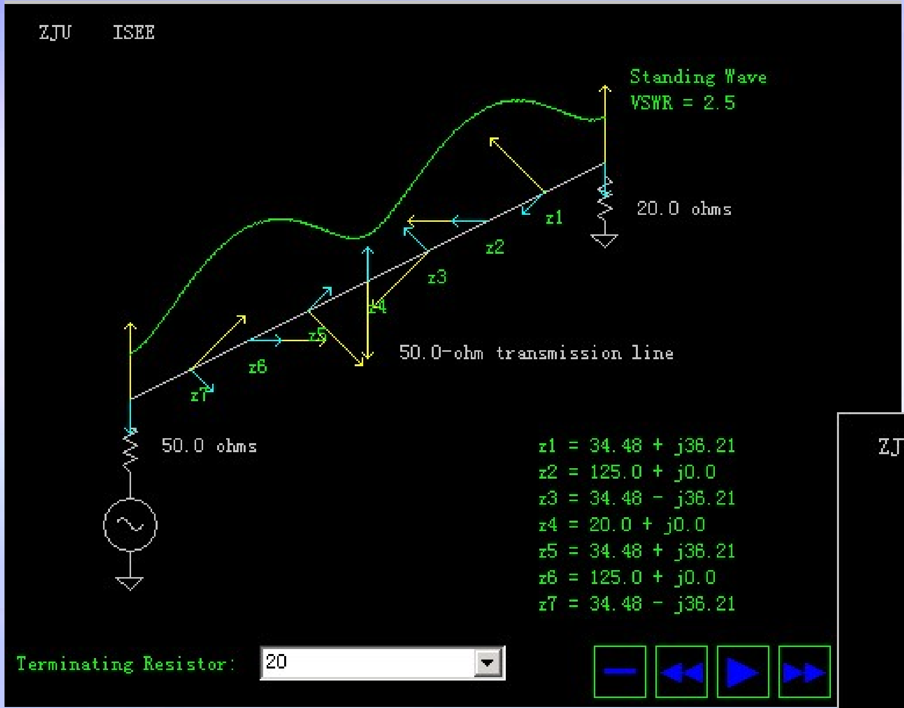
传输线即使无损耗，由于其纵向线度至少可与波长比拟，即$l \approx \lambda$或$l >> \lambda$，纵方向向电压U、电流I不再处处相等，而是纵向位置z的函数。即

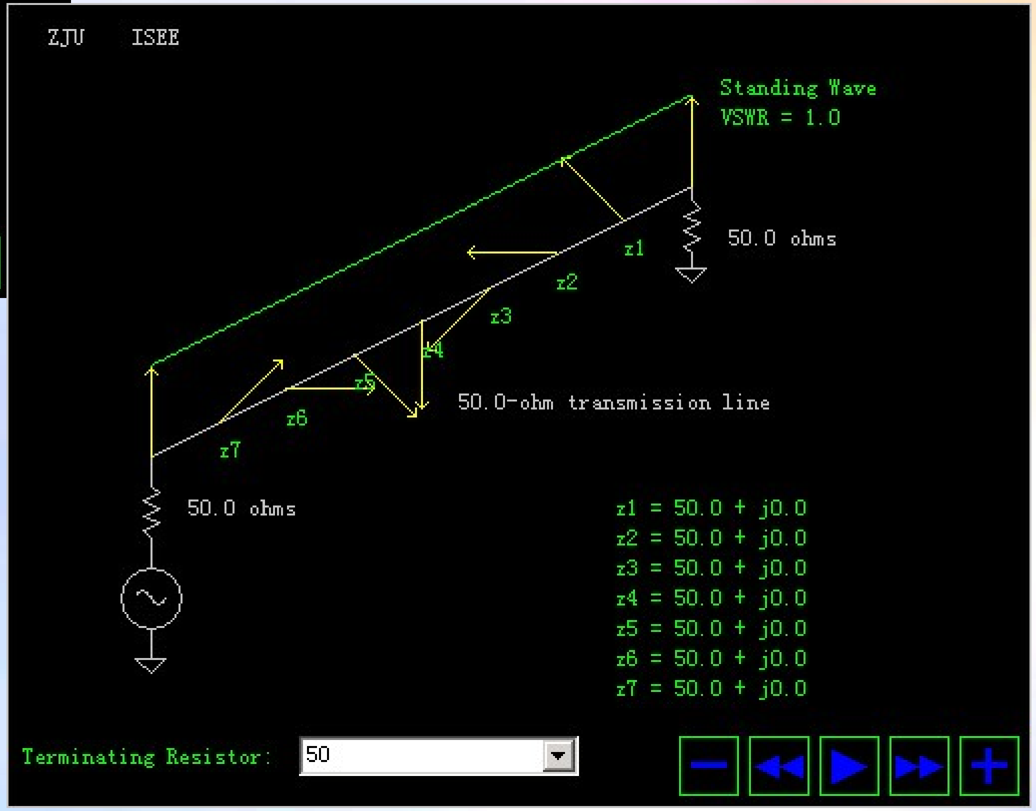
$$U = U(z)$$

$$I = I(z)$$



传输线纵向$U(z)$、$I(z)$分布与终端负载阻抗Z_L有关





如何用基尔霍夫定律分析传输线

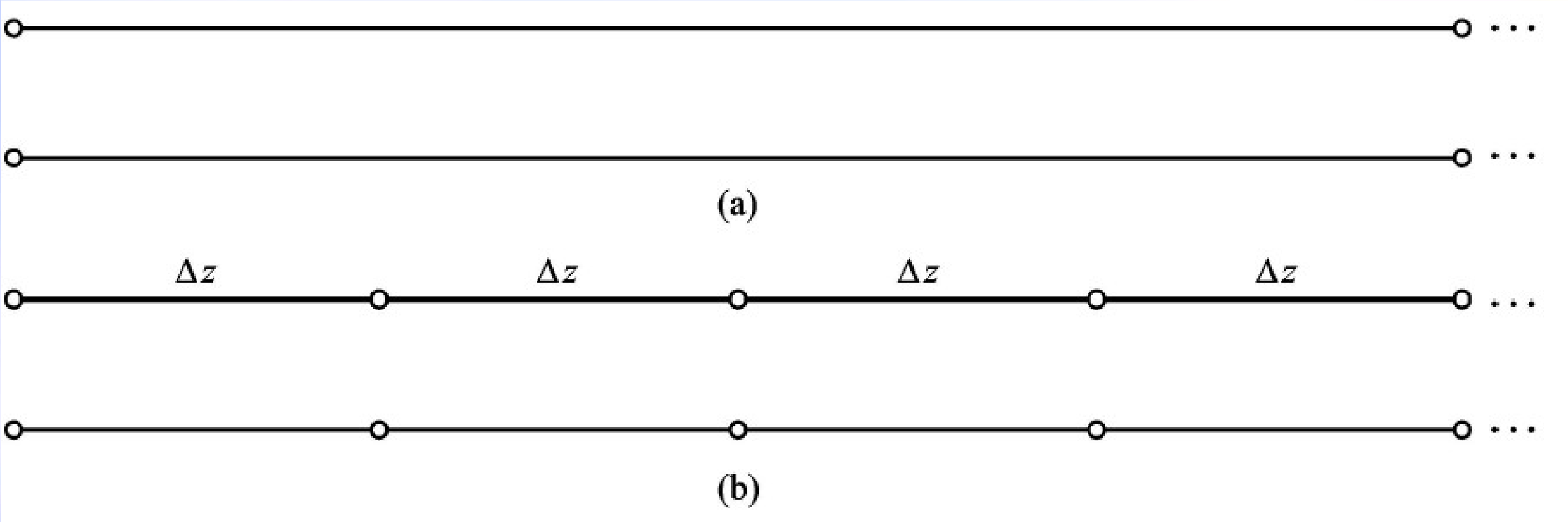
我们在电路原理中已学过基尔霍夫定律$\Sigma U=0$，$\Sigma I=0$

基尔霍夫定律适用范围：

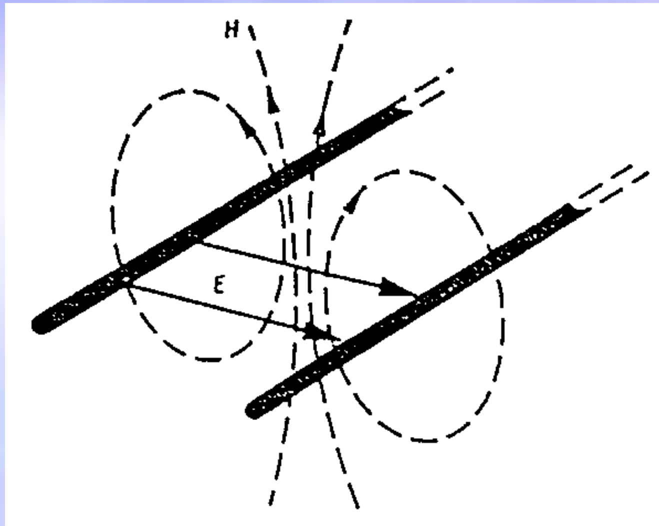
$$\frac{\partial}{\partial t}\to 0$$

或所研究对象线度比波长小得多

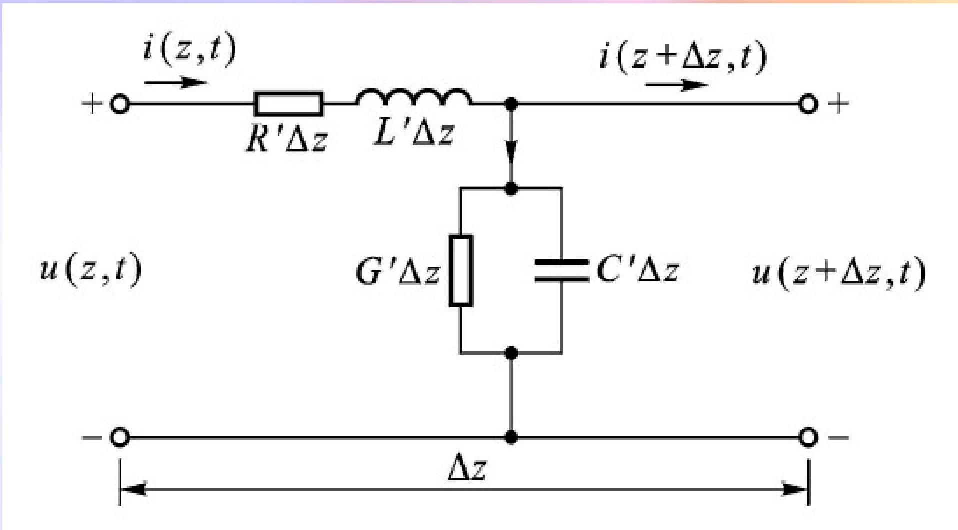
如果把长度为l的传输线分成N段，只要每段长度$\Delta l<<\lambda$，那么在Δl长度内，基尔霍夫定律可以适用。



dz长度一段传输线的等效电路



平行双导线



dz长度一段传输线的等效电路

R'、G'、L'、C'分别为传输线单位长度的等效电阻、等效电导、等效电感、等效电容，R'dz、G'dz、L'dz、C'dz分别为dz长度内的等效电阻、等效电导、等效电感、等效电容。

串联电阻R表示，当电流沿导体流动时，由于构成导体材料的电导率σ有限产生的欧姆损耗。

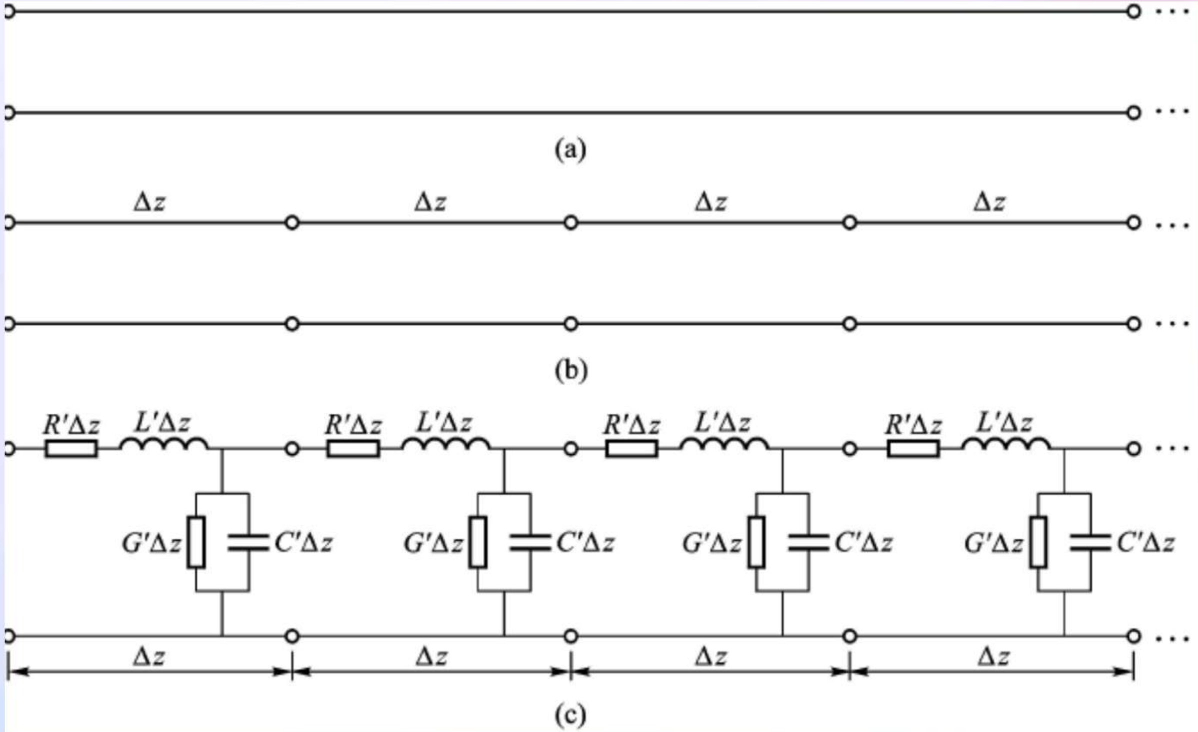
并联电导G表示，当两导体间填充的介质不是完纯介质时，电导率σ不完全等于零，有少量漏电，会产生漏电损耗。

串联电感L表示导体周围有磁场线，有磁场能量的储存。

并联电容表示两导体间存在电场，说明导体间储有电能。

传输线的等效电路

如果将z方向无限长的传输线看成无限多Δz长度传输线的级联，而每一段Δz长度的传输线又用LC网络等效，那么z方向无限长的传输线就可用无限多级联的网络表示。



（a）平行双导线（b）无限多Δz长度传输线的级联（c）传输线的等效电路模型

传输线的等效电路参数R'、G'、L'、C'沿传输线也是均匀分布的，故称它们为分布电路参数，在集总参数电路中，磁场集总在电感线圈里，电场集总在电容器里，能量集总损耗在电阻、电导上。

平行双导线、同轴线的等效电路参数

单位长度传输线等效电路参数R'、G'、L'、C'的具体数值取决于传输线构成材料的物理性质（主要是电磁特性）、几何结构与形状。

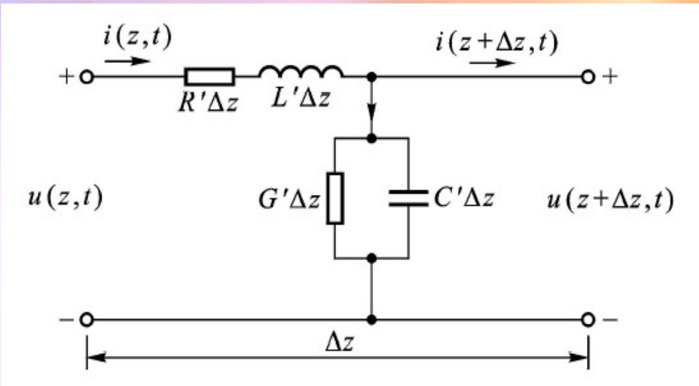
平行双导线、同轴线的等效电路参数 R'、G'、L'和 C'

参数	同轴线	平行双导线	单位
R'	$\dfrac{R_s}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$	$\dfrac{R_s}{\pi a}$	Ω/m
L'	$\dfrac{\mu}{2\pi}\ln(b/a)$	$\dfrac{\mu}{\pi}\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]$	H/m
G'	$\dfrac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$	$\dfrac{\pi\sigma}{\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]}$	S/m
C'	$\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$\dfrac{\pi\varepsilon}{\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]}$	F/m

说明： 对于同轴线：$2b$—外导体内直径，$2a$—内导体外径
对于平行双导线 $2a$—导线直径，d—两导线中心间距
μ、ε、σ属于填充介质的量， $R_s=\sqrt{\pi f\mu_c/\sigma_c}$ ，μ_c、σ_c属于导体的量

传输线方程

利用基尔霍夫电压、电流定律，可得



$$u(z,t)-R'\Delta z i(z,t)-L'\Delta z\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}-u(z+\Delta z,t)=0$$

$$i(z,t)-G'\Delta z u(z+\Delta z,t)-C'\Delta z\frac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

$$-i(z+\Delta z,t)=0$$

除以Δz，并重新排列得到

$$\frac{u(z+\Delta z,t)-u(z,t)}{\Delta z}=-\left[R'i(z,t)+L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\right]$$

$$\frac{i(z+\Delta z,t)-i(z,t)}{\Delta z}=-\left[G'u(z+\Delta z,t)+C'\frac{\partial u(z+\Delta z,t)}{\partial t}\right]$$

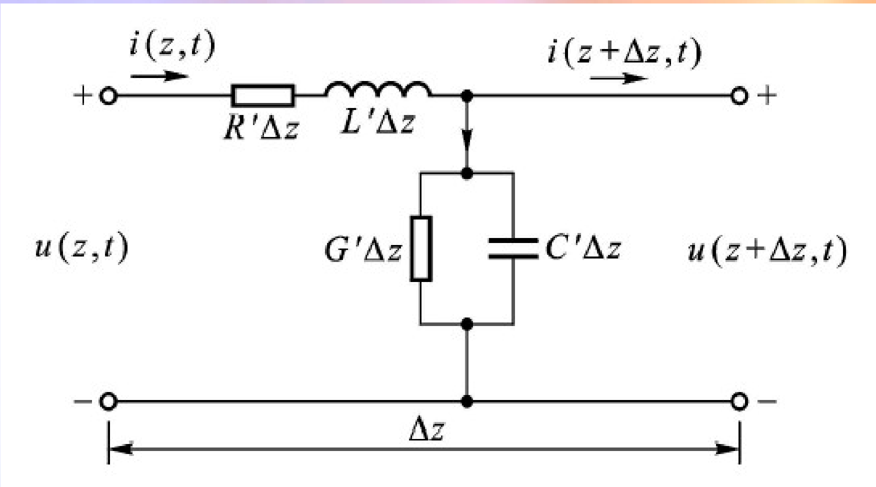
当 $\Delta z\to 0$，取极限，得到

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}=-\left[R'i(z,t)+L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\right] \qquad \frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=-\left[G'u(z,t)+C'\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right]$$

这就是传输线上电压、电流满足的微分方程，称为传输线方程。

复数形式的传输线方程

引入简谐变量$u(z, t)$、$i(z, t)$的复数表示



$$\begin{cases} U(z) \\ I(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(z,t) = \mathrm{Re}\left[U(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \\ i(z,t) = \mathrm{Re}\left[I(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \end{cases}$$

将上式代入传输线方程

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -\left[G'u(z,t) + C'\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right]$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -\left[R'i(z,t) + L'\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\right]$$

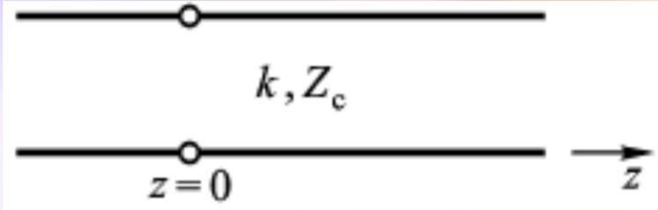
就得到复数形式的传输线方程　　　　注意：$U(z)$、$I(z)$不是时间t的函数。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z} = -(R' + \mathrm{j}\omega L')I(z) \\ \dfrac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -(G' + \mathrm{j}\omega C')U(z) \end{cases}$$

当 $\begin{matrix} R' = 0 \\ G' = 0 \end{matrix}$ 时 $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}\omega L'I \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}\omega C'U \end{cases}$

无耗传输线方程的解

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}&=-\mathrm{j}\omega L'I\\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}&=-\mathrm{j}\omega C'U\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2}=-\omega^2L'C'U$$



定义 $k=\omega\sqrt{L'C'}$

上式成为 $\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+k^2\right)U=0$

其解为

$$U=U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$$

$$I=\frac{1}{Z_c}\left(U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right)$$

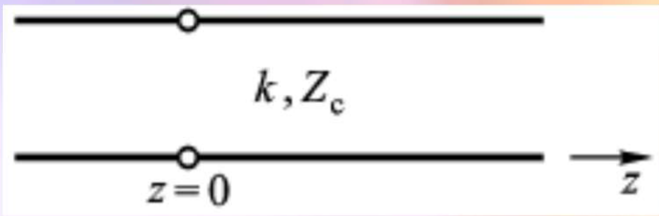
$$Z_c=\frac{1}{Y_c}=\frac{k}{\omega C'}=\frac{\omega L'}{k}=\sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

U、I 都是复数，计及时间变量后并将取实部运算的Re省略后，可得

$$u(z,t)=\left[U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz)}+U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+kz)}\right]\quad i(z,t)=\frac{1}{Z_c}\left[U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz)}-U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+kz)}\right]$$

无耗传输线方程解的初步解释

$$u(z,t)=\left[U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz)}+U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+kz)}\right]$$



第一项表示入射波。第二项表示反射波。

k称为传播常数。

入射波与反射波的相速 $v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\omega}{k}$ $\quad v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{r}}=-\dfrac{\omega}{k}$

波长 $\lambda=2\pi/k$

对于无损耗线，$k=\omega\sqrt{L'C'}$，故波的传播速度 $v_{\mathrm{p}}=1/\sqrt{L'C'}$

将平行双导线、同轴线的L'、C'值代入，得到 $v_{\mathrm{p}}=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$

即电磁波沿平行双导线、同轴线传播的相速v_{p}等于填充介质中的光速。只要ε与频率无关，v_{p}也与频率无关。电磁波传播速度v_{p}与频率无关，称为无色散。所以只要ε与频率无关，平行双导线、同轴线是无色散的。

Z_c为入射波电压与入射波电流之比，具有阻抗量纲，称为特征阻抗。其倒数$Y_c=1/Z_c$称为特征导纳。

反射波电压与反射波电流相位上刚好相差180°。

有耗传输线方程的解

对于有损耗的情况，如果传播常数k与特征阻抗Z_c（或导纳Y_c）的定义为

$$\mathrm{j}k=\sqrt{(R'+\mathrm{j}\omega L')(G'+\mathrm{j}\omega C')} \qquad Z_c=\frac{1}{Y_c}=\sqrt{\frac{R'+\mathrm{j}\omega L'}{G'+\mathrm{j}\omega C'}}$$

那么传输线方程

$$\frac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z}=-(R'+\mathrm{j}\omega L')I(z) \qquad \frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}=-(G'+\mathrm{j}\omega C')U(z)$$

成为

$$\frac{\mathrm{d}U(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}kZ_cI(z) \qquad \frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}kY_cU(z)$$

传输线上电压、电流的解仍取

$$U=U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}$$

$$I=\frac{1}{Z_c}\left(U\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right)$$

但记住此时k、Z_c均为复数。

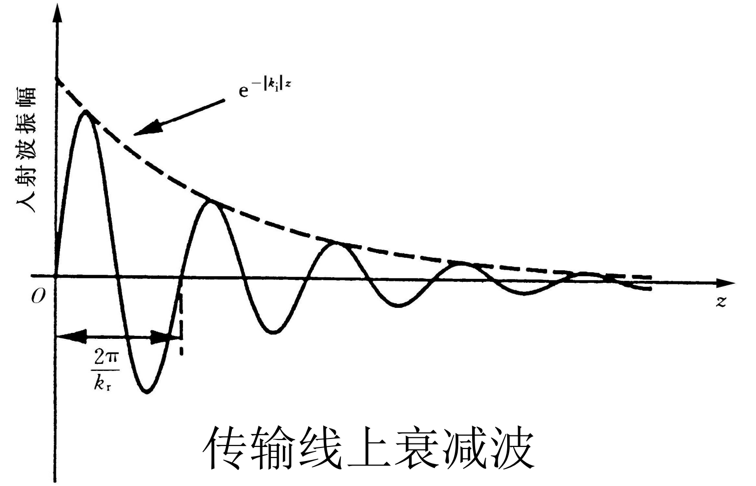
有耗传输线方程的解

如将k记为 $k = k_{\mathrm{r}} - \mathrm{j}k_{\mathrm{i}}$

则式

$$\begin{cases} U = U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} \\ I = \dfrac{1}{Z_{\mathrm{c}}}\left(U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right) \end{cases}$$

可改写为



传输线上衰减波

$$\begin{cases} U = U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-k_i z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_r z} + U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{k_i z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_r z} \\ I = \dfrac{1}{Z_{\mathrm{c}}}\left[U^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-k_i z}e^{-\mathrm{j}k_r z} - U^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{k_i z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_r z}\right] \end{cases}$$

所以如果传播常数的虚部k_i>0，损耗将使正方向传播的入射波振幅随z的增加而衰减,所以k_i称为波的衰减因子或衰减常数，k_r称为相位常数,表示波的传播。

由上二式可见，传输线上电压、电流的传播可用两个特征参数，即传播常数k与特征阻抗Z_{c}（或特征导纳Y_{c}）唯一地确定。

第3讲复习

复习要点

- 将传输线分成N段后，只要每一段长度$\Delta l << \lambda$，基尔霍夫定律仍适用。
- 传输线方程及其解：传输线的特征参数为传播常数k与特征阻抗Z_c（或特征导纳$Y_c = 1/Z_c$）。k的实部k_r表示波的传播，虚部k_i表示波的衰减，$\lambda = \dfrac{2\pi}{k_r}$，$v = \dfrac{\omega}{k_r} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$，传输线上电压、电流与位置$z$有关，可分解为入射波与反射波之和。电压入射波与电流入射波之比为特征阻抗Z_c，电压反射波与电流反射波相位相差180°。

复习范围

2.1

帮助理解的多媒体演示：MMS 9