

离散数学

Discrete Mathematics

第一章 集合

宋牟平 songmp@zju.edu.cn 玉泉校区 行政楼 325

上午9时21分

第一章 集合

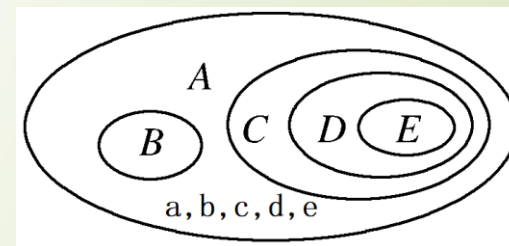
集合及其表示方法

集合的概念是现代数学中最基本的概念之一。

集合创始人G.Cantor——凡是在我们的感觉或思维中可以明确区分的对象物，把它们看成一个整体，这个整体，我们就称它是集合，其中的“物”就称为该集合的“成员”或“元素”。

集合与元素：一些确定的、可区分的事物构成的整体称为**集合**，其中所含的事物称为**元素**。

集合一般用大写字母命名（A B C），元素用小写字母(a b c)。



数学中常见的集合

N 自然数的集合

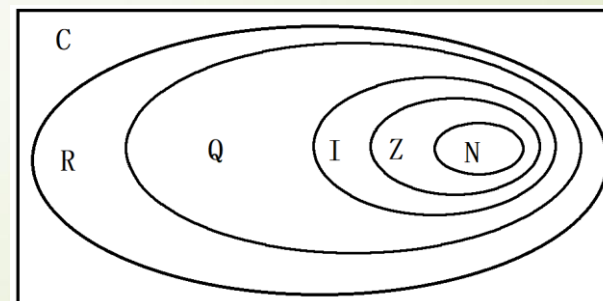
I 整数的集合

R 实数的集合

Z 非负整数的集合

Q 有理数的集合

C 复数的集合



在日常生活中，也经常遇到的集合的概念

浙江大学的全体教师

26英文字母

选离散数学课的学生

元素和集合的关系用符号“ \in ”表示（意大利数学家Peano引入，是希腊文 $\epsilon\sigma\tau\iota$ （esti）的首字母，意为是），当元素在集合A中时，记

$$a \in A$$

读作“a属于A”。当元素不在A时，记

$$a \notin A$$

读作“a不属于A”。

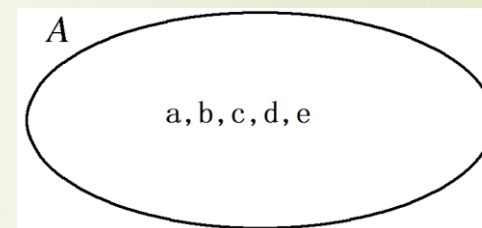
例

$$n \in \mathbf{N}$$

$$i \in \mathbf{I}$$

$$x \in \mathbf{R}$$

$$a+jb \in \mathbf{C}$$



集合有穷举法和描述法两种表示方法

4

穷举法： 列出集合中的所有元素

例 $A=\{a, b, c, d\}$

例 选离散数学课学生名单= $\{\text{张三}, \dots\}$

例 中文字符集= $\{\text{一}, \text{二}, \dots, \text{王}, \dots \dots\}$

常用于必须列出所有元素的场合。

描述法： 用集合中所有元素的共同性质来描述其元素，而不列出其元素

例 $S=\{s|s\text{是不大于}10\text{的正偶数}\}$

例 $M=\{m|m=2^i, i \in \mathbb{Z}\}$

例 $\rho=\{(x,y)| x,y \in \mathbb{R}, x^2+y^2=1\}$

描述法的优点是不必列出所有元素，元素可根据条件生成。在很多情形下没有必要，也没有可能列出所有元素。

上午9时21分

注意点:

5

集合中的元素是**可区分的**，如离散数学书中的所有汉字，相同的汉字虽然多次出现，但在集合中认为是同一个元素。

集合中的元素必须是**确定的**，例

百货商店里好看的花布

元素在集合中的次序是**随意的**，如

$$\{a, b, c, d\} = \{b, a, d, c\}$$

任何确定的、可区别的事物都可以作为元素，因此**某个集合也完全可以**
是另一个集合的元素。

例

$$A = \{a, b, c\}; B = \{\{a, b, c\}, d\}$$

A有4个元素，B有两个元素。

对“包罗一切的集合”或“由一切集合组成的集合”等类似的术语，会导致集合论中的悖论。如理发师悖论：

某理发师跟且只跟城里所有不能给自己理发的人理发。

定义1-1 不含有任何元素的集合，称为**空集**，记作：

$$\emptyset = \{ \}$$

例 平面上两条平行线的“交点”的集合。

空集合在集合的运算和证明中有重要的作用。空集是唯一的。

集合基数：集合中元素的数目。

例 $A = \{a, b, c, d, e\}$ $\#A = 5$

有限集：基数有限；

无限集：基数无限

1.2 集合的包含和相等

7

定义1-2 设有集合A和B，若有A的每一个元素都是B的元素（即若 $a \in A$ ，必有 $a \in B$ ），则称A是B的**子集**，或说**A被包含于B中(或B包含A)**，记作

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

反之，则称A不是B的子集，则记作

$$A \not\subseteq B \text{ 或 } B \not\supseteq A$$

例

$$A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, c, d\}, C = \{\{a\}, b, c, d\}$$

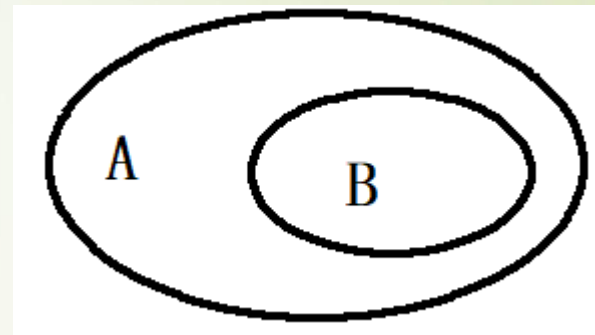
$$A \subseteq B, \text{ 但 } A \not\subseteq C$$

例

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{I} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

定义1-4 真子集：设A是B的子集，若B中至少有一个元素不属于A，则A是B的真子集，记

$$A \subset B$$



定义1-3 集合相等：集合A与B的所有元素相同，则

$$A=B$$

等价定义：设A和B是两个集合，若 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq A$ ，则 $A=B$ 。

等价定义也可描述为： $A=B$ 的充要条件是 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq A$ 。

等价定义在集合的证明中非常方便。

推论：

(1) 对于任意集合A，有 $\emptyset \subseteq A$

(2) 对于任意集合A，有 $A \subseteq A$

\emptyset 和A称为A的**平凡子集**。

(3) 对于任意集合A、B、C，若 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$

证明(1)对于任意集合A, 有 $\emptyset \subseteq A$

反证法:

设空集 \emptyset 不是某集合A的子集, 即 $\emptyset \not\subseteq A$,

则必存在元素 $x \in \emptyset$ 而 $x \notin A$, 这与空集的定义矛盾,

因此, $\emptyset \subseteq A$

定理1-1 空集合是唯一的。

证明: 假设有两个空集合 \emptyset_1 和 \emptyset_2 , 因为空集被包含于每一个集合中, 因此有, $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$, $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$, $\emptyset_1 = \emptyset_2$

1.3 幂集

定义1-5 幂集：由集合A的所有子集作为元素构成的集合称为A的**幂集**，记作 2^A

$$2^A = \{s \mid s \subseteq A\}$$

例

$$A = \{a, b, c\}$$

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

例

$$2^\emptyset = \{\emptyset\}$$

例

若 $2^A \in 2^B$ ，则 $A \in B$ 。

证明：

$$\because 2^A \in 2^B,$$

$$\therefore 2^A \subseteq B. \text{ 又 } A \in 2^A,$$

$$\therefore A \in B.$$

定理1-2 设A是具有基数 $\#A$ 的有限集 $\#(2^A) = 2^{\#A}$ 。

幂集的基数： 设 $\#A=n$ ，则 $\#2^A = 2^{\#A} = 2^n$

证明 设 $\#A=n$ ，从 n 个元素中选取 i 个不同元素的方法共有 C_n^i 种，这里

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

所以A的不同子集的数目(包括 \emptyset)为

$$\#(2^A) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n.$$

由二项式定理可知，

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^n y^n.$$

令 $x=y=1$ ，便有

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n.$$

所以 $\#(2^A) = 2^n$ 。因为 $\#A=n$ ，故有 $\#(2^A) = 2^{\#A}$ 。证完。

子集的一种表示法

12

当集合 A 的元素个数较多时，要毫无遗漏地列出集合 A 的所有子集是一件相当困难的事情。现在我们引进一种表示法，按照这种表示法，我们能够毫无遗漏地列出一个有限集合的每一个子集。为此，我们对所给集合的元素规定某种次序，使得某个元素可以称为第一个元素，另一个元素为第二个元素，等等（虽然在

集合 $A=\{a,b,c\}$ ，令 a 是第一个元素， b 是第二个元素， c 是第三个元素。则 A 的各个子集可以表示为：

$$B_{000}=\Phi, B_{001}=\{c\}, B_{010}=\{b\}, B_{011}=\{b, c\}, B_{100}=\{a\}$$

$$B_{101}=\{a, c\}, B_{110}=\{a, b\}, B_{111}=\{a, b, c\}$$

$$2^A=\{B_{000}, B_{001}, B_{010}, B_{011}, \dots, B_{110}, B_{111}\}$$

上午9时21分

1.4 集合的运算

13

定义1-6 **全集**: 若一个集合包含了某个问题中所讨论的一切集合, 则称它为该问题的全域集合, 或简称为全集, 记 U 。

全集 U 不是唯一的, 可取一个较为方便的集合为 U 。

定义1-7 **并集**: 设有集合 A 、 B , 则由集合 A 和 B 中的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并集

$$A \cup B = \{u \mid u \in A \text{ 或 } u \in B\}$$

定义1-8 **交集**: 设有集合 A 、 B , 则由既属于 A 又属于 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交集

$$A \cap B = \{u \mid u \in A \text{ 且 } u \in B\}$$

例 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; \quad A \cap B = \{4, 5\}$$

例 $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$

定义1-9 **差集**（相对补集）：由属于集合B而不属于集合A的所有元素构成的集合，称为B与A的差集（A关于B的相对补集）

$$B-A=\{u|u\in B \text{ 且 } u\notin A\}$$

例 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7,8\}$

$$A-B=\{1,2,3\}, \quad B-A=\{6,7,8\}$$

定义1-10 **补集**：集合A关于全集合U的相对补集，称为A的**绝对补集**，简称A的补集，记作

$$A'=U-A=\{u | u \in U, u \notin A\}=\{u | u \notin A\}$$

$$U'=\emptyset, \quad \emptyset'=U$$

$$A-B = A \cap B'$$

*定义1-11 对称差: 设有集合A、B, 由属于A但不属于B, 以及属于B但不属于A的所有元素组成的集合, 称为A与B的**对称差**, 记作

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

例 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

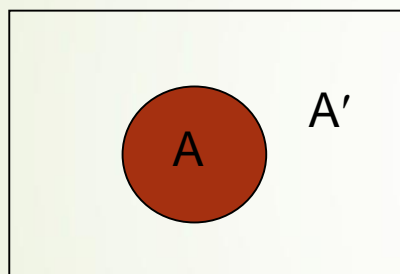
$$A - B = \{1, 2, 3\}, \quad B - A = \{6, 7, 8\}$$

$$A \oplus B = \{1, 2, 3\} \cup \{6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$$

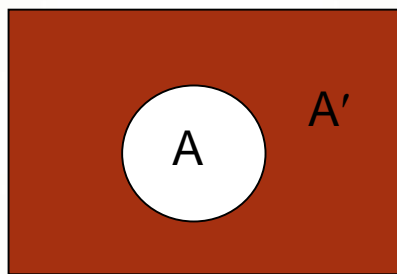
1.5 文氏图

16

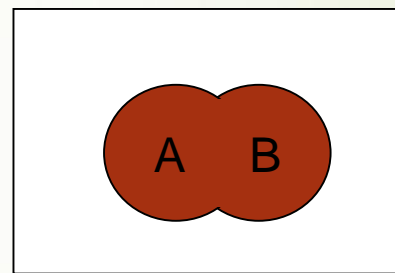
用英国数学家John Venn的名字命名，可以很直观形象地表示集合间的关系，对集合证明和运算提供帮助。



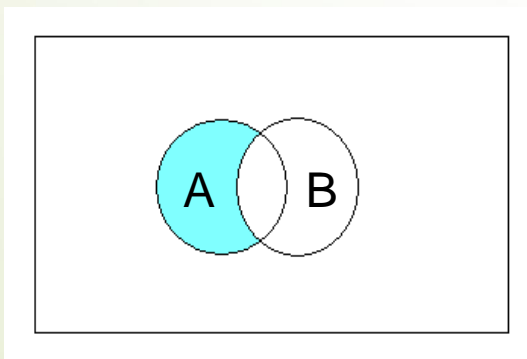
A



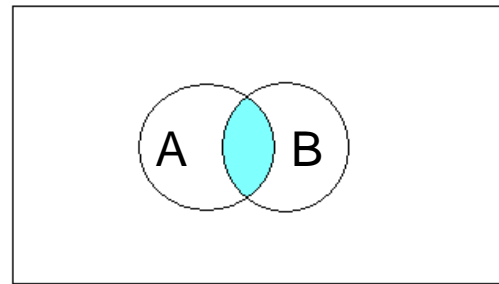
A'



$A \cup B$



$A - B$



$A \cap B$

上午9时21分

例 在一个 170 人的班级里，120 个学生会西班牙语，80 个学生会法语，60 个学生会英语，50 个学生既会西班牙语又会法语；25 个学生既会西班牙语又会英语，30 个学生既会法语又会英语，10 个学生三种语言全都会，问有多少学生对这三种语言一种也不会？

解 分别用 S, F, E 表示会西班牙语，法语，英语的学生的集合，于是

$$\#S = 120,$$

$$\#F = 80,$$

$$\#E = 60,$$

$$\#(S \cap F) = 50,$$

$$\#(S \cap E) = 25,$$

$$\#(F \cap E) = 30,$$

$$\#(S \cap F \cap E) = 10.$$

由这些数据，我们可以计算出图 1-4 的文氏图各个区域中的元素个数，因而得出对三种语言一种也不会的学生人数为 5。

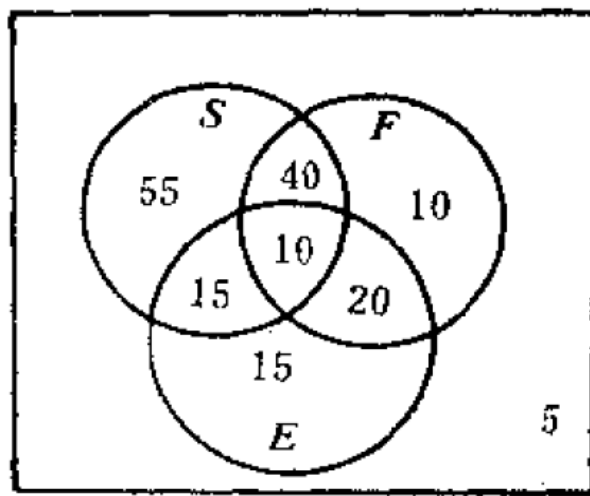


图 1-4

1.6 集合成员表

成员表是用表格的方式描述集合的并、交、补运算的定义. 表 1-1 中任一集合 S 所标记的列中, 0 表示全集合中的元素 $u \notin A$, 1 表示 $u \in A$. 利用上述三个基本的成员表可以进而构造出全集合 U 的其他子集的成员表.

A' 的成员表

A	A'
0	1
1	0

$A \cup B$ 的成员表

A	B	$A \cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$A \cap B$ 的成员表

A	B	$A \cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1-11 试构造集合 $(A \cup B) \cap (B \cup C)'$ 和集合 $A \cap B'$ 的成员表, 通过其成员表判断这两个集合之间是否有相等关系或包含关系.

解 构造两个集合的成员表, 如表 1-2 所示.

表 1-2

A	B	C	$A \cup B$	$B \cup C$	$(B \cup C)'$	$(A \cup B) \cap (B \cup C)'$	B'	$A \cap B'$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0

集合 $(A \cup B) \cap (B \cup C)'$ 所标记的列中, 仅在第五行为 1, 这意味着当元素 $u \in A, u \notin B$ 且 $u \notin C$ 时, $u \in (A \cup B) \cap (B \cup C)'$, 而在其他情形下, 元素 $u \notin (A \cup B) \cap (B \cup C)'$.

集合 $A \cap B'$ 所标记的列中, 第五行与第六行均为 1, 这意味着当元素 $u \in A, u \notin B$ 且 $u \notin C$ 时, $u \in A \cap B'$, 当元素 $u \in A, u \in C$ 但 $u \notin B$ 时, 也有 $u \in A \cap B'$.

由上可以看出, 当元素 $u \in (A \cup B) \cap (B \cup C)'$ 时, 也有 $u \in A \cap B'$, 但当 $u \in A \cap B'$ 时, 不一定有 $u \in (A \cup B) \cap (B \cup C)'$, 所以可以得出结论 $(A \cup B) \cap (B \cup C)' \subseteq A \cap B'$.

小结

1. 集合及有关概念、集合的表示法

- 集合、元素、集合的基数；
- 集合的两种表示方法——列举法和描述法；
- 两个特殊的集合——全集和空集；
- 子集、包含集和幂集；

2. 集合间的关系

- 集合间的包含关系 $B \subseteq A$ ；
- 集合间的真包含关系 $B \subset A$ ；
- 集合间的相等关系 $A = B$ ；
- 集合间的互补关系 $B' = A$.

3. 集合的运算

- 集合的并运算 $A \cup B$;
- 集合的交运算 $A \cap B$;
- 集合的补运算——相对补运算($B - A$)、绝对补运算($A' = U - A$), A' 简称为 A 的补集;
- 集合运算的定律.

4. 对集合间的关系和运算进行分析和论证的工具

- 文氏图——直观、形象,可作为描述和分析的工具;
- 成员表——根据运算的定义严格构造出来的,可作为证明的工具.

1.7 集合运算的定律

22

交换律 $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

结合律 $A \cup (B \cup C) = A \cup (B \cup C)$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

同一律 $A \cup \emptyset = A$; $A \cap U = A$

互补律 $A \cup A' = U$; $A \cap A' = \emptyset$

对合律 $(A')' = A$

幂等律 $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

零一律 $A \cup U = U$; $A \cap \emptyset = \emptyset$

吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$

德·摩根定律 $(A \cup B)' = A' \cap B'$; $(A \cap B)' = A' \cup B'$

上午9时21分

集合的证明方法

23

文氏图、定义直接证明、利用集合运算的定律和性质证明

例 摩根定律 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ 的证明

1) 依据定义直接证明

对任意 $u \in (A \cup B)'$ ，根据补集的定义有 $u \notin A \cup B$ ，即 $u \notin A$ 且 $u \notin B$ ，于是有 $u \in A'$ 且 $u \in B'$ ，即 $u \in A' \cap B'$ 。由子集的定义可知 $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$ 。

反之，设 $u \in A' \cap B'$ ，则 $u \in A'$ 且 $u \in B'$ ，由补集的定义有 $u \notin A$ 且 $u \notin B$ ，即 $u \notin A \cup B$ ，再由补集的定义可知 $u \in (A \cup B)'$ 。故有 $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$ 。

由集合相等的定义可知 $(A \cup B)' = A' \cap B'$

2) 利用集合运算的定律和性质证明

利用互补律只需证

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset, \quad (A \cup B) \cup (A' \cap B') = U$$

上午9时21分

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B') = (A \cap (A' \cap B')) \cup (B \cap (A' \cap B'))$$

$$= ((A \cap A') \cap B') \cup ((B \cap B') \cap A')$$

$$= (\emptyset \cap B') \cup (\emptyset \cap A')$$

$$= \emptyset$$

$$(A \cup B) \cup (A' \cap B') = (A \cup B \cup A') \cap (A \cup B \cup B')$$

$$= ((A \cup A') \cup B) \cap (A \cup (B \cup B'))$$

$$= (U \cup B) \cap (A \cup U)$$

$$= U \cap U$$

证毕

其它一些有用的性质

$$1) A \subseteq C, B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$$

$$2) A \subseteq C, A \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$$

$$3) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

证明:

a) 设 $A \subseteq B$, 因 $B \subseteq B$, 故 $A \cup B \subseteq B$; 又 $B \subseteq A \cup B$, 所以有 $A \cup B = B$.

设 $A \cup B = B$, 则 $A \cup B \subseteq B$, 而 $A \subseteq A \cup B$, 故 $A \subseteq B$.

b) 设 $A \subseteq B$, 因 $A \subseteq A$, 故 $A \subseteq A \cap B$; 又 $A \cap B \subseteq A$, 所以有 $A \cap B = A$.

设 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq A \cap B \subseteq B$, 故 $A \subseteq B$.

4) $A-B=A \Leftrightarrow A \cap B=\emptyset$

设 $A-B=A$, 则 $A \cap B=(A-B) \cap B=(A \cap B') \cap B=A \cap (B' \cap B)=A \cap \emptyset=\emptyset$

设 $A \cap B=\emptyset$, 则

$$A=A \cap (B \cup B')=(A \cap B) \cup (A \cap B')=\emptyset \cup (A \cap B')=A \cap B'=A-B$$

1.8 分划

27

在日常生活常中，人们常遇到对人员分组、对物品分类等问题，这些分组和分类的问题在集合中抽象为分划问题。

定义1-12 分划： 设 $\pi=\{A_i\}_{i\in K}$ 是集合A的某些非空子集的集合，如果集合A的每一个元素在且在其中某一个子集 A_i 中，则称**集合 π 是集合A的一个分划**， A_i 称为该分划的一个分划块。即

$$\pi=\{A_i\}_{i\in K}$$

$$(1) (A_i \cap A_j) = \emptyset$$

$$(2) \bigcup_{i=K} A_i = A$$

例 设 $A=\{1, 2, 3\}$ ，则

$$\pi_1=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \pi_2=\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \pi_3=\{\{1, 2\}, \{3\}\},$$

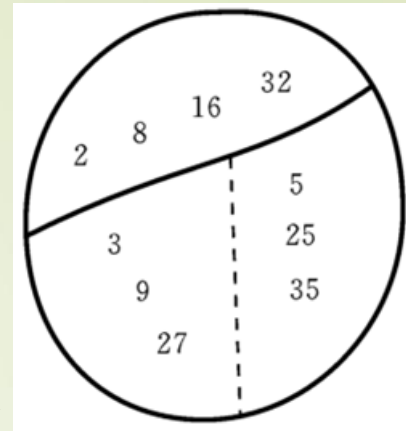
$$\pi_4=\{\{1, 3\}, \{2\}\}, \pi_5=\{\{1, 3, 2\}\} \text{ 都是 } A \text{ 的分划。}$$



上午9时21分

显然分划不唯一，如何分，根据需要和条件。

细分的概念：对集合A进行了一次分划后，还可以再进行二次分划，将一次分划块细分为更小的块。例如图书馆对书籍的分类。



定义1-13：设 $\bar{\pi} = \{\bar{A}_i\}_{i \in K}$ 和 $\pi = \{A_j\}_{j \in K}$ 是集合的两个分划，如果 $\bar{\pi}$ 的每一个 \bar{A}_i 都是 π 中的某个 A_j 的子集，则称分划 $\bar{\pi}$ 是分划 π 的一个**细分**。若 $\bar{\pi}$ 中至少有一个 \bar{A}_i 为 π 中某个 A_j 的真子集，则称 $\bar{\pi}$ 是 π 的一个**真细分**。

例 设 $A = \{1, 2, 3\}$ ，则

$$\pi_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \pi_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \pi_3 = \{\{1, 2\}, \{3\}\},$$

$$\pi_4 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \pi_5 = \{\{1, 3, 2\}\} \text{ 都是 } A \text{ 的分划。}$$

例子中的 π_1 、 π_2 、 π_3 、 π_4 都是 π_5 的真细分， π_1 是 π_2 、 π_3 是 π_4 的真细分。 π_1 无法再细分，称为**最细分**， π_5 称为**最粗分**，即不进行分划。

设 A_1, A_2, \dots, A_r 是全集合 U 的一组子集, 对 $\emptyset, U, A_1, A_2, \dots, A_r$ 有限次地施加“'”、“ \cup ”、“ \cap ”运算, 所得到的集合称为是由 A_1, A_2, \dots, A_r 所产生的集合.

由 A_1, A_2, \dots, A_r 所产生的集合, 可以利用集合的运算定律将其变形化为标准形式.

$$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$$

集合的标准形式可分为最小集标准形式和最大集标准形式. 最小集标准形式是将集合表示成 A_1, A_2, \dots, A_r 的不同最小集的并; 最大集标准形式是将集合表示成 A_1, A_2, \dots, A_r 的不同最大集的交.

$$(A \cup B \cup C) \cap (A' \cup B \cup C)$$

例 1-13 利用集合运算的定律求出集合 $(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C'))$ 的最小集和最大集标准形式.

解 (1) 求最小集标准形式.

$$\begin{aligned} & (A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C')) \\ &= (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap C') \\ &= (A \cap B' \cap (C \cup C')) \cup ((A' \cap B) \cap (C \cup C')) \cup ((A' \cap C') \cap (B \cup B')) \\ &= (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup \underline{(A' \cap B \cap C')} \\ & \quad \cup \underline{(A' \cap B \cap C')} \cup (A' \cap B' \cap C') \\ &= (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C') \\ & \quad \cup (A' \cap B' \cap C'). \end{aligned}$$

(2) 求最大集标准形式.

$$\begin{aligned}
 & (A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C')) \\
 &= ((A \cap B') \cup A') \cap ((A \cap B') \cup (B \cup C')) \\
 &= \underline{(A \cup A')} \cap (B' \cup A') \cap (A \cup B \cup C') \cap \underline{(B' \cup B \cup C')} \\
 &= (A' \cup B') \cap (A \cup B \cup C') \\
 &= \underline{(A' \cup B')} \cup (C \cap C') \cap (A \cup B \cup C') \\
 &= (A' \cup B' \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C') \cap (A \cup B \cup C').
 \end{aligned}$$

例 1-14 利用集合的成员表求出例 1-13 中集合的标准形式.

解 (1) 构造集合 $(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C'))$ 的成员表, 见表 1-3.

表 1-3

A	B	C	B'	$A \cap B'$	A'	C'	$B \cup C'$	$A' \cap (B \cup C')$	$(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C'))$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

(2) 分别找出 $(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C'))$ 所标记的列中 1 所有的行和 0 所在的行.

1 所在的行是 000, 010, 011, 100, 101;

0 所在的行是 001, 110, 111.

(3) 根据 $(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C'))$ 所标记的列中 1 所在的行, 直接写出该集合的最小集标准形式.

$$\begin{aligned} & (A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C')) \\ &= M_{000} \cup M_{010} \cup M_{011} \cup M_{100} \cup M_{101} \\ &= (A' \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B' \cap C). \end{aligned}$$

根据 $(A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C'))$ 所标记的列中 0 所在的行, 直接写出该集合的最大集标准形式.

$$\begin{aligned} & (A \cap B') \cup (A' \cap (B \cup C')) \\ &= \bar{M}_{001} \cap \bar{M}_{110} \cap \bar{M}_{111} \\ &= (A \cup B \cup C') \cap (A' \cup B' \cup C) \cap (A' \cup B' \cup C'). \end{aligned}$$

作业

2, 6, 14(2)(4), 16(1)(2), 20, 22(2), 24, 25

第一章 小结

1. 集合及有关概念、集合的表示法

- 集合、元素、集合的基数；
- 集合的两种表示方法——列举法和描述法；
- 两个特殊的集合——全集和空集；
- 子集、包含集和幂集；
- 分划和细分；
- 集合的最小集标准形式和最大集标准形式.

2. 集合间的关系

- 集合间的包含关系 $B \subseteq A$ ；
- 集合间的真包含关系 $B \subset A$ ；
- 集合间的相等关系 $A = B$ ；
- 集合间的互补关系 $B' = A$.

3. 集合的运算

- 集合的并运算 $A \cup B$;
- 集合的交运算 $A \cap B$;
- 集合的补运算——相对补运算($B - A$)、绝对补运算($A' = U - A$), A' 简称为 A 的补集;
- 集合运算的定律.

4. 对集合间的关系和运算进行分析和论证的工具

- 文氏图——直观、形象,可作为描述和分析的工具;
- 成员表——根据运算的定义严格构造出来的,可作为证明的工具.

例题讲解

例 1-1 设全集是整数集 \mathbf{Z} , 试用列举法表示下列集合.

(1) $A = \{x \mid x^2 - 16 = 0 \text{ 或 } x^4 = 1\};$

(2) $B = \{x \mid x^2 - 10x - 24 < 0 \text{ 且 } -5 \leq x \leq 6\}.$

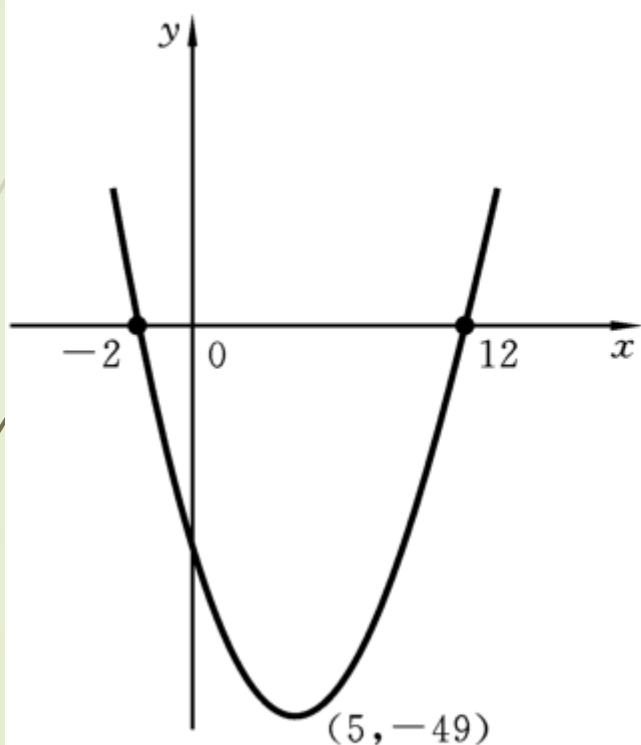


图 1-1

解 (1) 满足 $x^2 - 16 = 0$ 即 $x^2 = 16$ 的 x 有两个整数 $x_1 = 4$ 和 $x_2 = -4$. 满足 $x^4 = 1$ 的 x 也有两个整数 $x_3 = 1$ 和 $x_4 = -1$. 因此

$$A = \{4, -4, 1, -1\}.$$

(2) 令 $y = x^2 - 10x - 24 = (x - 5)^2 - 49$, 显然, 当 $x = -2$ 和 $x = 12$ 时, $y = 0$, 当 $x = 5$ 时, y 有极小值 -49 . 函数图形如图 1-1 所示. 因为 B 是全集 \mathbf{Z} 的子集, 所以当

$$x = -1, 0, 1, 2, \dots, 11 \text{ 时, } y < 0.$$

但 x 的这些取值中, 只有 8 个数满足不等式 $-5 \leq x \leq 6$, 因此

$$B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

例 1-2 设 $A = \{a, b, \{c\}, \{a\}, \{a, b\}\}$, 试指出下列论断是否正确.

- | | |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| (1) <u>$a \in A$</u> ; | (2) <u>$\{a\} \in A$</u> ; |
| (3) <u>$\{a\} \subseteq A$</u> ; | (4) <u>$\emptyset \in A$</u> ; |
| (5) <u>$\emptyset \subseteq A$</u> ; | (6) $b \in A$; |
| (7) $\{b\} \in A$; | (8) $\{b\} \subseteq A$; |
| (9) $\{a, b\} \in A$; | (10) $\{a, b\} \subseteq A$; |
| (11) $c \in A$; | (12) $\{c\} \in A$; |
| (13) $\{c\} \subseteq A$; | (14) $\{a, b, c\} \subseteq A$. |

解 (1)、(2)、(3)、(5)、(6)、(8)、(9)、(10)、(12) 正确;
(4)、(7)、(11)、(13)、(14) 错误.

例 1-3 对于任意集合 A, B 和 C , 下述论断是否正确? 请说明理由.

- (1) 若 $A \in B, B \subseteq C$, 则 $A \in C$; (2) 若 $A \in B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$;
(3) 若 $A \subseteq B, B \in C$, 则 $A \in C$; (4) 若 $A \subseteq B, B \in C$, 则 $A \subseteq C$.

解 (1) 正确.

因为 $B \subseteq C$, 所以集合 B 的每一个元素也是集合 C 的元素, 由 $A \in B$ 知 A 是 B 的一个元素, 因此 A 也是 C 的一个元素, 故 $A \in C$.

(2) 错误.

举反例如下: 设 $A = \{a\}, B = \{\{a\}, b\}, C = \{\{a\}, b, \{d\}\}$. 显然 $A \in B, B \subseteq C$, 但 $A \not\subseteq C$. 因为 $a \in A$, 但 $a \notin C$.

(3) 和 (4) 都是错误的.

举反例如下: 设 $A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{\{a, b\}, d\}$. 显然 $A \subseteq B, B \in C$, 但 $A \notin C$. 因为集合 C 中没有元素 $\{a\}$. 又 $A \not\subseteq C$, 因为集合 A 中的元素 a 不是集合 C 的元素.

例 1-4 列出下列集合的全部子集.

(1) $A = \{a, \{b\}\};$

(2) $B = \{\emptyset\};$

(3) $C = \emptyset.$

中只有两个元素,故 A 再没有其他的子集.

由上可知, A 有四个子集: $\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}$ 和 $\{a, \{b\}\}$.

(2) 与上同样的道理, \emptyset 是 B 的子集,此外由于 B 中仅有一个元素 \emptyset ,因此 B 仅有的另一个子集是 $\{\emptyset\}$,即 B 自己.

由上可知, B 有两个子集: \emptyset 和 $\{\emptyset\}$.

(3) \emptyset 是任何集合的子集,因此 \emptyset 也是 \emptyset 的子集,即 \emptyset 是 C 的子集. 因为 C 中没有元素,所以 C 不可能有其他的子集,故 C 只有一个子集: \emptyset .

由真子集的定义,对于任意集合 A ,除了 A 自身不是 A 的真子集外,其他子集均是 A 的真子集. 因此以下结论成立.

- $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ 有三个真子集: } \emptyset, \{a\} \text{ 和 } \{\{b\}\}. \\ B \text{ 有一个真子集: } \emptyset. \\ C \text{ 没有真子集.} \end{array} \right.$

集合 A 的幂集是以 A 的所有子集为元素组成的集合. 因此只要子集的概念清楚,将 A 的所有子集列出来,便可得到 A 的幂集, A 的幂集记作 2^A 或 $P(A)$.

例 1-5 求下列集合的幂集.

(1) $A = \{a, \{b\}, \{a, b\}\};$

(2) $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$

解 (1) $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, \{\{a, b\}\}, \{a, \{b\}\}, \{a, \{a, b\}\}, \{\{b\}, \{a, b\}\}, \{a, \{b\}, \{a, b\}\}\};$

(2) $2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$

例 1-6 设 $A = \{i | i = 2k, k \in N\}$, $B = \{i | i = 2^k, k \in N\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, 试用符号“ \subseteq ”、“ \subset ”和“ $=$ ”恰当地连结这些集合. 这里 N 表示正整数集.

解 由集合 A 中元素的定义条件可知, $A = \{i | i \text{ 是正偶数}\}$, 所以 $A = C$. 由集合 B 中元素的定义条件, $B = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ 是部分正偶数的集合, 所以 $B \subseteq A$. 因为 $6 \notin B, 10 \notin B, \dots$, 所以 B 是 A 的真子集, 因此又有 $B \subset A$. 于是也有 $B \subseteq C, B \subset C$.

例 1-7 设 $A = \{2, 3, \{2, 3\}, \emptyset\}$, 求下列集合.

- (1) $A - \{2, 3\}$;
- (2) $\{\{2, 3\}\} - A$;
- (3) $A - \emptyset$;
- (4) $A - \{\emptyset\}$.

解 (1) $A - \{2, 3\} = \{\{2, 3\}, \emptyset\}$;

(2) $\{\{2, 3\}\} - A = \emptyset$;

(3) $A - \emptyset = A$;

(4) $A - \{\emptyset\} = \{2, 3, \{2, 3\}\}$.

集合的差运算可转化为集合的交运算和补运算来表达.

例 1-8 设 A, B 是任意两个集合, 试证明

$$A - B = A \cap B'. \quad (1-1)$$

分析 根据两集合相等的定义, 若能证明 $A - B \subseteq A \cap B'$ 且 $A \cap B' \subseteq A - B$, 则 $A - B = A \cap B'$ 便成立.

证 设 $u \in A - B$, 则 $u \in A$ 且 $u \notin B$, 即 $u \in A$ 且 $u \in B'$, 因此 $u \in A \cap B'$, 故 $A - B \subseteq A \cap B'$.

反之, 设 $u \in A \cap B'$, 则 $u \in A$ 且 $u \in B'$, 即 $u \in A$ 且 $u \notin B$, 由差集的定义 $u \in A - B$, 因此 $A \cap B' \subseteq A - B$.

由上证得 $A - B = A \cap B'$.

例 1-9 设 A, B, C 为任意集合, 试证明

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

证 $A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C')$ (1-1)

$$= A \cap B \cap C',$$
 结合律

又 $(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$ (1-2)

$$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$$
 德摩根定律

$$= (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C')$$
 分配律

$$= \emptyset \cup (A \cap B \cap C')$$
 交换律、结合律、互补律

$$= A \cap B \cap C',$$
 同一律

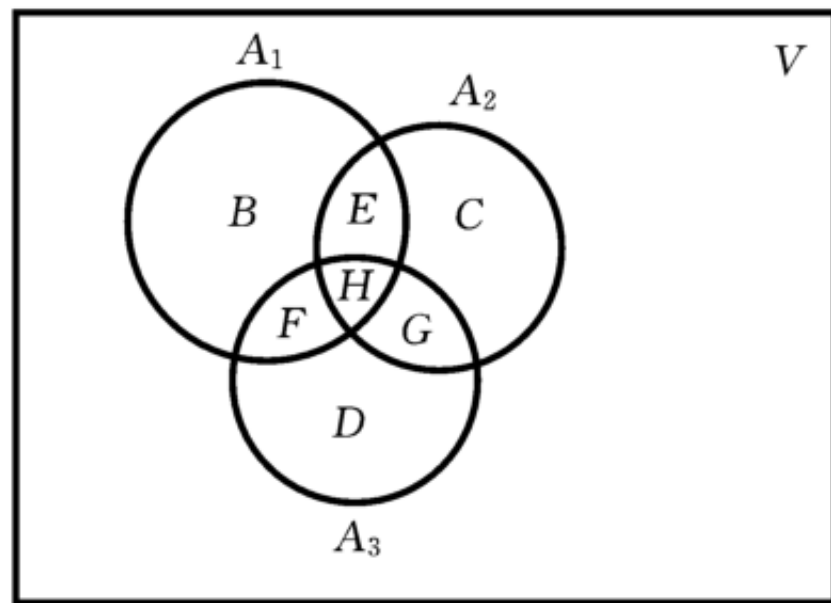
因此 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$

例 1-10 某学校举行运动会,有 100 m 短跑、掷铅球和跳高三个项目. 二年级 170 人,已知有 25 人三个项目都参加了,有 62 人至少参加了两个项目. 若该年级参加比赛的总人次是 200 人次,试问有多少人没有参加任何项目?

解 (1) 用集合的概念描述上述问题.

设全集合 U 为二年级 170 人的集合, A_1 为参加 100 m 短跑的学生集合, A_2 为参加掷铅球的学生集合, A_3 为参加跳高的学生集合.

(2) 用文氏图(图 1-2)表示各个集合.



由题设条件和文氏图可知有关集合的基数：

$$\#U=170(\text{人}),$$

$$\#H=\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=25(\text{人}),$$

$$\#(E \cup H \cup F \cup G)=62(\text{人}).$$

(3) 计算.

$$\#(E \cup F \cup G)=\#(E \cup H \cup F \cup G)-\#H=62-25=37(\text{人}),$$

$$25 \times 3=75(\text{人次}),$$

$$37 \times 2=74(\text{人次}),$$

$$200-(75+74)=51(\text{人次}),$$

因此

$$\#B+\#C+\#D=51(\text{人}),$$

于是

$$\begin{aligned}\#((A_1 \cup A_2 \cup A_3)') &= \#U - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= 170 - (51 + 62) = 57(\text{人}),\end{aligned}$$

故该年级有 57 人没有参加任何项目.

例 1-12 设 $A = \{2, 3, 5, 8, 9, 16, 22, 25, 27, 35\}$, 按照 A 中元素是奇数或偶数来区分, 可将 A 中元素分划为两块:

$$B_1 = \{3, 5, 9, 25, 27, 35\};$$

$$B_2 = \{2, 8, 16, 22\}.$$

因此 $\Pi_1 = \{B_1, B_2\}$ 是集合 A 的一个分划.

按照 A 中元素能被 2 整除、被 3 整除或被 5 整除来区分, 又可将 A 中元素分划为三块:

$$A_2 = \{2, 8, 16, 22\};$$

$$A_3 = \{3, 9, 27\};$$

$$A_5 = \{5, 25, 35\}.$$

因此 $\Pi_2 = \{A_2, A_3, A_5\}$ 也是集合 A 的一个分划.

若按照 A 中元素能被 2 整除、被 3 整除或被 4 整除来区分, 可得到 A 的如下几个非空子集:

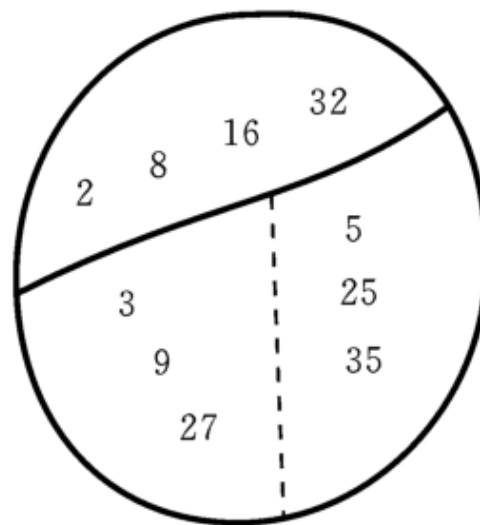
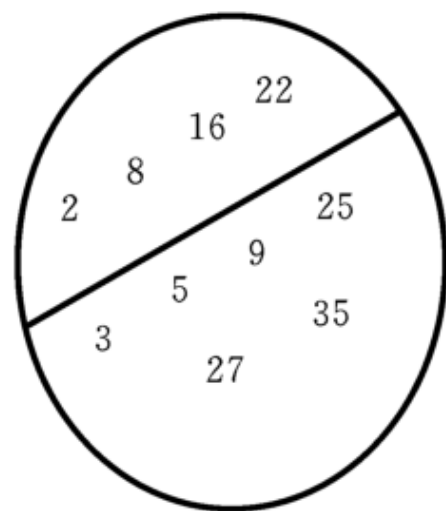
$$A_2 = \{2, 8, 16, 22\};$$

$$A_3 = \{3, 9, 27\};$$

$$A_4 = \{8, 16\}.$$

可令 $S = \{A_2, A_3, A_4\}$, 但 S 不是 A 的分划. 原因之一是 A_2 与 A_4 有公共元素; 原因之二是有些元素, 如 5, 25, 35 不在任何子集中.

分划 Π_1 有两个分划块, 分划 Π_2 有三个分划块. 容易发现 $A_2 \subseteq B_2, A_3 \subseteq B_1, A_5 \subseteq B_1$, 即 Π_2 的每一个分划块都是 Π_1 的某一个分划块的子集. 因此 Π_2 是 Π_1 的细分. 如图所示, 图 1-3 表示 Π_1 将 A 分划成两块, 图 1-4 表示 Π_2 将 A 分划成三块. 图 1-4 可由在图 1-3 的基础上加一根分划线(图中用虚线表示)的方法, 将 Π_1 中的一个分划块分成两个分划块而得到.



例 1-15 给定正整数集 \mathbf{N} 的下列子集：

$$A = \{2, 5, 8, 9, 11\};$$

$$B = \{i \mid i^3 < 100\};$$

$$C = \{i \mid i \text{ 可被 } 3 \text{ 整除且 } i \leq 30\}.$$

求下列集合.

$$(1) (A \cup B) \cap C;$$

$$(2) A \cup (B \cap C);$$

$$(3) B - (A \cup C);$$

$$(4) (A' \cap B) \cup C.$$

解 因为

$$A = \{2, 5, 8, 9, 11\};$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\};$$

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\},$$

所以

$$(1) (A \cup B) \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11\} \cap C = \{3, 9\};$$

$$(2) A \cup (B \cap C) = A \cup \{3\} = \{2, 3, 5, 8, 9, 11\};$$

$$(3) B - (A \cup C) = B - \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\} = \{1, 4\}.$$

$$(4) \text{ 因为 } A' = \{1, 3, 4, 6, 7, 10\} \cup \{12, 13, 14, \dots\}, \text{ 所以}$$

$$(A' \cap B) \cup C = \{1, 3, 4\} \cup C = \{1, 3, 4, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}.$$

例 1-16 试定义两个集合 A, B , 使得 $A \in B$ 且 $A \subseteq B$.

解 定义 $A = \{a\}, B = \{\{a\}, a\}$, 则有 $A \in B$ 且 $A \subseteq B$.

例 1-19 设 A, B 是任意的集合, 试证明当且仅当 $A \subseteq B$ 时, $2^A \subseteq 2^B$.

证 设 $A \subseteq B$ 且 $S \in 2^A$, 则 $S \subseteq A$, 因为 $A \subseteq B$, 所以 $S \subseteq B$, 因此 $S \in 2^B$, 故 $2^A \subseteq 2^B$.

反之, 设 $2^A \subseteq 2^B$ 且 $u \in A$, 则 $\{u\} \subseteq A$, 因此 $\{u\} \in 2^A$, 由 $2^A \subseteq 2^B$, 所以 $\{u\} \in 2^B$, 因此 $\{u\} \subseteq B$, 于是 $u \in B$. 故 $A \subseteq B$.

例 1-21 试证明对任意集合 A, B, C , 等式 $(A-B) \cup (A-C) = A$ 成立的充要条件是 $A \cap B \cap C = \emptyset$.

证 先证必要性.

设 $(A-B) \cup (A-C) = A$, 因为

$$\begin{aligned}(A-B) \cup (A-C) &= (A \cap B') \cup (A \cap C') = A \cap (B' \cup C') \\ &= A \cap (B \cap C)' = A - (B \cap C), \\ A - (B \cap C) &= A.\end{aligned}$$

所以

于是对任意的 $x \in A$, 必有 $x \in A - (B \cap C)$, 因而必有 $x \notin B \cap C$. 故 $A \cap (B \cap C) = \emptyset$.

再证充分性.

设 $A \cap B \cap C = \emptyset$, 则对任意 $x \in A$, 必有 $x \notin B \cap C$, 即 $x \in (B \cap C)'$, 因此 $A \subseteq (B \cap C)'$. 于是

$$(A-B) \cup (A-C) = A \cap (B \cap C)' = A.$$

例 1-23 设有集合 A, B , 且 $A \cap B = A$, 求联合方程组

$$\begin{cases} x \cup A = B; \\ x \cap A = \emptyset \end{cases}$$

的解, 并证明此解是唯一的.

解 由 $A \cap B = A$ 可知 $A \cup B = B$. 令 $x = B - A$, 因为

$$\begin{aligned} (B - A) \cup A &= (B \cap A') \cup A = (B \cup A) \cap (A' \cup A) \\ &= (B \cup A) \cap U = A \cup B = B, \\ (B - A) \cap A &= (B \cap A') \cap A = \emptyset, \end{aligned}$$

所以集合 $B - A$ 是联立方程组的解.

假设 x_1 和 x_2 均是联立方程组的解, 则

$$x_1 \cup A = x_2 \cup A, \quad x_1 \cap A = x_2 \cap A.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } x_1 &= x_1 \cap (x_1 \cup A) = x_1 \cap (x_2 \cup A) = (x_1 \cap x_2) \cup (x_1 \cap A) \\ &= (x_1 \cap x_2) \cup (x_2 \cap A) = x_2 \cap (x_1 \cup A) = x_2 \cap (x_2 \cup A) = x_2. \end{aligned}$$

故 $B - A$ 是联立方程组唯一的解.

END of Chapter 1