

1. 设 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是宽平稳过程, 若自相关函数 $R_X(\tau) = 2\delta(\tau) + 2$, 则谱密度 $S_X(\omega) =$ (7), $\{X(t)\}$ 的均值各态历经当且仅当均值 $\mu_X =$ (8)。

(7) $2 + 4\pi\delta(\omega)$

(8) $\pm\sqrt{2}$

2. 设 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是宽平稳过程, 若均值函数 $\mu_X = 2$, 自相关函数 $R_X(\tau) = e^{-|\tau|} + a$, 则 $\{X(t)\}$ 的谱密度 $S_X(\omega) =$ _____, 均值各态历经当且仅当均值 $a =$ _____。

● $\frac{2}{1+\omega^2} + 2\pi a\delta(\omega)$ 4

3. 设 $\{B(t); t \geq 0\}$ 是标准布朗运动, $A \sim N(1,1)$, 且 A 与 $\{B(t); t \geq 0\}$ 独立。

设 $X(t) = A[B(t+1) - B(t)]$, $t \geq 0$ 。

(1) 计算 $\{X(t)\}$ 的均值函数和自相关函数, 并证明它是宽平稳过程;

(2) 判断 $\{X(t)\}$ 的均值是否具有各态历经性, 并说明理由。

- (1) $\mu_X(t) = EX(t) = 0$

$$R_X(t, t+\tau) = EX(t)X(t+\tau) = \begin{cases} 2(1-|\tau|), & |\tau| \leq 1; \\ 0, & |\tau| > 1. \end{cases}$$

因为 $\mu_X(t)$ 是常数, $R_X(t, t+\tau)$ 只与 τ 有关, 所以 $\{X(t)\}$ 是宽平稳过程。

(2) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0 = \mu_X^2$, 所以均值具有各态历经性

4. 设 $X(t) = A \cos(t + \Theta) + B, -\infty < t < \infty$, 这里 A, B, Θ 相互独立,

$$A \sim N(1,1), \Theta \sim U(0, 2\pi), B \text{ 具有概率密度 } f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 计算 $\{X(t)\}$ 的均值函数和自相关函数, 并证明它是一个宽平稳过程;

(2) 计算时间的均值 $\langle X(t) \rangle$ 和时间的自相关函数 $\langle X(t)X(t+\tau) \rangle$;

(3) 判断过程 $\{X(t)\}$ 的均值和自相关函数有没有各态历经性。

$$(1) \mu_X(t) = 0$$

$$R_X(t, t+\tau) = \frac{1}{2} + \cos \tau$$

因为 $\mu_X(t)$ 是常数, $R_X(t, t+\tau)$ 只与 τ 有关, 所以是宽平稳

↵

$$(2) \langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = B$$

$$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t+\tau) dt = \frac{A^2}{2} \cos \tau + B^2$$

(3) 都不具有

5. 设 $X(t) = A \cos(t + 2\pi B)$, $-\infty < t < \infty$, 这里 A, B 相互独立同服从区间

$(0, 1)$ 上的均匀分布。(1) 计算 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 的均值函数和自相关函数, 并证明它

是一个宽平稳过程; (2) 计算 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 的时间均值 $\langle X(t) \rangle$ 和时间相关函数

$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle$, 判断 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 是否为各态历经过程, 说明理由。

(公式 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.)

$$(1) \quad E(A) = 0, E(A^2) = \frac{1}{3}, \quad \mu_X(t) = 0, \quad R_X(t, t + \tau) = \frac{\cos \tau}{6}, \quad \leftarrow$$

$$(2) \quad \langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (A \cos(t + 2\pi B)) dt = 0 ;$$

$\therefore P(\langle X(t) \rangle = \mu_X) = 1, \therefore$ 均值具各态历经性。 \leftarrow

$$\langle X(t)X(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \cos(t + 2\pi B) \cos(t + \tau + 2\pi B) dt = \frac{A^2 \cos \tau}{2} ;$$

$\therefore P(\langle X(t)X(t + \tau) \rangle = \frac{\cos \tau}{6}) \neq 1, \therefore$ 相关函数不具各态历经性，不是各态历经过程。