Лабораторная работа №2

Решение нелинейных уравнений

Цель работы: изучение методов численного решения нелинейных уравнений; приобретение навыков программирования методов численного решения нелинейных уравнений; приобретение навыков использования стандартных средств системы Matlab для численного решения нелинейных уравнений.

Теоретические сведения

Постановка задачи численного решения нелинейных уравнений. Требуется решить уравнение относительно переменной x вида

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

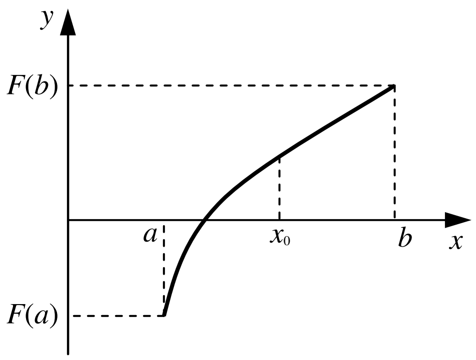
где $F(x)$ - нелинейная непрерывная функция.

Аналитическое решение данного уравнения можно получить лишь в простейших случаях. В большинстве случаев такие уравнения приходится решать численными методами. Численное решение уравнения вида (1) предполагает выполнение двух этапов.

На первом этапе проводится исследование существования корней, определяется их количество и расположение в искомом интервале значений переменной x. Искомый корень следует изолировать, выбрав такой интервал, на котором этот корень является единственным. Такой интервал называют интервалом изоляции корня (отрезком локализации), а сам этап - локализацией корней. Цель этапа локализации считается достигнутой, если для каждого из подлежащих определению корней удалось указать отрезок локализации (по возможности, минимальный).

На втором этапе решения определяется искомый изолированный корень. Напомним, что корнем называется такое значение переменной $x = \bar{x}$, при котором уравнение (1) обращается в тождество. На этом этапе для вычисления каждого из корней с точностью $\varepsilon > 0$ используют тот или иной итерационный метод, позволяющий построить последовательность $\left\{x^{(k)}\right\}$ приближений к корню. Итерационный метод сходится, если $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = \bar{x}$. Метод называется одношаговым, если для вычисления очередного приближения $x^{(k)}$ используется только одно предыдущее приближение $x^{(k-1)}$, и m-шаговым, если для вычисления используются m предыдущих приближений. Для построения многошаговых методов требуется задание m начальных приближений.

Метод деления отрезка пополам (дихотомии, бисекций). Допустим, что каким-либо способом определен отрезок $[a, b]$ изоляции корня. Это означает, что график функции $F(x)$ пересекает ось абсцисс (рис.4.1), т.е. значения $F(a)$ и $F(b)$ имеют разные знаки. Для определенности будем считать, что $F(a) < 0$, а $F(b) > 0$.



Найдем середину отрезка $[a, b]$ - число x_0 (нулевое приближение):

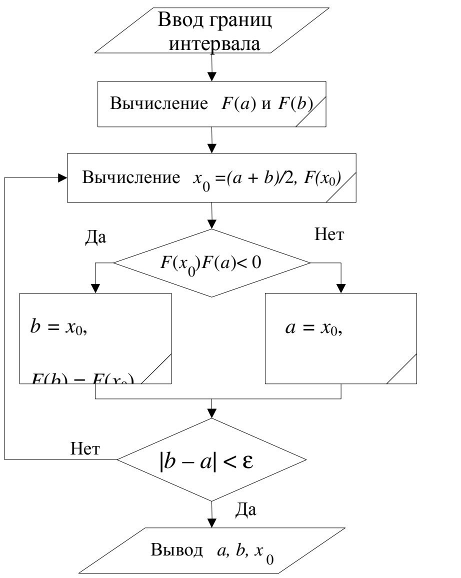
$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

и определим знак $F(x_0)$. Если $F(x_0) = 0$, то корень найден. Если $F(x_0) > 0$, то очевидно, что решение будет лежать на отрезке $[a, x_0]$. Далее найденный отрезок снова делим пополам, находим первое приближение:

$$x_1 = \frac{a + x_0}{2}$$

и определяем знак $F(x_1)$. После n приближений исходный отрезок, на котором ищется решение, будет уменьшен в 2^n раз. Неограниченное продолжение итерационного процесса дает последовательность отрезков $[a^{(0)}, b^{(0)}]$, …, $[a^{(n)}, b^{(n)}]$, содержащих искомый корень. Скорость сходимости метода определяется из следующих соображений. Середина n-го отрезка - точка $x^{(n)} = (a^{(n)} + b^{(n)})/2$ дает приближение к корню с абсолютной погрешностью

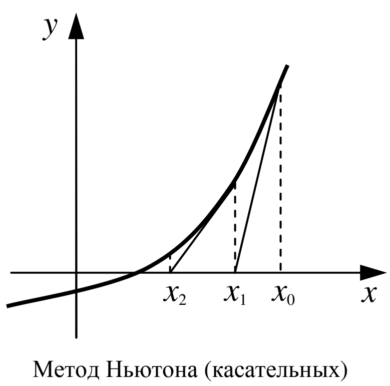
$$\left| x^{(n)} - \overline{x} \right| \le \frac{b^{(n)} - a^{(n)}}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$



Блок-схема метода деления отрезка пополам

Отсюда видно, что метод дихотомии сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/2$. Этот метод прост в реализации и весьма непритязателен. Для его реализации достаточно, чтобы на концах исходного отрезка функция имела разные знаки. Вычисления проводятся до тех пор, пока не выполнится либо условие $\left| x_{n+1} - x_n \right| \le 2\varepsilon$, либо условие $\left| F(x_{n+1}) - F(x_n) \right| \le \varepsilon_1$, где ε_1 - длина интервала неопределенности функции. Эти неравенства формируют критерий окончания итерационного процесса.

Метод Ньютона (касательных). Одним из наиболее эффективных методов нахождения корней уравнения (1) является метод Ньютона, численную реализацию которого можно получить, используя различные подходы. Допустим, найдено некоторое начальное приближение x_0 к решению уравнения. В точке с координатами $(x_0, F(x_0))$ проводим касательную к графику функции $F(x)$, после этого находим точку пересечения этой касательной с осью абсцисс - это будет первое приближение x_1. Строя касательную в точке $(x_1, F(x_1))$ и находя точку ее пересечения с осью Ox, определяем второе приближение x_2. Продолжая этот процесс, получаем последовательность приближений $x_0, x_1, \ldots,\ x_n, \ldots$ к корню уравнения (1). Именно благодаря такой геометрической интерпретации этот метод называют *методом касательных*.



Метод Ньютона (касательных)

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $F(x)$ в точке $(x_n, F(x_n))$, имеет вид

$$y = F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n).$$

Из условия $y = 0$ получаем следующее приближение для x_{n+1}:

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)/F'(x_n)\ . \tag{2}$$

Другой способ вывода уравнения (2) основывается на линеаризации функции $F(x)$ в достаточно малой окрестности корня. Используя эту процедуру, можно свести решение исходного нелинейного уравнения к последовательному решению линейных.

Пусть приближение x_n найдено, тогда, представляя функцию $F(x)$ в окрестности точки x_n в виде разложения в ряд по формуле Тейлора, получаем

$$F(x) = F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}F''(\xi)(x - \xi)^2\ , \tag{3}$$

где ξ - некоторая точка отрезка $[a, b]$.

Отбрасывая в правой части уравнения (3) квадратичный член, полагая $F(x) = 0$, и разрешая полученное уравнение относительно x, получаем уравнение (2).

Справедлива следующая оценка сходимости метода Ньютона:

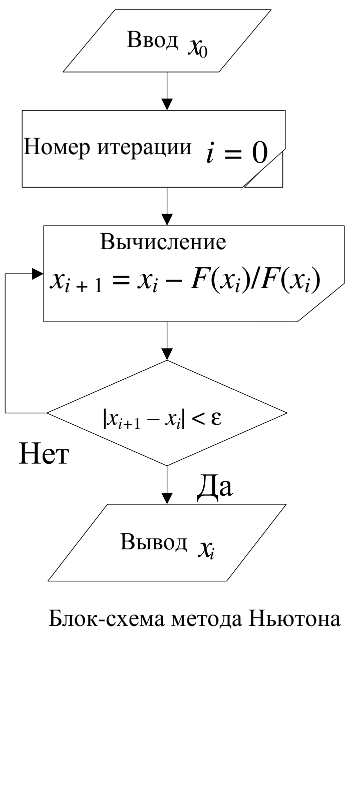
$$\left| x^{(n+1)} - \overline{x} \right| \le C \left| x^{(n)} - \overline{x} \right|^2,$$

означающая, что метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью. Здесь $\overline{x}$ - точное решение.

Метод Ньютона можно рассматривать как один из вариантов метода простой итерации. В самом деле, полагая

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)},$$

получаем, что итерационная формула (2) представляет собой метод простой итерации. При этом условие о сходимости метода Ньютона определяется условием сходимости метода простой итерации. Например, если $\left| f'(\xi) \right| \le q \le 1$, где ξ - некоторая точка, расположенная между x_n и $\overline{x}$, то итерационная процедура (2) сходится. При этом критерием окончания процедуры Ньютона может служить выполнение неравенства $\left| x_{n+1} - x_n \right| < \varepsilon$.



Блок-схема метода Ньютона

Средства Matlab для вычисления нулей функции одной переменной. Поставленную задачу в Matlab решает функция **fzero**:

- **b=fzero**('fun',x) **-** возвращает уточненное значение b, при котором достигается нуль функции fun при начальном значении аргумента x. Возвращенное значение близко к точке, где функция меняет знак, или равно **NaN**, если такая точка не найдена. Функция fun должна оформляться в виде m-файла-функции y=fun(x);
- **b=fzero**('fun',x) **-** возвращает значение, при котором функция равна нулю. Интервал поиска задается с помощью вектора x=[x1,x2] длиной 2 такого, что fun(x1) и fun(x2) имеют разные знаки. Если знаки не разные, то выдается сообщение об ошибке;
- **b=fzero**('fun',x,tol) **-** возвращает значение, при котором функция равна нулю, с заданной относительной погрешностью **tol**;
- **b=fzero**('fun',x,tol,trace) **-** выдает на экран информацию по каждой итерации, когда **tol** не нулевой;
- **b=fzero**('fun',x,tol,trace,p1,p2,…) **-** предусматривает дополнительные аргументы, передаваемые в функцию **y=fun**(x,p1,p2,…). Чтобы использовать значения **tol** или **trace** по умолчанию, необходимо ввести пустые матрицы, например **b=fzero**('fun',x,[],[],p1,p2,…).

В функции **fzero** нуль рассматривается как точка, где график функции **fun** пересекает ось x, а не касается ее. В зависимости от формы задания функции **fzero** реализуются следующие методы поиска нуля функции: деления отрезка пополам, секущих, обратного квадратичного интерполирования.

Порядок выполнения работы

1. Написать m-файлы-сценарии для нахождения нуля функции методами деления отрезка пополам и Ньютона (2) с заданным числом итераций. Функцию взять согласно номеру компьютера. Предусмотреть построение графика функции на интервале поиска корня (на отрезке $x \in [0.1, 4]$).

2. На отрезке $x \in [1, 2]$ найти решение нелинейного уравнения:

а) методом деления отрезка пополам, число итераций 15;

б) методом Ньютона, число итераций 15.

3. Сравнить результаты поиска различными методами по погрешности решения. Вычислить невязку решения.

4. Выполнить поиск нуля заданной функции с помощью функции Matlab **fzero**. Сравнить полученные результаты.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1) цель работы, задание;
2) описание метода решения, краткие сведения из теории (формулы, алгоритм и т.п.);
3) программу (распечатку), ее описание;
4) сравнение результатов расчета;
5) краткие выводы по работе.

Задание

1. $y=\sin\left(\ln(x)\right)-\cos(x)$
2. $y=\cos x^2+3/4$
3. $y=\ln x-\cos x^2/2$
4. $y=\cos\left(\sin x\right)-\cos x-1/2$
5. $y=\cos\left(\sin x\right)-x+1$
6. $y=\ln x-\sin x^2/2$
7. $y=\sin\left(\sin x^2\right)-1/2$
8. $y=\cos\left(\ln x\right)-\sin x$
9. $y=\sin x^2+1/3$
10. $y=\sin(3x^2/2)-x+2$
11. $y=\left(\ln x+x\right)\sin x^2+1$
12. $y=\cos x^2-\exp(-x/2)+1$
13. $y=x-x\sin x^2-1$
14. $y=\cos\left(\ln x-\cos x^2\right)-1/3$
15. $y=\exp\left(-\sin x^2\right)-1$
16. $y=\cos\left(\cos x^2\right)-5/6$
17. $y=\sin\left(x\exp x/2\right)-x+1$
18. $y=x\cos 2x+\exp(-x)+1$
19. $y=x^2\exp(-x^2)-\sin x+3/4$
20. $y=\sin\left(\ln x+2x^2\right)+x^2-2$
21. $y=\cos x^2-\ln x+1$
22. $y=\sin\left(\cos 2x^2\right)+x^2-2$
23. $y=\sin\left(3x^2/2\right)-\ln x$
24. $y=x^2\cos\left(2\ln x^2+1\right)+x$
25. $y=\sin x^2-\exp\left(-x/2\right)$
26. $y=x^3\cos x^2-x^2\cos x+1$
27. $y=2\exp\left(-\cos x^2-1/2\right)-\ln x-1$
28. $y=\ln x+\cos x^2\sin x$
29. $y=\left(\ln x+x\right)\cos x^2+1/3$
30. $y=\ln\left(\cos x+1\right)+\cos 2x^2$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение простого и кратного корня.
2. Для чего проводится процедура отделения (локализации) корней на предварительном этапе решения уравнения.
3. Приведите примеры известных вам способов локализации корня.
4. Дайте определение квадратичной скорости сходимости итерационной процедуры.
5. Что такое область сходимости применительно к итерационной процедуре?
6. Сформулируйте критерий окончания итерационной процедуры Ньютона.
7. Опишите метод простой итерации. Дайте его характеристику.
8. Опишите метод касательных. Укажите его достоинства и недостатки.
9. Почему на практике часто применяют комбинированные алгоритмы, включающие в себя различные методы отыскания корней?
10. Что такое машинный нуль, машинная бесконечность и машинное ε? Как эти параметры влияют на точность расчетов на ЭВМ?
11. Назовите три основных источника погрешностей при решении задач на ЭВМ, их природу и способы уменьшения.

Литература

Гончаров В.А., Земсков В.Н., Яковлев В.Б. Лабораторный практикум по курсу «Вычислительная математика». – М.: МИЭТ, 2008.