Лабораторная работа №5

Аппроксимация данных методом наименьших квадратов

Цель работы: изучение метода наименьших квадратов для аппроксимации данных; приобретение навыков программирования метода наименьших квадратов для аппроксимации экспериментальных данных; приобретение навыков использования стандартных средств системы Matlab для задачи аппроксимации.

Теоретические сведения

Пусть имеются результаты измерений двух величин x и y и предполагается, что они связаны линейной зависимостью

$$y = b_0 + b_1 x + \varepsilon . \qquad (1)$$

При этом ошибка измерения является некоторой случайной величиной, а ее среднее значение равно нулю. Так как результаты обычно не ложатся на прямую, то необходимо построить наилучшую линейную функцию, проходящую наиболее близко к каждому результату измерения, но возможно не совпадающую с ними. Это типичная задача обработки результатов эксперимента.

Для нахождения неизвестных коэффициентов модели (1) используют метод наименьших квадратов, а именно минимизируют функцию двух переменных вида

$$Q(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (b_0 + b_1 x_i) \right]^2 .$$

Запишем необходимое условие минимума дифференцируемой функции:

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial b_1} = 0 . \qquad (2)$$

В результате решения системы (2) из двух линейных уравнений получим

$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}, \qquad b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x} , \qquad (3)$$

где средние значения x и y определяются по формулам

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum x_i , \qquad \overline{y} = \frac{1}{n} \sum y_i .$$

Формулы (3) позволяют построить график прямой, называемой прямой регрессии y на x, которая дает приближенное представление о зависимости между переменными y и x. В дополнение к ней обычно строят и регрессию x на y, модель которой аналогична (1), только в качестве независимой переменной используют y. Таким образом, получают две пересекающиеся в точке $(\overline{x}, \overline{y})$ прямые, при этом большинство результатов измерений лежит именно между ними. Во многих случаях удается линеаризовать исходную зависимость и рассматривать ее относительно некоторых новых переменных, которые образуют линейную связь. Например, для функции $y = ax^b + c$ берут новые переменные $Y = \lg(y - c)$ $X = \lg x$ и получают зависимость вида $Y = bX + \lg a$.

В общем случае, если регрессия y на x отличается от линейной, рассматривают линейную по параметрам регрессионную модель вида

$$y = b_0 + b_1 a_1(x) + \ldots + b_{k-1} a_{k-1}(x) , \qquad (4)$$

где $a_1(x),...,a_{k-1}(x)$ - известные функции; $b_0, b_1,...,b_{k-1}$ - неизвестные параметры.

Пусть имеется n наблюдений (x_i, y_i), которые являются результатом реализации случайного вектора (X, Y). Подставляя в (4) выборочные точки x_i, получаем систему:

$$y_i = b_0 + b_1 a_1(x_i) + ... + b_{k-1} a_{k-1}(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2,..., n. \qquad (5)$$

Здесь ε_i - случайные независимые друг относительно друга и распределенные по нормальному закону ошибки наблюдений. Необходимо отметить, что система уравнений (5) относительно неизвестных b_j является типичной пере- или недоопределенной задачей (в зависимости от соотношения n и k) и должна решаться методом наименьших квадратов.

По методу наименьших квадратов в качестве оценок b_j принимают значения $\tilde{b}_j$, дающие минимум функции

$$Q(b_0, b_1,..., b_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (b_0 + b_1 a_1(x_i) + ... + b_{k-1} a_{k-1}(x_i)) \right)^2 .$$

Из необходимых условий минимума следует, что оценки $\tilde{b}_j$ являются решениями алгебраической системы k уравнений с k неизвестными

$$\begin{aligned}
&n\tilde{b}_0 && + \tilde{b}_1 \sum a_1(x_i) && + ... + \tilde{b}_{k-1} \sum a_{k-1}(x_i) && = \sum y_i, \\
&\tilde{b}_0 \sum a_1(x_i) && + \tilde{b}_1 \sum a_1(x_i) a_1(x_i) && + ... + \tilde{b}_{k-1} \sum a_{k-1}(x_i) a_1(x_i) && = \sum y_i a_1(x_i), \\
&\tilde{b}_0 \sum a_{k-1}(x_i) && + \tilde{b}_1 \sum a_1(x_i) a_{k-1}(x_i) && + ... + \tilde{b}_{k-1} \sum a_{k-1}(x_i) a_{k-1}(x_i) && = \sum y_i a_{k-1}(x_i).
\end{aligned}$$

Данную систему уравнений часто называют нормальной системой. В матричных обозначениях эту систему уравнений можно записать в виде

$$(A^T A)\tilde{\mathbf{b}} = A^T \mathbf{y}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{y}^T = (y_1, y_2,..., y_n)$ - n-вектор наблюдений; $\tilde{\mathbf{b}}^T = (\tilde{b}_0, \tilde{b}_1,..., \tilde{b}_{k-1})$ - k-вектор оценок параметров:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1(x_1) & . & a_{k-1}(x_1) \\ 1 & a_1(x_2) & . & a_{k-1}(x_2) \\ . & . & . & . \\ 1 & a_1(x_n) & . & a_{k-1}(x_n) \end{bmatrix}$$ - регрессионная $n \times k$-матрица.

При условии, что матрица $(\mathbf{A^T A})$ невырожденная, решение (6) можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{b}} = (\mathbf{A^T A})^{-1} \mathbf{A^T y}.$$

Часто в качестве функций $a_k(x)$ принимают степенные функции, т.е. $a_k(x) = x^k$. В этом случае регрессионная матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & . & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & . & x_2^{k-1} \\ . & . & . & . \\ 1 & x_n & . & x_n^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Уравнение для нахождения неизвестного вектора параметров $\mathbf{b}$ будет иметь вид

$$
\begin{bmatrix}
n & \sum x_i & \sum x_i^2 & . & \sum x_i^{k-1} \\
\sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & . & \sum x_i^k \\
\sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & . & \sum x_i^{k+1} \\
. & . & . & . & . \\
\sum x_i^{k-1} & \sum x_i^k & \sum x_i^{k+1} & . & \sum x_i^{2k-2}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
\tilde{b}_0 \\ \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ . \\ \tilde{b}_{k-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ . \\ \sum y_i x_i^{k-1}
\end{bmatrix}. \qquad (7)
$$

При больших значениях k система (7) плохо обусловлена и для ее решения используются специальные методы. В обычной практике статистической обработки данных k невелико ($k \le 5$) и тогда эту систему можно решить либо методом Гаусса, либо подходящим итерационным методом.

Средства Matlab для аппроксимации функций. Для предварительной статистической обработки данных используются операторы:

- **max**(A)**, min**(A) **-** поиск экстремальных элементов по столбцам массива A;
- **max**(A,B), **min**(A,B) **-** формирование массива с элементами, равными экстремальным из соответствующих элементов массивов;
- **max**(A,[],dim)**, min**(A,[],dim) **-** вектор экстремальных элементов по измерению dim;
- [C,I]=**max**(...)**,** [C,I]=**min**(...) **-** дополнительно выводится строка индексов экстремальных элементов;
- **median**(x)**, median**(x,dim) **-** медианы массива;
- **mean**(x)**, mean**(x,dim) **-** средние значения;
- **std**(x), **std**(x,flag), **std**(x,flag,dim) **-** стандартное отклонение (flag=0 **-** несмещенная оценка для σ ; flag=1 **-** смещенная оценка);
- **cov**(x,y), **cov**(x,y,flag) **-** ковариация для массивов *x* и *y* (каждый столбец **-** переменная, строка **-** наблюдение);
- **cov**(x), **cov**(x,flag) **-** ковариация для столбцов массива *x*;
- **corrcoef**(x), **corrcoef**(x,y) **-** коэффициенты корреляции.

Для построения полиномиальной регрессионной кривой используется оператор **polyfit**(x,y,n), возвращающий вектор коэффициентов полинома p(x) степени n, который с наименьшей среднеквадратичной погрешностью аппроксимирует функцию y(x). Результатом является вектор-строка длиной (n + 1), содержащая коэффициенты полинома в порядке уменьшения степеней *x*. Если $\mathbf{length}(\mathrm{x}) = \mathrm{n}+1$, то реализуется обычная полиномиальная аппроксимация, при которой график полинома точно проходит через узловые точки с координатами (x, y), хранящиеся в векторах x и y. В противном случае точного совпадения графика с узловыми точками не наблюдается. Полином строится в виде

p(1)*x^n + p(2)*x^(n – 1) +...+ p(n)*x + p(n + 1).

Порядок выполнения работы

1. Написать m-файлы для реализации метода наименьших квадратов для построения линейной регрессии по x и y. Взять 10 первых точек из своего варианта. Вычислить медиану, средние значения, смещенную и несмещенную оценку среднеквадратичного отклонения, коэффициент корреляции.

2. Написать m-файлы функции для реализации метода наименьших квадратов для построения нелинейной полиномиальной регрессии со степенным базисом (n = 3, 5, 7) и построить аппроксимирующие кривые.

3. Построить график и отобразить на нем следующие данные: исходные данные в виде точек и графики аппроксимирующих функций.

4. Использовать стандартные средства Matlab для построения соответствующих кривых. Сравнить результаты.

5. Построить графики ошибок аппроксимации для всех n.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1) цель работы, задание;
2) описание метода решения, краткие сведения из теории (формулы, алгоритм и т.п.);
3) программу (распечатку), ее описание;
4) сравнение результатов расчета;
5) краткие выводы.

Задание

Вариант 1. x = [0:0.1:5]

2,2097	–6,8439	–1,1201	–5,6987	–4,8524	1,7439	1,0118	–0,5526	6,1079	2,3993
1,6262	8,4938	–4,8348	10,1190	7,7189	11,5615	–3,3621	9,6958	17,9124	1,1666
–2,0931	4,5551	9,6773	18,1837	19,0898	7,0177	9,5207	23,9392	16,3089	22,8691
29,6142	35,6152	30,7599	48,6692	50,3154	28,7633	47,1599	32,2506	56,5752	58,1061
57,5376	70,1709	77,7399	69,4833	91,2748	85,4722	100,9104	98,6184	104,6567	123,4583
121,2690									

Вариант 2. x = [1:0.1:6]

0,9770	0,7950	0,6755	0,6424	0,5276	0,4223	0,4701	0,3811	0,3625	0,2269
0,1635	0,1913	0,2440	0,1776	0,1848	0,2027	0,1306	0,1317	0,1842	0,1531
0,1250	0,0713	0,1601	0,1217	0,1106	0,0325	–0,0109	0,0017	0,0237	0,0494
0,0590	0,1345	0,0776	0,0551	0,0402	0,0998	0,0805	0,0174	0,1028	0,0804
0,0264	–0,0383	0,0896	0,0043	0,0742	0,0487	0,0620	–0,0322	–0,0132	0,1340
0,0458									

Вариант 3. x = [0:0.1:5]

–0,0627	0,2727	0,4647	0,5818	0,7122	0,8727	0,9211	0,9423	0,9318	0,9329
0,9794	1,1605	1,0324	1,1018	1,0523	1,2707	1,2655	1,3511	1,2770	1,2805
1,3692	1,1997	1,4977	1,4779	1,7262	1,6303	1,7824	1,6529	1,7918	1,7635
1,8133	1,7746	1,7036	1,6771	1,8053	1,9213	1,8812	1,9930	2,0343	2,1015
2,1716	2,0307	1,9889	2,0551	2,0983	2,1195	2,1950	1,9982	2,2107	2,3409
2,2633									

Вариант 4. x = [0.1:0.1:5.1]

–2,3660	–1,7701	–1,3201	–1,2720	–0,5055	–0,3275	–0,4319	–0,4051	–0,1362	0,0405
–0,2024	0,3066	0,1005	–0,0493	0,3263	0,6423	0,0442	0,7559	0,5858	0,5291
0,4964	0,8012	0,7039	1,2297	0,9044	1,1075	1,3314	0,8089	0,7722	1,0514
1,3509	0,6801	1,2743	1,0409	1,2800	1,0181	1,2439	1,4303	1,3457	1,4073
1,1276	1,2935	1,3850	1,6022	1,6745	1,3950	1,2535	1,7307	1,8445	1,2650
1,6089									

Вариант 5. x = [–2.5:0.1:2.5]

0,4032	0,1809	–0,2587	–0,0399	–0,6520	0,1575	0,1644	0,3564	0,4596	–0,2643
0,8811	0,3974	1,5723	–0,0888	0,0314	–0,1035	0,9185	0,4832	0,4557	1,4323
1,4972	1,0005	0,0651	–0,2495	0,8214	1,8526	0,9669	1,0241	1,3991	1,4036
2,5676	2,5733	1,6042	2,3428	3,2754	2,8773	3,4023	2,9747	3,6903	3,8932
4,2285	5,4673	5,4242	6,1078	6,3413	6,4474	8,0035	9,0726	9,9586	11,3301
13,0481									

Вариант 6. x = [–0.5:0.04:1.5]

1,6557	1,5859	1,9347	1,8121	1,9226	1,9367	1,9364	1,8522	1,8733	1,9431
1,8715	1,8908	2,1468	2,0052	1,8747	1,9859	1,8677	1,8331	1,9265	2,0296
1,9262	1,9555	1,7472	1,7900	1,7799	1,6532	1,6095	1,8002	1,6729	1,5712
1,6797	1,5855	1,4265	1,6228	1,4816	1,5650	1,4963	1,2806	1,1876	1,2788
1,2239	1,1453	1,2541	1,3299	1,1053	1,0565	1,1002	1,1773	1,0142	0,9708
1,0728									

Вариант 7. x = [–0.5:0.04:1.5]

0,8381	0,6434	0,8021	0,5503	0,7475	0,8743	0,7827	0,9828	0,7537	0,5455
0,6848	0,9725	0,8272	0,8888	0,9585	0,5737	0,7556	0,7446	0,7009	0,8001
1,0066	0,8044	0,9543	0,7044	0,7818	0,6713	0,7297	0,7109	0,7870	0,7939
0,6826	0,7843	0,7412	0,6961	0,6057	0,6965	0,5632	0,3903	0,5605	0,4690
0,4037	0,5651	0,6047	0,2716	0,3140	0,1634	0,3118	–0,1071	0,2734	0,1377
0,1034									

Вариант 8. x = [–2.5:0.1:2.5]

5,5555	5,2521	5,8400	4,5695	1,0690	3,5246	3,2401	2,9342	2,7411	2,4548
1,8499	1,9965	2,0240	1,8077	1,4790	1,5543	1,6709	1,6499	1,1657	0,8922
0,7358	0,8107	1,2648	0,7741	1,3061	1,0375	1,4110	0,6209	0,9102	0,8028
1,1657	1,0943	0,5789	1,7289	1,7427	1,0020	1,5585	1,9062	2,1220	2,4689
1,9622	2,2834	2,6925	2,9737	3,0287	3,4221	3,7058	4,8680	5,2288	5,1957
5,8044									

Вариант 9. x = [–2.5:0.1:2.5]

–60,7872	–44,0478	–40,2793	–22,4243	–28,9959	–11,1719	–8,5942	–10,2967	–10,5551	–19,5120
–11,5548	–5,2881	–9,5449	–4,5954	–0,1912	–0,7586	–1,3469	–4,5631	–2,8370	–3,6565
–4,1916	9,9903	–5,5046	0,1045	–2,0025	–5,8137	–2,4241	0,4929	–9,0445	–3,7295
3,1438	–1,2373	2,2046	–12,3192	6,0708	–5,6375	6,6117	7,4719	7,5173	11,0604
5,6081	11,2105	9,4446	9,4092	25,8665	28,3543	18,1601	32,7853	41,4828	46,8581
53,9812									

Вариант 10. x = [–2.5:0.1:2.5]

–16,1665	–15,0660	–11,0476	–9,1973	–11,0186	–7,0022	–4,1416	–6,0624	–3,7241	–3,8446
–2,7844	–2,7243	–3,3814	–2,7923	–1,2677	–0,3478	–3,3987	–1,3731	0,6179	–1,2917
–0,6539	–0,1824	–0,8659	0,3861	0,0828	1,6138	–0,0362	0,3524	2,9339	2,9847
–0,1690	1,4802	1,0469	2,2307	1,4094	2,5439	0,3566	1,4424	4,7233	1,5527
3,6870	3,8141	3,7949	5,1861	5,3505	8,3778	9,8362	9,7080	11,5358	14,2881
15,3980									

Вариант 11. x = [–2:0.1:3]

–0,7095	–1,5838	–1,6252	–2,2546	–2,4277	–1,8296	–1,1479	–1,3409	–1,5277	–0,1438
–0,8892	–0,4225	–0,3261	–0,3788	0,0011	–0,2830	–0,9448	–0,5947	0,0700	–0,6535
–0,1736	–0,4455	–0,5358	–0,4303	–0,0880	0,2379	0,1391	1,7861	0,2030	–0,3419
0,5380	0,7159	1,0192	0,3202	1,9274	1,2039	1,7263	1,6128	1,2685	2,5146
1,1874	0,4853	0,9640	0,1491	0,3526	1,1647	1,4467	0,3341	0,8319	0,6880
0,1797									

Вариант 12. x = [–2:0.1:3]

–1,6072	–1,4757	–0,7322	–0,7821	–0,3665	0,3615	0,5739	1,5260	0,8965	2,0787
1,9542	0,7020	0,9112	1,4333	1,6451	1,7587	2,1061	1,4802	1,4615	1,6351
1,6585	1,7164	1,9547	1,6961	0,6543	1,5326	1,4709	1,2881	1,4408	0,9278
0,4062	0,4934	–0,5482	0,5004	0,2399	–0,1578	–0,2936	–0,5693	–0,2558	–0,1781
–0,5483	–0,6949	–0,5803	–0,6985	–1,0657	–0,2113	–0,5887	–0,2807	–1,0114	–1,2703
–0,5019									

Вариант 13. x = [0:0.8:4]

0,0059	–0,0274	0,1511	–0,0370	0,4939	0,2898	0,4232	0,8032	0,5692	0,7222
0,7837	1,1532	0,9884	0,8656	0,8900	1,3163	1,3501	1,3000	0,8693	0,9910
0,9580	0,9890	0,8174	0,7106	0,7361	0,9040	1,0387	0,6846	0,5683	0,6640
0,4547	0,7545	0,6140	0,2515	0,3056	0,5706	0,4154	0,4001	0,0869	0,3531
0,4111	0,2174	0,1631	0,2805	0,1600	0,3068	0,3666	0,5361	0,3825	0,3006
0,6375									

Вариант 14. x = [0:0.8:4]

1,8205	0,7979	0,9409	0,8066	2,0887	20372	2,1345	1,8844	2,336	2,1583
1,7639	2,1481	2,2576	2,1162	2,1942	2,1289	1,6940	1,3912	1,9982	1,6866
1,5450	1,3948	1,1302	1,3512	1,0199	1,0516	1,1084	1,2309	1,1400	0,8365
1,3023	1,0661	1,3884	0,9011	1,0076	1,0544	1,2169	1,1322	1,2020	1,0408

1,3792	1,6504	1,6726	1,7785	1,8982	2,0655	2,0827	2,1873	2,5384	2,5431
2,8220									

Вариант 15. x = [2:0.06:5]

2,0000	2,0600	2,1200	2,1800	2,2400	2,3000	2,3600	2,4200	2,4800	2,5400
2,6000	2,6600	2,7200	2,7800	2,8400	2,9000	2,9600	3,0200	3,0800	3,1400
3,2000	3,2600	3,3200	3,3800	3,4400	3,5000	3,5600	3,6200	3,6800	3,7400
3,8000	3,8600	3,9200	3,9800	4,0400	4,1000	4,1600	4,2200	4,2800	4,3400
4,4000	4,4600	4,5200	4,5800	4,6400	4,7000	4,7600	4,8200	4,8800	4,9400
5,5000									

Вариант 16. x = [–3:0.1:2]

–1,6996	–1,9942	–1,6883	–1,7065	–2,0484	–1,6386	–1,6991	–2,0071	–1,9993	–2,0973
–2,2393	–2,1285	–2,4644	–1,9842	–2,5225	–2,5462	–2,4277	–2,6981	–2,7932	–2,9981
–2,8217	–3,1859	–2,8006	–2,6283	–3,0836	–2,7472	–2,6217	–3,1252	–3,0093	–2,5040
–2,5800	–2,2313	–2,0662	–1,9412	–1,6772	–1,6536	–1,4043	–1,7431	–1,3734	–1,2754
–1,4478	–0,9672	–1,1304	–0,5450	–0,9061	–0,5642	–0,5581	–0,7250	–0,9196	–0,4477
–0,5934									

Вариант 17. x = [–3:0.1:2]

0,6284	0,5333	1,7308	0,6432	–0,5780	0,4591	–0,9187	0,0801	0,0572	0,1068
–0,2154	1,1865	–1,8008	0,4749	0,9074	0,6885	0,4953	–0,1002	0,4736	0,2998
–0,5902	–0,7734	–0,7450	–1,9645	–0,7455	–0,3919	–0,1660	1,0252	–0,6698	0,4435
0,7990	1,1605	–0,5165	0,9742	1,3081	0,3796	0,9562	3,0667	2,0931	2,7852
2,5597	1,7934	1,6830	2,3352	0,4085	1,4136	0,2798	–2,2205	–2,9427	–5,2786
–7,7944									

Вариант 18. x = [–1.5:0.06:1.5]

0,6284	0,5333	1,7308	0,6432	–0,5780	0,4591	–0,9187	0,0801	0,0572	0,1068
–0,2154	1,1865	–1,8008	1,4749	0,9074	0,6995	0,4953	–0,1002	0,4736	0,2998
–0,5902	–0,7734	–0,7450	–1,9645	–0,7455	–0,3919	–0,1660	1,0252	–0,6698	0,4435
0,7990	1,1605	–0,5165	0,9742	1,3081	0,3796	0,9562	3,0667	2,0931	2,7852
2,5597	1,7934	1,6830	2,3352	0,4085	1,4136	0,2798	–2,2205	–2,9427	–5,2786
–7,7944									

Вариант 19. x = [2:0.02:3]

–3,1873	–3,2093	–3,3079	–3,3309	–3,2097	–3,5017	–3,6341	–3,4785	–3,6736	–3,6082
–3,7175	–3,6205	–3,6477	–3,7578	–3,9865	–3,7638	–3,6190	–3,6977	–3,9988	–3,8418
–3,9163	–3,9597	–3,9860	–3,8177	–3,8963	–3,8393	–3,7714	–3,8853	–3,7838	–3,7338
–3,5681	–3,9400	–3,8878	–3,6424	–3,7831	–3,8739	–3,6648	–3,5054	–3,5763	–3,4133
–3,5494	–3,3719	–3,5894	–3,6498	–3,5173	–3,3313	–3,5565	–3,3299	–3,4346	–3,2730
–3,4222									

Вариант 20. x = [4:0.1:9]

4,6563	3,8657	4,2603	4,4593	4,0734	4,4662	3,8193	3,0351	3,2866	3,9442
3,4590	3,5373	3,6501	2,5634	3,0008	2,9369	2,7989	3,0547	3,6102	3,0888
3,5199	2,8988	3,1647	2,9440	3,4554	3,2432	3,5673	3,7239	3,5835	4,0296
4,6425	4,2040	4,1992	4,6995	4,6243	4,4655	5,2431	5,3430	5,5303	6,3366
6,8276	6,3277	6,8248	6,7937	7,5372	6,7348	8,0223	7,8840	7,9619	8,2863
7,7426									

Вариант 21. x = [5:0.06:8]

1,9663	1,6476	0,7114	2,4589	3,2220	3,0810	2,9495	4,4071	3,7540	4,3238
4,5238	4,5653	5,0215	4,7886	4,1480	4,4855	5,1016	4,2923	4,6496	4,2193
3,9369	3,8189	3,9092	3,9575	3,5582	3,8837	2,9589	2,0519	2,5481	2,3186
2,1911	2,0457	2,2128	1,0942	1,3103	1,0029	0,5667	1,7896	0,4738	–0,2055
1,2955	0,4975	–0,2888	0,5275	0,7079	–0,3114	0,1746	0,0137	–0,5175	0,6409
0,0295									

Вариант 22. x = [0:0.2:10]

–2,0994	–2,9181	–3,3750	–3,1625	–2,9411	–3,6222	–4,2830	–3,3344	–4,4661	–4,3351
–4,5246	–4,8147	–4,6249	–5,0526	–5,8120	–5,5145	–4,8585	–5,5489	–4,9968	–5,1607
–5,1115	–4,8400	–4,3109	–3,7839	–3,6743	–2,8195	–3,2043	–3,5695	–2,5384	–2,2472
–1,8746	–1,5459	–0,9347	–1,6420	–1,0495	–1,0161	–1,1469	0,3468	–0,7314	–1,2041
0,4746	–0,1719	–0,8303	0,0929	0,4619	–0,5846	–0,0395	–0,1527	–0,6458	0,5428
–0,0449									

Вариант 23. x = [0:0.2:10]

0,3106	0,2310	0,4070	0,8401	0,8354	1,2814	0,9199	1,4422	1,2864	0,5418
0,5051	0,6063	0,5395	0,4176	0,4133	–0,0700	–0,2365	–0,2891	–0,3957	–0,4620

–0,4148	–0,5931	–1,1417	–0,7109	–0,7334	–0,8024	–0,6922	–0,9060	–1,1176	–1,0203
–1,4848	–0,9029	–0,9756	–1,1178	–1,1308	–1,2161	–1,0095	–0,9241	–1,0661	–1,1000
–1,0072	–1,0349	–1,1914	–0,7414	–0,9115	–0,7428	–1,0973	–1,2190	–0,8294	–0,9755
–1,1238									

Вариант 24. x = [5:0.06:8]

2,9418	2,3812	3,0285	3,4976	3,3944	4,0784	3,6271	3,2398	3,7868	4,7359
4,5358	4,8908	5,2695	4,4358	5,1106	5,2663	5,3273	5,7589	6,4645	6,0650
6,5878	6,0262	6,3182	6,0893	6,5576	6,2676	6,4795	6,4905	6,1723	6,4096
6,7843	6,0795	5,7820	5,9649	5,5490	5,0284	5,4250	5,1275	4,9044	5,2917
5,3603	4,4418	4,5316	4,1137	4,5006	3,3816	4,4011	4,0505	3,9766	4,2110
3,6372									

Вариант 25. x = [5:0.1:10]

–0,1477	–1,0245	–0,6427	–1,5387	–0,4459	–0,4692	1,8361	0,9288	0,3359	0,0744
0,5429	1,3109	2,8529	0,9957	1,5610	1,3772	1,2195	1,5966	1,7456	0,3818
–0,1642	0,1527	0,6674	0,6072	–1,4454	–0,2874	–1,6578	–2,0812	–1,4203	–1,1857
–2,7662	–3,6782	–2,1044	–1,2543	–1,3479	0,6544	–0,6158	1,2685	0,5504	1,0128
3,9292	2,8620	3,9036	5,4523	5,2670	7,7963	7,1654	6,0191	5,9075	4,8644
4,3782									

Вариант 26. x = [–0.4:0.04:1.6]

1,2305	1,1270	1,3852	1,3616	1,4686	1,2804	1,6931	1,5714	1,2619	1,6191
1,7395	1,6432	1,7330	1,6979	1,3438	1,1006	1,6349	1,3790	1,2658	1,1416
0,9153	1,1003	0,8064	0,8175	0,8434	0,9186	0,8035	0,4987	0,8459	0,5844
0,7947	0,3048	0,3180	0,2748	0,3260	0,1609	0,1243	–0,1140	0,0724	0,1976
0,1058	0,0819	0,0657	0,0857	–0,0278	–0,0718	0,0896	–0,0519	0,0353	–0,1370
–0,0200									

Вариант 27. x = [5:0.1:10]

0,2854	–0,1869	–0,0493	–0,5703	–0,1159	–0,2372	0,7908	0,2010	–0,2384	–0,5136
–0,4186	–0,1616	0,5024	–0,5053	–0,2660	–0,3581	–0,3873	–0,0942	0,1434	–0,3156
–0,3070	0,1874	0,8276	1,2167	0,6314	1,6557	1,3995	1,5773	2,2326	2,5839
1,9108	1,4303	2,0289	2,0839	1,4732	1,7119	0,1197	–0,0758	–1,7276	–2,9075
–2,9292	–4,9509	–5,8545	–6,3599	–7,4998	–6,9584	–7,5815	–7,9596	–7,2402	–6,3442
–4,4856									

Вариант 28. x = [0:0.1:5]

–0,3449	0,3510	0,6036	1,1087	1,3203	1,3517	1,3444	0,9529	1,2562	1,0121
0,9559	0,7836	0,4894	0,5567	0,3276	0,0683	0,0803	0,0254	–0,4963	–0,4631
–0,7219	–0,5419	–0,6458	–0,8421	–0,8826	–0,9296	–0,6951	–0,8557	–0,8236	–0,9544
–0,6947	–0,3133	–0,6097	–0,8042	–0,5133	–0,7000	–0,4198	–0,6298	–0,2335	–0,1234
–0,0177	0,0024	–0,2627	–0,0537	0,0471	–0,2061	0,0029	0,1063	–0,1667	–0,1021
0,1590									

Вариант 29. x = [0:0.1:5]

–0,4829	–0,5890	–1,0807	–0,9957	–1,1151	–1,3013	–1,3791	–1,8563	–1,2466	–1,3125
–1,0469	–0,8960	–0,8865	–0,3579	–0,2454	–0,1886	0,2256	0,5157	0,1164	0,4542
0,3411	0,7993	0,8173	0,6647	0,6909	0,6713	1,0125	0,7705	0,7722	0,5230
0,8019	1,2357	0,7090	0,3164	0,5979	0,2077	0,4708	0,0493	0,4800	0,5149
0,5498	0,4720	0,0028	0,2055	0,2652	–0,1621	0,0663	0,1552	–0,2749	–0,2246
0,1079									

Вариант 30. x = [–2:0.04:0]

4,0290	4,1218	3,9779	4,0816	4,0467	3,9467	3,8753	3,5833	3,8198	3,7086
3,7581	3,7497	3,6739	3,8643	3,8560	3,8315	3,9978	4,1186	3,9085	4,0822
4,0453	4,3085	4,3651	4,3489	4,4333	4,5047	4,7648	4,7403	4,8429	4,8239
5,0714	5,3975	5,2431	5,1543	5,4001	5,3069	5,5360	5,4181	5,7209	5,8199
5,9128	5,9429	5,7706	5,9275	6,0062	5,8346	5,9842	6,0573	5,8644	5,9052
6,0807									

Контрольные вопросы

1. Какие бывают виды аппроксимации экспериментальных данных?
2. В чем разница между аппроксимацией по методу наименьших квадратов и интерполяцией?
3. Что такое линейная регрессия? Как можно линеаризовать данные? Приведите примеры.
4. Что такое линейная по параметрам регрессия? Какие требования предъявляются к

базисным функциям?

5. Построить алгоритм вычисления линейной по параметрам регрессионной модели со степенным базисом.

6. Что такое регрессионная матрица?

Литература

Гончаров В.А., Земсков В.Н., Яковлев В.Б. Лабораторный практикум по курсу «Вычислительная математика». – М.: МИЭТ, 2008.