Лабораторная работа 1

Прямые методы минимизации функций одной переменной

Постановка задачи: Требуется найти безусловный минимум функции одной переменной $f(x)$, т.е. такую точку $x^* \in U$, что $f(x^*) = \min_{x \in U} f(x)$. Значение точки минимума вычислить приближенно с заданной точностью ε.
В данной работе рассматриваются методы решения поставленной задачи, не использующие вычисления производных (прямые методы минимизации).
Предполагается, что для функции $f(x)$ известно, что точка минимума $x^* \in U_0$, $U_0 = [a;b]$, причем на заданном интервале функция является унимодальной.

Метод перебора

Стратегия поиска: Метод относится к пассивным стратегиям.
Задается количество интервалов *N*, на которое разбивается исходный интервал $U_0 = [a;b]$. Вычисления значений функции производятся в *N+1* равноотстоящих друг от друга точках. Путем сравнения величин $f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,N$ находится точка x_m, в которой значение функции наименьшее. Искомая точка минимума x^* заключена в интервале $[x_{m-1}; x_{m+1}]$.

Алгоритм:

1. Задать начальный интервал неопределенности $U_0 = [a;b]$ и точность ε.
2. Задать количество разбиений отрезка $N \geq \dfrac{b-a}{\varepsilon}$.
3. Вычислить точки $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{N}, \quad i = 0,1,\ldots,N$.
4. Вычислить значения функции в найденных точках $f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,N$.
5. Среди точек x_i, $i = 0,1,\ldots,N$ найти такую, в которой функция принимает наименьшее значение: $f(x_m) = \min_{0 \leq i \leq N} f(x_i)$.
6. Положить $x^* \approx x_m$, $f^* \approx f(x_m)$. Поиск завершен.

Метод поразрядного поиска

Стратегия поиска: Метод является усовершенствованным вариантом метода перебора (прямой метод последовательного поиска).
В этом методе перебор точек интервала неопределенности U_0 происходит сначала с шагом $\Delta = x_{i+1} - x_i > \varepsilon, \quad i = 0,1,\ldots$ (при этом точка x_0 совпадает с концом отрезка a) до тех пор, пока не выполнится условие $f(x_i) \leq f(x_{i+1})$, или пока очередная из точек x_i не совпадет с концом отрезка b. После этого шаг уменьшается в несколько раз (обычно в четыре раза), и производится перебор точек в противоположном направлении (с новым шагом) до тех пор, пока значения $f(x)$ не перестанут уменьшаться, или очередная точка не совпадет с концом отрезка a. Процедура уменьшения шага и смены направления перебора на противоположное повторяется

несколько раз. Поиск прекращается, если текущий шаг дискретизации при последнем проходе алгоритма не превосходит заданной точности ε.
Следует отметить, что в данном методе интервал неопределенности может быть полубесконечным или бесконечным.

Алгоритм:

1. Задать начальный интервал неопределенности $U_0 = [a;b]$ и точность ε.
2. Задать начальный шаг дискретизации $\Delta > \varepsilon$.
3. Положить $i = 1,\ x_0 = a$. Вычислить значение функции $f(x_0)$.
4. Определить точку $x_i = x_{i-1} + \Delta$ и значение функции $f(x_i)$.
5. Если $f(x_i) \le f(x_{i-1})$ и $x_i \ne b$, то положить $i = i + 1$ и вернуться к шагу 4.
6. Если $\Delta < \varepsilon$, то прейти к шагу 12.
7. Задать новый шаг дискретизации $\Delta = \Delta/4$.
8. Вычислить точку $x_i = x_{i-1} - \Delta$ и значение функции $f(x_i)$.
9. Если $f(x_i) \le f(x_{i-1})$ и $x_i \ne a$, то положить $i = i + 1$ и вернуться к шагу 8.
10. Если $\Delta < \varepsilon$, то прейти к шагу 12.
11. Задать новый шаг дискретизации $\Delta = \Delta/4$ и перейти к шагу 4.
12. Положить $x^* \approx x_i$, $f^* \approx f(x_i)$. Поиск завершен.

Метод дихотомии

Стратегия поиска: Метод относится к последовательным стратегиям и является одним из вариантов метода исключения отрезков.
Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках. Для их нахождения текущий интервал неопределенности делится пополам и в обе стороны от середины откладывается по $\delta/2$, где $\delta < 2\varepsilon$ – малое положительное число. По результатам сравнения значений функции в этих точках из дальнейшего рассмотрения исключается часть текущего интервала неопределенности. Условия окончания итераций для всех вариантов метода исключения отрезков стандартные: поиск заканчивается, когда половина длины текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины точности ε.

Алгоритм:

1. Задать начальный интервал неопределенности U_0 и точность ε.
2. Выбрать $\delta < 2\varepsilon$.
3. Вычислить точки $x_1 = \dfrac{b + a - \delta}{2}$, $x_2 = \dfrac{b + a + \delta}{2}$ и значения функции $f(x_1), f(x_2)$.
4. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
5. Если $f(x_1) \le f(x_2)$., то положить $b = x_2$.
   В противном случае, т.е. если $f(x_1) > f(x_2)$, положить $a = x_1$.
6. Вычислить полудлину нового интервала неопределенности $U = \dfrac{b - a}{2}$.
7. Если $U > \varepsilon$, то перейти к следующей итерации, вернувшись к шагу 3.
8. Положить $x^* \approx \bar{x} = \dfrac{a + b}{2}$, $f^* \approx f(\bar{x})$. Поиск завершен.

Метод золотого сечения

Стратегия поиска: Метод относится к последовательным стратегиям и является одним из вариантов метода исключения отрезков.

Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках, являющихся точками золотого сечения текущего интервала неопределенности. Исключение отрезка в данном случае выполняется так же, как и в методе дихотомии. При этом с учетом свойств золотого сечения на каждой итерации, кроме первой, требуется вычислить только одно новое значение функции.

Алгоритм:

1. Задать начальный интервал неопределенности U_0 и точность ε.

2. Вычислить значение $\tau = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ и точки $x_2 = a + \tau(b-a)$, $x_1 = a + b - x_2$.

   Вычислить значения функций $f(x_1)$, $f(x_2)$.

3. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

4. Если $f(x_1) \le f(x_2)$., то положить $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $f(x_2) = f(x_1)$, $x_1 = a + b - x_1$ и вычислить $f(x_1)$,
   в противном случае положить $a = x_1$, $x_1 = x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$, $x_2 = a + b - x_2$ и вычислить $f(x_2)$.

5. Вычислить полудлину нового интервала неопределенности $U = \dfrac{b-a}{2}$.

   Если $U > \varepsilon$, то перейти к следующей итерации, вернувшись к шагу 3.

6. Положить $x^* \approx \bar{x} = \dfrac{a+b}{2}$, $f^* \approx f(\bar{x})$. Поиск завершен.

Метод парабол

Стратегия поиска: метод парабол относится к последовательным стратегиям и является одним из вариантов полиномиальной интерполяции, позволяющей учесть информацию, содержащуюся в относительных изменениях значений $f(x)$ в пробных точках.

Алгоритм опирается на анализ значений функции в трех точках текущего интервала неопределенности. По этим точкам строится интерполяционный многочлен (парабола) и ищется его минимум. При этом на каждой итерации, кроме первой, требуется только одно новое вычисление функции.

Алгоритм:

Задать начальный интервал неопределенности U_0 и точность ε.

1. Выбрать точки $x_1, x_2, x_3 \in U_0$ удовлетворяющие условиям $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_1) \ge f(x_2) \le f(x_3)$, причем пусть одно из неравенств – строгое.

2. Найти минимум квадратного трехчлена по формуле $\bar{x} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - \dfrac{a_1}{a_2})$, где $a_1 = \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$, $a_2 = \dfrac{1}{x_3 - x_2}(\dfrac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1})$ - коэффициенты квадратичной функции $q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$. На первой итерации перейти к шагу 4, на остальных – к шагу 3.

3. Если модуль разности $\bar{x}$ на данной и предыдущей итерациях $|\Delta| \le \varepsilon$, то поиск завершить, полагая $x^* \approx \bar{x},\ f^* \approx f(\bar{x})$, иначе перейти к шагу 4.
4. Вычислить значение $f(\bar{x})$. Перейти к шагу 5.
5. Определить новую тройку чисел x_1, x_2, x_3. Присвоить $f(x_1), f(x_2)$ и $f(x_3)$ соответствующие значения $f(x)$, найденные ранее. Перейти к шагу 2.

Задания

1. Написать в среде MATLAB функции, реализующие следующие пять методов: перебора, поразрядного поиска, дихотомии, золотого сечения и парабол.

2. Выбрать для выполнения работы тестовую функцию, номер которой соответствует номеру Вашего компьютера. Например, для компьютера №3 это будет функция 3), для компьютера №13 − функция 4): 13-9=4; для компьютера №23 это будет функция 5): 23-9×2=5.

1) $f(x) = x^3 - 3\sin x \to \min, \quad x \in [0,\ 1].$

2) $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1 \to \min, \quad x \in [-1,\ 0].$

3) $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x} \to \min, \quad x \in [0{,}5,\ 1{,}5].$

4) $f(x) = x^2 - 2x + e^{-x} \to \min, \quad x \in [-1,\ 1{,}5].$

5) $f(x) = x\sin x + 2\cos x \to \min, \quad x \in [-6,\ -4].$

6) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2} \to \min, \quad x \in [1,\ 2].$

7) $f(x) = 10x\ln x - \dfrac{x^2}{2} \to \min, \quad x \in [0{,}1, 1].$

8) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{3}x^3 + 2x \to \min, \quad x \in [-2{,}5,\ -1].$

9) $f(x) = x^2 - 2x - 2\cos x \to \min, \quad x \in [-0{,}5, 1].$

3. Для выбранной функции и для каждого реализованного метода изучить зависимость скорости работы (числа вычислений функции N) от заданного значения точности ε. Провести сравнение методов друг с другом. *Объяснить полученные результаты.*

4. Вычислить аналитическое значение координаты минимума выбранной функции с точностью до 4 значащих цифр.

5. Определить, сколько вычислений функции потребуется каждому методу для того, чтобы разность между численным и аналитическим решениями была меньше $\varepsilon = 10^{-4}$.

6. Найти минимум функции $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ на отрезке [-5,5] методами золотого сечения и парабол. *Объяснить полученные результаты.*

7. Результаты работы необходимо сохранить для использования в лабораторной работе 2.

8. Сдать лабораторную работу преподавателю, *ответив предварительно на все следующие контрольные вопросы.*

Контрольные вопросы к лабораторной работе 1

1) Пусть $f(x)$ - дифференцируемая унимодальная на отрезке $[a;b]$ функция, причем $|f'(x)| \le M$. Оценить точность $\Delta(N)$ определения минимального значения f^* методом перебора в результате N вычислений $f(x)$.

2) Может ли оценка $\varepsilon(N) = \frac{b-a}{N-1}$ для точности определения x^* методом перебора нарушаться для функций, не являющихся унимодальными? Ответ пояснить рисунком.

3) Повысится ли эффективность метода поразрядного поиска, если шаг поиска Δ последовательно уменьшать не в четыре, а в какое-либо другое число раз?

4) Может ли применение методов исключения отрезков привести к неверному определению x^*, если функция $f(x)$ не унимодальна? Ответ пояснить рисунком.

5) Зависит ли точность определения x^*, которую гарантируют методы дихотомии и золотого сечения в результате N вычислений функции $f(x)$, от конкретной функции $f(x)$?

6) Требуется найти точку минимума унимодальной функции на отрезке длины 1 с точностью $\varepsilon = 0{,}02$. Имеется возможность измерить не более 10 значений $f(x)$. Какой из прямых методов минимизации можно использовать для этого?

7) Доказать, что погрешность определения точки минимума x^* функции $f(x)$ методом перебора не превосходит величины $\varepsilon_n = (b-a)/n$.

8) Доказать, что в методе дихотомии число итераций, необходимое для определения точки минимума с точностью ε, определяется формулой $n \ge \log_2 \frac{b-a-\delta}{2\varepsilon-\delta}$.

9) Доказать, что число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε на отрезке $[a;b]$ в методе золотого сечения определяется формулой $n \ge \ln\left(\frac{2\varepsilon}{b-a}\right) / \ln\tau \approx 2{,}1 \cdot \ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)$.

10) Сравнить необходимые количества вычисленных значений N_∂ и N_n функции $f(x)$ при поиске ее точки минимума на отрезке длины 1 с точностью 10^{-5} методом деления отрезка пополам и методом перебора.

11) Зависит ли точность определения x^*, которую получается методом парабол в результате N вычислений функции $f(x)$, от конкретной функции $f(x)$?

12) Указать класс функций, для точного определения точек минимума которых достаточно одной итерации метода парабол.

13) В окрестности точки минимума x^* график функции $f_1(x)$ близок к симметричному относительно вертикальной оси, проходящей через точку x^*, а график функции $f_2(x)$ заметно асимметричен. Для какой из этих функций следует ожидать более высокой скорости сходимости метода парабол?