Лабораторная работа №6

Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель работы: изучение методов численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; приобретение навыков программирования методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений; приобретение навыков использования стандартных средств системы Matlab для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теоретические сведения

Конкретная прикладная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка, при этом обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) p -го порядка

$$u^{(p)}(t) = f(t, u, u', ..., u^{(p-1)})$$

можно привести к эквивалентной системе p дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных $u^{(k)}(t) = u_k(t)$:

$$\begin{aligned} &u_k'(t) = u_{k+1}(t), \\ &u_{p-1}'(t) = f(t, u_0, ..., u_{p-1}), \\ &u_0(t) = u(t), \end{aligned}$$

где $k = 0,1,..., p-2$. Поэтому важно уметь решать ОДУ первого порядка.

Для решения задачи Коши рассмотрим ОДУ первого порядка. Тогда формулировка задачи выглядит следующим образом: требуется найти непрерывную при $t \in [0,T]$ функцию $u = u(t)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad t \in [0,T] \tag{1}$$

и начальному условию $u(0) = u_0$, где $f(t,u)$ - известная функция двух аргументов. Если функция $f(t,u)$ определена в прямоугольнике $D = \left\{t \in [0,T], \left|u - u_0\right| \le U\right\}$ и удовлетворяет в области D по переменной u условию Липшица:

$$\left|f(t,u_1) - f(t,u_2)\right| \le K\left|u_1 - u_2\right|$$

для всех $(t,u_1), (t,u_2) \in D$ и $K = \text{const}$, то задача (1) имеет единственное решение.

Для решения задачи Коши введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau > 0$, т.е. рассмотрим множество точек $\omega_\tau = \left\{t_n = n\tau,\ n = 0,1,...\right\}$. Будем обозначать через $u(t)$ точное решение, а через $y_n = u(t_n)$ - сеточное, определенное только в точках сетки ω_τ.

Рассмотрим простейшие численные методы, получаемые на основе квадратурных формул. Пусть известно значение $u(t)$ и требуется вычислить значение $u(t+\tau)$. Рассмотрим равенство, вытекающее из формулы Ньютона - Лейбница:

$$u(t+\tau) = u(t) + \int_0^\tau u'(t+x)dx. \tag{2}$$

Считая промежуток $[0,\tau]$ достаточно малым, заменим интеграл в правой части по формуле левых прямоугольников на $\tau u'(t)$. Тогда получим

$$u(t+\tau)\approx u(t)+\tau u'(t),$$

так как $u'(t)=f(t,u(t))$, то

$$u(t+\tau)\approx u(t)+\tau f(t,u(t)).$$

Принимая, что $t=t_j$ и $t+\tau=t_{j+1}$, получаем явную формулу Эйлера для решения задачи Коши:

$$y_{j+1}=y_j+\tau f(t_j,y_j). \tag{3}$$

Аналогично, используя формулу правых прямоугольников для аппроксимации интеграла в (2), получаем неявную формулу Эйлера

$$y_{j+1}=y_j+\tau f(t_{j+1},y_{j+1}).$$

Для получения более точной расчетной формулы необходимо более точно аппроксимировать интеграл в правой части (2). Воспользуемся формулой трапеций:

$$u(t+\tau)\approx u(t)+\frac{\tau}{2}\left(u'(t)+u'(t+\tau)\right),$$

что приводит к соотношению

$$u(t+\tau)\approx u(t)+\frac{\tau}{2}\left(f(t,u(t))+f(t+\tau,u(t+\tau))\right). \tag{4}$$

Записывая уравнение (4) в узлах сетки, получаем итерационную процедуру, называемую методом Адамса второго порядка точности:

$$y_{j+1}=y_j+\frac{\tau}{2}\left(f(t_j,y_j)+f(t_{j+1},y_{j+1})\right).$$

В некоторых случаях, когда $f(t,u)$ линейна по u, данное уравнение может быть разрешено относительно y_{j+1}. Обычно это уравнение неразрешимо явно, поэтому применяют следующий алгоритм нахождения решения, использующий метод простой итерации:

$$y_{j+1}^{(k+1)}=y_j+\frac{\tau}{2}\left(f(t_j,y_j)+f(t_{j+1},y_{j+1}^{(k)})\right).$$

Здесь k **-** номер итерации, а начальное приближение можно определить по явной формуле Эйлера (3):

$$y_{j+1}^{(0)}=y_j+\tau f(t_j,y_j).$$

Фактически необходимо сделать одну или две итерации для достижения заданной точности.

В случае, если для нахождения решения используется только значение функции на предыдущем шаге, методы называют одношаговыми, если же необходимо знание значений функции в более чем одном предыдущем шаге, методы относят к многошаговым.

Одношаговые методы Рунге - Кутты. Пусть $u(t)$ **-** решение дифференциального уравнения $u'(t)=f(t,u)$. Запишем равенство, вытекающее из формулы Ньютона **-** Лейбница, в следующем виде:

$$u(t_{n+1})=u(t_n)+\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}f(t,u(t))dt. \tag{5}$$

Если бы входящий в это равенство интеграл можно было вычислить точно, то получилась бы простая формула, позволяющая последовательно вычислить значения в узлах сетки. Поскольку это невозможно, получим приближенную формулу, заменив интеграл квадратурной суммой. Для этого на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$ введем m вспомогательных узлов: $t_n^{(1)} = t_n + \alpha_1\tau,\ \ t_n^{(2)} = t_n + \alpha_2\tau, \ldots,$ $t_n^{(m)} = t_n + \alpha_m\tau,$ где $0 \le \alpha_1 \le \ldots \le \alpha_m \le 1$. Заменяя входящий в равенство (5) интеграл квадратурной суммой с узлами $t_n^{(i)}$, получаем приближенное равенство

$$u(t_{n+1}) \approx u(t_n) + h\sum_{i=1}^{m} c_i f(t_n^{(i)}, u(t_n^{(i)})) . \tag{6}$$

Однако воспользоваться этим равенством для вычислений нельзя, так как значения функций $u(t)$ в узлах $t_n^{(i)}$ неизвестны. Чтобы определить эти значения, запишем равенства, аналогичные (5):

$$u(t_n^{(i)}) = u(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t_n^{(i)}} f(t, u(t))dt .$$

Заменяя для каждого i входящий в формулу интеграл соответствующей ему квадратурной формулой с узлами $t_n^{(1)}, \ldots, t_n^{(i-1)}$, приходим к приближенным равенствам, позволяющим последовательно вычислять приближенные значения $u(t_n^{(i)})$. Подставляя их в (6) и исключая вспомогательные величины $u(t_n^{(i)})$, получаем

$$u(t_{n+1}) \approx u(t_n) + \tau k_n ,\ k_n = \sum_{i=1}^{n} c_i k_n^{(i)} ,$$

где

$$\begin{aligned}
&k_n^{(1)} = f(t_n, u(t_n)),\\
&k_n^{(2)} = f(t_n + \alpha_2\tau,\ u(t_n) + \tau\beta_{21}k_n^{(1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&k_n^{(m)} = f(t_n + \alpha_m\tau,\ u(t_n) + \tau\sum_{i=1}^{m}\beta_{mi}k_n^{(i)}).
\end{aligned} \tag{7}$$

Полученная рекуррентная система задает явный одношаговый метод вычисления решения, использующий m вспомогательных значений правой части на элементарном отрезке $[t_n, t_{n+1}]$, поэтому его называют m-этапным методом Рунге - Кутты. Кроме этого, если $|f_u(t, u(t))| \le L$ ($L = \mathrm{const} \le \infty$), то m-этапный метод Рунге - Кутты устойчив на конечном отрезке. Если, кроме этого, он имеет p-й порядок аппроксимации, то метод сходится с p-м порядком точности.

Выбор конкретных значений c_i, α_i и β_{ij} осуществляется из тех соображений, чтобы сделать порядок аппроксимации решения максимально возможным. Рассмотрим вопрос о выборе этих параметров. Обозначим погрешность метода на одном шаге $\varphi(\tau) = u(t+\tau) - u(t)$. Если $f(t, u(t))$ - достаточно гладкая функция своих аргументов, то $\varphi(\tau), k_1(\tau), \ldots, k_q(\tau)$ - гладкие функции параметра τ. В этом случае для $\varphi(\tau)$ существуют производные до порядка $(s+1)$ включительно. Разложим $\varphi(\tau)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\tau = 0$:

$$\varphi(\tau) = \sum_{i=0}^{s} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}\tau^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta\tau)}{(s+1)!}\tau^{s+1},$$

где s - порядок погрешности метода; $\theta \in [0,1]$. Коэффициенты c_i, α_i и β_{ij} выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(s)}(0).$$

В практических расчетах используют формулы с погрешностью третьего и четвертого порядка малости по τ. Соответственно для $m = s = 3$ наиболее употребительны соотношения

$$k_1 = f(t_j, y_j), \quad k_2 = f\left(t_j + \frac{\tau}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_2 = f\left(t_j + \tau, y_j - k_1 + 2k_2\right),$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}\tau(k_1 + 4k_2 + k_3).$$

Для $m = s = 4$ используют следующие соотношения:

$$k_1 = f(t_j, y_j), \quad k_2 = f\left(t_j + \frac{\tau}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(t_j + \frac{\tau}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = f\left(t_j + \tau, y_j + k_3\right),$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}\tau(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Средства Matlab для решения задачи Коши. В системе Matlab предусмотрены специальные средства решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных как в явной форме, так и в неявной. В простейшем варианте достаточно воспользоваться оператором [T,x]=**solver**('F',[DT],x0,...), где DT - диапазон интегрирования; x0 - вектор начальных значений; F - имя функции вычисления правых частей системы; **solver** - имя используемой функции (**ode45** - метод Рунге - Кутты 4 и 5-го порядков, **ode23** - тот же метод 2 и 3-го порядков, **ode113** - метод Адамса для нежестких систем, **ode23s, ode15s** - для жестких систем и др.). Версии решателя ОДУ различаются используемыми методами (по умолчанию относительная погрешность равна 10^{-3} и абсолютная 10^{-6}) и соответственно временем и успешностью решения. Под жесткостью здесь понимается повышенное требование к точности - использование минимального шага во всей области интегрирования. При отсутствии информации о жесткости рекомендуется попытаться получить решение посредством **ode45** и затем **ode15s**. Если диапазон DT задан начальным и конечным значением [t_0, t_k], то количество элементов в массиве T (и в массиве решений x) определяется необходимым для обеспечения точности шагом; при задании DT в виде [t_0, t_1, t_2,..., t_k] или [t_0: Δt: t_k] - указанными значениями.

Порядок выполнения работы

1. Выбрать вариант согласно номеру компьютера.
2. Решить ОДУ, написав m-файл. Использовать явный метод Эйлера и метод Рунге - Кутты 4-го порядка.
3. Решить ОДУ с использованием оператора **ode45**.
4. Построить графики, сравнить результаты.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1) цель работы, задание;
2) описание метода решения, краткие сведения из теории (формулы, алгоритм и т.п.);
3) программу (распечатку), ее описание;
4) сравнение результатов расчета;
5) краткие выводы.

Задание

1. $u' = \dfrac{u+t}{u-t}$, $u(0)=1$, [0; 1], h = 0,02;
2. $u' = \cos u + 2t$, $u(0)=0$, [0; 1], h = 0,02;
3. $u' = \exp(t+u)-1$, $u(0)=0$, [0; 1], h = 0,02;
4. $u' = \dfrac{t^2u^2-6}{t^2}$, $u(1)=2$, [1; 1,5], h = 0,01;
5. $u' = -\dfrac{tu}{\sqrt{1-t^2}}$, $u(0)=e$, [0; 0,5], h = 0,01;
6. $u' = \dfrac{1}{\cos t} - u\tan t$, $u(0)=1$, [0; 1], h = 0,02;
7. $u' = \dfrac{2tu^3}{1-t^2u^2}$, $u(2)=1$, [2; 2,5], h = 0,01;
8. $u' = \dfrac{2}{3t}u + \dfrac{3}{2}tu^{1/3}$, $u(1)=0$, [1; 2], h = 0,02;
9. $u' = \dfrac{u^2\ln t - u}{t}$, $u(1)=1$, [1; 2], h = 0,02;
10. $u' = \dfrac{u-t}{u+t}$, $u(0)=1$, [0; 1], h = 0,02;
11. $u' = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{u}{t} - 2t^2$, $u(1)=2$, [1; 2], h = 0,02;
12. $u' = 2\dfrac{u}{t} + t$, $u(1)=0$, [1; 1,5], h = 0,01;
13. $u' = -\dfrac{tu}{1+t^2}$, $u(0)=2$, [0; 0,5], h = 0,01;
14. $u' = u + (1+t)u^2$, $u(0)=1$, [0; 1], h = 0,02;
15. $u' = \dfrac{u+\sqrt{u^2+t^2}}{t}$, $u(1)=0$, [1; 1,5], h = 0,01;
16. $u' = \dfrac{u^2t^2-(2t+1)u+1}{t}$, $u(1)=0$, [1; 1,5], h = 0,01;
17. $u' = \dfrac{1}{u^2+t^2+1}$, $u(0)=0$, [0; 0,5], h = 0,01;
18. $u' = \exp(-3t)(1+u^2)$, $u(0)=0$, [0; 1], h = 0,02;
19. $u' = u^2 + \dfrac{u}{t} + \dfrac{1}{t^2}$, $u(1)=0$, [1; 1,5], h = 0,01;

20. $u' = -\frac{t}{1+t^2}u - \frac{1}{1+t^2}$, $u(0) = 0$, [0; 0,5], h = 0,01;

21. $u' = \exp(-t)(3+u^2)$, $u(0) = 0$, [0; 1], h = 0,02;

22. $u' = -u^2t^2 + \frac{t^2-1}{(1+t)^2}$, $u(0) = 1$, [0; 0,5], h = 0,01;

23. $u' = \frac{\cos u}{1+t} + t^2$, $u(0) = 1$, [0; 1], h = 0,02;

24. $u' = \frac{\cos u}{3+t} + t^2$, $u(0) = 0$, [0; 1], h = 0,02;

25. $u' = \exp(-t)(1+u^2)$, $u(0) = 0$, [0; 1], h = 0,02;

26. $u' = tu^2 + u$, $u(0) = 1$, [0; 1], h = 0,02;

27. $u' = -u^2t^2 + 2\frac{t^2-1}{(2+t)^2}$, $u(0) = 1$, [0; 0,5], h = 0,01;

28. $u' = u^2\exp(x) - 2u$, $u(0) = 1$, [0; 1], h = 0,02;

29. $u' = \frac{1}{t^2} - \frac{u}{t} - t^2$, $u(1) = 2$, [1; 2], h = 0,02;

30. $u' = \frac{3}{u^2+t^2+1}$, $u(0) = 0$, [0; 0,5], h = 0,01.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение задачи Коши для ОДУ n-го порядка.
2. Проведите преобразование к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка.
3. Опишите явный и неявный метод Эйлера.
4. Опишите метод Адамса 2-го порядка точности.
5. Дайте определение одно- и многошаговых методов. Приведите примеры.
6. Дайте общую характеристику методам Рунге - Кутты.
7. Дайте геометрическую иллюстрацию явного метода Эйлера.
8. Каков порядок точности явного метода Эйлера?
9. Какова основная методика создания итерационных процедур повышенной точности?

Литература

Гончаров В.А., Земсков В.Н., Яковлев В.Б. Лабораторный практикум по курсу «Вычислительная математика». – М.: МИЭТ, 2008.