تقدیم به شما

برترین جزوات آموزشی ریاضی

چون شما بهترین هستید.

درس آموز
http://www.darsamoz.com

جزوات آموزشی درس‌آموز

۱

جزوات آموزشی هندسه دهم

ترسیم هندسی و استدلال

دکتر علیرضا نورالدینی

http://www.darsamoz.com

دوستان عزیز:

جهت کسب بهترین نتیجه از مطالعه‌ی جزوات آموزشی درس‌آموز، هنگام استفاده نکات زیر را رعایت کنید:

- مطالعه‌ی جزوه در آرامش، با دقت و صرف وقت کافی.
- درسنامه‌ها را به ترتیب قرار داده شده در جزوات مطالعه کنید.
- مفاهیم درسی را به ذهن سپرده و مثال‌ها را با دقت دنبال کنید.

نکته‌ی مهم:

بعد از مطالعه و درک کامل مثال‌های هر قسمت، نوبت شما است که با تجربه‌ای که کسب کرده‌اید، نمونه-ی «پای تخته» را خودتان مستقل انجام دهید. تصور کنید:

به امر استاد برای حل نمونه پای تخته رفته‌اید و راهنمایی او را هم در اختیار دارید!

پاسخ خود را با جواب آخر که معمولاً در کنار هر نمونه نوشته شده مقایسه کنید. اگر احیاناً پاسخ شما نادرست است، مثال‌های قبل را دوباره مرور کرده و دوباره به حل اقدام نمایید. البته بعد از این مراحل، راهنمای کامل آن را در انتهای همان بخش در اختیار دارید.

- بعد از اتمام هر بخش، سراغ حل تمرینات که در واقع نقش مکمل یادگیری شما را دارند، بروید. پاسخ آن‌ها هم در این بسته‌ی آموزشی قرار دارد.
- جزوات درس‌آموز حاصل سال‌ها تحصیل و ماه‌ها تلاش برای تألیف آن‌ها است. لازم نیست کتاب یا جزوه‌ی دیگری بخوانید:

جزوات درس‌آموز را چند بار بخوانید!

با آرزوی بهترین‌ها

دکتر علیرضا نورالدینی

ترسیم هندسی و استدلال

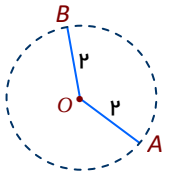
«آموزش تشریحی هندسه یک سال دهم»

فهرست مطالب جزوه	صفحه
▪ ترسیم‌های هندسی	۲۰
▪ استدلال و استنتاج	۲۸
▪ قضایای شرطی و دوشرطی	۳۴
▪ تمرینات	۳۸
▪ پاسخ فعالیت‌های پای تخته	۴۰

۱ روش‌های ترسیم

http://www.darsamoz.com

دایره‌ای به مرکز یک نقطه‌ی O و شعاع ۲ سانتی‌متر در نظر بگیرید:



نقاط روی این شکل هندسی همگی دارای یک ویژگی مشترک هستند که هنگام رسم دایره مورد استفاده قرار می‌گیرد:

تمام نقاط دایره به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از نقطه‌ی O قرار دارند!

یعنی در شکل بالا:

اندازه‌ی شعاع‌های OA و OB و هر شعاع دیگری برابر ۲ سانتی‌متر است.

توجه کنید:

طول یک پاره‌خط مانند AB را معمولاً به صورت $\overline{AB}$ می‌نویسند. در این جزوات، برای سادگی طول را با نماد معمولی AB نشان خواهیم داد!

در حالت کلی: هر ترسیم هندسی با توجه به خاصیت یا خواص مشترک نقاط آن انجام می‌شود:

مکان هندسی

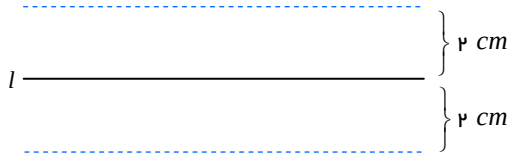
منظور از یک مکان هندسی:

مجموعه تمام نقاطی است که همگی یک ویژگی مشترک دارند.

برای رسم مکان باید تمام نقاطی که آن ویژگی را دارند مشخص کرده و سپس نمودار را ترسیم کرد.

دو نمونه‌ی مهم مکان هندسی:

- چنان که در بالا دیدیم، مکان هندسی نقطه‌ای به فاصله‌ی ۲ از نقطه‌ی O یک دایره به مرکز O و شعاع ۲ است.
- اگر l یک خط باشد، مکان هندسی نقطه‌ای به فاصله‌ی ۲ از l، دو خط موازی به فاصله‌ی ۲ در دو طرف آن است:



تکنیک رسم:

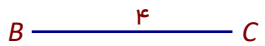
بسیاری اوقات در یک ترسیم هندسی باید نقطه‌ای را بیابیم که دارای دو ویژگی باشد. در این صورت:

- مکان‌های هندسی مربوط به هر یک از ویژگی‌ها را رسم می‌کنیم.
- نقطه یا نقاطی که در هر دو مکان مشترک باشد، جواب مورد نظر را مشخص می‌کند.

نمونه‌ی بعد را ببینید:

مثال: مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ :



پاره‌خط BC را به طول ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. اکنون باید به دنبال نقطه‌ی A با دو ویژگی زیر بگردیم:

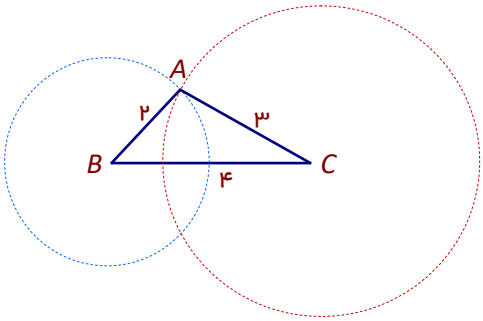
۱) لازم است فاصله‌ی A تا B برابر ۲ سانتی‌متر باشد؛

مکان مربوطه یک دایره به مرکز B و شعاع ۲ سانتی‌متر است.

۲) لازم است فاصله‌ی A تا C برابر ۳ سانتی‌متر باشد؛

مکان مربوطه یک دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است.

با رسم دو دایره، برخورد آن‌ها نقطه‌ی A را مشخص خواهد کرد:

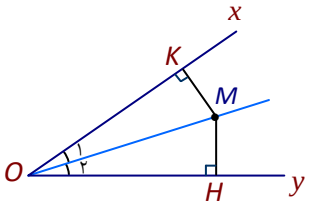


در ادامه به ترسیم چند مکان هندسی استاندارد می‌پردازیم؛ قبل از آن توجه کنید:

- برای رسم یک دایره به مرکز آن و اندازه‌ی شعاع نیاز است و سپس توسط پرگار ترسیم انجام می‌شود.
- برای رسم یک پاره‌خط، نیم‌خط و یا خط به دو نقطه روی آن نیاز بوده و سپس رسم توسط خط‌کش انجام می‌شود.

در اولین مورد، تعیین خاصیت مشترک نقاط روی نیمساز یک زاویه را ببینید:

مثال: اگر نقطه‌ی M روی نیمساز یک زاویه باشد، نشان دهید فاصله‌ی M تا دو ضلع آن زاویه برابر است. یعنی:



$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow MH = MK$$

برهان :

به آسانی دیده می‌شود که دو مثلث $\overset{\Delta}{OMH}$ و $\overset{\Delta}{OMK}$ طبق یکی از حالت‌های خاص مثلث‌های قائم‌الزاویه، یعنی: «وتر و یک زاویه‌ی تند» هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وز)}} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK}$$

بنابراین تمام اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابر بوده و از جمله $MH = MK$ است.

نشان دهید عکس مثال بالا هم درست است؛ یعنی:

پای تخته !

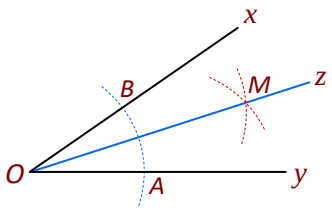
۱. اگر نقطه‌ی M فاصله‌ی برابر تا دو ضلع یک زاویه داشته باشد، در این صورت روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

www.darsamoz.com درس‌آموز

رسم نیمساز:

با استفاده از خط‌کش و پرگار، رسم نیمساز یک زاویه‌ی $\widehat{xOy}$ طبق مراحل زیر انجام می‌شود:

- دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواهی باز کرده و به مرکز O یک کمان می‌زنیم تا ضلع‌های زاویه را در نقاط A و B قطع کند.
- اکنون به مراکز A و B و با شعاع دلخواهی دو کمان می‌زنیم که یکدیگر را در نقطه‌ای چون M قطع کنند. سپس نیم‌خط Oz را از O و M عبور می‌دهیم:



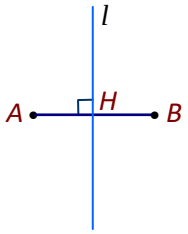
توجه کنید:

اگر پاره خط‌های BM و AM را رسم کنید، دو مثلث OBM و OAM طبق حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت خواهند شد و بنابراین:

$\widehat{xOz} = \widehat{yOz} \quad \Rightarrow$ **نیم‌خط Oz نیمساز زاویه‌ی است**

ترسیم اصلی دیگر، عمود منصف یک پاره‌خط است که ابتدا مفهوم آن را یادآوری می‌کنیم:

عمود منصف پاره‌خط:



یک پاره‌خط مانند AB در نظر بگیرید. عمود منصف این پاره‌خط، خطی مانند l با دو خاصیت زیر خواهد بود:

- اولاً: خط l از وسط پاره‌خط عبور می‌کند: $AH = HB$
- ثانیاً: خط l بر پاره‌خط AB عمود است:

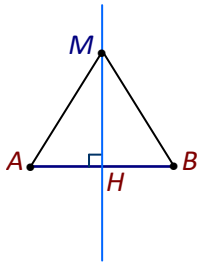
$$\hat{H} = ۹۰^\circ$$

در نمونه‌ی بعد، تعیین خاصیت مشترک نقاط روی عمود منصف یک پاره‌خط را ببینید:

مثال: اگر نقطه‌ی M روی عمود منصف پاره‌خط AB باشد، نشان دهید فاصله‌ی M تا دو سر پاره‌خط برابر است. یعنی:

$$MA = MB$$

برهان :



به آسانی دیده می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{MAH}$ و $\overset{\Delta}{MBH}$ هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} AH = HB \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ MH = MH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌زض)}} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH}$$

بنابراین تمام اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابر هستند؛ از جمله $MA = MB$ است.

نشان دهید عکس مثال بالا هم درست است:

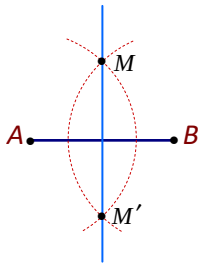
پای تخته !

۲. اگر نقطه‌ی M فاصله‌ی برابر تا دو سر پاره‌خط AB داشته باشد، M روی عمود منصف قرار دارد.

www.darsamoz.com درس‌آموز

رسم عمود منصف:

با توجه به دو مورد بالا، برای رسم عمود منصف، دو نقطه به فاصله‌ی برابر تا A و B مشخص کرده و خط گذرا از آن دو رسم می‌شود:



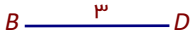
- دهانه‌ی پرگار را بیشتر از نصف طول AB باز کرده، یک‌بار به مرکز A و یک‌بار به مرکز B کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در نقاط M و M' قطع کنند.

- فاصله‌های M و M' از نقاط A و B برابر شعاع دایره‌های یکسانی بوده و در نتیجه با هم برابرند، پس این دو نقطه روی عمود منصف قرار دارند. پس خط گذرا از این دو نقطه همان عمود منصف است.

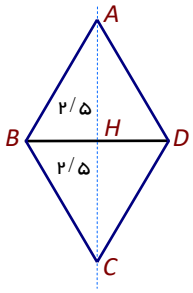
مثال: یک لوزی با طول قطرهای ۵ و ۳ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ :

طبق این خاصیت که «قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگر هستند»، ترسیم را انجام می‌دهیم:



- پاره‌خط BD را به طول ۳ سانتی‌متر در نظر بگیرید.
- طبق روش بالا، عمود منصف BD را توسط پرگار و خط‌کش رسم می‌کنیم.



سپس کافی است از نقطه‌ی H به اندازه‌ی ۲/۵ سانتی‌متر بالا و پایین رفته تا نقاط A و C مشخص شوند. در پایان این نقاط را با خط‌کش به یکدیگر وصل می‌کنیم:

نوبت شماست . . .

پای تخته !

۳. یک لوزی با طول قطر کوچک ۴ سانتی‌متر و طول ضلع ۳ سانتی‌متر رسم کنید.

www.darsamoz.com درس‌آموز

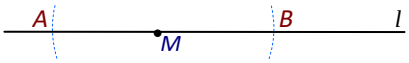
در ادامه چند ترسیم هندسی دیگر با استفاده از روش رسم عمود منصف ببینید:

رسم عمود بر خط:

خط l و نقطه‌ای چون M در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی از M عبور دهیم که بر l عمود باشد. این ترسیم در دو حالت انجام می‌شود:

حالت (۱): فرض کنید نقطه‌ی M روی خط l قرار داشته باشد.

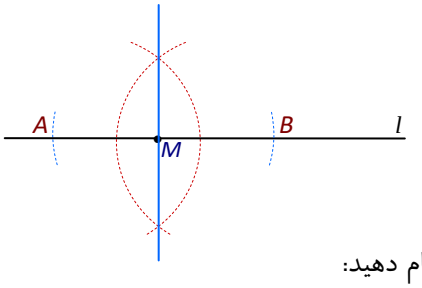
گام اول: توسط پرگار به مرکز M و شعاع دلخواهی کمان‌هایی می‌زنیم تا خط l را در دو طرف M در نقاط A و B قطع کند:



توجه کنید:

چون شعاع دو کمان یکسان است، داریم $MA=MB$ و بنابراین M وسط پاره‌خط AB است.

گام دوم: اکنون اگر به روش گفته شده، عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، بر خط l عمود بوده و از نقطه‌ی M نیز عبور خواهد کرد:



حالت دیگر رسم خط عمود را به صورت مشابه بالا انجام دهید:

پای تخته!

۴. **حالت (۲):** فرض کنید نقطه‌ی M خارج روی خط l قرار داشته و با تکمیل گام‌های زیر، خطی گذرا از M بر l عمود کنید.

گام اول: دو نقطه مانند A و B روی خط l مشخص کنید به طوری که $MA=MB$ باشد.

گام دوم: عمود منصف AB را رسم کنید. چرا نقطه‌ی M روی این عمود منصف قرار دارد؟

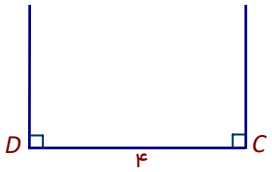
www.darsamoz.com درس‌آموز

مثال: یک مستطیل به طول ۴ سانتی‌متر و اندازه‌ی قطر ۶ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ :

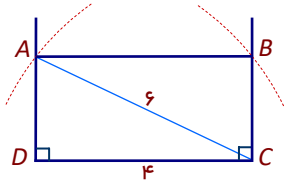
طبق این خاصیت که «زوایای مستطیل قائمه هستند»، ترسیم را انجام می‌دهیم:

- پاره‌خط DC را به طول ۴ سانتی‌متر در نظر بگیرید.
- طبق روش بالا، در نقاط D و C دو خط بر DC عمود رسم می‌کنیم.



اکنون توجه کنید:

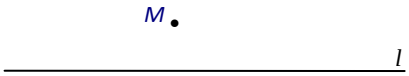
چون طول قطر برابر ۶ است، نقطه‌ی A روی خط عمود سمت چپ و دایره‌ی به مرکز C و شعاع ۶ قرار دارد. نقطه‌ی برخورد این دو، نقطه‌ی A است. به همین صورت، دایره‌ی به مرکز D و شعاع ۶ سانتی‌متر، نقطه‌ی B را مشخص خواهد نمود:



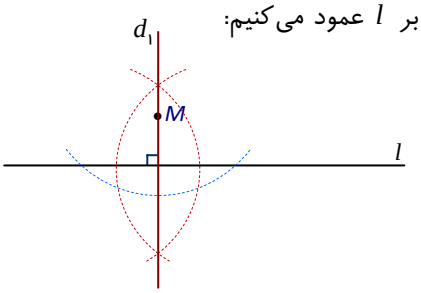
کاربرد بعدی عمود منصف، رسم خطی موازی یک خط داده شده است:

رسم خط موازی:

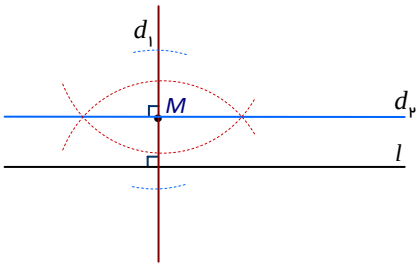
خط l و نقطه‌ای چون M در خارج آن در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی از M عبور دهیم که با l موازی باشد:



گام (۱): طبق حالت (۲) از رسم خط عمود، از نقطه‌ی M خط d_1 را بر l عمود می‌کنیم:



گام (۲): اکنون نقطه‌ی M روی خط d_1 قرار دارد. این بار طبق حالت (۱) از رسم خط عمود، خطی چون d_2 از نقطه‌ی M بر خط d_1 عمود می‌کنیم:



نتیجه‌گیری:

خط $d_۲$ از نقطه‌ی M عبور کرده و داریم:

$$l \perp d_۱ \quad \text{و} \quad d_۲ \perp d_۱$$

بنابراین: هر دو خط l و $d_۲$ بر خط $d_۱$ عمود بوده و در نتیجه خودشان موازی‌اند. یعنی: $d_۲ || l$ و $d_۲$ همان خط مورد نظر است.

۲ استدلال و استنتاج

http://www.darsamoz.com

در احکام و مسائل هندسی همواره به استدلالی نیاز است که درستی یا نادرستی هر یک را نشان دهد (یعنی: اثبات کند.) در این گونه موارد، معمولاً به دو صورت با مسأله برخورد می‌شود:

استدلال استقرایی:

در این روش با چندین مشاهده، یک نتیجه‌گیری کلی انجام می‌دهیم. یعنی:

استدلال استقرایی رسیدن از جزء به کل است.

به عنوان نمونه:

مثال: یک انسان دوره‌ی ماقبل تاریخ را در نظر بگیرید. او ممکن است بعد از کشف آتش، این تجربیات را داشته باشد:

- با حرارت دادن آب، ببینید پس از مدتی آب به بخار تبدیل می‌شود.
- با حرارت دادن یک تکه یخ، آن هم به بخار تبدیل شده است.

و به علت دانش و اطلاعات ناقص، نتیجه گرفته باشد که:

هر شیء با حرارت دیدن، بعد از مدتی به بخار تبدیل می‌شود!

می‌دانیم که این نتیجه برای تمام اشیاء صحیح نیست و در نتیجه استدلال استقرایی ممکن است نتایج نادرست حاصل کند.

نکته:

در مورد استفاده از استدلال استقرایی به دو مورد مهم اشاره می‌شود:

- احکام بدست آمده به روش استقرایی ممکن است نادرست باشند. لذا این روش استدلال قابل اطمینان نبوده و باید احکام به روش‌های دیگری به‌طور قطعی تایید شوند.
- با وجود این‌که روش استقرایی قابل اطمینان نیست، برای بدست آوردن فرضیه‌های علمی و حتی در برخی بررسی‌های علوم تجربی به عنوان تنها ابزار، از آن استفاده می‌شود.

در همین جزوات نیز:

در بخش پایانی جزوه‌ی (۳)، کاربرد بسیار جالبی از استدلال استقرایی را در قضیه‌ی پیک خواهیم دید!

روش اصلی و قوی‌تر استدلال در ریاضیات را ببینید:

استدلال استنتاجی:

برخورد صحیح با یک حکم این است که:

- بر اساس حقایق و احکام کلی از پیش قبول کرده و
- با استفاده از محاسبات و دلایل منطقی

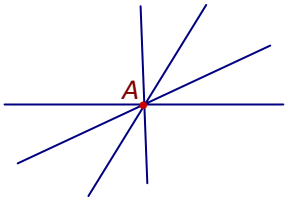
درستی آن حکم خاص را نشان داد که به این روش **«استدلال استنتاجی»** گویند. بنابراین:

http://www.darsamoz.com

استدلال استنتاجی رسیدن از کل به جزء است.

در سال‌های قبل نمونه‌هایی از روش اثبات به طریق استنتاجی را دیده‌ایم. در ادامه یک مفهوم هندسی معرفی کرده و سپس نمونه‌های دیگری از استدلال استنتاجی را خواهیم دید.

خطوط همرس:



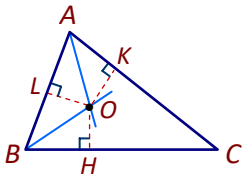
چند خط که همگی در یک نقطه چون A مشترک باشند را همرس گویند:

بعلاوه: نقطه‌ی A را نقطه‌ی همرسی این خط‌ها می‌نامیم.

مثال: نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس‌اند.

برهان :

مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته، نیمسازهای زوایای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را رسم کرده و نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم. همچنین با رسم عمودهایی از O بر اضلاع، فاصله‌ی O تا سه ضلع به صورت OH، OK و OL مشخص می‌شوند:



اکنون توجه کنید:

- چون O نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ است، طبق خاصیت نیمساز داریم:

$$OK = OL$$

- به صورت مشابه، چون O نیمساز زاویه‌ی $\hat{B}$ است، طبق خاصیت نیمساز می‌نویسیم:

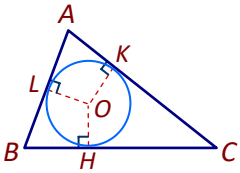
$$OH = OL$$

با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که: $OH = OK$. یعنی فاصله‌ی O تا دو ضلع زاویه‌ی $\hat{C}$ نیز با هم برابر است و در نتیجه: نقطه‌ی O روی نیمساز $\hat{C}$ نیز قرار داشته و سه نیمساز در نقطه‌ی O همرس هستند.

نتیجه:

با توجه به اثبات بالا، به دو مورد جالب دست می‌یابیم:

- نقطه‌ی همرسی سه نیمساز زوایای داخلی، نقطه‌ای چون O درون مثلث است با این خاصیت که: فاصله‌ی O تا سه ضلع مثلث با هم برابر است: $OH = OK = OL$.
- طبق مورد قبل؛ اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OH باز کرده و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از نقاط H، K و L عبور خواهد کرد:



توجه کنید:

این دایره از داخل مثلث بر هر سه ضلع آن مماس است!

با روشی کاملاً مشابه مثال قبل و با توجه به ویژگی عمود منصف، نشان دهید:

پای تخته !

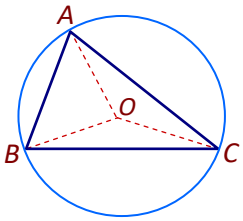
۵. عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند.

www.darsamoz.com درس‌آموز

نتیجه:

فعالیت پاتخته قبل نیز، موارد مهم زیر را حاصل می‌کند:

- نقطه‌ی همرسی سه عمود منصف اضلاع مثلث، نقطه‌ای چون O درون مثلث است با این خاصیت که:
  فاصله‌ی O تا سه رأس مثلث با هم برابر است: $OA = OB = OC$.
- طبق مورد قبل؛ اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OA باز کرده و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث عبور خواهد کرد!



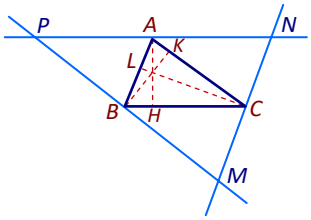
در فعالیت بعدی، به کمک شما دانش‌آموز عزیز خواهیم دید ارتفاع‌های هر مثلث نیز همرس‌اند:

پای تخته !

۶. با انجام گام‌های ساده‌ی زیر، نشان دهید ارتفاع‌های وارد بر اضلاع هر مثلث همرس‌اند.

گام ۱: مثلث ABC و ارتفاع‌های AH، BK و CL را در آن در نظر بگیرید.

گام ۲: از هر رأس مثلث، خطی موازی ضلع روبرو رسم کنید تا از برخورد آن‌ها مثلث MNP ایجاد شود.



گام ۳: دلیلی بیاورید که نشان دهد AH بر PN، BK بر PM و CL بر MN عمود هستند.

گام ۴: دلیلی بیاورید که نشان دهد چهار ضلعی‌های $ABCN$ و $ACBP$ متوازی الاضلاع هستند و نتیجه بگیرید که $AN = AP$ است و به صورت مشابه $BM = BP$ و $CM = CN$ نیز درست هستند.

گام ۵: از گام‌های ۳ و ۴ نتیجه بگیرید که ارتفاع‌های مثلث ABC همان عمود منصف‌های مثلث MNP بوده و در نتیجه همرس هستند.

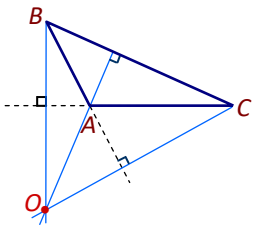
www.darsamoz.com درس‌آموز

نکته:

بر خلاف نقطه‌ی همرسی نیمسازهای مثلث که همیشه درون مثلث قرار دارد، نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها و عمود منصف‌های اضلاع ممکن است بیرون مثلث قرار گیرند.

نمونه:

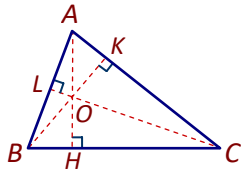
در مثلث ABC مقابل، دو ارتفاع بر امتداد ضلع مقابل عمود شده و فقط یکی از ارتفاع‌ها بر ضلع مقابل BC عمود شده است. در نتیجه، نقطه‌ی همرسی O در بیرون مثلث قرار گرفته است.



در مثال بعد، نمونه‌ی دیگری خواهیم دید:

مثال: مثلث دلخواه ABC را با شرط تند بودن زوایای داخلی رسم کرده و O را نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های آن در نظر بگیرید. سپس نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث OAC را مشخص کنید.

پاسخ :



با دقت به مثلث OAC نگاه کرده و سه ارتفاع را تشخیص می‌دهیم:

- پاره‌خط OK یکی از ارتفاع‌ها است که از O بر ضلع AC عمود شده است.
- پاره‌خط AL در بیرون مثلث OAC از A بر امتداد ضلع OC عمود شده و ارتفاع محسوب می‌شود.
- به صورت مشابه؛ پاره‌خط CH در بیرون مثلث OAC از C بر امتداد ضلع OA عمود شده و ارتفاع محسوب می‌شود.

بنابراین باید نقطه‌ی برخورد خط‌های گذرنده از سه ارتفاع، یعنی OK، AL و CH به عنوان نقطه‌ی همرسی مشخص شود که مشاهده می‌کنید نقطه‌ی B خواهد بود!

گاهی یک حکم نادرست است، اثبات نادرست بودن احکام کار نسبتاً ساده‌ای می‌باشد:

مثال نقض:

اگر یک حکم نادرست باشد، کافی است یک مثال بیاوریم که نادرست بودن آن را نشان دهد. به چنین مثالی **«مثال نقض»** گفته می‌شود.

مثال: برای موارد زیر مثال نقض آورده و آن‌ها را رد کنید.

الف) اگر $x^۲ > ۴$ باشد، در این صورت $x > ۲$ است.

ب) نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث همیشه درون آن قرار می‌گیرد.

پاسخ :

الف) عدد $x = -۳$ را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که $(-۳)^۲ = ۹ > ۴$ صحیح بوده ولی -۳ بزرگ‌تر از ۲ نیست و بنابراین حکم نادرست است.

ب) کافی است مثلثی با یک زاویه‌ی باز (مانند نکته و مثال قبل) را به عنوان مثال نقض در نظر بگیرید؛ زیرا نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها خارج مثلث قرار می‌گیرد.

با دقت نمونه‌ی بعد را پاسخ دهید:

پای تخته !

۷. برای حکم کلی زیر مثال نقض بیاورید:

هر چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع برابر داشته باشد، متوازی الاضلاع است!

www.darsamoz.com درس‌آموز

۳ شرطی و دوشرطی

http://www.darsamoz.com

در این بخش، با روش بیان دقیق‌تر مفاهیم و احکام هندسی آشنا می‌شویم. در واقع با بیان احکام به صورت استاندارد، با مطالب جدید و بسیار مهمی آشنا خواهیم شد:

گزاره:

در ریاضیات، به هر ادعا یا خبر که یا «دقیقاً درست» و یا «دقیقاً نادرست» است، یک **«گزاره»** گویند.

- اگر گزاره فقط شامل یک خبر باشد، به آن یک گزاره‌ی **«ساده»** گوئیم.

به عنوان نمونه: عبارت «عدد ۷ سومین عدد اول است» یک گزاره‌ی ساده است.

- اگر گزاره شامل دو یا چند خبر باشد، به آن گزاره‌ی **«مرکب»** گویند.

به عنوان نمونه: عبارت «عدد ۷ چهارمین عدد اول و $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است» یک گزاره‌ی مرکب است.

بعلاوه؛

در برخورد با یک گزاره، باید یکی از دو مسیر زیر دنبال گردد:

الف) اگر گزاره درست باشد، باید آن را با استدلال استنتاجی ثابت کنیم که به این استدلال، **«برهان»** هم گفته می‌شود.

مانند: همرس بودن ارتفاع‌ها یا نیمسازهای زوایای داخلی مثلث که در بخش قبل دیدیم. بویژه، در بین احکام درست، برخی از آن‌ها جایگاه خاصی دارند:

قضیه:

در هندسه، گزاره‌هایی مهم که کاربردهای زیادی داشته و برای آن‌ها برهان درستی آورده‌ایم، **«قضیه»** نامیده می‌شوند. بنابراین:

قضیه: گزاره‌ی کلی و مهمی است که همیشه درست است.

ب) هرگاه گزاره نادرست باشد، باید برای آن مثال نقض ارائه دهیم.

برای بیان واضح‌تر یک قضیه یا یک گزاره، با تعیین فرض و حکم، آن را به صورت استاندارد زیر می‌نویسیم:

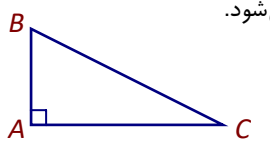
قضیه و گزاره شرطی

می‌توان یک گزاره را به صورت زیر بیان کرد که در این صورت به آن **«گزاره شرطی»** گویند:

اگر فرض، آنگاه حکم

بویژه: اگر یک قضیه را به صورت شرطی بیان کنیم، به آن **«قضیه شرطی»** گفته می‌شود.

به‌عنوان نمونه: قضیه فیثاغورس به‌صورت شرطی چنین است:



اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، آنگاه $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ است.

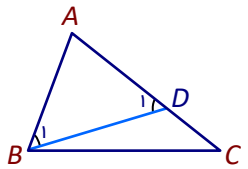
مثال: گزاره‌ی «هرقدر یک ضلع مثلث بزرگ‌تر باشد، زاویه مقابل آن بزرگ‌تر است» را به صورت شرطی نوشته و آن را ثابت کنید.

پاسخ :

توجه کنید: برای بیان راحت‌تر، می‌توانید از شکل و نمادهای ریاضی در بیان شرطی قضایا بهره ببرید!

بنابراین، حکم داده شده به صورت شرطی چنین است:

اگر در مثلث ABC **مقابل** $AC > AB$ **باشد، آنگاه** $\hat{B} > \hat{C}$ **است.**



برهان:

چون $AC > AB$ است، می‌توان نقطه‌ی D را روی ضلع AC طوری انتخاب کرد که $AB = AD$ باشد.

- بنابر انتخاب نقطه‌ی D، مثلث ABD متساوی الساقین بوده و در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ است. از طرفی زاویه‌ی $\hat{B}_1$ جزئی از زاویه‌ی اصلی $\hat{B}$ بوده و در نتیجه $\hat{B} > \hat{B}_1$ است. لذا:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} > \hat{B}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} > \hat{D}_1$$

- از طرف دیگر، زاویه‌ی $\hat{D}_1$ برای مثلث DBC یک زاویه‌ی خارجی محسوب شده و لذا از زاویه‌ی داخلی غیر مجاور خود، یعنی $\hat{C}$ بزرگ‌تر است. در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} > \hat{D}_1 \\ \hat{D}_1 > \hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

نقیض گزاره:

هرگاه در یک گزاره، خبر (حکم) آن را کاملاً برعکس کنیم، نقیض آن بدست می‌آید.

توجه کنید:

می‌توانید برای نقیض کردن گزاره، عبارت «چنین نیست که» را به ابتدای آن اضافه کنید!

به عنوان نمونه، یک گزاره و نقیض آن را ببینید:

- گزاره: امروز هوا گرم است.
- نقیض: چنین نیست که امروز هوا گرم است.

البته می‌توان با برعکس کردن خبر موجود در گزاره، نقیض را به صورت روان‌تر بیان کرد. در نمونه‌ی قبل، می‌توان نقیض را به صورت ساده‌ی زیر بیان نمود:

امروز هوا گرم نیست!

اکنون روش دیگری برای استدلال: گاهی ارائه‌ی استدلال استنتاجی به صورت عادی مشکل یا غیرممکن است. در چنین صورتی، معمولاً روش اثبات غیر مستقیم به صورت زیر، کمک بسیار زیادی می‌کند:

برهان خُلف

برای استفاده از این روش، طبق گام‌های زیر عمل می‌کنیم:

- حکم مورد نظر را نادرست در نظر می‌گیریم؛ یعنی: فرض می‌کنیم نقیض آن درست باشد. به این فرض جدید، «**فرض خلف**» هم می‌گویند!
- با توجه به فرضِ مرحله‌ی قبل و آوردن دلایلی مناسب، به یک تناقض با فرض آن قضیه یا مسأله و یا حقایق شناخته شده می‌رسیم.
- نتیجه می‌گیریم: حکم آن مسأله نمی‌تواند نادرست باشد و از ابتدا صحیح بوده است.

مثال: نشان دهید هر مثلث حداکثر یک زاویه‌ی باز دارد.

پاسخ :

با برهان خلف؛ فرض کنید یک مثلث ABC وجود داشته باشد که در آن بیش از یک زاویه‌ی باز داشته باشیم؛ مثلاً $\hat{A} > ۹۰^\circ$ و $\hat{B} > ۹۰^\circ$. در این صورت:

$$\hat{A} + \hat{B} > ۹۰^\circ + ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} > ۱۸۰^\circ$$

چون $\hat{C}$ عددی مثبت است، از نامساوی بالا داریم: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > ۱۸۰^\circ$. اما در مورد مجموع زوایای مثلث می‌دانیم: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ و بنابراین نامساوی قبل یک تناقض است. پس:

فرض خلف باطل شده و حکم اثبات می‌شود!

عکس قضیه شرطی:

برای نوشتن عکس یک قضیه‌ی شرطی، جای فرض و حکم را عوض می‌کنیم.

توجه کنید:

عکس یک قضیه شرطی ممکن است یک قضیه نباشد، یعنی ممکن است حکمی نادرست شود!

مثال: اولاً: حکم زیر را به صورت شرطی نوشته و تعیین کنید درست است یا نادرست؟

در مثلث قائم‌زاویه، وتر بزرگ‌ترین ضلع است.

ثانیاً: عکس این حکم به صورت شرطی نوشته و مشخص کنید درست یا نادرست است.

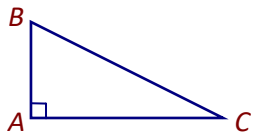
پاسخ :

اولاً: بیان شرطی حکم با استفاده از شکل چنین است:

اگر مثلث ABC **زیر قائم‌الزاویه باشد** $\hat{A} = ۹۰^\circ$،

آنگاه وتر BC **از دو ضلع** AB **و** AC **بزرگ‌تر است.**

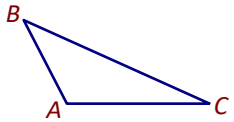
می‌دانیم که این حکم درست است.



ثانیاً: عکس گزاره با تعویض جای فرض و حکم:

اگر در مثلث ABC ضلع BC از AB و AC بزرگ‌تر باشد، آنگاه مثلث قائم‌الزاویه است.

این گزاره نادرست است و می‌توانیم برای آن مثال نقض بیاوریم:



نوبت شماست . . .

پای تخته !

۸. عکس گزاره‌ی زیر را به صورت شرطی نوشته و توسط برهان خلف ثابت کنید:

در هر مثلث، زاویه‌ی روبرو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبرو به ضلع کوچک‌تر!

www.darsamoz.com درس‌آموز

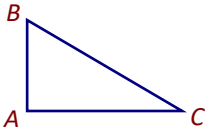
قضیه‌هایی که عکس آن‌ها هم درست است، در ریاضیات اهمیت فراوانی دارند:

قضیه دوشرطی

هرگاه عکس یک قضیه شرطی همواره درست باشد، آن قضیه را می‌توان به صورت دوشرطی بیان کرد:

فرض اگر و فقط اگر حکم

به‌عنوان نمونه: چون عکس قضیه‌ی فیثاغورس صحیح است، می‌توان آن را به صورت دو شرطی بیان کرد:



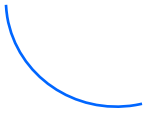
مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر و فقط اگر $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

تمرینات

۱– دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از هم قرار دارند. توسط ترسیم مناسب، نقاطی در صفحه را مشخص کنید که از A به فاصله‌ی ۳ و از B به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند.

۲– نقطه‌ی M روی خط l قرار دارد. نقاطی را تعیین کنید که از نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر و از خط l به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند.

۳– قطعه‌ای از یک دایره به صورت مقابل داده شده است. به کمک ترسیم، مرکز دایره‌ی مربوطه را دقیقاً مشخص کنید:



۴– چند لوزی به طول ضلع ۲/۵ سانتی‌متر و قطر کوچک ۶ سانتی‌متر قابل رسم است؟

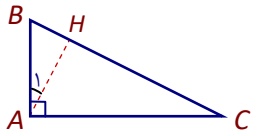
۵– مشخص کنید کدام مورد درست و کدام نادرست است. برای موارد نادرست مثال نقض بیاورید.

- هر مثلث متساوی الساقین یک مثلث متساوی الاضلاع است.
- هر مثلث متساوی الاضلاع یک مثلث متساوی الساقین است.
- هر لوزی یک متوازی الاضلاع است.
- توان سوم هر عدد بزرگ‌تر از توان دوم آن عدد است.
- جذر یک عدد از خود آن عدد کوچک‌تر است.

۶– نقیض هر مورد را به صورت روان بنویسید:

- عدد a بزرگ‌تر از عدد b است.
- عدد ۱۳ زوج است.
- تساوی $x-۳=۵$ برقرار است.

۷– در شکل مقابل مثلث قائم الزاویه و $\hat{C} \neq \hat{A}_1$ است.

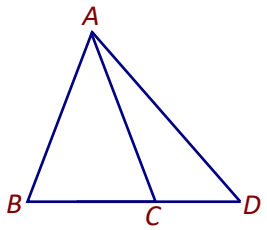


توسط برهان خلف نشان دهید AH نمی‌تواند ارتفاع مثلث باشد.

۸– قضیه‌ی زیر را به صورت شرطی نوشته و سپس عکس آن را هم به صورت شرطی بنویسید. آیا این قضیه دوشرطی محسوب می‌شود؟ چرا؟

هر دو زاویه‌ی قائمه مکمل هستند.

۹– در شکل زیر $AB = AC$ است و نقطه‌ی D بیرون مثلث ABC قرار دارد. ثابت کنید: $AB < AD$.



۱۰– کدام مورد را می‌توان به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی بیان کرد؟ در صورت امکان به صورت دوشرطی بنویسید:

- هر مثلث با دو ضلع برابر، دو زاویه‌ی برابر دارد.
- هر مربع یک مستطیل است.
- نقطه‌ی همرسی نیمسازها درون مثلث قرار دارد.

۱۱– نقطه‌ای درون مثلث مشخص کنید که از سه ضلع آن به یک فاصله باشد.

۱۲– نقطه‌ای مشخص کنید که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد. آیا این نقطه همیشه درون مثلث قرار دارد؟

۱۳– در کدام نوع مثلث، نقطه‌ی همرسی نیمسازها و ارتفاع‌ها بر هم منطبق است؟

۱۴– نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ سانتی‌متر را دقیقاً مشخص کنید.

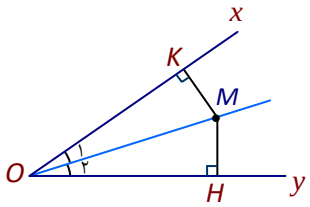
نتیجه‌ی حل این تمرین چیست؟

پاسخ‌نامه

فعالیت‌های پای تخته فصل اول

این قسمت را فقط در صورتی ببینید که قصد مقایسه‌ی پاسخ خود با پاسخ صحیح را دارید!

۱– فرض کنید $MH = MK$ باشد.



در این صورت دو مثلث قائم الزاویه به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت خواهند بود:

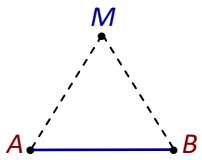
$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ MH = MK \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وض)}} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK}$$

از این هم‌نهشتی برابری اجزای نظیر نتیجه می‌شود؛ از جمله:

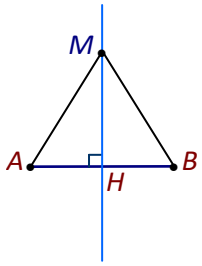
$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

یعنی: نقطه‌ی M روی نیمساز زاویه قرار دارد.

۲– فرض کنید بدانیم $MA = MB$ است.



از نقطه‌ی M خطی بر AB عمود می‌کنیم و می‌بینیم دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{MAH}$ و $\overset{\Delta}{MBH}$ هم‌نهشت هستند:

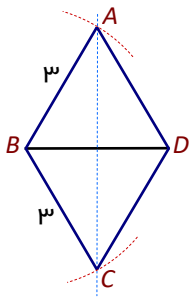


$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ MA = MB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وض)}} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH}$$

بنابراین تمام اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابر هستند؛ از جمله $AH = HB$ است و بنابراین خط گذرا از M و H عمود منصف بوده و M روی آن قرار دارد.

۳– با توجه به این خاصیت که «قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگر هستند»، ترسیم را انجام می‌دهیم:

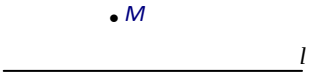
- پاره‌خط BD را به طول ۴ سانتی‌متر در نظر بگیرید.



- طبق روش جزوه، عمود منصف این پاره‌خط را توسط پرگار و خط‌کش رسم می‌کنیم.
- چون طول اضلاع لوزی ۳ سانتی‌متر است، به مرکز B و شعاع ۳ کمان‌هایی می‌زنیم تا عمود منصف را در نقاط A و C قطع کند.

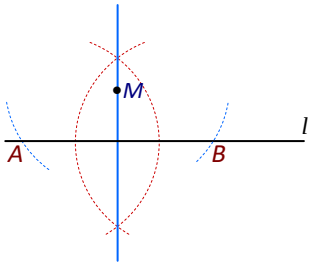
در پایان نقاط را با خط‌کش به هم وصل کرده تا لوزی رسم شود.

۴– فرض کنید نقطه‌ی M خارج خط l داده شده است.



گام ۱: به مرکز M و شعاعی بیشتر از فاصله‌ی نقطه تا خط، کمانی می‌زنیم تا خط را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند.

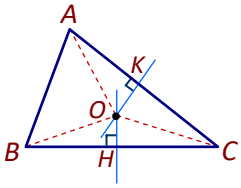
گام ۲: اکنون کافی است عمود منصف AB رسم شود.



توجه کنید: چون A و B روی دایره به مرکز M قرار دارند، $MA = MB$ است و در نتیجه طبق خاصیت اصلی عمود منصف، نقطه‌ی M روی این عمود منصف قرار دارد.

پس: عمود منصف رسم شده همان خط مورد نظر است که از M گذشته و بر خط عمود شده است.

۵– مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته، عمود منصف‌های دو ضلع AC و BC را رسم کرده، نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم و این نقطه را به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم:



اکنون توجه کنید:

- چون O روی عمود منصف AC قرار دارد، طبق خاصیت عمود منصف داریم:

$$OA = OC$$

- به صورت مشابه، چون O روی عمود منصف BC قرار دارد، طبق خاصیت عمود منصف داریم:

$$OB = OC$$

با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که: $OA = OB$. یعنی فاصله‌ی O تا دو سر پاره‌خط AB به یک اندازه است و بنابراین:

نقطه‌ی O روی عمود منصف AB نیز قرار داشته و سه عمود منصف در نقطه‌ی O همرس هستند.

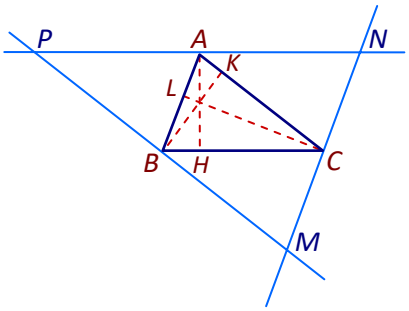
۶– به هر یک از گام‌ها توجه کنید:

گام ۱:

مثلث ABC و سه ارتفاع آن را رسم می‌کنیم.

گام ۲:

از هر رأس مثلث، خطی موازی ضلع روبرو رسم کرده تا مثلث MNP ایجاد شود.



گام ۳:

بسیار ساده: چون PN با BC موازی است و AH بر BC عمود است، پس AH بر PN نیز عمود خواهد بود. با استدلال مشابه، BK بر PM و CL بر MN عمود هستند.

گام ۴:

بسیار ساده: چون با موازی و با موازی هستند، چهار ضلعی‌های $ABCN$ متوازی الاضلاع است. پس طبق خواص متوازی الاضلاع (جزوه شماره صفر) ضلع‌های روبرو برابرند:

$$BC = AN$$

با استدلال مشابه چهارضلعی $ACBP$ متوازی الاضلاع است و در نتیجه:

$$BC = AP$$

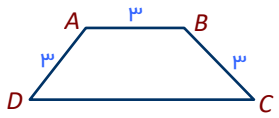
با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که $AN = AP$ است. به صورت کاملاً مشابه، تساوی‌های $BM = BP$ و $CM = CN$ نیز درست هستند.

گام ۵:

از گام‌های ۳ و ۴، AH هم بر PN عمود است و هم آن را نصف کرده است و لذا AH عمود منصف PN است. به صورت مشابه، BK عمود منصف PM و CL عمود منصف MN است. یعنی:

ارتفاع‌های مثلث ABC همان عمود منصف‌های مثلث MNP هستند و چون عمود منصف‌ها همرس‌اند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC همرس هستند.

۷– کافی است یک ذوزنقه‌ی متساوی الساقین در نظر بگیرید که اندازه‌ی ساق‌ها برابر قاعده‌ی کوچک باشد:



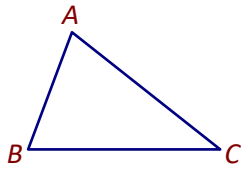
در این چهارضلعی $AD = BC$ و $AB || DC$ است، ولی این شکل متوازی الاضلاع نیست.

۸– بیان ساده‌ی عکس حکم چنین است:

در یک مثلث، ضلع رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع رو به زاویه‌ی کوچک‌تر.

به صورت شرطی و با استفاده از شکل:

اگر در مثلث ABC مقابل $\hat{B} > \hat{C}$ باشد، آنگاه $AC > AB$ است.



برهان خلف:

حکم $AC > AB$ را نادرست در نظر می‌گیریم، بنابراین دو حالت می‌تواند رخ دهد: $AC = AB$ و $AC < AB$ که نشان می‌دهیم هیچ‌کدام ممکن نیستند:

- **حالت ۱:** اگر $AC = AB$ باشد، مثلث ABC متساوی الساقین بوده و در نتیجه طبق خواص این نوع مثلث $\hat{B} = \hat{C}$ است. این مطلب با فرض تناقض دارد و رد می‌شود.
- **حالت ۲:** اگر $AC < AB$ باشد، طبق مثال جزوه باید زاویه‌ی روبرو به AB از زاویه‌ی روبرو به AC بزرگ‌تر باشد، یعنی: $\hat{C} > \hat{B}$. این مطلب نیز با فرض تناقض دارد و رد می‌شود.

پس در هر صورت فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

همواره می‌توانید با استفاده از لینک زیر، جدیدترین نسخه تمام جزوات را دریافت نمایید:

http://www.darsamoz.com/all-booklets.php

آخرین لیست جزوات:

دوره ابتدایی	متوسطه اول
جزوات پیشرفته ریاضی ششم	جزوات تیزهوشان ریاضی نهم
جزوات ریاضی ششم	جزوات ریاضی نهم
جزوات ریاضی پنجم	جزوات ریاضی هشتم
	جزوات ریاضی هفتم

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوات کنکوری ریاضی دوازدهم	جزوات تشریحی ریاضی یازدهم
جزوات کنکوری ریاضی یازدهم	جزوات تشریحی ریاضی دهم
جزوات کنکوری ریاضی دهم	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوات کنکوری حسابان (۲) دوازدهم	جزوات تشریحی حسابان (۱) یازدهم
جزوات کنکوری هندسه (۳) دوازدهم	جزوات تشریحی ریاضی دهم
جزوات کنکوری ریاضی گسسته دوازدهم	جزوات تشریحی هندسه (۱) دهم
جزوات کنکوری حسابان (۱) یازدهم	
جزوات کنکوری ریاضی دهم	

دبیرستان و پیش (تجربی: کنکوری)	دبیرستان و پیش (تجربی: تشریحی)
جزوات کنکوری ریاضی عمومی چهارم	جزوات تشریحی ریاضی دوم دبیرستان
جزوات کنکوری ریاضی سوم تجربی	جزوات تشریحی ریاضی اول دبیرستان
جزوات کنکوری ریاضی دوم	
جزوات کنکوری آمار و مدل‌سازی	

دبیرستان و پیش (ریاضی: کنکوری)	دبیرستان و پیش (ریاضی: تشریحی)
جزوات کنکوری حساب دیفرانسیل	جزوات تشریحی ریاضی دوم دبیرستان
جزوات کنکوری هندسه تحلیلی	جزوات تشریحی ریاضی اول دبیرستان
جزوات کنکوری ریاضی گسسته	
جزوات کنکوری حسابان	
جزوات کنکوری جبر و احتمال	
جزوات کنکوری آمار و مدل‌سازی	

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴