پروژه آنالیز عددی

گروه دوم

تیر ۱۴۰۵

اعضاء گروه:

فاطمه شکیبامهر

یاسمن گودرزیانی

میترا خسروی‌پور

غزل شفیعی‌پور

فهرست مطالب

مقدمه ۱

۱ بخش اول ۱
۱.۱ روش عددی انتخاب شده ۱
۲.۱ ساختار کدنویسی و پیاده‌سازی در متلب ۱
۳.۱ بررسی همگرایی ۲
۴.۱ محاسبه نقاط نمونه و رفتار نموداری تابع ۲

۲ بخش دوم ۳
۱.۲ ساختار کدنویسی و پیاده‌سازی در متلب ۳
۲.۲ ریشه‌یابی با نیوتن-رافسون ۳
۳.۲ بررسی همگرایی و حساسیت به حدس اولیه ۴
۴.۲ رفتار نموداری ۴

۳ بخش سوم ۵
۱.۳ محاسبه شیب خط واصل (m) ۵
۲.۳ درون‌یابی اسپلاین و مشتق‌گیری عددی ۵
۳.۳ ریشه‌یابی و یافتن نقطه c_2 . . . . . ۵

۴ بخش چهارم ۶
۱.۴ محاسبات دقیق و نمادین ۶
۲.۴ جدول مقایسه نتایج عددی و دقیق ۶

مقدمه

پس از بررسی پروژه را به چهار بخش تقسیم کردیم که به صورت زیر است:

بخش اول: پیاده‌سازی الگوریتم انتگرال‌گیری عددی سیمپسون مرکب با ساختار برداری،ارزیابی رفتار و همگرایی تابع.
بخش دوم: پیاده‌سازی انتگرال‌گیری عددی تودرتو برای محاسبه‌ی میانگین تابع، و حل معادله‌ی F(x) جهت یافتن نقطه‌ی $c1$ با استفاده از روش نیوتن-رافسون و تحلیل حساسیت به حدس اولیه.
بخش سوم: بازسازی تابع با استفاده از روش‌های درون‌یابی، مشتق‌گیری عددی از تابع تقریب زده‌شده، و محاسبه‌ی نقطه‌ی $c2$ با به کارگیری روش دوبخشی .
بخش چهارم: استخراج پاسخ‌های دقیق با میپل ، قضاوت عددی و تحلیل خطای مطلق و نسبی الگوریتم‌ها.

۱ بخش اول

۱.۱ روش عددی انتخاب شده

برای تابع مورد نظر و انتگرال گرفتن از آن سه روش مستطیلی، ذوزنقه‌ای و سیمپسون را داشتیم . در روش ذوزنقه‌ای و مستطیلی تابع را با خط راست بین نقاط تقریب می‌زنیم که خطای همگرایی‌شان کند است. پس از روش سیمپسون استفاده می‌کنیم که بین هر سه نقطه‌ی متوالی یک سهمی درجه دو از این نقاط عبور می‌دهد.بنابراین برای تابع ما یعنی $\cos(e^t)$ که مشتق آن پیوسته است خطا با نرخ $O(h^4)$ کاهش می‌یابد یعنی با هر بار دوبرابر کردن تعداد زیربازه‌ها خطا حدود ۱۶ برابر کوچک‌تر می‌شود در حالی‌که در روش ذوزنقه‌ای فقط ۴ برابر کوچک می‌شود پس برای رسیدن به دقت یکسان، در روش سیمپسون تعداد محاسبات کمتری داریم و از آنجا تابع روی بازه مورد نظر هموار و مشتق‌پذیر است و نوسانات آن محدود است پس شرایط ایدئال برای استفاده از روش سیمپسون فراهم است.

۲.۱ ساختار کدنویسی و پیاده‌سازی در متلب

۱. **تابع `simpsonf`:** تابع پایه انتگرال‌گیری عددی که ورودی برداری را می‌پذیرد و وزن‌های روش سیمپسون $(1, 4, 2, 4, ..., 1)$ را اعمال می‌کند.

۲. **تابع `computeF`:** تابع اصلی دریافت‌کننده x و تعداد زیربازه‌ها (n). این تابع حد بالای انتگرال را برابر $\tan(x)$ قرار داده و مقدار $F(x)$ را محاسبه می‌کند.

۳. **مقدار پیش‌فرض n:** تعداد زیربازه‌ها به‌صورت پیش‌فرض روی $n = 320$ تنظیم شد .

۳.۱ بررسی همگرایی

برای بررسی دقت روش پیاده‌سازی شده تابع $F(x)$ را در نقطه $x = 0.25$ ارزیابی کردیم:

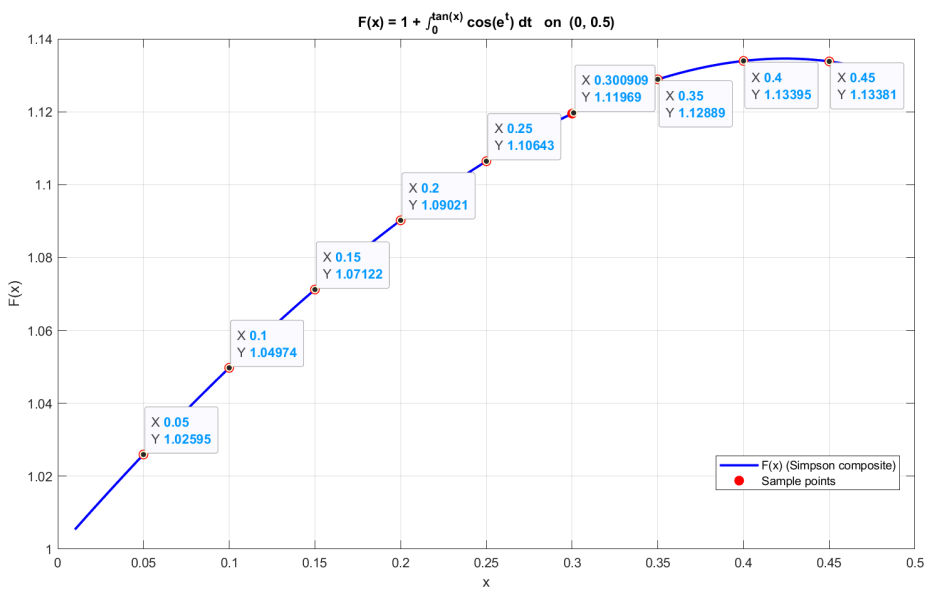
تعداد زیربازه‌ها (n)	مقدار محاسباتی $F(0.25)$	تفاضل متوالی $\lvert F_n - F_{n/2} \rvert$
20	1.106425388974	—
40	1.106425388827	1.475×10^{-10}
80	1.106425388818	9.224×10^{-12}
160	1.106425388817	5.764×10^{-13}
320	1.106425388817	3.619×10^{-14}

جدول ۱: نتایج همگرایی $F(0.25)$

تحلیل خطای همگرایی: همان‌طور که در جدول مشاهده می‌شود، با دو برابر شدن تعداد زیربازه‌ها ($n \to 2n$)، خطای برآوردی تقریباً 16 برابر کاهش می‌یابد. این رفتار کاهش خطا دقیقا با تئوری خطای روش سیمپسون مرکب ($O(h^4)$) مطابقت کامل دارد و صحت پیاده‌سازی را تایید می‌کند.

۴.۱ محاسبه نقاط نمونه و رفتار نموداری تابع

برای ارزیابی رفتار کلی تابع در بازه داده شده مقادیر $F(x)$ روی نقاط نمونه با $n = 320$ استخراج شد



۲ بخش دوم

در این بخش، هدف محاسبات عددی مربوط به قضیه‌ی مقدار میانگین انتگرال برای تابع $F(x)$ در بازه‌ی $[a,b]=[0,0.5]$ می‌باشد. طبق این قضیه نقطه‌ای مانند $c\in[a,b]$ وجود دارد به طوری که:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(t)\,dt = F(c) \tag{۱}$$

پیاده‌سازی عددی این رابطه را طی دو مرحله انجام دادیم. در مرحله اول ، برای محاسبه‌ی سمت چپ معادله از روش انتگرال گیری سیمپسون مرکب استفاده شده. از آنجا که خود تابع $F(t)$ شامل انتگرال گیری عددی است ، بنابراین در هر ارزیابی از ،F(t) یک انتگرال عددی داخلی محاسبه شده و در نتیجه مسئله به صورت یک انتگرال‌گیری تودرتو حل می‌شود.و در مرحله دوم برای یافتن ریشه c در معادله $g(x)=F(x)-\bar{F}=0$ از روش نیوتن-رافسون استفاده شد.

۱.۲ ساختار کدنویسی و پیاده‌سازی در متلب

۱. **فراخوانی توابع پایه:** استفاده از تابع computef و simpsonf بخش اول.

۲. **محاسبه‌ی انتگرال بیرونی:** مقدار میانگین انتگرالی $\bar{F}$ با اعمال روش سیمپسون روی بازه‌ی $[0,0.5]$ با تعداد زیربازه‌های n_{outer} محاسبه شد.

۳. **تابع `newtonRaphson`:** الگوریتم نیوتن-رافسون که مشتق تابع را به روش تفاضل مرکزی با گام $h=10^{-6}$ محاسبه کرده و تا رسیدن به تلرانس 10^{-10} تکرار می‌شود.

۲.۲ ریشه‌یابی با نیوتن-رافسون

$g(x)$	x	**تکرار**
-1.323×10^{-3}	0.203166786529	1
-7.996×10^{-6}	0.206950242268	2
-3.012×10^{-10}	0.206973393074	3
0.000×10^{0}	0.206973393946	4

جدول ۲: تکرارهای روش نیوتن-رافسون برای یافتن c (حدس اولیه $x_0=0.25$)

میانگین انتگرالی روی $[0,0.5]$ (با $n_{outer}=40$) برابر است با: 1.092644024396
و ریشه‌ی یافت‌شده $c=0.206973393946$ و $F(c)=1.092644024396$ که دقیقا برابر با مقدار میانگین محاسبه‌شده است.

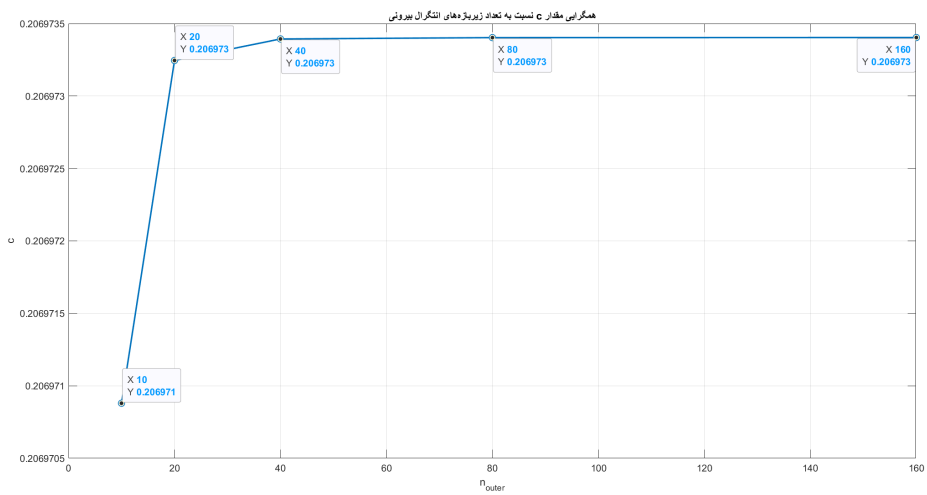
۳.۲ بررسی همگرایی و حساسیت به حدس اولیه

تعداد زیربازه‌ها (n_{outer})	مقدار میانگین ($\bar{F}$)	نقطه‌ی ریشه (c)
10	1.092643156089	0.206970879871
20	1.092643973143	0.206973245548
40	1.092644024396	0.206973393946
80	1.092644027602	0.206973403229
160	1.092644027803	0.206973403810

جدول ۳: نتایج همگرایی $\bar{F}$ و نقطه‌ی c نسبت به n_{outer}

بررسی حساسیت به حدس اولیه و شکست همگرایی نزدیک مرز بازه: برای اکثر حدس‌های اولیه $(0.01, 0.05, 0.1, 0.25, 0.40)$ نیوتن-رافسون درست به0.206973393946 همگرا می‌شود اما در نزدیکی مرز بازه یعنی نقطه 0.49 نیوتن-رافسون به یک ریشه‌ی کاملاً غلط و خارج از بازه همگرا می‌شود زیرا نزدیک $x = 0.5$ شیب$tan(x)$ به شدت تند شده و مشتق عددی g در آن ناحیه رفتار حساسی داشته و قدم اول نیوتن-رافسون می‌تواند خیلی بزرگ باشد و از بازه‌ی مجاز بیرون بپرد؛ وقتی یک بار از بازه خارج شد، دیگر به سمت ریشه‌ی درست برنمی‌گردد و به یک ریشه‌ی نامربوط همگرا می‌شود.

۴.۲ رفتار نموداری



۳ بخش سوم

طبق قضیه مقدار میانگین مشتق (قضیه لاگرانژ)، اگر تابع $F(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد، نقطه‌ای مانند $c_2 \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه، برابر با شیب خط واصل ابتدا و انتهای بازه است :

$$m = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c_2) \tag{۲}$$

۱.۳ محاسبه شیب خط واصل (m)

ابتدا مقادیر تابع در نقاط مرزی بازه با استفاده از تابع پایه $F(x)$ و روش سیمپسون مرکب ($n = 320$) استخراج شده

$$F(0) = 1.000000000000$$
$$F(0.5) = 1.127336981096$$

بنابراین، شیب خط واصل (m) برابر است با:

$$m = \frac{1.127336981096 - 1.000000000000}{0.5 - 0} = 0.254673962192 \tag{۳}$$

۲.۳ درون‌یابی اسپلاین و مشتق‌گیری عددی

۱. تعداد $N = 11$ نقطه گرهی در بازه $[0, 0.5]$ به صورت یکنواخت ($x_k = a + k \cdot h$) انتخاب کردیم.

۲. مقادیر تابع $F(x)$ در این نقاط استخراج کردیم و یک تابع درون‌یاب اسپلاین مکعبی $S(x)$ بر روی این گره‌ها اعمال کردیم.

۳. مشتق تابع درون‌یاب $S'(x)$ با استفاده از فرمول تفاضل مرکزی با گام $h_{diff} = 10^{-6}$ تقریب زدیم:

$$S'(x) \approx \frac{S(x + h_{diff}) - S(x - h_{diff})}{2h_{diff}} \tag{۴}$$

۳.۳ ریشه‌یابی و یافتن نقطه c_2

برای یافتن نقطه‌ای که شرط $S'(c_2) - m = 0$را برآورده کند ، تابع $H(x) = S'(x) - m$ را تعریف کردیم و سپس از روش دوبخشی با شرط همگرایی $tol = 10^{-10}$ و حداکثر صد تکرار در بازه $(0, 0.5)$ استفاده کردیم که نتایج آن به صورت زیر است :

$c_2 = 0.280131831649$
$S'(c_2) = 0.254673962252$
$|S'(c_2) - m| = 5.98 \times 10^{-11}$ (نشان دهنده اینکه c_2 با چقدر خطا پیدا شده)

۴ بخش چهارم

۱.۴ محاسبات دقیق و نمادین

برای ارزیابی خطاهای به دست آمده در روش های عددی ، نیاز به محاسبه مقادیر دقیق است که برای این منظور از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال (قاعده لایبنیتس) استفاده می‌کنیم.م و مقادیر دقیق را محاسبه می‌کنیم:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 + \int_0^{\tan(x)} \cos(e^t)\, dt\right) = \cos(e^{\tan(x)}) \cdot \sec^2(x) \qquad (۵)$$

۲.۴ جدول مقایسه نتایج عددی و دقیق

کمیت مورد ارزیابی	مقدار دقیق (Maple)	مقدار عددی (MATLAB)	خطای مطلق
$F(0.5)$	1.127336981096	1.127336981096	9.749×10^{-14}
مقدار میانگین ($\bar{F}$)	1.092644027816	1.092644024396	3.420×10^{-9}
نقطه‌ی c_1 (قضیه انتگرال)	0.206973403848	0.206973393946	9.902×10^{-9}
نقطه‌ی c_2 (قضیه مشتق)	0.280141370760	0.280131831649	9.539×10^{-6}

جدول ۴: مقایسه نتایج متلب و میپل

نتیجه‌گیری: بر اساس نتایج جدول مشاهده می‌شود که مقادیر عددی حاصل از پیاده‌سازی متلب با مقادیر دقیق محاسبه‌شده در میپل تطابق بسیار خوبی دارند خطای مطلق محاسبه‌ی$F(0.5)$در حد 10^{-13} که نشان‌دهنده‌ی دقت بسیار بالای روش سیمپسون مرکب در تقریب انتگرال می‌باشد. همچنین خطاهای مربوط به مقدار میانگین انتگرالی و نقطه‌ی که نشان‌دهنده‌ی دقت بسیار بالای روش سیمپسون مرکب در تقریب انتگرال می‌باشد. همچنین خطاهای مربوط به مقدار میانگین انتگرالی و نقطه‌ی c_1 در مرتبه‌ی 10^{-9} قرار دارند که بیانگر همگرایی مناسب روش نیوتن–رافسون و صحت محاسبه‌ی انتگرال تودرتو است.
در محاسبه‌ی نقطه‌ی c_2 اگرچه خطا نسبت به سایر کمیت‌ها بزرگ‌تر و در حدود 10^{-5} اما این اختلاف ناشی از تقریب تابع به وسیله‌ی اسپلاین مکعبی و سپس مشتق‌گیری عددی از آن است؛ بنابراین خطای به‌دست‌آمده قابل انتظار بوده و همچنان دقت مناسبی را برای کاربردهای عددی فراهم می‌کند.

https://github.com/GhazalShfp/Numerical-Analysis