

Indice

Premessa	xi
Capitolo 1 Introduzione alla teoria degli spazi	
lineari	1
1.1 Dipendenza e indipendenza lineare	2
1.2 Spazi vettoriali o lineari	8
1.3 Dimensione di uno spazio vettoriale e base	11
1.4 Cambiamenti di base	13
1.5 Alcune proprietà delle matrici	16
1.6 Trasformazioni lineari e matrici	18
1.7 Operatori lineari e matrici quadrate	26
1.8 Autovettori generalizzati di una matrice	31
1.9 Rappresentazioni canoniche di un operatore	
lineare	35
1.10 Forma canonica di Jordan	37
1.11 Proprietà metriche degli spazi lineari e norme	46

1.12 Prodotto interno	52
1.13 Proprietà delle matrici	54
1.13.a Proprietà generali	54
1.13.b Inversione di matrici	58
1.13.c Matrici a blocchi	61
1.14 Esercizi e problemi	65
Capitolo 2 Rappresentazioni con lo stato di	
 sistemi da diverse discipline	75
2.1 Modelli astratti di procedure di calcolo	77
2.1.a Modello di un algoritmo di integrazione	77
2.1.b Inseguimento di un aeromobile mediante	
un sistema radar	79
2.2 Modelli demografici e biologici	81
2.2.a Modello di evoluzione per classi di età	81
2.2.b Dinamica della crescita di una popolazione	84
2.2.c Modello di interazione preda-predatore	86
2.3 Modello economico di Leontief	88
2.4 Modelli di sistemi elettrici	90
2.4.a Un semplice circuito elettrico	90
2.4.b Circuito elettrico con diodo tunnel	92
2.4.c Circuito elettrico oscillante	94
2.5 Modelli di sistemi meccanici	96
2.5.a Equazioni di Lagrange	96
2.5.b Dinamica di un punto materiale	97

2.5.c Volani collegati da un albero flessibile	99
2.5.d Pendolo invertito su carrello	100
2.6 Sistemi elettro-meccanici	104
2.6.a Motore elettrico in corrente continua	
a magneti permanenti con tensione	
d'armatura variabile	104
2.6.b Motore elettrico in corrente continua	
con eccitazione variabile	107
2.6.c Motore elettrico in corrente continua	
con tensione d'armatura e d'eccitazione	
variabili	109
2.6.d Motore in corrente continua alimentato	
in tensione con carico ed albero flessibile	110
2.7 Modelli di sistemi idraulici	111
2.7.a Serbatoio chiuso con fluido incompressibile	
e con mescolamento perfetto	111
2.7.b Doppio serbatoio connesso da una tubazione	112
2.8 Modelli di sistemi nucleari e chimici	116
2.8.a Reazione nucleare del tipo (n, γ)	116
2.8.b Reattore nucleare	118
2.8.c Reattore chimico	122
2.9 Esercizi e problemi	125

**Capitolo 3 Sistemi lineari: analisi nel dominio
del tempo. I modi naturali nell'evoluzione
libera e in quella forzata 133**

- 3.1 I modi naturali nell'evoluzione libera dello
stato 133
 - 3.1.a Sistemi a tempo continuo regolari 133
 - 3.1.b Sistemi a tempo discreto 145
- 3.2 I modi naturali nell'evoluzione forzata e nell'uscita 150
 - 3.2.a Sistemi a tempo continuo regolari 150
 - 3.2.b Sistemi a tempo discreto 163
- 3.3 Esercizi e problemi 165

**Capitolo 4 Le trasformate di Laplace e z nell'analisi
dei sistemi a tempo continuo e a
tempo discreto 177**

- 4.1 Richiami sulla trasformata di Laplace 177
- 4.2 Calcolo delle evoluzioni nel dominio complesso:
uso della trasformata di Laplace 178
- 4.3 Rappresentazioni della funzione di trasferimento 193
- 4.4 Il regime permanente e la risposta armonica
per i sistemi a tempo continuo 197
- 4.5 I diagrammi di Bode 201
- 4.6 I diagrammi di Nyquist 233
- 4.7 Richiami sulla trasformata z 242
- 4.8 Calcolo delle evoluzioni nel dominio complesso:
uso della trasformata z 243
- 4.9 Il regime permanente e la risposta armonica
per i sistemi a tempo-discreto 255

- 4.10 Esercizi e problemi 259
- 4.11 Appendice del capitolo 4 266
 - 4.11.a La trasformata di Laplace 266
 - 4.11.b La trasformata z 269

**Capitolo 5 Proprietà strutturali dei sistemi
lineari stazionari 273**

- 5.1 Proprietà strutturali e scomposizioni 273
- 5.2 Criteri di Popov–Belevitch–Hautus 288
- 5.3 Matrici Grammiane 289
- 5.4 Alcune proprietà delle forme compagne 292
- 5.5 Sul calcolo di poli e zeri 295
- 5.6 Esercizi e problemi 299

**Capitolo 6 Modelli ingresso–uscita lineari e
rappresentazioni con lo stato 305**

- 6.1 Richiami sulla teoria dell'associazione di
una rappresentazione con lo stato e della realizzazione . . 305
- 6.2 Nuclei e rappresentazioni 310
- 6.3 Costruzione di una rappresentazione a partire
da un nucleo assegnato 313
- 6.4 Costruzione di una rappresentazione ridotta
a partire da una assegnata 319
- 6.5 Realizzazioni mediante il criterio di Gilbert 321
- 6.6 La formula di Mason 325
- 6.7 Trasformazioni tra realizzazioni 329
- 6.8 Schemi di simulazione associati alle realizzazioni 335
- 6.9 Esercizi e problemi 351

Capitolo 7 La stabilità dei sistemi dinamici	355
7.1 Sistemi a tempo continuo	355
7.1.a Studio della stabilità mediante le funzioni di Lyapunov	356
7.1.b Cenni sulla costruzione delle funzioni di Lyapunov	360
7.1.c Studio della stabilità mediante l'approssimazione lineare	362
7.1.d Ulteriori considerazioni sulla stabilità asintotica globale	365
7.1.e Cenni sulla stabilità dei sistemi lineari non stazionari	368
7.1.f I criteri di Routh e di Hurwitz	372
7.2 Sistemi a tempo discreto	387
7.2.a Studio della stabilità mediante le funzioni di Lyapunov	387
7.2.b Il criterio di Jury	388
7.2.c Il metodo di Kalman e Beltram	389
7.3 La stabilità esterna	390
7.4 Il criterio di stabilità di Nyquist	393
7.5 Esercizi e problemi	402
Bibliografia	421

Premessa

Nel presente testo di Complementi ed Esercizi di Teoria dei Sistemi sono svolti numerosi esercizi di applicazione dei principali metodi di analisi dei sistemi deterministici. In accordo con i temi caratteristici di un insegnamento universitario in tale materia, l'analisi è in prevalenza confinata alla classe dei sistemi lineari stazionari tempo continuo e tempo discreto.

Anche se l'organizzazione in capitoli riflette in gran parte la trattazione della materia negli insegnamenti presso l'Università di Roma, i numerosi richiami agli aspetti di metodo ed ad alcuni complementi, importanti anche dal punto di vista del calcolo, hanno lo scopo di rendere autocontenuto il materiale presentato nei diversi capitoli.

1. Introduzione alla teoria degli spazi lineari

La descrizione matematica di un fenomeno reale a partire dalla individuazione delle grandezze e dei legami tra esse, consiste nella formulazione di tali legami mediante precise relazioni matematiche. In questo contesto le grandezze fisiche sono in corrispondenza biunivoca con elementi di insiemi astratti, gli insiemi delle variabili.

La natura del fenomeno e le sue proprietà fisiche si traducono in particolari strutture degli insiemi delle variabili. Ad esempio se si intende descrivere la relazione tra corrente e tensione in una resistenza, la proprietà del fenomeno, per il quale vale il principio di sovrapposizione degli effetti, impone all'insieme dei valori della corrente e della tensione una struttura di spazio lineare. Analogamente, la descrizione del legame corrente-tensione ai capi di un condensatore non può prescindere dall'esistenza di una struttura metrica sull'insieme dei valori della tensione, struttura necessaria per definire la derivata.

Nello studio di sistemi dinamici lineari, entrambe le citate strutture degli insiemi delle variabili, quella algebrica e quella metrica di spazio normato, assumono un ruolo centrale. Sebbene le proprietà algebriche e geometriche siano distinte, per dare vita ad una presentazione più sistematica nel seguito sarà dapprima introdotta la struttura algebrica di spazio lineare e successivamente quella metrica di distanza.

1.1. Dipendenza e indipendenza lineare

Dati m vettori x_1, \dots, x_m di \mathbb{R}^n , questi si dicono *linearmente dipendenti* se esistono m scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ non tutti nulli tali che risulti:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0. \quad (1.1)$$

Supposto, senza perdita di generalità, che sia $\lambda_1 \neq 0$, dalla (1.1) si trae, ponendo $\alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}$:

$$x_1 = \sum_{i=2}^m \alpha_i x_i. \quad (1.2)$$

Dunque se m vettori sono linearmente dipendenti, è sempre possibile esprimerne almeno uno in funzione dei rimanenti; si suole chiamare il secondo membro della (1.2) *combinazione lineare* dei vettori x_2, \dots, x_m secondo i coefficienti $\alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Pertanto il risultato espresso dalla (1.2) si può anche enunciare dicendo che se m vettori sono linearmente dipendenti è possibile esprimerne almeno uno come combinazione lineare dei rimanenti.

Il significato geometrico della dipendenza lineare di tre vettori x_1, x_2, x_3 in \mathbb{R}^3 è semplice; se infatti esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tutti nulli tali che risulti:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0, \quad (1.3)$$

allora i tre vettori x_1, x_2, x_3 sono complanari, poiché, in virtù della (1.2) uno di essi può esprimersi come combinazione lineare dei rimanenti.

Se la (1.1) può essere soddisfatta solamente con gli m scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tutti nulli, gli m vettori x_1, \dots, x_m si dicono *linearmente indipendenti*.

Esempio 1.1. Si voglia verificare l'indipendenza lineare dei seguenti tre vettori in \mathbb{R}^3 :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Applicando la (1.1) si tratta di verificare se esistano tre numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tutti nulli tali da soddisfare il seguente sistema di equazioni omogenee

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0, \\ -\lambda_1 - \lambda_3 &= 0, \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

In forma più compatta, indicando con X la matrice 3×3 avente per colonne ordinatamente i vettori x_1, x_2, x_3 e con λ il vettore di componenti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, il sistema (1.4) può essere scritto^(1.1):

$$X\lambda = 0. \quad (1.5)$$

È ben noto che tale sistema ammette soluzione non banale se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo. Tale condizione è soddisfatta nel presente caso ed è immediato verificare che il seguente vettore λ :

$$\lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

come ogni altro vettore ad esso proporzionale, è soluzione del sistema (1.5). Pertanto i vettori assegnati sono linearmente dipendenti ed è facile mostrare che il sottospazio che li contiene è il piano avente equazione $x + y - z = 0$. ■

I concetti di indipendenza lineare e combinazione lineare permettono di fare considerazioni che mettono in luce le modalità con cui introdurre un'adatta struttura in un certo insieme. Per meglio comprendere questo aspetto si considerino i seguenti esempi.

Esempio 1.2. Sia dato un sistema di equazioni lineari omogenee:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

e sia r il rango della matrice dei coefficienti a_{ij} . La determinazione della soluzione generale del sistema può essere effettuata ricercandone $n - r$ soluzioni $x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}$, $k = 1, \dots, n - r$ *linearmente indipendenti* cioè tali che le n relazioni:

$$\sum_{k=1}^{n-r} c_k x_{ik} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

siano vere se e solo se tutti i coefficienti c_k sono nulli.

^(1.1) Si veda, ad esempio, A. Ghizzetti e F. Rosati, *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. 1, Veschi Editore, pp. 306–311, Roma, 1980.

Qualora questa condizione sia soddisfatta, ogni soluzione del sistema (1.6) può esprimersi nella forma:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_k x_{ik}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.7)$$

cioè risulta essere una *combinazione lineare* delle $n - r$ soluzioni precedentemente trovate. ■

Esempio 1.3. Si consideri un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y. \quad (1.8)$$

È noto^(1.2) che per determinare l'integrale generale di questa equazione occorre ricercare n funzioni $y_1(x), \dots, y_n(x)$ che siano ciascuna soluzione della (1.8), e che risultino *linearmente indipendenti*, cioè tali che la relazione

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

dove c_i sono costanti, sia vera solamente se tutte le c_i sono nulle. Qualora questa condizione sia soddisfatta è possibile dimostrare che ogni soluzione $y(x)$ della (1.8) è esprimibile nella forma

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x) \quad (1.9)$$

dove α_i sono costanti, cioè risulta essere una *combinazione lineare* delle $y_i(x)$. ■

Situazioni analoghe a quelle ora viste si presentano nello studio di molte altre questioni, quali la determinazione delle rette di un fascio avente centro in un punto assegnato, la descrizione delle forze agenti su un punto materiale, i cambiamenti di sistema di riferimento, l'analisi delle reti elettriche, etc.

In tutti questi casi i concetti di *indipendenza lineare* e di *combinazione lineare* hanno un ruolo fondamentale, per cui appare naturale esaminarne

^(1.2) Si veda, ad es., A. Ghizzetti e F. Rosati, *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. 2, Veschi Editore, pp. 414–421, Roma, 1982.

le proprietà a prescindere dalla particolare classe di enti matematici cui vengono applicati.

Perché sia chiaro come ciò possa essere fatto, si consideri nuovamente l'insieme di tutte le soluzioni della (1.8) e lo si indichi con S . Assegnati n elementi y_i in S linearmente indipendenti, ogni altro elemento è univocamente individuato da una ennupla di costanti tramite la (1.9); cioè la scelta di y_i pone in corrispondenza biunivoca l'insieme S con l'insieme \mathbb{R}^n delle ennuple ordinate di numeri reali. Pertanto si può dire che la ennupla y_i costituisce un *sistema di riferimento* in S , nello stesso senso in cui la scelta degli assi con le loro unità di misura stabilisce un riferimento cartesiano nel piano, consentendo di associare ad ogni suo punto una coppia di numeri reali e viceversa.

Tutte queste considerazioni sono vere anche per l'esempio 1.2; infatti fissate $n - r$ soluzioni linearmente indipendenti della (1.6) che costituiscano il "sistema di riferimento", ad ogni soluzione può farsi corrispondere un insieme ordinato di $n - r$ costanti e viceversa, secondo la (1.7).

Da tutto ciò appare chiaro come i concetti di indipendenza lineare e di combinazione lineare consentano, almeno in certi insiemi, l'introduzione di un *sistema di riferimento*. Il concetto di *base*, che verrà introdotto nel seguito e presentato nel seguente esempio, rispecchia questo importante aspetto.

Esempio 1.4. Sia P l'insieme di tutti i polinomi in una variabile x a coefficienti complessi di grado minore o uguale di due. Una ennupla $(p_1(x), \dots, p_n(x))$ di tali polinomi si dirà formata di elementi *linearmente indipendenti* se la relazione

$$\sum_{i=1}^n c_i p_i(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}, \quad (1.10)$$

ove c_i sono costanti complesse, risulta vera solamente quando tutte le c_i sono nulle. Un polinomio $p(x)$ si dirà *combinazione lineare* di certi altri polinomi p_1, \dots, p_n se esistono delle costanti α_i tali che risulti:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Una volta introdotte queste due definizioni, è immediato constatare che in P non è possibile trovare più di tre polinomi linearmente indipendenti. Infatti comunque si scelgano $n > 3$ polinomi in P , la (1.10), eguagliando separatamente a zero le potenze di x , genera tre equazioni omogenee nelle n incognite c_1, \dots, c_n che, per $n > 3$, ammettono sempre soluzione non banale.

Da questo risultato consegue che ogni polinomio in P può esprimersi come combinazione lineare di tre polinomi linearmente indipendenti. Scegliendo ad esempio

$$p_1(x) = x + 1, \quad p_2(x) = x^2 + x, \quad p_3(x) = x^2 + 1, \quad (1.11)$$

per ogni altro elemento $p(x) \in P$ esistono tre costanti α_i tali che risulti:

$$p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x).$$

Se ad esempio

$$p(x) = jx^2 + x + 2j + 1,$$

risulta:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}j + 1, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}j, \quad \alpha_3 = \frac{3}{2}j.$$

Se invece:

$$p'(x) = 4x^2 + 3x + 1,$$

risulta:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 1.$$

La terna (p_1, p_2, p_3) può essere assunta come *sistema di riferimento* in P ; essa mette in corrispondenza biunivoca P con l'insieme \mathbb{C}^3 delle terne ordinate di numeri complessi. ■

Dagli esempi visti appare chiaro come i concetti di indipendenza lineare e di combinazione lineare consentano l'introduzione di un sistema di riferimento e come questo metta in corrispondenza un insieme spesso "poco conosciuto" o "poco maneggevole" con un altro del quale invece struttura e proprietà sono ben note. L'introduzione di un sistema di riferimento consente di *trasferire lo studio di un insieme ad un altro insieme* più "matematizzato", ovvero mediante il sistema di riferimento la matematica ben conosciuta può essere applicata allo studio di insiemi in cui molte cognizioni matematiche non siano ben sviluppate.

Gli esempi presentati suggeriscono inoltre che la scelta di un sistema di riferimento è largamente arbitraria; pertanto sembra logico chiedersi se una scelta tra le infinite possibili imponga qualche proprietà aggiuntiva all'insieme nel quale il sistema di riferimento viene fissato. Per chiarire questo punto, si torni all'esempio 1.4 e si supponga di avere già scelto come riferimento i tre polinomi in (1.11). Ad ogni elemento in P corrisponde allora una terna di costanti e ciò rende possibile formulare la seguente definizione: due polinomi $p(x), q(x) \in P$ cui corrispondano le

terne $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sono detti *ortogonali* se risulta $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$.

Secondo tale definizione è immediato verificare che i polinomi $p(x)$ e $p'(x)$ dell'esempio 1.4 sono ortogonali; tuttavia se si cambia la scelta di riferimento, assumendo:

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2,$$

è facile constatare che gli stessi polinomi $p(x), p'(x)$ non sono più ortogonali.

Pertanto il concetto di ortogonalità non è intrinseco all'insieme P , ma dipende dalla scelta del sistema di riferimento; cambiando quest'ultima, tutte le conseguenze che potevano trarsi dall'ortogonalità di certi elementi in P vengono meno. Questo esempio mette in luce come la scelta di un sistema di riferimento possa introdurre in un insieme delle proprietà aggiuntive che non erano presenti "a priori".

Riassumendo le considerazioni sinora fatte si può dire quanto segue:

- 1) in molti problemi di matematica, geometria, fisica, ingegneria, hanno un ruolo importante i concetti di *indipendenza lineare* e di *combinazione lineare*;
- 2) tali concetti consentono l'introduzione di *sistemi di riferimento* nell'insieme in cui sono definiti;
- 3) mediante questi sistemi di riferimento lo studio di un insieme può essere *delegato* ad altri insiemi aventi proprietà note;
- 4) la scelta di un riferimento in un insieme può introdurre delle *proprietà originariamente non presenti*.

Da tutti questi fatti può trarsi la seguente conclusione: per lo studio dei concetti di indipendenza lineare e di combinazione lineare si potrebbe assumere un punto di vista simile a quello con il quale si inizia lo studio della geometria analitica, scegliere cioè un particolare sistema di riferimento nell'insieme dato (sia esso un insieme di punti, di funzioni o altro) e condurre lo studio tramite questo riferimento. Ma così facendo ci si troverebbe a studiare proprietà *strettamente legate al particolare sistema di riferimento scelto* (si pensi, ancora nel caso della geometria analitica, alle nozioni di coefficiente angolare di una retta, di circonferenza, etc.).

Tuttavia questa difficoltà può essere superata se si riflette sul fatto che, almeno negli esempi finora visti, *tutti i sistemi di riferimento sono equivalenti*. In tutti i casi, infatti, scegliere un riferimento significa scegliere un certo numero di elementi linearmente indipendenti le cui combinazioni lineari consentano di esprimere ogni altro elemento di un insieme dato; è chiaro come ogni scelta soddisfacente questi requisiti sia possibile e nessuna di esse sia privilegiata.

1.2. Spazi vettoriali o lineari

Uno spazio vettoriale o lineare può essere definito come un insieme nel quale esistano *tutte le operazioni e tutti gli assiomi necessari alla costruzione di ogni riferimento*, cosicché nessuno di questi ultimi sia a priori privilegiato. Esso ben si presta agli sviluppi formali e richiede una formulazione precisa delle operazioni in esso definite e degli assiomi che esse soddisfano.

Questo richiede l'introduzione di:

- a) un insieme F di “costanti” o “coefficienti”, tra i quali siano definite operazioni che consentano di utilizzarli analogamente a quanto visto negli esempi;
- b) l'insieme X degli elementi dei quali si studiano le proprietà, sui quali si possa operare sommandoli e moltiplicandoli per un “coefficiente” di F .

Gli elementi dell'insieme F vengono detti *scalari* e tra di essi si definiscono le operazioni di addizione, moltiplicazione e le loro inverse; l'insieme F così strutturato è detto *corpo*.

Gli elementi dell'insieme X vengono detti *vettori* e su di essi si possono eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare appartenente ad un *corpo* F prefissato; l'insieme X così strutturato è detto *spazio vettoriale su F* e indicato con X_F .

Nel seguito vengono riportate le definizioni formali.

Definizione 1. Un *gruppo* è un insieme F non vuoto in cui sia definita un'operazione, indicata col simbolo “+” tale che per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in F$:

- 1) valga la proprietà di chiusura: $\alpha + \beta \in F$;
- 2) valga la proprietà di associatività: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- 3) esista l'elemento neutro (indicato con 0): $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$;
- 4) esista l'elemento inverso (indicato con α^{-1}): $\alpha + \alpha^{-1} = \alpha^{-1} + \alpha = 0$.

■

Se inoltre vale la proprietà commutativa: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, allora si ha un *gruppo abeliano* o *commutativo*.

Definizione 2. Un *corpo* è un insieme non vuoto F sul quale sono definite due operazioni dette addizione “+” e moltiplicazione “ \cdot ” tali che $(F, +)$ sia un gruppo commutativo e $(F - \{0\}, \cdot)$ sia un gruppo, essendo 0 l'elemento neutro rispetto all'operazione di addizione, e valga la distributività di “ \cdot ” rispetto a “+”:

- 1) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;

$$2) (\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha. \quad \blacksquare$$

Se poi $(F - \{0\}, \cdot)$ è un gruppo commutativo allora $(F, +, \cdot)$ è detto *campo* (in tal caso la 2) è sovrabbondante).

Definizione 3. Uno *spazio vettoriale* X_F è costituito da un insieme X di elementi detti *vettori* e da un corpo $(F, +, \cdot)$, assieme a due operazioni dette addizione tra vettori “#” e moltiplicazione “ \star ” tali che $(X, \#)$ costituisca un gruppo abeliano e l'operazione “ \star ” verifica la proprietà di chiusura e i seguenti assiomi:

- 1) distributività rispetto a “#”: $\alpha \star (x_1 \# x_2) = \alpha \star x_1 \# \alpha \star x_2$;
- 2) distributività rispetto a “+”: $(\alpha + \beta) \star x = \alpha \star x \# \beta \star x$;
- 3) associatività: $\alpha \star (\beta \star x) = (\alpha \cdot \beta) \star x$;
- 4) neutralità rispetto all'elemento neutro di “ \cdot ” (indicato con 1): $1 \star x = x \star 1 = x$.

■

Quando il corpo F è desumibile dal contesto (ad esempio è quello dei numeri reali \mathbb{R}) esso sarà sottinteso per non appesantire la notazione. Inoltre usualmente si omettono i simboli “ \cdot ” e “ \star ” e il simbolo “+” verrà utilizzato indifferentemente per i due tipi di addizione, senza pericolo di confusione.

Alcuni esempi di spazi vettoriali sono i seguenti.

- a) l'insieme S delle soluzioni dell'equazione differenziale (1.8) forma uno spazio vettoriale sul corpo dei numeri reali \mathbb{R} .
- b) L'insieme X delle soluzioni del sistema omogeneo (1.6) forma uno spazio vettoriale sul corpo dei numeri reali \mathbb{R} .
- c) L'insieme dei polinomi a coefficienti complessi di grado non maggiore di n forma, per un prefissato n , uno spazio vettoriale sul corpo dei numeri complessi \mathbb{C} .
- d) L'insieme \mathbb{R} forma uno spazio vettoriale su sé stesso.
- e) L'insieme \mathbb{R}^n delle ennuple ordinate di numeri reali forma uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .
- f) L'insieme delle funzioni razionali (rapporto di polinomi) forma uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Confrontando gli esempi b) ed e) è immediato verificare che l'insieme X delle soluzioni del sistema omogeneo (1.6) è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n . In questo caso si dice che $X_{\mathbb{R}}$ è un *sottospazio vettoriale* di $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^n$. Più precisamente la definizione formale di sottospazio è la seguente.

Definizione 4. Sia X_F uno spazio vettoriale e sia Y un sottoinsieme di X . Allora Y_F è un *sottospazio vettoriale* di X_F se, con le stesse operazioni di X_F , Y forma uno spazio vettoriale su F . ■

Si mostra facilmente che condizione necessaria e sufficiente affinché Y_F sia un sottospazio vettoriale di X_F è che valga la chiusura rispetto a combinazioni lineari di generici elementi di Y :

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in Y, \quad \forall \alpha, \beta \in F, \quad x_1, x_2 \in Y.$$

Esempi di sottospazi vettoriali sono i seguenti:

- l'insieme delle coppie di numeri reali del tipo $(x, \alpha x)$ forma, per ogni fissato α , un sottospazio di $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^2$.
- Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}$ è un sottospazio di $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$.
- L'insieme dei punti di un piano forma spazio vettoriale su \mathbb{R} , quando si definisca la somma di due punti come somma delle coordinate omonime e la moltiplicazione per uno scalare come moltiplicazione per tutte le coordinate. È allora facile verificare che i punti di una *retta passante per l'origine* formano un sottospazio di tale spazio vettoriale. Questa osservazione e la sua analoga in tre o più dimensioni (*iperpiano per l'origine*) consentono spesso una rappresentazione geometrica di spazi e sottospazi che può rivelarsi utile per l'esame intuitivo di alcuni risultati.
- $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}$ non è sottospazio di $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$.

Definizione 5. Siano Y_{1F} e Y_{2F} due sottospazi di un certo spazio vettoriale X_F . Si definisce *somma* di questi due sottospazi il sottospazio $(Y_1 + Y_2)_F$ dove:

$$Y_1 + Y_2 := \{y \mid y = y_1 + y_2, \quad y_1 \in Y_1 \text{ e } y_2 \in Y_2\}.$$

Qualora $Y_1 \cap Y_2$ contenga solo l'origine, la somma dianzi definita prende il nome di *somma diretta* e viene indicata con il simbolo \oplus . ■

Quale esempio si consideri in $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^3$ la somma di due sottospazi, uno formato dall'insieme delle terne di numeri reali il cui terzo elemento è nullo, e l'altro formato dall'insieme delle terne di numeri reali in cui solo il terzo elemento è eventualmente diverso a zero. Chiaramente tali due insiemi hanno in comune soltanto la terna nulla, cioè l'origine; pertanto si tratta di somma diretta. Il risultato di tale somma è $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^3$ stesso, poiché ogni suo elemento può essere espresso come somma di due terne, una avente il terzo elemento nullo, l'altra avente solo il terzo elemento eventualmente diverso da zero.

1.3. Dimensione di uno spazio vettoriale e base

In geometria si usa spesso dire che una retta ha dimensione uno, ovvero che ha ∞^1 punti, nel senso che l'individuazione di un punto su di essa dipende da un solo parametro.

Analogamente, e nello stesso senso, si dice che il piano ha dimensione due, lo spazio tre, etc. L'equivalente di questo discorso nel linguaggio degli spazi vettoriali si ottiene dicendo che sulla retta non esiste più di un vettore linearmente indipendente, nel piano non ne esistono più di due, nello spazio più di tre, etc. Appare allora naturale definire la *dimensione di uno spazio vettoriale* come il *numero massimo di vettori linearmente indipendenti che in esso si può reperire*.

Si può facilmente dimostrare che $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^n$ e $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}^n$ formano precisamente degli spazi vettoriali n -dimensionali. Viceversa un esempio di spazio vettoriale di dimensione non finita è quello formato dalle funzioni reali di una variabile reale t , continue a tratti. Esso non ha dimensione finita sul corpo dei numeri reali. Basta infatti notare che già le funzioni del tipo t^k , con k intero qualunque, formano un insieme con un numero infinito di vettori linearmente indipendenti, poiché:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t^k = 0$$

implica $\lambda_k = 0$ per ogni k .

Nel caso di spazi vettoriali a dimensione finita è possibile introdurre in modo semplice il concetto, estremamente importante, di *base*. La sua introduzione è legata, fondamentalmente, al seguente teorema.

Teorema 1. In uno spazio vettoriale n -dimensionale ogni vettore è esprimibile univocamente come combinazione lineare di n prefissati vettori linearmente indipendenti. □

Dimostrazione. Siano e_1, e_2, \dots, e_n gli n vettori prefissati, che per ipotesi sono linearmente indipendenti. Scelto arbitrariamente un vettore x dello spazio vettoriale, l'insieme formato dai vettori e_i e da x è di certo linearmente dipendente, poiché si tratta di $n + 1$ vettori in uno spazio n -dimensionale. Esistono pertanto $n + 1$ scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tutti nulli tali da verificare la seguente relazione:

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} x = 0. \quad (1.12)$$

Si noti ora che λ_{n+1} è certamente diverso da zero poiché, se così non fosse, l'ipotesi che i vettori e_i siano linearmente indipendenti verrebbe contraddetta dalla (1.12). Pertanto da questa si trae, ponendo $\alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}}$ la seguente relazione:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i. \quad (1.13)$$

Ciò prova la prima parte dell'asserto. Per verificare poi che l'espressione di x come combinazione lineare degli e_i è unica, si osservi che se, per assurdo, ne esistesse un'altra:

$$x = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$$

per differenza con la (1.13) si otterrebbe la dipendenza lineare dei vettori e_i , in contraddizione con l'ipotesi iniziale. ■

Da questo teorema ne segue che una volta fissata una n -pla di vettori linearmente indipendenti e_i , ad ogni vettore x dello spazio corrispondono *biunivocamente* n scalari α_i che lo individuano secondo la (1.13). Appare allora naturale riguardare l'insieme e_i come un *sistema di riferimento* e gli n scalari α_i come le *coordinate* di x rispetto ad esso.

Definizione 6. In uno spazio vettoriale n -dimensionale si chiama sistema di riferimento o *base* una qualsiasi n -pla di vettori linearmente indipendenti. Gli scalari α_i che, secondo la (1.13), individuano il generico vettore x dello spazio vettoriale, sono dette *componenti* di x rispetto alla base $\{e_i\}$, mentre l'insieme degli n scalari $\{\alpha_i\}$ si chiama *rappresentazione* di x rispetto alla base $\{e_i\}$. ■

Dato uno spazio vettoriale n -dimensionale X_F su un corpo F , l'insieme F^n delle ennuple ordinate di scalari appartenenti ad F forma, come è facile verificare, uno spazio vettoriale n -dimensionale su F . Pertanto, scelta una base di X_F , esiste una corrispondenza biunivoca tra esso e lo spazio F_F^n delle rappresentazioni di tutti i suoi elementi.

Questa osservazione spiega per qual motivo viene chiamato vettore sia l'elemento di X_F che la sua rappresentazione, che viene pensata come elemento dello spazio vettoriale F_F^n .

Si noti che la rappresentazione di un vettore facente parte della base è particolarmente semplice. Infatti dalla (1.13) si comprende che per

l' i -esimo vettore e_i si hanno le seguenti componenti:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-esima componente.}$$

1.4. Cambiamenti di base

È chiaro che la rappresentazione di un vettore x pensato come un ente geometrico, dipende dalla particolare scelta della base rispetto alla quale tale rappresentazione viene effettuata.

Nella trattazione di molte questioni che vengono studiate mediante la teoria degli spazi vettoriali avviene frequentemente che, dopo aver impostato il problema in una certa base, si scopra che sarebbe assai più conveniente riferirsi ad un'altra base. Appare allora naturale chiedersi come possa ottenersi la rappresentazione del generico vettore x nella nuova base a partire da quella, supposta nota, relativa alla base iniziale. Per poter rispondere a questa domanda è prima necessario determinare la relazione matematica che lega la nuova base con la vecchia.

Siano dunque e_1, \dots, e_n i vettori formanti la base rispetto alla quale la rappresentazione di x è nota, e sia g_1, \dots, g_n la n -pla di vettori linearmente indipendenti che si intende assumere come nuova base. Ciascuno dei vettori e_i , come ogni altro vettore dello spazio, può essere rappresentato rispetto alla nuova base $\{g_j\}$ mediante certe componenti $\beta_{1i}, \dots, \beta_{ni}$ tali da verificare la seguente relazione:

$$e_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} g_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Sostituendo le n relazioni (1.14) nella (1.13) si ottiene la rappresentazione di x rispetto alla nuova base:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \beta_{ji} g_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ji} \alpha_i g_j.$$

Poiché la rappresentazione di un vettore rispetto ad una base è unica, le componenti $\hat{\alpha}_j$ di x rispetto alla base $\{g_j\}$ sono date da:

$$\hat{\alpha}_j = \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \alpha_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

e dunque il vettore $\hat{\alpha}$ formato dalle componenti di x rispetto alla nuova base è dato dal prodotto:

$$\hat{\alpha} = T\alpha, \quad (1.15)$$

ove T è la matrice che ha elementi β_{ji} , ovvero la matrice le cui colonne sono le rappresentazioni dei vettori e_i nella nuova base $\{g_j\}$.

Si osservi che α ed $\hat{\alpha}$ non sono, in generale, vettori dello spazio vettoriale X_F a cui appartiene x , bensì vettori dello spazio F^n sul corpo F .

Esempio 1.5. Si consideri lo spazio vettoriale formato dall'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado non maggiore di due sul corpo \mathbb{R} . Si scelga come base la seguente terna di vettori

$$e_1 = t^2, \quad e_2 = t, \quad e_3 = 1.$$

In questa base il vettore $x = t^2 + 6t + 1$ ha rappresentazione:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si scelga ora come nuova base:

$$g_1 = t^2 + 2t, \quad g_2 = 2t, \quad g_3 = \frac{1}{2}.$$

Le rappresentazioni rispetto a questa base dei vettori e_i sono immediatamente determinabili:

$$e_1 = g_1 - g_2, \quad e_2 = \frac{1}{2}g_2, \quad e_3 = 2g_3.$$

Pertanto la matrice T , che ha tali rappresentazioni per colonne, risulta essere:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e ne segue che:

$$\hat{\alpha} = T\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Infine, come verifica, si noti che $\hat{\alpha}_1 g_1 + \hat{\alpha}_2 g_2 + \hat{\alpha}_3 g_3 = t^2 + 6t + 1 = x$. ■

Si osservi che la matrice T , avendo per colonne la rappresentazione di n vettori linearmente indipendenti, ha certamente determinante diverso da zero. Infatti, se così non fosse, esisterebbe un vettore v non nullo tale da soddisfare il sistema omogeneo:

$$Tv = 0,$$

e le componenti di v formerebbero una n -pla di scalari atta a rendere nulla una combinazione lineare dei vettori della base $\{e_i\}$, il che è una contraddizione. Ne segue che la matrice T è invertibile e dalla (1.15) si può trarre la relazione inversa

$$\alpha = T^{-1}\hat{\alpha},$$

che consente la trasformazione della rappresentazione di un vettore rispetto alla base $\{g_j\}$ in quella rispetto alla base $\{e_i\}$.

Ripetendo allora tutti i ragionamenti fatti, con l'avvertenza di considerare $\{g_j\}$ come vecchia base ed $\{e_i\}$ come nuova base, la j -esima colonna di T^{-1} è formata dalla rappresentazione di g_j rispetto alla base $\{e_i\}$. Poiché tali rappresentazioni sono scrivibili in modo immediato, è particolarmente semplice costruire la matrice T^{-1} . Per ottenere la matrice T che fa passare dalla base $\{e_i\}$ alla base $\{g_j\}$, basterà poi invertire T^{-1} . Si ha così la seguente procedura per determinare la matrice di trasformazione T tra le basi $\{e_i\}$ e $\{g_j\}$.

Procedura 1.1.

- Si determinano le rappresentazioni dei vettori g_j della nuova base rispetto ai vettori della base $\{e_i\}$. Ciascuna rappresentazione costituisce una colonna della matrice T^{-1} .
- Si inverte la matrice T^{-1} , ottenendo la matrice di trasformazione T . ■

Esempio 1.6. Riprendendo l'esempio 1.5, per determinare la matrice di trasformazione T corrispondente al cambio di base, invece di calcolarsi le rappresentazioni dei vettori e_i in $\{g_j\}$ è più rapido utilizzare quella di g_j in $\{e_i\}$; trattandosi infatti della base canonica, queste rappresentazioni coincidono con i coefficienti che appaiono nelle espressioni dei polinomi della base $\{g_j\}$, per cui

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

e da questa si ricava, per inversione, la matrice T . ■

1.5. Alcune proprietà delle matrici

Nel paragrafo precedente sono state introdotte le matrici quadrate che hanno consentito di enunciare in modo compatto la legge di trasformazione della rappresentazione di un vettore a seguito di un cambiamento di base. Ciascuna colonna delle matrici così introdotte era formata dalla rappresentazione di un certo vettore rispetto ad una certa base; pertanto ogni elemento di tali colonne apparteneva al campo F . Sfruttando le operazioni definite tra gli elementi di F , si possono introdurre analoghe operazioni tra matrici.

La somma di due matrici A, B aventi le stesse dimensioni è una nuova matrice C , anch'essa delle dimensioni di A e B , il cui elemento di posto i, j , c_{ij} si ottiene sommando gli elementi (a_{ij}, b_{ij}) di analogo posto in A e in B .

L'elemento neutro dell'addizione così definita è la matrice avente elementi tutti nulli. Le proprietà dell'addizione tra matrici sono le stesse dell'analoga operazione in F e da queste derivano. In modo analogo viene definita la differenza tra matrici.

Il prodotto di due matrici A, B di dimensioni $n \times m$ ed $m \times p$ rispettivamente è una nuova matrice C , di dimensioni $n \times p$ il cui elemento di posto i , è dato dalla seguente espressione

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}.$$

La moltiplicazione tra matrici così definita non è commutativa, come mostra il seguente esempio:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \neq AB.$$

Inoltre non è valida la legge di annullamento del prodotto, cioè, se il risultato di una moltiplicazione è la matrice nulla, non è necessariamente nullo uno dei due fattori. Basti osservare il seguente esempio:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

L'elemento neutro della moltiplicazione tra matrici quadrate è la matrice identità I avente tutti gli elementi nulli fuorché quelli sulla diagonale principale che sono pari ad uno. Ad esempio:

$$AI = IA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A.$$

Data una matrice quadrata A , se ne esiste un'altra delle stesse dimensioni, B tale che risulti

$$AB = BA = I$$

si dice che A è invertibile o *non singolare* e la matrice B (che se esiste è unica) viene detta *matrice inversa* o semplicemente *inversa* di A e indicata con A^{-1} . Condizione necessaria e sufficiente perché esista A^{-1} è che risulti $|A| \neq 0$. In tal caso è possibile determinare esplicitamente gli elementi di A^{-1} a partire da quelli di A .^(1.3) Se risulta $|A| = 0$ la matrice A si dice *singolare*.

Altre proprietà delle matrici sono riportate nel paragrafo 1.13.

^(1.3) Si veda, ad es., A. Ghizzetti e F. Rosati, *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. 1, Veschi Editore, pp. 335–338, Roma, 1980.

1.6. Trasformazioni lineari e matrici

Si è visto come le matrici quadrate non singolari, consentano di enunciare, in modo compatto, la legge di trasformazione della rappresentazione di un vettore a seguito di un cambiamento di base. Vedremo ora come le matrici rappresentino particolari corrispondenze univoche tra spazi vettoriali diversi una volta fissate le basi di tali spazi.

Appare naturale, vista la linearità dello spazio vettoriale, studiare quelle corrispondenze univoche che siano anch'esse lineari, cioè tali che se $y_1 \in Y$ corrisponde ad $x_1 \in X$ ed y_2 ad x_2 , $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ corrisponda ad $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ per ogni possibile scelta degli scalari α_1, α_2 e dei vettori x_1 ed x_2 .

Definizione 7. Siano X_F ed Y_F due spazi vettoriali sullo stesso corpo F . Una funzione $f: X \rightarrow Y$ è una *trasformazione lineare* da X_F in Y_F se:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F, \forall x_1, x_2 \in X$. Se $X \equiv Y$ allora f è un *operatore lineare*. ■

Dunque un operatore lineare è una trasformazione da uno spazio in sé stesso.

Alcuni esempi di trasformazioni lineari sono:

- $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 7x_2 \\ x_3 - 8x_2 \end{pmatrix}$ con $X = \mathbb{R}^3$, $Y = \mathbb{R}^2$ ed $F = \mathbb{R}$, è una trasformazione lineare;
- $f(x) = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + c \\ \alpha x_1 + \beta x_2 \end{pmatrix}$ con $X = \mathbb{R}^3$, $Y = \mathbb{R}^2$ ed $F = \mathbb{R}$, è una trasformazione lineare se e solo se $c = 0$;
- $f(\varphi)(\lambda) = \int_0^1 \psi(\lambda, t) \varphi(t) dt$, $\lambda \in [0, 1]$ con $X \equiv Y =$ spazio delle funzioni continue a valori reali definite su $[0, 1]$, $\psi(\lambda, t)$ funzione continua in $\lambda \in (0, 1)$ e $t \in (0, 1)$, ed $F = \mathbb{R}$, è un operatore lineare;
- $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ con $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^3$ ed $F = \mathbb{R}$, è una trasformazione lineare.

Se in X_F ed Y_F supposti a dimensione finita, vengono fissate le basi $\{e_i\}$ e $\{g_i\}$ rispettivamente, la corrispondenza tra vettori stabilita da una

trasformazione lineare può essere individuata tramite la corrispondenza tra le rispettive rappresentazioni. Tale corrispondenza, rispetto a basi fissate, è data da una matrice. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 2. Scelta una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ in uno spazio vettoriale X a dimensione n , ed una base $\{g_1, \dots, g_m\}$ in uno spazio vettoriale Y a dimensione m ogni trasformazione lineare f può essere rappresentata tramite una matrice $m \times n$, in cui le colonne sono le rappresentazioni dei vettori $f(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, espressi nella base $\{g_1, \dots, g_m\}$. □

Dimostrazione. Essendo $f(e_i)$ appartenente ad Y si ha:

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} g_j \quad i = 1, \dots, n.$$

dove a_{ji} è la j -esima coordinata di $f(e_i)$ rispetto alla base $\{g_j\}$. Per la definizione di trasformazione lineare, un generico vettore $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ è trasformato da f in

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m a_{ji} g_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} \alpha_i \right) g_j = \sum_{j=1}^m \beta_j g_j,$$

e poiché $\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \alpha_i$ rappresenta la j -esima coordinata di $f(x)$ nella base $\{g_i\}$, si ha:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A\alpha \quad (1.16)$$

dove α è la rappresentazione di x nella base $\{e_i\}$. Essendo x un vettore arbitrario, la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

consente di determinare, a partire dalla rappresentazione α di un vettore x , quella β di $f(x)$. Pertanto A rappresenta la trasformazione f nelle basi fissate. ■

Esempio 1.7. Siano $X = \mathbb{R}^3$, $Y = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$ ed f definita da:

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

con

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 6g_1 - \frac{1}{2}g_2,$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = g_1,$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2g_1 - \frac{3}{2}g_2,$$

$$\text{e dunque } A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Con riferimento alle trasformazioni lineari, ha interesse introdurre i concetti di spazio immagine e spazio nullo.

Definizione 8. Si chiama *immagine* di una trasformazione lineare $f: X_F \rightarrow Y_F$ l'insieme $\mathcal{R}(f) := \{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$. \blacksquare

Vale il seguente teorema.

Teorema 3. $\mathcal{R}(f)$ su F è un sottospazio vettoriale di Y_F . \square

Dimostrazione. Per definizione risulta $\mathcal{R}(f) \subset Y$. Rimane da verificare che $\mathcal{R}(f)$ è uno spazio vettoriale su F . A tal fine si osservi che dalla definizione, scelti comunque y_1 e y_2 in $\mathcal{R}(f)$, esistono x_1 ed x_2 in X , tali che

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2).$$

Per dimostrare l'asserto basta osservare che scelti arbitrariamente in F due scalari λ_1 e λ_2 anche $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ è in $\mathcal{R}(f)$ in quanto in X , per la proprietà di chiusura, esiste il vettore $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ che dà luogo ad y , tramite f . \blacksquare

Poiché, come risulta dal teorema 2, fissate le basi in X ed in Y la trasformazione lineare f è rappresentata dalla matrice A , si ha la seguente definizione.

Definizione 9. Si definisce *immagine* o *range* della matrice A l'insieme $\mathcal{R}(A)$ dei vettori le cui rappresentazioni β sono ottenibili dalla (1.16) per almeno un α . \blacksquare

Teorema 4. $\mathcal{R}(A)$ è l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori aventi per rappresentazioni le colonne di A . \square

Dimostrazione. Indicando con a_i l' i -esima colonna di A e con α_i l' i -esima componente di α la (1.16) può essere riscritta nella forma seguente:

$$\beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i.$$

Ciò dimostra che la rappresentazione di ogni vettore di $\mathcal{R}(A)$ si ottiene come combinazione lineare delle colonne di A e, viceversa, che ciascuna di tali combinazioni rappresenta un vettore in $\mathcal{R}(A)$. \blacksquare

Questo risultato viene spesso enunciato dicendo che $\mathcal{R}(A)$ è il sottospazio generato dalle colonne di A , e viene scritto nella forma $\mathcal{R}(A) = \text{gen } \{a_i\}$.

Si osservi tuttavia che, in generale, le colonne di A non rappresentano una base per $\mathcal{R}(A)$ poiché potrebbero essere tra loro linearmente dipendenti. Per avere una base in $\mathcal{R}(A)$ occorrerà scegliere quelle linearmente indipendenti; supponendo ad esempio che esse siano le prime p : a_1, \dots, a_p , le restanti a_{p+1}, \dots, a_n possono esprimersi come combinazione lineare di queste. Segue allora dal teorema 4 che le p colonne così scelte rappresentano una base per $\mathcal{R}(A)$ il quale ha pertanto dimensione pari a p .

Per definizione il numero p così ottenuto è il *rango della matrice* A . Dunque il $\text{rank}(A) = \varrho(A) = \dim(\mathcal{R}(A))$ è pari al numero di colonne linearmente indipendenti di A .

Analogamente si definisce il nucleo di una trasformazione.

Definizione 10. Si dice *nucleo* o *spazio nullo* di una trasformazione lineare $f: X_F \rightarrow Y_F$ l'insieme $\mathcal{N}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$. \blacksquare

Vale il seguente risultato.

Teorema 5. $\mathcal{N}(f)$ su F è un sottospazio di X_F . \square

Dimostrazione. Per definizione $\mathcal{N}(f) \subset X$, quindi se x_1 ed x_2 sono in $\mathcal{N}(f)$, allora anche ogni loro combinazione lineare con scalari qualsiasi in F gode della medesima proprietà. \blacksquare

Poiché, fissate le basi in X ed Y la trasformazione lineare f è rappresentata da una matrice A , si ha la seguente definizione.

Definizione 11. Si definisce *nucleo* o *spazio nullo* della matrice A l'insieme $\mathcal{N}(A)$ di vettori x la cui rappresentazione soddisfa l'equazione:

$$A\alpha = 0. \quad (1.17)$$

\blacksquare

A differenza di quanto avveniva per $\mathcal{R}(A)$, non esiste un procedimento semplice per l'individuazione di una base in $\mathcal{N}(A)$. Tuttavia sono disponibili numerosi algoritmi che consentono di risolvere tale problema generando il massimo numero s di soluzioni linearmente indipendenti della (1.17). Tale numero coincide con la dimensione di $\mathcal{N}(A)$ ed è detto *nullità* della matrice A . Dal teorema di Rouché–Capelli risulta che $\dim \mathcal{N}(A) = n - \rho(A)$, per cui tra il rango p , la nullità s di A e la dimensione n di X sussiste la relazione:

$$n = p + s, \quad (1.18)$$

ossia la somma del rango e della nullità è pari al numero di colonne di A .

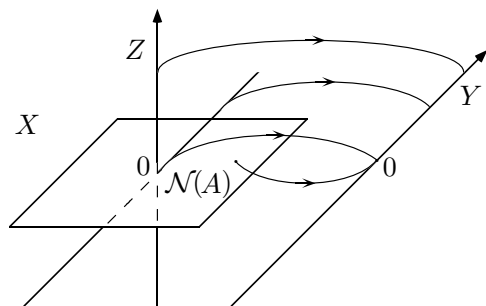


Figura 1.1

Una dimostrazione intuitiva è riportata nella figura 1.1, in cui viene rappresentato un sottospazio X , somma diretta di un suo sottospazio Z e

di $\mathcal{N}(A)$, trasformato da A in $Y = \mathcal{R}(A)$. Si può notare che risulta appunto $r + s = n$.

Se la matrice A è quadrata, ossia rappresenta un operatore lineare, ed ha le colonne linearmente indipendenti, ossia ha rango pieno, la sua nullità è zero e la matrice stessa risulta invertibile. Questo corrisponde alla possibilità di definire l'operatore inverso.

Esempio 1.8. Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Delle quattro colonne di A , si possono assumere come linearmente indipendenti le prime due, poiché la terza si ottiene da queste sommandole e la quarta aggiungendo alla prima la seconda moltiplicata per 2. Pertanto il rango di A è due e $\mathcal{R}(A)$ è il sottospazio generato dai vettori che hanno per rappresentazione le prime due colonne di A , cioè:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si sarebbero potute scegliere anche altre coppie di colonne linearmente indipendenti, ad esempio la seconda e la terza. In tal caso i vettori che avrebbero generato $\mathcal{R}(A)$ sarebbero stati rappresentati da:

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In entrambi i casi $\mathcal{R}(A)$ è lo stesso, come è facile constatare, poiché ciascuna coppia di vettori si può ottenere mediante combinazioni lineari dei vettori dell'altra coppia:

$$\alpha_1 = -\alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_2 = -\alpha_1 + \alpha_3.$$

Per determinare $\mathcal{N}(A)$ occorre trovare un insieme massimo di vettori linearmente indipendenti soddisfacenti il sistema omogeneo (1.17). Poiché la

nullità è $s = n - p = 2$ è facile verificare che un tale insieme può essere il seguente

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

■

Esempio 1.9. Come ulteriore esempio si consideri lo spazio vettoriale formato dai polinomi di grado non maggiore di due sul corpo \mathbb{R} , e in questo spazio l'operatore f che ad ogni vettore $at^2 + bt + c$ fa corrispondere il vettore $f(at^2 + bt + c) = ct + b$.

È immediato verificare che f è un operatore lineare. Inoltre $\mathcal{R}(f)$ è l'insieme dei polinomi di grado non maggiore di uno, mentre $\mathcal{N}(f)$ è l'insieme dei polinomi aventi il solo termine di secondo grado. Ovviamente questi risultati possono essere ottenuti a partire da una delle rappresentazioni mediante matrice di f . Scelti ad esempio come vettori di base $e_1 = g_1 = t^2 + t$, $e_2 = g_2 = t^2 + 2t$, $e_3 = g_3 = t + 2$, la rappresentazione A di f è:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

e la rappresentazione di una base in $\mathcal{R}(f)$ rispetto alla base fissata, si trova scegliendo le colonne di A linearmente indipendenti. Se si prendono la seconda e la terza, in quanto la prima è proporzionale alla seconda, si ottengono le rappresentazioni dei vettori $x_1 = f(e_2) = 2$, $x_2 = f(e_3) = 2t + 1$, le cui possibili combinazioni lineari sono proprio tutti i polinomi di grado non maggiore di uno. Infine la rappresentazione di una base di $\mathcal{N}(f)$ è data da:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cui corrisponde, nella base scelta, il vettore $x = t^2$. ■

Vediamo ora come varia la rappresentazione di una trasformazione lineare f , avente rappresentazione A , al variare delle basi in X_F ed Y_F . Si esegua un cambiamento in X_F dalla base $\{e_i\}$ alla base $\{\hat{e}_i\}$, descritto dalla matrice T_1 $n \times n$:

$$\hat{e}_i = T_1 e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

ed un cambiamento in Y_F dalla base $\{g_j\}$ a $\{\hat{g}_j\}$, descritto dalla matrice T_2 $m \times m$:

$$\hat{g}_j = T_2 g_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Rispetto a tali basi la rappresentazione di x diventa:

$$\hat{\alpha} = T_1 \alpha,$$

e quella di $f(x)$ diventa:

$$\hat{\beta} = T_2 \beta,$$

da cui

$$\hat{\beta} = T_2 A T_1^{-1} \hat{\alpha}$$

cioè, fissate le nuove basi $\{\hat{e}_i\}$ e $\{\hat{g}_j\}$, la rappresentazione di f risulta essere:

$$\hat{A} = T_2 A T_1^{-1}. \quad (1.19)$$

Le matrici \hat{A} ed A sono dette *equivalenti*.

Poiché tutte le matrici equivalenti rappresentano, con una opportuna scelta delle basi, la stessa trasformazione lineare, quest'ultima può essere pensata come l'ente matematico ottenibile per astrazione dall'insieme delle matrici equivalenti. È chiaro inoltre che tutte le matrici equivalenti hanno lo stesso rango e stessa nullità, che sono poi quelle dell'operatore che rappresentano.

Data l'espressione della funzione lineare f e fissate le basi $\{\hat{e}_i\}$, $\{\hat{g}_j\}$, per trovare la rappresentazione \hat{A} di f si può applicare il procedimento fornito da teorema 2. Potrebbe però risultare difficoltoso esprimere i vettori $f(\hat{e}_i)$ nella base $\{\hat{g}_j\}$. Per ovviare a ciò si può allora scrivere la rappresentazione A di f nelle basi canoniche in X_F e Y_F e le matrici T_1^{-1} , T_2^{-1} che descrivono i passaggi dalle basi $\{\hat{e}_i\}$, $\{\hat{g}_j\}$ alle basi $\{e_i\}$, $\{g_j\}$, e quindi applicare la (1.19). Si noti che A , T_1^{-1} , T_2^{-1} sono di immediata scrittura, mentre gli unici calcoli sono quelli relativi a T_2 e alla (1.19).

Esempio 1.10. Fissate le basi di $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^3$ e $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^2$:

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{g}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per trovare la rappresentazione di f : $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathbb{R}}^2$ definita come

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix},$$

si scrivono dapprima le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e poi si calcola:

$$T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = T_2 A T_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

1.7. Operatori lineari e matrici quadrate

Poiché, come si è visto, al variare delle basi in X_F ed Y_F varia la rappresentazione delle trasformazioni lineari nell'ambito delle matrici equivalenti, ha senso domandarsi se esistono tra esse matrici con configurazioni particolari che vengono definite canoniche. La soluzione a tale quesito, che conduce all'individuazione della *forma canonica dell'equivalenza* per quanto riguarda il caso generale, verrà trattato nel caso particolare in cui la trasformazione è un operatore, cioè è una trasformazione da X_F in X_F .

Dalla dimostrazione del teorema 2 segue che la rappresentazione di un operatore lineare f rispetto ad una fissata base $\{e_i\}$ è quella matrice quadrata che ha per colonna i -esima la rappresentazione rispetto a tale base di $f(e_i)$. È chiaro come ciò consenta la determinazione della rappresentazione di f rispetto a qualsiasi base.

Qualora sia noto che una matrice A rappresenta l'operatore f rispetto ad una fissata base $\{e_i\}$, si può determinare direttamente la nuova rappresentazione di f , al variare della base, a partire da A stessa. Infatti rispetto a $\{e_i\}$ la rappresentazione β di $f(x)$ si ottiene da quella α di x mediante la relazione (1.16). In base alla (1.15), passando alla base $\{g_j\}$ le rappresentazioni di x ed $f(x)$ divengono rispettivamente:

$$\hat{\alpha} = T\alpha, \quad \hat{\beta} = T\beta,$$

dove T è la matrice $n \times n$, non singolare, avente per i -esima colonna la rappresentazione di e_i rispetto a $\{g_j\}$.

Ricavando α e β e sostituendoli nella (1.16) si ottiene:

$$\hat{\beta} = T A T^{-1} \hat{\alpha},$$

da cui si deduce che la rappresentazione dell'operatore f rispetto alla nuova base è data da:

$$\hat{A} = T A T^{-1}. \quad (1.20)$$

Le matrici A ed \hat{A} legate dalla (1.20) si dicono *simili*.

Poiché una matrice quadrata non singolare può sempre pensarsi come rappresentativa di un cambiamento di base, si ha che tutte le matrici simili rappresentano, ciascuna in una base, lo stesso operatore lineare. Questo fatto consente di pensare *l'operatore lineare come l'ente matematico ottenibile per astrazione dall'insieme delle matrici simili*.

Poiché un operatore lineare assume rappresentazioni nell'ambito delle matrici simili, e poiché la scelta di una base è arbitraria, appare naturale domandarsi se esistano delle basi rispetto alle quali lo studio di un operatore lineare sia particolarmente semplice, ossia se esistano delle forme canoniche dell'operatore lineare.

Per meglio comprendere questo problema, si consideri il seguente esempio.

Esempio 1.11. Con riferimento all'operatore f dell'esempio 1.9, rispetto alla base costituita dai vettori $e_1 = t - 1$, $e_2 = t + 1$, $e_3 = t^2$, poiché:

$$f(e_1) = -t + 1 = -e_1, \quad f(e_2) = t + 1 = e_2, \quad f(e_3) = 0,$$

l'operatore f assume la seguente rappresentazione:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

ossia è rappresentato da una matrice diagonale. ■

Si osservi che la base scelta gode della proprietà per cui applicando l'operatore f al primo vettore di base si ottiene il vettore stesso moltiplicato per il primo elemento della diagonale di A ; applicando l'operatore f al secondo vettore di base si ottiene il vettore stesso moltiplicato per il secondo elemento della diagonale di A , e così via. I vettori che godono di tale proprietà sono detti autovettori dell'operatore ed i corrispondenti scalari sono chiamati autovalori. Più precisamente si possono introdurre le seguenti definizioni.

Definizione 12. Si chiama *autovettore* di un operatore lineare $f: X_F \rightarrow X_F$ un vettore u tale che esiste uno scalare $\lambda \in F$ per cui:

$$f(u) = \lambda u. \quad (1.22)$$

Lo scalare λ che soddisfa la (1.22) è detto *autovalore* di f . ■

Ci si domanda ora se esista sempre una base per X_F che sia costituita da autovettori. Con riferimento alla rappresentazione A dell'operatore f in una generica base, la rappresentazione α che soddisfa la relazione:

$$A\alpha = \lambda\alpha, \quad (1.23)$$

per qualche valore di λ , è la rappresentazione di un autovettore nella fissata base. Infatti al variare della base secondo una trasformazione T , risulta:

$$\hat{A} = TAT^{-1}, \quad \hat{\alpha} = T\alpha,$$

dove \hat{A} e $\hat{\alpha}$ sono le nuove rappresentazioni dell'operatore e dell'autovettore, e si ha:

$$\hat{A}\hat{\alpha} = TA\alpha = \lambda T\alpha = \lambda\hat{\alpha}.$$

Questo conferma che λ ed u , che assume rappresentazioni α e $\hat{\alpha}$, sono autovalore ed autovettore di f in quanto soddisfano la (1.22).

La ricerca di una base di autovettori per lo spazio n -dimensionale X_F , può essere quindi ricondotta alla ricerca delle n rappresentazioni di tali autovettori utilizzando la (1.23).

Definizione 13. Lo scalare λ e la rappresentazione α che soddisfano la (1.23) sono detti rispettivamente *autovalore* ed *autovettore* della matrice A . ■

Il problema generale della ricerca delle rappresentazioni degli n autovettori, formulato con la (1.23), può essere soddisfacentemente trattato qualora si ammetta, come assai frequentemente avviene nella pratica che sia $F = \mathbb{C}$. In tal caso, riscrivendo la (1.23) nella forma:

$$(A - \lambda I)\alpha = 0, \quad (1.24)$$

risulta subito che perché esista $\alpha \neq 0$ deve essere:

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (1.25)$$

e poiché il primo membro della (1.25) è un polinomio di grado n nella incognita λ , esistono nel campo complesso n autovalori, alcuni dei quali eventualmente coincidenti, in corrispondenza dei quali la (1.24) ammette soluzioni non banali.

Nel caso in cui questi n autovalori siano tutti distinti e pari a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, risultano determinati dalla (1.24) n autovettori ad essi corrispondenti, aventi rappresentazioni u_1, u_2, \dots, u_n . È facile mostrare che tali vettori sono linearmente indipendenti.

Teorema 6. Se gli n autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ di una matrice A sono distinti, allora gli n autovettori u_1, u_2, \dots, u_n ad essi associati sono linearmente indipendenti. ■

Dimostrazione. Si supponga, per assurdo, che esistano n scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tutti nulli, tali che risulti:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0. \quad (1.26)$$

Assunto, senza perdita di generalità, $\alpha_1 \neq 0$ si premoltiplichino ambo i membri della (1.26) per $(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) \cdots (A - \lambda_n I)$. Tenendo conto delle proprietà degli autovalori si ottiene:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n)u_1 = 0.$$

Poiché gli autovalori sono tutti distinti, questa relazione implica $\alpha_1 = 0$, il che contraddice l'ipotesi e prova l'asserto. ■

Esempio 1.12. Per determinare gli autovalori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

occorre innanzi tutto calcolare:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) + 2(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 + 1). \end{aligned}$$

Pertanto gli autovalori di A sono:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = j, \quad \lambda_3 = -j.$$

Ponendo al posto di λ il primo autovalore, si ottiene l'autovettore corrispondente come soluzione dell'equazione:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_1 = 0.$$

Si trova dunque:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

In modo analogo:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

È facile verificare che questi tre autovettori sono linearmente indipendenti; infatti il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1-j & 1+j \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che li ha per colonne, è diverso da zero, essendo pari a $4j$. ■

Il primo membro della (1.25), che si riscrive nella forma:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

è detto *polinomio caratteristico della matrice A* ; corrispondentemente la (1.25) è detta *equazione caratteristica* di A . Un'importante proprietà dell'equazione caratteristica di una matrice è espressa dal *teorema di Cayley–Hamilton*,^(1.4) il quale asserisce che A è soluzione dell'equazione:

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0.$$

^(1.4) Si veda l'esercizio 1.7.

Questo teorema è di notevole importanza applicativa poiché permette di esprimere la potenza n -esima di una matrice $n \times n$ come combinazione lineare delle sue prime $n-1$ potenze. Moltiplicando poi l'espressione così ottenuta per A si può esprimere anche la potenza $(n+1)$ -esima di A in funzione delle sue prime $n-1$ potenze, e così via. In conclusione, dal teorema di Cayley–Hamilton si deduce che le potenze di qualsiasi esponente di una matrice $n \times n$ possono esprimersi come combinazione lineare delle prime $n-1$ potenze.

1.8. Autovettori generalizzati di una matrice

Nel caso in cui la matrice A abbia tutti autovalori distinti è possibile generare n autovettori linearmente indipendenti. Qualora tra gli autovalori di A ve ne siano taluni coincidenti, questo risultato non è sempre valido, come mostra il seguente esempio. Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

la matrice assegnata, i cui autovalori risultano pari a $a^{(1.5)}$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$$

I corrispondenti autovettori, a meno di una costante fissata arbitrariamente, risultano avere le seguenti rappresentazioni:

$$u_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

essendo $u_{1,2}$ associato sia a λ_1 che a λ_2 .

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 1.7, per caratterizzare le rappresentazioni semplici di un operatore è necessario individuare una nuova base dello spazio. Essa dovrà essere costituita dall'aggregazione di

^(1.5) Quando una matrice ha nulli tutti gli elementi di una stessa banda della diagonale principale, i suoi autovalori sono precisamente gli elementi su tale diagonale. Una siffatta matrice è detta “triangolare superiore” se gli elementi non nulli sono al di sopra della diagonale, “triangolare inferiore” nel caso opposto. La matrice A del presente esempio è triangolare superiore.

tutti i possibili vettori indipendenti associabili a ciascun autovalore. Il numero di tali vettori dovrà essere poi pari alla molteplicità dell'autovalore stesso. Una tale procedura si dovrà ridurre a quella già esaminata nel paragrafo precedente. Per comprendere in qual modo possa ottenersi questo risultato occorre rendersi conto del motivo per cui, nel caso di autovalori coincidenti, possono nascere degli autovettori linearmente dipendenti. Ciò può capirsi facilmente esaminando più a fondo l'esempio ora visto. Quando nella matrice caratteristica $A - \lambda I$ si pone $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, si ottiene:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

È immediato constatare che la nullità della matrice (1.28) è pari a uno, onde è possibile determinare, a meno di una costante arbitraria, un solo autovettore di A per gli autovalori λ_1 e λ_2 . Se invece la nullità della (1.28) fosse stata due, si sarebbero potuti determinare due autovettori linearmente indipendenti che, uniti al terzo, corrispondente a λ_3 , avrebbero determinato una base. Appare allora naturale cercare di determinare a partire dalla (1.28) una matrice di nullità due. È facile constatare che la (1.28) al quadrato soddisfa tale requisito:

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa scelta può essere ulteriormente giustificata con la seguente considerazione: un autovettore di A corrispondente all'autovalore λ_i è un particolare vettore che goda della proprietà di essere trasformato nell'origine dalla matrice $(A - \lambda_i I)$. Una possibile generalizzazione di ciò consiste nella ricerca di vettori i quali siano trasformati nell'origine mediante applicazione ripetuta della matrice $(A - \lambda_i I)$, cioè mediante $(A - \lambda_i I)^2$, $(A - \lambda_i I)^3$, etc.

Da queste considerazioni appare giustificata la seguente definizione.

Definizione 14. Un autovettore generalizzato di ordine k associato all'autovalore λ_i della matrice A è un vettore u^k tale che

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I)^k u^k &= 0, \\ (A - \lambda_i I)^{k-1} u^k &\neq 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Si noti che per $k = 1$ questa definizione si riduce a quella di autovettore data nel paragrafo precedente.

L'introduzione degli autovettori, generalizzati o meno, consente, come anticipato, di determinare una nuova base e quindi di costruire delle matrici di trasformazione T che trasformano la matrice di partenza A in una simile TAT^{-1} con particolari caratteristiche. Su questo argomento si ritornerà nel paragrafo dedicato alle rappresentazioni canoniche di un operatore lineare. Nel presente paragrafo si vuole solo mostrare, nel caso di autovettori generalizzati, come devono essere determinati gli autovettori che costituiranno la nuova base.

Utilizzando la nozione di autovettore generalizzato, è possibile dare una procedura che consente di associare a ciascun autovalore un sottospazio di dimensione pari alla sua molteplicità. L'insieme delle basi di questi sottospazi costituirà la base cercata. La procedura in questione consiste nei seguenti passi.

Procedura 1.2.

- a) Iniziando dall'autovalore λ_1 di molteplicità μ_1 si determini il maggior numero possibile di soluzioni linearmente indipendenti per l'equazione

$$(A - \lambda_1 I)u^1 = 0. \quad (1.29)$$

Siano $u_1^1, \dots, u_{q_1}^1$ tali soluzioni.

- b) Qualora risulti $q_1 < \mu_1$, si ricerchino le soluzioni linearmente indipendenti $u_1^2, \dots, u_{q_2}^2$ delle equazioni:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)^2 u^2 &= 0 \\ (A - \lambda_1 I)u^2 &\neq 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

cioè si ricerchino gli autovettori generalizzati di ordine 2 associati all'autovalore. Se se ne trovano $\mu_1 - q_1$ linearmente indipendenti tra loro e con le soluzioni della (1.29) si passi al punto c), altrimenti si passi alla ricerca di autovettori generalizzati di ordine 3, 4, \dots linearmente indipendenti tra loro e con quelli precedenti, arrestando la procedura quando si sia ottenuto un numero di autovettori generalizzati globalmente pari alla molteplicità μ_1 dell'autovalore λ_1 .

- c) Si ripeta tutta la procedura per i restanti autovalori $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ di molteplicità μ_2, μ_3, \dots . Al termine si saranno ottenuti $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots = n$ autovettori generalizzati. \blacksquare

La procedura 1.2 permette di enunciare il seguente teorema.

Teorema 7. Ogni insieme di autovettori generalizzati costruiti secondo la procedura 1.2 è una n -pla di vettori linearmente indipendenti. \square

Esempio 1.13. Si consideri la matrice (1.27). Applicando la procedura 1.2 si ha, per l'autovalore $\lambda_1 = 1$ di molteplicità $\mu_1 = 2$, la matrice (1.28) con l'autovettore generalizzato di ordine 1:

$$u_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice (1.28) ha rango 2, non esistono altri autovettori generalizzati di ordine 1 linearmente indipendenti con u_1^1 , cioè si ha $q_1 = 1$. Occorre pertanto passare al punto b) della procedura 1.2, ricercando $\mu_1 - q_1 = 1$ vettore soluzione delle equazioni (1.30) cioè:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u_1^2 = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u_1^2 \neq 0.$$

Soluzioni possibili sono:

$$u_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, in corrispondenza a $\lambda_3 = 2$ si ha l'autovettore:

$$u_2^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ed è facile verificare che i vettori u_1^1, u_1^2, u_2^1 sono linearmente indipendenti. \blacksquare

Nel paragrafo relativo alle rappresentazioni canoniche di Jordan di un operatore lineare, si mostrerà una procedura alternativa a questa ora esposta, che consente la determinazione di un'altra base, più adatta ai fini del calcolo.

1.9. Rappresentazioni canoniche di un operatore lineare

I concetti introdotti nei paragrafi precedenti ci consentono di risolvere il problema, precedentemente formulato, della ricerca di basi rispetto alle quali lo studio di un operatore lineare sia particolarmente semplice. In particolare verranno esaminate due forme canoniche.

La prima è la cosiddetta *forma canonica di Jordan*, ed è la forma che assume l'operatore rispetto ad una base formata da autovettori generalizzati. La particolarità consiste nel fatto che a caratterizzare la rappresentazione dell'operatore, ossia la matrice A , sono i suoi stessi autovalori λ_i . Nell'esempio 1.11, nella base $e_1 = t - 1$, $e_2 = t + 1$, $e_3 = t^2$ l'operatore f assumeva la rappresentazione (1.21), ossia una forma diagonale, caratterizzata dagli autovalori. È questa una forma particolare che rientra tra quella più generale di Jordan come vedremo nel prossimo paragrafo.

La seconda rappresentazione canonica che verrà esaminata è la cosiddetta *forma canonica compagna*, ed è caratterizzata dal fatto che è individuata dai coefficienti del polinomio caratteristico dell'operatore. Per meglio comprendere cosa si intenda per forma compagna si consideri l'operatore f tale che $f(at^2 + bt + c) = -2(-b + 2c)t^2 + (a + c)t + b - 2c$ e se ne determini la rappresentazione A rispetto alla base $\{t^2, t, -2t^2 + 1\}$. Si ottiene:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Risulta $|\lambda I - \hat{A}| = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda$ e si può notare che i coefficienti di questa equazione caratteristica sono, a parte il primo che è sempre unitario, precisamente gli opposti degli elementi dell'ultima colonna di \hat{A} . È chiaro come questa osservazione faccia nascere l'idea di ricercare una particolare base rispetto alla quale la rappresentazione di un operatore goda della proprietà ora trovata molto comoda per la determinazione dell'equazione caratteristica.

Si osservi preliminarmente che il polinomio caratteristico di una matrice A è definito a partire dagli autovalori:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Tale polinomio è anche detto *polinomio caratteristico dell'operatore f* , poiché è indipendente dalle rappresentazioni di A al pari degli autovalori.

Ciò premesso, si supponga che esista un vettore x_1 tale che gli n vettori $x_1, x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$ risultino linearmente indipendenti. Si può in tal caso enunciare il seguente risultato.

Teorema 8. Rispetto alla base $x_1, x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$, l'operatore lineare f avente polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ è rappresentato dalla seguente matrice:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

detta matrice compagna o forma compagna dell'operatore f . \square

Dimostrazione. Costruendo la matrice di trasformazione T in modo tale che la nuova base sia proprio data dai vettori $x_1, x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$, ossia prendendo $T^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & f(x_1) & \cdots & f(x_{n-1}) \end{pmatrix}$, dalla (1.20) riscritta come

$$AT^{-1} = T^{-1}\hat{A}$$

e dal teorema di Cayley–Hamilton, per cui $f^n(x_1) + a_{n-1}f^{n-1}(x_1) + \dots + a_1f(x_1) + a_0x_1 = 0^{(1.6)}$ si trova che $\hat{A} = A_c$. \blacksquare

Ad un analogo risultato si perviene se si costruisce la matrice T^{-1} considerando i vettori di base in senso inverso:

$$\tilde{A}_c = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

In effetti è come considerare una seconda trasformazione

$$T_1 = T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\tilde{A}_c = T_1 A_c T_1^{-1}$.

Infine anche le matrici A_c^T, \tilde{A}_c^T sono dette matrici compagne, come verrà precisato nel capitolo 6:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a_{n-1} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

^(1.6) $f^2(x) := f(f(x)), f^3(x) := f(f^2(x))$, etc.

Esse corrispondono rispettivamente alle matrici di trasformazione:

$$T = \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T = f^T(x_1) \\ \vdots \\ x_n^T = f^T(x_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} x_n^T = f^T(x_{n-1}) \\ \vdots \\ x_2^T = f^T(x_1) \\ x_1^T \end{pmatrix},$$

come è facile verificare.

La struttura delle matrici compagne è particolarmente comoda in quanto evidenzia immediatamente i coefficienti del suo polinomio caratteristico. Inoltre è particolarmente utile quando si desidera costruire rapidamente una matrice avente un polinomio caratteristico assegnato.

È importante sottolineare il fatto che non per tutti gli operatori la determinazione di una base avente la struttura $x_1, x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$ è possibile, e quindi non sempre un operatore ammette tra le sue rappresentazioni la forma compagna.

La determinazione delle condizioni sotto le quali esiste la forma compagna e la sua generalizzazione nella “forma canonica di Frobenius” non rientrano negli scopi del presente testo.^(1.7)

1.10. Forma canonica di Jordan

Nell'esempio 1.11 la rappresentazione (1.21) che assumeva l'operatore f è stata ottenuta assumendo come base gli autovettori di f . Questo risultato non è casuale, ma richiede che gli autovettori in questione formino una base, cioè siano in numero di n e linearmente indipendenti.

Ciò è senz'altro vero se gli autovalori dell'operatore assegnato sono tutti distinti. In tal caso si ha il seguente teorema.

Teorema 9. Un operatore lineare f avente tutti gli autovalori λ_i distinti ha, rispetto alla base formata dai suoi autovettori, la seguente rappresentazione:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_i), \quad (1.31)$$

^(1.7) Il lettore interessato potrà trovare tali generalizzazioni ad esempio in S. Lipschutz, *Linear Algebra*, Schaum's Out. Ser., 1968, pp. 227–229.

detta forma canonica di Jordan nel caso di autovalori distinti. \square

Dimostrazione. Dalla (1.20), riscritta come $AT^{-1} = T^{-1}\hat{A}$, dove $T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$, e tenendo presenti le definizioni di autovettore e autovalore, si ricava $\hat{A} = J$. \blacksquare

Si osservi che non sempre un operatore lineare ammette la rappresentazione diagonale J . Il teorema ora enunciato ne garantisce l'esistenza per il caso di autovettori distinti, ma non nega la possibilità che tale rappresentazione esista anche in presenza di autovalori multipli.

In generale un operatore lineare avente autovalori multipli non ammette la rappresentazione diagonale (1.31). Questo è dovuto al fatto che in presenza di autovalori multipli, solo in casi particolari gli autovettori del primo ordine formano un insieme di n vettori linearmente indipendenti. In base a quanto visto nel paragrafo 1.8, appare naturale "completare" l'insieme degli autovettori aggiungendovi gli autovettori generalizzati. Questi, in analogia al caso di matrici, sono definiti nel modo seguente.

Definizione 15. Un autovettore generalizzato di ordine k associato all'autovalore λ_i dell'operatore f è un vettore u^k tale che risulta^(1.8):

$$\begin{aligned} (f - \lambda_i I)^k(u^k) &= 0 \\ (f - \lambda_i I)^{k-1}(u^k) &\neq 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Dal punto di vista computazionale, se A è la rappresentazione dell'operatore f , la definizione 15 implica che occorre risolvere le equazioni

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I)^k u^k &= 0 \\ (A - \lambda_i I)^{k-1} u^k &\neq 0 \end{aligned}$$

per il calcolo di u^k . La procedura 1.2 può essere generalizzata, onde si può dire che ad ogni operatore risultano associati n autovettori generalizzati che, per il teorema 7, sono linearmente indipendenti. Questo metodo ha però lo svantaggio di richiedere il calcolo delle potenze della matrice $(A - \lambda_i I)$, per cui nel seguito si proporrà un'altra procedura che risolve questo inconveniente. Prima di presentarla occorre però premettere delle precisazioni sulla determinazione degli autovettori generalizzati. A tale scopo introduciamo le seguenti definizioni.

^(1.8) $(f - \lambda_i I)^k(x) = f^k(x) - \binom{k}{1} \lambda_i f^{k-1}(x) + \binom{k}{2} \lambda_i^2 f^{k-2}(x) \cdots$

Definizione 16. Si chiama molteplicità algebrica μ_i di un autovalore λ_i di una matrice A , rappresentazione dell'operatore f , la sua molteplicità nel polinomio caratteristico $p(\lambda)$. Si chiama molteplicità geometrica m_i di λ_i l'ordine massimo dell'autovettore generalizzato che è associabile a λ_i . \blacksquare

Se dunque gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, con $r < n$, sono gli autovalori distinti di A , il polinomio caratteristico può anche essere scritto:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\mu_r} = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i}.$$

La dizione di molteplicità geometrica è giustificata dal fatto che essa poteva essere introdotta equivalentemente anche come molteplicità di λ_i in un opportuno polinomio, detto *polinomio minimo*, definito come quel polinomio $m(\lambda)$ tale che $m(A) = 0$, e che è divisore di tutti i polinomi che godono di tale proprietà e che ha coefficiente unitario alla massima potenza di λ . Infatti si potrebbe dimostrare che tutte e sole le soluzioni del polinomio minimo sono date dagli autovalori λ_i e che la molteplicità di λ_i nel polinomio minimo è pari a $m_i \leq \mu_i$. Quindi il polinomio minimo può anche scriversi:

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{m_i}.$$

Nel caso di autovalori distinti $m_i = \mu_i = 1$ e i due polinomi coincidono.

Descriviamo ora la procedura alternativa per la determinazione degli autovettori generalizzati, che evita il calcolo delle potenze successive della matrice $(A - \lambda_i I)$. Per determinare la base desiderata, costituita da autovettori generalizzati, si noti che se u^k è un autovettore generalizzato di ordine k relativo a λ_i , allora $(f - \lambda_i I)(u^k)$ è un autovettore generalizzato di ordine $k - 1$ poiché:

$$\begin{aligned} (f - \lambda_i I)^k(u^k) &= (f - \lambda_i I)^{k-1}[(f - \lambda_i I)(u^k)] = 0 \\ (f - \lambda_i I)^{k-1}(u^k) &= (f - \lambda_i I)^{k-2}[(f - \lambda_i I)(u^k)] \neq 0. \end{aligned}$$

La stessa osservazione in termini di rappresentazione A di f utilizzabile per eseguire i calcoli, comporta che:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I)^k u^k &= (A - \lambda_i I)^{k-1}[(A - \lambda_i I)u^k] = 0 \\ (A - \lambda_i I)^{k-1} u^k &= (A - \lambda_i I)^{k-2}[(A - \lambda_i I)u^k] \neq 0. \end{aligned}$$

Dunque:

$$(f - \lambda_i I)(u^k) = u^{k-1}, \quad (1.32)$$

ovvero:

$$(A - \lambda_i I)u^k = u^{k-1}. \quad (1.33)$$

La (1.33) suggerisce di utilizzare la procedura 1.2 per il calcolo degli autovettori di ordine k , a partire da quelli di ordine $k - 1$. Omettendo il pedice i per non appesantire la notazione, fissato un autovalore λ si trovano gli autovettori del primo ordine $u_1^1, \dots, u_{q_1}^1$, ove q_1 è la nullità della matrice $(A - \lambda I)$. Si calcolano dunque con la (1.33) gli autovettori del secondo ordine $u_1^2, \dots, u_{q_2}^2$, e così via fino a calcolare quelli di ordine massimo m , dati da $u_1^m, \dots, u_{q_m}^m$. Per inciso si noti che in questo procedimento risulta $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_m$, in quanto per un certo autovettore u^{k-1} potrebbe non esistere alcun autovettore u^k che soddisfi la (1.33). In questa maniera al generico autovalore λ vengono associati degli autovettori generalizzati, i quali risultano essere indipendenti tra loro (teorema 7) e che dunque possono essere presi come base dell'autospazio \mathcal{U} così associabile a λ . Tali autovettori vengono a costruire una tabella in cui nella prima colonna vengono posti gli autovettori di ordine 1, nella seconda quelli di ordine 2, e così via fino a quelli di ordine m .

ordine 1	ordine 2	...	ordine $m - 1$	ordine m
u_1^1	u_1^2	\dots	u_1^{m-1}	u_1^m
u_2^1	u_2^2	\dots	u_2^{m-1}	u_2^m
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
\vdots	\vdots		$u_{q_m}^{m-1}$	$u_{q_m}^m$
\vdots	\vdots		\vdots	
\vdots	\vdots		$u_{q_{m-1}}^{m-1}$	
$u_{q_2}^1$	$u_{q_2}^2$			
\vdots				
$u_{q_1}^1$				

Tabella 1.1 – Autovettori generalizzati associati a λ

Osservando le righe della tabella, si notano q_m catene formate da m autovettori, $q_{m-1} - q_m$ catene formate da $m - 1$ autovettori, e così via. In

totale si hanno ovviamente q_1 catene le cui lunghezze, in generale, vanno da m ad 1.

Al generico autovalore λ in tal modo saranno associati un numero di autovettori generalizzati pari alla sua molteplicità algebrica n . Tali autovettori saranno q_1 di ordine 1, q_2 di ordine 2, etc., q_m di ordine m , risultando ovviamente $\sum_{j=1}^m q_j = \mu$.

Per ognuno degli autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ viene costruita una tabella 1.1, applicando la (1.32) ovvero la (1.33) se A è fissata.

Si osservi che in tale procedura gli autovettori al passo $k - 1$ devono essere determinati in *maniera opportuna* perché ciascuna catena possa essere completata, arrivando alla giusta lunghezza. In effetti questo metodo di calcolo, se da un lato diminuisce la complessità dei calcoli, ha il difetto che a priori non permette di conoscere le lunghezze delle catene di autovettori. Poiché in generale gli autovettori u^{k-1} , che poi serviranno per il calcolo di quelli u^k , possono essere scelti in più modi, una loro scelta inadatta può comportare che la catena non è completabile. A tal proposito si veda l'esempio 1.15. Poiché però questa situazione determina risultati non possibili quando si applica la (1.33), in genere è agevole la corretta individuazione degli autovettori e dunque il completamento delle catene.

Per meglio comprendere come questa procedura di calcolo alternativa permetta di economizzare lo sforzo computazionale, descriviamo brevemente il metodo del calcolo degli autovettori basato sulla loro definizione. In questo caso la tabella di autovettori associata a λ viene costruita a partire dagli autovettori di ordine massimo. Si calcolano infatti prima di tutto gli autovettori di ordine m ; per far ciò occorre calcolare le potenze di $(A - \lambda I)$ fino a che si trova che il rango di $(A - \lambda I)^{m+1}$ è uguale a quello di $(A - \lambda I)^m$. Siano essi $u_1^m, \dots, u_{q_m}^m$. Si determinano quindi q_m autovettori mediante la (1.33):

$$u_1^{m-1} = (A - \lambda I)u_1^m, \quad \dots, \quad u_{q_m}^{m-1} = (A - \lambda I)u_{q_m}^m;$$

si noti che anche in questo caso essi vanno scelti in *maniera opportuna* perché le catene siano completabili fino agli autovettori di ordine 1. Questi autovettori non sono tutti gli autovettori generalizzati di ordine $m - 1$, in quanto ce ne potrebbero essere altri: $u_{q_m+1}^{m-1}, \dots, u_{q_{m-1}}^{m-1}$. Anche in tal caso si ritrova che $q_{m-1} \geq q_m$. A partire da $u_1^{m-1}, \dots, u_{q_{m-1}}^{m-1}$, riapplicando la (1.33), si ottengono q_{m-1} autovettori di ordine $m - 2$, a cui se ne possono eventualmente aggiungere altri, avendo così $q_{m-2} \geq q_{m-1}$ autovettori di ordine $m - 2$. Procedendo iterativamente in questa maniera fino agli autovettori del primo ordine, si arriva ad associare al generico autovalore λ la tabella 1.1 di autovettori generalizzati.

Si osservi come, in questo caso, occorra calcolare le potenze successive della matrice $(A - \lambda I)$. Ciò può essere oneroso da un punto di vista computazionale, ed è per questo che viene preferito l'altro procedimento di calcolo.

Costruite le tabelle di autovettori associate ad ognuno degli autovalori distinti λ_i , $i = 1, \dots, r$, si assuma come base $\{e_i\}$ dello spazio di stato quella costituita, nell'ordine, dagli autovettori generalizzati associati a λ_1 ordinati secondo le relative catene, ossia ordinate secondo le righe della relativa tabella, poi da quelli associati a λ_2 e ordinati analogamente, e così via fino all'ultimo autovalore λ_r . Si perviene così al seguente risultato.

Teorema 10. *Rispetto alla base $\{e_i\}$ l'operatore f ha la rappresentazione diagonale a blocchi $J = \text{diag} \{J_{ij}\}$, dove l'indice i varia da 1 a r e l'indice j varia, per ogni i prefissato, da 1 a q_{1i} (ossia per ogni i si hanno tanti blocchi quante sono le righe della i -esima tabella). Il generico blocco J_{ij} è una matrice quadrata di dimensioni pari alla lunghezza della catena a cui corrisponde:*

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}. \quad \square$$

Dimostrazione. Dalla (1.20), riscritta come $AT^{-1} = T^{-1}\hat{A}$, e dove:

$$T^{-1} = (M_1 \quad \cdots \quad M_r),$$

$$M_i = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & u_1^m & \vdots & u_2^1 & u_2^2 & \cdots & u_2^m & \vdots & \cdots \end{pmatrix},$$

per $i = 1, \dots, r$, e tenendo conto della (1.32), si constata subito che la prima colonna di J è

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

poiché il primo vettore u_1^1 della base scelta è un autovettore di ordine uno relativo a λ_1 . Per la seconda colonna si osservi che il secondo vettore, u_1^2 ,

è un autovettore generalizzato di ordine due scelto in modo tale che risulti $(f - \lambda_1 I)(u_1^2) = u_1^1$ da cui si ha:

$$f(u_1^2) = u_1^1 + \lambda_1 u_1^2.$$

Pertanto la seconda colonna di J , che è la rappresentazione di $f(u_1^2)$ rispetto alla base scelta, è data da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iterativamente si costruisce così il blocco J_{11} . Passando alle successive catene di autovettori relativi a λ_1 e poi ai restanti autovalori si trova che la matrice J è costituita secondo quanto enunciato dal teorema. ■

Si noti che in base al teorema ora enunciato l'operatore f viene ad essere rappresentato, nella base degli autovettori generalizzati scelti come visto, da una matrice J diagonale a blocchi, avente tanti blocchi quanti sono gli autovalori distinti. A loro volta queste sotto-matrici sono diagonali a blocchi, con tante sotto-matrici quante sono le catene che appaiono nella tabella,^(1.9) e con le dimensioni di tali sotto-matrici date dalle lunghezze delle catene. In particolare la dimensione della prima di queste sotto-matrici è la maggiore ed è pari alla molteplicità *geometrica* dell'autovalore corrispondente.^(1.10)

Esempio 1.14. Si consideri in $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}^6$ l'operatore f rappresentato, in una base prefissata, dalla seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si trova facilmente che $|A - \lambda I| = (\lambda - 2)^6$, onde l'operatore f ha l'autovalore $\lambda = 2$ di molteplicità algebrica $\mu = 6$.

^(1.9) Ossia tante quanto è la nullità delle matrici $(A - \lambda_i I)$.

^(1.10) Alcuni autori definiscono la molteplicità geometrica di λ_i come il numero di righe della tabella corrispondente, ovvero come il numero di blocchi della forma canonica di Jordan.

Per determinare la forma di Jordan, occorre eseguire un cambiamento di base secondo quanto detto nel teorema 10; occorre cioè determinare la base $\{e_i\}$ degli autovalori generalizzati.

Osservando la matrice $(A - 2I)$, che ha nullità pari a tre, si trovano subito gli autovettori di ordine uno:

$$u_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le catene di autovettori sono dunque tre. Esse potrebbero avere lunghezze rispettivamente 4, 1, 1, oppure 3, 2, 1, oppure 2, 2, 2.

La determinazione degli autovettori di ordine due può essere effettuata utilizzando la (1.33), cercando le soluzioni delle equazioni:

$$(A - 2I)u_1^2 = u_1^1, \quad (A - 2I)u_2^2 = u_2^1, \quad (A - 2I)u_3^2 = u_3^1.$$

Anche in questo caso, osservando le prime due equazioni, si trovano le soluzioni:

$$u_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

mentre è immediato constatare che la terza non ammette soluzione, poiché u_3^1 non appartiene a $\mathcal{R}(A - 2I)$ (si osservi la sesta componente dei vettori colonna). A questo punto già si può affermare che le catene hanno lunghezze 3, 2, 1 e che

$$J = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

con T opportuna, ancora da calcolare. Per inciso si noti che, essendo la molteplicità geometrica uguale a tre, il polinomio minimo è $m(\lambda) = (\lambda - 2)^3$.

Analogamente a quanto fatto in precedenza, la ricerca di un autovettore di ordine 3 viene effettuata risolvendo una delle equazioni:

$$(A - 2I)u_1^3 = u_1^2, \quad (A - 2I)u_2^3 = u_2^2.$$

Si constata facilmente che la prima ha la soluzione:

$$u_1^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e avendo così ottenuto complessivamente sei autovettori generalizzati, la procedura è completata. La matrice T è costruita a partire da T^{-1} :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e come previsto si ha che $TAT^{-1} = J$. Si osservi che in realtà non occorre calcolare né T né TAT^{-1} , se non per verifica dei calcoli svolti. Infatti la forma di J deriva direttamente dalla dimostrazione del teorema 10 (tre catene di autovettori di lunghezza 3, 2 ed 1 rispettivamente). ■

Esempio 1.15. Si è osservato che nell'applicazione della (1.33) per il calcolo delle catene di autovettori, a partire da quelli di ordine 1 e andando verso quelli di ordine superiore, ci potrebbero essere dei problemi, a meno di scegliere gli autovettori *opportunamente*. Se ad esempio si considera:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

avente un unico autovalore $\lambda = 3$, con molteplicità algebrica 3, poiché:

$$(A - 3I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha nullità $s = 2$, ci debbono essere due autovettori del primo ordine e dunque due catene di autovettori. La molteplicità geometrica di λ è dunque $m = 2$ e si dovranno avere due catene di autovettori, di lunghezza 2 ed 1 rispettivamente. Se ad esempio si fissano:

$$\bar{u}_1^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

si trovano dei risultati impossibili quando si applica la (1.33) per il calcolo dell'autovettore del secondo ordine. Ciò è proprio dovuto alla scelta inadatta di \bar{u}_1^1 . In effetti l'autovettore opportuno è invece

$$u_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Applicando la (1.33) si vede poi che $u_1^2 = (1 \ 0 \ 0)^T$.

Per esercizio applichiamo allo stesso caso la procedura di calcolo degli autovettori generalizzati basata sulla loro definizione. A tal fine notato che $m = 2$, si calcola $(A - 3I)^2 = 0$. È ovvio che scelto u_1^2 come autovettore di ordine massimo si ottiene u_1^1 mediante la (1.33). ■

1.11. Proprietà metriche degli spazi lineari e norme

Per lo studio dei sistemi dinamici è necessario dare agli insiemi, che caratterizzano l'evolversi delle grandezze dei fenomeni in esame, una struttura che tenga conto delle proprietà metriche. Tali proprietà verranno introdotte con riferimento alla struttura lineare. Le proprietà metriche che saranno esaminate sono di due tipi: la prima è legata al concetto di lunghezza di un vettore e viene trattata in questo paragrafo, la seconda, più ricca e complessa della precedente, è legata all'opportunità di introdurre in uno spazio lineare di tipo generale un concetto equivalente a quello di angolo tra le rette di un piano. L'esame di questa seconda proprietà è l'oggetto del prossimo paragrafo.

È noto come gran parte delle proprietà dei numeri reali hanno origine dal fatto che ad essi è intuitivamente associabile il concetto di distanza; questo a sua volta è derivato da quello più generale di valore assoluto.

Equivalente al concetto di valore assoluto per un numero reale è quello di norma di un vettore.

Definizione 17. Dato uno spazio vettoriale X_F si chiama *norma di un vettore* x di tale spazio una funzione $X \rightarrow \mathbb{R}$, il cui valore è indicato con $\|x\|$, tale che sia

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0, & \forall x \in X, \quad \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0, \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\|, & \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in F, \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\|, & \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

È facile rendersi conto che la norma così definita soddisfa tutti i requisiti che appaiono logicamente associati all'idea della "misura" di una lunghezza di un vettore. ■

Si intuisce come la generalità della definizione 17 sia tale da permettere l'introduzione di un gran numero di norme, onde appare naturale chiedersi se questa arbitrarietà possa creare degli inconvenienti. Qualora lo spazio X_F abbia dimensione finita, la risposta è negativa, nel senso che *tutte le norme definibili in uno spazio avente dimensione finita sono equivalenti*, cioè prese due norme qualsiasi $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_\beta$, esistono due numeri positivi k_1, k_2 tali che

$$k_1 \|x\|_\alpha < \|x\|_\beta < k_2 \|x\|_\alpha.$$

Il significato e l'utilità di questa equivalenza si possono capire dal seguente esempio.

Esempio 1.16. Data una successione di vettori x_n , si suol dire che questa successione converge in norma al vettore x se, scelta una norma $\|\cdot\|_\alpha$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\alpha = 0.$$

Se ci si trova in uno spazio avente dimensione finita, la convergenza, in virtù dell'equivalenza tra norme di cui si è detto, non dipende dalla particolare norma scelta, cioè si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\beta = 0$$

quale che sia la norma β . ■

Questo risultato consente di scegliere di volta in volta la norma più conveniente ai fini di una dimostrazione. Esempi di norme sono forniti nel seguito.

- a) Sia $x \in \mathbb{R}^n$ o \mathbb{C}^n con coordinate x_1, \dots, x_n rispetto ad una fissata alla base. Possibili scelte di norme per tale vettore sono:

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &:= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|x\|_p &:= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \|x\|_\infty &:= \max |x_i|.\end{aligned}$$

È semplice verificare che le funzioni così definite soddisfano alla definizione 17.

- b) Sia X lo spazio delle funzioni continue a valori reali definite nell'intervallo $[0, 1]$. Una norma per $x \in X$ è data da:

$$\|x\| := \max_{t \in [0,1]} |x|.$$

È immediato verificare la validità dei primi due assiomi della definizione 17. Per quanto riguarda il terzo assioma si ha:

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \max_{t \in [0,1]} |x + y| \leq \max_{t \in [0,1]} (|x| + |y|) \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} |x| + \max_{t \in [0,1]} |y| \leq \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

Lo spazio X dotato di tale norma è usualmente denotato con $C[0, 1]$.

- c) Sia X lo spazio delle sequenze limitate di numeri in \mathbb{R} o \mathbb{C} , cioè:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

e $|x_i| \leq M$ per ogni i . Una possibile norma per X è:

$$\|x\| := \sup_i |x_i|$$

come è immediato verificare.

- d) Sia X lo spazio delle funzioni limitate, a valori reali definite su $[0, 1]$. Una possibile norma per X è:

$$\|x\| := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

Si noti la differenza con le norme definite ai punti b) e c).

- e) Sia X lo spazio delle funzioni a valori reali su $[0, 1]$ con p -esima potenza integrabile su $[0, 1]$, cioè tali che:

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt$$

esista e sia finito ($p \geq 1$). Tale spazio X usualmente è denotato con $L_p[0, 1]$. Una possibile norma è:

$$\|x\| := \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

come non è difficile verificare.

In riferimento all'equivalenza tra norme e riferendosi alle norme del punto a), si noti che valgono le seguenti maggiorazioni:

$$\begin{aligned}\|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty,\end{aligned}$$

in cui appaiono esplicitamente le costanti k_1 e k_2 .

Fissata una norma in uno spazio lineare questa induce il concetto di *distanza tra vettori* nello spazio, proprio come il valore assoluto induce il concetto di distanza tra numeri reali. Se infatti $x, y \in X$, si definisce distanza tra x e y la quantità:

$$d(x, y) := \|x - y\|. \quad (1.34)$$

Come accennato in precedenza le proprietà metriche in un insieme sono legate al concetto di distanza. È la funzione distanza, infatti, che nel caso più generale viene introdotta a caratterizzare le proprietà metriche dello spazio. Nel caso in cui l'insieme sia dotato di una struttura lineare, la

distanza può essere dedotta a partire dalla norma tramite la (1.34). Si noti che per un insieme qualsiasi la (1.34) non ha senso.

Ricordando che le proprietà generali cui deve soddisfare una funzione distanza sono:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq 0, & \forall x, y \in X & \text{ con } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x, y) &= d(y, x) \\ d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) & (\text{disuguaglianza triangolare}) \end{aligned}$$

è facile verificare come queste siano soddisfatte dalla funzione introdotta con la (1.34).

Si osservi che in uno spazio lineare possono essere definite funzioni distanza *non generabili da norme*. Questo comunque trascende gli interessi della presente trattazione.

Con l'introduzione del concetto di distanza uno spazio lineare, già dotato di una struttura algebrica (quella lineare), acquista una *struttura geometrica*. Le seguenti definizioni, infatti, rendono conto della geometria introdotta.

Definizione 18. È detto *intorno sferico* di raggio r centrato in x_0 l'insieme $S_r(x_0)$ definito da:

$$S_r(x_0) := \{x : x \in X \text{ e } \|x - x_0\| < r\}. \quad (1.35)$$

Tale intorno è detto *chiuso* se la disuguaglianza nella (1.35) è verificata per $\|x - x_0\| \leq r$; altrimenti è detto *aperto*. ■

Definizione 19. Un insieme $A \subset X$ è detto *limitato* se è contenuto in un intorno sferico, cioè se esiste $x_0 \in X$ ed un numero positivo r tale che $A \subset \{x \mid \|x_0 - x\| < r\}$. ■

Definizione 20. Il vettore $x \in X$ è detto *punto limite di un insieme* $A \subset X$ se ogni intorno sferico aperto di x contiene almeno un punto di A eventualmente diverso da x stesso. ■

Poiché un punto limite di un insieme non è necessariamente nell'insieme, come risulta dalla definizione precedente (si pensi ad esempio all'intervallo $A = (0, 1)$ in \mathbb{R} , in cui 0 ed 1 non sono in A ma sono punti limite) è necessario introdurre la seguente definizione.

Definizione 21. Un insieme $A \subset X$ è detto *insieme chiuso* in X se contiene tutti i suoi punti limite. Un insieme $B \subset X$ è detto *insieme aperto* se il suo complemento $X - B$ è chiuso. ■

Poiché in uno spazio vettoriale è molto frequente lo studio di operatori lineari rappresentati da matrici, appare naturale anche per queste ultime definire delle norme.

La norma introdotta per un vettore x può essere allora utilizzata per definire anche una norma per una matrice A . In tal caso si parla di norma indotta. Per comprendere come ciò possa essere fatto, si osservi che, mentre non ha senso tentare di immaginare la “lunghezza” di una matrice così come si era fatto per un vettore, appare invece abbastanza intuitiva l'idea di un “allungamento” che una matrice può produrre quando trasforma un vettore. Anche se tale allungamento, in generale dipende dal vettore trasformato, ci sarà un vettore che viene “allungato” più degli altri. Si suole definire la norma di una matrice nella seguente maniera.

Definizione 22. Data una matrice $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ e scelta una norma $\|\cdot\|_\alpha$ in \mathbb{C}^n ed una $\|\cdot\|_\beta$ in \mathbb{C}^m , la *norma della matrice* A è il numero reale:

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\alpha} \quad (1.36) \quad \blacksquare$$

Dalla definizione 22 discende direttamente che

$$\|Ax\|_\beta < \|A\| \cdot \|x\|_\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Inoltre è possibile dimostrare che per qualunque coppia di matrici per cui le operazioni indicate abbiano senso, si ha

$$\begin{aligned} \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\|, \\ \|AB\| &\leq \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

Le norme comunemente utilizzate per le matrici A $m \times n$ ad elementi in \mathbb{C}^n dedotte rispettivamente da quelle del punto a) sono:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\text{massimo autovalore di } A^*A}, \\ \|A\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \end{aligned}$$

in cui con “ $*$ ” si è indicato il coniugato trasposto.

Alcune proprietà utili sono di seguito riportate:

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &\leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1, \\ \|AB\|_p &\leq \|A\|_p \|B\|_p.\end{aligned}$$

1.12. Prodotto interno

Abbiamo visto come introducendo la norma di uno spazio lineare lo spazio risulta dotato di una struttura geometrica. Tale struttura geometrica risulta insufficiente in molti casi, in particolare quando lo spazio ha dimensione infinita. Tale difficoltà può essere superata introducendo l'operazione di prodotto interno tra vettori dello spazio. La breve trattazione che segue, che vuole essere solo introduttiva al problema e che conduce nel caso più generale alla definizione di spazio di Hilbert, è limitata alle n -uple di numeri in \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n .

Definizione 23. Si definisce *prodotto interno* (x, y) con x ed $y \in \mathbb{C}^n$ l'operazione:

$$(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i^*,$$

dove y_i^* rappresenta il complesso coniugato di y_i . ■

Lo spazio \mathbb{R}^n dotato di prodotto interno è detto *spazio euclideo*. Se $y = x$ si ha:

$$(x, x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (1.37)$$

che è il quadrato della norma $\|x\|_2$. Tale norma è quindi generabile a partire da un prodotto interno.

Alcune proprietà di interesse, deducibili facilmente dalle definizioni stesse di prodotto interno sono le seguenti:

$$\begin{aligned}(x, y) &= (y, x)^*, \\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) &= \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y), \\ (x, \alpha y) &= \alpha^* (x, y).\end{aligned}$$

ove “ $*$ ” indica il coniugato trasposto. Sulle basi di tali proprietà non è difficile dimostrare che vale la seguente *diseguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

dove la norma è quella generata dal prodotto interno.

La rilevanza dell'introduzione del prodotto interno è legata al fatto che a partire da esso è possibile introdurre la nozione di ortogonalità tra vettori e base ortonormale che a loro volta assicurano l'esistenza ed unicità della decomposizione di un vettore nella somma di altri due. A tal fine, e con riferimento allo spazio \mathbb{C}^n , si introducono le seguenti definizioni.

Definizione 24. Due vettori x ed y di \mathbb{C}^n sono detti *vettori ortogonali* se risulta $(x, y) = 0$. ■

Definizione 25. Una base $\{e_i\}$ in \mathbb{C}^n è detta *base ortogonale* se $(e_{i_1}, e_{i_2}) = 0$, $\forall i_1 \neq i_2$. Se inoltre, $\|e_i\| = 1$, $\forall i$ allora la base è *ortonormale*. ■

Ad esempio in \mathbb{R}^n la base costituita dai vettori

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-esima componente}$$

è ortonormale. Essa è anche detta *base canonica*.

In uno spazio vettoriale a dimensione finita è sempre possibile costruire una base ortonormale utilizzando una procedura detta *procedura di ortonormalizzazione di Gram-Schmit*. Siano e_1, \dots, e_n i vettori di una base di X . Una base *ortonormale* è ottenibile nella seguente maniera:

$$\begin{aligned}g_1 &= \frac{e_1}{\|e_1\|}, \\ g_2 &= \frac{e_2 - (e_2, g_1)g_1}{\|e_2 - (e_2, g_1)g_1\|}, \\ &\vdots \\ g_i &= \frac{e_i - \sum_{k=1}^{i-1} (e_i, g_k)g_k}{\|e_i - \sum_{k=1}^{i-1} (e_i, g_k)g_k\|}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Si può verificare che g_i è ortogonale a g_k per ogni $k < i$ e che $\{g_1, \dots, g_n\}$ genera lo stesso sottospazio generato da $\{e_1, \dots, e_n\}$.

È facile dimostrare che vale il seguente risultato.

Teorema 11. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale in \mathbb{C}^n (o \mathbb{R}^n) e se $x = \sum_{i=1}^{c_i} e_i$ allora $c_i = (x, e_i)$. \square

Sia ora W un sottospazio di dimensione $k < n$ di \mathbb{C}^n (o \mathbb{R}^n). Scelta una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormale tale che i primi k vettori siano vettori generatori di W , si denoti con W^\perp (W perpendicolare) il sottospazio generato da $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$. Ovviamente per $\forall x \in W$ e $y \in W^\perp$ risulta $(x, y) = 0$. Se ora $z \in \mathbb{C}^n$ (o \mathbb{R}^n) è un generico vettore, esistono due vettori $x \in W$ e $y \in W^\perp$ tali che $z = x + y$, e tale scelta è unica, risultando $W \oplus W^\perp = \mathbb{C}^n$ (o \mathbb{R}^n). I vettori x ed y sono detti *proiezione* rispettivamente di z su W e W^\perp .

1.13. Proprietà delle matrici

Nel seguito sono riportate alcune proprietà utili nei calcoli in cui vengono utilizzate le matrici.

1.13.a. Proprietà generali

P. 13.1. Per le matrici vale la proprietà distributiva (destra e sinistra) del prodotto rispetto alla somma e quella associativa del prodotto:

$$(A + B)C = AC + BC, \quad C(A + B) = CA + CB, \quad (AB)C = A(BC).$$

P. 13.2. La trasposta di una matrice trasposta è la matrice di partenza $(A^T)^T = A$. Inoltre risulta: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

P. 13.3. La matrice inversa di una matrice quadrata A , se esiste, è unica. Per l'inversa di matrici, prodotto di due matrici, vale la relazione: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, e infine, la matrice A^{-h} viene definita come $A^{-h} = (A^{-1})^h$.

P. 13.4. Date due matrici quadrate A e B (per cui ha senso considerare sia AB che BA) è facile vedere che

$$\det(AB) = \det A \det B = \det(BA).$$

Inoltre il determinante di una trasposta è pari al determinante della matrice di partenza: $\det A = \det A^T$.

P. 13.5. Data una matrice A $n \times n$, considerando la matrice B ottenuta da essa permutando h volte le sue righe o le sue colonne, si ha:

$$\det B = (-1)^h \det A.$$

P. 13.6. Se la matrice A $n \times n$ ha due righe o colonne uguali o proporzionali, oppure combinazioni lineari di altre righe o colonne, oppure una riga o colonna nulla, allora $\det A = 0$.

P. 13.7. Se in una matrice A $n \times n$ si moltiplicano gli elementi di una stessa riga o colonna per un numero λ , si ottiene una matrice B tale che:

$$\det B = \lambda \det A.$$

In particolare se gli elementi di una stessa riga o colonna hanno un fattore comune λ , esso può essere portato fuori del determinante. Inoltre:

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

P. 13.8. Se la matrice A $n \times n$ è triangolare, il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Se invece A ha tutti nulli gli elementi situati da una parte della diagonale secondaria, il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della diagonale secondaria moltiplicato per $(-1)^{n(n-1)/2}$.

P. 13.9. Se nella matrice A $n \times n$ esiste una riga o colonna i cui elementi sono dati dalla somma di p termini, il suo determinante è pari alla somma dei determinanti delle p matrici ottenute da A considerando, al posto di tale riga o colonna, i primi, i secondi, \dots , i p -esimi addendi. Da questo e dalla proprietà P. 13.6 si deduce che se B è una matrice ottenuta da A sommando ad una sua riga o colonna una combinazione lineare di altre sue righe o colonne, allora:

$$\det B = \det A.$$

P. 13.10. Il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di una matrice A ha coefficienti $a_i = (-1)^i s_i$, ove s_i sono le somme di tutti i minori principali di ordine i :

$$p(\lambda) = \lambda^n - s_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} \lambda + (-1)^n s_n.$$

Ad esempio, per $n = 3$:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

P. 13.11. Una matrice si dice *hermitiana* se $A^* = A$, ove il simbolo “ $*$ ” indica la matrice coniugata trasposta. Ovviamente gli elementi della diagonale principale devono essere tutti reali. In particolare se tutti gli elementi sono reali, la matrice è simmetrica. Poiché poi $A^T = \bar{A}$, ed essendo $\det A^T = \det A$ e $\det \bar{A} = \overline{\det A}$, si ha:

$$\det A = \overline{\det A},$$

e quindi il determinante di una matrice hermitiana è sempre *reale*. Una matrice A $n \times n$ si dice *antihermitiana* se $A^* = -A$. Se A è una matrice hermitiana, in particolare se è simmetrica quando i suoi elementi sono reali, il suo polinomio caratteristico è a coefficienti reali e i suoi autovalori sono tutti reali. Se A è una generica matrice non quadrata $m \times n$, allora AA^T è una matrice simmetrica e AA^* è una matrice hermitiana.

P. 13.12. Se A è una generica matrice quadrata $n \times n$, allora $\frac{A+A^T}{2}$ è una matrice hermitiana, ovvero simmetrica se A è a valori reali.

P. 13.13. Una matrice si dice *antisimmetrica* o *emisimmetrica* se $A^T = -A$. Ovviamente gli elementi della diagonale principale devono essere tutti nulli. Da $A^T = -A$ e dalla proprietà P. 13.7 ne segue che:

$$\det A = (-1)^n \det A.$$

Questa è una identità se n è pari; se n è dispari permette di dire che il determinante di una matrice antisimmetrica di ordine dispari è sempre nullo. Infine gli autovalori di una matrice antisimmetrica sono tutti puramente immaginari coniugati.

P. 13.14. Se A $n \times n$ è antisimmetrica e v è un generico vettore, allora Av è ortogonale a v . Infatti: $Av = -A^T v$ e

$$v^T Av = -v^T A^T v = -(Av)^T v = -v^T Av,$$

per cui $v^T Av = 0$, che esprime l'ortogonalità tra v e Av .

P. 13.15. Una matrice si dice *ortogonale* se $A^{-1} = A^T$. Ovviamente deve essere $\det A \neq 0$. Poiché poi $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ e $\det A^T = \det A$, allora:

$$\det A^{-1} = \det A^T \Rightarrow (\det A)^{-1} = \det A,$$

e quindi:

$$(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1.$$

P. 13.16. Una matrice si dice *idempotente* se $A^2 = A$. Si dice poi *nilpotente di indice q* se $A^q = 0$, mentre $A^{q-1} \neq 0$.

P. 13.17. Una matrice A $n \times n$ si dice *definita positiva* ($A > 0$) se per la corrispondente forma quadratica risulta $x^T Ax > 0$, $\forall x \neq 0$. È detta *semidefinita positiva* ($A \geq 0$) se invece per la forma quadratica si ha $x^T Ax \geq 0$, $\forall x$. Non è limitativo supporre A simmetrica, perché se non lo fosse basta sostituirla con $\frac{(A+A^T)}{2}$, che è simmetrica. Infatti $x^T Ax = \frac{x^T(A+A^T)x}{2}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice *simmetrica* A sia definita positiva è che abbia tutti i suoi autovalori strettamente maggiori di zero, ovvero che tutti gli n minori principali *consecutivi* siano strettamente positivi. È ovvio dunque che una matrice definita positiva è sempre invertibile. Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice *simmetrica* A sia semidefinita positiva è che abbia tutti i suoi autovalori maggiori o uguali a zero, ovvero che tutti i suoi $2^n - 1$ minori principali siano maggiori o uguali a zero.

P. 13.18. Se A $n \times n$ è definita positiva e v è un generico vettore, allora Av non è ortogonale a v ed è ruotato rispetto a v di un angolo minore o uguale a $\frac{\pi}{2}$. Infatti, essendo definita positiva: $v^T Av > 0$. Se A è invece semidefinita positiva, allora $v^T Av \geq 0$ e dunque la rotazione è, al più, di $\frac{\pi}{2}$.

P. 13.19. Date due matrici A $m \times n$, B $n \times p$, allora $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$, a meno che B sia non singolare, nel qual caso $\text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$. Inoltre vale la *disuguaglianza di Sylvester*:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}.$$

1.13.b. Inversione di matrici

L'inversa di una matrice non singolare A può essere calcolata a partire dalla formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^a)^T$$

ove A^a indica la matrice aggiunta, ossia la matrice ottenibile trasponendo la matrice che ha per elementi i complementi algebrici degli elementi corrispondenti. Il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} , ad esempio, è dato dal minore ij , ottenuto da A eliminando la riga i e la colonna j , calcolando il determinante della matrice così ottenuta e moltiplicandolo per $(-1)^{i+j}$.

Vi sono però altri metodi di calcolo, riportati nel seguito, che a seconda della complessità della matrice A , possono essere utilizzati in alternativa.

P. 13.20. Se A è una matrice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

l'inversa si ottiene invertendo di posto gli elementi della diagonale principale ed invertendo di segno quelli dell'antidiagonale, dividendo gli elementi per il determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

P. 13.21. Sia A una matrice non singolare e $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ il suo polinomio caratteristico. Allora la sua inversa è calcolabile nella seguente maniera. Per il teorema di Cayley–Hamilton:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0,$$

e dunque

$$-\frac{1}{a_0}A(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I) = I.$$

Si deduce pertanto che

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I).$$

P. 13.22. Un altro metodo di calcolo dell'inversa fa uso delle matrici che operano le cosiddette *trasformazioni elementari*, quali lo scambio di colonne e/o righe e la combinazione lineare di colonne e/o righe. Infatti lo scambio tra due righe di A si può eseguire *premultiplicando* A per la matrice identità sulla quale siano state effettuate la medesima operazione, mentre la combinazione di una riga moltiplicata per una costante con un'altra riga di A può essere eseguita *premultiplicando* A per la matrice identità sulla quale sia stata eseguita la stessa operazione. Queste stesse operazioni possono essere effettuate sulle colonne di A *postmultiplicando* per la matrice identità sulle cui colonne siano state eseguite le stesse operazioni.

Le matrici identità così ottenute sono dette *matrici trasformanti elementari*. Esse sono immediatamente invertibili. Infatti le matrici trasformanti T che operano scambi di righe o colonne sono ortogonali (proprietà P. 13.15), mentre quelle che operano combinazioni tra righe o colonne sono facilmente invertibili, come si vede dai seguenti esempi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando allora operazioni elementari successive sulle righe (o sulle colonne) di A , mediante la premoltiplicazione ovvero la postmoltiplicazione per delle trasformanti elementari T_1, T_2, \dots, T_q , si ottiene:

$$T_q T_{q-1} \dots T_2 T_1 A = I, \quad \text{ovvero} \quad A T_1 T_2 \dots T_{q-1} T_q = I_{n \times n},$$

per cui:

$$A^{-1} = T_q T_{q-1} \dots T_2 T_1, \quad \text{ovvero} \quad A^{-1} = T_1 T_2 \dots T_{q-1} T_q.$$

Esempio 1.17. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Operando in modo da ridurre le

colonne ad essere quelle di una matrice identità, si ha:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_2 T_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_3 T_2 T_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_4 T_3 T_2 T_1 A = I,$$

per cui $A^{-1} = T_4 T_3 T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ■

Le matrici elementari consentono anche il calcolo delle immagini e dei nuclei di una matrice. Ad esempio se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, usando le matrici trasformanti elementari in modo da trasformare A in triangolare inferiore:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AT_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow AT_1 T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \hat{A},$$

e notando che, essendo state compiute solo combinazioni lineari tra colonne di A , l'immagine di A e quella di \hat{A} coincidono, allora $\mathcal{R}(A)$ è il sottospazio che ha per base le prime due colonne di \hat{A} :

$$\mathcal{R}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per il nullo $\mathcal{N}(A)$ si osservi che, posto $y = T_1 T_2 x$:

$$\hat{A}x = AT_1 T_2 x = Ay = 0.$$

Ma $\mathcal{N}(\hat{A}) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e poiché $y = T_1 T_2 x$ si ha:

$$\mathcal{N}(A) = \text{gen} \left\{ T_1 T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

P. 13.23. Se A , matrice $m \times n$ con $m > n$ ha rango pieno, pari ad n , allora la matrice $A^T A$, di dimensioni $n \times n$, è non singolare. Quindi data una matrice non quadrata è talvolta possibile introdurre una matrice, detta *pseudoinversa sinistra* di A e pari a

$$A^{\#s} = (A^T A)^{-1} A^T$$

tale che $A^{\#s} A = I_{n \times n}$. Analogamente se $n > m$ ed A ha rango pieno, allora esiste la *pseudoinversa destra* di A data da:

$$A^{\#d} = A^T (A A^T)^{-1},$$

tale che $A A^{\#d} = I_{m \times m}$.

P. 13.24. Se A è una matrice non singolare e u, v sono vettori, e se $(A + uv^T)$ è non singolare, allora per l'inversa vale la formula:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

Si noti che il rango della matrice uv^T è pari alla dimensione interna, ossia è pari ad 1. Questa formula mostra dunque che l'inversa della matrice A sommata ad una matrice di rango 1 è ottenibile modificando leggermente l'inversa A^{-1} .

1.13.c. Matrici a blocchi

Riguardo alle matrici a blocchi si notino le seguenti proprietà.

P. 13.25. Le operazioni tra matrici partizionate a blocchi vanno fatte ricordandosi che il prodotto tra matrici non è commutativo. Quindi ad esempio:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix}.$$

P. 13.26. Data una matrice triangolare, ad esempio inferiore, il determinante è pari al prodotto dei determinanti delle matrici (quadrate) che appaiono sulla diagonale principale. Infatti:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C^{-1}B & I \end{pmatrix},$$

per cui

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det A \det C.$$

Dunque tale matrice è invertibile se e solo se A e C lo sono, e l'espressione dell'inversa è:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Analogamente:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C,$$

per cui sotto le stesse condizioni esiste l'inversa della matrice triangolare superiore, data da:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Si noti in particolare la forma delle seguenti matrici inverse:

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix}.$$

Si confrontino queste espressioni con quelle date per le matrici trasformanti elementari (proprietà P. 13.22).

Infine:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & A \\ C & B \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} B & A \\ C & 0 \end{pmatrix} = \det A \det C, \\ \begin{pmatrix} 0 & A \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} B & A \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

come è ovvio in quanto tali matrici sono riconducibili alle precedenti mediante la postmoltiplicazione per la matrice (invertibile) $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

P. 13.27. Si consideri la seguente matrice partizionata a blocchi

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Se la matrice A è non singolare si trova che

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

Infatti:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

e dunque vale la relazione vista. Più facilmente ancora, il risultato può essere dimostrato notando che basta sottrarre dalla seconda riga la prima premoltiplicata per CA^{-1} , ottenendo la matrice triangolare a blocchi

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

il cui determinante è uguale a quello della matrice di partenza per la proprietà P. 13.9.

Dunque perché M sia invertibile è sufficiente che A e $\Delta_1 = D - CA^{-1}B$ lo siano.^(1.11) Per calcolarne l'inversa basta risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{ossia :} \quad \begin{cases} Ax_1 + Bx_2 = y_1 \\ Cx_1 + Dx_2 = y_2 \end{cases}$$

^(1.11) È chiaro che se è già nota l'invertibilità di M , perché valgano le formule che seguono è sufficiente verificare solo l'invertibilità di A , poiché $\det \Delta_1 = \det M / \det A$.

in termini di x_1 e x_2 . Avendo supposto l'esistenza di A^{-1} :

$$x_1 = -A^{-1}Bx_2 + A^{-1}y_1,$$

che sostituita nella seconda equazione dà:

$$\Delta_1 x_2 = -CA^{-1}y_1 + y_2.$$

Avendo supposto anche l'esistenza di Δ_1^{-1} si ricava x_2 , e quindi x_1 , ottenendo così:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\Delta_1^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\Delta_1^{-1} \\ -\Delta_1^{-1}CA^{-1} & \Delta_1^{-1} \end{pmatrix},$$

la quale esiste se A e Δ_1 sono invertibili. Come detto queste sono condizioni sufficienti per l'invertibilità di M ; in effetti la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ non ha A invertibile, ma la sua inversa esiste ed è uguale alla matrice stessa.

Analogamente se D è invertibile:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D \det(A - BD^{-1}C),$$

come si può vedere sottraendo dalla prima riga la seconda premoltiplicata per BD^{-1} , ottenendo la matrice triangolare a blocchi

$$\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Dunque se esiste D^{-1} e l'inversa di $\Delta_2 = A - BD^{-1}C$ in maniera analoga si calcola:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_2^{-1} & -\Delta_2^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C\Delta_2^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C\Delta_2^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}.$$

Queste sono dette *formule di inversione di Schur*. Si noti che poiché le due inverse coincidono deve valere la seguente relazione:

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}.$$

Essa ha molte applicazioni, specialmente nella forma:

$$[I + C(sI - A)^{-1}B]^{-1} = I - C(sI - A + BC)^{-1}B,$$

ottenuta sostituendo ad A, B, C, D le matrici $I, -C, B$ e $sI - A$.

Un'altra applicazione di queste relazioni è la seguente. Se A, B, C, D , sono matrici $n \times n, n \times 1, 1 \times n, 1 \times 1$, si ha:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{vmatrix} &= |sI - A| |D + C(sI - A)^{-1}B| = \\ &= |sI - A| (D + C(sI - A)^{-1}B), \end{aligned}$$

in quanto la quantità a secondo membro è uno scalare. Indicatala con $W(s)$ si ottiene:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\begin{vmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{vmatrix}}{|sI - A|}.$$

P. 13.28. Se A è una matrice $n \times m$ e B una matrice $m \times n$, allora non è più vero che $\det(AB) = \det(BA)$ (cfr. proprietà P. 13.4). Però vale la formula:

$$\det(I_{m \times m} - AB) = \det(I_{n \times n} - BA)$$

poiché considerata la matrice $\begin{pmatrix} I_{n \times n} & A \\ B & I_{m \times m} \end{pmatrix}$ e la proprietà P. 13.27 vale:

$$\det \begin{pmatrix} I_{n \times n} & A \\ B & I_{m \times m} \end{pmatrix} = \det(I_{m \times m} - AB) = \det(I_{n \times n} - BA).$$

1.14. Esercizi e problemi

Esercizio 1.1. Trovare tra i seguenti insiemi di vettori quelli linearmente indipendenti su \mathbb{R} :

$$a) \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$b) \begin{pmatrix} 1+j \\ 2+3j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10+2j \\ 4-j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j \\ 3 \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} 28 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 54 \\ -73 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 81 \\ 37 \end{pmatrix};$$

Soluzione. I vettori risultano: a) e c) tutti linearmente indipendenti; b) e d) qualsiasi due vettori sono indipendenti, ad esempio i primi due.

Esercizio 1.2. Riferendosi all'esercizio 1.1 esprimere, se possibile, il vettore $v_1 = (10 \ 13 \ 32)^T$ come combinazione lineare dei vettori del punto c) ed il vettore $v_2 = (1 \ 0)^T$ come combinazione lineare su \mathbb{R} e \mathbb{C} dei vettori del punto b).

Soluzione. La rappresentazione di v_1 è pari a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} v_1 = \begin{pmatrix} 35 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix}$, mentre quella di v_2 è ottenibile solo su \mathbb{C} ed è data, in termini del primo e del terzo (scelti per semplicità di calcolo) da $\begin{pmatrix} 1+j & -j \\ 2+3j & 3 \end{pmatrix}^{-1} v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}j \\ -\frac{3}{5} + \frac{2}{5}j \end{pmatrix}$.

Esercizio 1.3. Considerato lo spazio vettoriale, di dimensione $n+1$, costituito dall'insieme dei polinomi a coefficienti complessi di grado non maggiore di n su \mathbb{C} , con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione, e fissata la base:

$$v_1 = t^2 + t + 1, \quad v_2 = t + 2, \quad v_3 = 3t - 2,$$

si determini la matrice che rappresenta il cambiamento di base quando la nuova base è costituita dai vettori: a) $\{v_2, v_3, v_1\}$; b) $\{v_3, v_1, v_2\}$; c) $\{v_1, v_2, v_3\}$; d) $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$; e) $\{e_1 = t^2, e_2 = t, e_3 = 1\}$.

Soluzione. Si ha:

$$a) T_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) T_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e) T_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

e $T_c = I_{3 \times 3}$, mentre per il caso d) si ha:

$$T_d^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_d = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.4. Si determinino gli autovalori e le rappresentazioni degli autovettori per le seguenti matrici:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, & A_4 &= \begin{pmatrix} 1+j & 0 & 0 \\ 1 & 1-j & 0 \\ -1 & j & 1 \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, & A_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluzione. Si ha nei sei casi proposti:

1) matrice A_1 :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}j, \quad u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{2,3} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \mp \frac{\sqrt{7}}{4}j \\ \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}j \\ 1 \end{pmatrix};$$

2) matrice A_2 : è una matrice diagonale, per cui gli autovalori coincidono con gli elementi della diagonale principale ($\lambda = 1$ con molteplicità tre), con:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

3) matrice A_3 : è una matrice triangolare, con la sotto-matrice in posizione (1,1) triangolare, per cui gli autovalori coincidono con gli elementi della diagonale principale

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

4) matrice A_4 : è anch'essa una matrice triangolare per cui:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + j, \\ \lambda_2 &= 1 - j, \\ \lambda_3 &= 1, \end{aligned} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2j \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

5) matrice A_5 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_2 &= 2, \\ \lambda_3 &= 2, \end{aligned} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

6) matrice A_6 : è la trasposta di A_3 per cui gli autovalori sono gli stessi, ma non gli autovettori, che risultano essere:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.5. Si determinino gli autovalori, le rappresentazioni degli autovettori e le trasformazioni che mettono nella forma canonica di Jordan le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare inoltre i rispettivi polinomi minimi.

Soluzione. La matrice A_1 ha l'autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica tre. Infatti $A_1 - \lambda I$ ha nullità 1, e dunque c'è solo una catena di autovettori, che quindi deve avere lunghezza tre. Pertanto dovrà essere:

$$T_1 A_1 T_1^{-1} = J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con T_1 da costruire. Poiché:

$$A_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -7 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

si trova:

$$u_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_1^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Infine con

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

La molteplicità geometrica di λ è dunque 3 e il polinomio minimo è $m_1(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. Si noti che non è stato necessario calcolare $T_1 A_1 T_1^{-1}$: la struttura di J_1 è stata infatti immediatamente dedotta dal fatto che si ha un solo autovalore, con una sola catena di autovettori.

Anche la matrice A_2 ha l'autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica tre, ma

$$A_2 - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha nullità 2 per cui la molteplicità geometrica di λ non può che essere $m = 2$. Dunque ci sono due catene di autovettori di lunghezze 2 ed 1, e quindi:

$$T_2 A_2 T_2^{-1} = J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio minimo in questo caso è dunque $m_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Inoltre si ha:

$$u_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

per cui

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anche qui si nota che i calcoli non sono necessari, se non per verifica: la struttura di J_2 infatti discende dal fatto che si ha un solo autovalore con due catene di autovettori.

Esercizio 1.6. Si determini la forma canonica di Jordan dell'operatore rappresentato dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Essendo A triangolare, si trova $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, entrambi con molteplicità due. Essendo $\varrho(A - \lambda_i I) = 3$ si ha $m_i = 2$, e risulterà ovviamente:

$$TAT^{-1} = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Volendo poi calcolare la trasformazione T , occorre determinare gli autovettori generalizzati fino all'ordine 2. Si trova che:

$$u_1^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(si poteva anche considerare $u_1^2 = (8 \quad -2 \quad -1 \quad -1)^T$), e

$$u_2^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(si poteva anche considerare $u_2^2 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T$). Dunque:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1.7. Dimostrare il teorema di Cayley-Hamilton.

Soluzione. Poiché $(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{p(\lambda)} \left((\lambda I - A)^a \right)^T = \frac{1}{p(\lambda)} \left(N_{n-1} \lambda^{n-1} + N_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + N_1 \lambda + N_0 \right)$, si ha:

$$\begin{aligned} p(\lambda)I &= (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0)I = \\ &= (\lambda I - A) \left(N_{n-1} \lambda^{n-1} + N_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + N_1 \lambda + N_0 \right) = \\ &= N_{n-1} \lambda^n + \left(N_{n-2} - AN_{n-1} \right) \lambda^{n-1} + \dots \\ &\quad + \left(N_1 - AN_2 \right) \lambda^2 + \left(N_0 - AN_1 \right) \lambda - AN_0. \end{aligned}$$

Uguagliando membro a membro e sommando le relazioni così trovate, si prova che $p(A) = 0$.

Esercizio 1.8. Mostrare che se u è un autovettore di A associato all'autovalore λ allora esso è anche un autovettore di $(sI - A)^{-1}$ associato all'autovalore $\frac{1}{s - \lambda}$, essendo $s \notin \sigma(A)$.

Soluzione. Sottraendo la quantità $s u$ ad ambo i membri di $Au = \lambda u$, si ha:

$$(sI - A)u = (s - \lambda)u$$

(sicché u è anche autovettore di $sI - A$ associato all'autovalore $s - \lambda$) e poiché $s \notin \sigma(A)$ esistono sia $(sI - A)^{-1}$ che $(s - \lambda)^{-1}$:

$$(sI - A)^{-1}u = \frac{1}{s - \lambda}u.$$

Si noti che $(s - \lambda)^{-1}$ è proprio un autovalore di $(sI - A)^{-1}$ in quanto:

$$(sI - A)^{-1} - \frac{1}{s - \lambda}I = \frac{(sI - A)^{-1}}{s - \lambda} \left((s - \lambda)I - (sI - A) \right) = \frac{(sI - A)^{-1}}{s - \lambda} (A - \lambda I)$$

ha rango minore di n .

Problema 1.1. Dimostrare che l'insieme delle matrici $m \times n$ ad elementi appartenenti ad un corpo F , forma uno spazio vettoriale su F rispetto alle operazioni di addizione tra matrici e di moltiplicazione di una matrice per uno scalare.

Problema 1.2. Dimostrare che l'insieme di funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue a tratti forma uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (ed è un esempio di *spazio funzionale*) con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione.

Problema 1.3. Definire delle operazioni sull'insieme $\{0, 1\}$ in modo che abbia la struttura di un corpo. Verificare quindi che esso forma uno spazio vettoriale su se stesso. Usare le usuali operazioni di somma e moltiplicazione.

Problema 1.4. Si dimostri che l'insieme dei polinomi a coefficienti complessi di grado non maggiore di n forma uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ su \mathbb{C} con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione.

Problema 1.5. Si dimostri che lo spazio vettoriale (\mathbb{C}, \mathbb{R}) con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione ha dimensione due.

Problema 1.6. Verificare che l'insieme delle funzioni continue periodiche di periodo T assegnato, con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione, forma uno spazio vettoriale di dimensione infinita su \mathbb{R} . Dimostrare che una base per tale spazio è costituita dalle funzioni $\varphi_n(t) = \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi_n\right)$, $n = 1, 2, \dots$.

Problema 1.7. Si determinino autovalori ed autovettori dell'operatore lineare che associa ad ogni punto del piano il suo simmetrico rispetto ad una prefissata retta r per l'origine. Scelta come base quella canonica, sia $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ il vettore che individua r . Si determini, rispetto a tale base, la rappresentazione dell'operatore.

Problema 1.8. Si determinino tutte le possibili rappresentazioni dell'operatore identità.

Problema 1.9. Si determinino autovalori ed autovettori dell'operatore che ad ogni ellisse di centro nell'origine e semiassi a e b fa corrispondere l'ellisse di centro nell'origine e semiassi b ed a .

Problema 1.10. Nello spazio vettoriale del problema 1.4, con $n = 2$, si determinino autovalori, autovettori e rappresentazioni rispetto alla base $\{t^2, t, 1\}$ dell'operatore che ad ogni polinomio associa la sua derivata. Si determinino anche immagini e nucleo di tale operatore e si verifichino i risultati sulla rappresentazione trovata. Si estenda quanto detto per n qualsiasi.

Problema 1.11. Nello spazio vettoriale costituito dai polinomi a coefficienti complessi di grado qualsiasi (sul campo \mathbb{C} e con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione), si trovi la rappresentazione dell'operatore derivazione rispetto alla base $\{t^k, k = 1, 2, \dots\}$. Si noti che la matrice così ottenuta ha dimensioni infinite.

Problema 1.12. Si determini una rappresentazione dell'operatore $f: (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ che associa ad ogni terna di numeri reali la coppia formata dal primo e dal terzo di tali numeri.

Problema 1.13. Si determini la rappresentazione dell'operatore che associa ad una n -pla di numeri complessi un polinomio di grado $n - 1$ avente gli elementi di tale n -pla come coefficienti.

Problema 1.14. Si determini la rappresentazione dell'operatore che associa ad una n -pla di numeri reali la loro somma.

Problema 1.15. L'operatore che associa ad una n -pla di numeri complessi un polinomio avente tali numeri come radici è lineare? Perché?

2. Rappresentazioni con lo stato di sistemi da diverse discipline

Le tecniche di analisi delle proprietà di un sistema astratto orientato, tipiche della Teoria dei Sistemi, si basano sulla conoscenza di un modello matematico che descriva adeguatamente il comportamento del sistema stesso. L'adeguatezza di un modello dipende dall'utilizzo che se ne vuol fare, e rappresenta un *compromesso* tra una completa ed accurata descrizione dei fenomeni, principi fisici o leggi matematiche che *caratterizzano* il sistema, e la sinteticità ed approssimazione necessarie perché il modello risulti adatto dal punto di vista computazionale e dal punto di vista dell'applicabilità delle tecniche di analisi. Il *vantaggio* di usare un modello è che si possono utilizzare tecniche basate sulla matematica per l'analisi delle proprietà che sono del sistema.

Un modello matematico deve quindi riassumere le caratteristiche salienti del fenomeno fisico che rappresenta. La descrizione di un sistema mediante un modello sfrutta le relazioni matematiche che si possono stabilire tra le grandezze scelte per fornire una descrizione del comportamento del sistema stesso.

Pur dovendo osservare che un modello matematico è sempre una rappresentazione approssimata della realtà, essendo complessi i fenomeni che governano il comportamento nel tempo dei sistemi reali, con riferimento alle diverse esigenze possiamo distinguere tra modelli orientati alla comprensione e modelli orientati alla riproduzione “in vitro” del sistema reale (simulazione).

La prima delle esigenze citate dovrà condurre alla formulazione di un

modello che catturi le principali caratteristiche del fenomeno e ben ne rappresenti, da un punto di vista complessivo, i principi di funzionamento; si tratta di un modello spesso semplice, adatto a fornire una descrizione concettuale qualitativa; l'applicazione ad esso delle tecniche della Teoria dei Sistemi potrà fornire indicazioni di carattere concettuale sul comportamento migliorando, eventualmente, il livello di conoscenza del settore specifico. La citata semplicità del modello si concreta in una descrizione mediante un numero ridotto di equazioni differenziali lineari alle derivate totali. La seconda esigenza citata, particolarmente utile quando si devono verificare delle proprietà di un sistema complesso o costoso ovvero di cui non si conosce ancora l'affidabilità in termini di sicurezza, comporta la messa a punto di un modello fedele della realtà. Le *simulazioni* su un modello matematico sono più vantaggiose della costruzione ed utilizzo di un prototipo del sistema, almeno nella prima fase di realizzazione del prototipo fisico. Il modello in tal caso deve ovviamente essere sufficientemente accurato e completo da inglobare al meglio le caratteristiche ed i fenomeni che lo definiscono. Questo tipo di modello ovviamente ha lo *svantaggio* di essere solitamente piuttosto complicato. Consta, molto spesso, di un sistema di equazioni differenziali non lineari ed eventualmente alle derivate parziali; ciò che corrisponde nel caso di un sistema fisico a non ignorare che i parametri dell'oggetto allo studio sono distribuiti nello spazio.

L'interesse nell'adozione della rappresentazione implicita con lo stato risiede nel fatto che nella quasi totalità dei casi essa è direttamente associabile ad un assegnato sistema fisico. Il problema modellistico si pone nelle due fasi di

- a) scelta delle variabili da assumere come stato del sistema;
- b) derivazione delle equazioni che rappresentano le dinamiche del fenomeno a partire dalla formulazione nelle variabili di stato delle leggi che governano il fenomeno.

Nel presente capitolo vengono presentati alcuni modelli matematici derivati da diversi campi di interesse. Nella determinazione dei modelli il lettore potrà notare come importanti sono la scelta delle variabili di stato e la scrittura delle equazioni che ne descrivono il comportamento. Inoltre potrà osservare come, nella grande maggioranza dei casi, si può pervenire ad una rappresentazione con lo stato lineare, stazionaria e a dimensione finita.

2.1. Modelli astratti di procedure di calcolo

2.1.a. Modello di un algoritmo di integrazione

Si consideri una semplice procedura di calcolo utilizzata per le operazioni di integrazione o di derivazione di funzioni continue, usualmente denominate integrazione numerica e derivazione numerica.

Per approssimare l'integrale o la derivata di una funzione a tempo continuo $u(t)$ è necessario convertirla in una forma consistente con le operazioni di calcolo numerico. Si suppone dunque di campionarla con un intervallo di campionamento T costante. Questa operazione viene effettuata da un dispositivo che prende il nome di convertitore analogico-digitale. Si ha così una sequenza di campioni, corrispondenti ai valori di $u(t)$ negli istanti di campionamento $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Si vuole ora definire un sistema a tempo discreto che abbia come ingresso la sequenza di campioni e che fornisca in uscita una sequenza di numeri che siano una buona approssimazione dell'integrale (o della derivata) della funzione $u(t)$ negli istanti di campionamento. L'accuratezza di tale approssimazione dipenderà dall'ampiezza dell'intervallo di campionamento T .

Per quanto riguarda l'integrazione, si supponga che si voglia calcolare:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Supponendo di fissare T e posto $t = kT$:

$$\begin{aligned} y(kT) &= \int_0^{kT-T} u(\tau) d\tau + \int_{kT-T}^{kT} u(\tau) d\tau \\ &= y(kT-T) + \int_{kT-T}^{kT} u(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

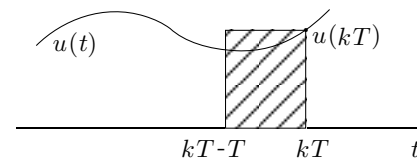


Figura 2.1 – Approssimazione dell'integrale

Figura 2.3 – Segnali trasmessi e ricevuti da un radar

Tali segnali possono essere così captati, indeboliti a causa dell'assorbimento da parte dell'aeromobile e della riflessione non direzionale. In condizioni ideali il segnale che si ripresenta in ricezione ha una forma impulsiva (figura 2.3). Se Δt è l'intervallo di tempo intercorso tra l'emissione del segnale incidente e la ricezione di quello riflesso ne segue che la distanza radar-aeromobile è (in metri):

$$u = c \frac{\Delta t}{2}.$$

Nella realtà, però, il segnale riflesso ha una forma diversa da quella impulsiva, che dipende dalle caratteristiche dell'aeromobile, dai livelli di rumore presenti, etc., e non è possibile valutare in modo diretto l'intervallo di tempo Δt . È quindi necessario mettere a punto un sistema che fornisca una stima, $\overline{\Delta t}$, di Δt . Indicando con \bar{u} e Δu rispettivamente la distanza stimata e l'errore di stima, si ha:

$$\bar{u} = c \frac{\overline{\Delta t}}{2}, \quad \Delta u = c \frac{(\overline{\Delta t} - \Delta t)}{2}.$$

Per ottenere una buona stima di Δt vengono fatte periodiche rilevazioni trasmettendo più impulsi distanti tra loro T secondi. Le misure $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, \dots così effettuate vengono fornite in ingresso ad una procedura di calcolo che fornisce una stima della distanza con la precisione desiderata. Poiché inoltre il sistema radar deve essere in grado di inseguire oggetti che si muovono ad alta velocità è necessario che a partire dalle rilevazioni suddette, la procedura di calcolo fornisca, non solo una buona stima della posizione presente ma anche una buona stima della velocità e posizione futura.

È possibile realizzare un sistema a tempo discreto che implementi una tale procedura. Si indichi a tal fine $u(k)$ la misura, affetta da rumore, della posizione dell'oggetto dedotta dal k -esimo impulso riflesso, $y(k)$ la stima della posizione al k -esimo impulso, dopo l'elaborazione, $\dot{y}(k)$ la stima della velocità dell'oggetto al k -esimo impulso, dopo l'elaborazione, $y_p(k)$ la predizione della posizione al k -esimo impulso dedotta dall'impulso $(k-1)$ -esimo, dopo l'elaborazione.

Se sono disponibili i valori stimati della posizione e della velocità al $(k-1)$ -esimo impulso radar, una predizione plausibile della posizione è:

$$y_p(k) = y(k-1) + T\dot{y}(k-1). \quad (2.3)$$

La successiva misura della posizione $u(k)$ rende poi possibile la stima secondo la seguente relazione:

$$y(k) = y_p(k) + \alpha[u(k) - y_p(k)], \quad (2.4)$$

nella quale si tiene conto dell'errore rilevato $u(k) - y_p(k)$, ed α è una costante positiva. La stima della velocità, infine, è data dalla stima:

$$\dot{y}(k) = \dot{y}(k-1) + \frac{\beta}{T}[u(k) - y_p(k)], \quad (2.5)$$

dove T è il periodo di trasmissione degli impulsi e $\beta > 0$.

Le relazioni (2.3)–(2.5) sono note come *equazioni di inseguimento α - β* (α - β tracker) e descrivono una procedura tipica nell'inseguimento radar. I parametri α e β possono essere selezionati in modo da garantire risposte con diverse caratteristiche. Sostituendo la (2.3) nelle (2.4) e (2.5) si ottiene, con semplici passaggi:

$$\begin{aligned} y(k) &= (1 - \alpha)y(k-1) + T(1 - \alpha)\dot{y}(k-1) + \alpha u(k) \\ \dot{y}(k) &= -\beta_k \dot{y}(k-1) + (1 - \beta)\dot{y}(k-1) + \beta_k u(k) \end{aligned} \quad (2.6)$$

e introducendo come variabili di stato:

$$x_1(k) = y(k-1)$$

$$x_2(k) = \dot{y}(k-1)$$

e sostituendo nelle (2.6) e (2.3), si ottiene:

$$x_1(k+1) = (1 - \alpha)x_1(k) + T(1 - \alpha)x_2(k) + \alpha u(k)$$

$$x_2(k+1) = -\frac{\beta}{T}x_1(k) + (1 - \beta)x_2(k) + \frac{\beta}{T}u(k)$$

$$y_p(k) = x_1(k) + Tx_2(k).$$

Esse costituiscono una *rappresentazione con lo stato, lineare, stazionaria, a dimensione finita, di un sistema a tempo discreto* della forma:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & T(1 - \alpha) \\ -\frac{\beta}{T} & 1 - \beta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\beta}{T} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & T(1 - \alpha) \\ -\frac{\beta}{T} & 1 - \beta \\ 1 & T \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\beta}{T} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.2. Modelli demografici e biologici

2.2.a. Modello di evoluzione per classi di età

I modelli di popolazione sono usati nella pianificazione, nell'analisi e nella previsione della struttura demografica della popolazione di una certa area ad un certo tempo prefissato, a partire da una distribuzione nota di tale popolazione, sulla base di determinate assunzioni sul numero delle nascite e di decessi che avranno luogo durante ciascun periodo, e degli effetti dell'emigrazione sull'area considerata.

Verrà qui derivato un modello fondamentale di sopravvivenza, basato sul concetto di classi di età. Tale modello, sviluppato per analizzare l'aumento naturale della popolazione, può essere generalizzato in modo da tenere conto degli effetti della migrazione e delle interazioni tra aree diverse.

La popolazione viene suddivisa in n classi, ciascuna costituita da individui con età compresa nell'intervallo $[k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Se ad esempio $\Delta t = 10$ anni, alla prima classe appartengono individui di età tra 0 e 9 anni, alla seconda quelli di età tra 10 e 19 anni, e così via.

Posto $T = \Delta t$, indicato con k il periodo $[kT, (k+1)T)$ e:

$x_i(kT)$ = numero di persone nella classe d'età i , all'inizio del periodo k ;

$b_i(k)$ = tasso di natalità della classe d'età i nel periodo k ;

$s_i(k)$ = tasso di sopravvivenza della classe d'età i nel periodo k ;

$y(kT)$ = popolazione presente all'inizio del periodo k ;

valgono le seguenti relazioni di bilancio:

$$\begin{aligned} x_1((k+1)T) &= b_1(k)x_1(kT) + \dots + b_n(k)x_n(kT) = \sum_{i=1}^n b_i(k)x_i(kT) \\ x_2((k+1)T) &= s_1(k)x_1(kT) \\ x_3((k+1)T) &= s_2(k)x_2(kT) \\ &\vdots \\ x_n((k+1)T) &= s_{n-1}(k)x_{n-1}(kT). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si noti che al tempo $(k+1)T$ gli individui nella prima classe d'età sono i nuovi nati nel periodo $[kT, (k+1)T)$, mentre per $i = 2, \dots, n$ gli individui nell' i -esima classe d'età sono quelli sopravvissuti che appartenevano alla classe $i-1$ nel periodo precedente. Si noti inoltre che i coefficienti b_i non nulli sono quelli delle classi intermedie, per cui ad esempio $b_1(t) = b_2(t) = 0$, $b_{n-2}(t) = b_{n-1}(t) = b_n(t) = 0$. Infine:

$$y(kT) = x_1(kT) + \dots + x_n(kT).$$

Si ottiene così la *rappresentazione con lo stato lineare di un sistema a tempo discreto autonomo*, ossia privo di ingresso, del tipo:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

ove x è un vettore di dimensione $(n \times 1)$ e:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_3(t) & \dots & 0 & 0 \\ s_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nella matrice $A(t)$ si è messo in evidenza il fatto che gli indici di natalità sono in genere nulli per le prime ed ultime classi di età. Si noti che il modello è non stazionario se si assume che la natalità e la sopravvivenza variano da periodo a periodo.

Il modello (2.8) consente, a partire dalla distribuzione della popolazione all'istante t_0 , ossia dallo stato del sistema $x(t_0)$, di valutare la crescita una volta disponibili i tassi di natalità e sopravvivenza.

Nei modelli demografici utilizzati per previsioni a breve scadenza, suddividendo il periodo di tempo in sottointervalli $T = \frac{\Delta t}{\delta}$ ed indicando con $p_i(kT)$ il tasso di transizione dalla classe i alla classe $i+1$ nel periodo $[kT, (k+1)T)$, si hanno le relazioni di bilancio:

$$\begin{aligned} x_1((k+1)T) &= \left(s_1(kT) - p_1(kT) + b_1(kT)\right)x_1(kT) + \dots + b_n(k)x_n(kT) \\ x_2((k+1)T) &= p_1(kT)x_1(kT) + \left(s_2(kT) - p_2(kT)\right)x_2(kT) \\ &\vdots \\ x_{n-1}((k+1)T) &= p_{n-2}(kT)x_{n-2}(kT) + \left(s_{n-1}(kT) - p_{n-1}(kT)\right)x_{n-1}(kT) \\ x_n((k+1)T) &= p_{n-1}(kT)x_{n-1}(kT) + s_n(kT)x_n(kT) \\ y(kT) &= x_1(kT) + \dots + x_n(kT). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Rispetto alle equazioni (2.7), si tiene conto qui del fatto che solo la frazione $p_i(kT)x_i(kT)$ degli individui della classe i al tempo kT sono nella classe d'età $i+1$ al tempo $(k+1)T$.

Se il modello rappresentato dalle (2.9) viene utilizzato per previsioni ed analisi su un periodo breve, è giustificato assumere $b_i(kT)$, $s_i(kT)$, $p_i(kT)$ costanti. In tal caso si ha una *rappresentazione del sistema lineare, a dimensione finita, a tempo discreto*, in cui la matrice dinamica è costante e

pari a:

$$A = \begin{pmatrix} s_1 - p_1 & b_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ p_1 & s_2 - p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & s_3 - p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & s_n \end{pmatrix},$$

in cui si è supposto che $b_1 = b_{n-1} = b_n = 0$.

Nei semplici modelli proposti si possono tenere in conto gli effetti della migrazione aggiungendo nei bilanci un termine che esprime la migrazione netta della popolazione per ciascuna classe d'età i tra kT e $(k+1)T$. Indicando con $u(kT)$ il vettore $(n \times 1)$ della migrazione netta per classi d'età, si otterrebbe così una *rappresentazione con lo stato lineare, a dimensione finita, stazionaria, a tempo discreto*:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + u(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Nota la distribuzione iniziale $x(t_0)$ della popolazione in classi d'età e l'andamento della migrazione netta per classi d'età $u(t)$, è possibile valutare l'evoluzione della popolazione stessa.

2.2.b. Dinamica della crescita di una popolazione

Nella crescita di una popolazione si nota sperimentalmente che, nella maggior parte dei casi, l'influenza reciproca di individui facenti parte della stessa popolazione è sensibile ed è spesso negativa, ossia contribuisce a diminuire la capacità di sopravvivenza e di riproduzione del singolo elemento. Infatti all'aumentare della popolazione diminuiscono le risorse necessarie all'individuo per la sopravvivenza e la probabilità di accoppiamento, in quanto aumenta la competizione interspecifica all'interno del gruppo. Tale competizione interspecifica è ovviamente tanto maggiore quanto maggiore è il numero di individui in una certa area o volume, ossia quanto maggiore è la densità.

Nelle popolazioni in cui esiste una struttura sociale si nota inoltre che, per basse densità, la crescita aumenta all'aumentare della densità, in quanto si ha un aumento della natalità e della probabilità di sopravvivenza. Quando però la densità aumenta oltre un certo valore, si inizia a sentire l'effetto dovuto alla competizione interspecifica, che predomina sull'effetto sociale per densità elevate.

La variazione della densità della popolazione risulta, per quanto detto, dipendente dalla densità stessa $x(t)$, secondo una funzione non lineare:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

che ovviamente dovrà essere tale che $f(0) = 0$ in quanto se la densità è nulla non può esservi alcuna variazione della popolazione. Sviluppando in serie di Taylor la funzione f si ottiene:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + f_1(x(t))$$

in cui il parametro $a > 0$ viene detto velocità o tasso intrinseco di crescita, che si avrebbe in condizioni di scarso affollamento e dunque assenza di competizione. In effetti per $x(t)$ sufficientemente piccolo tale relazione si riduce ad una crescita di tipo esponenziale, ossia:

$$\dot{x}(t) = ax(t)$$

che esprime come nell'intervallo di tempo dt ogni individuo dà origine ad $ax(t)dt$ nuovi individui. Ma per $x(t)$ piccolo la probabilità di interazione tra individui, e quindi la competizione, è bassa e dunque trascurabile.

Per specificare la funzione $f_1(x)$ si devono considerare i meccanismi di competizione, che possono essere fondamentalmente distinti in competizione per interferenza, in cui gli individui competono direttamente per la difesa dei territori e, in ultima analisi, delle risorse, e competizione per sfruttamento, in cui gli individui competono tra loro solo indirettamente, in quanto le risorse sono limitate e l'utilizzo di esse da parte di un individuo è a scapito di altri. Per semplicità ci riferiremo al solo caso di competizione per interferenza.

Nella competizione per interferenza, in cui si ha un contatto diretto tra gli individui, si può assumere un movimento casuale degli individui e che ogni contatto determini una diminuzione della probabilità di sopravvivenza e di riproduzione. Infatti tali scontri tra individui hanno come conseguenza che essi hanno meno tempo da dedicare alla ricerca del cibo e alla riproduzione. L'ipotesi di movimento casuale implica che la probabilità di incontro è proporzionale al quadrato della densità $x(t)$, in analogia alla teoria cinetica dei gas. Supponendo poi trascurabile la probabilità di incontro tra più di due individui, allora si ha:

$$f_1(x(t)) \cong -bx^2(t),$$

con $b > 0$ che tiene conto della mobilità di ciascun individuo e del danno prodotto da ogni incontro.

Si ottiene così la cosiddetta equazione logistica:

$$\dot{x}(t) = ax(t) - bx^2(t)$$

dovuta allo statistico belga Verhulst (1838) e riscoperta da Pearl e Reed (1920). Questa è una equazione di Bernouilli, risolvibile ponendo $z = 1/x$, trovando così la soluzione:

$$x(t) = \frac{ax_0}{(a - bx_0)e^{-a(t-t_0)} + bx_0}.$$

Essa per $t \rightarrow \infty$ tende asintoticamente al valore $k = \frac{a}{b}$, detto capacità portante della specie.

Mettendo esplicitamente in evidenza la capacità portante della specie l'equazione logistica si riscrive:

$$\dot{x}(t) = ax(t) \left(1 - \frac{1}{k}x(t)\right)$$

che è l'equazione che descrive la dinamica di crescita di una popolazione sotto le ipotesi di competizione interspecifica. Si noti che essa e l'equazione $y(t) = x(t)$ costituiscono un esempio di *rappresentazione non lineare, a dimensione finita, stazionaria, regolare, a tempo continuo*.

2.2.c. Modello di interazione preda-predatore

Lo scopo dei modelli biologici è quello di analizzare le relazioni che intercorrono tra più specie viventi che caratterizzano un certo sistema ecologico. Nella gran parte dei casi le specie interagenti sono numerose e le modalità di interazione sono complesse. Questo rende difficile sia la formulazione del modello matematico che la sua analisi. Queste difficoltà, assieme alle molte approssimazioni, indispensabili per modellare un ecosistema complesso, hanno condotto a considerare interazioni tra coppie di specie in condizioni costanti di clima, densità di altre specie, etc. Le interazioni possibili tra coppie di specie sono:

- competizione $(-, -)$: ogni specie produce un effetto inibitorio sulla crescita delle altre;
- commensalismo $(+, +)$: ogni specie produce un effetto acceleratore sulla crescita delle altre;
- predazione $(+, -)$: una specie, il predatore, produce un effetto inibitorio sulla crescita dell'altra, la preda, che a sua volta produce un effetto acceleratore sulla crescita del predatore.

Uno dei più noti modelli di interazione tra coppie di specie è il modello preda-predatore, la cui prima formulazione è dovuta al biofisico americano Lotka (1924) e poi indipendentemente riformulato e generalizzato dal matematico italiano Volterra (1926).

Questo modello presuppone che sia la preda che il predatore siano isolati e che crescano esponenzialmente, con un tasso intrinseco di crescita positivo per la preda e negativo per il predatore, ossia in condizioni di separazione delle specie:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1x_1 \\ \dot{x}_2 &= -a_2x_2\end{aligned}$$

ove x_1, x_2 sono le densità delle due popolazioni e $a_1 > 0, a_2 > 0$. Quando le due specie vengono a contatto, i predatori attaccano le prede e un certo numero di queste ultime moriranno. Supponendo, come nella teoria cinetica dei gas, che le specie si muovono in modo arbitrario e gli scontri sono casuali e che quindi la probabilità di scontro è proporzionale al prodotto delle densità, le prede diminuiranno e i predatori aumenteranno proporzionalmente a x_1x_2 secondo un coefficiente $b > 0$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1x_1 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_2x_2 + \eta bx_1x_2\end{aligned}\tag{2.10}$$

ove $0 < \eta < 1$ rappresenta una efficienza di conversione della biomassa delle prede in quella dei predatori.

Oltre alle ipotesi precedenti queste equazioni valgono quando il tempo dedicato dal predatore alla caccia e al consumo della preda siano trascurabili e assumendo che il predatore sia limitato solo dal suo cibo, ossia dalla preda.

Per essere più aderenti alla realtà, rimuovendo l'ipotesi di crescita esponenziale delle prede e sostituendola con quella di crescita di tipo logistico, si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1x_1 \left(1 - \frac{1}{k}x_1\right) - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_2x_2 + \eta bx_1x_2\end{aligned}\tag{2.11}$$

con k la capacità portante delle prede in assenza di predatori.

Se poi si considera che il predatore ha una capacità limitata di mangiare prede, e che il tempo dedicato alla sua nutrizione viene speso in tempo per la ricerca e in tempo per la cattura, l'ingestione e la digestione della preda, attività mai contemporanee, si ha che il numero di prede divorate non è bx_1x_2 , ossia non è proporzionale a x_2 secondo il termine bx_1 . Il numero di prede incontrate nel tempo t_r dedicato alla ricerca è:

$$n = t_r bx_1.$$

Se poi t_c è il tempo necessario per catturare, mangiare e digerire una preda, il tempo totale dedicato a questa attività vale:

$$t_{ct} = t_c n = t_c t_r b x_1$$

e dunque il tempo totale dedicato al nutrimento è $t_t = t_r + t_{ct}$ ed il numero di prede divorate nell'unità di tempo da ciascun predatore vale:

$$\frac{n}{t_t} = \frac{b x_1}{1 + t_c b x_1}.$$

Il livello di saturazione è l'inverso del tempo t_c . Pertanto le equazioni di interazione preda-predatore diventano:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 \left(1 - \frac{1}{k} x_1\right) - \frac{b x_1 x_2}{1 + t_c b x_1} \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 + \eta \frac{b x_1 x_2}{1 + t_c b x_1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si noti che per $t_c \rightarrow 0$ le (2.12) forniscono nuovamente le (2.11).

Tutti questi modelli sono non lineari a causa della presenza di termini del tipo $x_1 x_2$, x_1^2 e $\frac{b x_1 x_2}{1 + t_c b x_1}$. Se ad esempio come uscita si prendono le due densità x_1 e x_2 :

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

si ha un altro esempio di *rappresentazione non lineare, a dimensione finita, stazionaria, regolare, a tempo continuo*.

2.3. Modello economico di Leontief

Il modello di W. Leontief rappresenta una formulazione della teoria dell'equilibrio economico. Si consideri un sistema economico in cui i beni (beni materiali e servizi) vengono prodotti da n industrie I_1, \dots, I_n . Siano x_i , $i = 1, \dots, n$, la quantità del bene i -esimo prodotta dall'industria I_i nell'unità di tempo ed x_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, la quantità del bene i -esimo prodotto da I_i ed utilizzato da I_j per la produzione del bene j -esimo. Sotto l'ipotesi che x_{ij} sia proporzionale alla quantità x_j secondo una costante:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

la quantità del bene i prodotto da I_i e destinata al consumatore vale:

$$q_i = x_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si noti che ovviamente $x_{ii} = 0$ e dunque $a_{ii} = 0$.

Sia y_i la domanda di consumo del bene prodotto da I_i , supposta non negativa. Se il sistema economico non ha accumuli di scorte, allora la domanda degli n beni prodotti dalle industrie eguaglia la produzione degli stessi. Dunque sotto l'ipotesi di assenza di accumuli si ha $q_i = y_i$ e si ottiene così il modello "statico" di Leontief:

$$(I - A)x = y \quad (2.13)$$

ove I è la matrice identità $n \times n$ e:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

I vettori x e y sono detti vettore dei prodotti e vettore dei consumi, mentre A viene detta matrice di produzione.

Le soluzioni della (2.13) nell'incognita x , a componenti non negative, è detta soluzione di equilibrio del modello.

Supponiamo che ogni industria voglia adeguare la propria produzione alla domanda del mercato. L'incremento della produzione \dot{x}_i potrà allora supporre, come spesso accade nella realtà, proporzionale alla differenza tra la domanda complessiva del bene, che vale

$$y_i + \sum_{j=1}^n x_{ij} = y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

e la produzione stessa, che vale x_i . La produzione dovrà aumentare se tale differenza è positiva, e dovrà diminuire se è negativa, ossia posto $k_i > 0$:

$$\dot{x}_i = k_i \left[y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_i \right], \quad i = 1, \dots, n.$$

Si ha così l'equazione che esprime il legame dinamico tra i livelli di consumo e di produzione:

$$\dot{x} = K(A - I)x + Ky,$$

con $K = \text{diag} \{k_1, \dots, k_n\}$.

Si voglia ora mettere in relazione la domanda di consumo y_i con i livelli di tassazione, sotto le ipotesi che l'incremento di produzione \dot{x}_i sia proporzionale secondo una costante ai nuovi investimenti ξ_i (ossia gli investimenti nei settori $j \neq i$ non influenzino la produzione del bene i -esimo):

$$\dot{x}_i = f_i \xi_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

e che gli investimenti ξ_i siano a loro volta proporzionali ai profitti p_i :

$$\xi_i = g_i p_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Infine si supponga che i profitti ξ_i siano proporzionali alle vendite, supposte pari alla domanda y_i , a meno di una detrazione legata alla tassazione:

$$p_i = d_i y_i - u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ponendo $F = \text{diag} \{f_1, \dots, f_n\}$, $G = \text{diag} \{g_1, \dots, g_n\}$, $D = \text{diag} \{d_1, \dots, d_n\}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}^T$, si ha dunque:

$$\dot{x} = FG(Dy - u).$$

Ricordandosi del modello statico di Leontief (2.13), si ottiene il seguente modello dinamico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= FGD(I - A)x - FG u \\ y &= (I - A)x \end{aligned}$$

che è un ulteriore esempio di *rappresentazione lineare, stazionaria, a dimensione finita, regolare, a tempo continuo*.

2.4. Modelli di sistemi elettrici

2.4.a. Un semplice circuito elettrico

Le equazioni differenziali che descrivono il comportamento dinamico di una rete elettrica possono essere derivate mediante le leggi di Kirchhoff dei nodi e delle maglie.

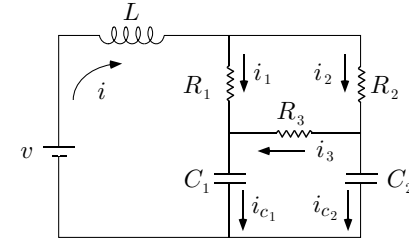


Figura 2.4

Si consideri dunque la rete descritta in figura 2.4. Si ricavano così le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} v - L \frac{di}{dt} - R_1 i_1 - v_{C_1} &= 0 \\ v_{C_1} + R_1 i_1 - R_2 i_2 - v_{C_2} &= 0 \\ v_{C_1} + R_3 i_3 - v_{C_2} &= 0 \\ i_1 + i_2 &= i \\ i_1 + i_3 &= i_{C_1} = C_1 \dot{v}_{C_1} \\ i_2 &= i_3 + i_{C_2} = i_3 + C_2 \dot{v}_{C_2}. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$i_3 = \frac{v_{C_2} - v_{C_1}}{R_3} \Rightarrow \begin{aligned} i_1 &= \frac{v_{C_1} - v_{C_2}}{R_3} + C_1 \dot{v}_{C_1}, \\ i_2 &= \frac{v_{C_2} - v_{C_1}}{R_3} + C_2 \dot{v}_{C_2}, \end{aligned}$$

e dalla prima, seconda e quarta equazione si trova:

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + R_1 C_1 \dot{v}_{C_1} &= -\frac{R_1 + R_3}{R_3} v_{C_1} + \frac{R_1}{R_3} v_{C_2} + v \\ R_1 C_1 \dot{v}_{C_1} - R_2 C_2 \dot{v}_{C_2} &= \frac{\bar{R}}{R_3} (v_{C_2} - v_{C_1}) \\ C_1 \dot{v}_{C_1} + C_2 \dot{v}_{C_2} &= i \end{aligned}$$

in cui $\bar{R} = R_1 + R_2 + R_3$. Quindi:

$$\begin{pmatrix} \frac{di}{dt} \\ \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & R_1 C_1 & 0 \\ 0 & R_1 C_1 & -R_2 C_2 \\ 0 & C_1 & C_2 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & -\frac{R_1 + R_3}{R_3} & \frac{R_1}{R_3} \\ 0 & -\frac{\bar{R}}{R_3} & \frac{\bar{R}}{R_3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v \right],$$

(si noti che si tratta dell'inversione di una matrice triangolare a blocchi) da cui, posto

$$x = \begin{pmatrix} i \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{pmatrix}, \quad u = v,$$

e presa come uscita y la tensione ai capi della resistenza R_3 :

$$y = v_{C_2} - v_{C_1},$$

si ottiene la seguente *rappresentazione lineare, stazionaria, a dimensione finita, regolare, a tempo continuo*:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned}$$

ove:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)} & -\frac{1}{L} \frac{R_1+R_3}{R_3} + \frac{R_1}{L(R_1+R_2)} \frac{\bar{R}}{R_3} & \frac{1}{L} \frac{R_1}{R_3} - \frac{R_1}{L(R_1+R_2)} \frac{\bar{R}}{R_3} \\ \frac{R_2}{(R_1+R_2)C_1} & -\frac{1}{(R_1+R_2)C_1} \frac{\bar{R}}{R_3} & \frac{1}{(R_1+R_2)C_1} \frac{\bar{R}}{R_3} \\ \frac{R_1}{(R_1+R_2)C_2} & \frac{1}{(R_1+R_2)C_2} \frac{\bar{R}}{R_3} & -\frac{1}{(R_1+R_2)C_2} \frac{\bar{R}}{R_3} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Si noti infine che questo è un modello del terzo ordine in quanto si hanno tre elementi con memoria (l'induttanza e le due capacità^(2.1)), ad ognuno dei quali rimane associata una variabile di stato.

2.4.b. Circuito elettrico con diodo tunnel

Si consideri il seguente circuito elettrico, costituito da una resistenza R , un'induttanza L , una capacità C e da un diodo tunnel avente caratteristica $i = f(v)$, essendo i e v l'intensità della corrente e la tensione applicata al diodo. La capacità e l'induttanza sono elementi lineari e tempo-invarianti,

^(2.1) Da un punto di vista fisico in una induttanza e in una capacità è possibile infatti immagazzinare dell'energia elettromagnetica.

e sono gli elementi in cui l'energia elettromagnetica viene immagazzinata, ossia sono gli elementi a cui è associata una dinamica.

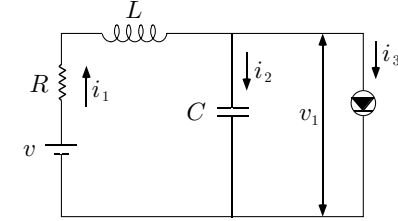


Figura 2.5 – Circuito con diodo tunnel

Per le leggi di Kirchhoff:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 \\ v &= Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + v_c \end{aligned}$$

ed inoltre:

$$\begin{aligned} \dot{v}_c &= \frac{1}{C} i_2 \\ i_3 &= f(v_1) = f(v_c), \end{aligned}$$

essendo la tensione v_1 ai capi del diodo pari a v_c . Posto $x_1 = v_c$, $x_2 = i_1$, $u = v$, si ha dunque il modello del circuito:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{C} (x_2 - f(x_1)) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L} (-x_1 - Rx_2 + u). \end{aligned}$$

Considerata come uscita la tensione $v_1 = v_c$:

$$y = x_1$$

si ottiene una *rappresentazione non lineare, stazionaria, a dimensione finita, regolare, a tempo continuo*. La non linearità della rappresentazione è poi legata alla non linearità del comportamento del diodo, come descritto dalla funzione $f(v_1)$. Inoltre il modello è del secondo ordine in quanto vi sono due elementi con memoria (l'induttanza e la capacità), a ciascuno dei quali corrisponde una variabile di stato.

2.4.c. Circuito elettrico oscillante

Sia dato un circuito con una capacità C ed una induttanza L , lineari, tempo-invarianti e passivi, ossia tali che $C > 0$ e $L > 0$. Vi sia poi un elemento resistivo di tipo attivo, avente cioè una caratteristica corrente-tensione $i = f(v)$ tale che:

$$f(0) = 0, \quad \frac{df}{dv} < 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} f(v) = \infty, \quad \lim_{v \rightarrow -\infty} f(v) = -\infty.$$

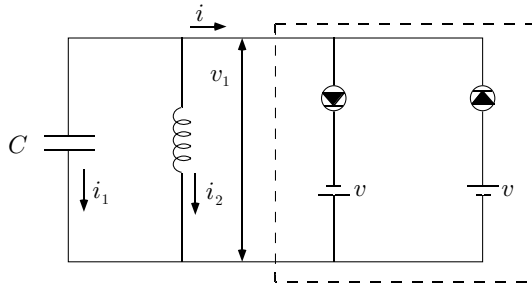
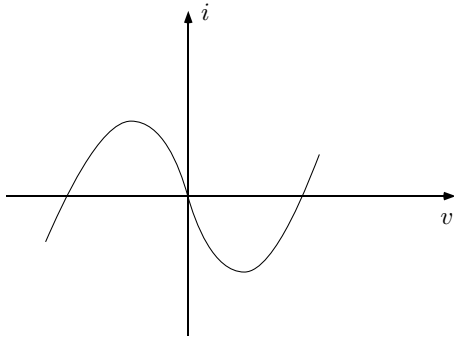


Figura 2.6 – Circuito oscillante

Una tale caratteristica può essere ottenuta mediante un circuito con due diodi tunnel.

Figura 2.7 – Caratteristica $i-v$

Applicando le leggi di Kirchhoff al circuito di figura 2.6 si ricavano le equazioni:

$$i + i_1 + i_2 = 0$$

$$v_c - L \frac{di_2}{dt} = 0,$$

che assieme alle relazioni:

$$\dot{v}_c = \frac{1}{C} i_1$$

$$i = f(v_1) = f(v_c),$$

ove v_1 è la tensione ai capi dell'elemento resistivo attivo, forniscono le equazioni

$$f(v_c) + C \dot{v}_c + i_2 = 0$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L} v_c.$$

Derivando la prima rispetto al tempo e sostituendovi la seconda:

$$LC \ddot{v}_c + L \frac{df(v_c)}{dv_c} \dot{v}_c + v_c = 0,$$

e considerando il cambio della variabile tempo:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t,$$

per cui:

$$\frac{dv_c}{d\tau} = \sqrt{LC} \dot{v}_c, \quad \frac{d^2 v_c}{d\tau^2} = LC \ddot{v}_c,$$

si ottiene l'equazione del circuito:

$$\frac{d^2 v_c}{d\tau^2} + \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{df(v_c)}{dv_c} \frac{dv_c}{d\tau} + v_c = 0.$$

Questa è un caso particolare dell'equazione di Liénard:

$$\ddot{v} + f(v) \dot{v} + g(v) = 0.$$

Quando poi $f(v_c) = -v_c + \frac{1}{3} v_c^3$, si ottiene l'equazione di Van der Pol:

$$\frac{d^2 v_c}{d\tau^2} + \sqrt{\frac{L}{C}} (-1 + v_c^2) \frac{dv_c}{d\tau} + v_c = 0,$$

usata per studiare le oscillazioni nei circuiti con tubi a vuoto. Essa costituisce un esempio fondamentale nella teoria non lineare delle oscillazioni.

Posto $x_1 = v_c$, $x_2 = \dot{v}_c$, si ottiene il modello non lineare del circuito oscillante:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{df(x_1)}{dx_1} x_2.\end{aligned}$$

Considerata infine un'uscita $y = h(x)$ si ottiene una *rappresentazione non lineare, stazionaria a dimensione finita, regolare, a tempo continuo*. La non linearità della rappresentazione è qui dovuta, oltre che alla non linearità della funzione $\frac{df(x_1)}{dx_1}$, anche alla funzione (da definire) $h(x)$, che in generale può essere non lineare. Infine si osservi che il modello è del secondo ordine a causa della presenza di due elementi con memoria (induttanza e capacità) e dunque due variabili di stato.

2.5. Modelli di sistemi meccanici

2.5.a. Equazioni di Lagrange

Per i sistemi meccanici olonomi con un numero finito N di gradi di libertà è ben noto che la conoscenza delle posizioni e velocità in un'istante di tutti i punti materiali costituenti il sistema è sufficiente alla determinazione del moto. D'altra parte posizioni e velocità possono essere ottenuti in ciascun istante dalla conoscenza di N parametri (q_1, \dots, q_N) individuanti le posizioni, e di altri N $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ individuanti le velocità. In totale dunque sono necessari $2N$ parametri. Le equazioni della meccanica dei sistemi in cui compaiono queste $2N$ funzioni come incognite hanno soluzione unica per ogni assegnata condizione iniziale, e questo garantisce che l'insieme dei valori di queste $2N$ funzioni può essere assunto come stato del sistema a ciascun istante.

La dinamica di sistemi meccanici complessi può infatti essere espressa utilizzando le *equazioni di Lagrange*, derivabili dalle equazioni del moto di Newton. Esse hanno il pregio di incorporare in sé i vincoli esistenti tra i corpi (rigidi) costituenti il sistema. In tal modo non occorre procedere alla eliminazione e/o al calcolo delle forze o dei momenti delle reazioni vincolari. Inoltre, poiché questo metodo utilizza l'espressione delle energie cinetiche e potenziali dei singoli corpi, e dunque utilizza quantità scalari, non occorre servirsi di diagrammi vettoriali, necessari quando si tratta con quantità vettoriali, come forze e momenti. Per contro è importante determinare,

all'inizio dell'analisi di un sistema, l'insieme delle grandezze, le coordinate generalizzate, ognuna corrispondente ad un grado di libertà del sistema di corpi rigidi, e che incorpora i vincoli dovuti all'interconnessione dei corpi. Una volta determinate le coordinate generalizzate si scrive l'energia cinetica T in funzione di queste coordinate e delle loro derivate, e l'energia potenziale U in funzione delle coordinate generalizzate (non dipendendo U dalle derivate delle coordinate generalizzate). Si introduce quindi la funzione Lagrangiana:

$$L = T(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) - U(q_1, \dots, q_N)$$

e si scrivono le equazioni di Lagrange che forniscono le equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

ove Q_i sono le forze generalizzate, ossia forze o momenti, esterne al sistema o non derivabili da potenziale (ad esempio dissipative, come quelle dovute all'attrito).

Si noti che esse sono equazioni differenziali del secondo ordine, e dunque un sistema con N gradi di libertà è rappresentato da $2N$ equazioni differenziali del primo ordine, ossia il sistema sarà di ordine $n = 2N$.

2.5.b. Dinamica di un punto materiale

Si consideri un punto materiale di massa m , che si muove su di un piano orizzontale. Esso è vincolato a muoversi circolarmente in quanto connesso ad un punto fisso da un'asta rigida, che viene fatta ruotare da un momento $u(t)$, variabile nel tempo.

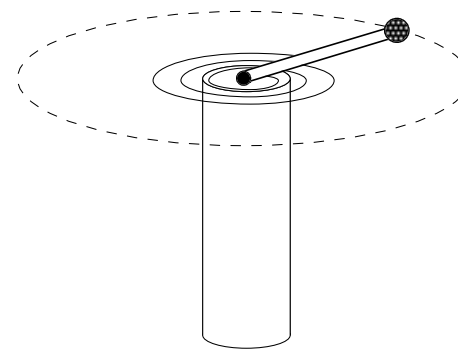


Figura 2.8

Figura 2.9 – Volani con asse flessibile

Facendo riferimento alla figura 2.9, in cui ϑ , ϑ_1 , ω , ω_1 sono la posizione e la velocità angolare dei due volani, e $\pm k(\vartheta - \vartheta_1)$ sono i momenti dovuti alla flessibilità dell'albero, l'equazione dei momenti per il primo volano si scrive come:

$$M_m - k(\vartheta - \vartheta_1) - F\omega = J\dot{\omega}, \quad (2.14)$$

mentre per il secondo volano:

$$k(\vartheta - \vartheta_1) - F_1\omega_1 - C_r = J_1\dot{\omega}_1. \quad (2.15)$$

Posto:

$$\begin{aligned} x_1 &= \vartheta, & x_3 &= \vartheta_1, & u &= M_m, \\ x_2 &= \dot{\vartheta}, & x_4 &= \dot{\vartheta}_1, \end{aligned}$$

e prese come uscite ad esempio le due posizioni angolari si ha la seguente *rappresentazione lineare, stazionaria, a dimensione finita, regolare, a tempo*

È ovvio che si sarebbero potute considerare anche le coordinate cartesiane, ossia le variabili x ed y per il carrello e x_1 ed y_1 che individuano la posizione della massa m , ma solo due di queste quattro risultano indipendenti tra loro, a causa delle relazioni cinematiche che esistono tra loro:

$$\begin{aligned}x_1 &= x + l \sin \vartheta \\ y_1 &= y + l \cos \vartheta = l \cos \vartheta,\end{aligned}$$

ossia a causa del fatto che il sistema ha due gradi di libertà. In effetti, anche utilizzando tali variabili, ma considerando i vincoli esistenti, alla fine la dinamica del sistema deve essere espressa in termini di coordinate generalizzate.

L'energia cinetica è la somma di quella del carrello:

$$T_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2,$$

e di quella del pendolo:

$$\begin{aligned}T_p &= \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + l^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta + l^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta) = \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + l^2\dot{\vartheta}^2),\end{aligned}$$

ossia:

$$T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}) = T_c + T_p = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + l^2\dot{\vartheta}^2).$$

Nell'espressione ricavata per T_p si noti che compare un termine legato alla rotazione del pendolo e dunque al momento d'inerzia $J_p = ml^2$ della massa m rispetto alla cerniera $\left(\frac{1}{2}J_p\dot{\vartheta}^2\right)$, un altro termine legato alla traslazione di m lungo x $\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)$, ed infine un termine legato all'accoppiamento delle due dinamiche in cui compare il prodotto delle velocità nelle due “direzioni generalizzate” $(ml\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta)$. Quest'ultimo termine esprime proprio come la dinamica di un componente del sistema influenza la dinamica dell'altro. Si noti come scrivendo l'energia T_p direttamente in termini di variabili lagrangiane si sarebbe potuto facilmente dimenticare di scrivere il termine di accoppiamento.

Poiché si suppone presente la sola forza peso, preso come riferimento il baricentro del carrello:

$$U_c = U_{rif} = 0,$$

Figura 2.10 – Pendolo invertito su carrello

l'energia potenziale del pendolo vale:

$$U_p = mgl \cos \vartheta.$$

Pertanto:

$$U(x, \vartheta) = U_c + U_p = mgl \cos \vartheta.$$

Se il pendolo è rivolto verso il basso e l'angolo ϑ viene misurato a partire dalla posizione di riposo, in U_p , e dunque in U , compare un segno negativo: $-mgl \cos \vartheta$.

Dunque la funzione lagrangiana ha l'espressione:

$$L = T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta}) - U(x, \vartheta) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\vartheta}^2 + ml\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - mgl\cos\vartheta,$$

e le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) &= \frac{d}{dt} \left((M+m)\dot{x} + ml\dot{\vartheta}\cos\vartheta \right) - 0 = f \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \vartheta} \right) &= \frac{d}{dt} \left(J_p\dot{\vartheta} + ml\dot{x}\cos\vartheta \right) + \\ &\quad - \left(-ml\dot{x}\sin\vartheta + mgl\sin\vartheta \right) = \tau \end{aligned}$$

essendo f e τ rispettivamente la forza agente sul carrello nella direzione della rotaia e il momento applicato sulla cerniera del pendolo. Dunque:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\cos\vartheta\ddot{\vartheta} - ml\sin\vartheta\dot{\vartheta}^2 &= f \\ ml\cos\vartheta\ddot{x} + J_p\ddot{\vartheta} - mgl\sin\vartheta &= \tau. \end{aligned}$$

Le equazioni sono non lineari sia per la presenza di prodotti o potenze di variabili che per la presenza di funzioni trascendenti. Se però il pendolo è prossimo al punto di equilibrio corrispondente a $\vartheta = 0$, in quanto gli spostamenti sono piccoli oppure perché si ha un sistema di controllo che fa rimanere il pendolo prossimo a tale posizione, è possibile fare le approssimazioni:

$$\sin\vartheta \cong \vartheta, \quad \cos\vartheta \cong 1.$$

Un'altra approssimazione, comune ma che a priori non ha una vera giustificazione (se non che a posteriori si riconosce accettabile), è ritenere che anche la velocità angolare $\dot{\vartheta}$ sia piccola. A maggior ragione lo sarà il suo quadrato: $\dot{\vartheta}^2 \cong 0$. Le equazioni del moto si semplificano quindi come segue:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\vartheta} &= f \\ ml\ddot{x} + J_p\ddot{\vartheta} - mgl\vartheta &= \tau, \end{aligned}$$

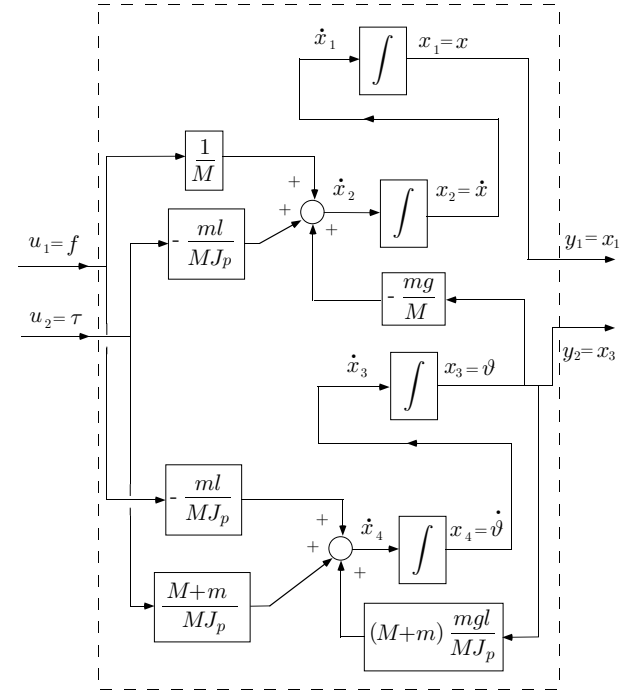


Figura 2.11 – Schema a blocchi del pendolo invertito linearizzato

e quindi:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{mg}{M}\vartheta + \frac{1}{M}f - \frac{ml}{MJ_p}\tau \\ \ddot{\vartheta} &= (M+m)\frac{mgl}{MJ_p}\vartheta - \frac{ml}{MJ_p}f + \frac{M+m}{MJ_p}\tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Posto allora $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \vartheta$, $x_4 = \dot{\vartheta}$, $u = \begin{pmatrix} f \\ \tau \end{pmatrix}$, e prendendo come grandezze misurate ad esempio la posizione x e l'angolo ϑ , si ha la seguente *rappresentazione differenziale lineare, stazionaria, a dimensione*

finita, regolare, a tempo continuo:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (M+m)\frac{mgl}{MJ_p} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & -\frac{ml}{MJ_p} \\ 0 & 0 \\ -\frac{ml}{MJ_p} & \frac{M+m}{MJ_p} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Lo schema a blocchi corrispondente mette in luce le dinamiche del carrello e quelle del pendolo, e il legame di accoppiamento tra di esse.

2.6. Sistemi elettro-meccanici

2.6.a. Motore elettrico in corrente continua a magneti permanenti con tensione d'armatura variabile

Si consideri un motore in corrente continua in cui il campo magnetico in cui si muovono le spire dell'avvolgimento rotorico, o “circuito d'armatura”, sia generato da magneti permanenti. In condizioni ideali il momento meccanico M_m sviluppato sull'asse del motore, o “coppia elettromagnetica”, è proporzionale al prodotto tra il flusso di eccitazione determinato dai magneti permanenti e l'intensità della corrente i_a che scorre nel circuito rotorico^(2.3), detta “corrente d'armatura”:

$$M_m = \bar{k}_1 \Phi_e i_a.$$

Essendo costante il campo magnetico, e dunque il flusso, prodotto dai magneti, il momento è proporzionale alla corrente di armatura:

$$M_m = k_1 i_a. \quad (2.17)$$

^(2.3) In effetti una spira piana di forma generica immersa in un campo magnetico uniforme d'induzione \vec{B} risente di un momento meccanico $\vec{M} = i_a S \vec{n} \times \vec{B}$, ove S è la superficie della spira, \vec{n} è la normale alla spira (scelta secondo la regola della “mano destra”) percorsa dalla corrente d'intensità i_a . Dunque $M = i_a S B \sin \alpha$, ove α è l'angolo tra i vettori \vec{B} e \vec{n} . Poiché l'avvolgimento del rotore è costituito da spire uguali, disposte con una densità di N spire per radiante, si ha che $M_m = N \int_0^\pi M d\alpha = 2NSB i_a = \bar{k}_1 \Phi_e i_a$, ove $\Phi_e = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$ è il flusso di eccitazione, che attraversa la singola spira perpendicolare a \vec{B} .

Poiché poi le spire del rotore si muovono in un campo magnetico, e dunque sono sede di fenomeni di induzione elettromagnetica^(2.4), nel circuito d'armatura si deve tenere conto di una forza controelettromotrice indotta f_c , che si oppone alla rotazione e che può ritenersi proporzionale al prodotto tra flusso di eccitazione Φ_e (qui supposto costante) e velocità angolare di rotazione ω :

$$f_c = \bar{k}_2 \Phi_e \omega = k_2 \omega. \quad (2.18)$$

Essendo $p_e = i_a f_c = \frac{k_2}{k_1} \omega M_m$ la potenza elettrica (prodotto della forza controelettromotrice indotta per la corrente d'armatura) e $p_m = \omega M_m$ quella meccanica (prodotto della velocità angolare per la coppia elettromagnetica), ovviamente:

$$p_e = \frac{k_2}{k_1} p_m,$$

e nel caso di perfetta conversione dell'energia si avrebbe $k_1 = k_2 = k$; se il rendimento è invece inferiore al 100% allora $\frac{k_2}{k_1} > 1$, ossia $k_2 > k_1$.

Si noti che M_m , i_a , f_c e ω si misurano in Nm, A, V e $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ rispettivamente, e dunque k_1 e k_2 vengono misurate in $\frac{\text{Nm}}{\text{A}}$ e $\frac{\text{Vs}}{\text{rad}} = \frac{\text{J}}{\text{Arad}}$.

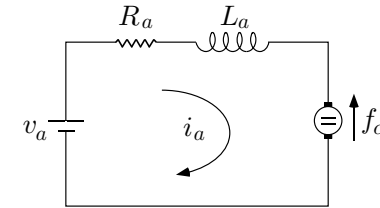


Figura 2.12 – Circuito equivalente d'armatura

Il circuito equivalente del circuito d'armatura è rappresentato in figura

^(2.4) Per una spira piana di forma qualsiasi immersa in un campo magnetico uniforme d'induzione \vec{B} , il flusso concatenato vale $\Phi_e(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = SB \cos \alpha$, essendo S la superficie della spira e \vec{n} la normale alla spira (scelta secondo la regola della “mano destra”). Se essa ruota in tale campo risulta essere sede di fenomeni di induzione e, per la legge di Faraday–Neumann–Lentz, la forza controelettromotrice indotta che si genera vale $f'_c = -\frac{d\Phi_e(\vec{B})}{dt} = (SB \sin \alpha) \omega$, e considerando per l'avvolgimento rotorico una densità di N spire per radiante, essa vale $f_c = N \int_0^\pi (SB \sin \alpha) \omega d\alpha = 2N \Phi_e \omega = k_2 \omega$.

Figura 2.14 – Circuito equivalente d'eccitazione e schema fisico

Nello scrivere la legge di Ohm per il circuito equivalente del circuito di eccitazione (figura 2.14) si tenga presente che non si hanno contributi

dovuti a forze contro elettromotrici indotte, poiché il flusso ϕ_a del circuito di armatura non si concatena con le spire del circuito di eccitazione, essendo ortogonali a tale flusso (viceversa ϕ_e si concatena con le spire del rotore in quanto esse sono in rotazione). Dunque la legge di Ohm per il circuito di eccitazione fornisce:

$$v_e - R_e i_e - L_e \frac{di_e}{dt} = 0, \quad (2.22)$$

con R_e , L_e resistenza e induttanza del circuito equivalente d'eccitazione.

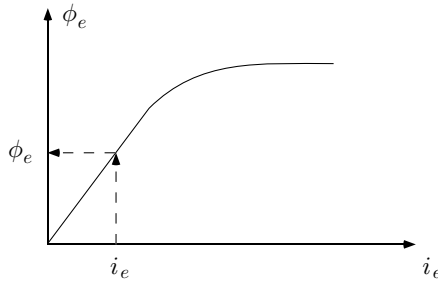


Figura 2.15 – Caratteristica flusso-corrente di eccitazione

Riguardo l'espressione del momento meccanico, il flusso di eccitazione risulta essere proporzionale alla corrente d'eccitazione i_e , come mostrato in figura 2.15 dove è rappresentata la caratteristica flusso-corrente di eccitazione. Entro un certo intervallo di valori della corrente di eccitazione la caratteristica è lineare, mentre al di fuori di questo intervallo il flusso ϕ_e del circuito di eccitazione satura ad un valore massimo, e la curva non è più lineare.

Il momento meccanico risulta allora essere dato da:

$$M_m = k i_e i_a. \quad (2.23)$$

Se ora la corrente di armatura è costante, l'espressione del momento è proporzionale a i_e :

$$M_m = k_1 i_e$$

entro un certo intervallo di valori di tale corrente.

Indicando dunque con J il momento d'inerzia del carico, C_r un momento resistente agente sul carico ed F il coefficiente d'attrito dinamico, dall'equilibrio dei momenti agenti sull'asse del motore si ha:

$$k_1 i_e - F\omega - C_r = J\dot{\omega}. \quad (2.24)$$

Dalle equazioni (2.22), (2.24), assieme all'equazione $\dot{\vartheta} = \omega$, si ha il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{di_e}{dt} &= -\frac{R_e}{L_e} i_e + \frac{1}{L_e} v_e \\ \dot{\omega} &= \frac{k_1}{J} i_e - \frac{F}{J} \omega - \frac{1}{J} C_r \\ \dot{\vartheta} &= \omega. \end{aligned}$$

Se la grandezza misurabile è ad esempio la posizione angolare, si ricava dunque la seguente *rappresentazione differenziale lineare, stazionaria, a dimensione finita, regolare, a tempo continuo*:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{R_e}{L_e} & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{J} & -\frac{F}{J} & -\frac{1}{J} C_r \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_e} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{pmatrix} d \\ y = (0 \quad 0 \quad 1) x \end{cases}$$

ove si è posto $x = \begin{pmatrix} i_e \\ \omega \\ \vartheta \end{pmatrix}$, $u = v_e$, $d = C_r$.

2.6.c. Motore elettrico in corrente continua con tensione d'armatura e d'eccitazione variabili

Si consideri un motore in corrente continua in cui possano variare entrambe le tensioni del circuito d'armatura e di eccitazione. Per il momento meccanico si deve allora utilizzare l'espressione (2.23), e l'equazione meccanica diventa:

$$k i_a i_e - F\omega - C_r = J\dot{\omega}. \quad (2.25)$$

Le equazioni dei circuiti equivalenti di armatura ed eccitazione sono ancora date dalle (2.19) e (2.22) che, assieme alla (2.21) e all'espressione della forza contro elettromotrice (2.18), che in questo caso si riscrive come:

$$f_c = \tilde{k} i_e \omega,$$

forniscono il seguente modello:

$$\begin{aligned}\frac{di_a}{dt} &= -\frac{R_a}{L_a}i_a - \frac{\tilde{k}}{L_a}i_e\omega + \frac{1}{L_a}v_a \\ \frac{di_e}{dt} &= -\frac{R_e}{L_e}i_e + \frac{1}{L_e}v_e \\ \dot{\omega} &= \frac{k}{J}i_a i_e - \frac{F}{J}\omega - \frac{1}{J}C_r \\ \dot{\vartheta} &= \omega.\end{aligned}$$

Al solito come uscite possono essere prese una o più variabili di stato. Si noti che ora la *rappresentazione è non lineare (stazionaria, a dimensione finita, regolare, a tempo continuo)*.

Queste equazioni, così come quelle nei paragrafi 2.6.a e 2.6.b, si basano sulle ipotesi che tutte le perdite nel motore possano essere tenute in conto dallo smorzamento meccanico (tramite il coefficiente F) e dalla resistenza elettrica (tramite R_a e/o R_e), e che il comportamento del motore sia lineare, ossia che si lavori nella parte lineare della caratteristica flusso-corrente. La dinamica del motore è in realtà più complessa, ma le equazioni scritte catturano le caratteristiche dinamiche essenziali del motore, e sono quindi adatte per l'analisi del sistema e la sintesi di eventuali sistemi di controllo.

2.6.d. Motore in corrente continua alimentato in tensione con carico ed albero flessibile

Si consideri un motore in corrente continua, alimentato in tensione, e con flusso di eccitazione costante. Il carico, di momento d'inerzia J_1 , sia collegato al motore tramite un albero con flessibilità non trascurabile. Si supponga di poter tenere in conto questa elasticità mediante una costante elastica k . Sia presente l'attrito sia nella rotazione del rotore che in quella del carico, e su quest'ultimo agisca un carico resistente C_r . Il rotore e il carico costituiscono due volani connessi da un albero flessibile, come trattato nella sezione 2.5.c.

L'equazione del circuito equivalente d'armatura è ancora la (2.19), con f_c data dalla (2.18), mentre le equazioni dei due volani sono date dalla (2.14), con M_m come in (2.17), e dalla (2.15). Riguardo le posizioni angolari di rotore e carico, valgono rispettivamente la (2.21) e la relazione $\dot{\vartheta}_1 = \omega_1$.

Il modello complessivo del sistema è dunque:

$$\begin{aligned}\frac{di_a}{dt} &= -\frac{R_a}{L_a}i_a - \frac{k_2}{L_a}\omega + \frac{1}{L_a}v_a \\ \dot{\vartheta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{k_1}{J}i_a - \frac{k}{J}(\vartheta - \vartheta_1) - \frac{F}{J}\omega - \frac{1}{J}C_r \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{k}{J_1}(\vartheta - \vartheta_1) - \frac{F_1}{J_1}\omega - \frac{1}{J_1}C_r \\ \dot{\vartheta}_1 &= \omega_1,\end{aligned}$$

in cui v_a appare come ingresso al sistema e C_r come un disturbo agente su di esso. Ovviamente come uscite si possono assumere una o più variabili di stato.

2.7. Modelli di sistemi idraulici

2.7.a. Serbatoio chiuso con fluido incompressibile e con mescolamento perfetto

Si consideri un serbatoio in cui un fluido incompressibile subisce una variazione di temperatura (riscaldamento o raffreddamento). A causa della turbolenza o di appositi miscelatori, si suppone che all'interno del serbatoio il miscelamento sia perfetto, ovvero che la temperatura media del fluido sia pari a quella di uscita.

Siano G la portata in massa (in $\frac{\text{Kg}}{\text{s}}$), c il calore specifico (in $\frac{\text{J}}{\text{Kg K}}$), m la massa (in Kg) e T_i , T_u le temperature (in K) relative al fluido in ingresso ed in uscita del serbatoio.

L'energia contenuta nel fluido sotto forma di calore è data da:

$$E = \int_{\text{serbatoio}} c T dV = cmT_m,$$

ove si è indicato con T_m la temperatura (in K) media del fluido. Da questa equazione, utilizzando l'ipotesi di mescolamento perfetto per cui $T_m = T_u$, si ottiene:

$$\frac{dE}{dt} = cm \frac{dT_u}{dt}.$$

Figura 2.16 – Doppio serbatoio con tubazione

Le equazioni dinamiche dei due serbatoi si ottengono imponendo il bilancio di massa, ossia che la variazione della massa nel singolo serbatoio sia pari alla massa entrante meno quella uscente nell'unità di tempo. Si prende la convenzione, come solito, di considerare positive le grandezze in ingresso al sistema e negative quelle uscenti.

Le masse nei due serbatoi sono $\rho A_1 h_1$ e $\rho A_2 h_2$. Indicando poi con G la portata in massa che scorre nella tubazione, le equazioni dinamiche per i due serbatoi risultano essere:

$$\begin{aligned}\rho A_1 \dot{h}_1 &= -G + G_1 \\ \rho A_2 \dot{h}_2 &= G - G_2,\end{aligned}$$

in quanto G è uscente dal primo serbatoio ed entrante nel secondo.

Per la tubazione si possono considerare la proiezione lungo il suo asse delle forze agenti sul fluido. Questo equivale a considerare che le componenti delle forze ortogonali all'asse della tubazione sono bilanciate dalla reazione vincolare, ossia dalle pareti della tubazione.

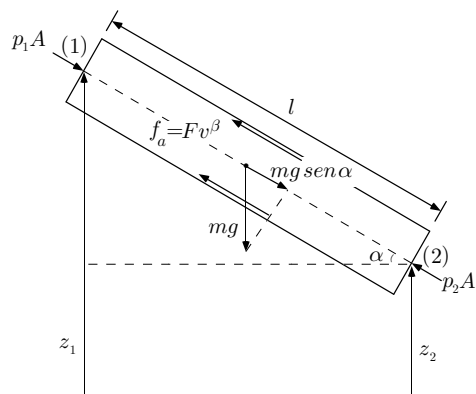


Figura 2.17 – Tubazione

Se si indicano con p_1 e p_2 le pressioni del liquido in corrispondenza delle sezioni (1) e (2) della tubazione (figura 2.17), supposta di sezione A , sulle due sezioni terminali agiscono due forze, aventi direzioni opposte e di modulo pari a p_1A e p_2A . Inoltre si deve considerare la forza peso agente sul liquido, che fornisce una componente pari a $mgsen\alpha$, diretta verso il basso, essendo m la massa del liquido nella condotta. Infine occorre considerare la forza di attrito, dovuta a vari fenomeni, quali la turbolenza del liquido, l'adesione delle particelle alla superficie della tubazione, la rugosità della tubazione; essa è proporzionale ad una certa potenza (usualmente determinata sperimentalmente) della velocità v del liquido nella tubazione ($f_a = Fv^\beta$) e si oppone al moto. La seconda legge della dinamica è quindi:

$$m\dot{v} = p_1A - p_2A - Fv^\beta + mgsen\alpha. \quad (2.26)$$

Le pressioni p_1 e p_2 sono date dalla legge di Stevino^(2.5):

$$p_1 = \bar{p}_1 + \rho gh_1, \quad p_2 = \bar{p}_2 + \rho gh_2,$$

mentre se l è la lunghezza della tubazione la massa di fluido in essa contenuta vale $m = \rho Al$. Se poi α è l'inclinazione rispetto all'orizzontale e z_1, z_2 sono le altezze assolute delle sezioni (1) e (2) della tubazione, risulta $sen\alpha = \frac{z_1 - z_2}{l}$. Infine se si suppone che il fluido abbia nella tubazione un

^(2.5) Si veda D. Sette, *Lezioni di Fisica*, Veschi Editore, p. 384, Roma, 1982.

profilo piatto di velocità (ovvero se si suppone che v rappresenti la velocità media sulla sezione A), poiché $G = \rho Av$ si ricava:

$$v = \frac{G}{\rho A}.$$

Dunque l'equazione (2.26) si riscrive:

$$\rho Al \frac{\dot{G}}{\rho A} = (\bar{p}_1 + \rho gh_1)A - (\bar{p}_2 + \rho gh_2)A - Fv^\beta + \rho Alg \frac{z_1 - z_2}{l}.$$

Posto:

$$x = \begin{pmatrix} h_1 + z_1 \\ h_2 + z_2 \\ G \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} h_1 + z_1 \\ h_2 + z_2 \end{pmatrix},$$

si ottengono le equazioni del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{\rho A_1}x_3 + \frac{1}{\rho A_1}u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{\rho A_2}x_3 + \frac{1}{\rho A_2}u_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{\rho g A}{l}x_1 - \frac{\rho g A}{l}x_2 - \frac{F}{(\rho l A)^\beta}x_3^\beta + \frac{A}{l}u_3. \end{aligned}$$

Il sistema è non lineare a causa della presenza del termine x_3^β . Se però è possibile supporre $\beta = 1$ si ottiene un sistema lineare del terzo ordine (in quanto vi sono tre elementi con memoria: i due serbatoi e la condotta), avente *rappresentazione differenziale* (lineare, stazionaria, a dimensione finita, regolare, a tempo continuo):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho A_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho A_2} \\ \frac{\rho g A}{l} & -\frac{\rho g A}{l} & -\frac{F}{\rho l A} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho A_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{l} \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x. \end{aligned}$$

Si noti infine che se la variazione della velocità nella tubazione è trascurabile, allora dall'equazione (2.26) si ottiene:

$$x_3 = \frac{F^{1/\beta}}{\varrho Al} \left(\frac{\varrho g A}{l} x_1 - \frac{\varrho g A}{l} x_2 + \frac{A}{l} u_3 \right)^{1/\beta},$$

e se $\beta = 1$ allora si ha un sistema lineare del secondo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{\varrho A_1} u_1 - \frac{F}{\varrho^2 A A_1 l} \left(\frac{\varrho g A}{l} x_1 - \frac{\varrho g A}{l} x_2 + \frac{A}{l} u_3 \right) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\varrho A_2} u_2 + \frac{F}{\varrho^2 A A_2 l} \left(\frac{\varrho g A}{l} x_1 - \frac{\varrho g A}{l} x_2 + \frac{A}{l} u_3 \right). \end{aligned}$$

2.8. Modelli di sistemi nucleari e chimici

2.8.a. Reazione nucleare del tipo (n, γ)

I neutroni interagiscono con i nuclei della materia in diversi modi. Tra i vari casi, si può avere l'assorbimento del neutrone da parte di un nucleo. In tal caso possono avere origine diversi processi, il più frequente dei quali è la cosiddetta cattura radiativa, o reazione (n, γ) , in cui il nucleo assorbe il neutrone n ed emette raggi γ . Per valutare la probabilità che una data reazione nucleare abbia luogo si utilizza una grandezza chiamata sezione d'urto, misurata in barn (b), essendo $1b = 10^{-28} \text{m}^2$. Se dei nuclei di un elemento A vengono irraggiati mediante un flusso ϕ di neutroni, a causa delle reazione (n, γ) vengono trasformati in nuclei di un elemento B . Se n_a ed n_b indicano il numero di atomi dei rispettivi elementi, nell'intervallo di tempo dt si avrà:

$$dn_a = -\phi \sigma n_a dt$$

$$dn_b = +\phi \sigma n_a dt$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \dot{n}_a &= -\phi \sigma n_a \\ \dot{n}_b &= \phi \sigma n_a. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Questa reazione può essere utilizzata per produrre isotopi (cioè nuclei con lo stesso numero di protoni) radioattivi, utili nella medicina, nell'industria, nella ricerca. Un tipico esempio è quello del $^{60}_{27}\text{Co}$, radioattivo, prodotto a partire dal $^{59}_{27}\text{Co}$ mediante assorbimento di un neutrone. Il radioisotopo $^{60}_{27}\text{Co}$ così prodotto decade emettendo un raggio gamma di energia 1.17

MeV ed uno da 1.33 MeV ($1 \text{ eV} = 1.60219 \cdot 10^{19} \text{ J}$). Più precisamente un neutrone del $^{60}_{27}\text{Co}$ si trasforma in un protone ed un elettrone, assieme ad un antineutrino: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ (decadimento β^-), ottenendo così il $^{60}_{28}\text{Ni}$. Tale nucleo non è stabile e decade al livello fondamentale emettendo raggi γ . Il $^{60}_{28}\text{Ni}$, così diseccitato, è stabile e non decade ulteriormente.

La disintegrazione spontanea dei nuclei, di tipo β^- o di qualsiasi altro tipo essa sia, è governata da una legge fondamentale, secondo la quale la probabilità per unità di tempo che un nucleo radioattivo decada è una costante indipendente dal tempo. Tale costante è detta costante di disintegrazione λ . Dato un numero elevato $n_b(t)$ di atomi di un elemento radioattivo B all'istante t , il numero di atomi che decadono nell'intervallo dt vale $\lambda n_b(t) dt$. La diminuzione di nuclei radioattivi dell'elemento B nell'intervallo dt è quindi:

$$dn_b = -\lambda n_b(t) dt,$$

mentre l'aumento di atomi della specie C che si produce dal decadimento degli atomi della specie B vale:

$$dn_c = \lambda n_b(t) dt.$$

Pertanto si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{n}_b &= -\lambda n_b(t) \\ \dot{n}_c &= \lambda n_b(t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Volendo dunque descrivere la dinamica delle specie $^{59}_{27}\text{Co}$, $^{60}_{27}\text{Co}$, $^{59}_{28}\text{Ni}$, indicando con $x_1 = n_a$, $x_2 = n_b$ ed $x_3 = n_c$ il numero di atomi di tali elementi, dalle (2.27), (2.28) si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\phi \sigma x_1 \\ \dot{x}_2 &= \phi \sigma x_1 - \lambda x_2 \\ \dot{x}_3 &= \lambda x_2. \end{aligned}$$

Alcuni radioisotopi sono prodotti con reazioni (n, γ) successive. Il nuclide A viene irraggiato con un flusso ϕ di neutroni (in neutroni/s) e, per cattura (n, γ) con sezione d'urto σ_1 , dà luogo al nuclide B . Quest'ultimo può subire due processi: un decadimento con costante λ_1 con produzione del nuclide C , oppure un'altra cattura (n, γ) con sezione d'urto σ_2 e produzione del nuclide D . La specie D decade poi con una costante λ_2 nella

specie E . Volendo descrivere la dinamica dei vari elementi, indicando con n_a, n_b, n_c, n_d, n_e il numero dei loro atomi, valgono i seguenti bilanci:

$$\begin{aligned} dn_a &= -\phi\sigma_1 n_a dt \\ dn_b &= \phi\sigma_1 n_a dt - \lambda n_b dt - \phi\sigma_2 n_b dt \\ dn_c &= \lambda n_b dt \\ dn_d &= \phi\sigma_2 n_b dt - \lambda n_d dt \\ dn_e &= \lambda n_d dt \end{aligned}$$

e quindi posto:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_a \\ n_b \\ n_c \\ n_d \\ n_e \end{pmatrix},$$

valgono le equazioni:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\phi\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi\sigma_1 & -\lambda - \phi\sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi\sigma_2 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} x.$$

Processi di questo tipo sono utilizzati per la produzione di gran parte degli elementi transuranici.

Considerata come uscita il numero di atomi $y = n_b = x_a$, si ottiene una *rappresentazione lineare, stazionaria, a dimensione finita, regolare, a tempo continuo*. Avendo cinque elementi con memoria (i cinque elementi) si hanno cinque variabili di stato.

2.8.b. Reattore nucleare

Si consideri un reattore nucleare costituito da una massa di materiale fissile, in cui può essere inserita una barra scorrevole di materiale assorbente di neutroni. Per le sue proprietà assorbenti, tale barra permette di controllare la quantità di atomi che si fissionano a seguito delle reazioni nucleari.

Ogni neutrone prodotto in una fissione ha una certa probabilità di produrre un'altra fissione e dunque di produrre altri neutroni capaci di provocare una fissione. Si indichi con k_{eff} il numero di neutroni prodotti a

partire da un neutrone capace di indurre una fissione. Per avere un sistema di reazioni che si autosostenga e quindi funzioni in uno stato stazionario, è necessario che sia $k_{eff} = 1$. Se invece $k_{eff} > 1$ il numero di neutroni cresce sempre più e la reazione a catena diverge. La frazione $\delta k = k_{eff} - 1$ di neutroni in eccesso può essere eliminata dalle barre di controllo, inserite per una opportuna profondità.

La maggior parte dei neutroni vengono emessi istantaneamente nel momento della fissione (entro circa 10^{-17} s dalla scissione del nucleo originario), mentre meno dell'un per cento vengono emessi alcuni secondi dopo, nel decadimento di tipo β^- di alcuni prodotti di fissione, detti precursori. I precursori che forniscono questo secondo tipo di neutroni, importantissimi dal punto di vista del controllo di un reattore nucleare, possono essere divisi in sei classi.

Indicando con l il tempo medio di vita di un neutrone (circa 0.1 s), la probabilità per unità di tempo che un neutrone scompaia (per assorbimento o altra causa) è pari a $\lambda = 1/l$. Pertanto la quantità di neutroni che scompaiono dal reattore all'istante t è pari a:

$$n_s(t) = \lambda n(t) = \frac{1}{l} n(t).$$

Per quanto riguarda il numero di neutroni che si producono, si tenga conto che per ogni neutrone scomparso si producono k_{eff} neutroni, di cui una parte istantaneamente ed una parte con un certo ritardo. Sia $\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i$ la frazione di neutroni prodotti a causa delle emissioni ritardate dei precursori, con β_i il contributo del gruppo i . Allora si può scrivere:

$$k_{eff} = k_{eff}(1 - \beta) + k_{eff}\beta = k_{eff1} + k_{eff2},$$

ove $k_{eff1} = k_{eff}(1 - \beta)$ sono i neutroni prodotti istantaneamente per ogni neutrone scomparso e $k_{eff2} = \sum_{i=1}^6 k_{eff}\beta_i$ quelli prodotti con ritardo dai precursori. Essendo i neutroni scomparsi all'istante t pari a $n_s(t)$, istantaneamente si producono

$$n_{p1}(t) = k_{eff1}(t)n_s(t) = \frac{k_{eff}(t)(1 - \beta)}{l} n(t)$$

neutroni. Ma all'istante t vengono anche prodotti dei neutroni dal decadimento dei precursori. Se λ_i (s) sono le costanti di decadimento della classe i dei precursori e c_i sono le concentrazioni (atomi/cm³) dei sei precursori, questi neutroni sono dati da:

$$n_{p2}(t) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t).$$

Dunque i neutroni prodotti all'istante t sono dati da

$$n_p(t) = n_{p1}(t) + n_{p2}(t) = \frac{k_{eff}(t)(1-\beta)}{l}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t),$$

e posto $\delta k(t) = k_{eff}(t) - 1$, l'equazione di bilancio neutronico è:

$$\begin{aligned} \dot{n} &= n_p(t) - n_s(t) = \frac{k_{eff}(t)(1-\beta) - 1}{l}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) = \\ &= -\frac{k_{eff}(t)\beta}{l}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) + \frac{1}{l}n(t)\delta k(t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Per quanto riguarda la variazione delle concentrazioni c_i , poiché il numero di atomi del precursore i che si producono all'istante t vale:

$$c_{pi}(t) = k_{eff}(t)\beta_i n_s(t) = \frac{k_{eff}(t)\beta_i}{l}n(t),$$

mentre quello dei nuclei che decadono vale:

$$c_{di}(t) = \lambda_i c_i(t),$$

per i precursori valgono i bilanci:

$$\dot{c}_i(t) = c_{pi}(t) - c_{di}(t) = \frac{k_{eff}(t)\beta_i}{l}n(t) - \lambda_i c_i(t), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.30)$$

Infine la potenza P prodotta dal reattore si può pensare proporzionale ad $n(t)$ secondo una costante:

$$P(t) = k_p n(t). \quad (2.31)$$

Si ha così il seguente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -k_{eff}(t)\beta & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \beta_1/l & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2/l & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_3/l & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_4/l & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ \beta_5/l & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ \beta_6/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{pmatrix} x + \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} xu \\ y &= \begin{pmatrix} k_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

in cui si è posto

$$x = \begin{pmatrix} n & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}^T, \quad u = \delta k.$$

Si noti che il modello risulta bilineare e tempo-variante, ossia del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + Nxu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

a causa della presenza del termine misto xu e del termine $k_{eff}(t)$.

Tale modello può essere linearizzato attorno al punto di funzionamento, in corrispondenza al quale $n = n_0$, $\delta k = \delta k_0$ e $c_i = c_{i0}$. Si ponga quindi:

$$n = n_0 + \bar{n}, \quad c_i = c_{i0} + \bar{c}_i, \quad \delta k = \delta k_0 + \bar{\delta k}$$

e si noti che $k_{eff} = \delta k + 1 = \delta k_0 + 1 + \bar{\delta k}$. Sviluppando in serie di Taylor ed arrestandosi ai termini del primo ordine si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{n}} &= -\frac{\delta k_0(\beta - 1) + \beta}{l}\bar{n} + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \bar{c}_i + \frac{(1-\beta)n_0}{l}\bar{\delta k} \\ \dot{\bar{c}}_i &= \frac{(\delta k_0 + 1)\beta_i}{l}\bar{n} - \lambda_i \bar{c}_i + \frac{n_0\beta_i}{l}\bar{\delta k}, \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

che assieme alla (2.31) forniscono una *rappresentazione lineare, stazionaria, a dimensione finita, regolare, a tempo continuo*:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

ove:

$$A = \begin{pmatrix} -(\delta k_0(\beta - 1) + \beta)/l & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ (\delta k_0 + 1)\beta_1/l & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\delta k_0 + 1)\beta_2/l & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\delta k_0 + 1)\beta_3/l & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ (\delta k_0 + 1)\beta_4/l & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ (\delta k_0 + 1)\beta_5/l & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ (\delta k_0 + 1)\beta_6/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} (1 - \beta)n_0/l \\ n_0\beta_1/l \\ n_0\beta_2/l \\ n_0\beta_3/l \\ n_0\beta_4/l \\ n_0\beta_5/l \\ n_0\beta_6/l \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e in cui le variabili $x_1 = \bar{n}$, $x_{i+1} = \bar{c}_i$, $u = \bar{\delta}k$ rappresentano le variazioni incrementali rispetto al punto di lavoro prescelto.

2.8.c. Reattore chimico

Si consideri un reattore chimico di volume V (in litri) in cui avviene una reazione chimica tra due specie chimiche, del tipo $A \rightarrow B$. La specie A viene trasportata da un fluido avente calore specifico c $\left(\frac{\text{J}}{\text{Kg K}}\right)$ e densità ϱ $\left(\frac{\text{Kg}}{\text{l}}\right)$, e temperature T_0 , T (in K) rispettivamente all'ingresso e dentro il reattore. Sia Γ la portata volumetrica, in $\frac{1}{\text{s}}$, del fluido in ingresso al reattore.

Si indichino con c_{A_0} e c_A le concentrazioni molari^(2.6) (o molarità, in

^(2.6) Una mole è la quantità di materia contenente $N = 6.02204 \cdot 10^{23}$ atomi o molecole (numero di Avogadro). Indipendentemente dalla sostanza in questione, ogni mole contiene un ugual numero di atomi o molecole della sostanza. Si veda P. Silvestroni, *Fondamenti di Chimica*, Veschi Editore, Roma, 1980.

$\frac{\text{mole}}{\text{l}}$) della specie A rispettivamente nel fluido in ingresso al reattore e in quello all'interno del reattore.

Poiché si suppone che il mescolamento sia perfetto, la concentrazione della specie A e la temperatura del fluido in uscita dal reattore sono considerate uguali a c_A e T .

La reazione chimica sia esotermica e dunque il reattore sia raffreddato da uno scambiatore di calore, costituito da una serpentina in cui scorre un fluido refrigerante, con portata Γ_r e calore specifico c_r .

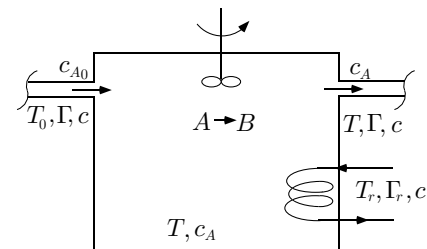


Figura 2.18 – Reattore chimico

La velocità della reazione chimica $\left(\text{in } \frac{\text{mole}}{\text{l s}}\right)$, ossia il numero di moli di A che si trasformano in moli di B nell'unità di tempo e di volume, dipende da c_A e dalla temperatura T , e per la legge di van't Hoff è pari a $v_A = k_1 c_A e^{-k_2/T}$ (k_1 è espresso in $\frac{1}{\text{s}}$ e k_2 in K), mentre la quantità di energia assorbita nella serpentina di refrigerazione nell'unità di tempo è proporzionale alla differenza di temperatura tra fluidi e alla portata del refrigerante: $\delta = k_3(T - T_r)\Gamma_r$ (k_3 è espresso in $\frac{\text{J}}{\text{K l}}$). Infine sia b l'energia rilasciata durante la reazione chimica di una mole di A in una di B $\left(\text{in } \frac{\text{J}}{\text{mole}}\right)$.

Il modello del reattore si ottiene scrivendo i bilanci di massa e di energia. Come solito si attribuisce segno positivo alle grandezze in ingresso al sistema, costituito dal reattore, e negativo a quelle in uscita.

Per il bilancio di massa della specie A , si deve imporre che la variazione nel tempo del numero di moli presenti nel reattore, sia pari alla differenza tra numero di moli in ingresso meno il numero di quelle uscenti o che vengono trasformate a causa della reazione chimica. In numero di moli di A nel reattore sono Vc_A moli, con V costante. La differenza tra moli in ingresso

e quelle di uscita nell'unità di tempo è pari a $\Gamma(c_{A_0} - c_A)$, mentre il numero di moli di A reagenti nell'unità di tempo è pari a $Vv_A = k_1 V c_A e^{-k_2/T}$. Il bilancio della specie A è dunque:

$$V\dot{c}_A = \Gamma(c_{A_0} - c_A) - k_1 V c_A e^{-k_2/T}.$$

Per il bilancio energetico del fluido che trasporta la specie A occorre imporre che la variazione di energia nell'unità di tempo del fluido nel reattore sia pari alla differenza tra energia entrante ed energia uscente nell'unità di tempo. L'energia del fluido nel reattore è pari a $c\rho VT$, mentre l'energia entrante nell'unità di tempo nel sistema è data da quella contenuta nel fluido in ingresso ($\Gamma\rho cT_0$) e quella dovuta alla reazione (supposta esotermica: $bVv_A = bVk_1 c_A e^{-k_2/T}$) e l'energia uscente nell'unità di tempo dal sistema è quella nel fluido uscente ($\Gamma\rho cT$) e quella estratta dallo scambiatore di calore ($\delta = k_3(T - T_r)\Gamma_r$). Dunque il bilancio energetico del fluido è dato da:

$$c\rho V\dot{T} = \Gamma\rho c(T_0 - T) + bVk_1 c_A e^{-k_2/T} - k_3(T - T_r)\Gamma_r.$$

Per scrivere in maniera più semplice queste equazioni, si introducano le seguenti variabili adimensionali:

$$x_1 = \frac{c_A}{c_{A_0}}, \quad x_2 = \frac{\rho c T}{b c_{A_0}}, \quad \tau = \frac{\Gamma}{V} t, \quad u = \frac{\Gamma_r}{\Gamma},$$

indicanti rispettivamente la concentrazione, la temperatura, il tempo e la portata refrigerante (adimensionali), e le seguenti costanti adimensionali:

$$\bar{k}_1 = \frac{k_1 V}{\Gamma}, \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2 \rho c}{b c_{A_0}}, \quad \bar{k}_3 = \frac{k_3}{c\rho}.$$

Si hanno così le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_{1_0} - x_1 - \bar{k}_1 x_1 e^{-\bar{k}_2/x_2} \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_{2_0} - x_2 + \bar{k}_1 x_1 e^{-\bar{k}_2/x_2} - \bar{k}_3(x_2 - x_{2r})u, \end{aligned}$$

ove $x_{1_0} = 1$ ed x_{2_0} sono i valori iniziali (cioè per $t = \tau = 0$) delle variabili. Si noti che se T_r è costante allora anche x_{2r} lo è. Inoltre la portata u costituisce l'ingresso al sistema, che risulta modellato da equazioni non lineari.

Si noti che ci si può ridurre ad un modello bilineare, ossia ad un modello in cui appaiono solo prodotti tra due variabili di stato o tra una variabile di stato e l'ingresso, notando che valgono le approssimazioni:

$$\frac{1}{x_2} \cong \frac{1}{x_{2_0}} - \left(\frac{1}{x_{2_0}^2} \right) \Big|_{x_{2_0}} (x_2 - x_{2_0}) = \frac{2}{x_{2_0}} - \frac{1}{x_{2_0}^2} x_2$$

$$e^{-\bar{k}_2/x_2} \cong 1 - \frac{\bar{k}_2}{x_2} \cong 1 - \frac{2\bar{k}_2}{x_{2_0}} + \frac{\bar{k}_2}{x_{2_0}^2} x_2$$

essendosi fermati al primo ordine in entrambi gli sviluppi in serie. Le equazioni così approssimate sono:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_{1_0} - x_1 - \bar{k}_1 \left(1 - \frac{2}{x_{2_0}} \right) x_1 - \frac{\bar{k}_1}{x_{2_0}^2} x_1 x_2$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_{2_0} - x_2 + \bar{k}_1 \left(1 - \frac{2}{x_{2_0}} \right) x_1 + \frac{\bar{k}_1}{x_{2_0}^2} x_1 x_2 - \bar{k}_3(x_2 - x_{2r})u.$$

2.9. Esercizi e problemi

Esercizio 2.1. Un plotter è costituito da un pennino che si muove tra due arresti, posti a distanza di $d = 0.5$ m. Esso è mosso da una cinghia, tramite una puleggia di raggio $r = 0.02$ m, collegata ad un motore M .

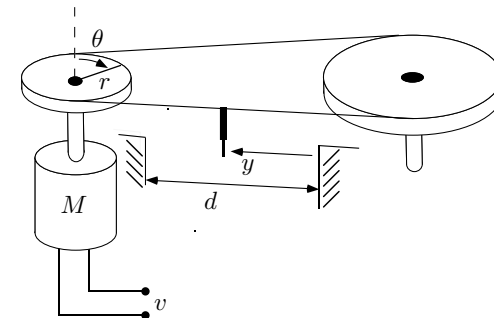


Figura 2.19

Il motore è in corrente continua, alimentato con corrente di statore costante, ed ha come ingresso la tensione applicata al rotore e come uscita la posizione angolare ϑ . Il circuito rotorico ha una resistenza $R = 0.3 \Omega$ ed

una induttanza $L = 0.025$ H. La forza controelettromotrice è proporzionale alla velocità angolare secondo un fattore $k_1 = 1 \text{ N} \frac{\text{m}}{\text{A}}$, mentre il momento meccanico è proporzionale all'intensità di corrente i nel motore, secondo una costante $k_2 = 1 \text{ N} \frac{\text{m}}{\text{A}}$. Il momento d'inerzia J del rotore, tenendo conto anche dell'inerzia del carico, vale 2 Kg m^2 e l'attrito, sempre tenendo conto del carico, è di tipo viscoso con coefficiente d'attrito $\beta = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Nm} \frac{\text{s}}{\text{rad}}$. Si determini il modello matematico del sistema.

Soluzione. Facendo riferimento allo schema di un motore in corrente continua alimentato in tensione (figura 2.12), l'equazione di Ohm si scrive come $v - Ri - L \frac{di}{dt} - f_{cem} = 0$, ove la forza controelettromotrice risulta proporzionale alla velocità angolare del rotore $f_{cem} = k_1 \omega$. La seconda equazione cardinale fornisce l'equazione meccanica del motore $M^{est} = J\dot{\omega} + \beta\omega$, in cui il momento meccanico (supposto un rendimento ideale pari ad uno) disponibile sull'asse del motore è proporzionale all'intensità di corrente di armatura: $M^{est} = k_2 i$. Infine $\dot{\vartheta} = \omega$. Ovviamente la posizione del pendino è data da $y = \vartheta r$. Inserendo i valori numerici e ponendo $x = \begin{pmatrix} i \\ \omega \\ \vartheta \end{pmatrix}$, $u = v$, si ottiene:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -12 & -40 & 0 \\ 0.5 & -0.001 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \quad 0 \quad 0.02) x.$$

Esercizio 2.2. Sia dato un pendolo di massa m e lunghezza $2d$, il cui moto avviene nel solo piano verticale.

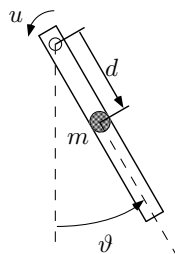


Figura 2.20

Il pendolo può ruotare di 360° grazie ad un momento u applicato sull'asse di rotazione. Indicato con J il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione, derivarne il modello dinamico.

Soluzione. Il bilanciamento dei momenti agenti sulla struttura meccanica è dato da

$$J\ddot{\vartheta} = -mgd \sin \vartheta + u.$$

Scegliendo come variabili di stato la posizione angolare $\vartheta(t)$ e la sua derivata $\dot{\vartheta}(t)$, e ponendo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$, il sistema dinamico è descritto dalle seguenti equazioni differenziali del primo ordine:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{mgd}{J} \sin x_1 + \frac{1}{J} u.$$

Esercizio 2.3. Sia dato un sistema costituito da un asse verticale, ruotante ad una velocità angolare costante ω , ed un asse inclinato di un angolo α rispetto al primo e solidale con esso, su cui scorre un corpo pesante di massa m e dimensioni trascurabili. Sia presente l'attrito di scorrimento, tenuto in conto con un coefficiente β . Sul corpo agisca inoltre una forza u diretta come in figura. Determinare il modello del sistema.

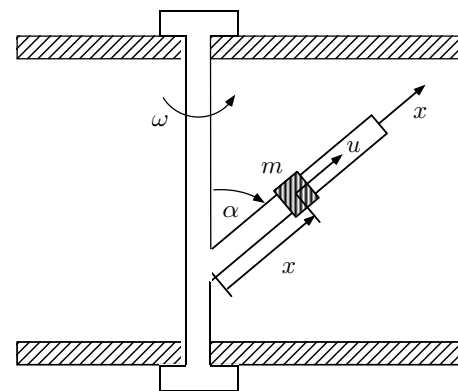


Figura 2.21

Soluzione. Proiettando le forze lungo l'asse x si ha l'equazione dinamica del moto della massa:

$$m\ddot{x} = u - mg\cos\alpha - \beta\dot{x} + m\omega^2 x \sin^2\alpha,$$

ove l'ultimo termine a secondo membro è dovuto alla forza centrifuga. Posto dunque $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, si ottiene il modello cercato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1\omega^2 \sin^2\alpha - \frac{\beta}{m}x_2 - g\cos\alpha + \frac{1}{m}u.\end{aligned}$$

Problema 2.1. Con riferimento al modello dell'algoritmo di integrazione presentato nel paragrafo 2.1.a, mostrare che utilizzando, a costo di una maggiore complessità di calcolo, l'approssimazione:

$$\int_{kT-T}^{kT} u(\tau) d\tau = T \frac{u(kT) + u((k-1)T)}{2}$$

in (2.1), si ottiene la seguente *rappresentazione con lo stato*:

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + \frac{T}{2}u(k) \\ y(k) = x(k) + \frac{T}{2}u(k), \quad x(1) = \frac{T}{2}u(0). \end{cases}$$

Problema 2.2. Si supponga di approssimare la derivata di una funzione $u(t)$ in $t = kT$ con la pendenza del segmento di retta che congiunge $u(kT - T)$ con $u(kT)$, per cui:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{kT} \cong \frac{y(kT) - y(kT - T)}{T}.$$

Verificare che il modello dell'algoritmo di risoluzione numerica dell'equazione differenziale:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \beta u(t)$$

è dato da:

$$y(k) = \frac{1}{1 + T\alpha}y(k-1) + \frac{T\beta}{1 + T\alpha}u(k).$$

Problema 2.3. Utilizzando l'approssimazione della derivata proposta nel problema 2.2, mostrare che il modello dell'algoritmo di risoluzione numerica dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \alpha \frac{d\varphi(t)}{dt} + \beta\varphi(t) = \gamma u(t)$$

è dato da:

$$\varphi(k) = \frac{T\alpha + 2}{1 + T\alpha + T^2\beta}\varphi(k-1) - \frac{1}{1 + T\alpha + T^2\beta}\varphi(k-2) + \frac{T^2\gamma}{1 + T\alpha + T^2\beta}u(k).$$

Posto inoltre $x_1(k) = \varphi(k-2)$, $x_2(k) = \varphi(k-1)$, mostrare che si ottiene la seguente *rappresentazione con lo stato*:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{1 + T\alpha + T^2\beta} & \frac{T\alpha + 2}{1 + T\alpha + T^2\beta} \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T^2\gamma}{1 + T\alpha + T^2\beta} \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(k)\end{aligned}$$

relativa ad un sistema stazionario a tempo discreto di dimensione due, in cui come uscita si è considerato il valore $\varphi(k-2)$. Qual è lo schema realizzativo corrispondente?

Problema 2.4. Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale P_1 di massa m_1 soggetto ad una forza elastica di richiamo di costante k_1 ed un attrito viscoso costante f_1 . Inoltre P_1 è connesso tramite una forza elastica k_2 ed un attrito viscoso (proporzionale alla velocità relativa) di costante f_2 , ad un punto materiale P_2 di massa m_2 , cui è applicata una forza orizzontale u . Si determini il modello differenziale del sistema ottenuto assumendo come ingresso u e come uscita lo spostamento di P_1 dalla posizione di equilibrio quando $u = 0$.

Problema 2.5. Il sistema meccanico illustrato in figura è costituito da una sbarra rigida di massa trascurabile che collega due punti materiali P_1 e P_2 di masse m_1 ed m_2 , soggetti ciascuno a forze elastiche di richiamo e ad attriti viscosi. Al centro della sbarra agisce una forza verticale di intensità u . Si determini il modello differenziale del sistema ottenuto assumendo come ingresso u e come uscita le posizioni dei punti Q_1 e Q_2 situati a $1/3$ e $2/3$ della sbarra, misurate rispettivamente alla posizione di equilibrio quando $u = 0$.

Figura 2.22

Problema 2.6. Un dispositivo meccanico complesso, schematizzato in figura come un rettangolo, fornisce una coppia pari all'integrale di un opportuno ingresso u . Tale coppia muove un pignone di 24 denti il quale ingrana su una condotta di 120 denti. Sull'asse di questa ultima è calettato un carico di momento inerzia J e di attrito viscoso F . Determinare il modello differenziale assumendo come ingresso $u(t)$ e come uscita la posizione angolare dell'asse della condotta.

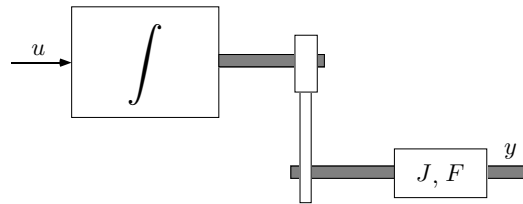


Figura 2.23

Problema 2.7. Si determini il modello differenziale ottenuto assumendo come ingresso la tensione u e come uscita la corrente y nella rete elettrica in figura.

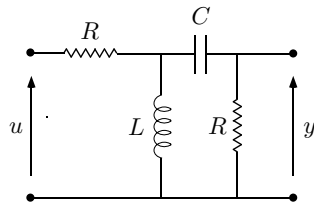


Figura 2.24

Problema 2.8. Si determini il modello differenziale ottenuto assumendo come ingresso la tensione u e come uscite le correnti y_1 e y_2 nella rete elettrica in figura.

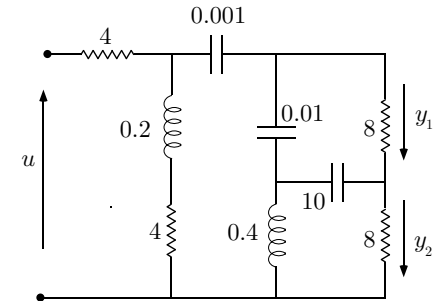


Figura 2.25

Problema 2.9. Si determini il modello esplicito del sistema a tempo discreto rappresentato tramite lo schema realizzativo in figura.

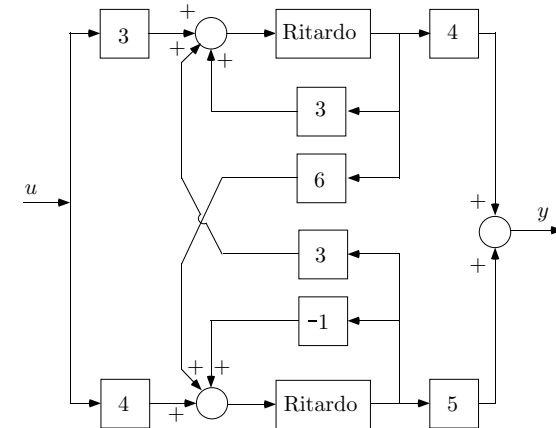


Figura 2.26

Problema 2.10. Fornire lo schema di realizzazione del motore in corrente continua alimentato in tensione con carico ed albero flessibile (paragrafo 2.6.d).

3. Sistemi lineari: analisi nel dominio del tempo. I modi naturali nell'evoluzione libera e in quella forzata

Nel capitolo precedente si è visto come il processo di modellistica a partire da un dato oggetto, fenomeno o processo fisico, conduca in molti casi di interesse, eventualmente a seguito di un processo di semplificazione, alla costruzione di una rappresentazione con lo stato, lineare, stazionaria a dimensione finita.

In questo capitolo viene affrontato lo studio del comportamento del sistema nel dominio del tempo, prima per la classe dei sistemi a tempo continuo, quindi per la classe dei sistemi a tempo discreto.

3.1. I modi naturali nell'evoluzione libera dello stato

3.1.a. Sistemi a tempo continuo regolari

Assegnata una rappresentazione implicita con lo stato di un sistema a tempo continuo lineare, a dimensione finita, stazionario:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

le evoluzioni nello stato e nell'uscita assumono la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau) d\tau \\ y(t) &= \psi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Il problema è quello di calcolare le matrici $\Phi(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$, $H(\cdot)$, $W(\cdot)$ a partire da A , B , C , D . A tale proposito, come noto, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, & \Psi(t) &= C e^{At}, \\ H(t) &= e^{At} B, & W(t) &= C e^{At} B + D \delta(t). \end{aligned}$$

Per la matrice di transizione dello stato e^{At} , che compare nelle (3.2), valgono le note proprietà, analoghe a quelle dell'esponenziale di uno scalare:

$$e^{A \cdot 0} = I, \quad e^{At_1} e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}, \quad (e^{At})^{-1} = e^{-At}.$$

Nel caso in cui gli n autovalori di A siano distinti e se μ autovalori sono reali e 2ν sono complessi e coniugati ($n = \mu + 2\nu$), è noto che la risposta libera nello stato assume l'espressione:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i e^{\lambda_i t} u_i + \sum_{j=1}^{\nu} m_j e^{\alpha_j t} \left[\sin(\omega_j t + \varphi_j) u_{ja} + \cos(\omega_j t + \varphi_j) u_{jb} \right], \quad (3.3)$$

in cui

$$\begin{aligned} c_i &= v_i^T x_0, & c_{ja} &= v_{ja}^T x_0, & \sin \varphi_j &= \frac{c_{ja}}{m_j}, \\ m_j &= \sqrt{c_{ja}^2 + c_{jb}^2}, & c_{jb} &= v_{jb}^T x_0, & \cos \varphi_j &= \frac{c_{jb}}{m_j}, \end{aligned}$$

e dove u_{ja} , u_{jb} sono la parte reale e quella complessa degli autovettori u_j , \bar{u}_j associati agli autovalori complessi e coniugati $\lambda_j = \alpha_j + j\omega_j$, $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - j\omega_j$, mentre v_{ja} , v_{jb} , legati alle parti reale e complessa degli autovettori sinistri (si veda l'esercizio 3.2), si ricavano invertendo T^{-1} .

I termini della (3.3) sono i modi naturali. In particolare quelli della prima sommatoria sono i *modi aperiodici*, mentre quelli della seconda sono i *modi pseudoperiodici*.

Nel caso di autovalori non tutti distinti e limitandosi per semplicità al caso di autovalori reali, siano \mathcal{U}_i , $i = 1, \dots, r$, gli autospazi generati dagli autovettori generalizzati associati agli r autovalori distinti λ_i , calcolati come indicato nel capitolo 1 a proposito della forma canonica di Jordan. Lo spazio di stato X viene così decomposto nella somma diretta degli r sottospazi \mathcal{U}_i , aventi dimensione pari alla molteplicità algebrica di λ_i :

$$X = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r.$$

Con riferimento alla decomposizione così effettuata di X , se $x_0 = \sum_{i=1}^r x_{0i}$ è lo stato iniziale, con x_{0i} combinazione lineare degli autovettori (generalizzati) che generano \mathcal{U}_i , la risposta libera nello stato assume l'espressione:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^r \left[I + t(A - \lambda_i I) + \dots + \frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!} (A - \lambda_i I)^{k_i-1} \right] e^{\lambda_i t} x_{0i}, \quad (3.4)$$

ove con k_i si è indicato l'ordine massimo degli autovettori generalizzati che compaiono nella combinazione lineare che dà x_{0i} . Ciascun termine della sommatoria (3.4) è un modo naturale associato all'autovalore λ_i .

Esercizio 3.1. Si studi la risposta libera nello stato per un sistema a tempo continuo in cui la matrice dinamica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Occorre innanzi tutto determinare gli autovalori di A , ossia le radici dell'equazione caratteristica:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Pertanto si ricava $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Si procede quindi alla ricerca degli autovettori destri, iniziando da quelli associati a λ_1 :

$$(A - \lambda_1 I)u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} u_1.$$

Si trova:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

ove α è una costante che può essere scelta arbitrariamente. Si sceglierà per semplicità $\alpha = 1$. In modo analogo si trovano i restanti autovettori destri:

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori sinistri si calcolano imponendo la condizione di ortonormalità, ossia imponendo che:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

È ovvio che essi potevano essere calcolati anche a partire dalla definizione di autovettore sinistro, definito a meno di una costante di proporzionalità che viene fissata imponendo la condizione di ortonormalità. Ad esempio v_1 poteva essere calcolato da: $v_1^T(A - \lambda_1 I) = 0$, ottenendo $v_1^T = (2\beta \quad \beta \quad \beta)$, con β determinabile imponendo: $v_1^T u_1 = 1$. Con la scelta fatta per u_1 si ricava $\beta = 1$.

È ora immediato calcolare la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{i=1}^3 e^{\lambda_i t} u_i v_i^T = e^t \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t + e^{-t} - 2 & e^t + e^{-t} - 2 & e^t - 1 \\ -2e^t + 2 & -e^t + 2 & -e^t + 1 \\ -2e^{-t} + 2 & -2e^{-t} + 2 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e l'evoluzione libera nello stato:

$$x_l(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ove, come solito, $c_1 = v_1^T x_0$, $c_2 = v_2^T x_0$ e $c_3 = v_3^T x_0$. Si noti che le componenti dell'evoluzione libera lungo le direzioni degli autovettori sono date da

$$\begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{-t} \\ c_3 \end{pmatrix}, \text{ mentre quelle rispetto alla base canonica sono } \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \\ -c_1 e^t + c_3 \\ -2c_2 e^{-t} + c_3 \end{pmatrix}.$$

L'evoluzione libera dello stato è dunque caratterizzata da un modo aperiodico crescente e^t , uno aperiodico decrescente e^{-t} ed un modo costante. Facendo riferimento alle componenti di $x_l(t)$ rispetto alla base data dagli autovettori, si comprende facilmente che se ad esempio x_0 è proporzionale ad u_1 (curva a), e dunque ortogonale a v_2 e v_3 , le prime due componenti dello stato crescono indefinitamente mentre la terza resta nulla. Se poi x_0 è proporzionale ad u_2 (curva b), la prima e la terza componente dello stato tendono esponenzialmente a zero mentre la seconda è sempre nulla. Infine se x_0 è proporzionale a u_3 (curva c), il vettore di stato rimane costante. Nel caso in cui x_0 non abbia la direzione di un autovettore possono farsi discorsi analoghi (curva d): se è diversa da zero la componente di x_0 lungo u_1 almeno una componente dello stato tende all'infinito; se è nulla la componente di x_0 lungo u_1 ma è diversa da zero quella lungo u_3 lo stato tende ad una costante; infine se anche la componente di x_0 lungo u_3 è nulla si ricade nel secondo dei casi precedenti, cioè lo stato tende esponenzialmente a zero.

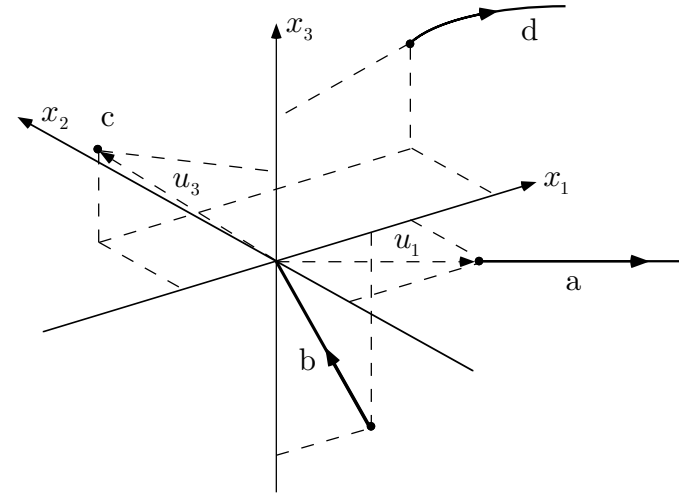


Figura 3.1 – Traiettorie nello spazio di stato

Esercizio 3.2. Mostrare che relazione esiste tra gli autovettori sinistri, ortonormali agli autovettori destri $u = u_a + ju_b$, $\bar{u} = u_a - ju_b$, e i vettori $v_a + jv_b$, $v_a - jv_b$, ove v_a e v_b sono ottenuti invertendo la matrice $T^{-1} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix}$.

Soluzione. Gli autovettori sinistri ortonormali sono calcolabili invertendo la matrice

$$\begin{pmatrix} u & \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a + ju_b & u_a - ju_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a & u_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}.$$

Si ricava così:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & \bar{u} \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v_a^T - jv_b^T}{2} \\ \frac{v_a^T + jv_b^T}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^T \\ \bar{v}^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gli autovettori sinistri ortonormali a u , \bar{u} sono dunque $v = \frac{1}{2}(v_a - jv_b)$, $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_a + jv_b)$, e non $v_a + jv_b$, $v_a - jv_b$. Si noti che questi ultimi due sono ancora autovettori sinistri, ma essendo il doppio di \bar{v} e v essi corrispondono rispettivamente agli autovettori $\bar{\lambda}$ e λ (e non a λ , $\bar{\lambda}$).

Esercizio 3.3. Si studi la risposta libera dello stato per un sistema a tempo continuo in cui la matrice A è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Data la forma triangolare di A , si ottiene subito per gli autovalori:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -2.$$

Corrispondentemente gli autovettori risultano essere:

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & u_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & u_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_1^T &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, & v_2^T &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & v_3^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ne segue dunque che:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & e^{-t} + e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} & e^{-3t} & \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t}) - e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e posto $c_i = v_i^T x_0$, $i = 1, 2, 3$:

$$x_l(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con componenti rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$ date da $c_1 e^{-t}$, $c_2 e^{-3t}$, $c_3 e^{-2t}$. Dunque qualsiasi evoluzione tende all'origine, come evidenziato in figura.

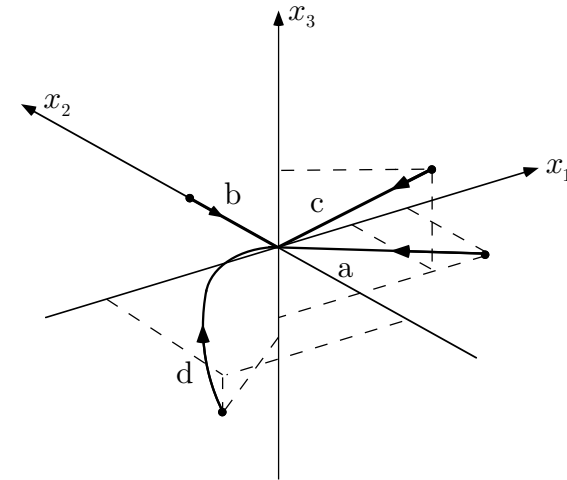


Figura 3.2 – Traiettorie nello spazio di stato

Infine si noti che, poiché le componenti di $x_l(t)$ rispetto agli assi cartesiani sono $2c_1 e^{-t} + c_3 e^{-2t}$, $-c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} - c_3 e^{-2t}$, $c_3 e^{-2t}$, se la terza componente di x_0 è inizialmente nulla, rimane sempre tale.

Esercizio 3.4. Si scriva la risposta libera dello stato per un sistema a tempo continuo in cui la matrice dinamica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a partire dallo stato $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Essendo A diagonale a blocchi,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 + j, \quad \lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = -1 - j.$$

Si ha pertanto un autovalore reale ed una coppia di autovalori complessi coniugati. Corrispondentemente si possono determinare gli autovettori:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 + j \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 - j \end{pmatrix},$$

$$v_1^T = (1 \ 0 \ 0), \quad v_2^T = (0 \ \frac{1-j}{2} \ -\frac{j}{2}), \quad v_3^T = (0 \ \frac{1+j}{2} \ \frac{j}{2}).$$

Considerando gli autovettori:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e la trasformazione:

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_{2a}^T \\ v_{2b}^T \end{pmatrix} = (u_1 \ u_a \ u_b)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

che trasforma A nella matrice:

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \omega \\ 0 & -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

si ricava:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{At} &= T^{-1}e^{Dt}T = T^{-1} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ 0 & -e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{pmatrix} T = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}(\sin t + \cos t) & e^{-t}\sin t \\ 0 & -2e^{-t}\sin t & e^{-t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A questa stessa espressione si perviene considerando la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ e l'espressione:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{At} &= e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{(-1+j)t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-j}{2} & -\frac{j}{2} \\ 0 & j & \frac{j+1}{2} \end{pmatrix} + \\ &+ e^{(-1-j)t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{j+1}{2} & \frac{j}{2} \\ 0 & -j & -\frac{j-1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che, tramite le formule di Eulero, permette di riottenere la (3.5).

Il calcolo di $\Phi(t)$ può essere fatto anche osservando che le sue colonne sono le evoluzioni libere a partire da opportune condizioni iniziali, per cui si può utilizzare la (3.3) per il calcolo della $\Phi(t)$ eseguito colonna per colonna. Infatti ponendo $x_0 = (1 \ 0 \ 0)^T$, si ottiene:

$$x_{l1}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(curva a) mentre ponendo $x_0 = (0 \ 1 \ 0)^T$:

$$\begin{aligned} x_{l2}(t) &= \sqrt{2}e^{-t} \left[\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t}(\sin t + \cos t) \\ -2e^{-t}\sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(curva b) ed infine con $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$:

$$x_{l3}(t) = e^{-t} \left[\sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \sin t \\ e^{-t} (\cos t - \sin t) \end{pmatrix}$$

(curva c).

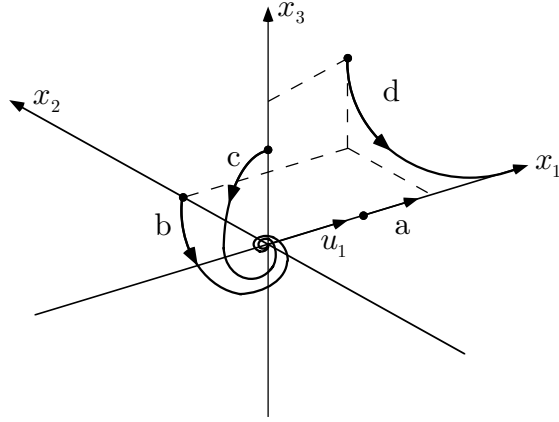


Figura 3.3 – Traiettorie nello spazio di stato

Considerando ora lo stato iniziale x_0 , e i vettori

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_a & u_b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(si noti che si tratta dell'inversione di una matrice elementare), in base alla (3.3) si ottiene:

$$c_1 = v_1^T x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1, \quad c_{2a} = v_{2a}^T x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$c_{2b} = v_{2b}^T x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2, \quad m_2 = 2, \quad \varphi_2 = 0,$$

e dunque:

$$\begin{aligned} x_l(t) &= e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^{-t} \left[\sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^{-t} \sin t \\ 2e^{-t} (\cos t - \sin t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La stessa espressione si ottiene, più direttamente, calcolando $\Phi(t)x_0$, ovvero da $x_l(t) = x_{l1}(t) + 2x_{l3}(t)$.

È opportuno sottolineare che, per la particolare forma della matrice A , la prima componente di $x_l(t)$ risulta essere “disaccoppiata” dalle restanti due, e quindi evolve indipendentemente da queste. Per tale ragione l'evoluzione a partire da uno stato iniziale proporzionale ad u_1 si svolge lungo la retta contenente u_1 con legge temporale esponenziale crescente; viceversa, l'evoluzione a partire da uno stato iniziale contenuto nel piano individuato dai vettori u_a, u_b si svolge lungo una spirale con legge temporale pseudoperiodica.

Esercizio 3.5. Determinare l'evoluzione libera dello stato a partire dallo stato x_0 , per un sistema avente matrice dinamica A , ove:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & -6 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Poiché la matrice A è triangolare a blocchi, il calcolo degli autovalori può essere condotto separatamente per ciascun blocco:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si trova in tal modo:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = -2 - j, \quad \lambda_5 = -2 + j.$$

Gli autovettori sono quindi:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_5 = u_4^{*T},$$

avendo indicato con “*” il coniugato trasposto. Al posto di u_4 e u_5 si considerano i vettori

$$u_{4a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{4b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La ricerca degli autovettori sinistri, che sarebbero necessari per determinare le costanti c_i , c_{ja} , c_{jb} , può essere evitata osservando che risulta:

$$x_0 = u_1 + u_2 + u_3 + u_{4a},$$

per cui:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 1, \quad c_{4a} = 1, \quad c_{4b} = 0.$$

In caso non si fosse notato ciò, nell'inversione della matrice

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_{4a} & u_{4b} \end{pmatrix}$$

si tenga conto che si tratta di una matrice triangolare a blocchi.

Applicando la (3.3) si ottiene:

$$\begin{aligned} x_l(t) &= e^t u_1 + e^{-t} u_2 + e^{2t} u_3 + e^{-2t} \left[\sin \left(-t + \frac{\pi}{2} \right) u_{4a} + \cos \left(-t + \frac{\pi}{2} \right) u_{4b} \right] = \\ &= e^t u_1 + e^{-t} u_2 + e^{2t} u_3 + 2e^{-2t} \left[\cos t u_{4a} + \sin t u_{4b} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} + 2e^{-2t} \cos t \\ e^t + e^{2t} \\ e^{-t} + 2e^t \\ 2e^{-2t} \sin t \\ 2e^{-2t} \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si può poi verificare che, coerentemente, risulta $x(0) = x_0$.

3.1.b. Sistemi a tempo discreto

Data una rappresentazione con lo stato di un sistema lineare, a dimensione finita, stazionario

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

le evoluzioni nello stato e nell'uscita sono date dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t-t_0)x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau) \\ y(t) &= \psi(t-t_0)x_0 + \sum_{\tau=t_0}^t W(t-\tau)u(\tau). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Analogamente al caso a tempo continuo, si tratta di calcolare le matrici che compaiono nelle (3.7) a partire da A , B , C , D . Le relazioni cercate sono:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= A^t, \quad t \geq 0, & H(t) &= A^{t-1}B, \quad t > 0, \\ \Psi(t) &= CA^t, \quad t \geq 0, & W(t) &= \begin{cases} D & \text{se } t = 0 \\ CA^{t-1}B & \text{se } t > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si noti che nel caso a tempo discreto la matrice di transizione dello stato $\Phi(t)$ è definibile anche per $t < 0$ se A è invertibile. Nel caso a tempo continuo, invece, la matrice di transizione dello stato è definita anche per $t < 0$, sicché può sempre essere invertita.

Nel caso in cui gli autovalori di A siano distinti, ed indicato con μ il numero di autovalori reali e con ν quello degli autovalori complessi e coniugati, la risposta libera nello stato per sistemi a tempo discreto assume l'espressione:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^{\mu} c_i \lambda_i^t u_i + \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_j^t m_j \left[\sin(\vartheta_j t + \varphi_j) u_{ja} + \cos(\vartheta_j t + \varphi_j) u_{jb} \right] \quad (3.8)$$

in cui c_i , c_{ja} , c_{jb} , m_j , φ_j sono calcolabili come nel caso a tempo continuo.

I termini a secondo membro della (3.8) sono i modi naturali. Più precisamente quelli della prima sommatoria sono i *modi aperiodici*, se $\lambda_i > 0$, e i *modi alternanti*, se $\lambda_i < 0$, mentre quelli della seconda sommatoria sono i *modi pseudoperiodici*.

Nel caso di autovalori non tutti distinti, definito il polinomio fattoriale

$$\frac{t^{(h)}}{h!} := \binom{t}{h} = \frac{t(t-1)\cdots(t-h+1)}{h!},$$

l'evoluzione libera a partire da $x_0 = \sum_{i=1}^n x_{0i}$, con $x_{0i} \in \mathcal{U}_i$, si scrive:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{h=0}^t \frac{t^{(h)}}{h!} (A - \lambda_i I)^h \lambda_i^{t-h} x_{0i}.$$

Esercizio 3.6. Studiare la risposta libera nello stato per il sistema a tempo discreto caratterizzato dalla seguente matrice dinamica:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

a partire da $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Soluzione. Detto $\omega = -\gamma$, è ovvio che:

$$\lambda_1 = \alpha - j\gamma, \quad \lambda_2 = \alpha + j\gamma, \quad \lambda_3 = \beta.$$

con

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1-j \\ 1+j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = u_1^{*T}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo dell'evoluzione a partire da uno stato iniziale assegnato x_0 , può essere effettuato in base alla (3.8). Si ricava:

$$u_{1a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{1b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_{1a}^T \\ v_{1b}^T \\ v_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1a} & u_{1b} & u_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(si tenga conto nel calcolo dell'inversa che T^{-1} è diagonale a blocchi) e quindi:

$$c_{1a} = v_{1a}^T x_0 = 1, \quad c_{1b} = v_{1b}^T x_0 = 0, \quad c_3 = v_3^T x_0 = 0, \quad \sigma_1 = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2},$$

$m_1 = 1$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta_1 = \arctan \frac{\omega}{\alpha} = -\theta$, avendo posto $\theta = \arctan \frac{\gamma}{\beta}$. Pertanto si ha:

$$x_l(t) = \sigma_1^t \left[\cos \theta t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin \theta t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

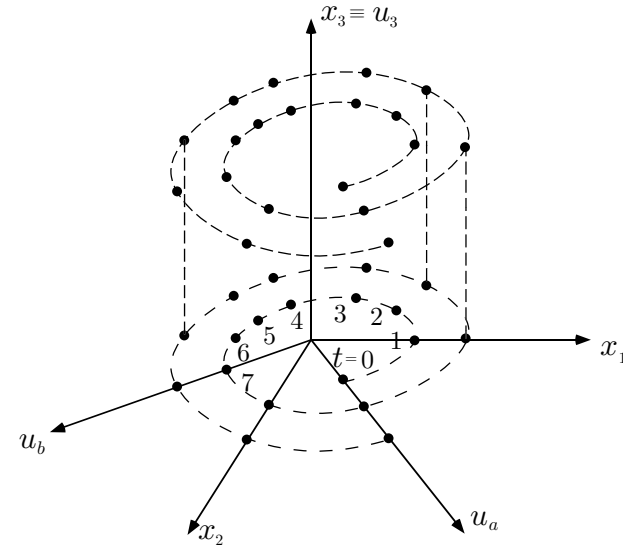


Figura 3.4

L'evoluzione rimane quindi confinata al sottospazio generato da u_{1a} , u_{1b} , come d'altra parte è noto in quanto x_0 appartiene a tale sottospazio. L'analisi può essere facilmente completata facendo variare lo stato iniziale x_0 in \mathbb{R}^3 .

Si noti che alla stessa espressione si arriva se si considerano altri due autovettori destri corrispondenti all'autovalore complesso e coniugato, ad

esempio:

$$\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_2 = \tilde{u}_1^{*T},$$

che sono linearmente dipendenti da u_1, u_2 . In tal modo si ricava

$$\tilde{u}_{1a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{1b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_{1a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_{1b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\tilde{c}_{1a} = \tilde{c}_{1b} = 1$, $\tilde{m}_1 = \sqrt{2}$, $\tilde{\varphi}_1 = \frac{3}{4}\pi$, che portano alla stessa espressione di $x_l(t)$.

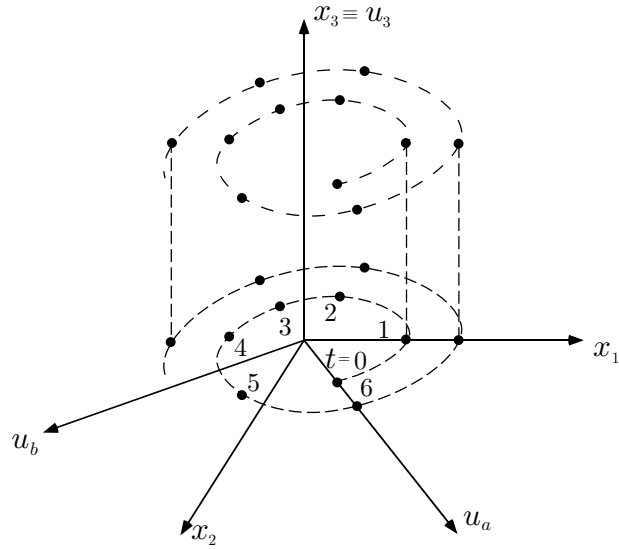


Figura 3.5

Le evoluzioni sono sinteticamente riportate nelle figure 3.4 e 3.5; nella prima si è considerato $\alpha = \gamma = \beta = 1$ mentre nella seconda $\alpha = 1$, $\gamma = \sqrt{3}$, $\beta = 2$.

Si noti come le evoluzioni rimangono confinate in piani perpendicolari ad u_3 in conseguenza del fatto che $\lambda_3 = 1$. Si noti inoltre come al variare della fase dell'autovalore complesso $\alpha - j\gamma$ varia il numero di campioni.

È interessante osservare che il comportamento dinamico riportato nelle figure 3.4 e 3.5 può essere ottenuto campionando le evoluzioni di un sistema a tempo continuo con autovalori pari al logaritmo principale degli autovalori del sistema assegnato ed autovettori coincidenti con quelli del sistema dato, ossia con autovalori:

$$\lambda_1 = \ln \sqrt{2} - j\frac{\pi}{4}, \quad \lambda_2 = \ln \sqrt{2} + j\frac{\pi}{4}, \quad \lambda_3 = \ln 1 = 0,$$

nel primo caso e

$$\lambda_1 = \ln 2 - j\frac{\pi}{3}, \quad \lambda_2 = \ln 2 + j\frac{\pi}{3}, \quad \lambda_3 = 0,$$

nel secondo, ed autovettori u_1, u_2, u_3^{*T} .

Esercizio 3.7. Si consideri il modello demografico di una popolazione, suddivisa in tre classi di età e la cui dinamica è descritta dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x_1((k+1)T) &= f_1 x_2(kT) \\ x_2((k+1)T) &= s_1 x_1(kT) \\ x_3((k+1)T) &= s_2 x_2(kT) \end{aligned}$$

ove f_2 è il tasso di natalità della classe d'età 2 nel periodo k , s_1, s_2 sono i tassi di sopravvivenza delle classi d'età 1 e 2 nel periodo k di durata T . Si studi l'evoluzione libera.

Soluzione. È interessante osservare come la classe dei sistemi a tempo discreto sembri, almeno ad una prima analisi, più adatta a riprodurre il comportamento di questi semplici modelli demografici. Il modello evidenzia, infatti, la presenza di modi alternanti, riproducibili da un sistema a tempo continuo campionato solo a prezzo di un aumento della dimensione dello spazio di stato. La matrice dinamica risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = \sqrt{s_1 f_1}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{s_1 f_1}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Nell'evoluzione del sistema sarà quindi presente un modo alternante. Gli autovettori destri sono:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{f_1}{s_1}} \\ 1 \\ \frac{s_2}{\sqrt{s_1 f_1}} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{f_1}{s_1}} \\ 1 \\ -\frac{s_2}{\sqrt{s_1 f_1}} \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e quelli sinistri:

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1}{f_1}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1}{f_1}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{s_2}{f_1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(si tenga conto nel calcolo dell'inversa che T^{-1} è triangolare a blocchi) e dunque l'espressione dell'evoluzione libera è:

$$x_l(t) = c_1 e^{\sqrt{s_1 f_1} t} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{f_1}{s_1}} \\ 1 \\ \frac{s_2}{\sqrt{s_1 f_1}} \end{pmatrix} + c_2 e^{-\sqrt{s_1 f_1} t} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{f_1}{s_1}} \\ 1 \\ -\frac{s_2}{\sqrt{s_1 f_1}} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con

$$c_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1}{f_1}}x_{01} + \frac{1}{2}x_{02}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1}{f_1}}x_{01} + \frac{1}{2}x_{02}, \quad c_3 = -\frac{s_2}{f_1}x_{01} + x_{03},$$

ed essendo $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} & x_{02} & x_{03} \end{pmatrix}^T$.

3.2. I modi naturali nell'evoluzione forzata e nell'uscita

3.2.a. Sistemi a tempo continuo regolari

Le colonne di $H(\cdot) = \Phi(\cdot)B$ sono combinazioni lineari di modi naturali. Un assegnato modo si dice *eccitabile con impulsi in ingresso* se compare in almeno una colonna di $H(\cdot)$. Il modo associato all'autovalore λ_i risulta eccitabile con impulsi in ingresso se e solo se:

$$v_i^T B \neq 0. \quad (3.9)$$

Qualora il modo i -esimo sia eccitabile, ci si può chiedere se esista un ingresso che lo ecciti isolatamente, cioè che dia luogo ad un'evoluzione (che per istanti successivi a quello di applicazione dell'impulso è un'evoluzione libera) costituita dal solo modo i -esimo. Preso come ingresso

$$u(t) = u_0 \delta(t - t_0), \quad u_0 \in \mathbb{R}^p,$$

è noto che il modo i -esimo può essere eccitato separatamente dagli altri se e solo se si può scegliere u_0 in modo che Bu_0 assuma la direzione di u_i (se λ_i è reale) o appartenga al piano di u_{ia} , u_{ib} se λ_i è complesso. In altre parole, sono isolatamente eccitabili soltanto quei modi aperiodici i cui autovettori appartengano a $\mathcal{R}(B)$ e quei modi pseudoperiodici i cui piani abbiano intersezione diversa dall'origine con $\mathcal{R}(B)$.

Si noti che se v_i è complesso, e dette v_{ia} , v_{ib} le sue parti reale ed immaginaria, la (3.9) equivale alla verifica di almeno una delle due condizioni:

$$v_{ia}^T B \neq 0, \quad v_{ib}^T B \neq 0. \quad (3.10)$$

Passando a considerare l'uscita si rammenta che è possibile dimostrare che le colonne di $\Psi(\cdot) = C\Phi(\cdot)$ sono combinazioni lineari di modi e che il modo i -esimo è detto *osservabile in uscita* se compare in almeno un elemento di $\Psi(\cdot)$. In tal caso esiste uno stato iniziale x_0 tale che l'evoluzione libera dell'uscita a partire da x_0 contenga il modo i -esimo. Il vettore Cu_i individua, nello spazio Y dei valori di uscita, il sottospazio nel quale si muove l'evoluzione libera nell'uscita quando x_0 sia tale da eccitare il solo modo i -esimo. Si dimostra che tale modo è osservabile se e solo se risulta:

$$Cu_i \neq 0. \quad (3.11)$$

Anche in questo caso, se u_i è complesso, la (3.9) equivale alla verifica di almeno una delle due condizioni:

$$Cu_{ia} \neq 0, \quad Cu_{ib} \neq 0. \quad (3.12)$$

Nelle colonne di $C\Psi(\cdot)B$, che per i sistemi strettamente causali è la matrice $W(\cdot)$ delle risposte impulsive, sono ovviamente presenti tutti e soli i modi che risultano simultaneamente eccitabili ed osservabili.

Per scoprire quali dei modi eccitabili lo siano indipendentemente uno dall'altro occorre esaminare le intersezioni tra $\mathcal{R}(B)$ e i sottospazi in cui evolvono le traiettorie dei singoli modi. Perché il modo associato a $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sia eccitabile indipendentemente dagli altri si deve avere $u_i \in \mathcal{R}(B)$; analogamente se $\lambda_i \in \mathbb{C}$, perché il modo associato sia eccitabile indipendentemente dagli altri si deve avere: $\mathcal{R}(u_{ia}, u_{ib}) \cap \mathcal{R}(B) \neq \{0\}$. Una procedura sistematica per ottenere questo risultato è la seguente.

Procedura 3.1.

- 1) Si costruisce la matrice E ottenuta affiancando a destra di B gli autovettori destri corrispondenti ai modi eccitabili (per i modi pseudoperiodici si usino i vettori u_a, u_b);
- 2) si opera sulle colonne di E con trasformazioni elementari (si veda il capitolo 1) a partire dalla prima colonna di B , il cui ultimo elemento è supposto non nullo, in modo da annullare tutti gli altri elementi dell'ultima riga di E ;
- 3) si ripetono le operazioni precedenti sulla sotto-matrice ottenuta cancellando l'ultima riga;
- 4) si procede sino a quando ogni colonna non nulla di B sia stata usata per le operazioni di annullamento. ■

Al termine delle operazioni, alcune delle colonne di E originariamente occupate da autovettori corrispondenti a modi aperiodici risulteranno nulle: i modi che corrispondevano a tali autovettori sono eccitabili indipendentemente, in quanto i loro autovettori sono risultati essere combinazioni lineari delle colonne di B . Viceversa gli autovettori che non sono stati annullati con questa procedura non possono appartenere a $\mathcal{R}(B)$. Inoltre alcune coppie di colonne corrispondenti a modi pseudoperiodici risulteranno proporzionali: tali modi sono eccitabili indipendentemente poiché la somma dello spazio in cui evolvono (di dimensione 2) e di $\mathcal{R}(B)$ (di dimensione $\varrho(B)$) ha dimensione $\varrho(B) + 1$ e quindi l'intersezione di questi due spazi ha dimensione 1. Se oltre ad essere proporzionali, le due colonne sono nulle, l'intersezione ha dimensione 2.

Passando ad esaminare i modi naturali nell'evoluzione forzata nell'uscita, dall'espressione (3.4) si constata immediatamente che alcuni dei termini della sommatoria possono non comparire nell'uscita, qualora lo stato iniziale e la matrice C siano tali che risulti, per qualche j :

$$C(A - \lambda_i I)^j x_{0i} = 0.$$

Questo fatto implica che la struttura di un modo naturale nella uscita può presentarsi diversamente da quella che lo stesso modo ha nello stato. Mentre infatti la legge temporale di evoluzione dello stato non può mai contenere un termine del tipo $\frac{t^h}{h!} e^{\lambda_i t}$ senza anche contenere $\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\lambda_i t}, \dots, t e^{\lambda_i t}, e^{\lambda_i t}$, nell'uscita tale legge temporale può apparire isolatamente. Per rendersi conto di ciò, si consideri il sottospazio \mathcal{U}_i ($i = 1, \dots, r$) e una sua base formata dalle catene di autovettori generalizzati:

$$\mathcal{U}_i = \text{gen} \left\{ u_{i1}^1 \quad u_{i1}^2 \quad \dots \quad u_{i1}^{m_i} \quad u_{i2}^1 \quad u_{i2}^2 \quad \dots \right\}.$$

Ovviamente $x_0 = \sum_{i=1}^r x_{0i}$, con:

$$x_{0i} = \alpha_{i1}^1 u_{i1}^1 + \alpha_{i1}^2 u_{i1}^2 + \dots + \alpha_{i1}^{m_i} u_{i1}^{m_i} + \alpha_{i2}^1 u_{i2}^1 + \alpha_{i2}^2 u_{i2}^2 + \dots = \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_{ij}^k u_{ij}^k$$

ossia x_{0i} può essere decomposto nella combinazione lineare degli autovettori generalizzati della base di \mathcal{U}_i . L'evoluzione a partire da x_0 sarà la combinazione di evoluzioni a partire da condizioni iniziali coincidenti con quegli autovettori generalizzati:

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{h=0}^{k-1} \alpha_{ij}^k \frac{t^h}{h!} e^{\lambda_i t} (A - \lambda_i I)^h u_{ij}^k.$$

Se u_{ij}^k è uno di tali autovettori, quello di ordine k nella catena j -esima, il modo a partire da esso avrà espressione:

$$\sum_{h=0}^{k-1} \frac{t^h}{h!} (A - \lambda_i I)^h e^{\lambda_i t} u_{ij}^k = \sum_{h=0}^{k-1} \frac{t^h}{h!} e^{\lambda_i t} u_{ij}^{k-h},$$

in quanto $(A - \lambda_i I)^h u_{ij}^k = u_{ij}^{k-h}$. Ne segue che la legge temporale del tipo:

$$\frac{t^h}{h!} e^{\lambda_i t} \quad (3.13)$$

compare moltiplicata per l'autovettore di ordine $k - h$ della generica catena j -esima. Perché tale legge temporale possa comparire nell'uscita è perciò necessario e sufficiente che esista una coppia di indici (j, h) tali che risulti:

$$C u_{ij}^{k-h} \neq 0. \quad (3.14)$$

Qualora non esista alcuna coppia di indici che verifichi tale condizione la legge temporale (3.13) non può comparire nell'evoluzione libera dell'uscita. È ovvio che se u_{ij}^{k-h} è preso come stato iniziale e la (3.14) è soddisfatta, allora potrebbero comparire in uscita anche le leggi temporali:

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\lambda_i t}, \dots, t e^{\lambda_i t}, e^{\lambda_i t}.$$

Considerazioni analoghe possono essere ripetute per quanto riguarda la risposta forzata nello stato. La presenza di una legge temporale del tipo

della (3.13) nella risposta impulsiva nello stato è determinata dall'esistenza di un opportuno "autovettore sinistro generalizzato" tale che risulti valida la (3.9). Inoltre l'esistenza di tale legge temporale implica quella delle leggi analoghe con $h-1$, $h-2$, \dots , 1 , 0 .

Tutte queste considerazioni risultano alquanto più semplici se si ricorre alla rappresentazione del sistema nella quale A assuma la forma canonica di Jordan; ciò è lecito poiché, come è noto, i risultati dell'analisi modale svolta per una particolare rappresentazione sono validi per tutto l'insieme delle rappresentazioni ad essa strettamente equivalenti.

Infine è noto che, grazie al legame tra proprietà dei modi e proprietà strutturali, l'osservabilità e l'eccitabilità dei modi può essere anche analizzata studiando i sottospazi degli stati osservabili e raggiungibili. Questa corrispondenza tra eccitabilità (osservabilità) dei modi e raggiungibilità (osservabilità) degli stati necessita però alcune precisazioni in quanto possono presentarsi delle situazioni particolari, in cui non è vero che il sotto-sistema raggiungibile (osservabile) è caratterizzato da tutti e solo i modi eccitabili (osservabili). Questo aspetto verrà approfondito nel capitolo 6.

Esercizio 3.8. Studiare dal punto di vista dell'analisi modale il seguente sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Soluzione. Gli autovalori ed autovettori di A sono stati determinati nell'esercizio 3.1, in cui è stata calcolata e^{At} . Eseguendo il prodotto $e^{At}B$ si calcola:

$$H(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si noti che nelle colonne di $H(\cdot)$ è presente il solo modo corrispondente all'autovettore nullo di A ; pertanto i restanti modi non sono eccitabili. Ciò può anche essere verificato applicando la (3.9):

$$v_1^T B = 0, \quad v_2^T B = 0, \quad v_3^T B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ciò conferma che il solo modo corrispondente a λ_3 è eccitabile. Ne segue pertanto che tale modo è separatamente eccitabile con un ingresso impulsivo, ed infatti $u_3 \in \mathcal{R}(B)$ mentre ovviamente u_1 e u_2 non vi appartengono.

Passando all'uscita, si può eseguire il prodotto $\Psi(t) = Ce^{At}$ ottenendo:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2(e^{-t} - e^t) & 2e^{-t} - e^t & -e^t \\ 2e^t & e^t & e^t \end{pmatrix}.$$

Si constata che nelle colonne di $\Psi(\cdot)$ non compare il modo corrispondente a λ_3 (l'autovettore nullo), che pertanto non è osservabile, mentre lo sono i modi corrispondenti a λ_1 e λ_2 . Si osservi tuttavia che il modo corrispondente a λ_2 è osservabile soltanto tramite la prima componente dell'uscita. Se il sistema assegnato venisse connesso con un blocco istantaneo caratterizzato da una matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, di cui y è l'ingresso e $\tilde{y} = My$ è l'uscita, nel nuovo sistema così ottenuto anche il modo corrispondente a λ_2 sarebbe inosservabile.

La verifica dell'osservabilità poteva essere fatta direttamente tramite le (3.11) ottenendo:

$$Cu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad Cu_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad Cu_3 = 0.$$

Poiché nessun modo è simultaneamente eccitabile ed osservabile, ci si attende che $W(\cdot) = CH(\cdot)$ non ne contenga nessuno, cioè sia nulla. Ed infatti si ottiene:

$$W(t) = Ce^{At}B = 0.$$

Può essere interessante esaminare l'insieme di coppie ingresso-uscita rappresentato dalle matrici assegnate. Assumendo ovviamente $T = \mathbb{R}$, $U = Y = \mathbb{R}^2$, \mathcal{U} coincidente con l'insieme delle funzioni continue, $X = \mathbb{R}^3$, la costruzione della generica relazione $\Sigma(t_0)$, cioè la determinazione di tutti gli y_0 che sono in relazione con un ingresso u_0 , va ovviamente effettuata tramite le funzioni φ ed η che, composte, danno in questo caso:

$$y(t) = \Psi(t - t_0)x_0, \quad t > t_0, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad x_0 \in X. \quad (3.15)$$

Gli elementi di $\Sigma(t_0)$ si ottengono associando ad ogni ingresso u_0 tutte le possibili uscite generate dalla (3.15) facendo variare x_0 . Se si indica con $Y^{T(t_0)}$ l'insieme di queste uscite e con $U^{T(t_0)}$ l'insieme:

$$U^{T(t_0)} = \{u|_{T(t_0)} \mid u \in \mathcal{U}\},$$

è immediato constatare che risulta:

$$\Sigma(t_0) = U^{T(t_0)} \times Y^{T(t_0)}.$$

Inoltre scelto $t_{-1} < t_0$, è immediato constatare che ogni elemento di $\Sigma(t_0)$ può essere ottenuto tramite il troncamento di un elemento di $\Sigma(t_{-1})$; infatti ogni uscita costruibile tramite la (3.15) è anche ottenibile come troncamento dell'uscita, definita su $[t_{-1}, \infty)$, che si ha a partire dallo stato iniziale

$$x_{-1} = \Phi^{-1}(t_0 - t_{-1})x_0$$

imposto all'istante iniziale t_{-1} . Pertanto il sistema è *uniforme* e può essere assegnato tramite un'unica relazione Σ_{un} . Togliendo infatti la restrizione $t > t_0$ nella (3.15) questa individua un insieme di funzioni definite su tutto T ; è immediato constatare che si ha:

$$\Sigma_{un} = U^{T(t_0)} \times Y^{T(t_0)}.$$

Da quanto detto è facile costruire altre rappresentazioni per questo sistema. Ad esempio:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \Psi(t), \quad D = 0,$$

che non è stazionaria, dello stesso ordine di quella data ma non algebricamente equivalente ad essa, oppure:

$$A = B = D = 0, \quad C = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^t & -e^t \\ e^t & e^t \end{pmatrix},$$

che è di ordine più basso della precedente; o ancora A, B, C coincidenti con quelle assegnate e $B = 0$, che è stazionaria e dello stesso ordine di quella assegnata ma non ad essa strettamente equivalente.

Esercizio 3.9. Studiare dal punto di vista dell'analisi modale il seguente sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 1 \quad 0), \quad D = 0.$$

Soluzione. Gli autovalori ed autovettori di A sono già stati determinati nell'esercizio 3.4, nel quale si è visto come si sia in presenza di un modo aperiodico crescente e di uno pseudoperiodico smorzato.

L'applicazione delle (3.9), (3.10) dà:

$$v_1^T B = 0, \quad v_{2a}^T B = (1 \quad 2), \quad v_{2b}^T B = (1 \quad 3).$$

Ne segue che il modo pseudoperiodico è eccitabile mentre non lo è quello aperiodico. Per l'uscita si ottiene, applicando le (3.11), (3.12):

$$Cu_1 = 0, \quad Cu_{2a} = 1, \quad Cu_{2b} = 0.$$

Pertanto il modo pseudoperiodico è osservabile mentre quello aperiodico non lo è. Ci si attende dunque che il solo modo pseudoperiodico compaia sia in $\Psi(\cdot)$, sia in $H(\cdot)$, sia in $W(\cdot)$. E infatti tenendo conto dell'espressione di $\Phi(t)$ data nell'esercizio 3.4, si ottiene:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-t}(\sin t + \cos t) & e^{-t} \sin t \end{pmatrix}, \\ H(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-t}(\sin t + \cos t) & e^{-t}(3\sin t + 2\cos t) \\ -2e^{-t} \sin t & e^{-t}(\cos t - 5\sin t) \end{pmatrix}, \\ W(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t}(\sin t + \cos t) & e^{-t}(3\sin t + 2\cos t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

È immediato constatare che il sistema rappresentato da queste matrici è *connesso*, cioè può essere individuato tramite una funzione $F: U \rightarrow Y$.

Esercizio 3.10. Studiare dal punto di vista dell'analisi modale il seguente sistema:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & -6 & 5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0, \end{aligned}$$

analizzando in particolare l'eccitabilità dei modi indipendentemente dagli altri.

Soluzione. Gli autovalori ed autovettori destri di A sono stati già determinati nell'esercizio 3.5. Gli autovettori sinistri sono:

$$\begin{aligned} v_1^T &= (-1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1), \\ v_2^T &= (-2 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 2), \\ v_3^T &= (1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad -1), \\ v_{4a}^T &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1), \\ v_{4b}^T &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0). \end{aligned}$$

Applicando le (3.9), (3.10) si trova:

$$v_1^T B = 0, \quad v_2^T B = 0, \quad v_3^T B = (0 \quad 1 \quad -1),$$

$$v_{4a}^T B = (1 \quad 1 \quad 0), \quad v_{4b}^T B = (1 \quad 0 \quad 1).$$

Pertanto sono eccitabili i modi corrispondenti agli autovalori $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$. Per vedere quali dei modi eccitabili lo siano indipendentemente uno dall'altro studiamo le intersezioni tra $\mathcal{R}(B)$ e i sottospazi in cui evolvono le traiettorie dei singoli modi. Applicando la procedura 3.1, si costruisca allora la matrice:

$$E = \begin{array}{c|ccc|ccc} & B & & & u_3 & u_{4a} & u_{4b} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \vdots & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

e iniziando con la procedura descritta, si somma la prima colonna di E , moltiplicata per $-\frac{1}{2}$, alla 2^a , 3^a e 5^a ottenendo:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \vdots & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la seconda colonna di E_1 viene sommata alla 3^a , sottratta alla 5^a e sommata alla 6^a moltiplicata per 2, ottenendo:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La procedura ha termine poiché le prime due colonne di B sono state già usate e la terza è divenuta nulla. Poiché la quarta colonna, corrispondente al modo associato a λ_3 , è diversa da zero, tale modo non è eccitabile separatamente con impulsi in ingresso. Infatti questa situazione corrisponde al fatto che $u_3 \notin \mathcal{R}(B)$. Viceversa le ultime due colonne di E_2 sono proporzionali, per cui $\mathcal{R}(u_{4a}, u_{4b}) \cap \mathcal{R}(B) \neq 0$ (tale intersezione ha dimensione 1) e il modo pseudoperiodico (corrispondente alla coppia λ_4, λ_5) può essere eccitato separatamente dagli altri (e cioè, si osservi, nonostante né u_{4a} né

u_{4b} appartengano a $\mathcal{R}(B)$). E infatti ponendo $u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t)$ si ottiene

per l'evoluzione forzata dello stato l'espressione:

$$x_f(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \sin t - \frac{1}{5} \cos t \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \sin t - \frac{3}{5} \cos t \\ \frac{3}{5} \sin t - \frac{1}{5} \cos t \end{pmatrix},$$

composta dal solo modo pseudoperiodico.

Passando a considerare l'uscita si trova:

$$Cu_1 = 0, \quad Cu_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Cu_3 = 0,$$

$$Cu_{4a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Cu_{4b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto i modi corrispondenti a λ_1 e λ_3 non sono osservabili mentre tutti gli altri lo sono.

Riassumendo, il risultato dell'analisi è il seguente:

- modo corrispondente a λ_1 : non eccitabile e non osservabile;
- modo corrispondente a λ_2 : non eccitabile ma osservabile;
- modo corrispondente a λ_3 : eccitabile (non separatamente) ma non osservabile;
- modo corrispondente a λ_4, λ_5 : eccitabile (separatamente) ed osservabile.

Ne segue che il solo modo pseudoperiodico compare nel prodotto $CH(\cdot)$.

Esercizio 3.11. Studiare i modi naturali del sistema avente la seguente matrice dinamica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico di questa matrice è

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda + 1)^3(\lambda - 1),$$

per cui si ha l'autovalore $\lambda_1 = -1$ di molteplicità algebrica $n_1 = 3$ e l'autovalore $\lambda_2 = 1$ con $n_2 = 1$. Gli autovettori generalizzati relativi a λ_1 sono poi:

$$u_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ove $(A - \lambda_1 I)u_1^2 = u_1^1$, $(A - \lambda_1 I)u_1^3 = u_1^2$. Essi formano una catena di lunghezza tre. Si noti che per λ_1 la molteplicità algebrica e geometrica coincidono. Per l'autovalore λ_2 si trova:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto \mathcal{U}_1 è il sottospazio di dimensione 3 formato da tutti i vettori aventi la quarta componente nulla, mentre \mathcal{U}_2 è il sottospazio di dimensione 1 lungo cui giace u .

Poichè X è somma diretta di \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 , ogni vettore x_0 può essere decomposto in modo unico rispetto ad \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 nella somma di due vettori $x_0 = x_{01} + x_{02}$. Se ad esempio si ha:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

si trova che $x_{01} = u_1^1$, $x_{02} = -u$ e l'evoluzione dello stato è caratterizzata dai due modi $e^{-t}u_1^1$, e^tu .

Se invece:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

si trova che $x_{01} = 4u_1^3$, $x_{02} = -u$ e compaiono i modi:

$$\left[I + t(A + I) + \frac{t^2}{2!}(A + I)^2 \right] e^{-t}u_1^3 = e^{-t}u_1^3 + te^{-t}u_1^2 + \frac{t^2}{2!}e^{-t}u_1^1$$

ed e^tu .

Esercizio 3.12. Studiare l'evoluzione nell'uscita del sistema avente la matrice A come nell'esercizio 3.11 e:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Come base in \mathcal{U}_1 si assumono u_1^1 , u_1^2 , u_1^3 che formano una catena di autovettori generalizzati (si veda l'esercizio 3.11). Si constata immediatamente che risulta:

$$Cu_1^1 = 0, \quad Cu_1^2 \neq 0, \quad Cu_1^3 = 0.$$

Pertanto applicando quanto visto nell'esercizio 3.11, si ha:

- la legge temporale e^{-t} può comparire nell'uscita. Ponendo infatti come condizione iniziale proprio $x_0 = u_1^2$ lo stato evolve secondo il modo

$$e^{-t}u_1^2 + te^{-t}u_1^1,$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 7 \end{pmatrix} x(t).$$

Soluzione. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$, cui corrispondono degli autovettori destri con cui è possibile costruire la trasformazione T tale che

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dunque, poiché $A^t = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^t u_i v_i^T$:

$$\begin{aligned} A^t &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + (-2)^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} + 3^t \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -6 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 3 \cdot 3^t & -1 + 3^t & 3 - 3 \cdot 3^t \\ 6(-2)^t - 6 \cdot 3^t & 3(-2)^t - 2 \cdot 3^t & -6(-2)^t + 6 \cdot 3^t \\ -2 + 2(-2)^t & -1 + (-2)^t & 3 - 2(-2)^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} v_1^T B &= 1 \neq 0, & v_2^T B &= 0, & v_3^T B &= 2 \neq 0, \\ C u_1 &= 1 \neq 0, & C u_2 &= -2 \neq 0, & C u_3 &= 0, \end{aligned}$$

per cui:

$$H(t) = u_1 + 3^t 2 u_3 = \begin{pmatrix} 1 - 3^t \\ 2 \cdot 3^t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(t) = v_1^T - 2(-2)^t v_2^T = \begin{pmatrix} -2 + 2(-2)^t & -1 + (-2)^t & 3 - 2(-2)^t \end{pmatrix},$$

$$W(t) = 1.$$

3.3. Esercizi e problemi

Esercizio 3.15. Studiare dal punto di vista della osservabilità in uscita i modi del sistema a tempo continuo caratterizzato dalla matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

per un generico stato iniziale x_0 , per ingresso nullo e per diverse matrici di uscita C .

Soluzione. Poiché $|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^4$, si ha un unico autovalore in $\lambda = 2$, a cui corrispondono due catene di autovettori generalizzati:

$$u_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_1^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_1^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posto $x_0 = \alpha u_1^1 + \beta u_1^2 + \gamma u_1^3 + \delta u_2^1$, si ricava:

$$x_1(t) = e^{\lambda t} \left[(\alpha u_1^1 + \beta u_1^2 + \gamma u_1^3 + \delta u_2^1) + t(\beta u_1^1 + \gamma u_1^2) + \frac{t^2}{2!}(\gamma u_1^1) \right].$$

Se dunque $C = C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, allora $C_0 u_1^3 \neq 0$, $C_0 u_2^1 \neq 0$ e quindi

$$y(t) = e^{\lambda t} (\gamma C u_1^3 + \delta C u_2^1),$$

mentre se $C = C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ solo $C_1 u_2^1 \neq 0$, sicché

$$y(t) = \gamma t e^{\lambda t} C u_1^2.$$

Infine se $C = C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ha che $C_2 u_1^1 \neq 0$, e

$$y(t) = \gamma \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} C u_1^1.$$

Esercizio 3.16. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (2 \quad 1 \quad 1)x$$

determinare gli stati iniziali in corrispondenza dei quali l'uscita in evoluzione libera non è divergente per t tendente a infinito.

Soluzione. Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$, con molteplicità algebrica $\mu_1 = 1$, e $\lambda_2 = 1$, con $\mu_2 = 2$. Gli autovettori sono poi del primo ordine:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, posto $x_0 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$:

$$x_l(t) = C \left[e^{-t} \alpha u_1 + e^t (\beta u_2 + \gamma u_3) \right],$$

con

$$C[\beta u_2 + \gamma u_3] = C \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \beta \end{pmatrix} = 3\gamma + \beta.$$

Gli stati iniziali cercati si trovano ponendo $\beta = -3\gamma$, e sono del tipo:

$$x_0 = \alpha u_1 + (-3u_2 + u_3)\gamma$$

con α e γ qualsiasi.

Esercizio 3.17. Data la matrice dinamica $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ di un sistema a tempo continuo, determinare l'evoluzione libera dello stato a partire da $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1 + 2j$, $\lambda_2 = 1 - 2j$, mentre gli autovettori destri sono:

$$u_1 = \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_a + j u_b, \quad u_2 = u_a - j u_b.$$

Posto:

$$\begin{pmatrix} v_a^T \\ v_b^T \end{pmatrix} = (u_a \quad u_b)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si calcola:

$$c_a = v_a^T x_0 = 1, \quad c_b = v_b^T x_0 = 1, \quad m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arctan \frac{c_a}{c_b} = \frac{\pi}{4}.$$

Dunque:

$$x_l(t) = \sqrt{2} e^t \left(\sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) u_a + \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) u_b \right) = \sqrt{2} e^t \begin{pmatrix} \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) \\ \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.18. Si consideri il sistema descritto dalle equazioni

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{ml^2} & -\frac{f}{ml^2} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

(si veda il paragrafo 2.5.b del capitolo 2. Studiare i modi naturali al variare del parametro $f \geq 0$).

Soluzione. Gli autovalori sono forniti dall'equazione caratteristica

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + \frac{f}{ml^2} \lambda + \frac{k}{ml^2} = 0,$$

e valgono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-f \mp \sqrt{f^2 - 4ml^2 k}}{2ml^2}.$$

Se $f \in [0, 2l\sqrt{mk})$ sono complessi e coniugati (se f è nullo gli autovalori sono immaginari puri $\lambda_{1,2} = \mp j\sqrt{\frac{k}{ml^2}}$), se $f = 2l\sqrt{mk}$ sono reali e coincidenti, ed infine se $f \in (2l\sqrt{mk}, \infty)$ sono reali e distinti.

Gli autovettori sono facilmente ricavabili dall'equazione:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & -1 \\ \frac{k}{ml^2} & \lambda_i + \frac{f}{ml^2} \end{pmatrix} u_i = 0 \Rightarrow u_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Nel caso che $f \in [0, 2l\sqrt{mk})$ si considerano allora i vettori:

$$u_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{f}{2ml^2} \end{pmatrix}, u_b = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\delta}{2ml^2} \end{pmatrix}, v_a = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{f+\delta} \\ -\frac{2ml^2}{f+\delta} \end{pmatrix}, v_b = \begin{pmatrix} \frac{f}{f+\delta} \\ \frac{2ml^2}{f+\delta} \end{pmatrix},$$

ove $\delta = \sqrt{4ml^2k - f^2}$ e dunque si ha un modo pseudoperiodico:

$$x_l(t) = m e^{-ft/2ml^2} \left(\sin\left(\frac{\delta}{2ml^2}t + \varphi\right) u_a + \cos\left(\frac{\delta}{2ml^2}t + \varphi\right) u_b \right).$$

Se $f = 2l\sqrt{mk}$ si ha $\lambda_1 = -\frac{f}{2ml^2}$ e gli autovettori si ricavano dalle equazioni

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 \\ \frac{k}{ml^2} & \lambda_1 + \frac{f}{ml^2} \end{pmatrix} u_1^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 \\ \frac{k}{ml^2} & -\lambda_1 \end{pmatrix} u_1^1 = 0 \Rightarrow u_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 \\ \frac{k}{ml^2} & -\lambda_1 \end{pmatrix} u_1^2 = u_1^1 \Rightarrow u_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

e quindi si ha un solo modo aperiodico:

$$x_l(t) = e^{-ft/2ml^2} (I + t(A - \lambda_I I)) x_0, \quad x_0 = c_1 u_1^1 + c_2 u_1^2.$$

Infine per $f \in (2l\sqrt{mk}, \infty)$ gli autovettori sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

e si hanno due modi aperiodici:

$$x_l(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} u_2, \quad x_0 = c_1 u_1 + c_2 u_2.$$

Esercizio 3.19. Analizzare le relazioni esistenti tra gli autovalori di un sistema a tempo discreto e quelli di un sistema a tempo continuo campionato.

Soluzione. Siano $\lambda_1 = \alpha + j\omega = \sigma e^{j\vartheta} \in \mathbb{C}$, $\lambda_2 = \alpha - j\omega = \sigma e^{-j\vartheta} \in \mathbb{C}$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tre autovalori e u_1, u_1^{*T}, u_3 i tre autovettori corrispondenti. Si consideri ora un sistema a tempo continuo avente due autovalori complessi e coniugati ed uno reale, dati dai logaritmi principali di λ_i :

$$\lambda_1^c = \ln \sigma + j\vartheta, \quad \lambda_2^c = \ln \sigma - j\vartheta, \quad \lambda_3^c = \ln \lambda_3$$

ed autovettori u_1, u_1^{*T}, u_3 .

Se ora si considera il sistema ottenuto campionando tale sistema a tempo continuo, esso avrà matrice dinamica $A_D = e^{AT}$, ove T è il periodo di campionamento. Dunque gli autovalori saranno dati da $e^{\lambda_1^c T} = \lambda_1^T$, $e^{\lambda_2^c T} = \lambda_2^T$, $e^{\lambda_3^c T} = \lambda_3^T$, che coincidono con λ_i se $T = 1$ s. Pertanto si può concludere che il comportamento dinamico del sistema a tempo continuo campionato coincide, negli istanti di campionamento, con quello di un opportuno sistema a tempo continuo.

Quanto detto vale per sistemi ottenuti dal campionamento di sistemi a tempo continuo. Dato ora un sistema a tempo discreto generico, non è sempre possibile individuare un sistema a tempo continuo, con la stessa dimensione dello spazio di stato n , tale che negli istanti $t = 0, 1, 2, \dots$ il comportamento dinamico del sistema a tempo discreto coincida con quello del sistema a tempo continuo. Ciò è legato al fatto che un sistema a tempo discreto può avere genericamente anche dei modi alternanti, che un sistema a tempo continuo campionato non può avere. Infatti perché un sistema a tempo continuo campionato abbia un autovalore reale $\lambda^c < 0$ (corrispondente ad un modo alternante), per quanto detto il sistema a tempo continuo dovrebbe avere un autovalore pari a $\lambda = \ln \sigma + j\pi$ (infatti, con il campionamento si ha l'autovalore $e^{\ln \sigma + j\pi} = \sigma e^{j\pi} = -\sigma = \lambda^c < 0$), ossia dovrebbe avere un autovalore complesso (non coniugato, in generale) e dunque una matrice dinamica A non reale, non possibile per un sistema reale.

Tale difficoltà potrebbe essere superata a patto di aumentare di uno la dimensione del sistema a tempo continuo. Se infatti assieme alla dinamica caratterizzata dall'autovalore $\lambda = \ln \sigma + j\pi$ se ne considera un'altra caratterizzata dall'autovalore $\bar{\lambda} = \ln \sigma - j\pi$, sicché:

$$A = \begin{pmatrix} \ln \sigma + j\pi & 0 \\ 0 & \ln \sigma - j\pi \end{pmatrix}$$

è la sotto-matrice relativa a queste due dinamiche e u_1, u_2 sono gli autovettori (reali) corrispondenti, l'evoluzione libera del sistema campionato

contiene il termine:

$$\sigma^t m [\sin(\pi t + \varphi) u_1 + \cos(\pi t + \varphi) u_2]$$

che negli istanti $t = 0, 1, \dots$ vale

$$(-1)^t \sigma^t m (\sin \varphi u_1 + \cos \varphi u_2)$$

che corrisponde ad un modo alternante che evolve nel sottospazio

$$\text{gen} \{ \sin \varphi u_1, \cos \varphi u_2 \}.$$

Si osservi che le considerazioni sinora svolte possono essere ripetute con riferimento al problema inverso. In tal caso il problema ammette sempre una soluzione ed il sistema a tempo discreto che assume gli stessi valori dello stato del sistema a tempo continuo campionato in $t = 0, 1, 2, \dots$ è caratterizzato dagli stessi autovettori e da autovalori (reali o complessi e coniugati):

$$\lambda_i = e^{\alpha_i t} \quad i = 1, \dots, n$$

dove α_i sono gli autovalori (reali o complessi e coniugati) del sistema a tempo continuo.

Esercizio 3.20. Mostrare che la matrice e^{At} può essere calcolata come soluzione dell'equazione $\dot{\varphi}(t) = A_c \varphi(t)$, ove

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad A_c = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

ponendo $\varphi_0(0) = 1, \varphi_i(0) = 0, i = 1, \dots, n-1$.

Soluzione. In virtù del teorema di Cayley-Hamilton:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \varphi_0(t) I + \varphi_1(t) A + \cdots + \varphi_{n-1}(t) A^{n-1},$$

e poiché $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_0(t) I + \dot{\varphi}_1(t) A + \cdots + \dot{\varphi}_{n-1}(t) A^{n-1} = \\ = \varphi_0(t) A + \varphi_1(t) A^2 + \cdots + \varphi_{n-1}(t) (-a_{n-1} A^{n-1} + \cdots - a_0 I), \end{aligned}$$

ed eguagliando i termini con le stesse potenze in A :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_0(t) &= -a_0 \varphi_{n-1}(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) &= \varphi_0(t) - a_1 \varphi_{n-1}(t) \\ &\vdots \\ \dot{\varphi}_{n-1}(t) &= \varphi_{n-2}(t) - a_{n-1} \varphi_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Poiché poi per $e^{At}|_{t=0} = I$, si può scegliere $\varphi_0(0) = 1, \varphi_i(0) = 0, i = 1, \dots, n-1$.

Esercizio 3.21. Si consideri la dinamica del pendolo invertito, linearizzata attorno al punto di equilibrio corrispondente a $\vartheta = 0$ (paragrafo 2.5.d). Posto $\tau = 0$ ed $f = u - F\dot{x}$, ove F rappresenta il coefficiente di attrito, individuare una rappresentazione con lo stato in cui $x(t)$ e $(lx(t) + \vartheta(t))$ siano due variabili di stato e l'uscita sia $y(t) = \vartheta(t)$, e studiare l'eccitabilità dei modi e la controllabilità degli stati.

Soluzione. È facile ottenere:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{F}{M} \dot{x} - \frac{mg}{M} \vartheta + \frac{1}{M} u \\ \ddot{\vartheta} &= \frac{F}{Ml} \dot{x} + (M+m) \frac{g}{Ml} \vartheta - \frac{1}{Ml} u \end{aligned}$$

sicché:

$$\begin{aligned} l\ddot{x}(t) + \ddot{\vartheta}(t) &= -l \left(\frac{F}{M} \dot{x} + \frac{mg}{M} \vartheta - \frac{1}{M} u \right) + \frac{1}{l} \left(\frac{F}{M} \dot{x} + (M+m) \frac{g}{M} \vartheta - \frac{1}{M} u \right) = \\ &= \frac{aF}{M} \dot{x} + (M+am) \frac{g}{M} \vartheta - \frac{a}{M} u \end{aligned}$$

ove $a = \frac{1}{l} - l$. Posto allora

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = lx + \vartheta, \quad x_4 = l\dot{x} + \dot{\vartheta},$$

si ha $y = \vartheta = x_3 - lx = x_3 - lx_1$ e:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{m}{M} glx_1 - \frac{F}{M} x_2 - \frac{m}{M} gx_3 + \frac{1}{M} u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -(M+am) \frac{gl}{M} x_1 + \frac{aF}{M} x_2 + (M+am) \frac{g}{M} x_3 - \frac{a}{M} u. \end{aligned}$$

Esercizio 3.22. Mostrare che se u^k è un autovettore di ordine k , corrispondente all'autovalore λ , allora risulta che:

$$e^{At}u^k = e^{\lambda t} \sum_{h=0}^{k-1} \frac{t^h}{h!} u^{k-h}$$

ove u^{k-h} sono autovettori di ordine inferiore o uguale a k .

Soluzione. Dalla definizione di esponenziale di matrice e di quella di autovettori generalizzati di ordine k si ha:

$$\begin{aligned} e^{At}u^k &= e^{(A-\lambda I)t}e^{\lambda t}u^k = e^{\lambda t} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} (A-\lambda I)^h u^k = \\ &= e^{\lambda t} \left[I + t(A-\lambda I) + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (A-\lambda I)^{k-1} \right] u^k = \\ &= e^{\lambda t} \left[u^k + tu^{k-1} + \frac{t^2}{2!} u^{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u^1 \right], \end{aligned}$$

ove $u^{k-h-1} = (A-\lambda I)u^{k-h}$ costituiscono una catena di autovettori. In particolare se $k=1$ si trova che $e^{At}u = e^{\lambda t}u$.

Problema 3.1. Studiare dal punto di vista dell'analisi modale i seguenti sistemi a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \quad 1) x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \quad 0 \quad 1) x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (0 \quad 1 \quad 0) x(t)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 1) x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \quad 1) x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \quad 1 \quad 0) x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (0 \quad 1 \quad -1) x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -7 & -9 & -5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Problema 3.2. Studiare dal punto di vista dell'analisi modale i seguenti sistemi a tempo discreto:

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 1 \ 1) x(t)$$

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 1 \ -1) x(t)$$

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ -2 \ -4) x(t)$$

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (0 \ 0 \ 1 \ 1) x(t)$$

e tutti i sistemi del problema 3.1 in cui si sostituisca $\dot{x}(t)$ con $x(t+1)$.

Problema 3.3. Determinare la rappresentazione dei seguenti sistemi sottoposti a campionamento:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 1 \ 0) x(t)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0 \ -1) x(t)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (0 \ 1 \ 0) x(t)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 3 \ -1) x(t)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (0 \ 1 \ 2) x(t)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (0 \ 0 \ 0 \ 1) x(t).$$

4. Le trasformate di Laplace e z nell'analisi dei sistemi a tempo continuo e a tempo discreto

In questo capitolo vengono applicati i metodi di analisi sviluppati nel dominio delle variabili complesse s e z allo studio dei sistemi a tempo continuo e a tempo discreto. L'interesse risiede non solo nel fatto che si ha una procedura alternativa di calcolo, ma anche nella corrispondenza, caratteristica dell'approccio ingegneristico, tra comportamento nel tempo e comportamento in frequenza.

4.1. Richiami sulla trasformata di Laplace

Sia $f(t)$ una funzione da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oppure da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Si definisce *trasformata di Laplace* di $f(t)$ la funzione $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da:

$$s \mapsto F(s)$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t)].$$

Nella seguente tabella vengono riassunte le principali trasformate ed antitrasformate di Laplace, mentre si rimanda in appendice per ulteriori richiami. In tabella 4.1 le funzioni sono moltiplicate per $\delta_{-1}(t)$ per indicare che sono nulle per $t < 0$.

Come noto la trasformata di Laplace può essere usata vantaggiosamente per l'analisi dei sistemi lineari stazionari a tempo continuo. Infatti un certo problema di partenza (nel dominio del tempo) può essere tradotto in un problema più semplice (nel dominio della variabile complessa s); una volta risolto, mediante antitrasformazione si riottiene la soluzione nel dominio del tempo.

Tabella 4.1 – Trasformate e antitrasformate di Laplace

Funzione	Trasformata di Laplace
$f(t)$	$F(s)$
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$\sin \omega t \delta_{-1}(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t \delta_{-1}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$	1
$\frac{t^n}{n!} \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$f(t - a) \delta_{-1}(t - a)$	$e^{-as} F(s)$
$f(t) e^{\alpha t} \delta_{-1}(t)$	$F(s - \alpha)$
$\frac{1}{\omega} \frac{t}{2!} \sin \omega t \delta_{-1}(t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - t \cos \omega t) \delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$

4.2. Calcolo delle evoluzioni nel dominio complesso: uso della trasformata di Laplace

Dato il sistema lineare stazionario a tempo continuo regolare descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

si ricorda che in base alle proprietà riportate in appendice le matrici $\Phi(t) = e^{At}$, $H(t) = e^{At}B$, $\Psi(t) = Ce^{At}$, $W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ assumono nel dominio della variabile complessa le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}, & \Psi(s) &= C(sI - A)^{-1}, \\ H(s) &= (sI - A)^{-1}B, & W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D,\end{aligned}$$

e la trasformata di Laplace della rappresentazione (4.1) dà luogo alle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}x(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}B u(s) \\ y(s) &= C(sI - A)^{-1}B x_0 + [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s).\end{aligned}$$

Esse forniscono una procedura alternativa per il calcolo delle funzioni nel tempo: noti infatti x_0 e $u(t)$, si calcola $u(s)$ e quindi $x(s)$ e $y(s)$. Da queste, per antitrasformazione, si determinano $x(t)$ e $y(t)$.

Dalle espressioni ricordate segue che $\Phi(\cdot)$, $H(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ sono matrici razionali i cui elementi hanno il grado del numeratore *minore* di quello del denominatore, mentre $W(\cdot)$ è una matrice razionale i cui elementi hanno il grado del numeratore *al più uguale* a quello del denominatore.

Nel caso in cui gli autovalori di A siano distinti, è noto che la matrice $\Phi(s)$ può essere espansa in *frazioni parziali* secondo l'espressione

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - \lambda_i} R_i,$$

in cui le matrici residue R_i si ottengono tramite la relazione:

$$R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) \Phi(s) \quad (4.2)$$

e risultano legate agli autovalori di A nel modo seguente:

$$R_i = u_i v_i^T.$$

Qualora invece gli autovalori di A abbiano molteplicità geometrica m_i maggiore di uno, vale l'espressione:

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{1}{(s - \lambda_i)^k} R_{ik},$$

in cui r è il numero degli autovalori distinti di A e

$$R_{ik} = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{1}{(m_i - k)!} \frac{d^{m_i - k}}{ds^{m_i - k}} [(s - \lambda_i)^{m_i} \Phi(s)]. \quad (4.3)$$

Esercizio 4.1. Calcolare le trasformate di Laplace di $u(t) = t^2 \delta_{-1}(t - 2)$ e $u(t) = e^{2t} \cos 3t$.

Soluzione. Si calcola:

$$\mathcal{L}[t^2 \delta_{-1}(t - 2)] = e^{-2s} \mathcal{L}[t^2] = e^{-2s} \frac{2!}{s^3},$$

mentre, usando la proprietà di traslazione in s :

$$\mathcal{L}[e^{2t} \cos 3t] = \mathcal{L}[\cos 3t] \Big|_{s-2} = \frac{s}{s^2 + 9} \Big|_{s-2} = \frac{s - 2}{s^2 - 4s + 13}.$$

Esercizio 4.2. Antitrasformare le funzioni $y_1(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$, e $y_2(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+9}$.

Soluzione. Per la prima funzione antitrasformata si calcola:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{s^2+s+1} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right] = \\ &= e^{-\frac{t}{2}} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right],\end{aligned}$$

avendo usato la proprietà della traslazione in s e le trasformate del seno e del coseno. Per la seconda funzione:

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-2s}}{s^2 + 9} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{3} \frac{3e^{-2s}}{s^2 + 9} \right] = \frac{1}{3} \sin 3(t - 2) \delta_{-1}(t - 2),$$

avendo sfruttato la proprietà della traslazione in t .

Esercizio 4.3. Calcolare $W(t)$ sapendo che la sua trasformata di Laplace è $W(s) = \frac{10}{s(s+1)}$.

Soluzione. Sviluppando in frazioni parziali, sfruttando la linearità ed antitrasformando:

$$\begin{aligned} W(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10}{s(s+1)} \right] = 10 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s+1)} \right] = \\ &= 10 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] = 10(1 - e^{-t})\delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

Esercizio 4.4. Calcolare $W(t)$ sapendo che la sua trasformata di Laplace è $W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$.

Soluzione. Sviluppando in frazioni parziali:

$$W(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}.$$

Per calcolare i residui R_1 ed R_2 si può applicare l'espressione (4.2) ovvero si può calcolare il minimo comune multiplo:

$$\frac{R_1(s+2) + R_2(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{(R_1 + R_2)s + 2R_1 + R_2}{(s+1)(s+2)}$$

e confrontare l'espressione ottenuta con $W(s)$, avendo così le condizioni:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 0 \\ 2R_1 + R_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = -R_2 \\ R_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 1 \\ R_2 = -1. \end{cases}$$

Un altro metodo per trovare i residui, che poi coincide con l'applicazione della formula (4.2), è quello di moltiplicare ambo i membri per $(s+1)$ e imporre $s = -1$:

$$(s+1)W(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-1} = R_1 + \frac{R_2}{s+2} \Big|_{s=-1} \Rightarrow R_1 = 1.$$

Analogamente per R_2 :

$$(s+2)W(s) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=-2} = (s+2) \frac{R_1}{s+1} \Big|_{s=-2} + R_2 \Rightarrow R_2 = -1.$$

Ora, ricordandosi della linearità e della trasformata dell'esponenziale, antitrasformando si ottiene:

$$\mathcal{L}^{-1}[W(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Esercizio 4.5. Data la matrice di transizione

$$\Phi(s) = \frac{\begin{pmatrix} s-2 & 4 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}}{(s-3)(s+2)}$$

determinare la matrice $\Phi(t)$.

Soluzione. Sviluppando in frazioni parziali:

$$\Phi(s) = \frac{R_1}{s-3} + \frac{R_2}{s+2}$$

con R_1, R_2 dati dalle (4.2):

$$R_1 = (s-3)\Phi(s) \Big|_{s=3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

$$R_2 = (s+2)\Phi(s) \Big|_{s=-2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

A queste stesse espressioni si giunge considerando il minimo comune multiplo:

$$\Phi(s) = \frac{(s+2)R_1 + (s-3)R_2}{(s-3)(s+2)} = \frac{(R_1 + R_2)s + (2R_1 - 3R_2)}{(s-3)(s+2)}$$

ed eguagliando questa espressione con

$$\Phi(s) = \frac{\begin{pmatrix} s-2 & 4 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}}{(s-3)(s+2)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{(s-3)(s+2)},$$

ossia imponendo:

$$R_1 + R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2R_1 - 3R_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.6. Determinare l'evoluzione forzata di un sistema avente funzione di trasferimento $W(s) = \frac{10}{s+1}$, a cui sia applicato l'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$.

Soluzione. Risulta $u(s) = \frac{1}{s}$ e quindi $y(s) = \frac{10}{s(s+1)}$. Espandendo in frazioni parziali:

$$y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1}$$

e dalla (4.2) ovvero facendo il minimo comune multiplo ed eguagliando i coefficienti delle stesse potenze in s si ottiene:

$$R_1 = 10, \quad R_2 = -10.$$

Ne segue che

$$y(t) = (10 - 10e^{-t})\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 4.7. Determinare l'evoluzione forzata di un sistema avente $W(s) = \frac{s+5}{(s+1)^3}$, a cui sia applicato l'ingresso $u(t) = 3\delta_{-1}(t) - 2\delta(t)$.

Soluzione. Per la linearità del sistema e della trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[W(s) \left(3\frac{1}{s} - 2 \right) \right] = 3\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+5}{(s+1)^3} \frac{1}{s} \right] - 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+5}{(s+1)^3} 1 \right] = \\ &= 3\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5}{s} - \frac{5}{s+1} - \frac{5}{(s+1)^2} - \frac{4}{(s+1)^3} \right] + \\ &\quad - 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{0}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{4}{(s+1)^3} \right] = \\ &= 3 \left[5 - e^{-t} \left(5 + 5t + 4\frac{t^2}{2!} \right) \right] - 2e^{-t} \left[t + 4\frac{t^2}{2!} \right] = \\ &= 15 - e^{-t} \left(15 + 17t + 20\frac{t^2}{2!} \right). \end{aligned}$$

Esercizio 4.8. Dato un sistema con $W(s) = \frac{3s+10}{s^2}$, calcolare l'uscita forzata quando $u(t) = e^{-t}$.

Soluzione. Ovviamente $u(s) = \frac{1}{s+1}$, ed essendo $x_0 = 0$:

$$y(s) = \frac{3s+10}{s^2} \frac{1}{s+1} = \frac{3s+10}{s^2(s+1)}.$$

Per calcolare $y(t)$ occorre antitrasformare questa espressione. Espandendo in frazioni parziali:

$$\frac{3s+10}{s^2(s+1)} = \frac{R_{11}}{s^2} + \frac{R_{12}}{s} + \frac{R_2}{s+1} = \frac{(R_{12}+R_2)s^2 + (R_{11}+R_{12})s + R_{11}}{s^2(s+1)},$$

da cui si ricava:

$$R_{12} + R_2 = 0, \quad R_{11} + R_{12} = 3, \quad R_{11} = 10,$$

cioè

$$R_{12} = -7, \quad R_2 = 7, \quad R_{11} = 10.$$

Antitrasformando:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10}{s^2} - \frac{7}{s} + \frac{7}{s+1} \right] = 10\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] - 7\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] + 7\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] = \\ &= 10t - 7\delta_{-1}(t) + 7e^{-t} = (10t - 7 + 7e^{-t})\delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

Si è moltiplicato tutto per $\delta_{-1}(t)$ per indicare che $y(t)$ è nulla per $t < 0$. Per il calcolo dei residui si poteva procedere anche nella seguente maniera:

$$(s+1) \left(\frac{R_{11}}{s^2} + \frac{R_{12}}{s} \right) \Big|_{s=-1} + R_2 = (s+1)W(s) \Big|_{s=-1} = \frac{3s+10}{s^2} \Big|_{s=-1},$$

ottenendo:

$$R_2 = (s+1)W(s) \Big|_{s=-1},$$

e:

$$R_{11} + \left(sR_{12} + s^2 \frac{R_2}{s+1} \right) \Big|_{s=0} = s^2 W(s) \Big|_{s=0} = \frac{3s+10}{s+1} \Big|_{s=0}, \quad (4.4)$$

avendo così

$$R_{11} = s^2 W(s) \Big|_{s=0}$$

Per calcolare R_{12} occorre derivare la (4.4) una volta rispetto ad s :

$$R_{12} + \frac{d}{ds} \left(\frac{s^2 R_2}{s+1} \right) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} [s^2 W(s)] \Big|_{s=0},$$

ricavando:

$$R_{12} = \frac{d}{ds} [s^2 W(s)] \Big|_{s=0}.$$

Si noti che se ad esempio fosse stato:

$$\frac{R_{11}}{s^3} + \frac{R_{12}}{s^2} + \frac{R_{13}}{s} + M(s) = W(s),$$

moltiplicando ambo i membri per s^3 :

$$R_{11} + sR_{12} + s^2 R_{13} + s^3 M(s) = s^3 W(s),$$

e procedendo analogamente si sarebbe avuto:

$$R_{11} = (s^3 W(s)) \Big|_{s=0},$$

$$R_{12} + \frac{d}{ds} (s^2 R_{13} + s^3 M(s)) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} (s^3 W(s)) \Big|_{s=0}$$

$$\Rightarrow R_{12} = \frac{d}{ds} (s^3 W(s)) \Big|_{s=0},$$

$$2R_{13} + \frac{d^2}{ds^2} (s^3 M(s)) \Big|_{s=0} = \frac{d^2}{ds^2} (s^3 W(s)) \Big|_{s=0}$$

$$\Rightarrow R_{13} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} (s^3 W(s)) \Big|_{s=0}$$

avendo derivato due volte rispetto ad s per calcolare R_{13} . Iterando questo procedimento otteniamo nel caso generale la relazione (4.3).

Esercizio 4.9. Calcolare la risposta all'impulso per il sistema descritto dalla matrice di funzioni di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s^2-1)(s+3)} \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Poiché:

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s-1)(s+3)} \begin{pmatrix} (s-1)(s+3) \\ s+1 \end{pmatrix} = \frac{R_{11}}{s+1} + \frac{R_{12}}{(s+1)^2} + \frac{R_2}{s-1} + \frac{R_3}{s+3},$$

ove i residui si calcolano applicando le relazioni analoghe alle (4.2), (4.3), valide nel caso di matrici:

$$R_{11} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} [(s+1)^2 W(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(s-1)(s+3)} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

$$R_{12} = \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)^2 W(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \left(\frac{1}{(s-1)(s+3)} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)W(s)] = \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{s-1}{(s+1)^2}}{\frac{1}{(s+1)(s+3)}} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \lim_{s \rightarrow -3} [(s+3)W(s)] = \lim_{s \rightarrow -3} \left(\frac{\frac{s+3}{(s+1)^2}}{\frac{1}{(s+1)(s-1)}} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

antitrasformando si ricava:

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Esercizio 4.10. Calcolare la matrice di transizione dello stato del sistema a tempo continuo avente matrice dinamica $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Poiché

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s-2 & 1 \\ 2 & s-3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 - 5s + 4} \begin{pmatrix} s-3 & -1 \\ -2 & s-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s-4)(s-1)} \begin{pmatrix} s-3 & -1 \\ -2 & s-2 \end{pmatrix} = \mathcal{L}[e^{At}],$$

si ha:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \frac{s-3}{(s-4)(s-1)} & \frac{-1}{(s-4)(s-1)} \\ \frac{-2}{(s-4)(s-1)} & \frac{s-2}{(s-4)(s-1)} \end{pmatrix} \right].$$

Occorre antitrasformare singolarmente i termini che compaiono in $\Phi(s)$. Più rapidamente, si possono applicare le relazioni (4.2), (4.3), ottenendo:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-4} R_1 + \frac{1}{s-1} R_2 \right],$$

ove:

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow 4} [(s-4)\Phi(s)] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)\Phi(s)] = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

e quindi:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} e^t.$$

Le due matrici R_1, R_2 a secondo membro hanno rango 1, in quanto sono pari al prodotto $u_i v_i^T$, e il cui rango è uguale alla dimensione interna, ossia 1. Per correlare questo metodo di calcolo di e^{At} con quello mediante autovettori, si fattorizzano le matrici che compaiono al secondo membro, evidenziando così i termini $e^{\lambda_i} u_i v_i^T$. Le fattorizzazioni sono infinite perché gli autovettori sono definiti a meno di una costante arbitraria. Ad esempio:

$$e^{At} = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

che è appunto una somma del tipo $\sum_{i=1}^n e^{\lambda_i} u_i v_i^T = e^{At}$.

Esercizio 4.11. Calcolare la risposta forzata del sistema descritto dalla funzione di trasferimento ingresso-uscita:

$$W(s) = \frac{s^2 + 7s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

all'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t) + 2\text{sen } 2t = (1 + 2\text{sen } 2t)\delta_{-1}(t)$.

Soluzione. Trasformando secondo Laplace:

$$u(s) = \frac{1}{s} + 2 \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{s^2 + 4s + 4}{s(s^2 + 4)}.$$

Dall'espressione della funzione di trasferimento si nota che il sistema è causale, ovvero l'uscita dipende dai valori del passato dell'ingresso e dai valori del presente. Poiché:

$$y(s) = W(s)u(s)$$

si ha:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)u(s)].$$

Poiché poi lo stato iniziale è per ipotesi nullo, antitrasformando:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2 + 7s + 1}{s^2 + 5s + 6} \frac{s^2 + 4s + 4}{s(s^2 + 4)} \right]$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s} + \frac{Ds+E}{s^2+4} \right] = A \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+3} \right] + \\ &+ B \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] + C \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] + D \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2+4} \right] + \frac{E}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^2+4} \right] = \\ &= A e^{-3t} + B e^{-2t} + C \delta_{-1}(t) + \cos 2t + \frac{E}{2} \text{sen } 2t \end{aligned}$$

ove i residui si possono calcolare con i metodi finora visti.

Esercizio 4.12. Calcolare la risposta forzata del sistema descritto dalla funzione di trasferimento ingresso-uscita:

$$W(s) = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s+2} & \frac{s}{s+1} \end{pmatrix},$$

all'ingresso:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{-1}(t) \\ \text{sen } 3t \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Si ha:

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s+2} & \frac{s}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{3}{s^2+9} \end{pmatrix},$$

da cui segue $y_1(s) = \frac{1}{s^2}$ e

$$y_2(s) = \frac{1}{s(s+2)} + \frac{3s}{(s+1)(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1} + \frac{Ds+E}{s^2+9}.$$

Dunque:

$$y_1(t) = t$$

$$y_2(t) = A\delta_{-1}(t) + Be^{-2t} + Ce^{-t} + D\sin 3t + \frac{E}{3}\cos 3t.$$

Esercizio 4.13. Si determini la matrice delle risposte impulsive di un sistema avente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Il minimo comune denominatore della $W(s)$ risulta essere pari a $(s+1)^2(s+2)(s+3)$. Pertanto dalle analoghe alle (4.2), (4.3), si ha:

$$W(s) = \frac{1}{s+1}R_{11} + \frac{1}{(s+1)^2}R_{12} + \frac{1}{s+2}R_{21} + \frac{1}{s+3}R_{31},$$

$$R_{11} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds}[(s+1)^2 W(s)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$R_{12} = \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)^2 W(s)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{21} = \lim_{s \rightarrow -2} [(s+2)W(s)] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_{31} = \lim_{s \rightarrow -3} [(s+3)W(s)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che:

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} - e^{-2t} & e^{-3t} \\ te^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.14. Si determini la rappresentazione esplicita del seguente sistema regolare:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

Soluzione. Si calcola:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s(s+3)} & -\frac{1}{s(s+3)} & 0 \\ -\frac{2}{s(s+3)} & \frac{s+1}{s(s+3)} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

e dalle (4.2) e (4.3) si ottiene:

$$\Phi(s) = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{s+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{s+3} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} & 0 \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$H(t) = \Phi(t)B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-3t} \\ \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{pmatrix},$$

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} & 0 \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} & \frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$W(t) = C\Phi(t)B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.15. Determinare la risposta in evoluzione forzata all'ingresso in figura per il sistema considerato nell'esercizio 4.14.

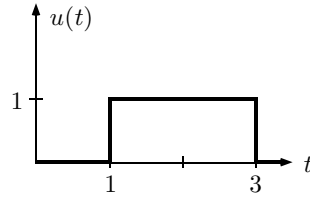


Figura 4.1

Soluzione. Si osservi che $u(t) = \delta_{-1}(t-1) - \delta_{-1}(t-3)$. Il calcolo è immediato se si tiene conto del fatto che il sistema è lineare e stazionario, per cui per la risposta forzata vale la proprietà di sovrapposizione degli effetti e la proprietà di traslazione. Più precisamente la risposta forzata voluta è pari alla somma della risposta forzata all'ingresso $\delta_{-1}(t)$ traslata in $t = 1$ (per la stazionarietà), meno la stessa risposta forzata traslata di $t = 3$. Si ha quindi:

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \frac{1}{s} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+3} \\ -\frac{2}{3} \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{6} \frac{1}{s+3} \end{pmatrix},$$

$$v(s) = W(s)u(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3s^2} + \frac{1}{3s(s+3)} \\ -\frac{2}{3s^2} + \frac{3}{2s(s+1)} + \frac{1}{6s(s+3)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3s^2} + \frac{1}{9s} - \frac{1}{9(s+3)} \\ -\frac{2}{3s^2} + \frac{3}{2s} - \frac{3}{2(s+1)} + \frac{1}{18s} - \frac{1}{18(s+3)} \end{pmatrix},$$

ed in definitiva:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[v(s)] \Big|_{(t-1)} \delta_{-1}(t-1) - \mathcal{L}^{-1}[v(s)] \Big|_{(t-3)} \delta_{-1}(t-3) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{9} + \frac{1}{3}(t-1) - \frac{1}{9}e^{-3(t-1)} \\ \frac{28}{18} - \frac{1}{3}(t-1) - \frac{3}{2}e^{-(t-1)} - \frac{1}{8}e^{-3(t-1)} \end{pmatrix} \delta_{-1}(t-1) +$$

$$- \begin{pmatrix} \frac{1}{9} + \frac{1}{3}(t-3) - \frac{1}{9}e^{-3(t-3)} \\ \frac{28}{18} - \frac{1}{3}(t-3) - \frac{3}{2}e^{-(t-3)} \end{pmatrix} \delta_{-1}(t-3).$$

Alternativamente si noti che per il teorema della traslazione risulta:

$$u(s) = \frac{e^{-s} - e^{-3s}}{s} \quad \Rightarrow \quad y(s) = W(s)u(s) = \frac{W(s)}{s}(e^{-s} - e^{-3s}).$$

Per la linearità della trasformata di Laplace ed ancora applicando il teorema della traslazione si ottiene il risultato voluto.

Esercizio 4.16. Studiare, mediante il teorema del valore iniziale, il comportamento della risposta impulsiva del sistema

$$W(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)(s+3)(s+2)}$$

nell'intorno dell'origine.

Soluzione. Per istanti immediatamente seguenti l'applicazione dell'impulso in ingresso, si trova:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} W(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s W(s) = 1.$$

Pertanto la risposta impulsiva presenta una discontinuità nell'origine, passando da valori nulli per istanti immediatamente precedenti $t = 0$ a valori finiti per istanti seguenti.

Più in generale se m ed n sono rispettivamente i gradi del polinomio a numeratore e a denominatore di $W(s)$, dal teorema del valore iniziale si ottiene la seguente casistica:

- 1) se $m = n$ risulta $\lim_{t \rightarrow 0^+} W(t) = \infty$, e in tal caso esiste un legame diretto ingresso-uscita (ossia la matrice D è diversa da zero) e l'impulso applicato si presenta istantaneamente all'uscita del sistema;
- 2) se $n - m = 1$ la risposta impulsiva parte da valori finiti non nulli e presenta una discontinuità nell'origine;
- 3) se $n - m = 2$ la risposta impulsiva parte da zero ma la sua derivata prima presenta una discontinuità nell'origine (infatti $\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{y}(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{W}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}[\dot{W}(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 W(s) = l < \infty$);
- 4) se $n - m = d > 2$ la risposta impulsiva parte da zero con le prime $d-1$ derivate continue, mentre la derivata d -esima presenta una discontinuità nell'origine.

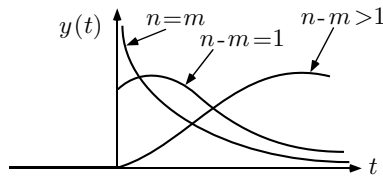


Figura 4.2

Le varie situazioni sono presentate graficamente in figura 4.2.

4.3. Rappresentazioni della funzione di trasferimento

Come è noto per i sistemi lineari, stazionari a dimensione finita la matrice delle funzioni di trasferimento $W(s)$, che coincide con la trasformata di Laplace della matrice delle risposte impulsive, è costituita da funzioni razionali proprie della variabile complessa s . Una tale matrice può ovviamente essere sempre espressa come somma di una matrice costante, che rappresenta il legame diretto ingresso-uscita, e di una costituita da funzioni razionali strettamente proprie alla quale ci riferiremo nell'esaminarne le possibili rappresentazioni.

Rapporto di polinomi. Ogni elemento della $W(s)$ è del tipo

$$w_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, m,$$

dove $n_{ij}(s)$ e $d_{ij}(s)$ sono polinomi in s ed il grado del numeratore è minore di quello del denominatore. Indicato con $d(s)$ il minimo comune denominatore dei w_{ij} , è possibile rappresentare $W(s)$ come:

$$W(s) = \frac{B(s)}{d(s)} \quad (4.5)$$

nella quale $B(s)$ è una matrice di polinomi ognuno di grado minore di quello di $d(s)$.

Supponendo pari ad n il grado di $d(s)$ la (4.5) può essere scritta:

$$W(s) = \frac{B_{n-1}s^{n-1} + B_{n-2}s^{n-2} + \dots + B_1s + B_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (4.6)$$

dove B_0, \dots, B_{n-1} sono matrici costanti.

Rappresentazione mediante poli e residui. Questa rappresentazione fa riferimento alle soluzioni del polinomio a denominatore nella (4.6), usualmente denominati *poli della matrice delle funzioni di trasferimento*, ed al noto sviluppo

$$W(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{R_{ik}}{(s - p_i)^k}, \quad (4.7)$$

dove p_1, \dots, p_r sono le radici distinte (con molteplicità m_1, \dots, m_r) di $d(s)$ e i residui R_{ik} sono matrici costanti che si calcolano con la relazione analoga alla (4.3), ove i poli p_i sostituiscono gli autovalori λ_i .

È utile osservare che, limitandosi per semplicità al caso di poli con molteplicità unitaria, l'antitrasformata della (4.7) fornisce:

$$W(t) = \sum_{i=1}^n R_i e^{p_i t} \quad (4.8)$$

che mostra come la $W(t)$ sia costituita da combinazioni lineari di questi modi simultaneamente eccitabili ed osservabili, aperiodici e pseudoperiodici a seconda che gli *autovalori* siano reali o a coppie complessi coniugati. Se, infatti, la terna di matrici (A, B, C) costituisce una rappresentazione implicita del sistema caratterizzato dalla matrice delle risposte impulsive (4.8), gli R_i possono essere calcolati con la relazione:

$$R_i = C u_i v_i^T B$$

nella quale u_i e v_i sono gli autovettori destri e sinistri di A . Un analogo discorso vale se i poli hanno molteplicità superiore all'unità.

Rappresentazione mediante poli e zeri. Questa rappresentazione fa riferimento alle espressioni fattorizzate in funzione delle soluzioni dei polinomi a numeratore e a denominatore di ogni elemento $w_{ij}(s)$ della matrice delle funzioni di trasferimento, detti rispettivamente *zeri* e *poli*. Il generico elemento di $W(s)$ può infatti scriversi:

$$w(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \bar{k} \frac{\prod_{i=1}^h (s - z_i)^{\nu_i}}{\prod_{i=1}^k (s - p_i)^{\mu_i}}$$

dove

\bar{k} è il rapporto tra i coefficienti di ordine massimo di $d(s)$ ed $n(s)$;
 z_i è lo zero di $w(s)$ di molteplicità ν_i ;

p_i è il polo di $w(s)$ di molteplicità μ_i .

Distinguendo i poli e gli zeri complessi coniugati da quelli reali e separando i fattori corrispondenti ad un eventuale polo di molteplicità μ_0 nell'origine ed un eventuale zero di molteplicità ν_0 , anch'esso nell'origine, si ha:

$$w(s) = \bar{k} \frac{\prod_{i=1}^{h_1} (s - z_i)^{\nu_i} \prod_{j=1}^{h_2} [(s - \beta_j)^2 + \gamma_j^2]^{\nu_j}}{s^{\mu_0 - \nu_0} \prod_{i=1}^{k_1} (s - p_i)^{\mu_i} \prod_{j=1}^{k_2} [(s - \alpha_j)^2 + \omega_j^2]^{\mu_j}}$$

nella quale h_1 , $2h_2$, k_1 , $2k_2$ sono rispettivamente il numero dei zeri reali, degli zeri complessi coniugati, dei poli reali, dei poli complessi coniugati, diversi da quelli nell'origine.

Un modo alternativo, più utile nella pratica, è quello che si ottiene utilizzando le costanti di tempo τ'_i , τ_i per gli zeri e i poli reali, gli smorzamenti ζ'_j , ζ_j e le pulsazioni naturali ω'_{nj} , ω_{nj} per quelli complessi e coniugati:

$$w(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{h_1} (1 + \tau'_i s)^{\nu_i} \prod_{j=1}^{h_2} \left[1 + 2\zeta'_j \frac{s}{\omega'_{nj}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{nj}} \right]^{\nu_j}}{s^{\mu_0 - \nu_0} \prod_{i=1}^{k_1} (1 + \tau_i s)^{\mu_i} \prod_{j=1}^{k_2} \left[1 + 2\zeta_j \frac{s}{\omega_{nj}} + \frac{s^2}{\omega^2_{nj}} \right]^{\mu_j}}, \quad (4.9)$$

ove:

$$\begin{aligned} \tau'_i &= -\frac{1}{z_i}, & \omega'_{nj} &= \sqrt{\beta_j^2 + \gamma_j^2}, & \zeta'_j &= -\frac{\beta_j}{\gamma_{nj}}, \\ \tau_i &= -\frac{1}{p_i}, & \omega_{nj} &= \sqrt{\alpha_j^2 + \omega_j^2}, & \zeta_j &= -\frac{\alpha_j}{\omega_{nj}}, \end{aligned}$$

e dove il *guadagno*, pari al rapporto tra i coefficienti relativi alle potenze di ordine più basso di $n(s)$ e $d(s)$, è pari a

$$k = \bar{k} \frac{\prod_{i=1}^{h_1} \tau_i^{\nu_i} \prod_{j=1}^{h_2} \gamma_{nj}^{2\nu_j}}{\prod_{i=1}^{k_1} \tau_i^{\mu_i} \prod_{j=1}^{k_2} \omega_{nj}^{2\mu_j}}.$$

In conclusione la funzione $W(s)$ è univocamente individuata una volta assegnati, per ogni suo elemento $w(s)$, il coefficiente k , ovvero \bar{k} , gli zeri e i poli e le relative molteplicità.

Esercizio 4.17. Fornire i vari tipi di rappresentazioni della seguente matrice di funzioni di trasferimento:

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s^2 + 2s + 3}{s^2 - 1} & \frac{s - 1}{s^2 + 3s + 2} \\ \frac{1}{s + 1} & \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + s - 2} \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Per quanto riguarda l'espressione di $W(s)$ in termini di rapporto di polinomi, si ottiene per semplice ispezione:

$$\begin{aligned} W(s) &= D + \bar{W}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(s^2 - 1)(s + 2)} \begin{pmatrix} 2s^2 + 8s + 8 & s^2 - 2s + 1 \\ s^2 + s - 2 & s^2 + 4s + 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{s^3 + 2s^2 - s - 2}. \end{aligned}$$

L'espressione di $W(s)$ in termini di poli e residui può essere calcolata facilmente osservando che nel caso in esame:

$$W(s) = D + \bar{W}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{R_1}{(s + 1)} + \frac{R_2}{(s - 1)} + \frac{R_3}{(s + 2)}$$

e con semplici calcoli si ottiene:

$$W(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{(s + 1)} + \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}}{(s - 1)} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}}{(s + 2)}.$$

Infine l'espressione di ciascuno dei termini della $W(s)$ assegnata in termini di poli e zeri è:

$$\begin{aligned} W(s) &= D + \bar{W}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2(s + 2)}{(s + 1)(s - 1)} & \frac{s - 1}{(s + 2)(s + 1)} \\ \frac{1}{(s + 1)} & \frac{s + 3}{(s + 2)(s - 1)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 \frac{1 + s/2}{(1 + s)(1 - s)} & -\frac{1}{2} \frac{1 - s}{(1 + s/2)(1 + s)} \\ \frac{1}{(1 + s)} & -\frac{3}{2} \frac{1 + s/3}{(1 + s/2)(1 - s)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.4. Il regime permanente e la risposta armonica per i sistemi a tempo continuo

Come è noto la risposta a regime permanente per il sistema regolare (4.1) è quella funzione verso la quale tende l'andamento della risposta al tendere del tempo all'infinito, indipendentemente dalle condizioni iniziali x_0 . Nell'ipotesi di esistenza del regime permanente, e se l'ingresso appartiene a fissate classi di funzioni, tra le quali quelle polinomiali e quelle periodiche, la risposta a regime permanente è dello stesso tipo della funzione d'ingresso.

Per sistemi ad un ingresso ed una uscita, la risposta a regime permanente ad un ingresso canonico $u(t) = u_0 \frac{t^k}{k!}$ ha l'espressione:

$$y_r(t) = u_0 \sum_{i=0}^k c_i \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} = u_0 \left[c_0 \frac{t^k}{k!} + c_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + c_{k-1} t + c_k \right], \quad (4.10)$$

in cui i coefficienti sono dati dalla espressione $c_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i W(s)}{ds^i} \right]_{s=0}$.

La risposta a regime permanente ad un ingresso sinusoidale $u(t) = u_0 \sin \tilde{\omega} t$, è ancora sinusoidale, ed è definita dalla relazione:

$$y_r(t) = u_0 M(\tilde{\omega}) \sin(\tilde{\omega} t + \phi(\tilde{\omega})), \quad (4.11)$$

ove $M(\tilde{\omega}) = |W(j\tilde{\omega})|$ e $\phi(\tilde{\omega}) = \angle W(j\tilde{\omega})$ sono il modulo e la fase di $W(j\omega) = M(\tilde{\omega}) e^{j\phi(\tilde{\omega})}$ calcolati in $\tilde{\omega}$. Questi stessi argomenti si possono applicare a sistemi con m ingressi e p uscite. Infatti, per la linearità del sistema, la risposta ad un ingresso che sia combinazione lineare di fissati ingressi è pari alla stessa combinazione lineare delle risposte. Quindi dato l'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1 \sin \omega_1 t \\ \vdots \\ u_m \sin \omega_m t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \sin \omega_1 t + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \sin \omega_2 t + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_m \end{pmatrix} \sin \omega_m t$$

l' i -esima uscita in regime permanente è data da:

$$y_{ri}(t) = \sum_{k=1}^m u_k M_{ik}(\omega_k) \sin(\omega_k t + \phi_{ik}(\omega_k)),$$

con $M_{ik}(\omega_k) = |w_{ik}(j\omega_k)|$ e $\phi_{ik}(\omega_k) = \angle w_{ik}(j\omega_k)$, e quindi:

$$y_r(t) = \sum_{k=1}^m \begin{pmatrix} u_k M_{1k}(\omega_k) \sin(\omega_k t + \phi_{1k}(\omega_k)) \\ \vdots \\ u_k M_{pk}(\omega_k) \sin(\omega_k t + \phi_{pk}(\omega_k)) \end{pmatrix}.$$

La matrice delle risposte armoniche $W(j\omega)$ è suscettibile di una interpretazione sperimentale. Riferendosi per semplicità di notazione ad un ingresso ed una uscita, poiché la risposta a regime permanente ad un ingresso sinusoidale è ancora una funzione sinusoidale di uguale pulsazione ma modificata in ampiezza di $|W(j\omega)|$ e sfasata di $\angle W(j\omega)$, è possibile determinarla sperimentalmente.

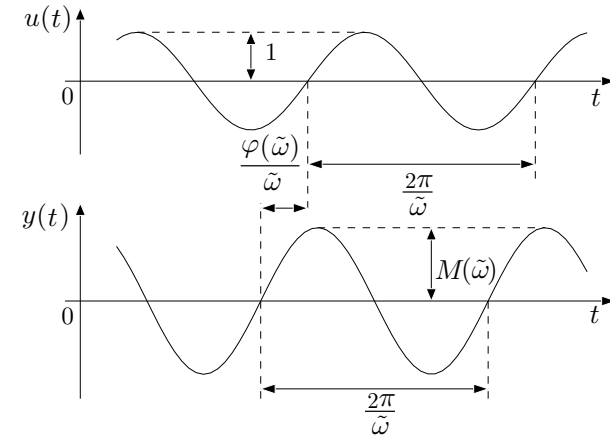


Figura 4.3

Si supponga infatti che il sistema si trovi in un qualunque stato x_0 all'istante t_0 , prescelto per l'inizio della determinazione sperimentale, e che, data la stazionarietà del sistema, può essere assunto uguale a zero. Si consideri inoltre un ingresso della forma $\sin \omega t$; se gli autovalori del sistema hanno parte reale negativa esiste la risposta a regime permanente, che assume l'espressione (4.11). Dal confronto dei segnali sinusoidali in ingresso e in uscita si possono ottenere i valori $M(\omega)$ e $\phi(\omega)$ per vari valori di $\omega \in [0, \infty)$ e, in definitiva, la funzione $W(j\omega)$.

È grazie a tale interpretazione che la funzione $W(j\omega)$ prende il nome di *risposta armonica*. Si richiama l'attenzione sul fatto che tale condizione è

collegata all'ipotesi che l'asse immaginario, nel piano complesso, appartenga alla regione di convergenza di $W(s)$.

Esercizio 4.18. Determinare l'uscita in regime permanente all'ingresso $u(t) = \sin 3t$ per un sistema avente $W(s) = \frac{4}{s+3}$.

Soluzione. Il regime permanente esiste in quanto i poli della $W(s)$ sono a parte reale minore di zero. La risposta $y_r(t)$ ha allora la forma (4.11). Poiché:

$$W(j\omega) = \frac{4}{3+j\omega} = \frac{4}{\sqrt{9+\omega^2} e^{j\omega/3}} = \frac{4}{\sqrt{9+\omega^2}} e^{-j\omega/3},$$

si ricava:

$$|W(j\omega)|_{\omega=3} = \frac{4}{3\sqrt{2}}, \quad \angle W(j\omega) \Big|_{\omega=3} = \arctan\left(-\frac{3}{3}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Dunque } y_r(t) = \frac{4}{3\sqrt{2}} \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Esercizio 4.19. Si determini l'evoluzione in regime permanente per ingresso $u(t) = 2\cos(3t+4) + \frac{1}{2}t + 4t^2 + 4$ di un sistema avente

$$W(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)(s+3)(s+2)}.$$

Soluzione. Poiché tutti i poli di $W(s)$ hanno parte reale negativa, esiste la risposta in regime permanente, che può essere calcolata sfruttando la linearità e in base alla (4.10) e all'analogia della (4.11). Infatti:

$$u(t) = 2\cos(3t+4) + \frac{1}{2}t + 8\frac{t^2}{2!} + 4 = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4(t).$$

Le risposte a regime permanente a questi quattro ingressi sono:

$$y_{r_1}(t) = 2M(3)\cos(3t+4+\phi(3)), \quad y_{r_2}(t) = \frac{1}{2}[c_0t + c_1],$$

$$y_{r_3}(t) = 8\left[c_0\frac{t^2}{2} + c_1t + c_2\right], \quad y_{r_4}(t) = 4c_0,$$

ove:

$$W(j\omega) = \frac{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2} e^{j\omega/(1-\omega^2)}}{\sqrt{1+\omega^2} e^{j\omega} \sqrt{3+\omega^2} e^{j\omega/3} \sqrt{3+\omega^2} e^{j\omega/2}},$$

$$M(3) = \sqrt{\frac{73}{2340}}, \quad \phi(3) = -\arctan\frac{47}{8},$$

$$c_0 = W(0) = \frac{1}{6}, \quad c_1 = W'(0) = -\frac{5}{36}, \quad c_2 = \frac{1}{2!}W''(0) = \frac{55}{216}.$$

Dunque:

$$y_r(t) = 2M(3)\cos(3t+4+\phi(3)) + 8c_0\frac{t^2}{2} + \left[\frac{1}{2}c_0 + 8c_1\right]t + \left[\frac{1}{2}c_1 + 8c_2 + 4c_0\right].$$

Si noti che per il calcolo di $y_{r_4}(t)$ si può anche applicare il teorema del valore finale:

$$y_{r_4}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{6},$$

ove $\frac{1}{s}$ è la trasformata di Laplace del gradino. Il calcolo di $y_{r_2}(t)$ e $y_{r_3}(t)$ può essere ancora fatto mediante il teorema del valore finale sfruttando la conoscenza dell'andamento di queste due funzioni. Infatti poiché $y_{r_2}(t) = c_0t + c_1$, detta $y_{r_2}(s) = c_0\frac{1}{s^2} + c_1\frac{1}{s} = \frac{c_0 + c_1s}{s^2}$ la sua trasformata, si deve avere:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_{r_2}(t)] &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[W(s) \frac{1}{s^2} - y_{r_2}(s) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s) - (c_0 + c_1s)D(s)}{sD(s)} = 0, \end{aligned}$$

ove si sono indicati con $N(s) = s^2 + s + 1$, $D(s) = (s+1)(s+3)(s+2) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$, il numeratore e il denominatore di $W(s)$. Dunque il polinomio al numeratore deve avere uno zero nell'origine in più rispetto a quello del denominatore, ossia si deve avere:

$$1 - 6c_0 = 0, \quad 1 - 11c_0 - 6c_1 = 0,$$

riottenendo i valori visti per c_0 e c_1 . In modo analogo, poiché deve essere $y_{r_3}(t) = c_0 \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$, con $y_{r_3}(s) = c_0 \frac{1}{s^3} + c_1 \frac{1}{s^2} + c_2 \frac{1}{s} = \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}{s^3}$, deve risultare:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_{r_3}(t)] &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[W(s) \frac{1}{s^3} - y_{r_3}(s) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s) - (c_0 + c_1 s + c_2 s^2) D(s)}{s^2 D(s)} = 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$1 - 6c_0 = 0, \quad 1 - 11c_0 - 6c_1 = 0, \quad 1 - 6c_0 - 11c_1 - 6c_2 = 0,$$

da cui si ricava c_2 . Questo procedimento può essere iterato per il calcolo di qualsiasi coefficiente c_i .

4.5. I diagrammi di Bode

Tra le rappresentazioni grafiche della risposta armonica $W(j\omega)$ rivestono particolare interesse i diagrammi logaritmici di Bode. La trattazione che segue è relativa alla rappresentazione del generico elemento $w_{ij}(j\omega)$ della matrice $W(j\omega)$.

Questa rappresentazione fa ricorso a due diagrammi cartesiani uno per il modulo $|W(j\omega)|$ della $W(j\omega)$, espresso in scala logaritmica, e l'altro per la fase $\angle W(j\omega)$. In entrambi i diagrammi le pulsazioni riportate sull'asse delle ascisse sono in scala logaritmica^(4.1). Questo ha il vantaggio di permettere di rappresentare con il dovuto dettaglio le grandezze al variare di ω in intervalli anche estesi. Il logaritmo più usato per ω è quello in base 10, il che comporta una suddivisione dell'asse delle ascisse in decadi, ove una decade è la distanza tra due pulsazioni che sono nel rapporto di 1 a 10.

^(4.1) Riportare su di una scala logaritmica una pulsazione ω vuol dire associarla al valore $\log_a \omega$, essendo a la base scelta per il logaritmo. Se ad esempio $a = 10$, $\omega = 1$ corrisponde a $\log_{10} 1 = 0$, $\omega = 2$ a $\log_{10} 2 \simeq 0.301$, etc. È chiaro che la scelta della base è arbitraria e il cambio da una base a ad una b comporta la moltiplicazione per $\log_a b$.

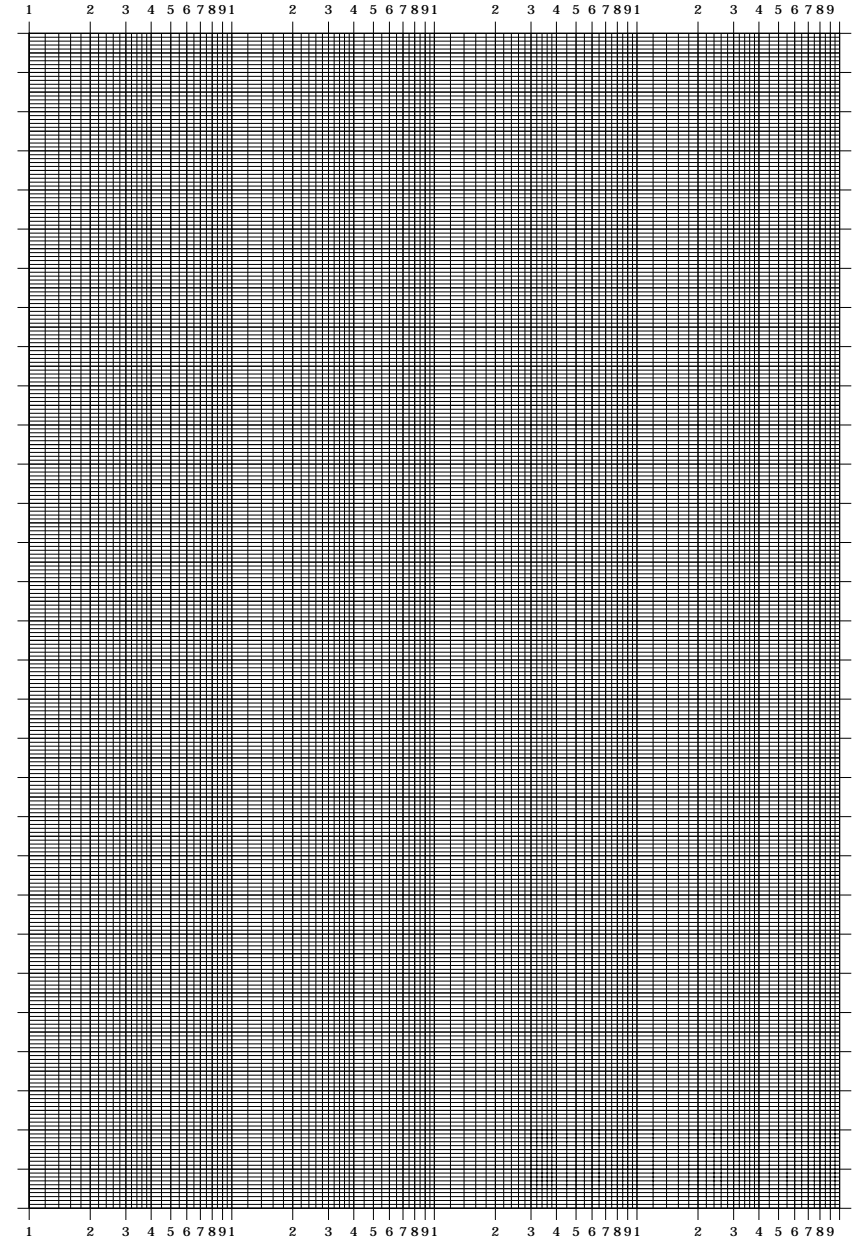


Figura 4.4 – Carta semilogaritmica

Considerando per ogni fissata pulsazione ω il logaritmo del numero complesso $W(j\omega)$:

$$\log W(j\omega) = \log |W(j\omega)| + j \angle W(j\omega) ,$$

e ricordando che il logaritmo del prodotto di più funzioni è pari alla somma dei logaritmi:

$$\log \left(\prod_{i=1}^q W_i(j\omega) \right) = \sum_{i=1}^q \log W_i(j\omega) = \sum_{i=1}^q \log |W_i(j\omega)| + j \sum_{i=1}^q \angle W_i(j\omega) ,$$

appare naturale fornire nel primo diagramma il logaritmo del modulo, e nel secondo la fase. Più precisamente il modulo viene espresso, su una scala lineare, in decibel:

$$|W(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |W(j\omega)|$$

e la fase in gradi o radianti. Dunque i diagrammi di Bode vengono tracciati su carta semilogaritmica (figura 4.4).

Talvolta viene usato per ω il logaritmo in base 2 o quello naturale e ; in questo secondo caso il modulo viene espresso in neper (logaritmo naturale del modulo).

Il ricorso alla scala logaritmica per il modulo e a quella lineare per la fase è vantaggioso sia perché usualmente il modulo è suscettibile di ampie variazioni che possono essere rappresentate più comodamente in tale scala, sia perché molto spesso occorre tracciare il diagramma del prodotto di due o più funzioni di cui sono noti i relativi diagrammi logaritmici, ed in tal caso i diagrammi del modulo e della fase del prodotto possono essere tracciati sommando i diagrammi dei diversi fattori.

Inoltre la scelta della scala logaritmica per la pulsazione e per il modulo della $W(j\omega)$ semplificano notevolmente la procedura di tracciamento dei diagrammi stessi. Infatti supponendo di disporre della rappresentazione poli-zeri della funzione di trasferimento nella forma (4.9) ponendo in questa $s = j\omega$ si ha:

$$W(j\omega) = k \frac{\prod_{i=1}^{h_1} (1 + j\omega\tau_i')^{\nu_i} \prod_{j=1}^{h_2} \left[1 + 2\zeta_j' \frac{j\omega}{\omega_{nj}'} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nj}'} \right)^2 \right]^{\nu_j}}{(j\omega)^{\mu_0 - \nu_0} \prod_{i=1}^{k_1} (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_{j=1}^{k_2} \left[1 + 2\zeta_j \frac{j\omega}{\omega_{nj}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nj}} \right)^2 \right]^{\mu_j}}$$

ed è quindi evidente, in base alle considerazioni precedenti, che i diagrammi del modulo e della fase di $W(j\omega)$ possono essere ottenuti sommando tra loro

i diagrammi dei singoli fattori. Questi ultimi possono essere dei seguenti tipi:

- 1) fattore costante k ;
- 2) fattore monomio $j\omega$;
- 3) fattore binomio $1 + j\omega\tau$;
- 4) fattore trinomio $1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2$, con $|\zeta| < 1$;
- 5) fattore esponenziale $e^{j\omega}$.

Ciascuno di questi, eccetto k , possono apparire elevati a potenza positiva o negativa. Nel seguito quindi viene esaminato in dettaglio il tracciamento dei diagrammi di Bode di ognuno dei termini suddetti.

Fattore costante k . Il contributo al modulo è costante e pari a $|k|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |k|$, così come per la fase, il cui contributo è nullo se $k > 0$ e pari a $-\pi$ se $k < 0$. I diagrammi sono riportati nella seguente figura.

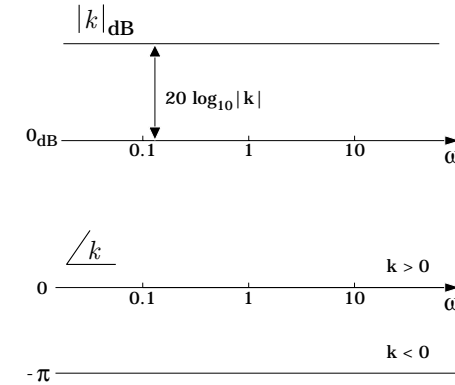
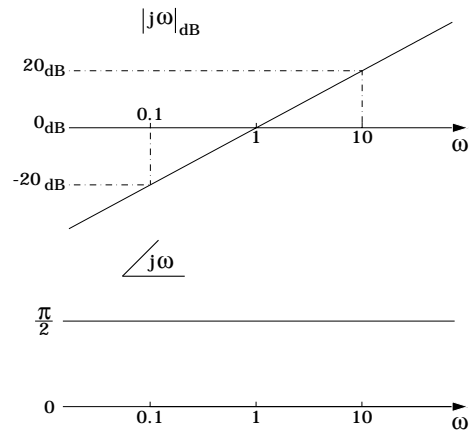


Figura 4.5 – Fattore costante k

Fattore monomio $j\omega$. Poiché $\log_{10} j\omega = \log_{10} \omega + j\frac{\pi}{2}$, per quanto riguarda il modulo si ha:

$$|j\omega|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega ,$$

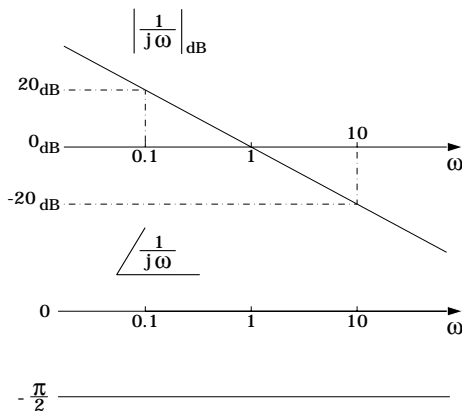
e ricordando che la scala in ω è logaritmica in base 10, il diagramma del modulo è una retta con pendenza di 20_{dB} per decade che attraversa l'asse delle ascisse ($M_{\text{dB}} = 0$) in $\omega = 1$. La fase, trattandosi di un termine immaginario puro, per $\omega \in [0, \infty)$ è costante e pari a $\angle j\omega = \frac{\pi}{2}$.

Figura 4.6 – Fattore monomio $j\omega$

Se il fattore monomio è elevato a -1, ossia per il termine $\frac{1}{j\omega}$, si ha che:

$$\log_{10} \frac{1}{j\omega} = \log_{10} \frac{1}{\omega} - j\frac{\pi}{2} = -\log_{10} \omega - j\frac{\pi}{2},$$

e quindi il fattore monomio a denominatore è rappresentato dai seguenti diagrammi:

Figura 4.7 – Fattore monomio $\frac{1}{j\omega}$

ove il diagramma del modulo è una retta con pendenza di -20_{dB} per decade che attraversa l'asse delle ascisse ($M_{\text{dB}} = 0$) in $\omega = 1$ e quello della fase è una costante pari a $-\frac{\pi}{2}$:

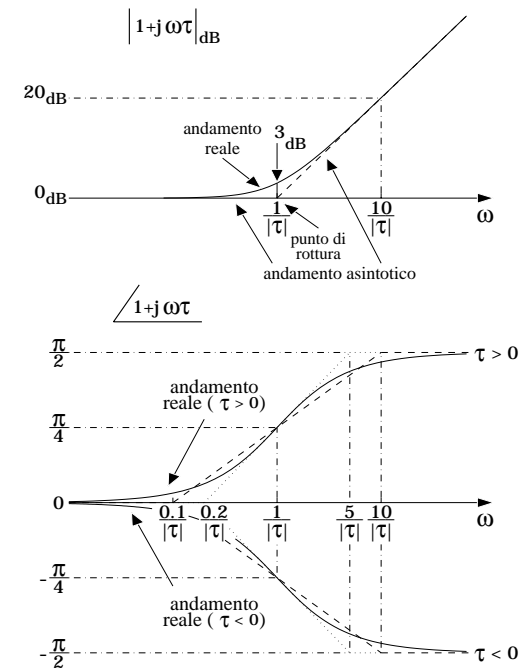
$$|j\omega|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \omega, \quad \angle j\omega = -\frac{\pi}{2}.$$

Fattore binomio $1 + j\omega\tau$. Essendo

$$\log_{10}(1 + j\omega\tau) = \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} + j \arctan \omega\tau,$$

per quanto riguarda il modulo si ha:

$$|1 + j\omega\tau|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}.$$

Figura 4.8 – Fattore binomio $1 + j\omega\tau$

Tale curva presenta, per ω molto minore di $1/\tau$, un asintoto che coincide con l'asse delle ascisse, essendo $\omega^2\tau^2$ trascurabile rispetto a 1. Per ω molto maggiore di $1/\tau$ presenta un secondo asintoto di equazione:

$$\varphi_a = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \simeq 20 \log_{10} |\omega\tau| = 20 \log \omega + 20 \log |\tau|$$

in quanto 1 è trascurabile rispetto a $\omega^2\tau^2$. Quest'ultimo asintoto è una retta con pendenza $20_{\text{dB}}/\text{dec}$ che attraversa l'asse delle ascisse ($M_{\text{dB}} = 0$) in $\omega = 1/|\tau|$; questo valore di ω è detto *pulsazione di rottura del diagramma asintotico*.

Una decade prima e una dopo della pulsazione di rottura lo scostamento del diagramma effettivo da quello asintotico risulta trascurabile. Infatti:

$$\begin{aligned} [M_{\text{dB}} - \varphi_a]_{\omega=1/10|\tau|} &= 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{1}{100}} - 0_{\text{dB}} \simeq 0.043_{\text{dB}}, \\ [M_{\text{dB}} - \varphi_a]_{\omega=10/|\tau|} &= 20 \log_{10} \sqrt{1 + 100} - 20_{\text{dB}} \simeq 0.043_{\text{dB}}. \end{aligned}$$

Risulta che il massimo scostamento si ha per $\omega = 1/|\tau|$ e vale:

$$[M_{\text{dB}} - \varphi_a]_{\omega=1/|\tau|} = 20 \log_{10} \sqrt{2} = 3_{\text{dB}}.$$

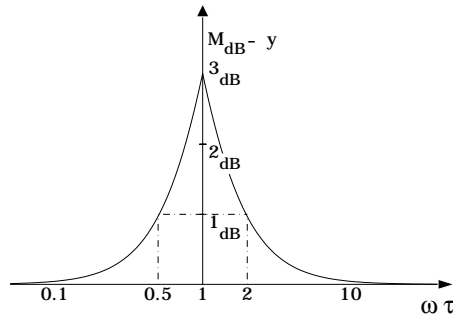


Figura 4.9 – Scostamento dal diagramma reale del modulo (fattore binomio)

L'andamento degli scostamenti, che è simmetrico rispetto ad una verticale passante per $1/|\tau|$, è riportato in figura 4.9, ove le pulsazioni sono normalizzate rispetto a quella di rottura.

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi si ha:

$$\angle 1 + j\omega\tau = \arctan \omega\tau.$$

Tale diagramma presenta due asintoti, entrambi orizzontali, uno coincidente con l'asse delle ascisse, per $\omega \ll 1/|\tau|$, e l'altro di ordinata pari a $\pi/2$ se $\tau > 0$ ovvero pari a $-\pi/2$ se $\tau < 0$ ^(4.2), per $\omega \gg 1/|\tau|$. La rappresentazione con i soli asintoti è ovviamente insoddisfacente in quanto presenta uno scostamento di $\pm \pi/4$ in corrispondenza della pulsazione di rottura. Volendo approssimare il diagramma esatto con una spezzata a tre lati l'approssimazione complessivamente migliore risulta quella ottenibile utilizzando i due asintoti ed un segmento passante per il punto $(1/|\tau|, \pm \pi/4)$ con pendenza di $\pi/4$ per decade se $\tau > 0$, ovvero di $-\pi/4$ per decade se $\tau < 0$. In questo caso lo scostamento massimo si ha in corrispondenza dei vertici di tale spezzata (una decade prima della pulsazione di rottura e una dopo) e risulta inferiore a 0.1 radianti.

Un'altra approssimazione spesso utilizzata è quella che si ottiene assumendo come segmento approssimante nell'intorno di $1/|\tau|$ quello ivi tangente alla curva effettiva. Tale segmento interseca l'asse delle ascisse in $\omega \simeq 1/5|\tau|$ e l'altro asintoto in $\omega \simeq 5/|\tau|$ ^(4.3). Anche in tal caso lo scostamento massimo si ha nei vertici e risulta inferiore a 0.2 radianti. Questa seconda approssimazione è spesso usata per riprodurre meglio l'andamento effettivo nell'intorno di $1/|\tau|$.

Per un fattore binomio a denominatore risulta:

$$\log_{10} \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} - j \arctan \omega\tau,$$

^(4.2) Uno zero con $\tau > 0$ viene detto a *fase minima*, mentre uno con $\tau < 0$ viene detto a *fase non minima*.

^(4.3) Il coefficiente angolare m della retta tangente in $\omega = 1/|\tau|$ si calcola derivando la fase, ricordando che in ascissa è riportato il $\log_{10} \omega$. Dunque $m = \frac{d}{d \log_{10} \omega} \angle \frac{1}{1 + j\omega\tau} \Big|_{\omega=1/|\tau|} = \frac{d\omega}{d \log_{10} \omega} \frac{d}{d\omega} \angle \frac{1}{1 + j\omega\tau} \Big|_{\omega=1/|\tau|} = \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \Big|_{\omega=1/|\tau|} = \pm 1/2$ (a seconda del segno di τ). Le rette tangenti hanno allora equazione:

$$y \mp \frac{\pi}{4} = \pm \frac{1}{2} \left(\log_{10} \omega - \log_{10} \frac{1}{|\tau|} \right) = \pm \frac{1}{2} \log_{10} \omega |\tau|$$

e calcolando l'intersezione con le rette $y = 0$ (primo asintoto) e $y = \pm \frac{\pi}{2}$ (secondo asintoto) si ricavano le intersezioni per $\omega \simeq 1/5|\tau|$ e $\omega \simeq 5/|\tau|$.

per cui:

$$\left| \frac{1}{1+j\omega\tau} \right|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} = -20 \log_{10} \sqrt{1+\omega^2\tau^2},$$

$$\angle \frac{1}{1+j\omega\tau} = -\arctan \omega\tau,$$

ed è rappresentato da diagrammi del modulo e della fase opposti, relativamente all'asse delle ascisse, rispetto a quelli del fattore binomio a numeratore^(4.4).

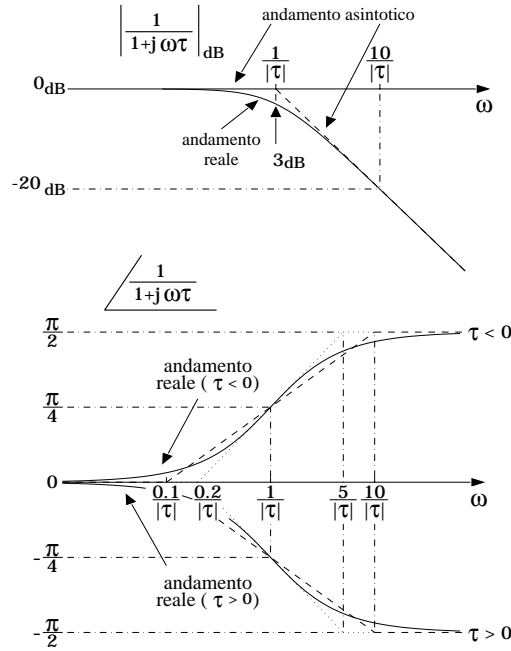


Figura 4.10 – Fattore binomio $\frac{1}{1+j\omega\tau}$

Fattore trinomio $1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$. Ovviamente si considera $|\zeta| < 1$ perché altrimenti il fattore trinomio è scomponibile in due fattori binomi,

^(4.4) Anche in questo caso τ può essere negativo e, analogamente al caso degli zeri, un polo con $\tau > 0$ viene detto a *fase minima* mentre uno con $\tau < 0$ viene detto a *fase non minima*.

precedentemente trattati. Analogamente ai casi finora analizzati si trova che:

$$\left| 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \right|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}},$$

$$\angle 1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 = \arctan \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right).$$

Dunque il diagramma dei moduli presenta, per $\omega \ll \omega_n$, un asintoto coincidente con l'asse delle ascisse, e per $\omega \gg \omega_n$ un altro asintoto, la cui equazione si trova trascurando gli altri addendi rispetto a ω^4/ω_n^4 :

$$\varphi_a = 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \simeq 40 \log_{10} \frac{\omega}{\omega_n} = 40 \log_{10} \omega - 40 \log_{10} \omega_n.$$

Tale asintoto è quindi una retta con pendenza di 40 dB/dec che interseca l'asse delle ascisse in $\omega = \omega_n$, detta *pulsazione di rottura*. Il diagramma asintotico costruito utilizzando i due asintoti individuati presenta degli scostamenti dal diagramma effettivo. Questi scostamenti dipendono da $|\zeta|$ e possono assumere valori elevati nell'intorno della pulsazione di rottura, tendendo all'infinito per $\omega \rightarrow \omega_n$ e $|\zeta| \rightarrow 0$. Si noti che il diagramma dei moduli non cambia al cambiare di segno di ζ .

In figura 4.11 sono indicati gli andamenti del diagramma effettivo per alcuni valori di $|\zeta|$. Naturalmente per $|\zeta| = 1$ il termine trinomio si riconduce al quadrato di un termine binomio; le sue ordinate sono quindi il doppio di quelle relative al diagramma del termine binomio con $\tau = \frac{1}{\omega_n}$. Si noti infine che per $|\zeta| \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,707\right]$ la curva presenta un minimo, mentre per valori superiori l'andamento è monotono crescente. Inoltre per $\zeta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ la curva interseca l'asse delle ascisse a destra di $\omega = \omega_n$ e per $\zeta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ a sinistra, mentre per $\zeta = \frac{1}{2}$ l'interseca in $\omega = \omega_n$. È chiaro

poi che per $\zeta \in (0.3, 1)$ l'approssimazione asintotica descrive in maniera sufficientemente precisa l'andamento reale.

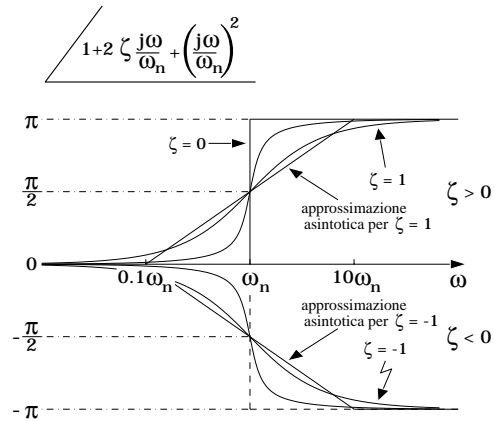
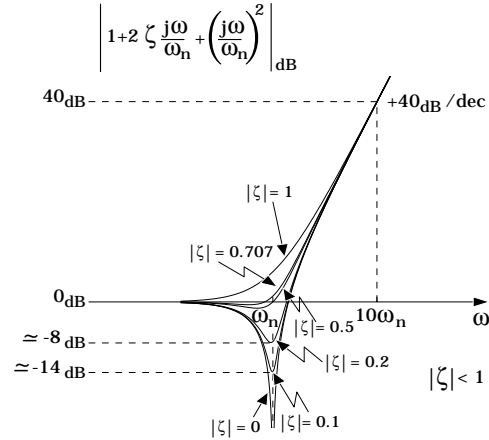


Figura 4.11 – Fattore trinomio $1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$

Nella figura 4.12 sono riportati gli scostamenti, con ascissa normalizzata ω/ω_n , del diagramma effettivo da quello asintotico per diversi valori di $|\zeta|$.

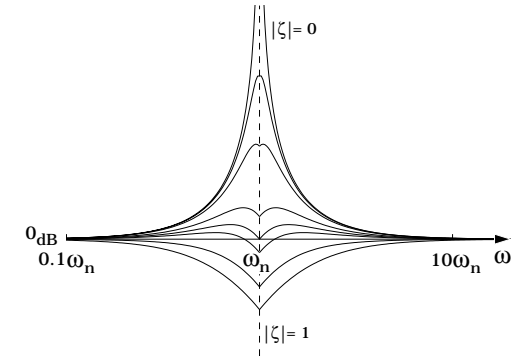


Figura 4.12 – Scostamento dal diagramma reale del modulo (fattore binomio)

Per quanto riguarda la fase del termine trinomio risulta:

$$\angle \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} = -\arctan \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

ed è immediato dedurre che presenta due asintoti orizzontali, uno coincidente con l'asse delle ascisse e l'altro di ordinata π oppure $-\pi$ secondoché risulti $\zeta > 0$ oppure $\zeta < 0$. Poiché la fase dipende da ζ , le considerazioni fatte per il termine binomio relative alla costruzione di una spezzata approssimante, potrebbero essere ripetute per ogni fissato valore di ζ . Risulta molto più comodo nella pratica costruire il diagramma per punti, ovvero, considerando gli andamenti reali, riportati in figura 4.11, disegnare un andamento asintotico oppure reale compreso tra gli andamenti asintotici estremi corrispondenti a $\zeta = 0$ e $\zeta = \pm 1$, quest'ultimo costruito da una spezzata ottenuta considerando i punti di rottura in $\omega = 0.1\omega_n$ e $\omega = 10\omega_n$. Infatti la curva per $\zeta = \pm 1$, dimezzando le ordinate, rappresenta l'andamento di un termine binomio. In alternativa si può considerare l'approssimazione con una spezzata tangente nel punto di flesso. Essa determina due punti di

rottura in $\frac{1}{5\zeta}\omega_n$ e $5\zeta\omega_n^{(4.5)}$. Si noti che nel caso delle fasi il diagramma viene ribaltato rispetto all'asse delle ascisse a seconda del segno di ζ (similmente a quanto avviene nel caso di binomio con $\tau < 0$).

Per un fattore trinomio al denominatore risulta:

$$\left| \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} \right|_{\text{dB}} = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}},$$

$$\angle \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} = -\arctan \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right),$$

e quindi si hanno diagrammi di modulo e fase che sono uguali a quelli visti per il termine trinomio al numeratore, ma ribaltati rispetto all'asse delle ascisse.

Anche in questo caso per $\zeta \in (-1, 0)$ si ribalta il solo diagramma delle fasi. Inoltre valgono le stesse osservazioni riguardanti l'andamento del modulo per i vari valori di ζ .

^(4.5) Il coefficiente angolare della retta tangente in $\left(\omega_n, \frac{\pi}{2} \right)$ vale:

$$m = \frac{d}{d \log_{10} \omega} \arctan \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \bigg|_{\omega=\omega_n} = \frac{d\omega}{d \log_{10} \omega} \frac{d}{d\omega} \arctan \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right) \bigg|_{\omega=\omega_n} = \frac{1}{\zeta},$$

per cui la retta tangente ha equazione:

$$y - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\zeta} (\ln \omega - \ln \omega_n)$$

e con le intersezioni per $\omega = 0$, $\omega = \pi$ si trovano $\omega/\omega_n = e^{-(\pi/2)\zeta} \simeq 1/5^\zeta$ e $\omega/\omega_n = e^{(\pi/2)\zeta} \simeq 5^\zeta$.

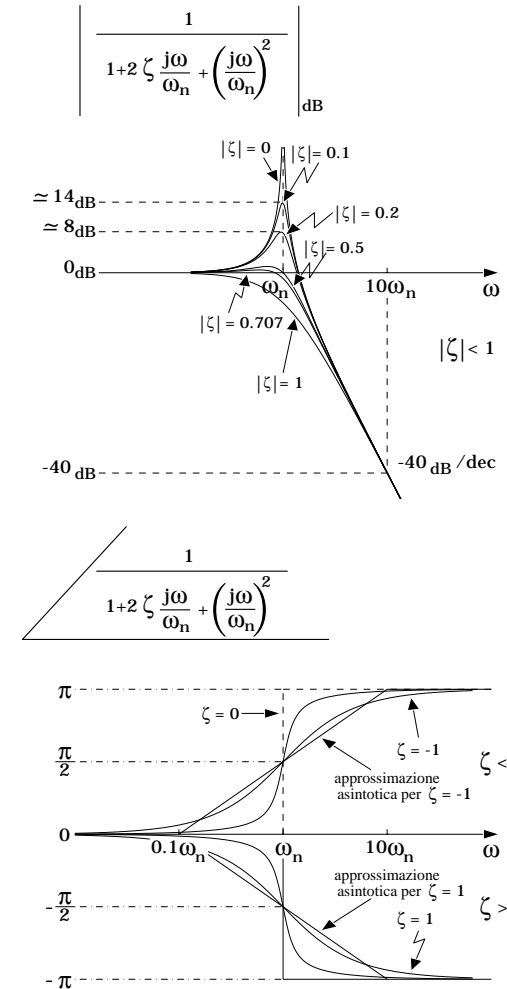


Figura 4.13 – Fattore trinomio $\frac{1}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2}$

Fattore esponenziale $e^{j\omega\tau}$. Essendo il modulo unitario e la fase pari a $\omega\tau$ si ha:

$$\left| e^{j\omega\tau} \right|_{\text{dB}} = 0, \quad \angle e^{j\omega\tau} = \omega\tau,$$

e dunque il diagramma dei moduli è nullo, mentre quello delle fasi è un esponenziale, crescente per $\tau > 0$ o decrescente per $\tau < 0$ (si ricordi che le

ω sono riportate su scala logaritmica: $\omega\tau = 10^{\log_{10} \omega\tau}$).

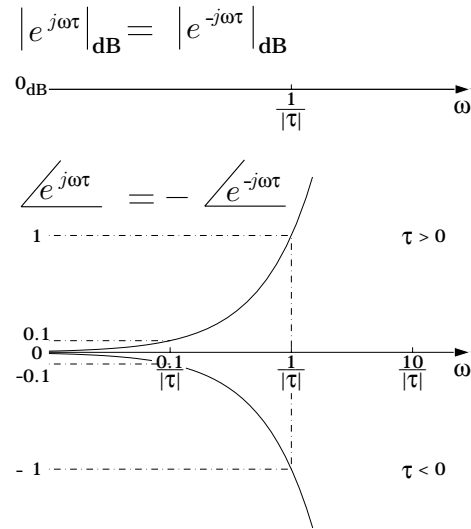


Figura 4.14 – Diagrammi di $e^{j\omega\tau}$ e di $\frac{1}{e^{j\omega\tau}}$

Se il termine esponenziale compare al denominatore il diagramma delle fasi viene ribaltato rispetto all'asse delle ascisse:

$$\left| \frac{1}{e^{j\omega\tau}} \right|_{dB} = 0, \quad \angle \frac{1}{e^{j\omega\tau}} = -\omega\tau,$$

Riassumendo, nel tracciare i diagrammi di Bode di un'assegnata funzione $W(s)|_{s=j\omega} = W(j\omega)$ si osservi prima di tutto che:

- 1) non è necessario sostituire $j\omega$ ad s in $W(s)$ per ottenere i diagrammi dei singoli termini (basta mettere la $W(s)$ nella forma (4.9));
- 2) il guadagno k dà un contributo al modulo di k_{dB} ; quindi il diagramma del modulo complessivo, ottenuto sommando i vari contributi, andrà traslato di k_{dB} (verso l'alto se $k > 1$ o verso il basso se $k < 1$); questa traslazione non è però necessaria in quanto basta assegnare all'asse delle ascisse corrispondente a 0_{dB} il valore k_{dB} ;
- 3) i poli, gli zeri e il guadagno (se negativo) danno un contributo complessivo alla fase che è un multiplo di $\pm \frac{\pi}{2}$. Come nel caso 2), cioè

corrisponde ad una traslazione del diagramma delle fasi (in alto o in basso) che può essere evitata assegnando all'asse delle ascisse il valore relativo alla traslazione.

Osservato ciò, la procedura per il tracciamento dei diagrammi di un'assegnata $W(s)|_{s=j\omega} = W(j\omega)$ si può così sintetizzare:

- 1) si mette $W(s)$ nella forma fattorizzata (4.9);
- 2) si tracciano i diagrammi asintotici (ovvero quelli reali se molto diversi da quelli asintotici) dei singoli fattori (cioè dei termini corrispondenti a quelli mostrati per $s = j\omega$), usando per quelli delle fasi le approssimazioni più semplici (con i punti di rottura nella decade precedente e in quella successiva a $1/|\tau|$ ovvero ω_n);
- 3) si sommano i diagrammi e si apportano le necessarie correzioni nell'intorno dei punti di rottura.

Si osservi che nel caso in cui non si riesca a fattorizzare il numeratore e/o denominatore, ovvero non si voglia procedere alla fattorizzazione della $W(s)$, oppure si vogliano ottenere dei diagrammi più precisi, si può ricorrere al tracciamento per punti. In tal caso si consiglia di porre $s = j\omega$ e mettere la $W(j\omega)$ nella forma:

$$W(j\omega) = \frac{\Re_1(\omega) + j\Im_1(\omega)}{\Re_2(\omega) + j\Im_2(\omega)} = \frac{\varrho_1(\omega)}{\varrho_2(\omega)} e^{j[\phi_1(\omega) - \phi_2(\omega)]},$$

ottenendo così

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{\varrho_1(\omega)}{\varrho_2(\omega)}, \quad \angle W(j\omega) = \phi_1(\omega) - \phi_2(\omega).$$

Si noti inoltre che si possono scegliere come valori di ω , sufficientemente equidistanti su scala logaritmica, i valori $\omega = 1 \cdot 10^p$ e $\omega = 4 \cdot 10^p$ ove p corrisponde alle decadi di interesse. Si comprende che con il calcolo di pochi punti è già possibile disegnare su carta semilogaritmica l'andamento di modulo e fase di una data $W(j\omega)$.

Sono presentate nel seguito alcune reti elettriche di particolare interesse.

Rete anticipatrice. La funzione di trasferimento della seguente rete elettrica

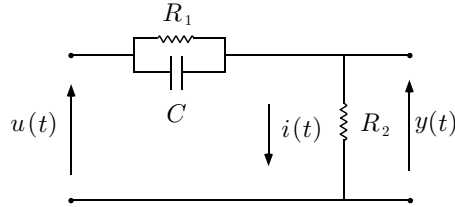


Figura 4.15

può essere ottenuta applicando le leggi di Kirchhoff. Nella variabile complessa s e considerando il parallelo di R_1 con C :

$$u(s) - y(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{1/sC}} i(s) = \frac{R_1}{1 + R_1Cs} i(s),$$

per cui $y(s) = R_2 i(s) = \frac{R_2}{R_1} (1 + R_1Cs) (u(s) - y(s))$, e dunque:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = W(s) = \frac{1 + R_1Cs}{R_1/R_2 + 1 + R_1Cs} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1Cs}{1 + \frac{R_1R_2C}{R_1 + R_2}s}.$$

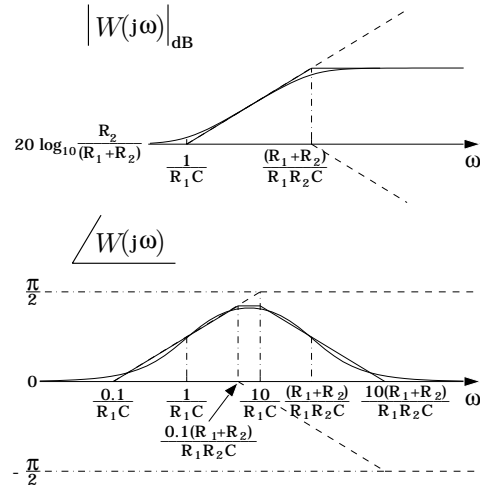


Figura 4.16

In figura si sono indicati a tratteggio i diagrammi asintotici del modulo e della fase dei tre fattori che compongono la $W(j\omega)$ e a tratto pieno il diagramma complessivo ottenuto per somma.

Questa rete elettrica, connessa in cascata con un amplificatore di guadagno pari a $\frac{R_1 + R_2}{R_2}$, realizza un sistema con funzione di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{1 + \tau_a s}{1 + \frac{\tau_a}{m_a} s}, \quad \tau_a = R_1C, \quad m_a = \frac{R_1 + R_2}{R_2}, \quad (4.12)$$

con $m_a > 1$.

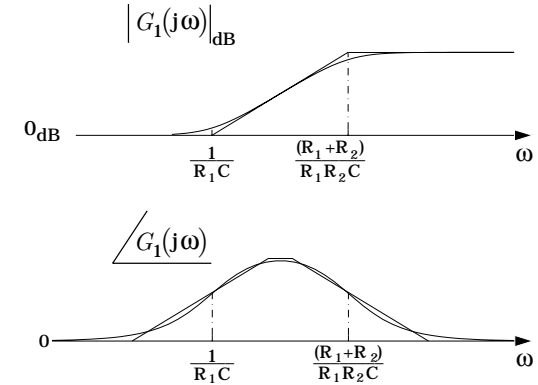


Figura 4.17 – Rete anticipatrice

Il diagramma della fase rimane lo stesso del precedente e quello del modulo risulta traslato verso l'alto di una quantità pari a $20 \log_{10} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ (figura 4.17). Una funzione di trasferimento del tipo (4.12) è molto usata nella *sintesi* di sistemi di controllo e, per l'azione che essa svolge, viene detta *rete anticipatrice* in quanto, connessa in cascata a monte di un sistema assegnato, la fase del sistema complessivo viene aumentata (anticipata) in un opportuno intervallo di pulsazioni.

Rete attenuatrice. Data la seguente rete elettrica

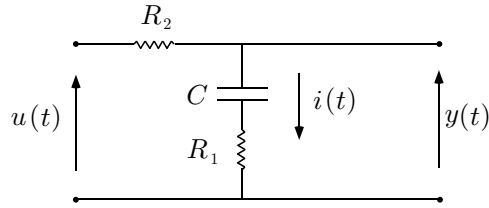


Figura 4.18

la funzione di trasferimento, ottenuta con le leggi di Kirchoff, vale:

$$y(s) = \frac{u(s) - y(s)}{R_2} \left(\frac{1}{Cs} + R_1 \right),$$

da cui:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G_2(s) = \frac{1 + R_1 Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs}.$$

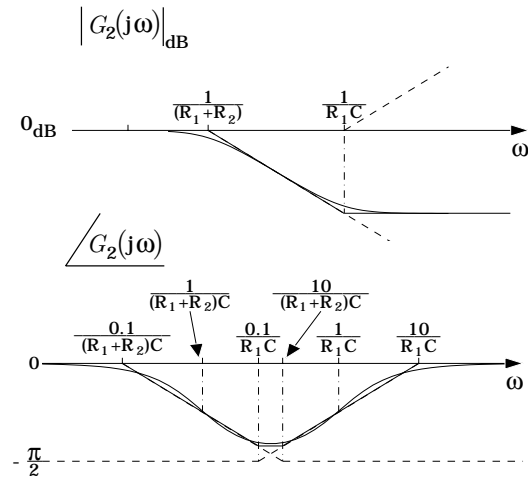


Figura 4.19 – Rete attenuatrice

In figura 4.19 sono riportati i diagrammi di Bode di $G_2(j\omega)$. Ponendo $\tau = (R_1 + R_2)C$ ed $m = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ si ottiene una funzione di trasferimento

del tipo:

$$G_2(s) = \frac{1 + \frac{\tau}{m}s}{1 + \tau s}, \quad (4.13)$$

con $m > 1$, detta *rete attenuatrice* in quanto, connessa in cascata a monte di un sistema assegnato, il modulo del sistema complessivo viene diminuito (attenuato) in un opportuno intervallo di pulsazioni. Anche tale rete è molto usata nella *sintesi* di sistemi di controllo.

Esercizio 4.20. Si forniscano i diagrammi di Bode della rete rappresentata in figura.

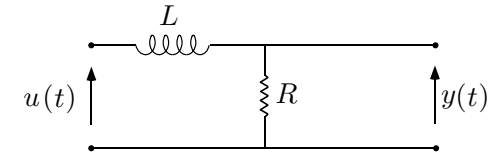


Figura 4.20

Soluzione. Poiché risulta $y(s) = Ri(s) = R \frac{u(s) - y(s)}{sL}$ la funzione di trasferimento è pari a $W(s) = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}s}$. È immediato tracciare i diagrammi di $W(j\omega)$.

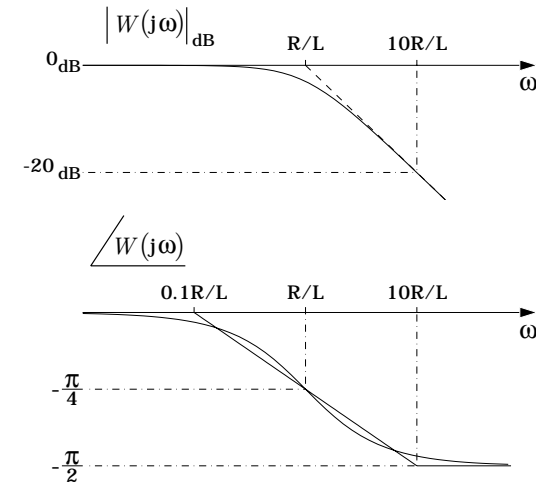


Figura 4.21

Esercizio 4.21. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = \frac{-1000s + 100}{s^2(-0.1s^2 + 0.9s + 1)}$.

Soluzione. Poiché $W(s) = 100 \frac{1 - 10s}{s^2(1 + s)(1 - 0.1s)}$, si disegnano i seguenti diagrammi per la $W(j\omega)$.

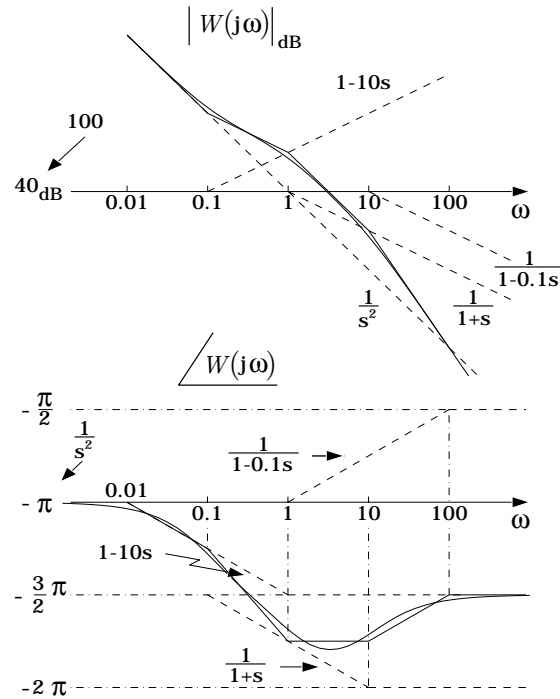


Figura 4.22

Si noti la presenza di uno zero e di un polo a fase non minima, per i quali i diagrammi delle fasi vanno ribaltati rispetto al caso di $\tau > 0$.

Esercizio 4.22. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = \frac{10 + 5s}{s(1 + 0.02s)}$.

Soluzione. Prima di tutto si riscrive la $W(s)$ come $W(s) = 10 \frac{1 + 0.5s}{s(1 + 0.02s)}$. Si disegnano poi i contributi relativi ai singoli termini, sia per il modulo che per la fase, e quindi si sommano.

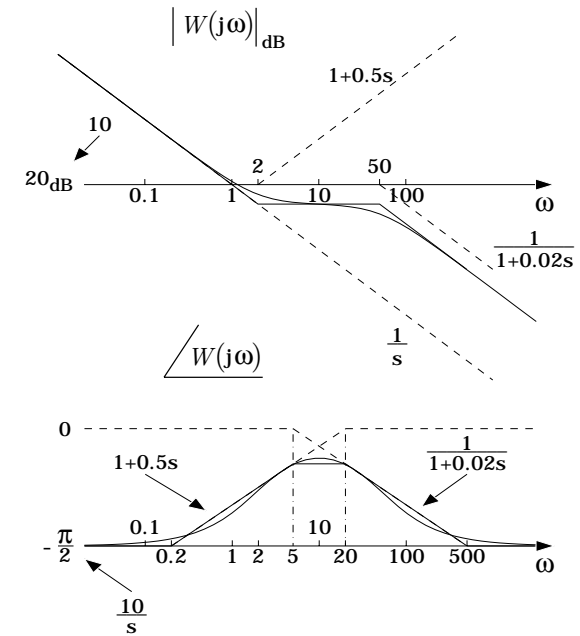


Figura 4.23

Esercizio 4.23. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = \frac{s + 2}{4s^3 + 49s^2 + 140s + 32}$.

Soluzione. Il denominatore della $W(s)$ viene fattorizzato in $(4s + 1)(s + 4)(s + 8)$, per cui si può riscrivere $W(s) = \frac{1}{16} \frac{1 + \frac{s}{2}}{(1 + 4s)(1 + \frac{s}{4})(1 + \frac{s}{8})}$. Si ricavano così i seguenti diagrammi di Bode della $W(j\omega)$.

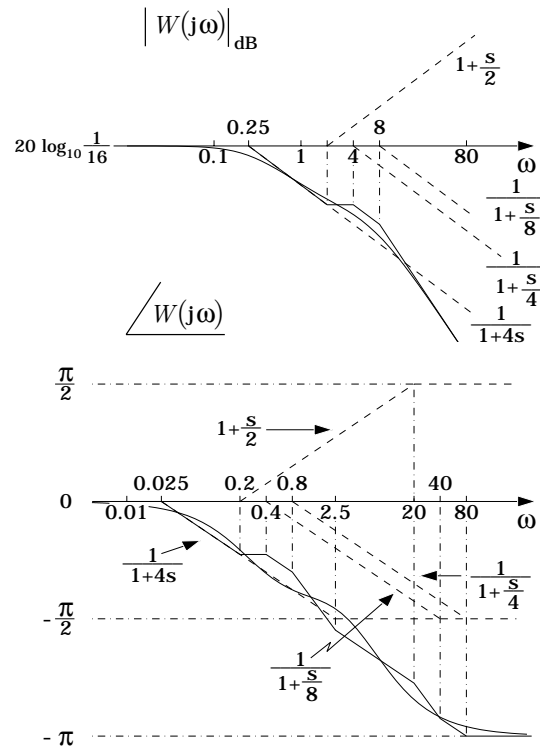


Figura 4.24

Si noti che nel caso in cui la fattorizzazione del denominatore non fosse desiderata, si potrebbe disegnare la $W(j\omega)$ per punti. Infatti considerato che:

$$W(j\omega) = \frac{2 + j\omega}{(32 - 49\omega^2) + j(140\omega - 4\omega^3)}$$

si ha:

$$|W(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{\frac{4 + \omega^2}{(32 - 49\omega^2)^2 + (140\omega - 4\omega^3)^2}},$$

$$\angle W(j\omega) = \arctan \frac{\omega}{2} - \arctan \frac{140\omega - 4\omega^3}{32 - 49\omega^2},$$

e dunque si può facilmente determinare la seguente tabella:

ω	$ W(j\omega) _{\text{dB}}$	$\angle W(j\omega)$
0.01	-24.1	-2.22
0.04	-24.2	-8.80
0.1	-24.7	-21.1
0.4	-29.5	-55.2
1	-35.7	-70.5
4	-45.2	-94.5
10	-54.7	-129
40	-76.3	-165
100	-92.1	-174

e i punti riportati su una carta semilogaritmica forniscono i diagrammi desiderati.

Esercizio 4.24. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = \frac{160(s+1)}{s^2(s^2+4s+16)}$.

Soluzione. Si ha

$$W(s) = \frac{10(1+s)}{s^2 \left(1 + 2\frac{1}{2}\frac{s}{4} + \left(\frac{s}{4}\right)^2 \right)}$$

in cui al denominatore si ha un termine trinomio con $\omega_n = 4$ e $\zeta = 0.5$ e dunque si tracciano i seguenti diagrammi per la $W(j\omega)$. Si noti che, essendo $\zeta = 0.5$, l'andamento asintotico approssima bene il comportamento reale del modulo. Per disegnare la fase del termine trinomio si possono tracciare:

- 1) l'approssimazione corrispondente alle spezzate per $\omega = \frac{1}{5^{0.5}} 4 \simeq 1.8$, $\omega = 5^{0.5} 4 \simeq 8.9$ (tangenza nel punto di flesso);
- 2) un andamento compreso tra l'approssimazione per $\zeta = 1$, corrispondente alle spezzate con punti di rottura in $\omega = 0.4$ e $\omega = 40$, e l'approssimazione del punto 1);
- 3) un'approssimazione "empirica" che corrisponde a prendere i punti di rottura in $\omega = 0.1^\zeta \omega_n \simeq 1.26$ e $\omega = 10^\zeta \omega_n \simeq 12.6$. (questa è più facile da ricordare di quella al punto 1)).

Nel tracciamento della fase di $W(j\omega)$ si sono disegnate, per confronto, le approssimazioni ai punti 1), 2), e 3) (curve tratteggiate). Si è anche riportato l'andamento reale (curva a puntini).

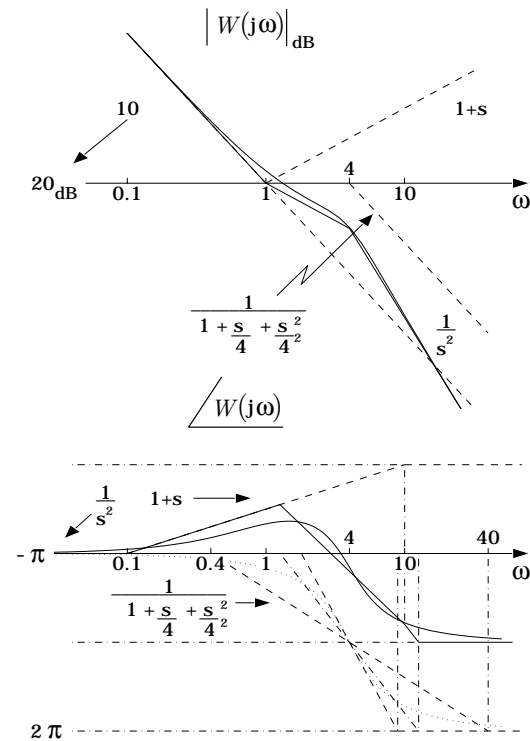


Figura 4.25

Nel tracciare la somma dei contributi si è proceduto inizialmente da sinistra a destra, fino a $\omega = 1$, poi da destra a sinistra (infatti si sa che si deve partire da $-\frac{3\pi}{2}$) fino a $\omega = 10$, ed infine si sono congiunti i due punti nell'intervallo in cui i contributi alla fase sono di entrambi i termini. In tal modo si è superata la difficoltà relativa alla pendenza della retta tra $\omega = 1$ e $\omega = 10$.

Infine, sia nel diagramma del modulo che in quello delle fasi, gli spigoli sono stati eliminati tracciando l'andamento reale.

Esercizio 4.25. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = \frac{s+10}{s(s+2)(s^2+60s+2500)}$.

Soluzione. La $W(s)$ può risciversi come

$$W(s) = \frac{1}{500} \frac{1 + \frac{s}{10}}{\left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + 2 \cdot 0.6 \frac{s}{50} + \left(\frac{s}{50}\right)^2\right)}.$$

I diagrammi di Bode della $W(j\omega)$ sono dati, a tratto continuo, nelle figure seguenti. Si noti la presenza al denominatore di un termine trinomio con pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{2500} = 50$ rad/s e smorzamento $\zeta = 0.6$. Per questo valore dello smorzamento l'andamento asintotico si avvicina molto a quello reale.

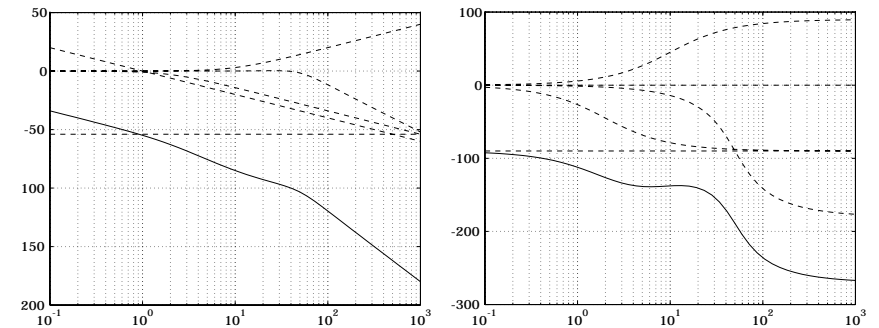


Figura 4.26

Esercizio 4.26. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = \frac{s-7}{4(s^2+4s+23)}$.

Soluzione. Riscriviamo la funzione $W(s)$ nella forma

$$W(s) = -0.076 \frac{1 - \frac{s}{7}}{\left(1 + 2 \cdot 0.42 \frac{s}{\sqrt{23}} + \left(\frac{s}{\sqrt{23}}\right)^2\right)}.$$

I diagrammi di Bode della $W(j\omega)$ sono dati, a tratto continuo, nelle figure seguenti. L'andamento reale del termine trinomio con pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{23} \simeq 4.8$ rad/s e smorzamento $\zeta \simeq 0.42$ si avvicina molto a quello asintotico.

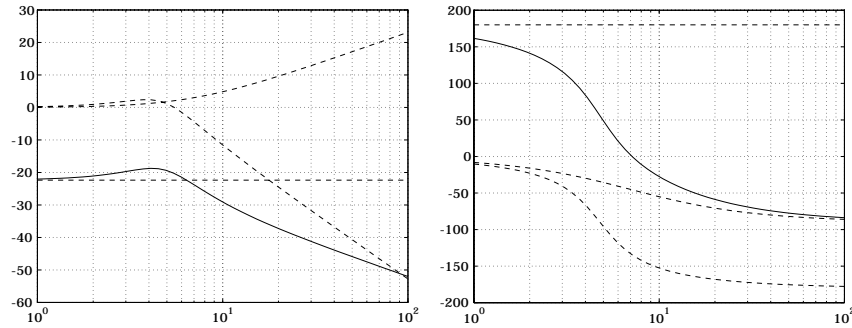


Figura 4.27

Esercizio 4.27. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = -7.09 \frac{(s - 376)(s + 8.86)}{(s + 100)(s^2 + 3.33s + 248)}$.

Soluzione. La $W(s)$ si riscrive come

$$W(s) = 0.95 \frac{\left(1 - \frac{s}{376}\right) \left(1 + \frac{s}{8.86}\right)}{\left(1 + \frac{s}{100}\right) \left(1 + 2 \cdot 0.1 \frac{s}{\sqrt{248}} + \left(\frac{s}{\sqrt{248}}\right)^2\right)}.$$

I diagrammi di Bode della $W(j\omega)$ sono dati, a tratto continuo, nelle figure seguenti. Si noti la presenza al denominatore di un termine trinomio con pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{248} \simeq 15.7$ rad/s e smorzamento $\zeta \simeq 0.1$. Per questo valore dello smorzamento l'andamento asintotico si discosta da quello reale, per cui il modulo e la fase di questo termine trinomio vanno riportati (ad esempio per punti) in maniera esatta.

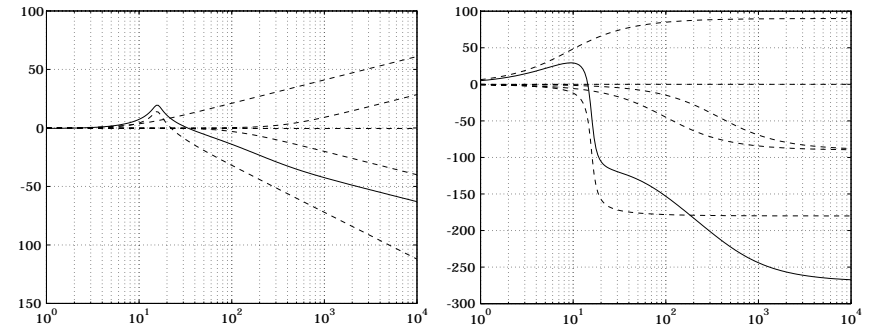


Figura 4.28

Esercizio 4.28. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = 10 \frac{s^2 + 4}{s(s + 3)(s^2 + 3s + 4)}$.

Soluzione. La $W(s)$ si riscrive come

$$W(s) = \frac{10}{3} \frac{\left(1 + \left(\frac{s}{2}\right)^2\right)}{s \left(1 + \frac{s}{3}\right) \left(1 + 2 \cdot \frac{3}{4} \frac{s}{2} + \left(\frac{s}{2}\right)^2\right)}.$$

I diagrammi di Bode della $W(j\omega)$ sono dati, a tratto continuo, nella figura seguente. Si noti la presenza al numeratore di un termine trinomio con pulsazione naturale $\omega_n = 2$ rad/s e smorzamento nullo, ed uno al denominatore con $\omega_n = 2$ e $\zeta = \frac{3}{4}$.

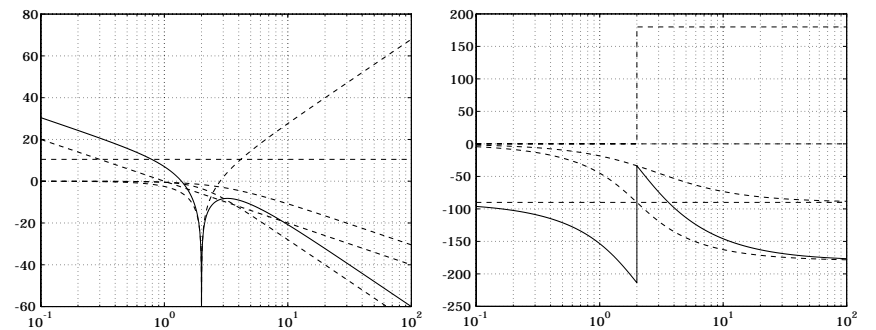


Figura 4.29

Pertanto il termine trinomio al numeratore va disegnato in maniera esatta (peraltro molto semplice), mentre per quello al denominatore l'approssimazione asintotica è soddisfacente.

Esercizio 4.29. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = \frac{3s^2 + 2s + 7}{s(s^2 + 10)}$.

Soluzione. La $W(s)$ si riscrive come

$$W(s) = \frac{7}{10} \frac{1 + 2 \frac{1/3}{\sqrt{7/3}} \frac{s}{\sqrt{7/3}} + \left(\frac{s}{\sqrt{7/3}}\right)^2}{s \left(1 + \left(\frac{s}{\sqrt{10}}\right)^2\right)}.$$

Sia al numeratore che al denominatore sono presenti dei termini trinomi. Quello al numeratore ha pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{7/3} \simeq 1.53$ rad/s e smorzamento $\zeta = \frac{1/3}{\sqrt{7/3}} \simeq 0.218$, e quello al denominatore ha $\omega_n = \sqrt{10} \simeq 3.16$ e $\zeta = 0$. Per entrambi occorre disegnare, in maniera esatta, gli andamenti del modulo e della fase.

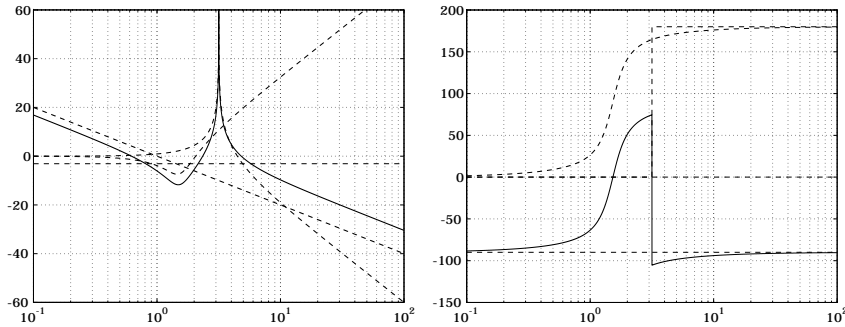


Figura 4.30

Esercizio 4.30. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = 10 \frac{1 - 2s}{s(1 + 0.1s)^2} e^{-2s}$.

Soluzione. Si noti la presenza del termine esponenziale. Per disegnare i diagrammi di Bode si disegnano innanzitutto quelli relativi a

$$\bar{W}(s) = 10 \frac{1 - 2s}{s(1 + 0.1s)^2}.$$

Poiché l'esponenziale altera solo la fase, solo il diagramma della fase va modificato per tenere conto di questo termine, che può essere graficato per punti (ad esempio per $\omega = 0.1$, $\omega = 1$, $\omega = 10$).

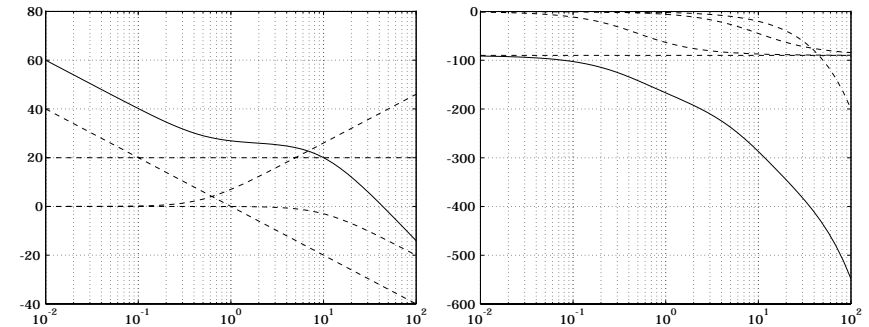


Figura 4.31

Esercizio 4.31. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = 2 \frac{s+2}{s^2-1}$.

Soluzione. Si noti la presenza al denominatore di due termini, $s+1$, $s-1$, le cui fasi si elidono (essendo un polo a fase minima ed uno a fase non minima), per cui il tracciamento dei diagrammi di Bode della $W(j\omega)$ è particolarmente semplice.

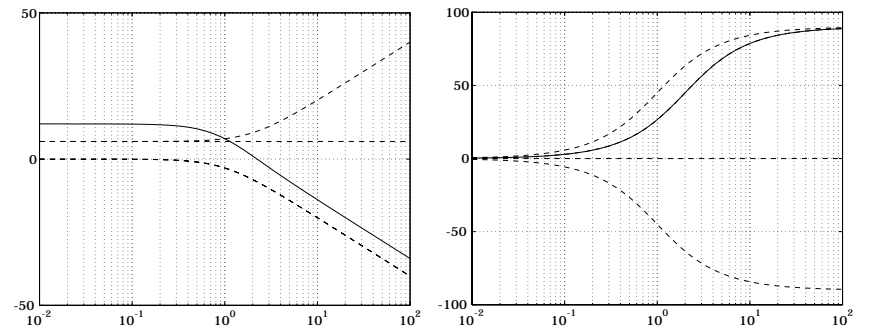


Figura 4.32

Esercizio 4.32. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = 100 \frac{1 - 10s}{s^2(1 + s)(1 - 0.1s)}$.

Soluzione. I diagrammi di Bode della $W(j\omega)$ sono riportati a tratto continuo nelle figure seguenti.

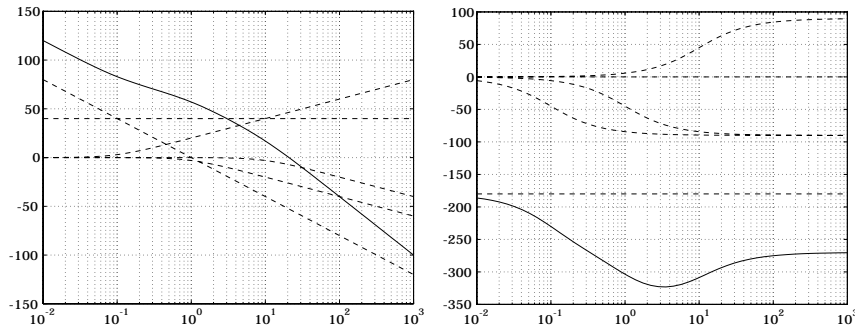


Figura 4.33

Esercizio 4.33. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = 100 \frac{1 + s}{s^2 \left(1 + 2 \cdot 0.7 \frac{s}{4.5} + \left(\frac{s}{4.5}\right)^2\right)}$.

Soluzione. I diagrammi di Bode della $W(j\omega)$ sono riportati di seguito.

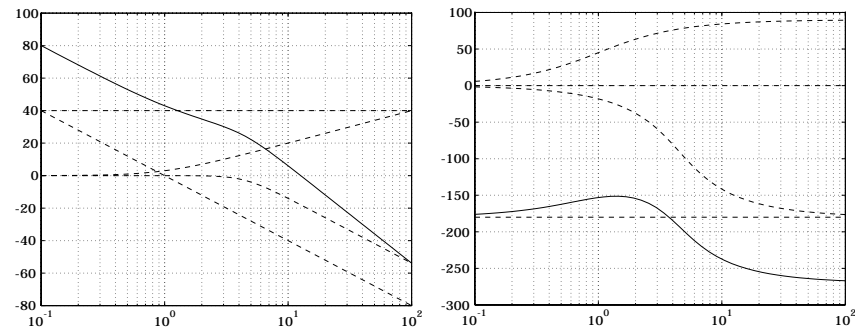


Figura 4.34

Esercizio 4.34. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = \frac{1 - 4s}{s \left(1 - 2 \cdot 0.1 \frac{s}{3} + \left(\frac{s}{3}\right)^2\right)} e^{-5s}$.

Soluzione. Si noti la presenza del termine esponenziale e del termine trinomio a denominatore con smorzamento $\zeta = -0.1$ negativo. I diagrammi di Bode della $W(j\omega)$ sono riportati a tratto continuo nelle figure seguenti.

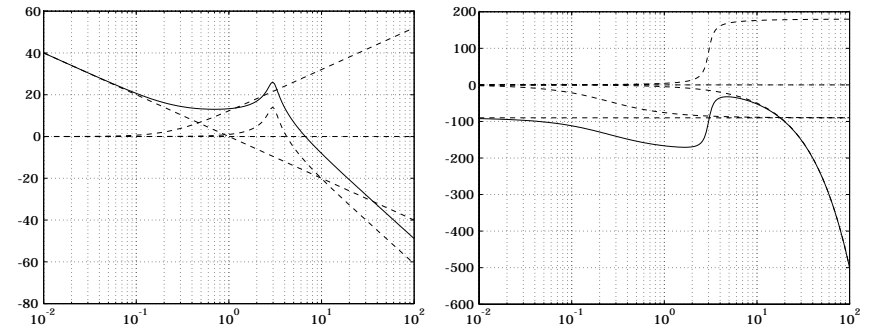


Figura 4.35

Esercizio 4.35. Tracciare i diagrammi di Bode della funzione di risposta armonica corrispondente a $W(s) = 10 \frac{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}{s(1 + s^2) \left[1 - 2 \cdot 0.2 \frac{s}{4} + \left(\frac{s}{4}\right)^2\right]} e^{-0.3s}$.

Soluzione. Si noti la presenza del termine esponenziale, di un termine trinomio a denominatore con smorzamento $\zeta = -0.2$ negativo, e di due termini trinomi, a numeratore e denominatore, con smorzamento nullo.

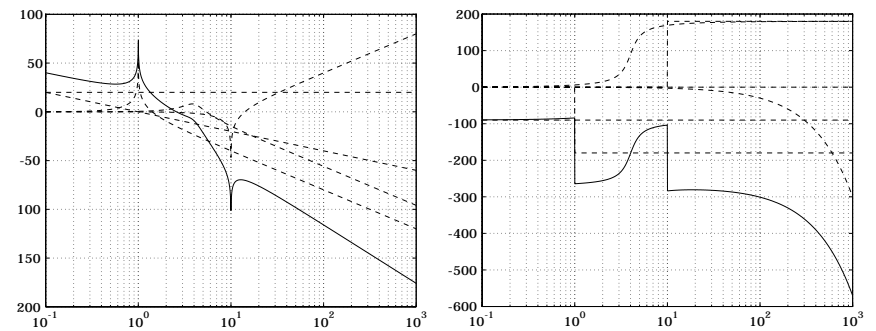


Figura 4.36

4.6. I diagrammi di Nyquist

Lo studio della stabilità dei sistemi interconnessi a controreazione può essere effettuato utilizzando il *criterio di Nyquist*. L'impiego di tale criterio è subordinato alla costruzione di una particolare rappresentazione della funzione di trasferimento d'anello $F(s)$ in catena diretta del sistema assegnato. Più precisamente si deve costruire la rappresentazione sul piano complesso della funzione di risposta armonica $F(j\omega)$.

Una assegnata funzione di trasferimento $F(s)$ definisce una trasformazione del piano $(\Re(s), \Im(s))$ in quello di $(\Re(F(j\omega)), \Im(F(j\omega)))$. La monodromia e l'analiticità della $F(s)$ fanno sì che fissato nel piano complesso $(\Re(s), \Im(s))$ un contorno chiuso che non passi per alcun polo della funzione di trasferimento $F(s)$, ad essa corrisponde nel secondo piano complesso un contorno chiuso. Si definisce diagramma di Nyquist l'immagine $(\Re(F(j\omega)), \Im(F(j\omega)))$ del cosiddetto cammino di Nyquist nel piano $(\Re(s), \Im(s))$, che è quel contorno *chiuso* nel piano $(\Re(s), \Im(s))$ che comprende nel suo interno l'intero semipiano destro, che viene percorso in senso orario. Esso comprende ovviamente l'asse immaginario. Se $F(s)$ ha poli immaginari puri, per evitare il passaggio del cammino di Nyquist su di essi, si considera un percorso perturbato rispetto al precedente, che formi piccoli semicerchi in corrispondenza dei poli. Come noto ciascuno di questi semicerchi corrisponde ad un passaggio del diagramma di Nyquist per il punto improprio. Inoltre così come il polo immaginario puro è lasciato a sinistra percorrendo il cammino di Nyquist, così il punto improprio viene lasciato alla sinistra percorrendo il diagramma di Nyquist. Ciò equivale ad una chiusura all'infinito nel diagramma di Nyquist in senso orario, con una rotazione di π .

In effetti se il denominatore di $F(s)$, che è poi il polinomio caratteristico a ciclo aperto $d_{AP}(s)$, ha un polo in $s_1 = j\omega$, esso ha la forma

$$d_{AP}(s) = (s - j\omega)(s + j\omega)d_{AP_0}(s) = (s^2 + \omega^2)d_{AP_0}(s).$$

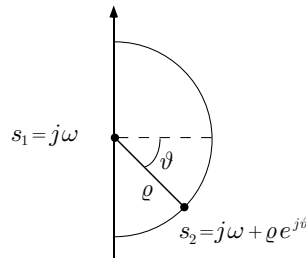


Figura 4.37

Il generico punto sul semicerchio è $s_2 = j\omega + \rho e^{j\vartheta}$, per cui in corrispondenza a tale valore si ha

$$F(s_2) = \frac{N_F(s_2)}{(s_2^2 + \omega^2)d_{AP_0}(s_2)} = \frac{1}{\rho} e^{-j\vartheta} \frac{N_F(s_2)}{(\rho e^{j\vartheta} + 2\omega j)d_{AP_0}(s_2)}.$$

Dunque per $\rho \rightarrow 0$ il grafico di $F(j\omega)$ passerà per l'infinito. Inoltre, poiché ϑ varia da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, si ha un contributo alla fase di $F(j\omega)$, dato da $e^{-j\vartheta}$ con $-\vartheta$ che varia da $\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$ (dunque in senso orario), che determina una rotazione di π in senso orario.

In modo analogo si mostra che se μ è la molteplicità dei poli immaginari puri, la rotazione è $\mu\pi$.

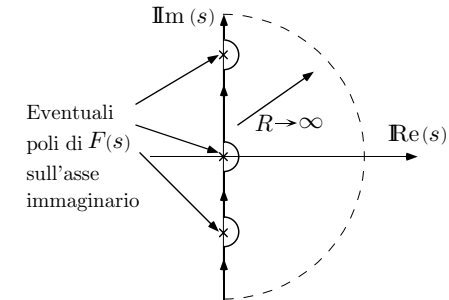


Figura 4.38

Si osservi che poiché $F(s)$ è pari al rapporto di due polinomi a coefficienti reali nella variabile s , risulta:

$$\Re(F(j\omega)) = \Re(F(-j\omega)), \quad \Im(F(j\omega)) = -\Im(F(-j\omega)),$$

e quindi il diagramma di Nyquist presenta simmetrie coniugate, cioè il grafico per $\omega \in [0, \infty)$ è l'immagine speculare rispetto all'asse reale del grafico per $\omega \in (-\infty, 0)$. Dunque il diagramma di Nyquist è ottenibile da quello polare di $F(j\omega)$ (ossia quello per $\omega \in [0, \infty)$) ribaltando quest'ultimo rispetto all'asse reale e operando le eventuali chiusure all'infinito. Inoltre se tutti i poli della $F(s)$ hanno parte reale minore di zero il diagramma di Nyquist può essere ottenuto tracciando il diagramma polare della funzione $F(j\omega)$ dedotto per via sperimentale.

Molto spesso è utile saper tracciare il diagramma di Nyquist qualitativamente, ma in modo rapido. L'andamento qualitativo del diagramma

di Nyquist può essere dedotto sia da quello qualitativo dei diagrammi di Bode, sia da semplici considerazioni a partire dal diagramma poli-zero della $F(s)$.

Esercizio 4.36. Tracciare il diagramma di Nyquist di $F(s) = 40 \frac{s+0.5}{(s+1)(s+4)}$.

Soluzione. Il modulo di $F(j\omega)$ va da 40 (per $\omega = 0$) a 0 (per $\omega = \infty$) in modo continuo. Inoltre la fase varia da 0 radianti (per $\omega = 0$) a $-\frac{\pi}{2}$ (per $\omega = \infty$). Poiché l'aumento di fase dovuto allo zero interviene prima della diminuzione di fase dovuta ai poli, la fase inizialmente crescerà (e quindi sarà superiore a 0 rad) per poi decrescere. Per convincersi di ciò ci si può costruire i diagrammi di Bode.

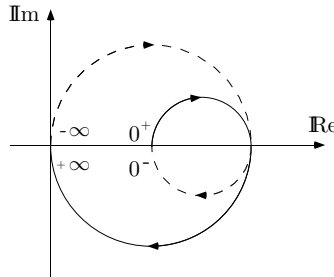


Figura 4.39

Il risultante diagramma di Nyquist è riportato in figura 4.39, ove sono stati riportati i valori della pulsazione ω . Per $\omega = 0$ si ha un modulo pari a 40. Con il tratteggio si è indicata la parte relativa a $\omega \in (-\infty, 0)$, simmetrica rispetto a quella per $\omega \in [0, \infty)$.

Esercizio 4.37. Tracciare il diagramma di Nyquist di $F(s) = 40 \frac{s-0.5}{(s+1)(s+4)}$.

Soluzione. Il modulo varia da 40 a zero, mentre la fase varia da $-\pi$ a $-\frac{3}{2}\pi$, a causa della presenza dello zero a fase non minima e dei due poli.

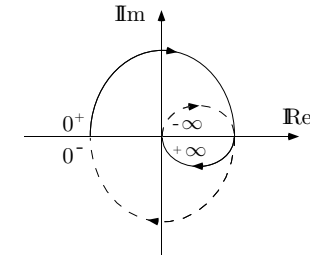


Figura 4.40

Il risultante diagramma di Nyquist è riportato in figura 4.40.

Esercizio 4.38. Si consideri il circuito elettrico in figura

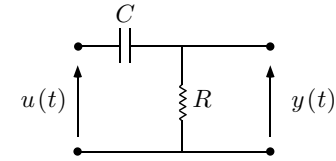


Figura 4.41

e si tracci il corrispondente diagramma di Nyquist.

Soluzione. Poiché $F(s) = \frac{\tau s}{1 + \tau s}$, $\tau = RC$, si ha che il modulo va da un valore nullo per $\omega = 0$, ad 1 (cioè 0dB) per $\omega = \infty$; la fase varia da $\frac{\pi}{2}$ a 0 radianti. Inoltre è facile verificare che il diagramma rimane confinato al primo quadrante. In definitiva si ha il diagramma in figura, dato da una circonferenza, come è facile verificare notando che $W(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{j(\pi/2 - \arctan \omega\tau)}$ e dunque che in coordinate cartesiane:

$$x = \frac{\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} = \omega\tau y, \quad y = \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2},$$

per cui $x^2 + y^2 - x = 0$.

Figura 4.45

Esercizio 4.40. Tracciare i diagrammi di Nyquist della seguente funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{k}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}, \quad \tau_1, \tau_2 > 0.$$

Soluzione. Poiché la funzione di trasferimento presenta un polo sull'asse immaginario, il percorso di Nyquist risulta essere il seguente

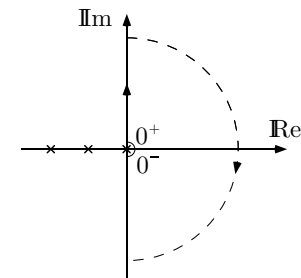


Figura 4.46

Riguardo la funzione di trasferimento g) si noti che può anche essere scritta come:

$$\frac{4}{9} \frac{(1+10s) \left(1 + 2 \frac{1}{4} \frac{s}{2} + \frac{s^2}{4}\right)}{s(1+30s) \left(1 - 2 \frac{1}{3} \frac{s}{3} + \frac{s^2}{9}\right)}.$$

4.7. Richiami sulla trasformata z

Sia data una funzione $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Si definisce *trasformata z* di $f(k)$ la funzione $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da:

$$z \mapsto F(z)$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{k!} = \mathcal{Z}[f(k)]. \quad (4.14)$$

Le più importanti trasformate sono richiamate in tabella 1.2.

Tabella 4.2 – Trasformate e antitrasformate z

Funzione	Trasformata z
$f(k)$	$F(z)$
$\delta_{-1}(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{\alpha k} = \lambda^k$	$\frac{z}{z-e^{\alpha}} = \frac{z}{z-\lambda}$
$\sin \omega k$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\cos \omega k$	$\frac{-z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\delta(k)$	1
$\frac{k^{(n)}}{n!}$	$\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$
$\frac{k^{(n)}}{n!} e^{\alpha(k-n)} = \frac{k^{(n)}}{n!} \lambda^{(k-n)}$	$\frac{z}{(z-\lambda)^{n+1}}$
$k^n f(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^n F(z)$

Figura 4.54

Si noti che nella trasformata delle funzioni $k^n f(k)$, che provengono dal campionamento delle funzioni $t^n f(t)$, il simbolo $\left(-z \frac{d}{dz}\right)^n$ indica la ripetizione per n volte della derivazione rispetto a z , seguita dalla moltiplicazione per $-z$.

Come nel caso a tempo continuo, un certo problema di partenza (nel dominio del tempo) può essere tradotto in un problema più semplice (nel dominio della variabile complessa z) e, una volta risolto, mediante antitrasformazione si riottiene la soluzione nel dominio del tempo. Si nota dalla tabella 4.2 che le trasformate z hanno al numeratore il termine z . Quando dunque si sviluppa in frazioni parziali la $F(z)$ conviene far apparire in ciascuna frazione il termine z al numeratore, in modo da ottenere al secondo membro dei termini che sono le trasformate di funzioni note. Per far ciò in maniera semplice e rapida conviene sviluppare in frazioni parziali la funzione $\frac{F(z)}{z}$ e poi moltiplicare per z ambo i membri.

4.8. Calcolo delle evoluzioni nel dominio complesso: uso della trasformata z

Al pari della trasformata di Laplace per i sistemi a tempo continuo, la trasformata z può essere usata vantaggiosamente per l'analisi dei sistemi lineari stazionari a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k). \end{aligned} \quad (4.15)$$

La trasformata z della rappresentazione (4.15) permette infatti di ricavare le espressioni:

$$\begin{aligned} x(z) &= (zI - A)^{-1}zx_0 + (zI - A)^{-1}Bu(z) \\ y(z) &= C(zI - A)^{-1}zx_0 + [C(zI - A)^{-1}B + D]u(z), \end{aligned}$$

le quali, analogamente al caso a tempo continuo, forniscono una procedura alternativa per il calcolo di $x(t)$ ed $y(t)$, mediante antitrasformazione, una volta noti x_0 , $u(t)$ e quindi $u(z)$.

Pertanto:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= (zI - A)^{-1}z, & \Psi(z) &= C(zI - A)^{-1}z, \\ H(z) &= (zI - A)^{-1}B, & W(z) &= C(zI - A)^{-1}B + D, \end{aligned}$$

e ne segue che $\Phi(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ e $W(\cdot)$ sono matrici razionali proprie, mentre $H(\cdot)$ è strettamente propria.

Nel caso in cui gli autovalori di A siano distinti, $\Phi(z)$ può essere espansa analogamente al caso a tempo continuo in *frazioni parziali* secondo l'espressione:

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^n \frac{z}{z - \lambda_i} R_i,$$

in cui le matrici residue R_i sono date dall'espressione:

$$R_i = \lim_{z \rightarrow \lambda_i} \frac{z - \lambda_i}{z} \Phi(z), \quad (4.16)$$

e risultano legate agli autovettori di A nel modo seguente:

$$R_i = u_i v_i^T.$$

Nel caso in cui gli autovalori di A abbiano molteplicità geometrica m_i maggiore di uno, si ha l'espressione più generale:

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{z}{(z - \lambda_i)^k} R_{ik},$$

in cui r è il numero degli autovalori distinti di A e:

$$R_{ik} = \lim_{z \rightarrow \lambda_i} \frac{1}{(m_i - k)!} \frac{d^{m_i - k}}{dz^{m_i - k}} \left[\frac{(z - \lambda_i)^{m_i}}{z} \Phi(z) \right]. \quad (4.17)$$

Esercizio 4.42. Determinare la trasformata z del seguente segnale:

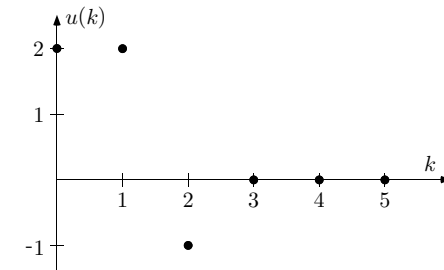


Figura 4.55

Soluzione. Dalla definizione (4.14) si ricava:

$$u(z) = 2 + \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + 0 = \frac{2z^2 + 2z - 1}{z^2}.$$

Esercizio 4.43. Determinare la trasformata z del seguente segnale:

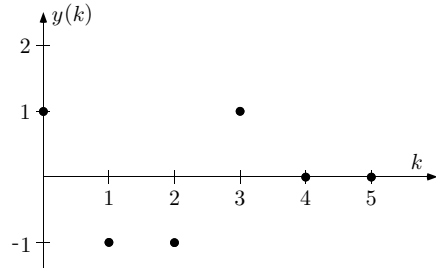


Figura 4.56

Soluzione. Dalla definizione (4.14) si ricava:

$$y(z) = 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + 0 = \frac{z^3 - z^2 - z + 1}{z^3}.$$

Esercizio 4.44. Dato un sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$W(z) = \frac{z+1}{z(1-z)}, \text{ calcolare la risposta all'impulso unitario.}$$

Soluzione. Essendo $u(z) = 1$, si calcola:

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{W(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1}.$$

Dalle (4.16), (4.17) si calcola:

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{z+1}{z^2(1-z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1-z) + (z+1)}{(1-z)^2} = 2,$$

$$B = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{z+1}{z^2(1-z)} = 1,$$

$$C = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z+1}{z^2(1-z)} = -2.$$

Pertanto:

$$y(z) = 2 + \frac{1}{z} - 2 \frac{z}{z-1},$$

e dunque

$$y(k) = 2 \delta(k) + \delta(k-1) - 2 \delta_{-1}(k).$$

Esercizio 4.45. Si determini la risposta forzata all'impulso, al gradino e al gradino traslato $\delta_{-1}(k-1)$ di un sistema discreto avente funzione di

$$\text{trasferimento } W(z) = \frac{10(z+1)}{z+0.1}.$$

Soluzione. Nel primo caso $u(z) = 1$. Per ottenere la risposta forzata conviene innanzitutto espandere in frazioni parziali $\frac{y(z)}{z}$, ottenendo:

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{W(z)}{z} = \frac{100}{z} - \frac{90}{z+0.1} \Rightarrow y(z) = W(z) = 100 - 90 \frac{z}{z+0.1}.$$

Ne segue che

$$y(k) = 100 \delta(k) - 90(-0.1)^k = \begin{cases} 10 & \text{se } k = 0 \\ -90(-0.1)^k & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

Tale risultato può essere verificato eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore di $y(z)$ e ricordando la definizione (4.14):

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y(k)}{z^k} = 10 + \frac{9}{z} + \frac{-0.9}{z^2} + \dots$$

Nel secondo caso $u(z) = \frac{z}{z-1}$, per cui:

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{W(z)}{z} \frac{z}{z-1} = \frac{40/3}{z-1} + \frac{-10/3}{z+0.5} \Rightarrow y(z) = \frac{40}{3} \frac{z}{z-1} - \frac{10}{3} \frac{z}{z+0.5},$$

e pertanto:

$$y(k) = \frac{40}{3} \delta_{-1}(k) - \frac{10}{3} (-0.5)^k.$$

Infine nel terzo caso $u(z) = \frac{1}{z} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}$:

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{W(z)}{z} \frac{1}{z-1} = \frac{-20}{z} + \frac{20/3}{z+0.5} + \frac{40/3}{z-1},$$

e dunque:

$$y(z) = -20 + \frac{20}{3} \frac{z}{z+0.5} + \frac{40}{3} \frac{z}{z-1},$$

fornendo così:

$$\begin{aligned} y(k) &= -20 \delta(k) + \frac{20}{3} (-0.5)^k + \frac{40}{3} \delta_{-1}(k) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ \frac{20}{3} (-0.5)^k + \frac{40}{3} \delta_{-1}(k) & \text{se } k > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 4.46. Sia $y(k)$ l'uscita corrispondente a $u(k)$, graficati nella figura seguente.

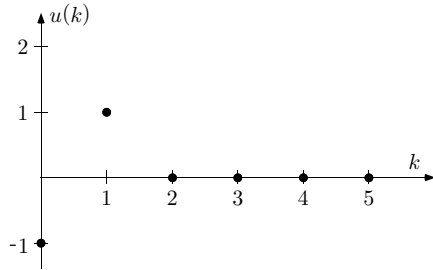


Figura 4.57

Determinare la funzione di trasferimento $W(z)$.

Soluzione. Dalla definizione (4.14) si calcola:

$$y(z) := y(0) + \frac{y(1)}{z} + \frac{y(2)}{z^2} + \dots = 0 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 0 = \frac{z+1}{z^2},$$

$$u(z) := u(0) + \frac{u(1)}{z} + \frac{u(2)}{z^2} + \dots = -1 + \frac{1}{z} + 0 = \frac{-z+1}{z}.$$

Quindi:

$$W(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{z+1}{z(1-z)}.$$

Esercizio 4.47. Determinare per il sistema avente la seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{pmatrix} 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= (1 \quad 2 \quad 0) x(k) + u(k) \end{aligned}$$

la risposta a gradino a partire dallo stato iniziale $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Poiché $\Phi(z) = (zI - A)^{-1}z$, si ottiene:

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{z-0.1} & \frac{z}{(z-0.1)(z-0.2)} & 0 \\ 0 & \frac{z}{z-0.2} & 0 \\ \frac{z}{(z-0.1)(z-0.2)} & \frac{z}{(z-0.1)(z-0.2)(z-0.5)} & \frac{z}{z-0.5} \end{pmatrix},$$

e quindi:

$$\begin{aligned} y(z) &= \begin{pmatrix} \frac{z}{z-0.1} & \frac{2z^2+0.8z}{(z-0.1)(z-0.2)} & 0 \end{pmatrix} x_0 + \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{2z+0.8}{(z-0.1)(z-0.2)} + 1 \end{pmatrix} u(z). \end{aligned}$$

Ne segue che

$$y(z) = \frac{2z}{z-0.1} + \frac{z^2+1.7z+0.82}{(z-0.1)(z-0.2)} \frac{z}{z-1},$$

ed in virtù della linearità della trasformata z i due termini a secondo membro possono essere antitrasformati separatamente: per il primo ciò è immediato mentre il secondo risulta pari a

$$\frac{100z}{9(z-0.1)} - \frac{15z}{z-0.2} + \frac{44}{9} \frac{z}{z-1}.$$

Si ottiene in questo modo:

$$y(k) = 2 \cdot 0.1^k + \frac{100}{9} 0.1^k - 15 \cdot 0.2^k + \frac{44}{9}.$$

Soluzione. Poiché risulta:

$$y(z) = \begin{pmatrix} W_1(z) & W_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{pmatrix}$$

ne segue:

$$W_1(z) = \frac{y(z)}{u_1(z)} \Big|_{u_2(z)=0}, \quad W_2(z) = \frac{y(z)}{u_2(z)} \Big|_{u_1(z)=0}.$$

Quindi con riferimento alle funzioni assegnate:

$$W_1(z) = \frac{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}}{\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z},$$

$$W_2(z) = \frac{1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}}{-1 + \frac{1}{z}} = \frac{z^2 + z + 1}{z(1 - z)},$$

in cui per il calcolo delle trasformate si è fatto riferimento alla definizione (4.14).

Esercizio 4.50. Assegnata la funzione di trasferimento:

$$W(z) = \frac{2z + 1}{(z + 0.1)(z + 0.5)},$$

determinare il valore della risposta per $k \rightarrow \infty$ quando viene applicato l'ingresso a gradino unitario.

Soluzione. Poiché $u(z) = \frac{z}{z-1}$, si ha:

$$y(z) = \frac{z(2z + 1)}{(z + 0.1)(z + 0.5)(z - 1)},$$

e quindi in base al teorema del valore finale:

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z(2z + 1)}{(z + 0.1)(z + 0.5)(z - 1)} = \frac{60}{33}.$$

Figura 4.59

Si noti che il teorema del valore finale ammette una semplice dimostrazione di tipo intuitivo. Si noti innanzitutto che data $y(z)$, poiché:

$$\begin{aligned} y(z) &= y(0) + \frac{y(1)}{z} + \frac{y(2)}{z^2} + \frac{y(3)}{z^3} + \dots \\ z[y(z) - y(0)] &= y(1) + \frac{y(2)}{z} + \frac{y(3)}{z^2} + \dots \\ z^2 \left[y(z) - \frac{y(1)}{z} - y(0) \right] &= y(2) + \frac{y(3)}{z} + \dots \\ z^3 \left[y(z) - \frac{y(2)}{z^2} - \frac{y(1)}{z} - y(0) \right] &= y(3) + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

i valori di $y(k)$, $k \geq 0$ sono dati dalle relazioni:

$$\begin{aligned} y(0) &= \lim_{z \rightarrow \infty} y(z), \\ y(1) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z[y(z) - y(0)], \\ y(2) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left[y(z) - \frac{y(1)}{z} - y(0) \right], \\ y(3) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left[y(z) - \frac{y(2)}{z^2} - \frac{y(1)}{z} - y(0) \right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ora, poiché:

$$\mathcal{Z}[y(k+1) - y(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y(k+1) - y(k)}{z^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{y(k+1) - y(k)}{z^k},$$

in base all'osservazione precedente il primo membro vale:

$$\mathcal{Z}[y(k+1) - y(k)] = z[y(z) - y(0)] = z[y(z) - y(0)] - y(z),$$

per cui

$$(z-1)y(z) - z y(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{y(k+1) - y(k)}{z^k}.$$

Facendo tendere z ad 1:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)y(z) - z y(0)] &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)y(z) - y(0) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [y(1) - y(0) + y(2) - y(1) + \dots + y(n) - y(n-1) + \\ &\quad + y(n+1) - y(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [y(n+1) - y(0)], \end{aligned}$$

si ha dunque quanto cercato:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)y(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k).$$

Esercizio 4.51. Determinare la risposta al gradino per il sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(k). \end{aligned}$$

Soluzione. Poiché A è diagonale a blocchi si ricava rapidamente:

$$(zI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} z & -2 & -1 \\ 0 & z & -3 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & \frac{2}{z^2} & \frac{6}{z^3} + \frac{1}{z^2} \\ 0 & \frac{1}{z} & \frac{3}{z^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

e dunque

$$W(z) = C(zI - A)^{-1}B = \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2} = \frac{2}{z^2}(z+1).$$

Essendo $u(z) = \frac{z}{z-1}$, si ricava:

$$y_f(z) = W(z)u(z) = \frac{2}{z} \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow \frac{y_f(z)}{z} = \frac{2}{z^2} \frac{z+1}{z-1} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1},$$

ove i residui B , C si calcolano dalle (4.16), (4.17) ($B = -2$, $C = 4$) ed A si può calcolare (oltre che dalla (4.17)) più semplicemente ponendo $z = -1$, sicché $A = B - \frac{C}{2} = -4$. Dunque:

$$y_f(z) = -4 - \frac{2}{z^2} + \frac{4z}{z-1} \Rightarrow y_f(k) = -4\delta(k) - 2\delta(k-1) + 4\delta_{-1}(k).$$

Figura 4.61

Esercizio 4.54. *Determinare la risposta del sistema con:*

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(k)$$

$$\text{all'ingresso } u(k) = \begin{pmatrix} \delta(k) \\ \delta(k) \end{pmatrix}, \text{ essendo } x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. L'espressione dell'uscita si ricava antitrasformando:

$$y(z) = C(zI - A)^{-1}z x_0 + C(zI - A)^{-1}Bu(z),$$

ove $u(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{(z+2)(z^2-1)} \begin{pmatrix} z^2+2z-1 & z+2 & 1 \\ 2 & z^2+2z & z \\ 2z & z+2 & z^2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$C(zI - A)^{-1}z x_0 = \left(\frac{z}{z+2} \quad 0 \quad -\frac{z}{z+2} \right) x_0 = 0,$$

$$C(zI - A)^{-1}Bu(z) = \left(\frac{1}{z+2} \quad 0 \quad -\frac{1}{z+2} \right) Bu(z) = \frac{1}{z+2},$$

e infine si ricava $y(z) = \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \frac{z}{z+2}$. Pertanto $y(k) = (-2)^{k-1}$.

4.9. Il regime permanente e la risposta armonica per i sistemi a tempo-discreto

Come è noto per un sistema lineare stazionario a tempo discreto (4.15) la risposta in regime permanente è definita dal limite:

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \left[CA^{(t-t_0)}x_0 + \sum_{\tau=t_0}^t CA^{(t-\tau)}Bu(\tau) \right] \quad (4.18)$$

se tale limite esiste, è *finito* ed è *indipendente da* x_0 . Analogamente al caso a tempo continuo, perché tale limite sia indipendente da x_0 occorre che risulti $|\lambda_i| < 1$, $\forall i = 1, \dots, n$. La risposta a regime permanente allora esiste e può calcolarsi con la formula $y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \sum_{\tau=t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)$.

Si ricorda che per sistemi ad un ingresso ed una uscita, la risposta a regime permanente ad un ingresso canonico del tipo $u(t) = u_0 \frac{t^{(k)}}{k!} := u_0 \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!}$ ha l'espressione:

$$y_r(t) = u_0 \sum_{i=0}^k c_i \frac{t^{(k-i)}}{(k-i)!}, \quad (4.19)$$

in cui i coefficienti sono dati da $c_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i W(z)}{ds^i} \right]_{z=1}$.

Si ricorda inoltre che la risposta in regime permanente ad un ingresso sinusoidale $u(t) = u_0 \sin \tilde{\theta}t$, con $\tilde{\theta} \in (0, \pi)$, risulta:

$$y_r(t) = u_0 M(\tilde{\theta}) \sin(\tilde{\theta}t + \phi(\tilde{\theta})), \quad (4.20)$$

dove $M(\tilde{\theta}) = |W(e^{j\tilde{\theta}})|$ e $\phi(\tilde{\theta}) = \angle W(e^{j\tilde{\theta}})$ sono il modulo e fase di $W(e^{j\tilde{\theta}}) = M(\tilde{\theta})e^{j\phi(\tilde{\theta})}$ calcolati in $\tilde{\theta}$. La funzione $W(e^{j\theta})$, $\theta \in (0, \pi)$, che è pari alla trasformata z della $W(t)$ valutato sul cerchio di raggio unitario del piano complesso, risulta essere definita nell'ipotesi che gli autovalori del sistema abbiano modulo minore di 1. In tal caso infatti la circonferenza di raggio unitario nel piano complesso appartiene alla regione di convergenza della trasformata z .

È interessante verificare come la (4.20) possa essere ottenuta procedendo, almeno formalmente, in modo diverso. A tal fine si ricorda che la trasformata z di un segnale sinusoidale vale (si veda la tabella 4.2):

$$\mathcal{Z}[\sin \theta t] = \frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1} = \frac{z \sin \theta}{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})}.$$

La risposta forzata di un sistema avente funzione di trasferimento $W(z)$ all'ingresso $\sin \theta t$ risulta:

$$y(z) = W(z) \frac{z \sin \theta}{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{y(z)}{z} &= W(z) \frac{\sin \theta}{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})} = \\ &= \frac{A}{z - e^{j\theta}} + \frac{B}{z - e^{-j\theta}} + [\text{termini dovuti ai poli di } W(z)], \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} A &= (z - e^{-j\theta}) \frac{y(z)}{z} \Big|_{z=e^{j\theta}} = W(z) \frac{\sin \theta}{z - e^{-j\theta}} \Big|_{z=e^{j\theta}} = \frac{W(e^{j\theta})}{2j}, \\ B &= (z - e^{j\theta}) \frac{y(z)}{z} \Big|_{z=e^{-j\theta}} = W(z) \frac{\sin \theta}{z - e^{j\theta}} \Big|_{z=e^{-j\theta}} = \frac{W(e^{-j\theta})}{2j}. \end{aligned}$$

Poiché risulta $|W(e^{j\theta})| = |W(e^{-j\theta})|$ e $\angle W(e^{j\theta}) = -\angle W(e^{-j\theta})$, posto $W(e^{j\theta}) = M(\theta)e^{j\phi(\theta)}$, si ha:

$$y(z) = \frac{M(\theta)}{2j} \left(\frac{z e^{j\varphi(\theta)}}{z - e^{j\theta}} - \frac{z e^{-j\varphi(\theta)}}{z - e^{-j\theta}} \right) + [\dots].$$

Infine antitrasformando si ottiene:

$$y(t) = M(\theta) \sin[\theta t + \phi(\theta)] + y_t(t),$$

in cui il secondo termine a secondo membro, sotto l'ipotesi che i poli di $W(z)$ abbiano modulo minore di uno, tende a zero al crescere di t e viene denominato *risposta transitoria*. Il primo termine è coincidente con il secondo membro della (4.20) e fornisce la *risposta permanente*.

Analoghi passaggi potevano essere fatti nel caso a tempo continuo, e mostrano che la risposta a regime permanente è quella risposta a cui tende l'uscita del sistema al crescere t . Inoltre la risposta a regime permanente all'ingresso sinusoidale, come noto, è ancora dello stesso tipo, ma modificata in ampiezza e in fase.

Questo fatto mette in luce, tra l'altro, le caratteristiche "filtranti" dei sistemi lineari. Supponiamo infatti di voler realizzare un sistema caratterizzato da un comportamento a regime permanente che filtri quanto più possibile segnali campionati del tipo $\sin k\omega_0 T$ ottenuti ad esempio da un segnale continuo $\sin \omega_0 t$ ed in cui T è l'intervallo di campionamento coincidente con l'unità temporale del sistema a tempo discreto. A tal fine è sufficiente che risulti:

$$|W(e^{j\omega_0 T})| \simeq 0,$$

e tale condizione assieme al fatto che $W(z)$ deve avere coefficienti reali, equivalgono alla presenza di zeri nella $W(z)$ in prossimità di $e^{j\omega_0 T}$ ed $e^{-j\omega_0 T}$. Ad esempio una scelta del tipo:

$$W(z) = \frac{(z - e^{j\omega_0 T})(z - e^{-j\omega_0 T})}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

con a_1 ed a_2 da determinare in base ad ulteriori specifiche, soddisfa la specifica di filtraggio richiesta.

Esercizio 4.55. Si determini la risposta a regime permanente del sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0.005 & -0.6 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= (1 \quad 0) x(k) \end{aligned}$$

per il quale l'intervallo unitario di tempo è pari a 0.1 s, all'ingresso campionato ottenuto da una sinusoide con pulsazione naturale pari a 2π rad/s.

Soluzione. L'ingresso campionato è $u(k) = \sin k\omega_0 T$, con $\omega_0 = 2\pi$. Dunque:

$$u(k) = \sin \frac{\pi}{5} k.$$

Il calcolo della funzione di trasferimento $W(z)$ del sistema assegnato fornisce inoltre:

$$W(z) = \frac{1}{(z + 0.1)(z + 0.5)}.$$

Risulta quindi dalla (4.20):

$$y_r(k) = |W(e^{j\frac{\pi}{5}})| \sin \left(\frac{\pi}{5} k + \angle W(e^{j\frac{\pi}{5}}) \right),$$

dove:

$$W(e^{j\frac{\pi}{5}}) = \frac{1}{(0.1 + e^{j\frac{\pi}{5}})(0.5 + e^{j\frac{\pi}{5}})} = \frac{1}{\varrho_1 e^{j\varphi_1} \varrho_2 e^{j\varphi_2}},$$

$$\varrho_1 = \sqrt{\left(0.1 + \cos \frac{\pi}{5}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{5}} = \sqrt{0.01 + 0.2 \cos \frac{\pi}{5} + 1} \simeq 1.08,$$

$$\varrho_2 = \sqrt{\left(0.5 + \cos \frac{\pi}{5}\right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{5}} = \sqrt{0.25 + \cos \frac{\pi}{5} + 1} \simeq 1.43,$$

$$\varphi_1 = \arctan \left(\frac{\sin \frac{\pi}{5}}{0.1 + \cos \frac{\pi}{5}} \right), \quad \varphi_2 = \arctan \left(\frac{\sin \frac{\pi}{5}}{0.5 + \cos \frac{\pi}{5}} \right),$$

$$|W(e^{j\frac{\pi}{5}})| = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \simeq 0.64, \quad \angle W(e^{j\frac{\pi}{5}}) = -\varphi_1 - \varphi_2 \simeq 1.17.$$

Figura 4.62

con le funzioni di trasferimento $P_1(s) = \frac{s+1}{s}$, $P_2(s) = \frac{1}{s-2}$. Si individui la funzione di trasferimento $H(s)$ sapendo che la risposta forzata all'ingresso $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{-1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ è

$$y_f(t) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \right) \delta_{-1}(t).$$

Calcolare inoltre la risposta a regime permanente all'ingresso $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{-1}(t) \end{pmatrix}$.

Soluzione. La funzione di trasferimento $W_1(s)$ che lega u_1 a y vale:

$$W_1(s) = \frac{P_1(s)P_2(s)}{1 + P_1(s)P_2(s)H(s)},$$

da cui, risolvendo rispetto ad $H(s)$, si ottiene:

$$H(s) = \frac{P_1(s)P_2(s) - W_1(s)}{P_1(s)P_2(s)W_1(s)}.$$

Ora trasformando gli ingressi e $y_f(t)$:

$$W_1(s) = \frac{y(s)}{u_1(s)} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)},$$

per cui l'espressione di $H(s)$ diviene:

$$H(s) = \frac{7s+6}{s+1}.$$

La funzione di trasferimento che lega l'ingresso u_2 all'uscita y vale poi:

$$W_2(s) = \frac{P_2(s)}{1 + P_1(s)P_2(s)H(s)} = sK(s),$$

nella quale si è indicato con $K(s)$ una funzione di trasferimento senza poli nell'origine. Dal teorema del valore finale, la risposta a regime permanente vale

$$y_r(t) = W_2(0)\delta_{-1}(t),$$

e poiché $W_2(s)$ ha uno zero nell'origine $y_r(t) = 0$.

Esercizio 4.57. Sapendo che la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$ è pari a $6\delta_{-1}(t)$ per i due sistemi $F_1(s) = \frac{k}{s+2}$, $F_2(s) = \frac{1}{s+p}$, individuare i parametri k e p .

Soluzione. Dal teorema del valore finale risulta per $i = 1, 2$:

$$y_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF_i(s)u(s) = F_i(0)\delta_{-1}(t).$$

Dunque imponendo

$$6\delta_{-1}(t) = \frac{k}{2}3\delta_{-1}(t), \quad 6\delta_{-1}(t) = \frac{1}{p}3\delta_{-1}(t),$$

si ricava $k = 4$ e $p = \frac{1}{2}$.

Problema 4.3. Determinare la risposta forzata al gradino per un sistema avente funzione di trasferimento $W(s) = \frac{10(s+0.1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

Problema 4.4. Determinare la risposta forzata all'impulso per un sistema

avente funzione di trasferimento $W(s) = \left(\frac{\frac{s^2 - s + 1}{(s+0.1)(s^2 + s + 1)}}{\frac{1}{(s+0.1)(s+2)}} \right)$.

Problema 4.5. Determinare la risposta forzata al gradino per un sistema avente funzione di trasferimento $W(s) = \frac{s+5}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$.

Problema 4.6. Determinare la risposta a regime permanente al gradino per il sistema del problema 4.3.

Problema 4.7. Determinare la risposta a regime permanente sotto l'ingresso $u(t) = \cos 3t$ per il sistema del problema 4.4.

Problema 4.8. Determinare la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = t^2 \delta_{-1}(t)$ per il sistema del problema 4.5.

Problema 4.9. Studiare l'andamento iniziale delle risposte impulsive dei sistemi dei problemi 4.3 ÷ 4.6.

Problema 4.10. Determinare la risposta all'impulso discreto per un sistema avente funzione di trasferimento $W(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{(z+0.1)(z+0.5)}$.

Problema 4.11. Determinare la risposta al gradino per un sistema avente

funzione di trasferimento $W(z) = \left(\frac{\frac{z+0.1}{(z+0.1)(z+0.5)}}{\frac{z+1}{(z+0.1)(z+0.2)}} \right)$.

Problema 4.12. Calcolare i valori delle risposte impulsive dei sistemi dei problemi 4.10 e 4.11 per $t = 0, 1, 2, 3$.

Problema 4.13. Determinare la risposta all'impulso discreto per un sistema avente funzione di trasferimento $W(z) = \frac{z^4 + 2z^3 + z^2 - 1}{z^6}$.

4.11. Appendice del capitolo 4

4.11.a. La trasformata di Laplace

Nel ricavare i modelli matematici del capitolo 2 si sono ottenute delle equazioni differenziali. Per la loro risoluzione sono di grande utilità le trasformazioni funzionali, ossia le trasformazioni che associano funzioni a funzioni. Una di essa è la trasformazione di Laplace.

Le trasformazioni funzionali stabiliscono una corrispondenza biunivoca (sotto certe ipotesi) tra le funzioni di partenza (di solito funzioni del tempo $f(t)$) e quelle trasformate (nel caso della trasformata di Laplace funzioni $F(s)$ della variabile complessa $s = \alpha + j\omega$), in modo che le operazioni effettuate sulle funzioni di partenza (ad esempio la derivazione) corrispondono ad operazioni più semplici nelle funzioni trasformate (un'operazione algebrica per la trasformata di Laplace). Dunque un certo problema di partenza (nel dominio del tempo) può essere tradotto in un problema più semplice (nel dominio della variabile complessa s); una volta risolto, mediante anti-trasformazione si riottiene la soluzione nel dominio del tempo.

Sia dunque $f(t)$ una funzione da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Sotto le seguenti ipotesi sufficienti:

- 1) per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ esiste una costante reale $c_1 \in \mathbb{R}$ tale che $|f(t)| < c_1$ per $t \in [0, t_0]$;
- 2) $f(t)$ ha un'infinità numerabile di punti di discontinuità;
- 3) esistono $c_2, c_3, t_0 \in \mathbb{R}$ per cui $|f(t)| < c_2 e^{c_3 t}$ per ogni $t \geq t_0$;

legate essenzialmente alla possibilità di definire un integrale da zero a $+\infty$ (sommabilità di $f(t)$), si definisce *trasformata di Laplace* di $f(t)$ la seguente funzione $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$s \mapsto F(s)$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}[f(t)]. \quad (4.21)$$

Si noti che le precedenti ipotesi di esistenza della trasformata di Laplace implicano che esiste finito il limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t)e^{-st} dt$$

per almeno un valore $s_0 \in \mathbb{C}$, ossia che converga l'integrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t} dt$. Si può dimostrare che allora converge anche l'integrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ per

Figura 4.67

Problema 4.19. Determinare i parametri caratteristici della risposta armonica e della risposta indiciale per i sistemi dei problemi 4.3, 4.4, 4.5.

ogni s tale che $\Re(s) > \Re(s_0)$. Il più piccolo valore $\Re(s)$ per cui tale integrale converge è detto *ascissa di convergenza*. Viene così individuato un *semipiano di convergenza* (nel piano complesso, a destra di tale ascissa), in cui $F(s)$ è definita.

Perché nel procedimento inverso l'antitrasformata di una funzione $F(s)$ sia determinabile univocamente, si considererà l'ipotesi aggiuntiva che la funzione $f(t)$ sia nulla per $t < 0$.

Di seguito sono riportate le proprietà fondamentali della trasformata di Laplace, basate sull'ipotesi di esistenza delle trasformate utilizzate negli enunciati.

P1) **Linearità.** La trasformata di Laplace è lineare:

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).$$

P2) **Teorema del valore iniziale.** Se esiste $F(s)$ con ascissa di convergenza β e se $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \alpha$ allora $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \alpha$.

P3) **Teorema del valore finale.** Se esiste l'integrale della $f(t)$ in ogni intervallo limitato contenuto in $[0, +\infty)$ (ovvero se $f(t)$ è localmente sommabile in $[0, +\infty)$: $f(t) \in L_{loc}[0, +\infty)$) e se $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \alpha$, allora $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \alpha$.

P4) **Traslazione nel tempo.** Risulta:

$$\mathcal{L}[f(t-a)\delta_{-1}(t-a)] = e^{-as} \mathcal{L}[f(t)] = e^{-as} F(s),$$

ove $\delta_{-1}(t)$ indica la “funzione” gradino.

P5) **Traslazione nella variabile complessa.** Risulta:

$$\mathcal{L}[f(t)e^{\alpha t}] = \mathcal{L}[f(t)] \Big|_{s-\alpha} = F(s-\alpha).$$

P6) **Prodotto integrale o convoluzione.** Se $f(t)$ e $g(t)$ sono due funzioni si definisce (sotto opportune ipotesi) prodotto integrale o convoluzione:

$$f * g(t) := \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

e, sotto ipotesi molto generali, risulta:

$$\mathcal{L}[f * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] = F(s)G(s).$$

P7) **Trasformata dell'integrale.** Dato l'integrale di una funzione $f(t)$ si ha:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}F(s).$$

P8) **Trasformata della derivata.** Data la derivata di una funzione $f(t)$ risulta:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) + \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Si noti che in particolare la proprietà di linearità è facilmente dimostrabile in base alla linearità dell'integrale.

Dalla definizione (4.21) è facile calcolare le seguenti trasformate elementari, valide per opportuni valori dell'ascissa di convergenza.

T1) Trasformata della “funzione” **impulso**:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1.$$

T2) Trasformata della “funzione” **gradino**:

$$\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \int_0^{+\infty} \delta_{-1}(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

T3) Trasformata dell'**esponenziale**:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{\alpha t}] &= \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = -\frac{1}{s-\alpha}[e^{-(s-\alpha)t}]_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{s-\alpha}. \end{aligned}$$

T4) Trasformata del **seno**:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin \omega t] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{(-s+j\omega)t} dt + \\ &\quad - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{(-s-j\omega)t} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

T5) Trasformata del **coseno**:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Una relazione importante è poi la seguente:

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s),$$

con $F^{(n)}(s) = \frac{d^n}{ds^n}F(s)$. In particolare se $f(t) = 1$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^{n+1}},$$

e se $f(t) = e^{\lambda t}$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^n}{n!}e^{\lambda t}\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s-\lambda}\right) = \frac{1}{(s-\lambda)^{n+1}}$$

che poteva essere ricavata anche dalla proprietà di traslazione in s , ponendo $f(t) = \frac{t^n}{n!}$.

4.11.b. La trasformata z

La funzione (4.14) è definita quando è convergente la serie al secondo membro. Si chiama *raggio di convergenza* il valore ϱ per cui, per $|z| > \varrho$, la serie converge, mentre $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$ viene detta trasformata z o z -trasformata della funzione $f(k)$.

Le proprietà fondamentali della trasformata z sono riportate di seguito, basate sull'ipotesi di esistenza delle trasformate utilizzate negli enunciati.

P1) **Linearità.** La trasformata z è lineare:

$$\mathcal{Z}[c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k)] = c_1 \mathcal{Z}[f_1(k)] + c_2 \mathcal{Z}[f_2(k)] = c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z).$$

P2) **Teorema del valore iniziale.** Si ha che $f(k)|_{k=0} = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$.

P3) **Teorema del valore finale.** Se esiste il $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \alpha$ ed è finito, allora $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \alpha$.

P4) **Traslazione nel tempo.** Risulta per k intero positivo:

$$\mathcal{Z}[f(t+k)] = z^k \left[\mathcal{Z}[f(k)] - \sum_{h=0}^{k-1} \frac{f(h)}{z^h} \right] = z^k \left[F(z) - \sum_{h=0}^{k-1} \frac{f(h)}{z^h} \right].$$

Ponendo poi $f(-1) = f(-2) = \dots = f(-k) = 0$ si ha anche che

$$\mathcal{Z}[f(t-k)] = z^{-k} \mathcal{Z}[f(k)] = z^{-k} F(z).$$

P5) **Traslazione nella variabile complessa.** Risulta:

$$\mathcal{Z}[f(k)a^k] = \mathcal{Z}[f(k)] \Big|_{a^{-1}z} = F(a^{-1}z).$$

P6) **Convolvere.** Se $f(k)$ e $g(k)$ sono due funzioni si definisce convoluzione:

$$f * g(k) := \sum_{\tau=0}^k g(k-\tau)f(\tau)$$

e, sotto opportune ipotesi, risulta:

$$\mathcal{Z}[f * g(k)] = \mathcal{Z}[f(k)] \mathcal{Z}[g(k)] = F(z)G(z).$$

P7) **Trasformata della somma finita.** Risulta che:

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{h=0}^k f(h)\right] = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}[f(k)] = \frac{z}{z-1} F(z).$$

Dalla definizione (4.14) è facile calcolare le seguenti trasformate elementari, valide per opportuni valori del raggio di convergenza.

T1) Trasformata della “funzione” **impulso**:

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta(k)}{z^k} = \delta(0) = 1.$$

T2) Trasformata del **gradino**:

$$\mathcal{Z}[\delta_{-1}(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_{-1}(k)}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \frac{z}{z-1}.$$

T3) Trasformata della **potenza**:

$$\mathcal{Z}[e^{\alpha k} = \lambda^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha k}}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(ze^{\alpha})^k} = \frac{z}{z-e^{\alpha}} = \frac{z}{z-\lambda}$$

T4) Trasformata del **seno**:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\sin \omega k] &= \mathcal{Z} \left[\frac{e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}}{2j} \right] = \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega}} \right) = \\ &= \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}.\end{aligned}$$

T5) Trasformata del **coseno**:

$$\mathcal{Z}[\cos \omega k] = \mathcal{Z} \left[\frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2} \right] = \frac{-z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}.$$

5. Proprietà strutturali dei sistemi lineari stazionari

Le proprietà geometriche dello spazio di stato sono alla base del calcolo di quelle rappresentazioni che mettono in luce la struttura interna di un dato sistema. Per ben comprendere i concetti legati alle proprietà strutturali è quindi necessario aver acquisito gli elementi relativi alla rappresentazione di uno spazio vettoriale, contenuti nel capitolo 1.

5.1. Proprietà strutturali e scomposizioni

Come è noto, con riferimento ad una rappresentazione (X, φ, η) di un sistema, l'insieme degli stati *raggiungibili* ad un fissato istante t da uno stato fissato x_0 , è definito come l'insieme degli stati $x \in X$ in corrispondenza dei quali esiste un istante di tempo $t_0 \leq t$ ed un segmento di funzione di ingresso $u_{[t_0, t]}$ tale che risulti:

$$\varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0, t]}) = x.$$

Per un sistema lineare stazionario a dimensione finita, rappresentato dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

è usuale assumere $x_0 = 0$. In tal caso si parla di raggiungibilità dallo stato zero.

Nell'ambito della teoria qualitativa di analisi di sistemi, ha interesse poter valutare l'insieme degli stati raggiungibili da zero per il sistema (5.1) con semplici manipolazioni, senza dover risolvere le equazioni stesse. A tale proposito sussiste l'interessante risultato in base al quale il *sottospazio vettoriale* \mathcal{P} degli stati raggiungibili dallo stato zero per il sistema (5.1) è dato da:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\mathbf{R}),$$

ossia è lo spazio immagine della matrice \mathbf{R} , detta *matrice di raggiungibilità*.

È inoltre opportuno ricordare che considerando una trasformazione di coordinate T tale da assumere come primi vettori della nuova base dello spazio di stato una base $\{v_1, \dots, v_r\}$ dello spazio dei raggiungibili, ossia tale che

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r & w_1 & \cdots & w_{n-r} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

in cui w_1, \dots, w_{n-r} sono un completamento della base dei raggiungibili, si ottiene:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad CT^{-1} = (C_1 \ C_2), \quad (5.3)$$

in cui A_{11} , B_1 , C_1 sono matrici rispettivamente $r \times r$, $r \times m$ e $p \times r$.

La determinazione della base degli stati raggiungibili va fatta individuando le colonne linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità.

Identiche considerazioni possono essere ripetute per i sistemi a tempo discreto. Si ricorda però che per tale classe di sistemi la proprietà di raggiungibilità è più forte di quella di controllabilità. In altre parole, la *raggiungibilità di uno stato dall'origine implica la sua controllabilità nell'origine*, ma la controllabilità di uno stato nell'origine implica la sua raggiungibilità dall'origine se e solo se la matrice dinamica A è invertibile.

Consideriamo ora la proprietà di *inosservabilità*. Ricordiamo che due stati x_{0a} , x_{0b} si dicono indistinguibili se risulta:

$$\eta(\varphi(t, t_0, x_{0a}, u_{[t_0, t]}), u(t)) = \eta(\varphi(t, t_0, x_{0b}, u_{[t_0, t]}), u(t)), \quad \forall t \geq t_0, \forall u.$$

Nel caso di un sistema del tipo (5.1) tali stati soddisfano la seguente relazione:

$$Ce^{At}(x_{0a} - x_{0b}) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.4)$$

Utilizzando una dizione di ovvio significato, si dice anche che lo stato $x_{0a} - x_{0b}$ è inosservabile (cioè indistinguibile dallo stato zero). Facendo proprio riferimento alla indistinguibilità rispetto all'origine, gli stati che soddisfano

la (5.4) sono tutti e solo quelli appartenenti al sottospazio \mathcal{I} degli stati inosservabili

$$\mathcal{I} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \mathcal{N}(\mathbf{O}),$$

ossia al sottospazio nullo della matrice \mathbf{O} , detta *matrice di osservabilità*.

Anche in questo caso considerando una trasformazione T tale che

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{n-r} & w_1 & \cdots & w_r \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

in cui $\{v_1, \dots, v_{n-r}\}$ è una base di \mathcal{I} e w_1, \dots, w_r sono r vettori scelti in modo che esista la matrice T , si ha:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad CT^{-1} = (0 \ C_2), \quad (5.6)$$

in cui A_{22} , B_2 e C_2 sono rispettivamente matrici $r \times r$, $r \times m$ e $p \times r$.

Le stesse considerazioni valgono per i sistemi a tempo discreto. Analogamente alla differenza tra controllabilità e raggiungibilità, per tali sistemi la proprietà di osservabilità di uno stato (duale della raggiungibilità di uno stato) implica quella di ricostruibilità di uno stato (duale della controllabilità), e tali proprietà coincidono se e solo se la matrice dinamica A è non singolare.

Esercizio 5.1. Studiare dal punto di vista delle proprietà strutturali il sistema costituito dalla rete elettrica riportata in figura.

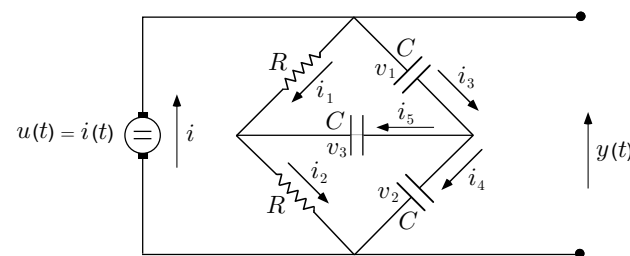


Figura 5.1

Soluzione. Considerato che

$$i_3 = C\dot{v}_1, \quad i_4 = C\dot{v}_2, \quad i_5 = C\dot{v}_3,$$

applicando la legge dei nodi di Kirchhoff si ottiene:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_3 = i_1 + C\dot{v}_1 \\ i_3 &= C\dot{v}_1 = i_4 + i_5 = C\dot{v}_2 + C\dot{v}_3 \\ i_2 &= i_1 + i_5 = i_1 + C\dot{v}_3 \end{aligned}$$

ed utilizzando quella delle maglie:

$$Ri_1 - v_1 - v_3 = 0, \quad Ri_2 + v_3 - v_2 = 0,$$

con $y = v_2 + v_1$. Da queste ultime si ricava

$$i_1 = \frac{v_1 + v_3}{R}, \quad i_2 = \frac{v_2 - v_3}{R},$$

che sostituite nelle precedenti forniscono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\frac{1}{RC}(v_1 + v_3) + \frac{1}{C}i \\ \dot{v}_2 &= -\frac{1}{RC}(v_2 - v_3) + \frac{1}{C}i \\ \dot{v}_3 &= \frac{1}{RC}(-v_1 + v_2 - 2v_3) \\ y &= v_1 + v_2. \end{aligned}$$

Assumendo $x_1 = v_1$, $x_2 = v_2$, $x_3 = v_3$, $u = i$ si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 & -\frac{1}{RC} \\ 0 & -\frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} & -\frac{2}{RC} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \quad 1 \quad 0)x. \end{aligned}$$

Come è immediato verificare, il sottospazio degli stati raggiungibili per il sistema in esame è:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC^2} & \frac{1}{RC^3} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC^2} & \frac{1}{RC^3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

come risulta peraltro intuitivo in virtù della simmetria della rete per le scelte fatte. Per gli stati inosservabili si ha:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ \frac{1}{R^2C^2} & \frac{1}{R^2C^2} & 0 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si noti che $\mathcal{R}(\mathbf{R}) + \mathcal{N}(\mathbf{O}) = \mathcal{P} + \mathcal{I} = \mathbb{R}^3$.

Si vuole ora effettuare la scomposizione del sistema rispetto alla proprietà di raggiungibilità. A tal fine si costruisce la matrice (5.2):

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ottenendo così la matrice di trasformazione

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nelle nuove coordinate \tilde{x}_1 , \tilde{x}_2 , \tilde{x}_3 , definite dalla trasformazione T , risulta dunque:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 & -\frac{1}{RC} \\ 0 & -\frac{1}{RC} & \frac{2}{RC} \\ 0 & \frac{1}{RC} & -\frac{2}{RC} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A tale rappresentazione corrisponde il seguente schema di simulazione:

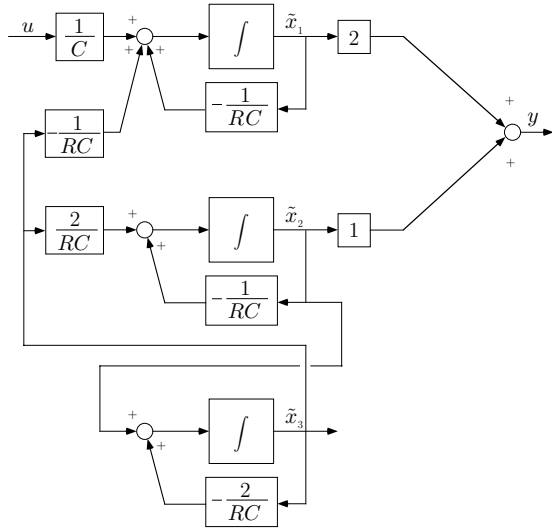


Figura 5.2

Il sotto-sistema rappresentato dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -\frac{1}{RC}\tilde{x}_1 + \frac{1}{C}u \\ y &= 2\tilde{x}_1\end{aligned}$$

è equivalente dal punto di vista ingresso-uscita al sistema assegnato.

Si noti che il cambiamento di coordinate effettuato corrisponde ad assumere, come nuove variabili di stato per il sistema in esame, quelle di seguito riportate:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1 = v_1 \\ \tilde{x}_2 &= -x_1 + x_2 = -v_1 + v_2 \\ \tilde{x}_3 &= x_3 = v_3\end{aligned}$$

Per la scomposizione rispetto alla proprietà di inosservabilità si deve costruire la matrice (5.5):

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ -\frac{2}{RC} & -\frac{2}{RC} & \frac{1}{RC} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \\ \frac{2}{C} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si può costruire uno schema analogo al caso della scomposizione rispetto alla raggiungibilità e fare analoghe considerazioni.

Esercizio 5.2. Si calcoli l'insieme degli stato raggiungibili per il sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

a partire dallo stato $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Come è immediato verificare risulta:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix},$$

per cui l'evoluzione libera a partire da x_0 vale:

$$x_l(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

L'insieme degli stati raggiungibili a partire da x_0 è dunque pari a:

$$\mathcal{P}_{x_0} = \left\{ x \mid x = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} + \mathcal{R}(B \quad AB) \right\},$$

in quanto l'insieme degli stati raggiungibili con la sola evoluzione forzata è indipendente da t e pari a $\mathcal{R}(B \quad AB)$.

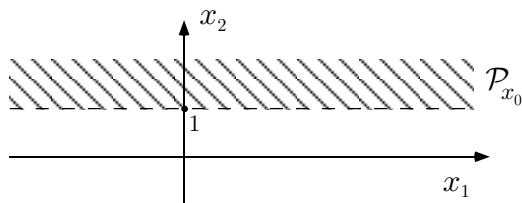


Figura 5.3

Esercizio 5.3. Assegnato il sistema a tempo discreto in figura, studiarne la raggiungibilità e l'osservabilità.

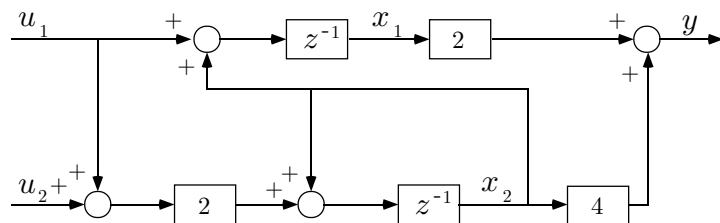


Figura 5.4

Soluzione. Dalla figura si ottiene:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) + u_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + 2(u_1(k) + u_2(k)) \\ y(k) &= 2x_1(k) + 4x_2(k). \end{aligned}$$

Poiché risulta $\mathcal{P} = \mathcal{R}(B) = \mathbb{R}^2$, il sistema non solo è tutto raggiungibile, ma ogni stato può essere raggiunto in un solo passo. Ad esempio per raggiungere il generico stato $\bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, all'istante $k+1$ a partire dallo stato zero all'istante k , basta utilizzare il controllo ricavabile risolvendo il sistema:

$$x(k+1) = \bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Bu(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{pmatrix},$$

da cui risulta $u_1(k) = a$, $u_2(k) = \frac{1}{2}b - a$. Una base di \mathcal{P} è ovviamente quella canonica. Inoltre il sistema è tutto osservabile in quanto $\mathcal{I} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \{0\}$.

La determinazione della base degli stati raggiungibili mediante l'individuazione delle colonne linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità può essere difficoltosa, specialmente se la dimensione della matrice è grande (si veda ad esempio il metodo proposto nell'esercizio 6.3). Tale base può essere individuata anche applicando la seguente procedura sistematica. Siano b_1, \dots, b_m le colonne della matrice B . Si costruisce una tabella di vettori in cui ogni vettore viene inserito solo se è linearmente indipendente rispetto a *tutti* i vettori già inseriti. La tabella viene costruita per righe, inserendo le colonne b_i nella prima riga e continuando con i vettori Ab_i nella seconda, i vettori A^2b_i nella terza, e così via. Si hanno così delle colonne di vettori, in numero minore o uguale ad m . Quando nella i -esima colonna l'elemento $A^k b_i$, $k \geq 0$, non può essere inserito perché dipendente rispetto agli elementi già presenti nella tabella, la colonna non viene ulteriormente completata (anche le potenze successive forniscono infatti vettori dipendenti dai precedenti), e si passa all'elemento successivo da inserire. Quando non si possono inserire ulteriori elementi, la tabella è completata, e i suoi elementi sono proprio tutte e sole le colonne linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità, ossia costituiscono una base del sottospazio di raggiungibilità.

Esercizio 5.4. Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

calcolare i sottospazi raggiungibili e inosservabili ed effettuare la scomposizione di Kalman.

Soluzione. La base del sottospazio dei raggiungibili si calcola in base alla tabella:

b_1	b_2
—	—

in cui le colonne non sono state proseguite poiché Ab_i sono proporzionali agli elementi precedenti. Dunque:

$$\mathcal{P} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \{u_1, u_2\},$$

in cui la seconda base di \mathcal{P} è leggermente più comoda della prima dal punto di vista del calcolo. Questi sottospazi potevano essere determinati anche calcolando:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix},$$

come nell'esercizio 6.3. Per la base degli inosservabili si determina la matrice di osservabilità:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & -2 & -2 \\ -4 & 5 & -4 & -4 \\ 11 & -16 & 11 & 11 \\ 13 & -14 & 13 & 13 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2 (in effetti già calcolando CA si vede che si ottengono righe ottenibili per combinazione lineare delle prime due, per cui è in realtà inutile completare la matrice con il calcolo di CA^2, CA^3). Dunque \mathcal{I} ha dimensione $s = n - 2 = 2$. Una base è

$$\mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \{w_1, w_2\}.$$

Per inciso si nota che per determinare \mathcal{I} si potrebbe costruire una tabella analoga a quella vista per i raggiungibili. Infatti un risultato della teoria lineare è che, data una matrice M ad elementi reali, $\mathcal{N}(M) =$

$(\mathcal{R}(M^T))^\perp$, in cui “ \perp ” indica il complemento ortogonale di $\mathcal{R}(M^T)$, ossia l'insieme dei vettori ortogonali a quelli di $\mathcal{R}(M^T)$. Nel nostro caso M è la matrice di osservabilità, per cui le colonne della tabella sono le righe di $C^T, A^T C^T$, etc. Si trova così una base di $\mathcal{R}(M^T)$. Si determinano infine i vettori ortogonali a tale base. Si noti che in effetti sono proprio queste le operazioni che portano alla determinazione del nucleo di \mathbf{O} .

Il sottospazio $\chi_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ è generato da quei vettori in comune a \mathcal{P} ed \mathcal{I} , ossia da quei vettori generabili come combinazione lineare sia dei vettori di base di \mathcal{P} sia di quelli di \mathcal{I} :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2, \quad (5.7)$$

ossia:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & -w_1 & -w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Occorre dunque calcolare una base del nucleo della matrice a primo membro (che ha rango 3), data da:

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & -w_1 & -w_2 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Al vettore di questa base corrispondono i coefficienti $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1$, e dunque il vettore di base di χ_1 :

$$\chi_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si noti che, più in generale, si hanno più vettori di base per il nucleo:

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_r & -w_1 & \cdots & -w_s \end{pmatrix} = \text{gen} \{v_1, \dots, v_p\},$$

ed ad ognuno di questi corrispondono dei coefficienti che risolvono l'equazione:

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_s w_s,$$

e dunque corrisponde un vettore di base di χ_1 .

Si osservi che si sarebbe potuto prendere anche:

$$\mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

per cui immediatamente si sarebbe considerato $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ come vettore in

comune con \mathcal{P} . Per poter essere però sicuri che non vi siano altri vettori in comune, occorre sempre risolvere la (5.7).

Si ricava poi:

$$\chi_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \chi_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \chi_4 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti che le equazioni dinamiche nelle nuove variabili $z = Tx$ sono:

$$\dot{z}_1 = 4z_1 + z_3 + u_1 \quad (\text{sottospazio } \chi_1)$$

$$\dot{z}_2 = -3z_2 + z_4 + 2u_2 \quad (\text{sottospazio } \chi_2)$$

$$\dot{z}_3 = -2z_3 + 2z_4 \quad (\text{sottospazio } \chi_3)$$

$$\dot{z}_4 = -z_4 \quad (\text{sottospazio } \chi_4)$$

$$y_1 = z_2 + 2z_4$$

$$y_2 = z_2$$

e queste, ovvero lo schema strutturale corrispondente, mettono in luce i quattro sottospazi della scomposizione di Kalman.

Esercizio 5.5. Effettuare la scomposizione di Kalman per il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x. \end{aligned}$$

Soluzione. Poiché $Ab_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Ab_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti da b_1 , b_2 , il sottospazio dei raggiungibili è:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\mathcal{I} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ & * & \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si noti che la matrice di osservabilità (di rango 1) non è stata completata in quanto si è notato che $CA = -C$. Dunque $\chi_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ viene determinato risolvendo l'equazione:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

che si vede banalmente ha un'unica soluzione, per $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$, per cui:

$$\chi_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Infine:

$$\chi_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \chi_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \chi_4 = \{0\},$$

per cui:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti nella struttura di queste matrici la mancanza delle sotto-matrici relative al sottospazio χ_4 .

Esercizio 5.6. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u$$

mostrare che il sottospazio \mathcal{P} degli stati raggiungibili non cambia se si pone $u = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} x + v$.

Soluzione. Poiché

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} x + v = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

si trova che

$$\mathcal{P} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dunque \mathcal{P} non cambia quando u è lineare nello stato. Si noti che tale proprietà non vale per il sottospazio \mathcal{I} degli inosservabili, che in generale cambia.

Questo risultato è valido, più genericamente, per un qualsiasi sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, quando $u = Fx + v$, poiché è facile mostrare che

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}} &= \mathcal{R} \begin{pmatrix} B & (A+BF)B & \cdots & (A+BF)^{n-1}B \end{pmatrix} = \\ &= \mathcal{R} \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B & BFB & ABFB & BFAB & BFBFB & \cdots \end{pmatrix} = \\ &= \mathcal{R} \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \mathcal{P}, \end{aligned}$$

in quanto $\mathcal{R}(BFB) = \mathcal{R}(B)$, $\mathcal{R}(ABFB) = \mathcal{R}(AB)$, etc.

Esercizio 5.7. Studiare i modi naturali del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

e calcolarne la funzione di trasferimento.

Soluzione. La matrice di raggiungibilità è

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui non tutti gli stati sono raggiungibili e il sottospazio degli stati che godono di tale proprietà è

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(R) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Inoltre

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dunque $\mathcal{P} = \mathcal{I}$. Riguardo l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi si osservi che un insieme di autovettori corrispondenti agli autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ è dato da

$$u_{11}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{21}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{21}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dunque per il secondo autovalore la molteplicità geometrica è $m_2 = 2$ (si ha una sola catena di autovettori, di lunghezza due).

Si possono calcolare allora le matrici:

$$H(t) = e^{At}B = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(t) = Ce^{At} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Il modo e^{-t} compare dunque in entrambe le matrici. Tuttavia si trova che la funzione di trasferimento è nulla:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = 0$$

e ciò è coerente con il fatto che il sottospazio degli stati raggiungibili ed osservabili è $\chi_2 = \{0\}$. Essendo infatti $W(s)$ pari a $C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2$, ove A_{22} , B_2 , C_2 sono le matrici relative al sottospazio χ_2 ottenibili mediante la scomposizione di Kalman, e poiché nel nostro caso $A_{22} = 0$, $B_2 = 0$, $C_2 = 0$, la funzione di trasferimento deve essere nulla.

5.2. Criteri di Popov–Belevitch–Hautus

Dei criteri per verificare la raggiungibilità e l'osservabilità di una realizzazione sono quelli del rango di Popov–Belevitch–Hautus. Si ricorda infatti che la coppia (A, B) è raggiungibile se e solo se

$$\varrho(\lambda I - A \quad B) = n$$

per ogni λ , e che la coppia (C, A) è osservabile se e solo se

$$\varrho \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n$$

per ogni λ .

Ovviamente se λ non è un autovalore di A queste condizioni sono soddisfatte poiché $|\lambda I - A| \neq 0$. Quello che viene richiesto è che le condizioni enunciate valgano anche quando λ è un autovalore di A .

Esercizio 5.8. Dimostrare che la realizzazione (A_G, B_G, C_G) ottenuta applicando il criterio di Gilbert è minima.

Soluzione. Utilizzando il criterio del rango di Popov–Belevitch–Hautus si può vedere che la coppia (A_G, B_G) è raggiungibile perché la matrice:

$$\begin{pmatrix} A_G - \lambda_i I & B_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_i)I_{\ell_1} & \cdots & 0 & B_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & (\lambda_r - \lambda_i)I_{\ell_r} & B_r \end{pmatrix}$$

ha rango n per ogni autovalore λ_i , $i = 1, \dots, r$, essendo le matrici B_i costituite da ϱ_i righe linearmente indipendenti (per ipotesi infatti $\varrho(B_i) = \varrho_i$). La stessa tecnica, applicata alla matrice $\begin{pmatrix} A_G - \lambda_i I \\ C_G \end{pmatrix}$, e lo stesso ragionamento (C_i sono costituite da ϱ_i colonne linearmente indipendenti) prova l'osservabilità della coppia (C_G, A_G) .

5.3. Matrici Grammiane

In questa sezione vengono introdotte alcune matrici che hanno particolare importanza nello studio delle proprietà di raggiungibilità ed osservabilità.

Con riferimento al sistema (5.1), iniziamo col mostrare che una realizzazione è raggiungibile se e solo se la *matrice grammiana di raggiungibilità*:

$$G_R = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau$$

è non singolare per qualche $t > 0$. La condizione è sufficiente in quanto, essendo

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau,$$

ed esistendo G_R^{-1} per qualche $t > 0$ finito, allora l'ingresso che forza lo stato del sistema da x_0 a $x(t)$ è dato da:

$$u(\tau) = B^T e^{A^T(t-\tau)} G_R^{-1} (x(t) - e^{At}x_0), \quad (5.8)$$

come si può verificare sostituendo questo controllo nell'espressione di $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} G_R^{-1} (x(t) - e^{At}x_0) d\tau = \\ &= e^{At}x_0 + G_R G_R^{-1} (x(t) - e^{At}x_0) = x(t). \end{aligned}$$

Si sottolinea che il controllo (5.8) è quello che porta lo stato da x_0 all'istante iniziale a $x(t)$ all'istante t . La condizione è poi anche necessaria. Infatti se per assurdo non esistesse alcun $t > 0$ per cui G_R fosse non singolare, non esisterebbe alcun ingresso che porta lo stato da x_0 a $x(t)$. Infatti, essendo G_R sempre singolare, per il teorema di Rouché-Capelli esisterebbe un vettore $v \neq 0$ tale che $v^T G_R = 0$, ovvero, postmoltiplicando per v , tale che:

$$v^T G_R v = \int_0^t v^T e^{A(t-\tau)} B B^T e^{A^T(t-\tau)} v d\tau = 0 = \int_t^T q^T(\tau) q(\tau) d\tau,$$

con $q(\tau) = B^T e^{A^T(t-\tau)} v$. Poiché l'integrando è $q^T(\tau) q(\tau) \geq 0$, l'unico modo perché un integrale sull'intervallo $[0, t]$ sia nullo è che l'integrando, ossia $q(\tau)$, sia identicamente nullo su $[0, t]$. Ma allora il sottospazio $\{v\}$ è costituito da stati non raggiungibili dall'origine, in quanto se lo fossero:

$$cv = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau,$$

premultiplicando per v^T si troverebbe:

$$cv^T v = \int_0^t v^T e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \int_0^t q^T(\tau) u(\tau) d\tau = 0.$$

Ma questo è assurdo in quanto il primo membro è diverso da zero. Dunque cv non è raggiungibile dall'origine, ossia se il grammiano di raggiungibilità è sempre singolare esistono degli stati non raggiungibili. Dunque G_R deve essere non singolare per qualche $t > 0$ perché la realizzazione sia raggiungibile.

Si noti che, ridenominando la variabile di integrazione, il grammiano di raggiungibilità poteva essere scritto:

$$G_R = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau,$$

e che spesso si usa anche un'altra forma, equivalente alla precedente:

$$\bar{G}_R = \int_0^t e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau.$$

Mostriamo ora che una realizzazione è osservabile se e solo se la *matrice grammiana di osservabilità*:

$$G_O = \int_t^T e^{A^T(\tau-t)} C^T C e^{A(\tau-t)} d\tau$$

è non singolare per qualche $T > t$. La condizione è sufficiente in quanto, moltiplicando ambo i membri dell'equazione

$$y(\tau) = Cx(\tau) = C e^{A(\tau-t)} x(t)$$

per $e^{A^T(\tau-t)} C^T$, e integrando su $[t, T]$, si ha:

$$\int_t^T e^{A^T(\tau-t)} C^T y(\tau) d\tau = \int_t^T e^{A^T(\tau-t)} C^T C e^{A(\tau-t)} x(t) d\tau = G_O x(t).$$

Ma essendo G_O non singolare per qualche $T > t$, allora si può ricavare $x(t)$:

$$x(t) = G_O^{-1} \int_t^T e^{A^T(\tau-t)} C^T y(\tau) d\tau.$$

In tal modo è possibile determinare lo stato $x(t)$ a partire dai valori (futuri) dell'uscita sull'intervallo $[t, T]$. Si noti che questo è coerente con quanto detto a proposito dell'osservabilità di uno stato, che è proprio la proprietà di determinare lo stato a partire dalle uscite future. Si noti che non è possibile determinare $x(t)$ in un altro modo che non implichi l'inversione della matrice grammiana di osservabilità, come mostrato nella dimostrazione della necessità della condizione. Infatti sia per assurdo G_O sempre singolare. Ma allora, per il teorema di Rouché-Capelli, esiste un vettore $u \neq 0$ tale che $G_O u = 0$. Premoltiplicando allora per u^T si ha anche $u^T G_O u = 0$, ossia:

$$u^T G_O u = \int_t^T u^T e^{A^T(\tau-t)} C^T C e^{A(\tau-t)} u d\tau = 0 = \int_t^T q^T(\tau) q(\tau) d\tau,$$

con $q(\tau) = C e^{A(\tau-t)} u$. Poiché l'integrando è $q^T(\tau) q(\tau) \geq 0$, l'unico modo perché un integrale sull'intervallo $[t, T]$ sia nullo è che l'integrando, e dunque $q(\tau)$, sia identicamente nullo su $[t, T]$. Ma $q(\tau)$ è l'uscita all'istante $\tau > t$ quando lo stato iniziale è u , per cui quando lo stato iniziale (ossia all'istante t) è u oppure cu l'uscita è identicamente nulla, e dunque gli stati del sottospazio $\{u\}$ sono inosservabili. Dunque è assurdo che G_O sia singolare per ogni $T > t$ ed è necessario che sia non singolare per qualche $T > t$.

Si noti che il grammiano di osservabilità poteva essere scritto, sempre in virtù della stazionarietà del sistema come:

$$G_O = \int_0^T e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau,$$

e che spesso si usa anche la forma:

$$\bar{G}_O = \int_0^T e^{-A^T t} C^T C e^{-A t} dt.$$

Esercizio 5.9. Utilizzando le matrici grammiane, provare che una realizzazione è raggiungibile (osservabile) se e solo se la matrice di raggiungibilità (osservabilità) ha rango pieno.

Soluzione. Sia G_R singolare. Allora esiste un vettore v non nullo per cui

$$\varphi(t) = v^T e^{At} B \equiv 0,$$

ossia tale che:

$$\varphi(t)|_{t=0} = v^T B = 0$$

$$\dot{\varphi}(t)|_{t=0} = v^T AB = 0$$

$$\ddot{\varphi}(t)|_{t=0} = v^T A^2 B = 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi^{(n-1)}(t)|_{t=0} = v^T A^{n-1} B = 0.$$

Queste relazioni si possono scrivere in forma compatta:

$$v^T \begin{pmatrix} B & AB & A^2 B & \cdots & A^{n-1} B \end{pmatrix} = v^T \mathbf{R} = 0,$$

ed essendo $v \neq 0$ ciò comporta che \mathbf{R} sia singolare. Se viceversa \mathbf{R} è singolare allora esiste $v \neq 0$ tale che $v^T \mathbf{R} = 0$ e questo comporta, per il teorema di Cayley–Hamilton, che $v^T e^{At} B = 0$. Ma allora anche G_R deve essere singolare. La dimostrazione nel caso dell'osservabilità è analoga.

5.4. Alcune proprietà delle forme compagne

È facile verificare che l'autovettore destro di una matrice in forma canonica compagna raggiungibile:

$$A_{cR} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

corrispondente all'autovalore λ_i è:

$$u_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Si può anche verificare che l'autovettore sinistro corrispondente vale:

$$v_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^{n-1} + a_{n-1}\lambda_i^{n-2} + \cdots + a_2\lambda_i + a_1 \\ \lambda_i^{n-2} + a_{n-2}\lambda_i^{n-3} + \cdots + a_2 \\ \vdots \\ \lambda_i + a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per inciso si noti che $v_i = u_i^T M$ con:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

essendo M una matrice di Toeplitz. È poi ovvio che il vettore v_i così trovato è autovettore destro della matrice $A_{cO} = A_{cR}^T$ e u_i è autovettore sinistro, corrispondenti a λ_i .

Se poi A_{cR} ha tutti autovalori distinti, e quindi è diagonalizzabile, la matrice di trasformazione che la mette in forma canonica di Jordan è la matrice T tale che:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix},$$

che è una matrice di Vandermonde.

Se A_{cR} ha solo $r < n$ autovalori distinti, con molteplicità algebriche $\mu_i \geq 1$, allora associati a λ_i sono i seguenti autovettori generalizzati:

$$u_i^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}, \quad u_i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\lambda_i \\ 3\lambda_i^2 \\ \vdots \\ (n-1)\lambda_i^{n-2} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad u_i^{\mu_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} n-1 \\ \mu_i-1 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-\mu_i} \end{pmatrix},$$

come si verifica calcolando $(\lambda_i I - A_{c_R})^j u_i^j$, $i = 1, \dots, \mu_i$.

Si noti che le inverse delle matrici di raggiungibilità ed osservabilità scritte utilizzando le matrici in forma canonica compagna, sono date dalla stessa matrice di Toeplitz:

$$\mathbf{R}_{c_R}^{-1} = \begin{pmatrix} B_{c_R} & \cdots & A_{c_R}^{n-1} B_{c_R} \end{pmatrix} = \mathbf{O}_{c_O}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{c_O} \\ \vdots \\ C_{c_O} A_{c_O}^{n-1} \end{pmatrix} = M,$$

con M data dalla (5.10) e \mathbf{R}_{c_R} , \mathbf{O}_{c_O} le matrici di raggiungibilità ed osservabilità relative alle coppie (A_{c_R}, B_{c_R}) , (C_{c_O}, A_{c_O}) .

È ora facilmente dimostrabile che condizione necessaria e sufficiente affinché esista una matrice T che trasformi la generica realizzazione (A, B, C) in quella canonica raggiungibile $(A_{c_R}, B_{c_R}, C_{c_R})$ è che la coppia (A, B) sia raggiungibile. Sia infatti T tale che $TAT^{-1} = A_{c_R}$, $TB = B_{c_R}$, $CT^{-1} = C_{c_R}$, con $T^{-1} = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix}$. Ma allora:

$$B = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} B_{c_R} = t_n.$$

Inoltre si deve avere:

$$\begin{aligned} AT^{-1} &= \begin{pmatrix} At_1 & \cdots & At_n \end{pmatrix} = T^{-1} A_{c_R} = \\ &= \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -a_0 t_n & t_1 - a_1 t_n & \cdots & t_{n-1} - a_{n-1} t_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -a_0 B & t_1 - a_1 B & \cdots & t_{n-1} - a_{n-1} B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eguagliando il primo ed ultimo termine:

$$\begin{aligned} At_1 &= -a_0 B & t_1 &= A^{n-1} B + a_{n-1} A^{n-2} B + \cdots + a_1 B \\ At_2 &= t_1 - a_1 B & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ At_{i+1} &= t_i - a_i B & \Rightarrow & t_i = A^{n-i} B + a_{n-1} A^{n-i-1} B + \cdots + a_i B \\ \vdots & & \vdots & \\ At_n &= AB = t_{n-1} - a_{n-1} B & t_{n-1} &= AB + a_{n-1} B \\ & & t_n &= B \end{aligned}$$

per cui

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} B & \cdots & A^{n-1} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{R}M,$$

con \mathbf{R} la matrice di raggiungibilità relativa alla coppia (A, B) e M la matrice di Toeplitz (5.10). Dunque T esiste se e solo se \mathbf{R} è invertibile. Poiché, come precedentemente visto $M^{-1} = \mathbf{R}_{c_R}$, risulta che $T = \mathbf{R}_{c_R} \mathbf{R}^{-1}$, $T^{-1} = \mathbf{R} \mathbf{R}_{c_R}^{-1}$.

In maniera analoga, considerando le coppie (A^T, C^T) e $(A_{c_R} = A_{c_O}^T, B_{c_R} = C_{c_O}^T)$, si può provare che condizione necessaria e sufficiente affinché esista una matrice T che trasformi la generica realizzazione (A, B, C) in quella canonica osservabile $(A_{c_O}, B_{c_O}, C_{c_O})$ è che la coppia (A, B) sia osservabile. Si ricava così che $T = \mathbf{O}_{c_O} \mathbf{O}^{-1}$, $T^{-1} = \mathbf{O} \mathbf{O}_{c_O}^{-1}$.

Si vuole infine notare che l'inversa delle matrici A_{c_R} , data dalla (5.9), e $A_{c_O} = A_{c_R}^T$ esiste se e solo se $a_0 \neq 0$ (basti pensare alla forma canonica di Jordan per convincersene). In tal caso:

$$A_{c_R}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{1}{a_0} \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{c_O}^{-1} = A_{c_R}^{-T}.$$

In altre parole le strutture di $A_{c_R}^{-1}$, $A_{c_O}^{-1}$ sono simili a quelle di A_{c_R} , A_{c_O} , ma con la prima riga e la prima colonna rispettivamente ottenute spostando verso sinistra e verso l'alto e dividendo per a_0 l'ultima riga di A_{c_R} e l'ultima colonna di A_{c_O} .

5.5. Sul calcolo di poli e zeri

Nel caso di sistemi ad un ingresso ed un'uscita è noto che condizione necessaria e sufficiente perché s sia un polo della funzione di trasferimento $W(s)$ è che risulti:

$$|sI - A| = 0,$$

mentre perché z un suo zero è necessario e sufficiente che sia verificata la seguente condizione:

$$\begin{vmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{vmatrix} = 0. \quad (5.11)$$

Quest'ultima condizione si ricollega all'espressione della funzione di trasferimento $W(s)$ data nella proprietà P. 13.27 del capitolo 1, e qui ripetuta per chiarezza:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\begin{vmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{vmatrix}}{|sI - A|}, \quad (5.12)$$

e si comprende meglio perché per determinare gli zeri di $W(s)$ occorre trovare le soluzioni della (5.11).

Esercizio 5.10. Determinare gli zeri e la funzione di trasferimento del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix} x + 3u. \end{aligned}$$

Soluzione. Utilizzando la (5.11), gli zeri sono le radici dell'equazione:

$$\begin{vmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-5 & 1 & -3 \\ 2 & s+1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3s^2 - 20s + 31 = 0,$$

ossia $s = \frac{10}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$. Poiché poi:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-5 & 1 \\ 2 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 - 4s - 7,$$

si ha:

$$W(s) = \frac{3s^2 - 20s + 31}{s^2 - 4s - 7}.$$

Esercizio 5.11. Dato il sistema ad un ingresso ed una uscita:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

mostrare che se l'ingresso è una controreazione dallo stato, ossia una controreazione statica $u = Fx + v$, allora gli zeri della funzione di trasferimento non cambiano, mentre cambiano i poli.

Soluzione. Gli zeri sono le soluzioni della (5.11). Poiché:

$$x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s),$$

si ricava:

$$u(s) = F(sI - A)^{-1}Bu(s) + v(s),$$

e dunque:

$$u(s) = \frac{1}{1 - F(sI - A)^{-1}B}v(s).$$

Infine:

$$y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s) = \frac{C(sI - A)^{-1}B + D}{1 - F(sI - A)^{-1}B}v(s),$$

ossia:

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{C(sI - A)^{-1}B + D}{1 - F(sI - A)^{-1}B} = \frac{\begin{vmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{vmatrix}}{|sI - A| |1 - F(sI - A)^{-1}B|},$$

per cui gli zeri non cambiano, ma i poli sì.

Esercizio 5.12. Cambiare i poli della funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{3s^2 - 5s + 2}{s^3 - 3s + 4}$$

mediante un ingresso $u = Fx + v$. Verificare che gli zeri non vengono modificati.

Soluzione. Sia:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \end{pmatrix},$$

una realizzazione della $W(s)$. Posto $F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$, si ha la nuova matrice dinamica:

$$\tilde{A} = A + BF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_1 - 4 & f_2 + 3 & f_3 \end{pmatrix},$$

e si impone ad esempio che i poli siano scelti secondo la nota configurazione di Butterworth. Essa corrisponde a scegliere gli n poli come soluzioni dell'equazione:

$$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2n} = (-1)^{n+1},$$

ove ω_0 indica la distanza delle radici dall'origine. I polinomi caratteristici di Butterworth risultanti da tale scelta sono:

$$p_1(z) = z + 1,$$

$$p_2(z) = z^2 + \sqrt{2}z + 1,$$

$$p_3(z) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1,$$

$$p_4(z) = z^4 + 2.613z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 + 2.613z + 1,$$

e così via, ove $z = \frac{s}{\omega_0}$.

Scelto ad esempio $\omega_0 = 1$, nel nostro caso:

$$p_3(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1,$$

e dunque si deve imporre:

$$\begin{aligned} |sI - (A + BF)| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -f_1 + 4 & -f_2 - 3 & s - f_3 \end{vmatrix} = \\ &= s^3 - f_3 s^2 - (f_2 + 3)s - f_1 + 4 = s^3 + 2s^2 + 2s + 1, \end{aligned}$$

ottenendo $F = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$. Infine si verifica che gli zeri non sono cambiati. Utilizzando la (5.11):

$$\begin{vmatrix} sI - A - BF & -B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 1 & 2 & s+2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(3s^2 - 5s + 2) = 0,$$

che, a parte il segno, è proprio il numeratore della $W(s)$.

5.6. Esercizi e problemi

Esercizio 5.13. Assegnato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

si effettui la scomposizione di Kalman e si studi l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi naturali.

Soluzione. Per la scomposizione di Kalman si calcola:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ 0 & 0 & * & \\ 5 & -9 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 15 & 0 & 0 \\ & & * & \end{pmatrix};$$

ove “*” indica altre colonne o righe (non calcolate poiché è chiaro che esse introducono altre colonne o righe dipendenti dalle precedenti). Esse hanno entrambe rango pari a due. Dunque

$$\mathcal{P} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ovviamente $\chi_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\chi_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\chi_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\chi_4 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, sicché considerata la matrice di trasfor-

mazione T tale che

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{-T},$$

si ricava:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$CT^{-1} = (0 \quad 6 \quad 0 \quad 1).$$

Quindi il modo corrispondente a

- $\lambda = -2$ è eccitabile e non osservabile;
- $\lambda = -1$ è eccitabile e osservabile;
- $\lambda = -3$ non è eccitabile e non è osservabile;
- $\lambda = 3$ non è eccitabile ed è osservabile.

Esercizio 5.14. Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \quad 0 \quad 3)x$$

studiarne le proprietà strutturali ed effettuare la scomposizione di Kalman. Inoltre verificare se e come è possibile modificare, mediante un controllo del tipo $u = kx$, l'autovalore $\lambda = 2$ e darne una spiegazione.

Soluzione. Le matrici di raggiungibilità ed osservabilità sono:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

per cui

$$\mathcal{P} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si ha quindi che $\mathcal{P} = \mathcal{I} = \chi_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Inoltre $\chi_2 = \chi_3 = \{0\}$, mentre $\chi_4 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. La matrice di trasformazione che mette

in luce la scomposizione di Kalman è dunque l'identità, ossia A , B , C sono già in forma canonica. Si vede allora immediatamente che la dinamica corrispondente a $\lambda = 2$ non è modificabile perché non raggiungibile.

Problema 5.1. Studiare dal punto di vista della raggiungibilità la seguente rete elettrica:

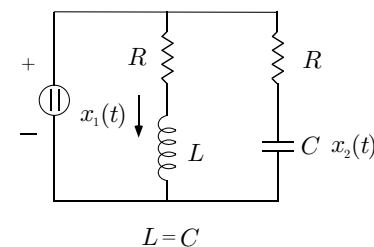


Figura 5.5

Problema 5.2. Studiare, rispetto ai parametri, la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema rappresentato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Problema 5.3. Mostrare che se uno stato del sistema (5.1) è raggiungibile allora può essere raggiunto in un intervallo di tempo finito qualsiasi (si è soliti indicare questo fatto dicendo che la raggiungibilità dallo stato zero per un sistema del tipo (5.1) è *differenziale*).

Problema 5.4. Mostrare che l'insieme degli stati raggiungibili del seguente sistema:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(k)$$

è dato da tutti i vettori proporzionali ad

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

mentre qualsiasi stato $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è controllabile in un solo passo allo stato zero mediante l'ingresso $u(k) = -(2a + b)\delta(k)$.

Problema 5.5. Mentre il duale della raggiungibilità di uno stato (dall'origine, utilizzando ingressi passati) è l'osservabilità di uno stato (a partire dalle uscite future), il duale della controllabilità di uno stato (nell'origine, usando ingressi futuri) è la ricostruibilità di uno stato (usando uscite passate). Per un sistema a tempo discreto queste due proprietà coincidono se e solo se la matrice dinamica A è non singolare. Dato dunque il seguente sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(k) + Bu(k) \\ y(k) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(k), \end{aligned}$$

mostrare che non tutti gli stati sono osservabili, poiché

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

e che, in effetti, dalle uscite future (ossia da $k = 0$ in poi) non è possibile determinare lo stato iniziale $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$. In particolare mostrare che si ha:

$$\begin{aligned} y(0) &= x_1(0) + x_2(0), \\ y(1) &= 2x_1(0) + 2x_2(0), \\ &\vdots \\ y(k) &= 2^{k-1}x_1(0) + 2^{k-1}x_2(0), \end{aligned}$$

per cui è possibile determinare (osservare) solo una combinazione lineare delle componenti di x_0 , ossia solo $x_1(0) + x_2(0)$. Inoltre si faccia vedere che viceversa, utilizzando le uscite passate, è possibile determinare (ricostruire) lo stato iniziale e che, se si disponesse di

$$y(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(-1) \\ x_2(-1) \end{pmatrix} = x_1(-1) + x_2(-1),$$

si potrebbe determinare

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(-1) \\ x_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(-1) + x_2(-1) \\ x_1(-1) + x_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(-1) \\ y(-1) \end{pmatrix}.$$

Verificare infine che, se le uscite disponibili sono quelle per $k \geq 0$, è possibile determinare lo stato futuro (ma non x_0 , come già dimostrato) mostrando che $\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = y(k)$.

Problema 5.6. Mostrare che se la matrice di raggiungibilità \mathbf{R} è singolare allora esiste uno stato \bar{x} non raggiungibile.

Soluzione. Essendo \mathbf{R} singolare, esiste un vettore $\bar{x} \neq 0$ tale che $\bar{x}^T \mathbf{R} = 0$. Questo, assieme al teorema di Cayley-Hamilton, implica che $\bar{x}^T A^k B = 0$, $\forall k \geq 0$. Se ora per assurdo \bar{x} fosse raggiungibile, dovrebbero esistere un istante finito \bar{t} ed un segmento di ingresso $\bar{u}|_{[0, \bar{t}]}$ tali che:

$$\bar{x} = \int_0^{\bar{t}} e^{A(\bar{t}-\tau)} B \bar{u}(\tau) d\tau. \quad (5.13)$$

Ma

$$e^{A(\bar{t}-\tau)} B = B + (\bar{t}-\tau)AB + \dots + \frac{(\bar{t}-\tau)^k}{k!} A^k B + \dots$$

per cui

$$\bar{x}^T \bar{x} = \int_0^{\bar{t}} \bar{x}^T e^{A(\bar{t}-\tau)} B \bar{u}(\tau) d\tau = 0,$$

e questo contraddice che $\bar{x} \neq 0$. Dunque è assurdo che valga la (5.13), ossia che \bar{x} sia raggiungibile.

6. Modelli ingresso–uscita lineari e rappresentazioni con lo stato

In questo capitolo vengono svolti alcuni esercizi inerenti la teoria dell’associazione dello stato ad un sistema connesso, lineare, stazionario a dimensione finita.

Come è noto tale teoria è fortemente legata alla teoria strutturale dei sistemi lineari che verrà trattata nel capitolo 6.

6.1. Richiami sulla teoria dell’associazione di una rappresentazione con lo stato e della realizzazione

Per quanto riguarda la teoria dell’associazione di una rappresentazione con lo stato ad un sistema connesso, ossia ad un sistema per il quale il legame ingresso–uscita è descritto da un funzionale del tipo

$$y(t) = \int_{-\infty}^t K(t - \tau)u(\tau) d\tau, \quad (6.1)$$

dove $K(\cdot)$ è una matrice $p \times m$ di funzioni detta *nucleo dell’integrale di convoluzione* o *matrice delle risposte impulsive*, è noto che una rappresentazione lineare stazionaria, a dimensione finita, regolare e implicita del sistema descritto dalla (6.1) è costituita dalle equazioni (5.1), o equivalentemente dalle quattro matrici A , B , C , D che in essa compaiono.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (6.2)$$

Le matrici (A, B, C, D) costituiscono una *rappresentazione con lo stato* del sistema (6.1) se e solo se sono verificate le due seguenti condizioni:

$$Ce^{At}B + D\delta(t) = K(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (6.3)$$

$$\mathcal{P} + \mathcal{I} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} + \mathcal{N} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \mathbb{R}^n. \quad (6.4)$$

Nella (6.4) \mathcal{P} e \mathcal{I} indicano due importanti sottospazi, quello degli stati raggiungibili e quello degli stati inosservabili, che saranno più estesamente trattati nel capitolo 6. Le matrici

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix},$$

sono dette *matrice di raggiungibilità* e *matrice di osservabilità*, anch'esse trattate nel capitolo 6.

Per i sistemi a tempo discreto valgono considerazioni analoghe, avendo sostituito la prima di queste condizioni con

$$CA^{t-1}B + D\delta(t) = K(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (6.5)$$

Lo spazio di stato $X = \mathbb{R}^n$ associato a tale rappresentazione si dice poi *ridotto* ad ogni istante, ovvero la rappresentazione si dice *ridotta*, se e solo se risulta:

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \{0\}. \quad (6.6)$$

Ne segue in particolare che in una rappresentazione ridotta risulta:

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \mathbb{R}^n. \quad (6.7)$$

Passando alle *condizioni di esistenza* di una rappresentazione del tipo (6.2) per il sistema (6.1), si ricorda che esistono quattro matrici $A, B, C,$

D che soddisfano le (6.3), (6.4), e che quindi costituiscono una rappresentazione con lo stato del sistema (6.1) associato al nucleo $K(t)$, se e solo se esistono quattro matrici A, B, C, D per cui vale la (6.3) ovvero la (6.5), secondoché il sistema sia a tempo continuo o a tempo discreto.

Pertanto la (6.3) (ovvero la (6.5)) è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una rappresentazione con lo stato del sistema (6.1).

È ovvio che data una matrice $W(s)$ di funzioni di trasferimento proprie di cui si vuole determinare una rappresentazione, poiché $W(s) = D + K(s)$, con D matrice costante $p \times m$ rappresentante il legame diretto ingresso-uscita, il problema si riduce alla determinazione delle tre matrici A, B, C tali che, assieme a D soddisfano le (6.3), (6.4).

Il problema della *realizzazione* è poi quello dell'esistenza e del calcolo di una rappresentazione con lo stato che permetta di associare ad un sistema connesso il seguente legame ingresso-uscita:

$$y(t) = \int_{t_0}^t K(t-\tau) u(\tau) d\tau,$$

in cui $K(t)$ è una matrice $p \times m$ di funzioni. Ciò comporta che il sistema è strettamente causale ($y(t)$ non dipende infatti da $u(t)$).

La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una realizzazione è data dalla (6.3) in cui $D = 0$, ovvero in termini di trasformata di Laplace se e solo se la trasformata $K(s)$, è una matrice di funzioni razionali strettamente proprie, ovvero in termini di matrice di Hankel H se e solo se il rango di H è finito. Queste condizioni sono tra loro equivalenti.

La condizione (6.3) si traduce nel fatto che tutti gli elementi di $K(t)$ devono essere combinazioni lineari di termini del tipo $\frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t}$, come può essere facilmente constatato per ispezione. La condizione data su $K(s)$ poi si traduce nel fatto che si può scrivere:

$$K(s) = \frac{B_{n-1}s^{n-1} + \cdots + B_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}, \quad (6.8)$$

per cui una terna di matrici soddisfacente la (6.3), ove $D = 0$ può ottenersi nel modo seguente:

$$\begin{aligned}A_{c_R} &= \begin{pmatrix} 0 & I_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 I_m & -a_1 I_m & -a_2 I_m & \cdots & -a_{n-1} I_m \end{pmatrix}, \quad B_{c_R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{pmatrix}, \\ C_{c_R} &= \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_{n-1} \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (6.9)$$

dove i blocchi 0 ed I_m hanno dimensione $m \times m$, essendo m il numero di ingressi. Questa rappresentazione è detta *forma canonica compagna raggiungibile*. Questa dizione è dovuta al fatto che la coppia (A_{cR}, B_{cR}) è raggiungibile, come sarà spiegato nel capitolo 6.

Alternativamente si possono costruire le seguenti matrici:

$$A_{cO} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 I_p \\ I_p & 0 & \cdots & 0 & -a_1 I_p \\ 0 & I_p & \cdots & 0 & -a_2 I_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_p & -a_{n-1} I_p \end{pmatrix}, \quad B_{cO} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

$$C_{cO} = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad I_p),$$

in cui blocchi 0 ed I_p hanno dimensione $p \times p$, con p il numero di uscite. Questa rappresentazione è detta *forma canonica compagna osservabile*, poiché la coppia (C_{cR}, A_{cR}) è osservabile, come spiegato nel capitolo 6.

La verifica del fatto che $K(s)$ sia una matrice razionale strettamente propria può essere effettuata osservando semplicemente che ciascun elemento sia un rapporto di polinomi avente grado del numeratore inferiore a quello del denominatore.

Riguardo infine la condizione (come detto equivalente alle precedenti) che la *matrice di Hankel*:

$$H = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \cdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots \\ S_2 & S_3 & S_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

ove

$$S_i = \frac{d^i}{dt^i} K(t) \Big|_{t=0}, \quad (6.12)$$

abbia rango finito, si noti che i coefficienti S_i sono pari ai coefficienti della serie di Mc Laurin di $K(t)$:

$$K(t) = S_0 + S_1 t + S_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \quad (6.13)$$

ovvero pari ai coefficienti della serie di Laurent

$$K(s) = S_0 \frac{1}{s} + S_1 \frac{1}{s^2} + S_2 \frac{1}{s^3} + \cdots \quad (6.14)$$

Si osservi inoltre che supponendo verificata la (6.3) e ricordando la definizione dell'esponenziale di matrice:

$$S_i = C A^i B, \quad \forall i \geq 0. \quad (6.15)$$

Ne segue in particolare che se due terne di matrici (A_1, B_1, C_1) e (A_2, B_2, C_2) soddisfano entrambe la (6.3) risulta necessariamente:

$$C_1 A_1^i B_1 = C_2 A_2^i B_2, \quad \forall i \geq 0, \quad (6.16)$$

e viceversa. In effetti se esiste una trasformazione T per cui $A_2 = T A_1 T^{-1}$, $B_2 = T B_1$, $C_2 = C_1 T^{-1}$, allora deve essere:

$$C_2 A_2^i B_2 = C_1 T^{-1} (T A_1 T^{-1})^i T B_1 = C_1 T^{-1} T A_1^i T^{-1} T B_1 = C_1 A_1^i B_1.$$

Questo fatto, come sarà meglio messo in evidenza nel seguito, è legato al fatto che una trasformazione dello spazio di stato lascia invariata la funzione di trasferimento. Le quantità $C A^i B$ sono chiamate *parametri di Markov*, che sono dunque gli stessi per la classe di rappresentazioni associabili ad un dato sistema.

Inoltre la matrice di Hankel (6.11) assume, in virtù della (6.15), la forma:

$$H = \begin{pmatrix} CB & CAB & CA^2 B & \cdots \\ CAB & CA^2 B & CA^3 B & \cdots \\ CA^2 B & CA^3 B & CA^4 B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & AB & A^2 B & \cdots \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

Le considerazioni riguardo i sistemi a tempo discreto sono analoghe. Le condizioni equivalenti di esistenza di una realizzazione sono la condizione (6.5), ovvero che la trasformata $K(z)$ sia una matrice di funzioni razionali strettamente proprie, ovvero che la matrice di Hankel abbia rango finito con

$$S_i = K(i+1). \quad (6.18)$$

Se ora si dispone di una rappresentazione *non* ridotta del sistema (6.1), data dalle matrici (A, B, C, D) , se ne può ottenere una *ridotta* considerando la trasformazione (5.5), ottenendo così le relazioni (5.6). Le matrici (A_{22}, B_2, C_2, D) così determinate costituiscono una rappresentazione *ridotta* del sistema (6.1). Essa è anche *minima* poiché la dimensione r del suo spazio di stato è la più piccola possibile. Infine poiché i parametri di Markov (6.15) sono pari ad $S_i = C_2 A_{22}^i B_2$, dalla (6.17) si comprende che

$$\varrho(H) = r, \quad (6.19)$$

ove ϱ indica il rango, per cui l'ordine delle rappresentazioni ridotte può essere calcolato a partire dal nucleo $K(t)$ senza che una di queste debba essere esplicitamente costruita.

Poiché una *realizzazione* di $K(t)$ soddisfa la (6.3), è chiaro che ogni rappresentazione è anche una realizzazione, mentre è possibile provare che il viceversa è vero soltanto per le realizzazioni minime, le quali sono anche rappresentazioni ridotte.

Qualora si disponga di una realizzazione (A, B, C) e si voglia passare ad una rappresentazione, occorre applicare la trasformazione (5.2), ricavando così le matrici (5.3). Le matrici A_{11} , B_1 , C_1 , $D = 0$ costituiscono la rappresentazione cercata. Naturalmente nulla assicura che sia ridotta.

6.2. Nuclei e rappresentazioni

Assegnati un nucleo $K(t)$ e una terna di matrici (A, B, C) , la verifica che quest'ultima costituisca una rappresentazione del primo va effettuata applicando le (6.3), (6.4), che implicano il calcolo di due sottospazi, immagine e nucleo di opportune matrici.

Esercizio 6.1. Assegnato il nucleo $K(t) = 3e^{-2t}$, $t \in [0, \infty)$, e le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix},$$

verificare che le matrici $A, B, C, D = 0$ costituiscono una rappresentazione del sistema connesso individuato da $K(t)$.

Soluzione. Si inizia col verificare che la (6.3) è verificata:

$$Ce^{At}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e^{-2t}.$$

Passando alla (6.4), si ha:

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{N} \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determinate così delle basi nei sottospazi di interesse, la (6.4) richiede che questi vengano sommati. Ricordando che per definizione la somma di due sottospazi Y_1, Y_2 è il sottospazio $Y_1 + Y_2 := \{y \mid y = y_1 + y_2, y_1 \in Y_1 \text{ e } y_2 \in Y_2\}$, il sottospazio somma è quello generato dall'unione dei vettori di base degli addendi. La (6.4) si riduce pertanto a verificare che risulti:

$$\text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

Ma tale condizione è soddisfatta perché i vettori trovati sono linearmente indipendenti. Pertanto le matrici date costituiscono una rappresentazione del sistema individuato da $K(t)$. Si osservi tuttavia che tale rappresentazione non è ridotta poiché la (6.6) non è soddisfatta.

Esercizio 6.2. Assegnato il nucleo $K(t) = 2e^t + e^{-t} - 2$, $t \in [0, \infty)$, e le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

verificare che le matrici $A, B, C, D = 0$ costituiscono una rappresentazione del sistema connesso individuato da $K(t)$.

Soluzione. La matrice e^{At} vale (cfr. esercizio 3.1):

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^t + e^{-t} - 2 & e^t + e^{-t} - 2 & e^t - 1 \\ -2e^t + 2 & -e^t + 2 & -e^t + 1 \\ -2e^{-t} + 2 & -2e^{-t} + 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

È allora immediato constatare che la condizione (6.3) è soddisfatta. Passando alla (6.4), si tratta di verificare che risulti:

$$\mathcal{P} + \mathcal{I} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \mathcal{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^3.$$

Ma tale condizione è soddisfatta poiché entrambe le matrici trovate sono non singolari. Ne segue che sono soddisfatte anche le (6.6), (6.7) e quindi le matrici assegnate costituiscono una rappresentazione ridotta.

Esercizio 6.3. Assegnate le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0,$$

studiare se possono costituire la rappresentazione di un sistema connesso del tipo (6.1).

Soluzione. È chiaro che in questo caso la condizione (6.3) perde di significato, poiché non è assegnato alcun nucleo. Quindi resta da verificare soltanto la (6.4). Si ottiene:

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -6 & 8 & -22 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & -4 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Per determinare una base nell'immagine di questa matrice si possono prendere le sue colonne linearmente indipendenti, ovvero, equivalentemente, loro combinazioni lineari ottenute applicando le trasformazioni elementari, applicate alla matrice trovata. In tal modo, infatti, i vettori di base risultano avere un'espressione più semplice. Si ottiene allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente questo procedimento non è unico. Le prime quattro colonne di questa matrice costituiscono una base per il sottospazio immagine cercato, che pertanto coincide con \mathbb{R}^4 . Allo stesso risultato si arrivava considerando come base quella costituita dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

costituenti la prima e seconda colonna (cambiata di segno), dal vettore

$$v_3 = \frac{1}{2} [c_5 - 2v_2] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2v_2 \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ove c_5 indica la quinta colonna, e dal vettore

$$v_4 = -\frac{1}{2} [c_6 - 2v_1 + 6v_3 + 4v_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con $c_6 = (2 \ -6 \ -4 \ -2)^T$ la sesta colonna. Questo risultato assicura da solo che la (6.4) è soddisfatta e quindi che le matrici assegnate rappresentano un sistema connesso. Tale rappresentazione potrebbe essere ridotta, poiché la (6.7) è a sua volta soddisfatta; per la verifica della (6.6) occorre appurare se abbia rango pieno la matrice:

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & \vdots & \end{pmatrix}$$

(le altre righe di questa matrice sono ovviamente nulle).

Questa condizione non è evidentemente soddisfatta e quindi la rappresentazione assegnata non è ridotta.

6.3. Costruzione di una rappresentazione a partire da un nucleo assegnato

Se un nucleo assegnato soddisfa le condizioni di esistenza di una rappresentazione (6.2), le matrici che verificano la (6.3) possono essere costruite con le (6.9) o (6.10). Tale terna di matrici costituisce assieme alla matrice $D = 0$, in generale, soltanto una realizzazione del nucleo dato, non una rappresentazione. Per ottenere quest'ultima occorre considerare la trasformazione di coordinate definita dalla matrice (5.2). La verifica del fatto che il nucleo assegnato soddisfa le condizioni per l'esistenza delle rappresentazioni (6.2) può essere eseguita, qualora non sia immediata, tramite la matrice di Hankel.

Esercizio 6.4. Costruire una rappresentazione a partire dal nucleo $K(s) = \frac{5s+3}{s^3+2s^2+4s+2}$.

Soluzione. Chiaramente $K(s)$ è una funzione razionale strettamente propria, per cui $D = 0$ e si possono applicare, ad esempio, le (6.9) ottenendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perché le matrici così trovate costituiscano una rappresentazione, occorre che sia soddisfatta la (6.4). Si nota immediatamente che la matrice:

$$\begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango pieno. Pertanto tali matrici costituiscono una rappresentazione.

Esercizio 6.5. Determinare una rappresentazione per il sistema individuato dal nucleo $K(s) = \left(\frac{1}{s+1} \quad \frac{1}{s+2} \right)$.

Soluzione. Si tratta di una funzione razionale strettamente propria, riscrivibile nella forma:

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+2 & s+1 \end{pmatrix}}{s^2+3s+2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}}{s^2+3s+2}.$$

Conviene applicare le (6.10), poiché danno luogo in questo caso ($p = 1 < m = 2$) ad una realizzazione di ordine inferiore. Si ottiene così:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0,$$

e si verifica immediatamente che costituiscono una rappresentazione ridotta del sistema assegnato, in quanto è soddisfatta la (6.4).

Esercizio 6.6. Determinare la rappresentazione per il sistema individuato dal nucleo:

$$K(s) = \frac{1}{d(s)} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right],$$

con $d(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$.

Soluzione. Applicando ad esempio le (6.10) si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per verificare la (6.4) si calcolano:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \dots \dots \dots =$$

$$= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{N} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & * \\ 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & * & & * \\ & & & & & \vdots \end{pmatrix} = \{0\},$$

in cui “*” indica quantità genericamente non nulle; si noti che non si è completato il calcolo delle altre colonne e righe delle matrici in quanto per la prima è chiaro che la 1^a, 3^a e 5^a componente sono sempre nulle, mentre per la seconda si sono ottenute sei righe linearmente indipendenti (e dunque si è avuta una matrice a rango pieno).

Poiché la (6.4) non è soddisfatta le matrici trovate assieme a $D = 0$ costituiscono solo una realizzazione. Per estrarne una rappresentazione si costruisce la matrice (5.2):

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui la matrice di trasformazione vale:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e dunque:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -\frac{18}{7} & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{3}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{7} & \frac{40}{49} & -\frac{3}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{7} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti la struttura diagonale a blocchi della matrice TAT^{-1} e quella a blocchi di TB . Pertanto la rappresentazione cercata è formata dalle seguenti matrici:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -6 & -\frac{18}{7} & -6 \\ 2 & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{8}{7} & \frac{40}{49} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{7} & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.7. Si supponga nota per un sistema lineare stazionario a tempo discreto con un ingresso e due uscite la risposta forzata riportata nei seguenti grafici.

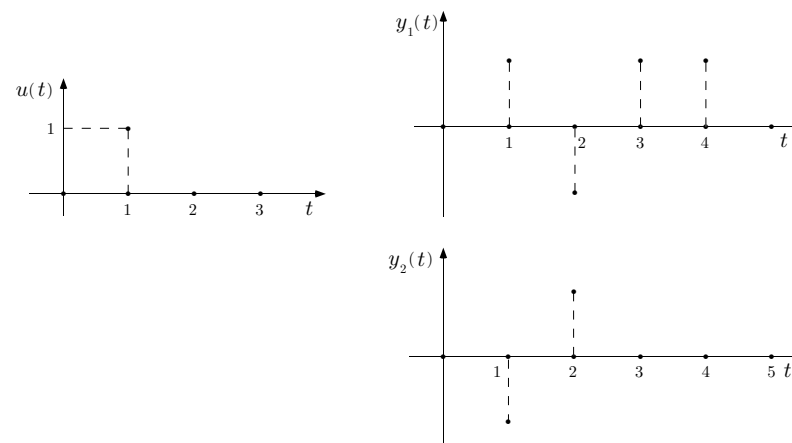


Figura 6.1

Determinare l'ordine delle realizzazioni minime del sistema che ammette la risposta forzata assegnata.

Soluzione. Poiché il sistema è lineare stazionario, la risposta all'ingresso indicato (un impulso traslato di 1) è la risposta impulsiva traslata di 1. Dunque la matrice delle risposte impulsive $W(k)$ è numericamente determinabile dai grafici, prendendo le coppie di valori $\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix}$ per $k \geq 1$. Ora l'ordine delle realizzazioni minime coincide con il rango della matrice di Hankel, in cui gli elementi sono dati dalla (6.18), in cui $K(k) = W(k)$. Risulta quindi per semplice ispezione delle figure:

$$H = \begin{pmatrix} -1 & \vdots & 1 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & \vdots & \cdots \\ 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & & 1 & & 0 & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & & 0 & & \ddots & & & & \\ 0 & & 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & & & & & \\ 0 & & & & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

La dimensione cercata è dunque pari a tre. Una sua realizzazione si può ricavare determinando innanzitutto la funzione di trasferimento

$$W(z) = \begin{pmatrix} y_1(z) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \\ y_2(z) = -1 + \frac{1}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z^3} \begin{pmatrix} -z^2 + z + 1 \\ z^2 \end{pmatrix} = D + K(z),$$

in quanto, come detto, i grafici danno la risposta impulsiva traslata di 1 (quindi per il calcolo delle $y_i(z)$ si considerano i valori $y_i(k)$ per $k \geq 1$).

Dunque $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, mentre utilizzando la (6.9) per avere una realizzazione per $K(z)$ (più adatta della (6.10) in quanto $m = 1 < p = 2$), si trova:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni del sistema sono dunque:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ x_3(k+1) &= u(k) \\ y_1(k) &= x_1(k) + x_2(k) - x_3(k) + u(k) \\ y_2(k) &= x_3(k) - u(k) \end{aligned}$$

da cui è facile trovare il relativo schema di *simulazione*.

6.4. Costruzione di una rappresentazione ridotta a partire da una assegnata

La riduzione di una rappresentazione assegnata può essere ottenuta mediante la matrice (5.5). Qualora invece interessi soltanto la determinazione dell'ordine delle rappresentazioni ridotte si può applicare direttamente la (6.19), costruendo la matrice di Hankel a partire dal nucleo assegnato.

Esercizio 6.8. Determinare una rappresentazione ridotta per il sistema dell'esercizio 6.1.

Soluzione. La matrice T^{-1} , costruita secondo la (5.5), e l'inversa T sono:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto applicando la (5.6) si ottiene:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione ridotta cercata è quindi:

$$A_{22} = -2, \quad B_2 = 3, \quad C_2 = 1.$$

Esercizio 6.9. Si determini una rappresentazione ridotta per il sistema la cui rappresentazione è stata data nell'esercizio 6.3.

Soluzione. Prendendo in considerazione la matrice $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix}$ calcolata per

l'esercizio 6.3, di rango 1 e nullità 3, si trova che una base nel suo nucleo è formata dai vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto si costruisce la matrice (5.5) e la sua inversa:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ottenendo:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione ridotta è pertanto:

$$A_{22} = 0, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Esercizio 6.10. Si determini l'ordine delle rappresentazioni ridotte del nucleo $K(t) = t + e^t$, $t \in [0, \infty)$.

Soluzione. Sviluppando $K(t)$ in serie di Mc Laurin si ottiene:

$$K(t) = 1 + 2t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Pertanto, confrontando con la (6.13), la matrice di Hankel (6.11) è

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & & \\ 1 & 1 & \ddots & & & \\ 1 & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}.$$

Poiché il rango di H è uguale a tre, dalla (6.19) segue che tale è anche l'ordine cercato delle rappresentazioni ridotte.

Esercizio 6.11. Si determini l'ordine delle rappresentazioni ridotte del sistema individuato dalla seguente terna di matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Ovviamente qui $D = 0$. La determinazione dell'ordine richiesto può essere fatta applicando le (6.11), (6.19). Prima però occorre accertarsi che queste matrici costituiscano effettivamente la rappresentazione di un sistema connesso, ossia che valga la (6.4); in caso contrario, infatti, la teoria che porta a stabilire la (6.19) cessa di essere valida. In questo caso risulta:

$$\mathcal{P} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^3,$$

per cui la (6.4) è soddisfatta. Costruendo la matrice di Hankel in base alla (6.15) si ottiene:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -4 & 6 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}.$$

Pertanto l'ordine delle rappresentazioni ridotte del sistema assegnato è pari a due.

6.5. Realizzazioni mediante il criterio di Gilbert

Sia $W(s) = D + K(s)$ una matrice di funzioni di trasferimento razionali proprie, relativa ad un sistema a più ingressi e più uscite, con r poli *distinti*. Qui $K(s)$ è data dalla (6.8) e può essere espansa in frazioni parziali:

$$W(s) = D + K(s) = D + \frac{R_1}{s - \lambda_1} + \cdots + \frac{R_r}{s - \lambda_r}, \quad R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) K(s).$$

Si indichi con ϱ_i il rango di R_i . Allora è noto dalla teoria che esiste sempre una fattorizzazione $R_i = C_i B_i$, con C_i, B_i matrici $p \times \varrho_i, \varrho_i \times m$, ossia tali che la dimensione interna sia proprio ϱ_i . Una realizzazione *minima* di $W(s)$ è allora data dalle matrici:

$$A_G = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\varrho_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_r I_{\varrho_r} \end{pmatrix}, \quad B_G = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{pmatrix}, \quad C_G = (C_1 \quad \cdots \quad C_r),$$

assieme alla matrice D , in cui I_{ϱ_i} sono matrici identità di dimensione $\varrho_i \times \varrho_i$.

La dimensione della realizzazione minima è pari a $n = \sum_{i=1}^r \varrho_i$.

Si sottolinea il fatto che questo criterio può essere applicato solo se i poli della funzione di trasferimento sono tutti distinti.

Esercizio 6.12. Determinare una realizzazione della funzione di trasferimento:

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{3s+4}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{-2s-3}{s+2} \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Si osserva che le funzioni di trasferimento non sono strettamente proprie a causa di un legame diretto ingresso-uscita. Determinando la matrice D ed applicando il criterio di Gilbert:

$$\begin{aligned} W(s) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} = D + \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} = \\ &= D + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{s+1} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{s+2}, \end{aligned}$$

come è facile calcolare:

$$R_1 = [(s+1)W(s)]_{s=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{-1}{s+2} & \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix}_{s=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = [(s+2)W(s)]_{s=-2} = \begin{pmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{2s+2}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} & 1 \end{pmatrix}_{s=-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\varrho_1 = \varrho(R_1) = 2, \varrho_2 = \varrho(R_2) = 1$. Dunque, considerate le fattorizzazioni:

$$R_1 = C_1 B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = C_2 B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ovviamente non uniche, si ha:

$$A_G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

oltre alla matrice D già calcolata. Si noti che $n = 3$ è la dimensione minima della realizzazione. Tale dimensione non si sarebbe potuta ottenere applicando le forme canoniche compagne, con le quali si ottengono realizzazioni di dimensione 4, riducibili poi a quella minima.

Esercizio 6.13. Determinare una realizzazione minima della funzione di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-9s-12}{s(s+1)(s-2)} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{10}{s(s-2)} \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $p(s) = s(s+1)(s-2)$, per cui i poli sono $\lambda_1 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_1 = 2$, tutti con molteplicità unitaria. Si può allora applicare il criterio di Gilbert. I residui sono:

$$R_1 = [sW(s)]_{s=0} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = [(s+1)W(s)]_{s=-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = [(s-2)W(s)]_{s=2} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

con $\mu_1 = \text{rank}(R_1) = 2, \mu_2 = \text{rank}(R_2) = 2, \mu_3 = \text{rank}(R_3) = 1$. La dimensione di una realizzazione minima è quindi $2 + 2 + 1 = 5$. La matrice

dinamica è $A = \text{diag} \{0, 0, -1, -1, 2\}$, mentre, considerate ad esempio le fattorizzazioni (con dimensione interna μ_i):

$$R_1 = C_1 B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = C_2 B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = C_3 B_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \quad 5),$$

si ricavano le matrici:

$$B = (B_1 \quad B_2 \quad B_3) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -5 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = (C_1 \quad C_2 \quad C_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

Esercizio 6.14. Determinare una realizzazione minima a coefficienti reali

$$\text{di } W(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+2}.$$

Soluzione. Ovviamente $p(s) = s^2 - 2s + 2$, e i poli $\lambda_{1,2} = 1 \pm j$ hanno molteplicità unitaria. Applicando il criterio di Gilbert, si calcolano i residui:

$$R_1 = [(s-1-j)W(s)]_{s=1+j} = \frac{1}{2} - j, \quad R_2 = [(s-1+j)W(s)]_{s=1-j} = \frac{1}{2} + j,$$

aventi ovviamente rango 1 e, ad esempio, con fattorizzazioni:

$$R_1 = C_1 B_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2j), \quad R_2 = C_2 B_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2j).$$

Dunque:

$$A = \begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ 0 & 1-j \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-2j \\ 1+j \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = 0,$$

sono una realizzazione a coefficienti non reali. Considerando però la trasformazione

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+j & 1-j \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+j}{2} & -\frac{j}{2} \\ \frac{1-j}{2} & \frac{j}{2} \end{pmatrix},$$

si ha:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad TB = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad CT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

6.6. La formula di Mason

Nel caso in cui tutti i sistemi, in cascata e in parallelo, di un grafo abbiano ingresso e uscita monodimensionali, è possibile risolvere il problema di determinare la funzione di trasferimento del grafo in modo rapido applicando la *formula di Mason*. A tale scopo si inizia col determinare tutti i cammini che, nel grafo assegnato, vanno dall'ingresso all'uscita e siano $P_i(s)$ le rispettive funzioni di trasferimento, pari al prodotto delle funzioni di trasferimento dei sottosistemi in cascata che costituiscono i rispettivi cammini (trasferenze).

Si individuano poi i cicli presenti nel grafo e se ne determinano le funzioni di trasferimento $L_j(s)$, pari al prodotto delle funzioni di trasferimento dei rami che costituiscono i rispettivi cicli (trasferenze). Questi cicli vengono suddivisi in cicli che non si toccano a due a due (ossia tali che presi due cicli, non hanno nodi in comune), a tre a tre, etc.

I cammini e i cicli vengono numerati e siano \mathcal{P} ed \mathcal{J}_1 l'insieme dei loro indici. Inoltre siano $\mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \dots$, gli insiemi di coppie, terne, etc., di indici dei cicli che a due a due, a tre a tre, etc., non si toccano. Infine siano $\mathcal{J}_1^i, \mathcal{J}_2^i, \mathcal{J}_3^i$, etc., gli insiemi di indici, coppie di indici, terne di indici, etc., appartenenti a $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$, etc., i cui cicli non hanno nodi in comune con l' i -esimo percorso. La funzione di trasferimento del grafo è allora data da

$$W(s) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{P}} P_i(s) \left[1 - \sum_{j \in \mathcal{J}_1^i} L_j(s) + \sum_{(j,k) \in \mathcal{J}_2^i} L_j(s)L_k(s) - \sum_{(j,k,h) \in \mathcal{J}_3^i} L_j(s)L_k(s)L_h(s) + \dots \right]}{1 - \sum_{j \in \mathcal{J}_1} L_j(s) + \sum_{(j,k) \in \mathcal{J}_2} L_j(s)L_k(s) - \sum_{(j,k,h) \in \mathcal{J}_3} L_j(s)L_k(s)L_h(s) + \dots} \quad (6.20)$$

Tale espressione è nota come formula di Mason. Si noti che se un insieme di indici \mathcal{J}_j è vuoto allora sono vuoti tutti gli altri insiemi \mathcal{J}_k con $k > j$, e nella formula di Mason non compaiono le corrispondenti sommatorie. Lo stesso dicasi per gli insiemi \mathcal{J}_j^i .

Esercizio 6.15. Determinare la funzione di trasferimento relativa al grafo in figura.

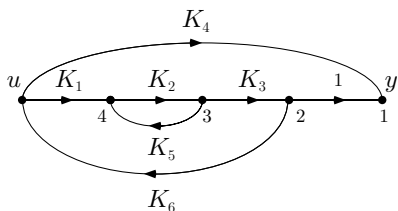


Figura 6.2

Soluzione. Si hanno due cammini ($\mathcal{P} = \{1, 2\}$), i quali hanno trasferenze:

$$P_1(s) = K_1(s)K_2(s)K_3(s),$$

$$P_2(s) = K_4(s).$$

I cicli sono due ($\mathcal{J}_1 = \{1, 2\}$) e hanno trasferenze:

$$L_1(s) = K_2(s)K_5(s),$$

$$L_2(s) = K_1(s)K_2(s)K_3(s)K_6(s).$$

Il primo cammino tocca entrambi i cicli mentre il secondo tocca solo il secondo ciclo; infine i due cicli si toccano. Dunque $\mathcal{J}_j = \emptyset$, $j \geq 2$, $\mathcal{J}_j^1 = \emptyset$, $j \geq 1$, e $\mathcal{J}_1^2 = \{1\}$, $\mathcal{J}_j^2 = \emptyset$, $j \geq 2$. Pertanto si ha:

$$W(s) = \frac{K_1K_2K_3 + K_4[1 - K_2K_5]}{1 - K_2K_5 - K_1K_2K_3K_6}.$$

Esercizio 6.16. Si determini la funzione di trasferimento relativa al grafo in figura.

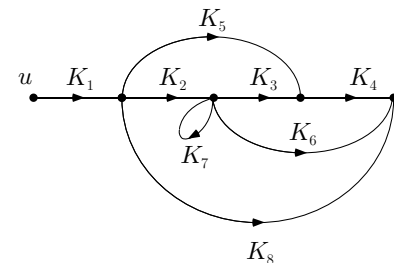


Figura 6.3

Soluzione. Si hanno tre cammini e quattro cicli:

$$\mathcal{P} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{J} = \{1, 2, 3, 4\},$$

e le trasferenze sono:

$$P_1(s) = K_1(s)K_2(s)K_3(s)K_4(s)$$

$$P_2(s) = K_1(s)K_5(s)K_4(s)$$

$$P_3(s) = K_1(s)K_2(s)K_6(s)$$

$$L_1(s) = K_7(s)$$

$$L_2(s) = K_3(s)K_4(s)K_6(s)$$

$$L_3(s) = K_5(s)K_4(s)K_8(s)$$

$$L_4(s) = K_2(s)K_3(s)K_4(s)K_8(s).$$

Ovviamente:

$$\mathcal{J}_2 = \{(1, 4)\}, \quad \mathcal{J}_j = \emptyset, \quad j \geq 3,$$

$$\mathcal{J}_j^1 = \emptyset, \quad j \geq 1,$$

$$\mathcal{J}_1^2 = \{1\}, \quad \mathcal{J}_j^2 = \emptyset, \quad j \geq 2,$$

$$\mathcal{J}_j^3 = \emptyset, \quad j \geq 1.$$

Pertanto:

$$W(s) = \frac{P_1(s) + P_2(s)[1 - L_1(s)] + P_3(s)}{1 - (L_1(s) + L_2(s) + L_3(s) + L_4(s)) + (L_1(s)L_2(s))}.$$

Esercizio 6.17. Si determini la funzione di trasferimento relativa al grafo in figura.

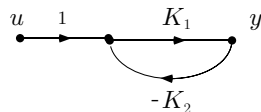


Figura 6.4

Soluzione. Ovviamente:

$$\mathcal{P} = \{1\}, \quad \mathcal{J}_1 = \{1\}, \quad P_1(s) = K_1(s), \quad L_1(s) = -K_1(s)K_2(s),$$

con $\mathcal{J}_j^1 = \emptyset, j \geq 1$. Dunque:

$$W(s) = \frac{P_1(s)}{1 - L_1(s)} = \frac{K_1(s)}{1 + K_1(s)K_2(s)}.$$

Esercizio 6.18. Si determini la funzione di trasferimento del grafo in figura.

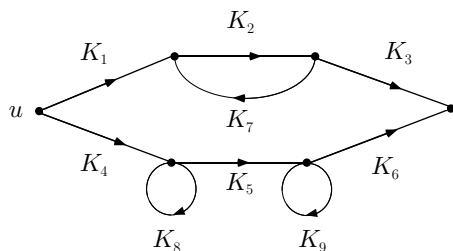


Figura 6.5

Soluzione. I cammini e i cicli sono:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{1, 2\}, & P_1(s) &= K_1(s)K_2(s)K_4(s), & L_1(s) &= K_2(s)K_7(s), \\ \mathcal{J}_1 &= \{1, 2, 3\}, & P_2(s) &= K_4(s)K_5(s)K_6(s), & L_2(s) &= K_8(s), \\ & & L_3(s) &= K_9(s). \end{aligned}$$

I cicli non si toccano:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}, \\ \mathcal{J}_3 &= \{(1, 2, 3)\}, \\ \mathcal{J}_j &= \emptyset, \quad j \geq 4, \end{aligned}$$

il primo cammino tocca solo il primo ciclo:

$$\mathcal{J}_1^1 = \{2, 3\}, \quad \mathcal{J}_2^1 = \{(2, 3)\}, \quad \mathcal{J}_j^1 = \emptyset, \quad j \geq 3,$$

mentre il secondo cammino tocca i cicli 2 e 3:

$$\mathcal{J}_1^2 = \{1\}, \quad \mathcal{J}_j^2 = \emptyset, \quad j \geq 2.$$

Si ottiene pertanto:

$$W = \frac{K_1 K_2 K_3 \left[1 - (K_8 + K_9) + (K_8 K_9) \right] + K_4 K_5 K_6 \left[1 - (K_2 K_7) \right]}{1 - (K_2 K_7 + K_8 + K_9) + (K_2 K_7 K_8 + K_2 K_7 K_9 + K_8 K_9) - (K_2 K_7 K_8 K_9)}.$$

6.7. Trasformazioni tra realizzazioni

Due qualsiasi realizzazioni (A_1, B_1, C_1) , (A_2, B_2, C_2) , genericamente non minime, dello stesso ordine n e corrispondenti alla stessa funzione di trasferimento (scalare), sono correlate da una trasformazione T univocamente determinata se valgono contemporaneamente le seguenti condizioni:

- 1) $\det(sI - A_1) = p_1(s) = p_2(s) = \det(sI - A_2)$, ossia i polinomi caratteristici coincidono, ovvero gli autovalori sono gli stessi;
- 2) entrambe le realizzazioni sono raggiungibili ovvero sono entrambe osservabili.

Allora e allora soltanto, se entrambe le realizzazioni sono raggiungibili, tale trasformazione è data da:

$$T = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^{-1}, \quad (6.21)$$

ove $\mathbf{R}_i, i = 1, 2$ sono le matrici di raggiungibilità, ovvero, se entrambe le realizzazioni sono osservabili:

$$T = \mathbf{O}_1^{-1} \mathbf{O}_2, \quad (6.22)$$

ove $\mathbf{O}_i, i = 1, 2$ sono le matrici di osservabilità.

Si noti che si è parlato di autovalori anziché di poli, pur costituendo in generale questi ultimi solo un sottinsieme dell'insieme degli autovalori ed essendo quindi imprecisa questa affermazione. Poiché però si considera qui il problema della realizzazione di una funzione di trasferimento, che si assume significativa ai fini della descrizione dinamica del processo, questa imprecisione è accettabile.

Dimostriamo ora le (6.21) e (6.22). Supponiamo che entrambe le realizzazioni siano raggiungibili. Prima di tutto sia:

$$A_2 = TA_1T^{-1}, \quad B_2 = TB_1, \quad C_2 = C_1T^{-1}.$$

Ma allora:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} B_2 & A_2B_2 & \cdots & A_2^{n-1}B_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 \end{pmatrix} = T\mathbf{R}_1,$$

e quindi, poiché esiste \mathbf{R}_1^{-1} , deve essere $T = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}$. Tale matrice è unica poiché è unica l'inversa \mathbf{R}_1^{-1} .

Viceversa se $T = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}$ (ben definita in quanto esiste \mathbf{R}_1^{-1}), mostriamo che (A_1, B_1, C_1) e (A_2, B_2, C_2) si ottengono una dall'altra attraverso la trasformazione T . Poiché si nota che:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_1 &= I = \mathbf{R}_1^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1^{-1}B_1 & \mathbf{R}_1^{-1}A_1B_1 & \cdots & \mathbf{R}_1^{-1}A_1^{n-1}B_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{ne segue che } \mathbf{R}_1^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ e dunque } TB_1 = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}B_1 = \mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

B_2 . Inoltre:

$$TA_1T^{-1} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}A_1\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1},$$

ove:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^{-1}A_1\mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}_1^{-1} \begin{pmatrix} A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 & A_1^nB_1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{R}_1^{-1} \begin{pmatrix} A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 & (-a_{n-1}A_1^{n-1} + \cdots - a_1A_1 - a_0I)B_1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{R}_1^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_1A_{c_R}^T = A_{c_R}^T. \end{aligned}$$

Si ha così:

$$\begin{aligned} TA_1T^{-1} &= \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}A_1\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = \mathbf{R}_2A_{c_R}^T\mathbf{R}_2^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} A_2B_2 & \cdots & A_2^{n-1}B_2 & A_2^nB_2 \end{pmatrix} \mathbf{R}_2^{-1} = A_2\mathbf{R}_2\mathbf{R}_2^{-1} = A_2. \end{aligned}$$

Infine ricordando che sotto trasformazione i parametri di Markov restano invariati, ossia deve valere la (6.16), e dunque si deve avere:

$$C_1B_1 = C_2B_2, \quad C_1A_1B_1 = C_2A_2B_2, \quad \cdots \quad C_1A_1^{n-1}B_1 = C_2A_2^{n-1}B_2,$$

e quindi:

$$C_1\mathbf{R}_1 = C_2\mathbf{R}_2 \quad \Rightarrow \quad C_1T^{-1} = C_1\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} = C_2.$$

Stessa dimostrazione può essere fatta per la (6.22) nel caso di realizzazioni osservabili.

Consideriamo ora le trasformazioni che legano tra loro le realizzazioni *minime*. Vale per esse un risultato che è la particolarizzazione al caso di dimensione minima del risultato precedente. Infatti due realizzazioni (A_1, B_1, C_1) , (A_2, B_2, C_2) minime sono legate da una trasformazione T univocamente definita, data dalla (6.21) oppure dalla (6.22) (queste coincidono poiché le realizzazioni minime sono raggiungibili ed osservabili). Per esercizio si riporta qui una dimostrazione leggermente diversa. Poiché le due realizzazioni sono minime, esistono le inverse delle matrici \mathbf{R}_i , \mathbf{O}_i , $i = 1, 2$ relative alle due realizzazioni. Ora, considerando la sotto-matrice \bar{H} della matrice (di dimensioni infinite) H di Hankel costituita dalle prime n righe ed n colonne di H :

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \begin{pmatrix} CB & \cdots & CA^{n-1}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & \cdots & CA^{2n-2}B \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \mathbf{O}\mathbf{R}, \end{aligned}$$

ed essendo i parametri di Markov CA^iB invarianti rispetto a trasformazioni, per cui vale la (6.16):

$$\bar{H} = \mathbf{O}_1\mathbf{R}_1 = \mathbf{O}_2\mathbf{R}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{O}_2^{-1}\mathbf{O}_1 = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}.$$

Dunque si può definire la matrice non singolare $T = \mathbf{O}_2^{-1}\mathbf{O}_1 = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}$ (si confronti questa espressione con le (6.21), (6.22)). Inoltre si noti che:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} CAB & \cdots & CA^nB \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^nB & \cdots & CA^{2n-1}B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{O}\mathbf{A}\mathbf{R}, \end{aligned}$$

e sempre per le (6.16):

$$\mathbf{O}_1 A_1 \mathbf{R}_1 = \mathbf{O}_2 A_2 \mathbf{R}_2,$$

per cui:

$$A_2 = \mathbf{O}_2^{-1} \mathbf{O}_1 A_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^{-1} = T A_1 T^{-1}.$$

Infine, sempre per le (6.16):

$$\begin{aligned} TB_1 &= \mathbf{O}_2^{-1} \mathbf{O}_1 B_1 = \mathbf{O}_2^{-1} \begin{pmatrix} C_1 B_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} B_1 \end{pmatrix} = \mathbf{O}_2^{-1} \begin{pmatrix} C_2 B_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} B_2 \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{O}_2^{-1} \mathbf{O}_2 B_2 = B_2, \\ C_1 T^{-1} &= C_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 B_1 & \cdots & C_1 A_1^{n-1} B_1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_2^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} C_2 B_2 & \cdots & C_2 A_2^{n-1} B_2 \end{pmatrix} \mathbf{R}_2^{-1} = C_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^{-1} = C_2. \end{aligned}$$

Si noti che tale matrice T è unica. In effetti se esistesse un'altra matrice \tilde{T} di trasformazione si dovrebbe avere:

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & A_1^{n-1} B_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_2 & \cdots & A_2^{n-1} B_2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{T} \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & A_1^{n-1} B_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B_2 & \cdots & A_2^{n-1} B_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e dunque $T \mathbf{R}_1 = \tilde{T} \mathbf{R}_1$, ossia $(T - \tilde{T}) \mathbf{R}_1 = 0$. Poiché però \mathbf{R}_1 è non singolare, ciò implica $T = \tilde{T}$.

Nel caso di sistemi a più ingressi e più uscite, per i quali le matrici \mathbf{R}_i , \mathbf{O}_i , $i = 1, 2$, di raggiungibilità ed osservabilità non sono quadrate, la dimostrazione è solo leggermente diversa. Poiché le realizzazioni sono minime, e dunque raggiungibili ed osservabili, detta n tale dimensione minima, risulta $\varrho(\mathbf{R}_i) = \varrho(\mathbf{O}_i) = n$, $i = 1, 2$, e pertanto $\mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T$ e $\mathbf{O}_i^T \mathbf{O}_i$ (entrambe $n \times n$) sono invertibili. Poiché, come visto prima, $\mathbf{O}_1 \mathbf{R}_1 = \mathbf{O}_2 \mathbf{R}_2$, $\mathbf{O}_1 A_1 \mathbf{R}_1 = \mathbf{O}_2 A_2 \mathbf{R}_2$, $\mathbf{O}_1 B_1 = \mathbf{O}_2 B_2$ e $C_1 \mathbf{R}_1 = C_2 \mathbf{R}_2$, definita la trasformazione:

$$T = (\mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_2)^{-1} \mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_1$$

si verifica facilmente che la sua inversa (unica) è:

$$T^{-1} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^T (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T)^{-1}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} TT^{-1} &= (\mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_2)^{-1} \mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^T (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T)^{-1} = \\ &= (\mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_2)^{-1} \mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T)^{-1} = I \cdot I = I. \end{aligned}$$

Inoltre si trova che:

$$\begin{aligned} T A_1 T^{-1} &= (\mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_2)^{-1} \mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_1 A_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^T (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T)^{-1} = \\ &= (\mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_2)^{-1} \mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_2 A_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T)^{-1} = A_2, \\ TB_1 &= (\mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_2)^{-1} \mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_1 B_1 = (\mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_2)^{-1} \mathbf{O}_2^T \mathbf{O}_2 B_2 = B_2, \\ C_1 T^{-1} &= C_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^T (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T)^{-1} = C_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_2^T)^{-1} = C_2. \end{aligned}$$

L'unicità di T si mostra come nel caso di sistemi ad un ingresso ed una uscita.

Mostriamo infine per altra via che i parametri di Markov (6.15) sono invarianti nell'ambito della classe di rappresentazioni associabili ad un dato sistema. Si ricorda innanzitutto che una generica matrice $\Phi(s)$ può essere scritta nella seguente maniera:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{E_{n-1}s^{n-1} + \cdots + E_1s + E_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0},$$

in cui i coefficienti E_i sono dati da^(6.1)

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} \\ E_{n-2} \\ \vdots \\ E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}_{\lambda=A} = M u_c|_{\lambda=A}, \quad (6.23)$$

dove M è una matrice di Toeplitz ed u_c ha la forma di un generico autovettore di una forma canonica compagna raggiungibile (si veda il capitolo 5). Pertanto una generica matrice di funzioni di trasferimento $W(s)$ si può scrivere come segue:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{CE_{n-1}Bs^{n-1} + \cdots + CE_1Bs + CE_0B}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} + D.$$

^(6.1) Per ricavarne l'espressione basta moltiplicare ambo i membri di $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ per $(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)(sI - A)$ ed eguagliare le stesse potenze in s .

Considerato un cambio di coordinate, per cui $TAT^{-1} = \tilde{A}$, $TB = \tilde{B}$, $CT^{-1} = \tilde{C}$, $D = \tilde{D}$, si deve avere:

$$W(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} = \frac{\tilde{C}\tilde{E}_{n-1}\tilde{B}s^{n-1} + \cdots + \tilde{C}\tilde{E}_1\tilde{B}s + \tilde{C}\tilde{E}_0\tilde{B}}{s^n + \tilde{a}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_1s + \tilde{a}_0} + \tilde{D},$$

in cui occorre che $\tilde{a}_i = a_i$ e che:

$$\tilde{C}\tilde{E}_i\tilde{B} = CT^{-1}\tilde{E}_iTB = CE_iB, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Questo è verificato per $\tilde{E}_i = TE_iT^{-1}$.

Infine se si hanno due matrici di funzioni di trasferimento:

$$W_1(s) = \frac{C_1E_{1,n-1}B_1s^{n-1} + \cdots + C_1E_{1,1}B_1s + C_1E_{1,0}B_1}{s^n + a_{1,n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{1,1}s + a_{1,0}} + D_1,$$

$$W_2(s) = \frac{C_2E_{2,n-1}B_2s^{n-1} + \cdots + C_2E_{2,1}B_2s + C_2E_{2,0}B_2}{s^n + a_{2,n-1}s^{n-1} + \cdots + a_{2,1}s + a_{2,0}} + D_2,$$

esse possono coincidere se e solo se $D_1 = D_2$, $a_{1,i} = a_{2,i} = a_i$, $C_1E_{1,i}B_1 = C_2E_{2,i}B_2$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Ma per le (6.23) ciò comporta:

$$i = n-1) \quad C_1B_1 = C_2B_2$$

$$i = n-2) \quad C_1(A_1 + a_{n-1}I)B_1 = C_2(A_2 + a_{n-1}I)B_2 \\ \Rightarrow C_1A_1B_1 = C_2A_2B_2$$

e così via fino ad $i = 0$, per cui si ha $C_1A_1^{n-1}B_1 = C_2A_2^{n-1}B_2$. Usando il teorema di Cayley-Hamilton, è facile vedere che devono valere le (6.16). Alternativamente, allo stesso risultato si arriva eguagliando gli sviluppi in serie:

$$W_1(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_1A_1^iB_1}{s^i} + D_1, \quad W_2(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_2A_2^iB_2}{s^i} + D_2.$$

Esercizio 6.19. Considerata una funzione di trasferimento scalare $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$, mostrare che la trasformazione T tale che:

$$TAT^{-1} = A^T, \quad TB = C^T, \quad CT^{-1} = B^T, \quad (6.24)$$

è simmetrica.

Soluzione. Considerata la trasposta $W^T(s) = B^T(sI - A^T)^{-1}C^T = W(s)$, si comprende che anche le matrici A^T , B^T , C^T , $D = 0$ costituiscono una realizzazione di $W(s)$. Ma allora la trasformazione T per cui valgono le (6.24) è unica. Trasponendo le (6.24) si ha:

$$T^{-T}A^TT^T = A, \quad B^TT^T = C, \quad T^{-T}C^T = B,$$

e dunque:

$$A^T = T^TAT^{-1}, \quad B^T = CT^{-T}, \quad C^T = T^TB,$$

che mostrano come anche T^T è una trasformazione tra le due realizzazioni. Poiché tale trasformazione deve essere unica, occorre che $T = T^T$, ossia T deve essere simmetrica.

Esercizio 6.20. Mostrare che il numeratore di una matrice di funzioni di trasferimento strettamente proprie $W(s)$ ha grado m se e solo se $CA^k B = 0$ per $k = 0, 1, \dots, r-2$, e $CA^{r-1}B \neq 0$ ove $r = n - m$.

Soluzione. Se $CA^k B = 0$, $k = 0, 1, \dots, r-2$, e $CA^{r-1}B \neq 0$, allora:

$$\begin{aligned} CE_{n-1}B &= CB = 0 \\ CE_{n-2}B &= CAB + a_{n-1}CB = CAB = 0 \\ &\vdots \\ CE_{n-r+1}B &= CA^{r-2}B + \cdots = CA^{r-2}B = 0 \\ CE_{n-r}B &= CA^{r-1}B + \cdots = CA^{r-1}B \neq 0 \end{aligned}$$

(in cui si sono usate le (6.23)) e dunque il numeratore di $W(s)$ ha grado m . Il viceversa si prova invertendo il ragionamento.

6.8. Schemi di simulazione associati alle realizzazione

L'associazione di una realizzazione ad un nucleo $K(s)$ costituito da funzioni razionali strettamente proprie è particolarmente significativa e intuitiva nel caso di sistemi ad un ingresso ed una uscita, in cui cioè $K(s)$ si riduce ad una funzione razionale strettamente propria. In tali casi, infatti, è particolarmente semplice costruire uno schema di simulazione corrispondente al sistema avente una data funzione di trasferimento. Si noti

che un tale schema non fornisce una “rappresentazione fisica” del sistema reale, ma solo una sua “rappresentazione matematica”. Infatti non è detto né che tale schema rappresenti la costituzione interna del sistema né che non ci siano altre dinamiche (non raggiungibili e/o inosservabili), di cui non si possono avere informazioni a partire dalla funzione di trasferimento. Lo schema proposto fornisce soltanto una realizzazione del sistema ai fini dell’analisi e della sintesi di un sistema di controllo basato sulle tecniche con lo spazio di stato, ed eventualmente della simulazione del sistema stesso. In effetti l’assegnazione ad un sistema, descritto mediante una funzione di trasferimento, di una realizzazione compagna raggiungibile o osservabile è arbitraria.

Come ulteriore osservazione si noti che si evita di costruire schemi di simulazione contenenti dei blocchi di derivazione del segnale in quanto in tal caso lo schema avrebbe il difetto di essere affetto da rumore. Infatti quando il segnale è derivato, la derivata del rumore, usualmente grande, supera di gran lunga quella del segnale. Per realizzare dunque schemi di simulazione vengono utilizzati solo blocchi di integrazione.

Forma canonica compagna raggiungibile. Sia $W(s) = K(s) + d$ la funzione di trasferimento (razionale propria) di un sistema, in cui lo scalare d rappresenta il legame diretto ingresso-uscita e $K(s)$ è una funzione razionale strettamente propria, la cui espressione, ottenuta particolarizzando la (6.8), è del tipo:

$$K(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (6.25)$$

Si ponga:

$$K(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{y(s)}{x(s)} \frac{x(s)}{u(s)},$$

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (6.26)$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0, \quad (6.27)$$

e si realizzi innanzitutto la funzione di trasferimento (6.26) da u ad x , riscrivibile come:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)x(s) = u(s).$$

Supponendo nulle le condizioni iniziali, essa corrisponde all’equazione differenziale:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = u,$$

ovvero:

$$x^{(n)} = -a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots - a_0x + u.$$

Si consideri ora una catena di n integratori, in cui l’ingresso al primo è $x^{(n)}$ e l’uscita dell’ultimo è x (figura 6.6). L’ingresso dell’ i -esimo integratore è ovviamente $x^{(n-i+1)}$ e l’uscita è $x^{(n-i)}$. Dunque lo schema di figura 6.6 fornisce una realizzazione della funzione di trasferimento (6.26). Per ottenere una realizzazione con lo spazio di stato si ponga:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ &\vdots \\ x_{n-i+1} &= x^{(n-i)} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x^{(n-2)} \\ x_n &= x^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Questo corrisponde ad identificare l’uscita di ogni integratore con una variabile di stato, a partire da destra e procedendo verso sinistra. Le equazioni differenziali corrispondenti sono:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-i+1} &= x^{(n-i+1)} = x_{n-i+2} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n &= x^{(n)} = -a_{n-1}x_n + \dots - a_0x_1 + u. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Si consideri ora la funzione di trasferimento (6.27) da x ad y . Da essa si ha:

$$y(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0)x(s),$$

e supponendo nulle le condizioni iniziali:

$$y = b_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + b_0x.$$

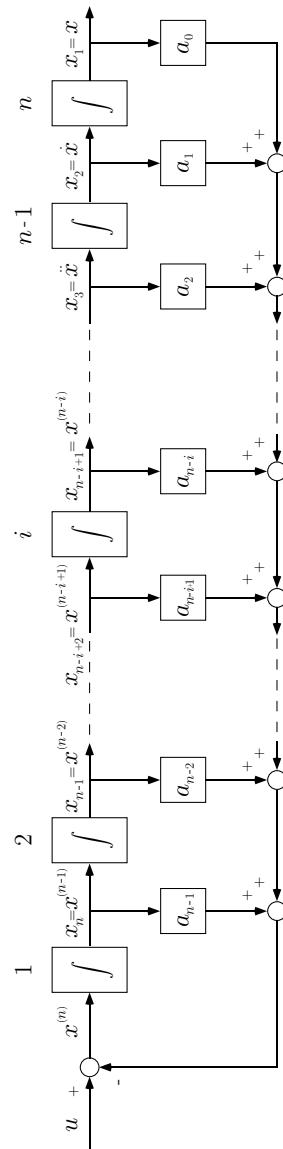


Figura 6.6

Dunque l'uscita risulta la combinazione lineare delle variabili che appaiono nella catena di integratori di figura 6.6. Utilizzando la numerazione (6.28) si ha quindi:

$$y = b_{n-1}x_n + \cdots + b_0x_1. \quad (6.30)$$

Le (6.29), (6.30) possono essere messe in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix},$$

in cui le matrici A , B , C coincidono con A_{c_R} , B_{c_R} , C_{c_R} date dalle (6.9), particolarizzate al caso di un solo ingresso ($m = 1$). Si noti che y è l'uscita del sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento $K(s)$, mentre l'uscita del sistema con funzione di trasferimento $W(s)$ è ovviamente $\bar{y} = y + du = C_{c_R}x + du$. Lo schema a blocchi complessivo, che tiene conto anche del legame diretto ingresso-uscita, è dato in figura 6.7.

Gli n integratori della catena vista potevano essere numerati anche in maniera diversa. Ad esempio potevano essere numerati in modo casuale; questo avrebbe portato però ad una struttura meno regolare delle matrici A , B , C . Un'altra numerazione comoda degli integratori è da sinistra verso destra:

$$\begin{aligned} x_1 &= x^{(n-1)} \\ x_2 &= x^{(n-2)} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \dot{x} \\ x_n &= x \end{aligned} \quad (6.31)$$

che porta alle equazioni:

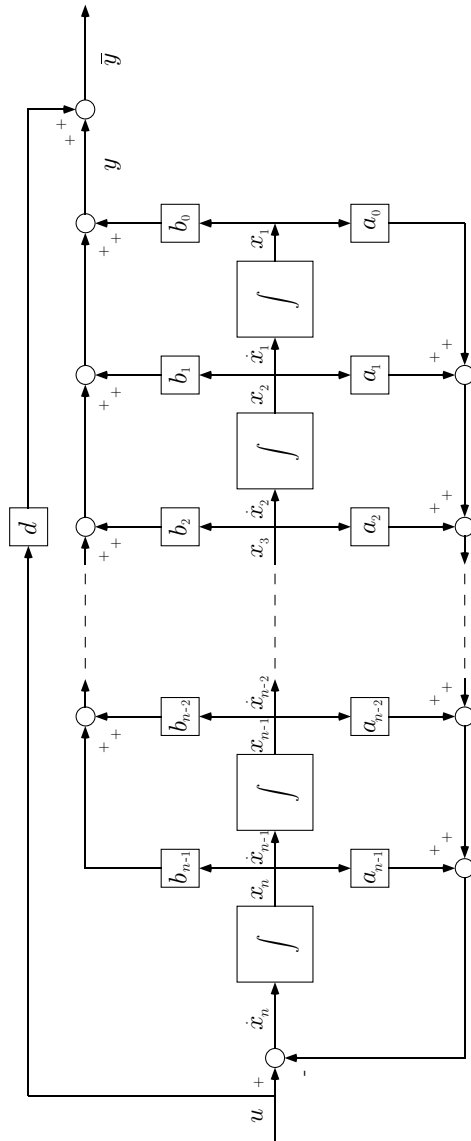


Figura 6.7

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -a_{n-1}x_1 + \cdots - a_0x_n + u \\
 \dot{x}_2 &= x_1 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_{n-2} \\
 \dot{x}_n &= x_{n-1} \\
 y &= b_{n-1}x_1 + \cdots + b_0x_n,
 \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Anche questa terna di matrici viene detta forma canonica compagna raggiungibile (cfr. capitolo 1), anche se è meno usata della precedente.

La struttura della forma canonica compagna raggiungibile è facile da ricordare, ed è facilmente generalizzabile al caso (6.9) di più ingressi e più uscite.

Nello schema di figura 6.7, in cui è messo in evidenza anche il legame diretto ingresso-uscita, si può notare che l'ingresso entra solo nel primo integratore e l'uscita è data dalla combinazione lineare delle uscite di tutti gli integratori. Una variante di questo schema, in cui l'ingresso entra in tutti gli integratori e l'uscita è presa dall'uscita dell'ultimo integratore, è mostrato in figura 6.8, in cui i guadagni p_i in generale non sono uguali ai coefficienti b_i , ma sono ottenibili da essi come soluzione di un'equazione algebrica lineare. Dallo schema di figura 6.8 si trova:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + p_1u \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + p_2u \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + p_{n-1}u
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_n &= -a_0x_1 + \cdots - a_{n-1}x_n + p_nu \\ y &= x_1\end{aligned}$$

e derivando n volte l'uscita si ha:

$$\begin{aligned}y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_2 + p_1u \\ \ddot{y} &= x_3 + p_2u + p_1\dot{u} \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= x_n + p_{n-1}u + p_{n-2}\dot{u} + \cdots + p_1u^{(n-2)} \\ y^{(n)} &= -a_0x_1 + \cdots - a_{n-1}x_n + p_nu + p_{n-1}\dot{u} + p_{n-2}\ddot{u} + \cdots + p_1u^{(n-1)}\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y &= \\ &= (a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_{n-1}p_{n-1} + p_n)u + \\ &\quad + (a_2p_1 + \cdots + a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-1})\dot{u} + \\ &\quad + \cdots + p_1u^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Considerando la trasformata di Laplace di ambo i membri, con condizioni iniziali al solito nulle, e confrontando i coefficienti del secondo membro con il numeratore della (6.25), è necessario che:

$$\begin{aligned}p_1 &= b_{n-1} \\ a_{n-1}p_1 + p_2 &= b_{n-2} \\ &\vdots \\ a_2p_1 + \cdots + a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-1} &= b_1 \\ a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_{n-1}p_{n-1} + p_n &= b_0\end{aligned}$$

che rappresenta un sistema di n equazioni nelle n incognite p_1, \dots, p_n , riscrivibile in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix},$$

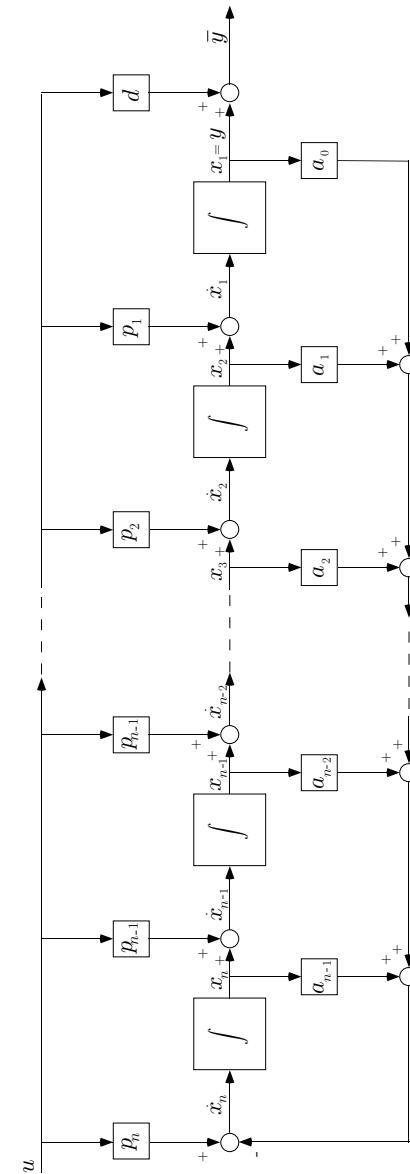


Figura 6.8

in cui la matrice dei coefficienti, che è una forma particolare della cosiddetta matrice di Toeplitz, e in cui le colonne sono ottenute dai coefficienti del polinomio caratteristico spostando in basso di uno la colonna precedente, ha determinante pari ad uno ed è quindi invertibile. In tal modo si possono calcolare i coefficienti che compaiono nello schema 6.8. È ovvio che, sebbene indicate con lo stesso simbolo, le variabili di stato negli schemi 6.7 e 6.8 non sono le stesse. Le matrici dinamiche A sono le stesse, ma le matrici B e C sono diverse, e le variabili (6.28) sono legate a quelle dello schema 6.8 da una matrice di trasformazione T che lascia inalterata la matrice dinamica, ossia tale che

$$TAT^{-1} = A = A_{cR},$$

ossia tale che commuti con la matrice dinamica:

$$TA = AT.$$

Per calcolare T si può utilizzare la (6.21), per cui $T = \mathbf{R}_c \mathbf{R}^{-1}$, con \mathbf{R}_c la matrice di raggiungibilità relativa alla realizzazione (A_{cR}, B_{cR}, C_{cR}) e \mathbf{R} quella relativa ad (A, B, C) .

Forma canonica compagna osservabile. Si riconsideri la funzione di trasferimento (6.25), che può essere riscritta nella seguente maniera:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)y(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0)u(s),$$

ovvero:

$$s^n y(s) + (a_{n-1}y(s) - b_{n-1}u(s))s^{n-1} + \dots + (a_0y(s) - b_0u(s)).$$

Dividendo per s^n e risolvendo rispetto a $y(s)$:

$$y(s) = \frac{1}{s} (b_{n-1}u(s) - a_{n-1}y(s)) + \dots + \frac{1}{s^n} (b_0u(s) - a_0y(s)), \quad (6.32)$$

in cui si nota che i termini $\frac{1}{s^i}$ rappresentano le funzioni di trasferimento di catene di i integratori. Si costruisce dunque immediatamente uno schema di simulazione associato alla (6.32).

L'uscita y è riportata indietro ad ogni integratore, mentre l'ingresso u viene portato in avanti. Il segnale $b_i u - a_i y$ passa poi attraverso $n - i$ integratori, come richiede la (6.32). Numerando le variabili di stato in figura 6.9 da sinistra a destra, si ottengono le equazioni differenziali:

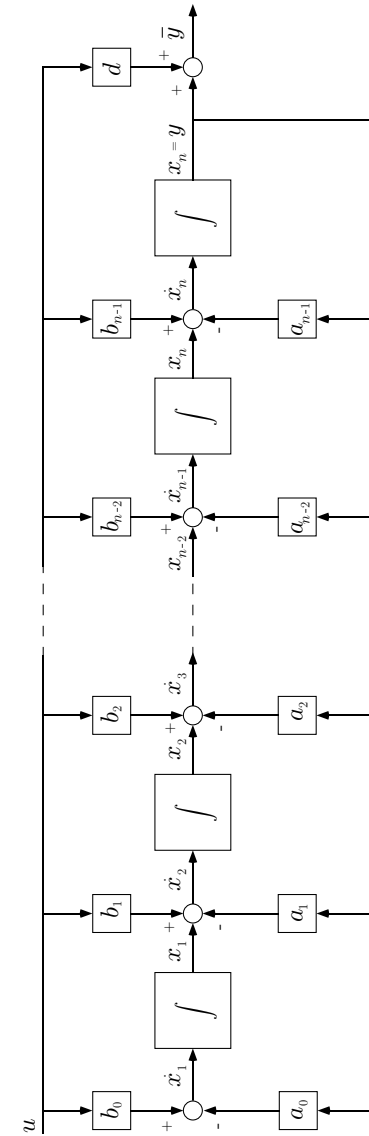


Figura 6.9

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -a_0x_n + b_0u \\
\dot{x}_2 &= x_1 - a_1x_n + b_1u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_{n-1} - a_{n-2}x_n + b_{n-2}u \\
\dot{x}_n &= x_{n-1} - a_{n-1}x_n + b_{n-1}u \\
y &= x_n.
\end{aligned}$$

In forma matriciale esse si scrivono:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

essendo le matrici A , B , C la particolarizzazione delle (6.10) al caso $p = 1$.

Numerando viceversa le variabili di stato da destra a sinistra si ottengono le equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 - a_{n-1}x_1 + b_{n-1}u \\
\dot{x}_2 &= x_3 - a_{n-2}x_1 + b_{n-2}u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n - a_1x_1 + b_1u \\
\dot{x}_n &= -a_0x_1 + b_0u \\
y &= x_1
\end{aligned}$$

e dunque:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Forma canonica di Jordan. Un'altra realizzazione di una funzione di trasferimento è la forma canonica di Jordan, così chiamata perché si basa sulla matrice di Jordan. Nel caso semplice di autovalori reali e distinti la funzione di trasferimento può essere espansa in funzioni parziali:

$$W(s) = K(s) + d = \frac{r_1}{s - \lambda_1} + \cdots + \frac{r_n}{s - \lambda_n} + d,$$

con r_i i residui della funzione di trasferimento $K(s)$.

Lo schema a blocchi è dato in figura 6.10. I residui r_i sono stati fattorizzati nei prodotti $c_{i-1}b_{i-1} = r_i$, $i = 1, \dots, n$. Identificando le uscite degli integratori con le variabili del sistema, si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \lambda_1x_1 + b_0u \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \lambda_nx_n + b_{n-1}u \\
y &= c_0x_1 + \cdots + c_{n-1}x_n
\end{aligned}$$

per cui si ottiene:

$$A_J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_J = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad C_J = \begin{pmatrix} c_0 & \cdots & c_{n-1} \end{pmatrix},$$

assieme ovviamente allo scalare d .

Se qualche autovalore è complesso (e coniugato): $\lambda_i = -\alpha_i + j\omega_i$, $\lambda_{i+1} = -\alpha_i - j\omega_i$, la realizzazione di figura 6.10 è solo concettuale, ma non fisicamente realizzabile. In effetti quello che è realizzabile è la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned}
H_i(s) &= \frac{r_i}{s - \lambda_i} + \frac{r_{i+1}}{s - \lambda_{i+1}} = \frac{r_{ai} + jr_{bi}}{s + \alpha_i - j\omega_i} + \frac{r_{ai} - jr_{bi}}{s + \alpha_i + j\omega_i} = \\
&= \frac{2[r_{ai}s + (r_{ai}\alpha_i - r_{bi}\omega_i)]}{s^2 + 2\alpha_i s + (\alpha_i^2 + \omega_i^2)},
\end{aligned}$$

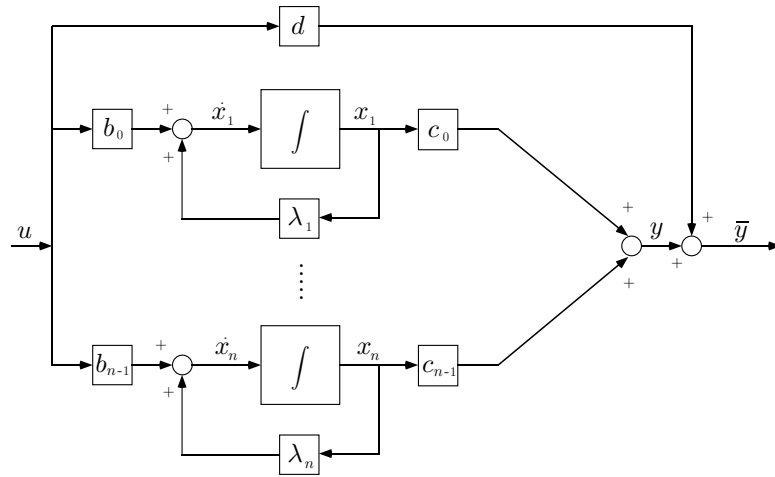


Figura 6.10

ad esempio con uno schema a blocchi corrispondente alla realizzazione:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha_i^2 + \omega_i^2) & -2\alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 2(r_{ai}\alpha_i - r_{bi}\omega_i) & 2r_{ai} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_i & -\omega_i \\ \omega_i & -\alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2r_{ai} \\ -2r_{bi} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}$$

quest'ultimo ottenuto applicando alla terna che fornisce la realizzazione:

$$A_{J_i} = \begin{pmatrix} -\alpha_i + j\omega_i & 0 \\ 0 & -\alpha_i - j\omega_i \end{pmatrix}, \quad B_{J_i} = \begin{pmatrix} r_{ai} + jr_{bi} \\ r_{ai} - jr_{bi} \end{pmatrix}, \quad C_{J_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix},$$

in forma di Jordan della funzione $H_i(s)$ (si noti che B_{J_i} , C_{J_i} potevano essere definite diversamente, operando qualsiasi altra fattorizzazione di r_i ,

r_{i+1}), la trasformazione di coordinate $T_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}$, per cui $T_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -j/2 \\ 1/2 & j/2 \end{pmatrix}$.

Nel caso poi di autovalori non tutti distinti, lo sviluppo in frazioni parziali è del tipo:

$$W(s) = K(s) + d = \sum_{i=1}^r K_i(s), \quad K_i(s) = \frac{r_{i1}}{s - \lambda_i} + \frac{r_{i2}}{(s - \lambda_i)^2} + \cdots + \frac{r_{i\mu_i}}{(s - \lambda_i)^{\mu_i}},$$

essendo r gli autovalori distinti e μ_i la loro molteplicità algebrica.

A ciascuna funzione di trasferimento $K_i(s)$ corrisponde uno schema realizzativo del tipo in figura 6.11, costituito da μ_i integratori. Ogni integratore è un sistema del primo ordine, con una funzione di trasferimento $\frac{1}{s - \lambda_i}$.

Con una numerazione da destra a sinistra, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= \lambda_i x_{i1} + x_{i2} \\ \dot{x}_{i2} &= \lambda_i x_{i2} + x_{i3} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{i\mu_i} &= \lambda_i x_{i\mu_i-1} + u \\ y &= r_{i1}x_{i1} + \cdots + r_{i\mu_i}x_{i\mu_i} \end{aligned}$$

e dunque la realizzazione:

$$A_{J_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad B_{J_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_{J_i} = \begin{pmatrix} r_{i1} & \cdots & r_{i\mu_i} \end{pmatrix}.$$

Con una numerazione da sinistra verso destra A_{J_i} avrebbe avuto gli 1 sotto la diagonale principale e $B_{J_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, mentre $C_{J_i} = \begin{pmatrix} r_{i\mu_i} & \cdots & r_{i1} \end{pmatrix}$.

6.9. Esercizi e problemi

Esercizio 6.21. *Mostrare che la funzione di trasferimento corrispondente alla realizzazione:*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

non dipende da A_{11} , A_{21} , C_1 , mentre quella relativa a

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix},$$

non dipende da A_{11} , A_{12} , B_1 .

Soluzione. Nel primo caso la funzione di trasferimento vale:

$$\begin{aligned} W(s) &= (C_1 \ C_2) \begin{pmatrix} sI - A_{11} & 0 \\ -A_{21} & sI - A_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} = \\ &= (C_1 \ C_2) \begin{pmatrix} (sI - A_{11})^{-1} & 0 \\ (sI - A_{22})^{-1} A_{21} (sI - A_{11})^{-1} & (sI - A_{22})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} \\ &= C_2 (sI - A_{22})^{-1} B \end{aligned}$$

e non dipende da A_{11} , A_{21} , C_1 . Si noti che nell'inversa $(sI - A)^{-1}$ gli elementi di posto $(1, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 2)$ si calcolano immediatamente, mentre non è necessario calcolare quello di posto $(2, 1)$.

Analogamente nel secondo caso si trova $W(s) = C(sI - A_{22})^{-1} B_2$ che non dipende da A_{11} , A_{12} , B_1 .

Problema 6.1. Verificare che la seguente terna di matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 1 \quad 1)$$

costituisce una rappresentazione del sistema connesso individuato da

$$K(t) = -t(t + 1) \quad t \in [0, \infty).$$

Figura 6.11

Problema 6.2. Verificare che la seguente terna di matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0 \quad 1)$$

costituisce una rappresentazione del sistema connesso individuato da

$$K(t) = \begin{pmatrix} e^t(t+1) \\ te^t + e^{-2t} \end{pmatrix} \quad t \in [0, \infty).$$

Problema 6.3. Determinare una rappresentazione per i sistemi individuati dai nuclei seguenti:

$$K(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2}$$

$$K(s) = \frac{1}{s^3+2s+2}$$

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s+3}{s(s+1)} \end{pmatrix}$$

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s} & 0 \end{pmatrix}$$

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{s^2+1}{s(s^2+3s+2)} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{pmatrix}$$

$$K(t) = (e^{-t} \quad \sin 4t)$$

$$K(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^3 & t^4 \end{pmatrix}$$

$$K(t) = 1 + 2t + 2t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^4 + \dots$$

Problema 6.4. Determinare quali tra le seguenti terne di matrici ($D=0$) rappresentano dei sistemi connessi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 1 \quad 0),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 6.5. Determinare l'ordine delle rappresentazioni ridotte del sistema connesso individuato dal nucleo seguente:

$$K(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{s} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2}$$

Problema 6.6. Determinare l'ordine delle rappresentazioni ridotte del sistema connesso individuato dal nucleo seguente:

$$K(t) = e^t + e^{-t}$$

Problema 6.7. Determinare l'ordine delle rappresentazioni ridotte del sistema individuato dalla seguente terna di matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (2 \quad 1 \quad 0)$$

Problema 6.8. Determinare una rappresentazione ridotta del sistema del problema precedente.

Problema 6.9. Determinare una rappresentazione ridotta per il sistema connesso individuato dal nucleo seguente:

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s^2+s+1} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 6.10. Determinare una rappresentazione ridotta per il sistema connesso individuato dal nucleo seguente:

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{s^2+1} \\ \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s(s+2)} \end{pmatrix}$$

Problema 6.11. Determinare una rappresentazione ridotta per il sistema connesso individuato dal nucleo seguente:

$$K(t) = -2t^3 e^{-t} \sin 2t$$

Problema 6.12. Determinare una rappresentazione ridotta per il sistema connesso individuato dal nucleo seguente:

$$K(t) = \left(\frac{1+t+t^2}{e^{-3t}} \quad t^3(\sin 3t + \cos 3t) \right)$$

Problema 6.13. Determinare una rappresentazione per il sistema individuato dal nucleo seguente:

$$K(t) = (t^2 e^{-2t} + 1 \quad 4)$$

Problema 6.14. Determinare una rappresentazione per il sistema individuato dal nucleo seguente:

$$K(t) = (t^2 e^{-2t} + 1 \quad \frac{4}{t^2})$$

7. La stabilità dei sistemi dinamici

La teoria della stabilità dei sistemi di equazioni differenziali rappresenta storicamente un primo esempio di analisi qualitativa, ossia di analisi che studia le proprietà di un sistema senza utilizzare la descrizione quantitativa delle soluzioni.

Con riferimento alla descrizione ingresso-stato-uscita di un sistema dinamico, si possono definire problemi di *stabilità interna*, relativi alle evoluzioni nello spazio di stato, e di *stabilità esterna*, relativi alle uscite. Quando la rappresentazione in esame è il modello di sistema fisico reale, la proprietà di stabilità interna è quella significativa, in quanto le variabili fisiche rappresentano delle grandezze fisiche che debbono soddisfare requisiti di limitatezza, indipendentemente dai valori osservati delle uscite.

7.1. Sistemi a tempo continuo

Assegnata una dinamica non lineare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

ed uno stato di equilibrio $x_e \in X$, tale cioè che

$$f(x_e, 0) = 0, \quad (7.1)$$

come noto la stabilità semplice di x_e rappresenta una proprietà che valuta se le evoluzioni perturbate, ossia che partono da stati x_0 prossimi ad x_e ,

risultano essere confinati in un intorno di x_e per tutti gli istanti di tempo successivi a quello iniziale. La stabilità asintotica di x_e è poi quella proprietà che valuta non solo se le evoluzioni perturbate rimangono confinate, ma se convergono ad x_e per tempi infinitamente grandi. Se queste proprietà non dipendono dall'istante di tempo iniziale, al quale si fa iniziare l'evoluzione del sistema, si parla di uniformità rispetto al tempo. Infine la stabilità esponenziale di un punto di equilibrio è quella proprietà per la quale, se verificata, le evoluzioni perturbate sono confinate e tendono a x_e secondo una legge maggiorabile da un esponenziale. Si ricorda poi che per le rappresentazioni lineari quest'ultima proprietà equivale alla stabilità asintotica uniforme; in generale però essa è una proprietà più forte della stabilità asintotica.

7.1.a. Studio della stabilità mediante le funzioni di Lyapunov

Consideriamo ora una rappresentazione differenziale di un sistema regolare a dimensione finita e stazionario del tipo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \quad (7.2)$$

Il *metodo di Lyapunov*, come noto, fornisce condizioni sufficienti per l'analisi della stabilità dei punti di equilibrio di questa rappresentazione differenziale stazionaria non lineare. Esso si basa sulla determinazione di una funzione scalare $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definita positiva in un opportuno intorno dello stato di equilibrio x_e , e nel calcolo della sua derivata $\dot{V}(x)$ lungo le traiettorie del sistema avente rappresentazione (7.2). È noto che se in un tale intorno $\dot{V}(x)$ è semidefinita (definita) negativa allora x_e è stabile (asintoticamente stabile).

Si sottolinea il fatto che $\dot{V}(x)$ viene calcolata lungo le traiettorie del sistema avente la rappresentazione (7.2), ossia:

$$\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x(t)). \quad (7.3)$$

Si osservi inoltre che, in assenza di ulteriori proprietà, x_e risulta solo *localmente* stabile (asintoticamente o meno). Se però le funzioni $V(x)$ e $\dot{V}(x)$ sono definite rispettivamente positive e negative in tutto lo spazio di stato X , e se $V(x)$ è radialmente illimitata,^(7.1) allora x_e risulta essere stabile *globalmente* asintoticamente.

^(7.1) Una funzione scalare $V(x)$ si dice *radialmente illimitata* se $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$.

L'idea di introdurre una funzione scalare dello stato e di valutarne la variazione lungo il moto per trarre informazioni sulla stabilità di uno stato d'equilibrio, è legata a considerazioni di carattere energetico.

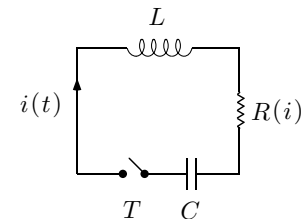


Figura 7.1 – Rete elettrica RLC

Si consideri ad esempio la rete elettrica di figura 7.1, in cui L e C sono costanti, mentre la resistenza è una funzione non lineare dell'intensità di corrente i . Assumendo come variabili di stato la carica $x_1 = q$ e l'intensità di corrente $x_2 = \dot{q} = i$ nel circuito, le equazioni che descrivono il sistema sono:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{1}{L}R(x_2)x_2. \end{aligned}$$

Questa è una rappresentazione differenziale non lineare. Si voglia ora studiare la stabilità dell'origine dello spazio di stato associato a tale rappresentazione. A tal fine si consideri la funzione che rappresenta l'energia immagazzinata nel circuito:

$$E(x) = \frac{1}{2C}x_1^2 + \frac{1}{2}Lx_2^2.$$

Essa è definita positiva, com'è ovvio essendo una funzione energia, e la sua derivata lungo il moto è:

$$\dot{E} = \frac{1}{C}x_1\dot{x}_1 + Lx_2\dot{x}_2 = -R(x_2)x_2^2.$$

Si vede allora che se $R(x_2)$ è positiva per ogni x_2 , allora l'energia decresce lungo ogni traiettoria non identicamente nulla, e tende dunque a zero per t tendente all'infinito. In tal caso lo stato tende all'origine dello spazio di stato, che quindi risulta essere un punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

Se invece $R(x_2)$ è nulla per ogni x_2 , ossia se il sistema non presenta dissipazioni, l'energia rimane costante e le traiettorie nello spazio di stato

sono ellissi, e l'origine risulta essere un punto d'equilibrio (semplicemente) stabile.

Se infine $R(x_2)$ è negativa per ogni x_2 , ossia se la rete è un circuito attivo, l'energia aumenta col tempo e le traiettorie divengono illimitate per $t \rightarrow \infty$, e l'origine è instabile.

Dunque le proprietà di stabilità dell'origine dello spazio di stato possono essere dedotte dall'analisi della funzione energia e della sua derivata lungo il moto. Questo metodo presenta due difficoltà. La prima è che per sistemi complessi è difficile valutare la funzione energia. La seconda è che spesso si conosce solo una rappresentazione matematica del sistema. D'altra parte la teoria di Lyapunov mostra che non occorre utilizzare proprio la funzione energia, ma che basta considerare funzioni $V(x)$ che godono delle proprietà della funzione energia. In effetti lo studio della stabilità dell'origine dello spazio di stato può essere fatto considerando la funzione $E(x)$ ignorandone il suo significato in termini di energia.

Nell'applicazione del metodo di Lyapunov per lo studio della stabilità di un punto d'equilibrio x_e , le maggiori difficoltà riguardano la scelta della funzione $V(x)$. Una funzione candidata che spesso si rivela adatta in tale studio è una forma quadratica del tipo:

$$V(x) = (x - x_e)^T P (x - x_e), \quad (7.4)$$

in cui la matrice P è assunta simmetrica e definita positiva. Infatti la forma quadratica è definita positiva se e solo se tale è la matrice P corrispondente. A sua volta P è definita positiva se e solo se la *condizione di Sylvester* è verificata, ossia se e solo se gli n minori principali di ordine $1, 2, \dots, n$ sono positivi:

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \det P > 0.$$

Esercizio 7.1. Si studi la stabilità degli stati d'equilibrio del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_1(x_1^2 - 1) + u^2 \\ \dot{x}_2 &= k_2x_2^3 - x_1u. \end{aligned}$$

Soluzione. Applicando la definizione (7.1), i punti d'equilibrio sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{aligned} 0 &= k_1(x_1^2 - 1) \\ 0 &= k_2x_2^3 \end{aligned}$$

date da $x_{e1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_{e2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per lo studio della stabilità di x_{e1} si scelga come funzione di Lyapunov la (7.4) con $P = I$:

$$V_1(x) = (x - x_{e1})^T (x - x_{e1}) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2,$$

definita positiva su tutto \mathbb{R}^2 e tale che, per $u = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x) &= 2(x - x_{e1})^T \dot{x} = 2[(x_1 - 1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2] = \\ &= 2[k_1(x_1 - 1)(x_1^2 - 1) + k_2x_2^4] = 2[k_1(x_1 - 1)^2(x_1 + 1) + k_2x_2^4] \end{aligned}$$

è definita negativa per $x_1 > -1$ se e solo se k_1 e k_2 sono negativi. Tale condizione è *sufficiente* per assicurare la stabilità asintotica locale dello stato x_{e1} .

In maniera analoga, per studiare la stabilità di x_{e2} si consideri la funzione:

$$V_2(x) = (x - x_{e2})^T (x - x_{e2}) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2,$$

definita positiva su tutto \mathbb{R}^2 . Risulta:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x) &= 2(x - x_{e2})^T \dot{x} = 2[(x_1 + 1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2] = \\ &= 2[k_1(x_1 + 1)(x_1^2 - 1) + k_2x_2^4] = 2[k_1(x_1 + 1)^2(x_1 - 1) + k_2x_2^4] \end{aligned}$$

e la condizione sufficiente per la stabilità asintotica locale di x_{e2} è che $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$.

Esercizio 7.2. Studiare la stabilità dell'origine per il seguente sistema non lineare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_2x_1 + x_2u_2 \\ \dot{x}_2 &= k_1x_3 - x_2^3 + x_1x_3u_1^2 \\ \dot{x}_3 &= -2x_2 - x_3^3. \end{aligned}$$

Soluzione. Applicando la definizione (7.1), si calcolano gli stati di equilibrio, che risultano essere $x_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, per qualsiasi valore dei parametri k_1

e k_2 , e $x_{e2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha^3}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}$, per $k_1 = -\frac{\alpha^8}{8}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, e qualsiasi valore di k_2 .

Per lo studio della stabilità di x_{e1} si prenda $V(x) = x^T x$, definita positiva su tutto \mathbb{R}^3 , radialmente illimitata e per la quale, con $u = 0$ risulta:

$$\dot{V}(x) = 2x^T \dot{x} = 2[k_2 x_1^2 + (k_1 - 2)x_2 x_3 - x_2^4 - x_3^4].$$

Per $k_1 = 2$ e k_2 negativo questa funzione è definita negativa su tutto \mathbb{R}^3 e dunque per tali valori dei parametri lo stato zero è asintoticamente globalmente stabile.

Si noti che una diversa funzione di Lyapunov permette di effettuare un'analisi più precisa. Se infatti si sceglie:

$$V(x) = x_1^2 + \frac{2}{k_1} x_2^2 + x_3^2$$

si ha:

$$\dot{V}(x) = 2\left[k_2 x_1^2 - \frac{2}{k_1} x_2^4 - x_3^4\right],$$

da cui risulta che per ogni valore di k_2 negativo e k_1 positivo l'origine dello spazio di stato è asintoticamente globalmente stabile.

7.1.b. Cenni sulla costruzione delle funzioni di Lyapunov

La scelta di un'opportuna funzione (7.4) che permetta di decidere se un punto di equilibrio è stabile dipende fortemente dalle capacità individuali. Tuttavia il *metodo del gradiente variabile* (Schultz e Gibson, 1962) può fornire risultati utili in molti casi pratici, in quanto permette di costruire un'opportuna funzione di Lyapunov. Questo metodo si basa sull'osservazione che la derivata di $V(x)$ lungo le traiettorie del sistema può essere scritta nella forma (7.3), in cui $\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \text{grad } V(x)$, e consiste nel fissare una funzione gradiente avente alcuni parametri da fissare in modo tale che $V(x)$ e $\dot{V}(x)$ godano delle proprietà richieste dal teorema di Lyapunov.

Per fissare un vettore di funzioni che rappresenti il gradiente di una funzione scalare, si ricorda che la condizione, in generale solo necessaria

ma che sotto opportune ipotesi aggiuntive diventa sufficiente, affinché un vettore di funzioni continue $g^T(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) & \cdots & g_n(x) \end{pmatrix}$ sia il gradiente di una funzione scalare è che la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

sia simmetrica^(7.2). Le funzioni $g_1(x), \dots, g_n(x)$ dovranno quindi essere scelte in accordo a questo criterio. Ad esempio possono essere scelte del tipo:

$$g_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$$

con a_{ij} parametri da fissare. Si calcolano poi $\dot{V}(x) = g^T(x)f(x(t), 0)$ e $V(x)$, osservando per quest'ultima che, essendo $g^T(x) dx = dV(x)$ e poiché $g_1(x) dx_1 + \cdots + g_n(x) dx_n$ è una forma differenziale esatta, allora

$$V(x) = \int_0^x g(x) dx \quad (7.5)$$

indipendentemente dal percorso scelto per andare dallo stato 0 allo stato x . Una volta calcolate $V(x)$ e $\dot{V}(x)$ si cerca di fissare i parametri in modo da soddisfare il teorema di Lyapunov.

Esercizio 7.3. Studiare la stabilità dell'origine dello spazio di stato del seguente sistema del secondo ordine:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^3. \end{aligned}$$

Soluzione. Si verifica subito che $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è l'unico stato di equilibrio. Si scelga $g(x) = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a_3 x_1 + a_4 x_2 \end{pmatrix}$, con a_1, a_2, a_3 e a_4 genericamente funzioni di x_1 ed x_2 . Si vede che la condizione di simmetria:

$$x_1 \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + a_2 + x_2 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = a_3 + x_1 \frac{\partial a_3}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial a_4}{\partial x_1}$$

^(7.2) A. Ghizzetti e F. Rosati, *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. 2, Veschi Editore, pp. 203 e ss., 220 e ss., 235 e ss., Roma, 1982.

e quella:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= g^T(x)f(x) = a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 - (x_2 + x_1^3)(a_3x_1 + a_4x_2) = \\ &= x_1x_2(a_1 - a_3 - a_4x_1^2) - (a_4 - a_2)x_2^2 - a_3x_1^4 < 0\end{aligned}$$

sono contemporaneamente soddisfatte scegliendo $a_1 = a_3 + a_4x_1^2$ e a_2, a_3 e a_4 costanti tali che $a_4 > a_2 = a_3 > 0$.

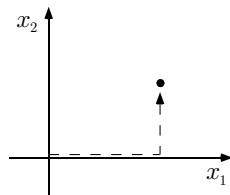


Figura 7.2 – Percorso di integrazione

Per il calcolo di $V(x)$ si applica la (7.5) avendo scelto come percorso quello in figura 7.2:

$$\begin{aligned}V(x) &= \int_0^{x_1} (a_3x_1 + a_4x_1^3) dx_1 + \int_0^{x_2} (a_3x_1 + a_4x_2) dx_2 = \\ &= \frac{1}{4}(a_4x_1^4 + 2a_3x_1^2 + 4a_3x_1x_2 + 2a_4x_2^2) = \\ &= \frac{1}{4}[a_4x_1^4 + 2a_3(x_1 + x_2)^2 + 2(a_4 - a_3)x_2^2],\end{aligned}$$

definita positiva su tutto \mathbb{R}^2 . Inoltre risulta radialmente illimitata e $\dot{V}(x)$ è definita negativa in tutto \mathbb{R}^2 . Quindi l'origine dello spazio di stato è stabile asintoticamente globalmente.

7.1.c. Studio della stabilità mediante l'approssimazione lineare

La stabilità locale degli stati di equilibrio della rappresentazione (7.2) può essere studiata, nel caso di esistenza di derivate parziali prime della funzione f , analizzando gli autovalori del sistema lineare

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t),$$

in cui la matrice A è lo jacobiano della matrice f calcolato nel punto di equilibrio x_e . Infatti se tutti gli autovalori di A sono a parte reale minore di zero, x_e è stabile asintoticamente (localmente). Se viceversa ve n'è almeno uno a parte reale maggiore di zero, x_e è instabile.

Esercizio 7.4. Assegnato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \cos x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 + 2\cos^2 x_1\end{aligned}$$

studiare la stabilità degli stati di equilibrio.

Soluzione. Gli stati di equilibrio sono tutti i vettori la cui prima componente è pari a $\pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (k intero) e la seconda è pari a ± 1 , cioè tutti i vettori del tipo:

$$\begin{aligned}x_{e1}^k &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 1 \end{pmatrix}, & x_{e2}^k &= \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 1 \end{pmatrix}, \\ x_{e3}^k &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ -1 \end{pmatrix}, & x_{e4}^k &= \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Il calcolo dell'approssimazione lineare della funzione non lineare nell'intorno del generico stato di equilibrio, fornisce:

$$\dot{\xi} = J(x)\Big|_{x_{ei}} \xi = \begin{pmatrix} -\sin x_1 & 0 \\ -4\sin x_1 \cos x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}\Big|_{x_{ei}} \xi,$$

$i = 1, \dots, 4$, dove $J(x)$ è la matrice jacobiana.

Con riferimento ai quattro insiemi di stati di equilibrio si ottengono i seguenti sistemi lineari stazionari:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \xi_1, & \dot{\xi}_2 &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xi_2, \\ \dot{\xi}_3 &= \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \xi_3, & \dot{\xi}_4 &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xi_4.\end{aligned}$$

Poiché la stabilità asintotica (instabilità) del sistema lineare approssimante implica la stabilità (instabilità) asintotica locale dello stato di equilibrio corrispondente, per il caso in esame si ha che:

- gli stati di equilibrio x_{e1}^k sono stabili localmente asintoticamente, essendo gli autovalori della matrice dinamica del sistema lineare approssimante, nell'intorno di tali stati, pari a $-2\sqrt{2}$ e -2 e quindi a parte reale negativa;
- gli stati di equilibrio dei tipi x_{e2}^k, x_{e3}^k e x_{e4}^k sono instabili in quanto sono instabili i sistemi lineari approssimanti.

Esercizio 7.5. Si studi la stabilità dei punti di equilibrio del sistema (2.11), che rappresenta l'interazione preda-predatore tra due specie di densità x_1 e x_2 .

Soluzione. Com'è immediato verificare risulta:

$$x_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{e2} = \begin{pmatrix} \frac{a_2}{\eta b} \\ \frac{a_1 a_2}{\eta b} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \end{pmatrix}.$$

I vari coefficienti che compaiono nelle (2.11) sono tutti positivi. Si noti che perché esista uno stato di equilibrio significativo per il modello è necessario che $k > x_{e21} = \frac{a_2}{\eta b}$, ossia che la capacità portante della preda sia sufficientemente alta per poter resistere al predatore.

Lo studio della stabilità locale dei punti di equilibrio può essere condotto con la tecnica della linearizzazione. Poiché:

$$J(x_{e1}) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad J(x_{e2}) = \begin{pmatrix} -\frac{a_1 a_2}{k \eta b} & -\frac{a_2}{\eta} \\ a_1 \eta \left(1 - \frac{1}{k} \frac{a_2}{\eta b}\right) & 0 \end{pmatrix},$$

si vede immediatamente che x_{e1} è instabile. Per quanto riguarda x_{e2} si trova che

$$|\lambda I - J(x_{e2})| = \lambda^2 + \frac{a_1 a_2}{k \eta b} \lambda + a_1 a_2 \left(1 - \frac{1}{k} \frac{a_2}{\eta b}\right) = 0.$$

Le soluzioni di tale equazione hanno parte reale negativa in quanto (criterio di Cartesio):

$$\frac{a_1 a_2}{k \eta b} > 0 \quad \text{e} \quad a_1 a_2 \left(1 - \frac{1}{k} \frac{a_2}{\eta b}\right) > 0$$

sono verificate in virtù della condizione $k > \frac{a_2}{\eta b}$. Si ha quindi stabilità asintotica locale per lo stato di equilibrio x_{e2} .

Esercizio 7.6. Si consideri nuovamente l'esercizio 7.2. Studiare la stabilità dei punti di equilibrio diversi dall'origine.

Soluzione. Come già notato $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha^3}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}$, con $k_1 = -\frac{\alpha^8}{8}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sono punti di equilibrio. Si calcola poi:

$$J(x_e) = \begin{pmatrix} k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4}\alpha^6 & -\frac{\alpha^8}{8} \\ 0 & -2 & -3\alpha^2 \end{pmatrix},$$

e dunque gli autovalori sono dati dall'equazione:

$$(\lambda - k_2) \left[\lambda^2 + 3\alpha^2 \left(\frac{\alpha^4}{4} + 1 \right) \lambda + 2\alpha^8 \right] = 0.$$

Qui si può constatare che se k_2 è negativo, un autovalore è a parte reale minore di uno; gli altri due autovalori, però, sono sempre a parte reale minore di zero, in quanto i coefficienti $3\alpha^2 \left(\frac{\alpha^4}{4} + 1 \right)$, $2\alpha^8$ sono sempre positivi (criterio di Cartesio). Dunque x_e è stabile.

7.1.d. Ulteriori considerazioni sulla stabilità asintotica globale

Un altro valido e semplice strumento di analisi della stabilità di un punto di equilibrio è il *teorema di Krasovskii*, il quale fornisce una condizione sufficiente di stabilità asintotica globale dell'origine dello spazio di stato. Inoltre, accanto a risultati riguardanti la stabilità, si ricorda che esistono risultati, come il *teorema di Chetaev*, che permettono di dedurre l'instabilità di un punto di equilibrio.

Esercizio 7.7. Studiare la stabilità asintotica globale dello stato zero del seguente sistema non lineare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_3 u_1 u_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_2^3 + k_1 x_3 + u_1 \\ \dot{x}_3 &= k_2 x_2 - x_3 - x_3^3. \end{aligned}$$

Soluzione. Lo stato zero è uno stato d'equilibrio isolato, poiché lo jacobiano $J(x)|_{x=0}$ è non singolare. Inoltre lo stato zero è l'unico stato di equilibrio. Un primo studio della sua stabilità può essere condotto utilizzando il teorema di Krasovskii. In base ad esso data una rappresentazione (7.2), con $f(x)$ dotata di derivate parziali prime continue, se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che per ogni x gli autovalori della matrice $J(x) + J^T(x)$ hanno parte reale inferiore a $-\alpha$, allora lo stato di equilibrio $x_e = 0$ è stabile asintoticamente globalmente. Per il sistema in esame si ha:

$$J(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3x_2^2 - 1 & k_1 \\ 0 & k_2 & -3x_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$J(x) + J^T(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6x_2^2 - 2 & k_1 + k_2 \\ 0 & k_1 + k_2 & -6x_3^2 - 2 \end{pmatrix}$$

ha un autovalore indipendente da x e pari a $\lambda_1 = -2$, mentre gli altri, per $k_1 = -k_2$, risultano essere $\lambda_2 = -6x_2^2 - 2$, $\lambda_3 = -6x_3^2 - 2$, i quali hanno parte reale inferiore a $-\alpha = 2 > 0$. Questa ovviamente è una condizione sufficiente di stabilità asintotica globale.

Esercizio 7.8. Verificare che nell'esercizio 7.1 il punto x_{e2} risulta instabile quando si pone $k_1 = -\bar{k}_1 < 0$ e $k_2 = -\bar{k}_2 < 0$.

Soluzione. Si consideri la funzione

$$V(x) = (x - x_{e2})^T P (x - x_{e2}) = (x_1 + 1)^2 + \alpha x_2^2$$

ove $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha = \frac{\bar{k}_1}{k_2}$. Si ha allora:

$$\dot{V}(x) = -2\bar{k}_1 \left[(x_1 + 1)^2 (x_1 - 1) + x_2^4 \right],$$

che risulta definita positiva in un opportuno intorno di x_{e2} . Infatti, preso un generico stato $\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \pm \varepsilon_1 \\ \pm \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ nell'intorno di x_{e2} , si vede che per $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sufficientemente piccoli risulta:

$$\dot{V}(\bar{x}) = 2\bar{k}_1 \left[\varepsilon_1^2 (2 \mp \varepsilon_1) - \varepsilon_2^4 \right] > 0.$$

Inoltre $V(x)$ risulta positiva nei punti della retta $x_2 = 0$ che hanno x_{e2} come punti di accumulazione. Ora il teorema di Cetaev afferma che uno stato di equilibrio x_e della rappresentazione (7.2) è instabile se esiste una funzione $V(x)$ (non necessariamente definita positiva) differenziabile con continuità e tale che $V(x_e) = 0$, $V(x_0) > 0$ per qualche x_0 con $\|x_e - x_0\|$ arbitrariamente piccolo, per cui risulta $\dot{V} > 0$ nell'insieme $U = \{x \in B_r | V(x) > 0\}$, essendo $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } \|x\| < r\}$, $r > 0$. Le precedenti due condizioni su $V(x)$ e sulla sua derivata sono pertanto condizioni sufficienti perché x_{e2} sia instabile.

Esercizio 7.9. Mostrare che per $k_1 < 0$ l'origine dello spazio di stato è un punto di equilibrio instabile per il sistema considerato nell'esercizio 7.2.

Soluzione. Considerata la funzione

$$V(x) = \frac{1}{k_2} x_1^2 + \frac{2}{k_1} x_2^2 + x_3^2,$$

tale che $V(0) = 0$ e positiva in tutto $\mathbb{R}^3 = U$, poiché:

$$\dot{V}(x) = 2 \left[x_1^2 - \frac{2}{k_1} x_2^4 - x_3^4 \right],$$

si trova che $\dot{V}(x) > 0$ in alcuni settori del piano x_2, x_3 .

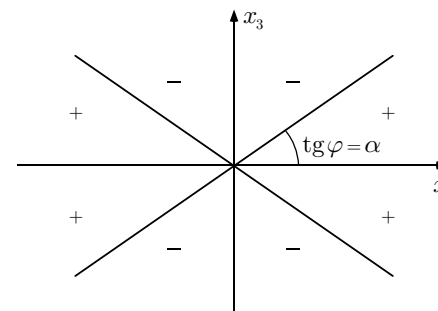


Figura 7.3

Più precisamente, posto $\alpha = \sqrt[4]{\frac{2}{k_1}}$, si ha la situazione illustrata in figura 7.3. Poiché $\dot{V} > 0$ in U , per il teorema di Cetaev ne segue che $x_e = 0$ è instabile.

7.1.e. Cenni sulla stabilità dei sistemi lineari non stazionari

Quando la funzione generatrice del sistema ha una struttura *lineare*:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

gli stati di equilibrio risultano essere quelli per cui risulta:

$$A(t)x_e = 0, \quad \forall t.$$

Se poi la rappresentazione, oltre ad essere lineare, è anche a dimensione finita, la condizione necessaria e sufficiente di stabilità dell'origine dello spazio di stato è, come noto, la limitazione della norma della matrice di transizione dello stato da parte di una costante, eventualmente dipendente dall'istante iniziale:

$$\|\Phi(t, t_0)\| < k_{t_0}, \quad \forall t \geq t_0,$$

mentre la condizione necessaria e sufficiente di stabilità asintotica è che valga la relazione precedente e che la matrice di transizione converga a zero per $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, t_0) = 0.$$

Queste due condizioni sono scarsamente significative dal punto di vista delle applicazioni in quanto la loro verifica richiede la conoscenza della matrice di transizione dello stato del sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t). \quad (7.6)$$

Inoltre, mentre per le rappresentazioni lineari e stazionarie esse si traducono in condizioni sugli autovalori, per i sistemi lineari non stazionari la condizione che la parte reale degli autovalori di $A(t)$ sia negativa per ogni istante t non è sufficiente per la stabilità. Si consideri ad esempio il seguente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-1 - 9\cos^2 6t + 12\sin 6t \cos 6t)x_1 + (12\cos^2 6t + 9\sin 6t \cos 6t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= (-12\sin^2 6t + 9\sin 6t \cos 6t)x_1 - (1 + 9\sin^2 6t + 12\sin 6t \cos 6t)x_2 \end{aligned}$$

i cui autovalori, soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 9\lambda + 10 = 0$, sono *indipendenti dal tempo* e con *parte reale negativa*. Nonostante ciò il sistema è instabile, come risulta dall'espressione della soluzione:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1(\cos 6t + 2\sin 6t)e^{2t} + a_2(\sin 6t - 2\cos 6t)e^{-13t} \\ x_2(t) &= a_1(2\cos 6t + \sin 6t)e^{2t} + a_2(2\sin 6t + \cos 6t)e^{-13t} \end{aligned}$$

ove a_1, a_2 sono costanti dipendenti da x_0 .

In effetti la condizione $\operatorname{Re}[\sigma(A(t))] < -\varepsilon, \forall t$ e con $\varepsilon > 0$, è sufficiente per la stabilità asintotica uniforme del sistema (7.6) se $A(t)$ è uniformemente limitata ed è a variazione limitata, ossia se esiste un δ tale che $\left| \frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right| < \delta$. Con il termine uniforme si intende, come noto, che le costanti che compaiono non dipendono da t_0 .

Nel caso generale non esistono condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema (7.6) valutabili a partire dalla rappresentazione esplicita. Nel caso particolare, ma di notevole interesse nelle applicazioni, in cui $A(t)$ è periodica con periodo T : $A(t + kT) = A(t), \forall t$ e per ogni intero k , allora è possibile dare delle condizioni relativamente semplici. Infatti la matrice di transizione può essere scritta:

$$\Phi(t, t_0) = P(t)e^{R(t-t_0)}P^{-1}(t_0),$$

dove R è una matrice costante e $P(t)$ è periodica con periodo T . Inoltre risulta:

$$e^{RT} = \Phi(T, 0), \quad P(t) = \Phi(t, 0)e^{-Rt}$$

e da queste risulta che le matrici P ed R sono definite a partire dalla matrice di transizione (esistono comunque degli algoritmi di calcolo di P e Q a partire dalla soluzione, eventualmente numerica, del sistema (7.6) su di un periodo). Inoltre la condizione di stabilità in un sistema lineare periodico, se sussiste, è sempre uniforme. Sotto l'ipotesi di periodicità il sistema (7.6) è uniformemente (asintoticamente) stabile se e solo se gli autovalori di R con molteplicità geometrica maggiore di uno hanno parte reale negativa, mentre quelli a molteplicità unitaria hanno parte reale non positiva (sempre negativa per la stabilità asintotica). La condizione, in modo equivalente, può essere formulata con riferimento agli autovalori di e^{RT} ; in tal caso è necessario e sufficiente che il loro modulo sia minore di uno). In effetti, come già osservato, anche la verifica di questa condizione, è subordinata alla integrazione, sia pure su un solo periodo $[0, T]$ della (7.6).

Le cose si semplificano ulteriormente per i sistemi periodici in cui $A(t)$ è costante a tratti in ogni periodo, cioè:

$$\begin{aligned} A(t) &= A_1 & t_0 + kT \leq t \leq t_1 + kT \\ A(t) &= A_2 & t_1 + kT \leq t \leq t_2 + kT \\ &\vdots & \vdots \\ A(t) &= A_m & t_{m-1} + kT \leq t \leq t_m + kT \end{aligned}$$

Figura 7.4

e in tal caso si ha:

$$\begin{aligned}\Phi(t, t_0) &= e^{A_1(t-t_0)} & t_0 \leq t < t_1 \\ \Phi(t, t_0) &= e^{A_2(t-t_1)} e^{A_1(t_1-t_0)} & t_1 \leq t < t_2 \\ &\vdots & \vdots\end{aligned}$$

ossia:

$$\Phi(t_0 + T, t_0) = \prod_{i=1}^m e^{A_i(t_i - t_{i-1})}.$$

Per il sistema (7.6) con $A(t)$ periodica costante a tratti si ha stabilità asintotica uniforme se e solo se gli autovalori della matrice:

$$\prod_{i=1}^m e^{A_i(t_i - t_{i-1})}$$

hanno modulo inferiore ad uno. Si ha instabilità se ci sono autovalori con modulo maggiore di uno.

Una ulteriore situazione di interesse nelle applicazioni è rappresentata dai sistemi del tipo:

$$\dot{x} = (A(t) + B(t))x$$

in cui $A(t)$ è o periodica o costante. L'interesse è evidente in quanto $B(t)$ assume il ruolo di una matrice di perturbazione nei confronti della matrice dinamica $A(t)$ del sistema. Se risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$$

il sistema è detto asintoticamente costante se $A(t) = A$ costante; asintoticamente periodico se $A(t) = A(t + T)$ cioè $A(t)$ è periodica. In tal caso si dimostra che si ha stabilità asintotica se gli autovalori di A hanno parte reale negativa (caso costante) oppure gli autovalori di e^{RT} hanno modulo minore di uno (caso periodico).

L'applicazione della condizione enunciata al sistema dinamico lineare stazionario

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

con matrice di perturbazione

$$B(t) = \begin{pmatrix} -k + e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \cos t \end{pmatrix},$$

consente di verificare in modo molto semplice che si ha stabilità asintotica per $0 < k < 1$. Infatti posto

$$\dot{x} = \left[\begin{pmatrix} -k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \cos t \end{pmatrix} \right] x$$

il sistema è asintoticamente costante e la condizione di stabilità della parte costante è quella nota.

Per concludere questo breve esame del caso non stazionario sembra utile riportare alcune condizioni sufficienti di stabilità per il caso generale con riferimento alla matrice dinamica $A(t)$. Tali condizioni sono fondate sul fatto che, detti $\lambda_{\max}(t)$ e $\lambda_{\min}(t)$ il più piccolo e il più grande autovalore di $A(t) + A^T(t)$, ogni soluzione della (7.6), soddisfa alla seguente disuguaglianza:

$$\|x_0\| e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \lambda_{\min}(\tau) d\tau} \leq \|x(t, x_0, t_0)\| \leq \|x_0\| e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau}.$$

Si ha quindi che il sistema sistema (7.6) è

– asintoticamente stabile se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau = -\infty;$$

la stabilità è inoltre uniforme se la precedente relazione vale uniformemente rispetto a t_0 ;

– stabile se per ogni t_0 , esiste $M(t_0)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau < M(t_0),$$

se M non dipende da t_0 la stabilità è uniforme;

– instabile se risulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \lambda_{\min}(\tau) d\tau = \infty.$$

7.1.f. I criteri di Routh e di Hurwitz

I criteri di Routh ed Hurwitz sono metodi algebrici che consentono di studiare le caratteristiche degli autovalori di una rappresentazione lineare e stazionaria. Il *criterio di Routh* permette di stabilire se le radici di un dato polinomio

$$d(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} \cdots + a_1 \lambda + a_0 \quad (7.7)$$

sono tutte a parte reale negativa ovvero quante radici sono a parte reale positiva e quante a parte reale negativa, e quindi può essere soddisfacentemente applicato al polinomio caratteristico di un sistema per studiarne gli autovalori senza doverli calcolare esplicitamente. Si supponrà che il termine noto a_0 del polinomio (7.7) sia non nullo; in caso contrario è sempre possibile scrivere $d(\lambda) = d_1(\lambda)\lambda^r$ (essendo $a_0 = a_1 = \cdots a_{r-1} = 0$) ed applicare i ragionamenti che seguono al polinomio $d_1(\lambda)$, avendo così informazioni su $n - r$ radici (essendo le altre r radici in zero).

È noto che una condizione necessaria (ma in generale non sufficiente) perché gli zeri del polinomio (7.7) abbiano tutte parte reale negativa, è che i suoi coefficienti abbiano tutti lo stesso segno (ad esempio se $a_n > 0$, tutti devono essere positivi). Per avere delle condizioni necessarie e sufficienti si deve procedere alla costruzione della tabella di Routh:

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\cdots	\vdots	\cdots
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\cdots	\vdots	\cdots
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-4}	\cdots			
$n-3$	c_{n-3}	\cdots	\cdots			
\vdots	\vdots					
1						
0						

con

$$b_{n-2} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad b_{n-4} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}, \quad \dots$$

$$c_{n-3} = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}}{-b_{n-2}}, \quad \dots$$

Mediante la tabella di Routh così costruita, si può determinare il numero di zeri a parte reale positiva del polinomio $d(\lambda)$. Infatti il numero di zeri a parte reale positiva (comprensivo di molteplicità) del polinomio $d(\lambda)$ è pari al numero di variazioni di segno degli elementi della prima colonna della tabella di Routh.

Si ricorda infine che nella costruzione della tabella di Routh è possibile moltiplicare tutti i coefficienti di una riga per una stessa costante positiva. Ciò non modifica il criterio e consente di semplificare i calcoli. Analogamente, agli stessi risultati si arriva se la variabile λ è sostituita dalla variabile $\mu\lambda$ (cambio di scala).

Esercizio 7.10. Studiare gli zeri del polinomio $d(\lambda) = -2\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda - 11$.

Soluzione. La condizione necessaria è soddisfatta. La tabella di Routh è poi:

3	-2	-4
2	-1	-11
1	18	
0	-11	

per cui $d(\lambda)$ ha degli zeri a parte reale maggiore di zero (due).

Esercizio 7.11. Assegnato il polinomio $d(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 15$, studiarne gli zeri.

Soluzione. La tabella di Routh è:

5	1	2	3
4	1	2	15
3	1	-1	
2	3	15	
1	-4		
0	15		

per cui si ha uno zero a parte reale maggiore di zero.

Esercizio 7.12. Studiare gli zeri del polinomio $d(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 11\lambda^2 + 18\lambda + 18$.

Soluzione. Nella costruzione della tabella di Routh si noti che la riga 1 risulta nulla. Si ricorda che nel caso in cui la p -esima riga ha elementi *tutti* nulli (p è sempre dispari), la tabella di Routh può essere completata sostituendo la p -esima riga con i coefficienti del polinomio ottenuto derivando, rispetto a λ , il polinomio

$$d_1(\lambda) = \alpha_{p+1}\lambda^{p+1} + \alpha_{p-1}\lambda^{p-1} + \alpha_{p-3}\lambda^{p-3} + \dots,$$

ove $\alpha_{p+1}, \alpha_{p-1}, \alpha_{p-3}, \dots$, sono i coefficienti della riga $(p+1)$ -esima (ossia di quella precedente a quella tutta nulla). In altre parole la riga nulla è sostituita con quella avente coefficienti $(p+1)\alpha_{p+1}, (p-1)\alpha_{p-1}, (p-3)\alpha_{p-3}$, etc. Tale situazione corrisponde al fatto che $d(\lambda)$ può essere fattorizzato nel prodotto del polinomio $d_1(\lambda)$ per un altro polinomio $d_0(\lambda)$:

$$d(\lambda) = d_1(\lambda) d_0(\lambda).$$

La tabella di Routh costruita fino alla riga $p+1$ dà informazioni sugli zeri di $d_0(\lambda)$, mentre le restanti righe (dalla p -esima in poi) danno informazioni sugli zeri di $d_1(\lambda)$. In particolare, poiché $d_1(\lambda)$ ha solo potenze pari, i suoi zeri sono *simmetrici rispetto all'origine*. Se il grado di $d_1(\lambda)$ è basso, questi zeri possono anche essere direttamente calcolati. È ovvio che se $p+1 = 2$ allora $d_1(\lambda)$ ha gli zeri sull'asse immaginario, mentre se $p+1 > 2$ ci sono zeri a parte reale maggiore di zero ovvero sono sull'asse immaginario, con molteplicità algebrica eventualmente superiore ad uno. Queste considerazioni sono importanti in vista dello studio della stabilità dell'origine dello spazio di stato. Nel nostro caso, applicando la ricordata regola, si ottiene la seguente tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 11 & 18 \\ 3 & 1 & 9 & \\ 2 & 1 & 9 & \\ 1 & 2 & & \\ 0 & 9 & & \end{array}$$

in cui la riga 1 è stata costruita mediante i polinomi $d_1(\lambda) = \lambda^2 + 9$ e $d'_1(\lambda) = 2\lambda$. Dunque esistono radici a parte reale non negativa simmetriche in $\pm 3j$.

Esercizio 7.13. Studiare gli zeri del polinomio $d(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2$.

Soluzione. Poiché $d(\lambda)$ è la fattorizzazione dei polinomi $\lambda^2 + 1$, è facile vedere che si hanno gli zeri in $\pm j$, con molteplicità doppia.

Volendo costruire la tabella di Routh per $d(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$, si noti che la riga 2 risulta nulla. La tabella di Routh è:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}$$

in cui il numero di variazioni di segno è nullo. Ciò è concorde con il fatto che gli zeri sono sull'asse immaginario e non ve ne sono a parte reale positiva.

Il criterio di Routh può essere vantaggiosamente applicato per studiare polinomi caratteristici i cui elementi dipendono da un parametro, come ad esempio il guadagno k . In tal caso, se le condizioni necessarie sono soddisfatte, si otterrà una tabella di Routh in cui gli elementi della prima colonna possono dipendere da tale parametro. Occorrerà dunque imporre che questi elementi siano positivi (se $a_n > 0$) ottenendo così delle condizioni (necessarie e sufficienti) sul parametro perché il sistema sia stabile asintoticamente (o meglio che tale sia l'origine).

Ricordando la regola per cui gli elementi di una stessa riga si possono moltiplicare per una costante positiva, in particolare si nota che non occorre dividere, nella costruzione della tabella, per l'elemento della prima colonna (se esso è parametrico). Infatti si imporrà che esso sia positivo (come a_n).

Esercizio 7.14. Assegnato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} x(t), \quad k > 0,$$

si vuole determinare per quali valori di k il sistema è stabile.

Soluzione. Poiché la matrice dinamica è assegnata in forma canonica, il polinomio caratteristico è immediatamente individuato e risulta:

$$d(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 11\lambda^2 + 6\lambda + k.$$

Essendo $k > 0$, è soddisfatta la condizione necessaria affinché i suoi zeri abbiano parte reale negativa. La tabella ottenuta applicando il criterio di Routh è la seguente

4	1	11	k
3	6	6	
2	10	k	
1	$10 - k$		
0	k		

(la prima riga è stata moltiplicata per $10/6$). La condizione di stabilità asintotica è verificata se risulta

$$k > 0, \quad 10 - k > 0,$$

che sono contemporaneamente verificate per $k \in (0, 10)$. Per $k = 0$ si ha stabilità semplice, come è immediato verificare, corrispondente ad un autovalore in $\lambda = 0$. Per $k = 10$ si ha invece che $d(\lambda) = d_0(\lambda)10(\lambda^2 + 1)$, ossia si hanno due autovalori sull'asse immaginario ($\lambda = \pm j$). Per $k > 10$ vi sono due autovalori a parte reale positiva, mentre per $k < 0$ vi è un solo autovalore a parte reale positiva.

Esercizio 7.15. Si studi la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema caratterizzato dal seguente polinomio caratteristico:

$$d(\lambda) = \lambda^8 + \lambda^7 + \lambda^6 + \lambda^5 + \lambda^2 + 1.$$

Soluzione. In primo luogo si nota che i coefficienti di λ^4 , λ^3 e λ sono nulli. Poiché le condizioni necessarie non sono verificate, l'origine non può essere stabile asintoticamente, e potrà al più essere stabile semplicemente.

Durante la costruzione della tabella di Routh si ha una riga con i primi due elementi nulli:

8	1	1	0	1	1
7	1	1	0	0	
6	0	0	1	1	

Il loro annullarsi non permette di terminare la costruzione della tabella. Per poterla proseguire si ricorda che se la p -esima riga ha i primi h elementi nulli (ma non tutti), la tabella di Routh può essere completata sostituendo la p -esima riga con quella ottenuta sommando la p -esima riga con la riga ottenuta da questa traslando di h volte verso sinistra i suoi elementi (e quindi

eliminando tutti gli zeri) e cambiando di segno se h è dispari. Operando in tal modo, si somma la riga 6 con la riga 1 1 0 0. Stesso problema si presenta nel costruire la riga 5 (somma di 0 - 1 - 1 e 1 1 0). Infine la riga 1 risulta nulla, per cui è necessario considerare il polinomio $d_1(\lambda) = \lambda^2 + 1$ e la sua derivata $d'_1(\lambda) = 2\lambda$.

Quindi la tabella di Routh è data da:

8	1	1	0	1	1
7	1	1	0	0	
6	1	1	1	1	
5	1	0	-1		
4	1	2	1		
3	-2	-2			
2	1	1			
1	2				
0	1				

Essendoci due variazioni di segno si hanno altrettanti zeri a parte reale positiva.

È noto che vi sono altri metodi per evitare o per superare le difficoltà dovute alla presenza di zeri nei primi elementi di una riga p . Infatti si potrebbe costruire la tabella di Routh di $\bar{d}(\lambda) = d(\lambda)(\lambda + \alpha)$, con $\alpha > 0$. Infatti in tal modo il numero di radici a parte reale positiva rimane inalterato. Un altro sistema è quello di sostituire alla variabile λ la variabile $1/\lambda$. Infine è anche possibile sostituire al primo elemento della riga p una ε infinitesima (positiva o negativa) e proseguire la costruzione della tabella, che verrà discussa considerando che $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ovvero $\varepsilon \rightarrow 0^-$, secondo che ε sia stato supposto positivo o negativo. Questo ultimo metodo, però, a rigore è giustificato solo quando $d(\lambda)$ non ha zeri sull'asse immaginario, per cui la sua applicazione può dar luogo (in casi particolari) a risultati inesatti, come mostrato nel seguente esercizio.

Esercizio 7.16. Studiare gli zeri del polinomio caratteristico

$$d(\lambda) = \lambda^6 + \lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Soluzione. Le condizioni necessarie perché $d(\lambda)$ abbia gli zeri a parte reale negativa sono verificate. La tabella di Routh realizzata utilizzando una quantità ε è la seguente:

Figura 7.5

dove k è un parametro positivo.

Soluzione. Il parametro k può essere interpretato, da un punto di vista fisico, come il guadagno di un amplificatore. Per condurre lo studio è innanzitutto necessario individuare la rappresentazione differenziale complessiva del sistema S_2 di figura 7.5. Dallo schema risulta:

$$e = v - y = v - Cx$$

$$u = ke = kv - kCx$$

$$\dot{x} = Ax + Bv - kBCx = (A - kBC)x + kBv$$

$$y = Cx.$$

Le due ultime equazioni sono una rappresentazione del sistema S_2 in funzione delle matrici A , B e C che rappresentano il sistema S_1 . La matrice

dinamica del sistema S_2 risulta dunque essere:

$$(A - kBC) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4(1-k) & -4 & -(8-3k) & -5 & -(5+k) & -1 \end{pmatrix},$$

ed il polinomio caratteristico è:

$$\lambda^6 + \lambda^5 + (5+k)\lambda^4 + 5\lambda^3 + (8-3k)\lambda^2 + 4\lambda + 4(1-k).$$

Per concludere l'analisi non resta che studiare il segno delle radici in funzione del parametro $k > 0$. La tabella di Routh risulta:

6	1	5+k	8-3k	4(1-k)
5	1	5	4	
4	k	4-3k	4(1-k)	
3	2k-1	2k-1		
2	(1-k)	(1-k)		
1	(1-k)			
0	(1-k)			

in cui la riga 1 è stata ottenuta derivando il polinomio $(1-k)\lambda^2 + (1-k)$ e dividendo per 2. Studiando il segno degli elementi della prima colonna si arriva alla seguente tabella:

	0	$\frac{1}{2}$	1	k
1 > 0				
1 > 0				
k > 0	---			
2k-1 > 0	---	---		
1-k > 0			---	
1-k > 0			---	
1-k > 0			---	

e alle seguenti conclusioni.

- Per $\frac{1}{2} < k < 1$ non si hanno variazioni e quindi radici a parte reale maggiore di zero; si ha però solo stabilità semplice in quanto le righe 2 e 3, essendo proporzionali, determinano l'annullarsi della riga 1, e ciò corrisponde a radici sull'asse immaginario ($\lambda^2 + 1 = 0$).
- Per $k = \frac{1}{2}$ si annulla la terza riga evidenziando la presenza di quattro radici complesse coniugate sull'asse immaginario. Le altre radici sono invece a parte reale minore di zero. Essendo le radici immaginarie distinte ($\lambda = \mp j$, $\lambda = \mp j2$), il sistema è semplicemente stabile.
- Per $k = 1$ il polinomio si fattorizza in $\lambda(\lambda^5 + \lambda^4 + 6\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda + 4)$ e presenta oltre alla radice in $\lambda = 0$ due radici complesse coniugate sull'asse immaginario, $\lambda = \mp j$. Le altre radici sono invece a parte reale minore di zero. Quindi il sistema è ancora semplicemente stabile.
- Per $k < \frac{1}{2}$ e $k > 1$ il sistema è instabile, come evidenziato dalla presenza di variazioni di segno nella prima colonna della tabella.

Esercizio 7.18. Considerato lo schema di figura 7.5, in cui il sistema S_1 è descritto dalla funzione di trasferimento $F(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s+p)}$, studiare la stabilità dell'origine dello spazio di stato del sistema S_2 al variare dei parametri k e p .

Soluzione. Poiché $y(s) = kF(s)(v(s) - y(s))$, si ricava per S_2 la funzione di trasferimento $W(s) = \frac{kF(s)}{1+kF(s)} = \frac{k(s+1)}{d(s)}$, ove il polinomio caratteristico è

$$d(s) = s^3 + (p-2)s^2 - 2ps + k(s+1).$$

Dalla tabella di Routh

3	1	k-2p
2	p-2	k
1	$\frac{k(p-3)-2p(p-2)}{p-2}$	
0	k	

si può ricavare che occorre che sia $p > 2$ e $k > 0$. Inoltre si deve avere

$$k(p-3) - 2p(p-2) > 0$$

Soluzione. È noto come questo equivale a richiedere una certa velocità di risposta contenendo entro limiti voluti i fenomeni di oscillazione. Affinché le radici abbiano parte reale minore di -1 le radici del polinomio:

$$\tilde{d}(\lambda) = (\lambda - 1)^3 + 6(\lambda - 1)^2 + (12 + k)(\lambda - 1) + 2k + 8$$

devono avere parte reale minore di zero. Si ha quindi:

$$\tilde{d}(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + (k + 3)\lambda + (k + 1),$$

e la tabella:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k+3 \\ 2 & 3 & k+1 \\ 1 & k+4 & \\ 0 & k+1 & \end{array}$$

dalla quale risulta che la condizione cercata è $k > -1$. Per imporre il voluto smorzamento bisogna studiare il polinomio:

$$\bar{d}(\lambda) = \tilde{d}(\lambda e^{j\pi/4}) \tilde{d}(\lambda e^{-j\pi/4}),$$

che risulta essere:

$$\begin{aligned} \bar{d}(\lambda) &= \lambda^6 + 3\lambda^5 \left(e^{j\varphi_0} + e^{-j\varphi_0} \right) + \left[(k+3) \left(e^{j2\varphi_0} + e^{-j2\varphi_0} \right) + 9 \right] \lambda^4 + \\ &+ \left[(k+1) \left(e^{j3\varphi_0} + e^{-j3\varphi_0} \right) + 3(k+3) \left(e^{j\varphi_0} + e^{-j\varphi_0} \right) \right] \lambda^3 + \\ &+ \left[3(k+1) \left(e^{j2\varphi_0} + e^{-j2\varphi_0} \right) + (k+3)^2 \right] \lambda^2 + \\ &+ (k+1)(k+3) \left(e^{j\varphi_0} + e^{-j\varphi_0} \right) \lambda + (k+1)^2 = \\ &= \lambda^6 + 3\sqrt{2} \lambda^5 + 9\lambda^4 + 2\sqrt{2} (k+4) \lambda^3 + (k+3)^2 \lambda^2 + \\ &+ \sqrt{2} (k^2 + 4k + 3) \lambda + (k+1)^2. \end{aligned}$$

L'applicazione del criterio di Routh al polinomio ora individuato consente di individuare le condizioni cui deve soddisfare il parametro k perché il sistema risulti stabile.

Esercizio 7.20. Studiare in modo parametrico rispetto a k la stabilità dell'origine dello spazio di stato del seguente sistema non lineare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 - x_4^3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 + x_3^3 \\ \dot{x}_4 &= -kx_1 - x_2 - \sin kx_2 - 2x_3 - \sin x_4. \end{aligned}$$

Figura 7.6

Soluzione. L'origine dello spazio di stato è punto di equilibrio e si ha:

$$J(x_e) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3x_4^2 \\ 0 & 0 & 3x_3^2 & 1 \\ -k & -(1+k \cos kx_2) & -2 & -\cos x_4 \end{pmatrix} \Big|_{x_e=0} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & -(1+k) & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre $J(x_e)$ è non singolare per $k \neq 0$, dunque tale stato di equilibrio è isolato. L'esame della stabilità della rappresentazione lineare approssimante, che coincide con l'analisi della stabilità della matrice $J(x_e)$, può essere condotta utilizzando il criterio di Routh ed osservando che la matrice è nella forma canonica raggiungibile; quindi il polinomio caratteristico è:

$$d(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + (1+k)\lambda + k.$$

Affinché tutti i coefficienti abbiano lo stesso segno (positivo nel nostro caso) deve risultare $k > 0$ (condizioni necessarie). Costruiamo poi la tabella di Routh:

4	1	2	k
3	1	$1+k$	
2	$k-1$	k	
1	$\frac{-k^2+k+1}{k-1}$		
0	k		

Lo studio del segno dei coefficienti della prima colonna conduce ad affermare che:

- si ha stabilità asintotica per i valori di k tali che:

$$k-1 > 0 \quad \text{e} \quad -k^2+k+1 > 0,$$

e tali condizioni risultano simultaneamente soddisfatte per

$$1 < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

- per $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ si ha stabilità semplice (si hanno due radici immaginarie in $\lambda = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}$);

- per $k \leq 1$ e $k > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ si ha instabilità.

In conclusione lo stato zero del sistema non lineare in esame è:

- instabile per $k \leq 1$ e per $k > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,
- stabile asintoticamente localmente per $1 < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

mentre non è possibile col metodo usato giudicare della stabilità per $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Il criterio di Routh, assieme a quello di Krasovskii, può essere utilizzato per studiare la stabilità dell'origine di una rappresentazione non lineare.

Esercizio 7.21. Si riconsideri il sistema dell'esercizio 7.7 e si studi la stabilità dell'origine al variare di k_1 e k_2 .

Soluzione. Si calcola il polinomio caratteristico:

$$d(\lambda) = \left| \lambda I - (J(x) + J^T(x)) \right| = (\lambda + 2)d_1(\lambda)$$

con $d_1(\lambda) = \left[\lambda^2 + (6x_2^2 + 6x_3^2 + 4)\lambda + (36x_2^2x_3^2 + 12x_2^2 + 12x_3^2 + 4 - (k_1 + k_2)^2) \right]$ e si studia quando esso ha tutte le radici a parte reale minore di $-\alpha$. Poiché in tale studio ci si può restringere al solo polinomio $d_1(\lambda)$, si può calcolare il polinomio

$$d_1(\lambda - \alpha) = \lambda^2 + (6x_2^2 + 6x_3^2 + 4 - \alpha)\lambda + (36x_2^2x_3^2 + 12x_2^2 + 12x_3^2 + 4 - (k_1 + k_2)^2 - \alpha(6x_2^2 + 6x_3^2 + 4) + \alpha^2)$$

e vedere quando esso ha radici a parte reale minore di zero. Le condizioni necessarie del criterio di Routh, che qui sono anche sufficienti, di stabilità asintotica globale per lo stato zero sono:

$$6x_2^2 + 6x_3^2 + 4 - \alpha > 0$$

$$36x_2^2x_3^2 + 12x_2^2 + 12x_3^2 + 4 - (k_1 + k_2)^2 - \alpha(6x_2^2 + 6x_3^2 + 4) + \alpha^2 > 0.$$

A queste stesse condizioni si giunge imponendo che i coefficienti di $d_1(\lambda)$ siano maggiori di quelli di $(\lambda - \alpha)^2$, come è ovvio. In entrambi i casi si ottengono le condizioni:

$$6x_2^2 + 6x_3^2 + 4 > \alpha$$

$$36x_2^2x_3^2 + 12x_2^2 + 12x_3^2 + 4 - (k_1 + k_2)^2 > \alpha^2$$

che devono valere per ogni stato x . Considerando $\alpha = 2 - \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in (0, 2)$ (in effetti $\lambda_1 = -2$) si vede che dalla prima, per $x = 0$ (che rappresenta il caso peggiore), risulta $2 > -\varepsilon$, mentre dalla seconda si ha

$$(k_1 + k_2)^2 < 2\varepsilon - \varepsilon^2,$$

che ha soluzione per opportuni valori di k_1, k_2 .

Un criterio alternativo al criterio di Routh per lo studio qualitativo delle radici del polinomio (7.7) è il *criterio di Hurwitz*. Considerato il polinomio caratteristico (7.7), si costruisce la seguente matrice di Hurwitz di dimensioni $n \times n$:

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ - & - & - & - & - \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & a_{n-2} & \cdots & \cdots \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-2} & \cdots \\ - & - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

in cui si è supposto che a_n sia positivo e pari ad 1. Le prime due righe sono date dai coefficienti del polinomio caratteristico mentre le altre sono ottenute traslando di un passo verso destra la coppia di righe precedenti e mettendo degli zeri nei posti lasciati vuoti. Ciò viene ripetuto fino a completare la matrice $n \times n$. Le soluzioni di $d(\lambda)$ sono a parte reale minore di zero se e solo se gli $n - 1$ minori principali consecutivi Δ_i sono tutti strettamente positivi.

Esercizio 7.22. Assegnato un sistema il cui polinomio caratteristico è $d(\lambda) = \lambda^3 + 8\lambda^2 + 14\lambda + 24$, stabilire se l'origine dello spazio di stato è stabile asintoticamente.

Soluzione. I minori principali consecutivi della matrice di Hurwitz sono:

$$\Delta_1 = 8, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} = 88, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{pmatrix} = 2112,$$

e quindi si ha stabilità asintotica.

7.2. Sistemi a tempo discreto

7.2.a. Studio della stabilità mediante le funzioni di Lyapunov

Per i sistemi a tempo discreto si può dare una formulazione analoga al teorema di Lyapunov ricordato per i sistemi a tempo continuo, sostituendo al posto di $\dot{V}(x)$ la variazione $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$.

Esercizio 7.23. Si studi la stabilità dello stato zero del sistema:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= ax_1^3(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + x_2(k)u(k). \end{aligned}$$

Soluzione. Considerata la funzione di Lyapunov

$$V(x) = x^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} x = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2,$$

la variazione prima lungo il moto del sistema con $u = 0$ risulta essere:

$$\Delta V(x) = -\frac{3}{2}x_2^2 + 2a(x_1^2 + 3x_1x_2 + 2ax_1^4)x_1^2$$

e l'analisi parametrica rispetto ad a consente di concludere per l'origine della rappresentazione non lineare:

- se $a = 0$, $\Delta V(x)$ risulta semidefinita negativa il che prova la stabilità dello stato zero (non ci potrebbe essere stabilità asintotica in quanto ogni stato sull'asse x_1 è di equilibrio);
- se $a < 0$, $\Delta V(x)$ è definita negativa in un qualche intorno dello stato zero, il che prova la stabilità asintotica locale;
- se $a > 0$, $\Delta V(x)$ assume valori positivi arbitrariamente vicino allo stato zero sull'asse x_1 il che non consente di trarre alcuna conclusione.

7.2.b. Il criterio di Jury

Per i sistemi a tempo discreto lineari e stazionari la condizione di stabilità fa riferimento al modulo degli autovalori della matrice dinamica. Un criterio per valutare se tutti gli zeri del polinomio caratteristico

$$d(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

abbiano modulo inferiore ad uno è il *criterio di Jury*. Esso si basa sulla costruzione della seguente tabella:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n-1} & \\ b_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 & \\ c_0 & \cdots & \cdots & c_{n-2} & & \\ c_{n-2} & \cdots & \cdots & c_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ t_0 & t_1 & t_2 & & & \\ t_2 & t_1 & t_0 & & & \end{array} \quad \text{con} \quad b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix},$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix},$$

etc.

ed afferma che si ha stabilità asintotica se e solo se risulta:

$$\begin{aligned} d(1) &> 0, \\ (-1)^n d(-1) &> 0, \\ |a_n| &> |a_0|, \quad |b_0| > |b_{n-1}|, \quad \cdots \quad |t_0| > |t_2|. \end{aligned}$$

Esercizio 7.24. Si studino le radici del seguente polinomio caratteristico:

$$d(z) = 2z^4 - z^3 + kz^2 - z + 1.$$

Soluzione. Si controlla innanzitutto che

$$\begin{aligned} d(1) &= 1 + k > 0, \\ (-1)^n d(-1) &= 5 + k > 0. \end{aligned}$$

Ciò si ha per $k > -1$. La tabella di Jury risulta poi:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & k & -1 & 2 \\ 2 & -1 & k & -1 & 1 \\ 3 & -1 & k & -1 & \\ -1 & k & -1 & 3 & \\ -8 & 3-k & 1-3k & & \\ 1-3k & 3-k & -8 & & \end{array}$$

per cui affinché si abbia stabilità asintotica è necessario e sufficiente che risulti

$$|1 - 3k| > 8, \quad k > -1.$$

Tali disuguaglianze sono simultaneamente soddisfatte per $-1 < k < 3$.

7.2.c. Il metodo di Kalman e Beltram

Per i sistemi a tempo discreto autonomi:

$$x(k+1) = f(x(k))$$

con $f(0) = 0$ lo studio della stabilità dell'origine può essere effettuato mediante un *metodo* dovuto a *Kalman e Bertram* (1960), fondato sul risultato (intuitivo) in base al quale si ha stabilità asintotica globale dell'origine se $f(x)$ è una *contrazione* in un qualche intorno dell'origine dello spazio di stato (nell'intero spazio di stato). Una contrazione in una fissata regione D è una funzione che, rispetto ad una *qualsiasi* norma $\|\cdot\|$, soddisfa la condizione $\|f(x)\| < \|x\|$, per ogni $x \in D$ diverso dall'origine.

La difficoltà nell'applicazione di questo metodo risiede nel fatto che una funzione può risultare una contrazione rispetto ad una norma e non rispetto ad un'altra. Una notevole semplificazione si ha nel caso in cui risulti $f(x) = \varphi(x)x$, in quanto si può fare la verifica indipendentemente dalla norma. Infatti una tale funzione risulta essere una contrazione se esistono delle costanti positive c_1, \dots, c_n tali che è verificata una delle seguenti condizioni

$$a) \sum_{j=1}^n \frac{c_i}{c_j} |\varphi_{ij}(x)| < 1, \quad \forall i, \quad b) \sum_{i=1}^n \frac{c_j}{c_i} |\varphi_{ij}(x)| < 1, \quad \forall j.$$

Esercizio 7.25. Si studi la stabilità dello stato zero per il sistema

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_2^2(t) \\ x_2(t+1) &= kx_1(t) + x_2^3(t). \end{aligned}$$

Soluzione. Si osservi che il sistema dato è della forma:

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_2(t) \\ k & x_2^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

È semplice verificare che per ogni valore di k , due costanti c_1 e c_2 tali che $c_1 > c_2 k$ soddisfano le condizioni volute perché $f(x)$ sia una contrazione in un opportuno intorno dell'origine (tale intorno dipende da k). Dunque $x = 0$ è stabile asintoticamente globalmente.

7.3. La stabilità esterna

Per un sistema lineare stazionario le condizioni di stabilità esterna, in cui si richiede che ad un ingresso limitato l'uscita sia limitata, come è noto, fanno riferimento alla limitatezza dell'integrale della norma della matrice delle risposte impulsive $W(t)$ ed alla limitatezza della norma della matrice $\Psi(t)$. Infatti una rappresentazione lineare, a dimensione finita, stazionaria, è stabile esternamente se e solo se esistono due costanti k_1, k_2 tali che per $\forall t \geq 0$ si ha

$$\|\Psi(t)\| < k_1, \quad \int_0^t \|W(\tau)\| d\tau < k_2.$$

Nel caso in cui $x_0 = 0$ (stabilità esterna nello stato zero) la condizione (necessaria e sufficiente) è solo

$$\int_0^t \|W(\tau)\| d\tau < k_2.$$

Ricordando che gli elementi delle matrici $W(t)$ e $\Psi(t)$ sono combinazioni lineari di modi naturali eccitabili ed osservabili, le condizioni necessarie e sufficienti di stabilità esterna per un'assegnata rappresentazione differenziale possono essere così formulate:

- gli autovalori associati a modi naturali eccitabili ed osservabili devono avere parte reale negativa;
- gli autovalori associati a modi naturali osservabili devono avere parte reale non positiva se sono semplici e parte reale negativa se sono multipli.

La a) è condizione necessaria e sufficiente di stabilità esterna nello stato zero; la a) e la b) simultaneamente sono le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità esterna in qualsiasi stato.

Esercizio 7.26. Assegnato il sistema lineare e stazionario caratterizzato dalla matrice dinamica:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

esaminare come la variazione delle matrici B e C influenzino la proprietà di stabilità esterna.

Soluzione. Bisogna determinare gli autovalori ed autovettori, e quindi vanno esaminati i diversi casi corrispondenti a diverse scelte delle matrici degli ingressi o delle uscite.

Gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1,$$

con molteplicità algebriche $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \mu_3 = 2$, ed una corrispondente base di autovettori generalizzati è:

$$u_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con leggi temporali rispettivamente $e^{-t}, 1, 1+t, e^t, e^t + te^t$. La molteplicità geometrica di λ_1 è $m_1 = 1$, quelle di λ_2 e λ_3 sono $m_2 = m_3 = 2$. Con un abuso di termini, nel seguito, per semplicità, si farà riferimento ai modi naturali del sistema richiamandone la relativa legge di evoluzione temporale.

Si considerino i seguenti casi.

1) Siano:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le matrici degli ingressi e delle uscite. Per studiare l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi si noti che, preso genericamente

$$x_0 = c_1 u_1^1 + c_2 u_2^1 + c_3 u_2^2 + c_4 u_3^1 + c_5 u_3^2,$$

si ha:

$$x_l(t) = (c_1 e^{-t} u_1^1) + (c_2 u_2^1) + c_3 (u_2^2 + t u_2^1) + (c_4 e^t u_3^1) + c_5 e^t (u_3^2 + t u_3^1).$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= C x_l(t) = (c_1 e^{-t}) + (-c_2) + c_3(0 - t) + (0 c_4) + c_5 e^t(0 + 0 t) = \\ &= c_1 e^{-t} - c_2 - t c_3, \end{aligned}$$

$$H(t) = e^{At} B = e^{At} \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} u_1^1 & u_2^1 & e^t u_3^1 \end{pmatrix},$$

$$W(t) = C e^{At} B = \begin{pmatrix} e^{-t} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da questo si vede che i modi e^{-t} , 1 ed e^t sono eccitabili (d'altra parte $\mathcal{R}(B) = \text{gen} \{u_1^1, u_2^1, u_3^1\}$), mentre di questi quelli che sono anche osservabili, e che quindi compaiono in $W(t)$, sono e^{-t} ed 1 (d'altra parte $\mathcal{N}(C) = \text{gen} \{u_2^2, u_3^1, u_3^2\}$). Questo implica che

$$\int_0^\infty \|W(t)\| dt$$

è non limitato, e quindi si ha instabilità esterna nello stato zero. Si noti inoltre che gli stessi modi sono presenti in $\Psi(t)$; quindi

$$\|\Psi(t)\| < k_1$$

con k_1 costante positiva, e ciò implica la limitatezza in uscita delle evoluzioni libere.

2) Se le matrici sono

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

allora:

$$\mathcal{R}(B) \subset \text{gen} \{u_1^1, u_2^2\},$$

e sono eccitabili i modi e^{-t} , 1, ed $1 + t$; ma poiché però:

$$C u_2^2 = 0, \quad C u_2^1 = 0,$$

il sistema è stabile esternamente nello stato zero in quanto l'unico modo eccitabile ed osservabile (cioè in $W(t)$) è e^{-t} , mentre non è stabile esternamente in qualsiasi stato come è semplice verificare, risultando ad esempio

$$C u_3^1 = 0.$$

3) Indipendentemente dalla matrice C si può avere stabilità esterna nello stato zero per una qualsiasi matrice B tale che:

$$\mathcal{R}(B) \subset \{u_1^1\},$$

cioè tale che consenta di eccitare solo il modo associato all'autovalore a parte reale negativa.

4) Indipendentemente dalla matrice B si può avere stabilità esterna in ogni stato per una qualsiasi matrice C tale che

$$\mathcal{N}(C) \subset \text{gen} \{u_2^1, u_2^2, u_3^1, u_3^2\},$$

cioè tale che consenta di osservare solo il modo associato all'autovalore a parte reale negativa.

7.4. Il criterio di stabilità di Nyquist

Come noto lo studio della stabilità di un sistema lineare interconnesso controeazionato può essere ricondotto allo studio della stabilità di un sistema a controeazione unitaria. Tale studio, infine, può essere effettuato utilizzando il *criterio di Nyquist*.

Il criterio di Nyquist consente di valutare la stabilità di un sistema a controeazione unitaria contando il numero di giri che il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento del sistema in catena diretta compie intorno al punto critico $(-1, j0)$ al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$, ovvero attorno al punto critico $-\frac{1}{k}$ se nel ramo diretto è presente un guadagno variabile k . In tal caso il punto critico giace sul semiasse reale sinistro se $k > 0$, e su quello destro se $k < 0$.

Per il calcolo del numero di giri, specie nel caso di diagrammi di Nyquist complessi, si noti che presa una qualsiasi semiretta uscente dal punto critico, N è pari alle intersezioni del diagramma con la semiretta, contate algebricamente (intersezioni positive se in senso antiorario e negative se in senso orario). In particolare possono essere prese semirette che presentano il minimo numero di intersezioni con il diagramma. Questo metodo è particolarmente efficiente quando il punto critico è $(-\frac{1}{k}, j0)$ e si hanno più tratti dell'asse reale in cui esso può trovarsi al variare di k .

È bene osservare inoltre che se $P_p > 0$ non si può avere stabilità se non sono presenti tratti del diagramma di Nyquist che formino delle rotazioni in senso antiorario. Ciò corrisponde ad intervalli di ω in cui si hanno aumenti della fase. Inoltre se la funzione di trasferimento da studiare è data dal prodotto di funzioni di trasferimento e in questo prodotto si hanno cancellazioni tra poli e zeri a parte reale maggiore di zero, il sistema a ciclo chiuso è instabile e non è necessario applicare il criterio di Nyquist (che confermerebbe tale instabilità). Infatti la funzione di trasferimento $W(s)$ a ciclo chiuso presenta al denominatore questi poli cancellati a parte reale positiva.

Molto spesso nelle applicazioni lo studio della stabilità di un sistema a controreazione, caratterizzato dall'avere una funzione di trasferimento $H(s)$ diversa da 1 nella catena di controreazione, viene effettuato applicando il criterio di Nyquist alla funzione di trasferimento di anello $F(s) = G(s)H(s)$.

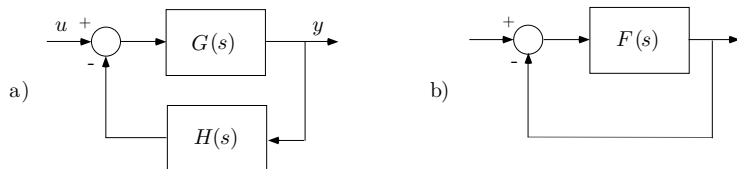


Figura 7.7

Tale procedimento è giustificato dal fatto che il sistema di figura 7.7.a è equivalente, da un punto di vista complessivo, ad un sistema che ha la struttura indicata in figura 7.7.b. Infatti, posto $G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$, $H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$, entrambi i sistemi a ciclo chiuso hanno polinomio caratteristico

$$d_{CH}(s) = D_G(s)D_H(s) + N_G(s)N_H(s).$$

La presenza della funzione di trasferimento $H(s)$ può essere ad esempio legata alla dinamica del sensore. Se questo fosse istantaneo si avrebbe

$H(s) = 1/k_d$. Tale situazione si presenta nella pratica quando la dinamica del processo è più lenta relativamente a quella del sensore. Può anche accadere che il sensore introduca un ritardo, per cui $H(s) = e^{-\tau s}$ con τ il ritardo introdotto.

Esercizio 7.27. Sia dato un processo descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = k \frac{1+10s}{s(1-10s)}$. Si considera una controreazione dall'uscita. Il sensore che misura l'uscita y è descritto dalla funzione di trasferimento $H(s) = e^{-\tau s}$. Determinare il valore massimo del ritardo τ tale da assicurare stabilità asintotica per opportuni valori del guadagno k . Fissato poi $\tau = 3$, determinare per quali valori di k si ha stabilità asintotica.

Soluzione. Lo schema considerato è quello di figura 7.7.a. Si nota che se τ fosse nullo (sensore istantaneo) il diagramma di Nyquist mostra che si ha stabilità per k negativo ed appartenente al segmento AB, in quanto $P_p = 1$. In tal caso, applicando il criterio di Routh al polinomio caratteristico a ciclo chiuso:

$$d_{CH} = s(1 - 10s) + k(1 + 10s) = -10s^2 + (10k + 1)s + k,$$

si trova che deve essere $k < -0.1$.

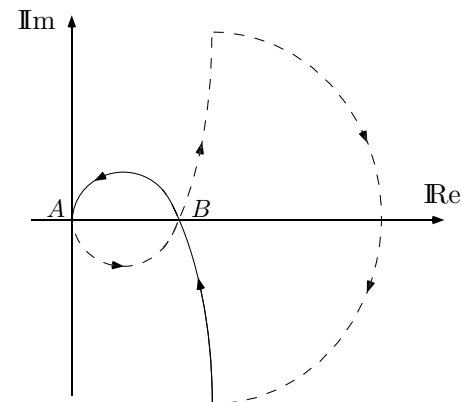


Figura 7.8

Se il sensore introduce un ritardo τ nel ramo di controreazione, il diagramma di Nyquist si modifica come descritto dalla seguente figura.

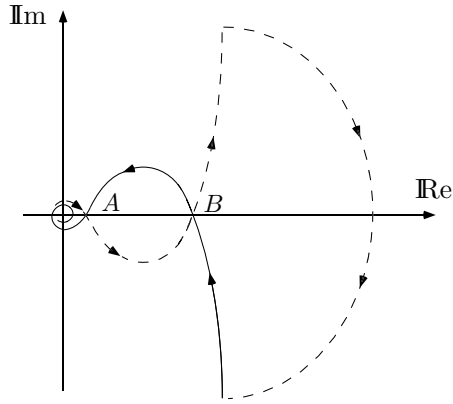


Figura 7.9

Se il punto critico si trova sul segmento AB si ha ancora stabilità asintotica. Al crescere di τ , però, tale segmento diventa sempre più piccolo fino a che, a causa della diminuzione di fase dovuta al termine $e^{-j\omega\tau}$, la fase non potrà superare gli zero radianti. In questo caso non si potrà avere stabilità asintotica per alcun valore di k .

La situazione limite si ha quando A e B coincidono (la curva è tangente al semiasse reale positivo). Posto allora:

$$\bar{F}(s) = \frac{1 + 10s}{s(1 - 10s)} e^{-\tau s},$$

si trova:

$$\bar{F}(j\omega) = \frac{20\cos\tau\omega + (100\omega^2 - 1)\sin\tau\omega}{\omega(100\omega^2 + 1)} + j \frac{(100\omega^2 - 1)\cos\tau\omega - 20\omega\sin\tau\omega}{\omega(100\omega^2 + 1)},$$

avendo posto $e^{-j\omega\tau} = \cos\tau\omega - j\sin\tau\omega$. Per determinare le intersezioni del diagramma con l'asse reale occorre imporre che la parte immaginaria si annulli, ricavando così:

$$\tan\tau\omega = \frac{100\omega^2 - 1}{20\omega}.$$

Numericamente si può trovare che la situazione limite corrisponde a $\bar{\tau} \simeq 3.264$. Dunque per $\tau < \bar{\tau}$ si può avere stabilità asintotica quando il punto critico $-\frac{1}{k}$ è compreso tra A e B. In particolare per $\tau = 3$ si trova che A e

B corrispondono alle soluzioni $\omega_1 \simeq 0.171$, $\omega_2 \simeq 0.324$. Inserendo tali valori nell'espressione di $\bar{F}(j\omega)$ si ottiene:

$$\bar{F}(j\omega_1) = 5.839 = -\frac{1}{k_1}, \quad \bar{F}(j\omega_2) = 3.086 = -\frac{1}{k_2},$$

e dunque per avere stabilità asintotica occorre che $k \in (-0.324, -0.171)$.

Esercizio 7.28. Si studi la stabilità, rispetto al parametro k , del sistema ottenuto effettuando una controreazione unitaria dall'uscita del seguente sistema lineare stazionario:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1000 & -110 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} k u(t), \quad k > 0,$$

$$y(t) = (10 \ 10 \ 0 \ 0) x(t).$$

Soluzione. Poiché la rappresentazione assegnata è nella forma canonica controllabile, è immediato il calcolo della funzione di trasferimento che risulta essere

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{10k(1+s)}{s^4 + 110s^3 + 1000s^2} = \frac{10k(1+s)}{1000s^2(1+0.01s)(1+0.1s)},$$

dove $s^4 + 110s^3 + 1000s^2$ è il polinomio caratteristico di A. Il sistema in catena diretta è quindi instabile avendo la matrice A due autovalori pari a zero.

Per lo studio della stabilità del sistema complessivo si tracci ora il diagramma di Nyquist relativo a

$$\bar{F}(s) = \frac{10(1+s)}{1000s^2(1+0.01s)(1+0.1s)}.$$

Come è semplice verificare, ad esempio sulla base dei diagrammi di Bode della $\bar{F}(j\omega)$, l'andamento qualitativo dei diagrammi di Nyquist è quello riportato in figura.

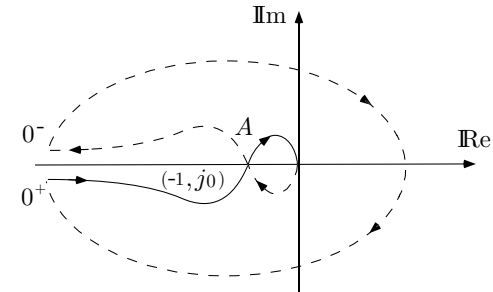


Figura 7.10

Il numero di poli a parte reale maggiore di zero è $P_p = 0$. Contando come solito positivamente i giri in senso antiorario, per k tale che il punto critico è a sinistra di A il numero di giri è $N = 0$, e dunque si ha stabilità asintotica, mentre se è a destra di A il numero di giri è -2 (se $k > 0$) oppure -1 (se $k < 0$), e quindi si ha instabilità. Indicato con \bar{k} il valore del guadagno corrispondente ad A, si ha stabilità asintotica per $k \in (0, \bar{k})$ e instabilità per $k \in (-\infty, 0) \cup (\bar{k}, +\infty)$. Si tratta di un sistema a stabilità regolare rispetto alle variazioni di k .

Il valore di \bar{k} può ricavarsi dai diagrammi di Bode di $\bar{F}(j\omega)$ valutandone il valore m_g del modulo quando la fase vale $-\pi$, ossia valutando il margine di guadagno. Posto $m_g = -\frac{1}{\bar{k}}$ si trova \bar{k} . Alternativamente si può applicare il criterio di Routh al polinomio caratteristico a ciclo chiuso $d_{CH}(s) = N_F(s) + D_F(s) = s^4 + 110s^3 + 100s^2 + 10ks + 10k$, essendo $N_F(s)$ e $D_F(s)$ in numeratore e il denominatore di $F(s)$.

4	1	1000	10k
3	110	10k	
2	11000 - k	110k	
1	(9790 - k)k		
0	110k		

Dalla discussione della tabella di Routh si trova che $\bar{k} = 9790$. Inoltre se $k = 0$ si annulla la riga 1, e si hanno due poli nell'origine, e dunque il sistema è instabile. Se infine $k = \bar{k}$ il sistema è semplicemente stabile a causa della presenza di poli complessi coniugati sull'asse immaginario.

Esercizio 7.29. Studiare la stabilità, rispetto ai parametri k , τ_1 e τ_2 , del sistema a controreazione in figura 7.7.a, dove $G(s) = \frac{k}{s(1 + \tau_1 s)}$, $H(s) = \frac{1}{1 + \tau_2 s}$, $\tau_1 > 0$ e $\tau_2 > 0$.

Soluzione. Lo studio può essere effettuato sulla base del diagramma di Nyquist della funzione

$$\bar{F}(s) = \frac{1}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)},$$

il cui diagramma di Nyquist è riportato in figura.

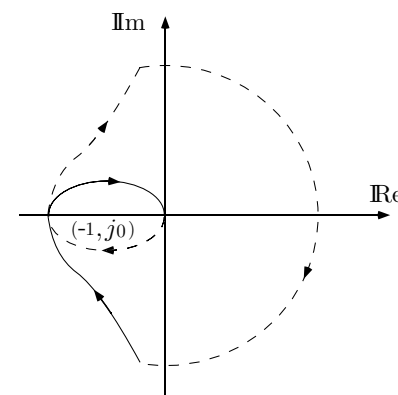


Figura 7.11

Si tratta quindi di un sistema a stabilità regolare rispetto alle variazioni di k . Il numero di giri in senso antiorario è nullo e pari a $P_p = 0$ se il punto critico $-\frac{1}{\bar{k}}$ è a sinistra del punto A, mentre è pari a -2 (se $k > 0$) oppure -1 (se $k < 0$) se è a destra di A.

Il valore limite \bar{k} del guadagno si può trovare applicando il criterio di Routh al polinomio caratteristico a ciclo chiuso $d_{CH}(s) = \tau_1 \tau_2 s^3 + (\tau_1 + \tau_2)s^2 + s + k$, ricavando così che $\bar{k} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}$. Dunque si ha stabilità asintotica per $k \in (0, \bar{k})$; inoltre per $k = 0$ si ha un polo in $s = 0$ e per $k = \bar{k}$ due poli in $s = \mp j \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$ (stabilità semplice). Un modo alternativo per il calcolo di \bar{k} è di imporre che il modulo di $F(j\omega)$ sia minore di 1 quando la fase è pari a $-\pi$. Il valore di ω in corrispondenza del quale la fase è pari a $-\pi$ può essere calcolato imponendo l'annullarsi della parte immaginaria. Si ha:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{k}{\tau_1 \tau_2 s^3 + (\tau_1 + \tau_2)s^2 + s} \Big|_{j\omega} = \frac{k}{-(\tau_1 + \tau_2)\omega^2 + j(\omega - \tau_1 \tau_2 \omega^3)} = \\ &= k \frac{-(\tau_1 + \tau_2)\omega^2 - j(\omega - \tau_1 \tau_2 \omega^3)}{(\tau_1 + \tau_2)^2 \omega^4 + (\omega - \tau_1 \tau_2 \omega^3)^2}, \end{aligned}$$

e dunque posto

$$\omega - \tau_1 \tau_2 \omega^3 = 0,$$

si ricava, oltre al valore $\omega = 0$, il valore $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$ (il valore negativo viene scartato). In corrispondenza a tale valore di ω si calcola il valore del

Figura 7.13

ovviamente $N_1 + N_2 = 0$. Essendo poi il numero di poli a parte reale maggiore di zero della rappresentazione pari a $P_p = 1$, non è verificata la condizione del teorema di Nyquist, e dunque il sistema controreazionato è instabile.

7.5. Esercizi e problemi

Esercizio 7.31. Si riconsideri il pendolo invertito descritto dalle equazioni 2.16, in cui $J_p = ml^2$. Tenendo in conto anche dell'attrito viscoso, proporzionale alla velocità \dot{x} mediante un coefficiente F , e supponendo che sia solo la forza $f = u$ agente sul carrello ($\tau = 0$), è possibile rendere asintoticamente stabile il sistema con una reazione statica dall'uscita (ossia del tipo $u = k(v - y)$)?

Soluzione. Le equazioni che descrivono la dinamica del pendolo invertito sono:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{F}{M}\dot{x} - \frac{mg}{M}\vartheta + \frac{1}{M}u \\ \ddot{\vartheta} &= \frac{F}{Ml}\dot{x} + (M+m)\frac{g}{Ml}\vartheta - \frac{1}{Ml}u.\end{aligned}$$

Posto

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = lx + \vartheta, \quad x_4 = l\dot{x} + \dot{\vartheta},$$

dalla prima equazione si ricava:

$$\left(s^2 + \frac{F}{M}s\right)x_1(s) = \frac{1}{M}u(s),$$

e quindi:

$$x_1(s) = \frac{1}{M} \frac{1}{s\left(s + \frac{F}{M}\right)} u(s),$$

mentre dalla seconda:

$$s^2[x_3(s) - lx_1(s)] = -\frac{1}{l}s^2x_1(s) + \frac{g}{l}(x_3(s) - lx_1(s)).$$

e quindi:

$$x_3(s) = \frac{1}{M} \frac{s^2\left(l - \frac{1}{l}\right) - g}{s\left(s + \frac{F}{M}\right)\left(s^2 - \frac{g}{l}\right)} u(s).$$

Poiché:

$$y(s) = Cx(s) = -lx_1(s) + x_3(s),$$

si ricava:

$$G(s) = -\frac{1}{Ml} \frac{s^2}{s\left(s + \frac{F}{M}\right)\left(s^2 - \frac{g}{l}\right)}.$$

La funzione di trasferimento del sistema a ciclo chiuso con un guadagno k sulla catena diretta è:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + kG(s)} = \frac{-s^2}{Mls\left(s + \frac{F}{M}\right)\left(s^2 - \frac{g}{l}\right) - ks^2}.$$

I poli del sistema controreazionato sono dati dall'equazione:

$$d(s) = Ml\left[s^4 + \frac{F}{M}s^3 - \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{Ml}\right)s^2 - \frac{F}{Ml}gs\right].$$

Non essendo verificata la condizione necessaria del criterio di Routh ($a_i > 0$, $i = 0, \dots, 3$), non è possibile stabilizzare il sistema mediante un semplice guadagno.

Esercizio 7.32. Si riconsideri l'esercizio 2.1. La puleggia di rinvio del plotter ha un raggio $r_2 = \frac{0.5}{2\pi}m$ ed è calettata su un potenziometro P .

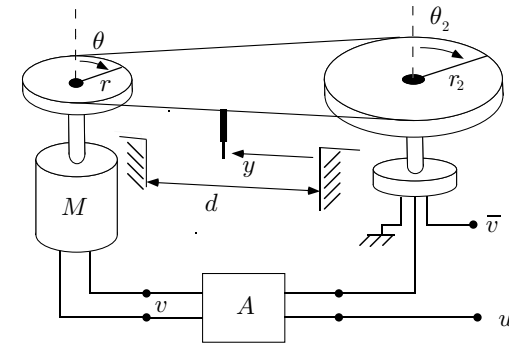


Figura 7.14

Un amplificatore, avente funzione di trasferimento $R(s) = \frac{k}{1+s}$, con $k \in [0, \infty)$ un guadagno variabile, è pilotato dalla differenza tra la tensione prelevata dal cursore del potenziometro ed una tensione d'ingresso u . La tensione applicata ai capi del potenziometro è $v = 10$ V.

1. Determinare i valori di k per cui il sistema è asintoticamente stabile;
2. ponendo $k = 4$, calcolare la risposta forzata del sistema per un ingresso a gradino di ampiezza 8 V;
3. ponendo $k = 2$, calcolare la risposta a regime permanente per l'ingresso $u(t) = 30 \sin 4t$.

sicché:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[W(s) \frac{8}{s} \right] = \left(40 - 51.1 e^{-0.123t} + \right. \\ \left. + 12.9 e^{-0.771t} - 1.81 e^{-2.11t} + 0.0111 e^{-10t} \right) \delta_{-1}(t).$$

3. Per $k = 2$:

$$W(s) = \frac{5}{s^4 + 13s^3 + 32s^2 + 20s + 1},$$

e per $u(t) = 30 \sin 4t$: $|W(j4)| = 6.3 \cdot 10^{-3}$, $\angle W(j4) = 1.9$ rad, e quindi:

$$y(t) = 6.3 \cdot 10^{-3} \sin(4t + 1.9).$$

Figura 7.15

la cui funzione di trasferimento vale:

$$W(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + \frac{R(s)G(s)}{5}}, \quad \text{con} \quad \frac{R(s)G(s)}{5} = \frac{k}{2s(s+1)(s+2)(s+10)}.$$

1. L'equazione caratteristica è:

$$d(s) = 2s(s+1)(s+2)(s+10) + k = \\ = 2s^4 + 26s^3 + 64s^2 + 40s + k = 0,$$

e la tabella di Routh è:

4	2	64	k
3	26	40	
2	792	$13k$	
1	$15840 - 169k$		
0	$13k$		

per cui il sistema è asintoticamente stabile per $0 < k < 93.7$.

2. Per $k = 4$:

$$W(s) = \frac{10}{s^4 + 13s^3 + 32s^2 + 20s + 2} = \\ = \frac{10}{(s + 0.123)(s + 0.771)(s + 2.11)(s + 10)},$$

Esercizio 7.33. Individuare una rappresentazione linearizzata del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 + x_1^2 + x_2 x_3 \\ y &= x_2. \end{aligned}$$

Soluzione. I punti di equilibrio del sistema non lineare sono individuati dal sistema

$$\begin{aligned} x_1 + \sin x_2 &= 0 \\ x_1^2 &= 0 \\ x_1 x_2 + x_1^2 + x_2 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

e quindi sono $x_{e_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. La matrice jacobiana calcolata nei punti di equilibrio è pari a:

$$A_k = J(x_{e_k}) = \begin{pmatrix} 1 & \cos x_2 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 0 \\ 2x_1 + x_2 & x_1 + x_3 & x_2 \end{pmatrix} \Big|_{x=x_{e_k}} = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k\pi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre $B = 0$ e $C = (0 \quad 1 \quad 0)$.

Esercizio 7.34. Mostrare che nella costruzione della tabella di Routh nel caso di un polinomio con autovalori immaginari puri, con molteplicità unitaria, deve necessariamente annullarsi una riga.

Soluzione. Senza perdita di generalità si consideri il polinomio

$$d(\lambda) = (\lambda^2 + a)(\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0),$$

in cui $a > 0$ e $b_0 \neq 0$. Allora

$$d(\lambda) = \lambda^5 + b_2\lambda^4 + (b_1 + a)\lambda^3 + (b_0 + ab_2)\lambda^2 + ab_1\lambda + ab_0,$$

e la tabella di Routh è

5	1	$b_1 + a$	ab_1
4	b_2	$b_0 + ab_2$	ab_0
3	$\frac{b_1b_2 - b_0}{b_2}$	$a\frac{b_1b_2 - b_0}{b_2}$	
2	b_0	ab_0	
1	0		
0			

ossia la riga 1 si annulla.

Esercizio 7.35. Studiare la stabilità del sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento $\frac{e^{-s}}{s}$, controreazionato con controreazione unitaria.

Soluzione. Poiché $|e^{-j\omega}|_{\text{dB}} = 0$ e $\angle e^{-j\omega} = -\omega$, al diagramma di Nyquist relativo ad $\frac{1}{s}$ (coincidente con il semiasse immaginario negativo) occorre sommare quello dell'esponenziale, costituito da una circonferenza, percorsa in senso orario (in quanto al crescere di ω , la fase decresce).

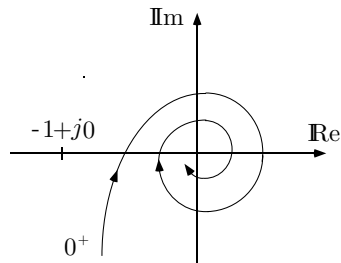


Figura 7.16

Il diagramma polare per $\omega \in [0, \infty)$ è dunque una spirale che compie infinite volute prima di arrivare all'origine, mentre quello di Nyquist è ottenuto mediante ribaltamento rispetto all'asse reale.

Si noti che per $\angle \frac{e^{-j\bar{\omega}}}{j\bar{\omega}} = -\pi$, ossia per $\angle e^{-j\bar{\omega}} = -\bar{\omega} = -\frac{\pi}{2}$ ($\frac{1}{j\bar{\omega}}$ ha infatti sempre fase $-\frac{\pi}{2}$) in corrispondenza risulta:

$$\left| \frac{e^{-j\bar{\omega}}}{j\bar{\omega}} \right|_{\omega=\bar{\omega}} = \left| \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{j\frac{\pi}{2}} \right| \simeq 0,637.$$

Dunque il diagramma passa a destra del punto critico $(-1, j0)$ e pertanto il sistema controreazionato è stabile asintoticamente, in quanto $N = P_p = 0$.

Esercizio 7.36. Sia dato il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento $F(s) = \frac{s+1}{s(s-2)}$. Utilizzando il criterio di Nyquist, studiare e discutere la stabilità del sistema controreazionato al variare del parametro k posto nel ramo di controreazione.

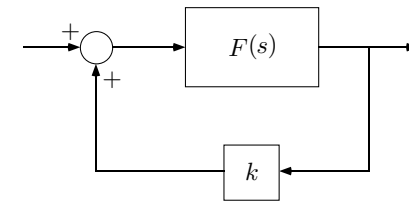


Figura 7.17

Calcolare inoltre per un opportuno valore di k , la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = (1 + \sin 3t)\delta_{-1}(t)$ del sistema ad anello chiuso.

Soluzione. Bisogna ricondurre lo schema a quello con una controreazione unitaria negativa ponendo $\tilde{F}(s) = -kF(s) = \tilde{k} \frac{1+s}{s(1-\frac{s}{2})}$, ove $\tilde{k} = \frac{k}{2}$. Il diagramma di Nyquist è dato da:

Figura 7.19

Il numero di giri in senso antiorario è zero se il punto critico $-\frac{1}{k}$ è a sinistra di A, 1 se è compreso tra A e B, -1 se è tra B e C e -2 se è a destra di C. Dunque si ha stabilità asintotica per $k \in (-\infty, -|\bar{k}|)$, ove \bar{k} si può determinare applicando il criterio di Routh a

$$\begin{aligned} d_{CH}(s) &= (s-1)(s^2+1) - k(s^2+11s+10) = \\ &= s^3 - (k+1)s^2 + (1-11k)s - (10k+1). \end{aligned}$$

La tabella risulta essere:

3	1	1-11k
2	-(k+1)	-(10k+1)
1	(11k+20)k	
0	-(10k+1)	

e si ricava così che $\bar{k} = -\frac{20}{11}$. È chiaro che per $k = 0$ e $k = \bar{k}$ il sistema è semplicemente stabile, avendo i poli rispettivamente in $\lambda = \mp j$ e $\lambda = \mp\sqrt{21}$.

Esercizio 7.38. Stabilire se esistono valori di k per i quali gli autovalori del sistema interconnesso dato da

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} u_1 & \dot{x}_2 &= -8x_2 - 4ku_2 \\ y_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_1 & y_2 &= x_2 + ku_2 \end{aligned}$$

con $u_1 = v - y_2$, $u_2 = y_1$, hanno autovalori a parte reale minore di -1.

Soluzione. Posto:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, & B_1 &= \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, & C_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A_2 &= -8, & B_2 &= -4k, & C_2 &= 1, & D_2 &= k, \end{aligned}$$

le equazioni dei due sistemi diventano:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u_1 & \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_1 &= C_1 x_1 & y_2 &= C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{aligned}$$

ed essendo $u_1 = v - C_2 x_2 - D_2 C_1 x_1$, $u_2 = C_1 x_1$, si ha:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 - B_1 D_2 C_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} v = \bar{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \bar{B} v \\ y &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice \bar{A} è data da:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6k & 6 \\ 1 & 0 & -7-5k & 5 \\ 0 & 1 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & -4k & -8 \end{pmatrix}$$

e gli autovalori sono le soluzioni del polinomio:

$$\begin{aligned} |\lambda I - \bar{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 6k & -6 \\ -1 & \lambda & 7+5k & -5 \\ 0 & -1 & \lambda-4+k & -1 \\ 0 & 0 & 4k & \lambda+8 \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^4 + (k+4)\lambda^3 + (17k-25)\lambda^2 + (66k+56)\lambda + 72k. \end{aligned}$$

Applicando il criterio di Routh si determina la seguente tabella:

4	1	$17k-25$	$72k$
3	$k+4$	$66k+56$	
2	$17k^2-23k-156$	$72(4+k)$	
1	$561k^3-319k^2+4216k+3792$		
0	$72k$		

che comporta la seguente tabella di discussione degli elementi della prima colonna:

	-4	-2.42	$-\frac{66}{56}$	-0.78	$\frac{25}{17}$	3.78
$1 > 0$						
$k+4 > 0$						
$17k-25 > 0$						
$17k^2-23k-156 > 0$						
$561k^3-319k^2+4216k+3792 > 0$						

e si osserva che per $k > 3.78$ si ha stabilità asintotica.

Il problema può essere anche risolto applicando il criterio di Nyquist. Le funzioni di trasferimento dei due sistemi sono:

$$P_1(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s(s^2 - 4s + 7)}, \quad P_2(s) = k \frac{s+4}{s+8}.$$

Si noti che $P_2(s)$ ha un solo zero a parte reale negativa. Dunque il sistema interconnesso è stabile asintoticamente se tale è il sistema dato dalla funzione di trasferimento:

$$F(s) = P_1(s)P_2(s) = k \frac{(s^2 + 5s + 6)(s+4)}{s(s^2 - 4s + 7)(s+8)} = k\bar{F}(s),$$

controreazionato con controreazione unitaria. Si noti che $F(s)$ ha due poli in $s = 2 \mp 3j$, sicché $P_p = 2$. Il diagramma di Nyquist relativo a $\bar{F}(s)$ presenta una zona (tra i punti A e B) in cui $N = P_p = 2$. Ciò è in accordo con quanto trovato applicando il criterio di Routh.

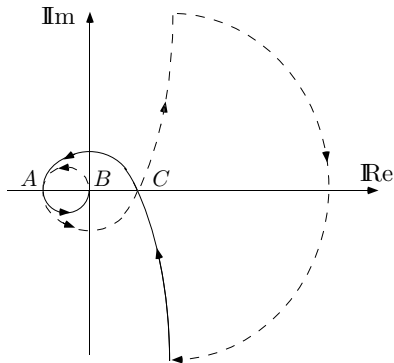


Figura 7.20

Problema 7.1. Studiare la stabilità dello stato zero dei seguenti sistemi non lineari:

$$\begin{array}{ll} a) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2^3 \end{cases} & b) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases} \\ c) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = h^2 x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^2 \end{cases} & d) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 \end{cases} \end{array}$$

Allo scopo si utilizzi la funzione di Lyapunov $V(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Problema 7.2. Si dimostri che lo stato zero del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1x_2 \end{aligned}$$

è instabile (utilizzare la funzione $V(x) = 3x_1x_2^2 - x_1^3$).

Problema 7.3. Verificare che lo stato del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_1x_2 - a_2x_1 - (b_1x_2 + b_2x_1)^2x_2 \end{aligned}$$

è stabile asintoticamente globalmente per ogni a_1 e a_2 positive (si utilizzi la funzione $V(x) = a_2x_1^2 + x_2^2$).

Problema 7.4. Studiare la stabilità dello stato zero del seguente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \beta \left(\frac{x_1^3}{\beta} - x_1 \right) \\ \dot{x}_2 &= -x_1. \end{aligned}$$

Problema 7.5. Assegnato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin \alpha - \sin(\alpha + x_1) \end{aligned}$$

studiare la stabilità dello stato zero con la seguente funzione:

$$V(x) = x_2^2 + \cos \alpha - 2\cos(\alpha + x_1) - 2x_1\sin \alpha.$$

Problema 7.6. Applicare il metodo del gradiente variabile per la costruzione di funzioni di Lyapunov da utilizzare per lo studio proposto nei problemi precedenti.

Problema 7.7. Applicare il metodo del gradiente variabile per studiare la stabilità asintotica globale del seguente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_2f(x_1) - x_1f(x_1) - x_1x_2 \frac{df(x_1)}{dt} \end{aligned}$$

in cui $f(x) > 0$, $\forall x_1$, e $\frac{df(x_1)}{dt}$ è continua.

Problema 7.8. Applicare il metodo del gradiente variabile per lo studio del seguente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2. \end{aligned}$$

Problema 7.9. Trovare le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità asintotica del seguente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \left(-\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}f(t) \right) x_1\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}f(t) &= 1, & nT \leq t \leq (2n+1)\frac{T}{2} \\ f(t) &= -1, & (2n+1)\frac{T}{2} \leq t \leq (n+1)T.\end{aligned}$$

Problema 7.10. Assegnata l'equazione differenziale:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + (2 + a \cos t)y = 0$$

trovare i sistemi differenziali equivalenti ponendo:

$$x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 2y + \dot{y} \\ -y - \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Mostrare che solo nel secondo caso, utilizzando condizioni sufficienti di stabilità, è possibile provare la stabilità asintotica del sistema per $|a| < 1/2 \cos \theta$, dove θ è tale che $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $\tan \theta - \theta = \pi$.

Problema 7.11. Con riferimento alla stabilità, in che differiscono i due seguenti sistemi:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x, \quad \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}?$$

Problema 7.12. Mostrare che tutti gli autovalori di A hanno parte reale minore di k se e solo se per ogni matrice P simmetrica e definita positiva esiste una matrice Q , simmetrica e definita positiva, soluzione dell'equazione:

$$-2kQ + A^T Q + QA = -P.$$

Problema 7.13. Mostrare che la verifica della condizione del problema 7.12 implica che $\exists h$ tale che per $t \geq t_0$, si ha:

$$\|x(t)\| \leq h e^{k(t-t_0)} \|x_0\|.$$

Problema 7.14. Studiare la stabilità esterna del seguente sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = x.$$

Problema 7.15. Studiare la stabilità e la stabilità esterna del seguente sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = x.$$

Problema 7.16. Mostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice Q , simmetrica e con autovalori distinti, sia definita positiva (negativa) è che abbia autovalori positivi (negativi).

Problema 7.17. Studiare dal punto di vista della stabilità le seguenti equazioni caratteristiche:

$$\begin{aligned}\lambda^3 + 8\lambda^2 + 14\lambda + 24 \\ \lambda^4 + 3\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda + 12 \\ \lambda^4 + 3,2\lambda^3 + 13,7\lambda^2 + 21,1\lambda + 18,7 \\ \lambda^6 + \lambda^5 + 3\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ \lambda^6 + 3\lambda^5 + 2\lambda^4 + 9\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda + 2.\end{aligned}$$

Problema 7.18. Studiare dal punto di vista della stabilità, e rispetto ai parametri, le seguenti equazioni caratteristiche:

$$\begin{aligned}\lambda^3 + (4+k)\lambda^2 + 6\lambda + 16 + 8k \\ \lambda^3 + 14\lambda^2 + 56\lambda + k \\ \lambda^4 + 7\lambda^3 + 15\lambda^2 + (25+k)\lambda + 2k \\ \lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + k.\end{aligned}$$

Problema 7.19. Dimostrare che se i coefficienti di un polinomio non hanno tutti lo stesso segno allora gli zeri non hanno tutti parte reale negativa.

Problema 7.20. Assegnata la rete:

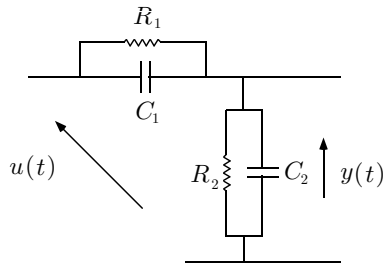


Figura 7.21

trovarne una rappresentazione differenziale e studiare la stabilità e la stabilità esterna.

Problema 7.21. Trovare le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità asintotica di:

- a) $y(k+3) + a_1y(k+2) + a_2y(k+1) + a_3y(k) = 0$
- b) $y(k+4) + a_1y(k+3) + a_2y(k+2) + a_3y(k+1) + a_4y(k) = 0$

Problema 7.22. Dimostrare che per un sistema a tempo discreto del secondo ordine si ha stabilità asintotica se e solo se sono simultaneamente verificate le seguenti condizioni:

$$|1 + \det(A)| > |\operatorname{tr}(A)|, \quad |\det(A)| < 1,$$

one $\operatorname{tr}(A)$ indica la traccia di A , ossia la somma degli elementi sulla diagonale principale.

Problema 7.23. Studiare la stabilità degli stati di equilibrio dei seguenti sistemi non lineari

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1^2 - 2 & \dot{x}_1 &= 2\sin x_1 - x_1^2 + x_3 - 1 \\ a) \quad \dot{x}_2 &= x_1^3 - x_2 + x_3 & b) \quad \dot{x}_2 &= -2\frac{x_1}{x_2} - x_2^2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_3^2 - 2x_1^2 + 1 & \dot{x}_3 &= x_1 - x_3^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - 1 \\ c) \quad \dot{x}_2 &= x_3 + \cos x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= kx_1 - x_2^3 + 2x_3^2 - x_4. \end{aligned}$$

Problema 7.24. Mostrare che nella costruzione della tabella di Routh si può avere una riga nulla solo quando il suo indice p è dispari.

Problema 7.25. Studiare la stabilità dei sistemi a controreazione unitaria caratterizzati da una funzione di trasferimento in catena diretta pari a:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{-3}{(s+1)(s+2)}, & b) \quad & \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}, \\ c) \quad & \frac{5(s+1)(s+2)}{s^2(s+1.5)(s+3)}, & d) \quad & \frac{10}{s(s+1)(s+3)}. \end{aligned}$$

Problema 7.26. Studiare in modo parametrico rispetto a k la stabilità dei sistemi a controreazione unitaria caratterizzati dalle seguenti funzioni di trasferimento in catena diretta:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{k}{(s+1)(s+2)}, & d) \quad & \frac{k}{s(s^2 + 3.2s + 64)}, \\ b) \quad & \frac{k}{s(s+1)}, & e) \quad & \frac{k(s+1)}{s^2(s+2)}, \\ c) \quad & \frac{k(s+2)}{s^2(s+5)}, & f) \quad & \frac{k}{s(s^2 + s + 4)}. \end{aligned}$$

Problema 7.30. Studiare la stabilità al variare del parametro k , del sistema caratterizzato dal seguente diagramma di Nyquist:

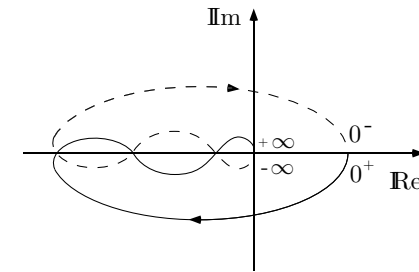


Figura 7.24

Figura 7.23

essendo

$$G(s) = \frac{k_1}{s(s+a)}, \quad H(s) = k_2 s.$$

Bibliografia

I seguenti testi trattano questioni matematiche di particolare rilievo per la Teoria dei Sistemi. Si segnalano in particolare i numeri 22, 29, ottimi per una preparazione generale in Algebra e per l'inquadramento in un contesto più generale della teoria degli spazi vettoriali, nonché il numero 3 di notevole validità e completezza per tutte le questioni relative alle matrici.

1. M. R. Spiegel, *Theory and Problems of Laplace Transforms*, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, 1965.
2. F. Ayres, *Theory and Problems of Matrices*, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, 1962.
3. F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Voll. I e II, Chelsea, 1960; edizione francese: *Theorie des Matrices* Voll. I e II, Dunoc, 1966.
4. P. R. Halmos, *Finite Dimensional vector Spaces*, Springer, 1974.
5. E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mc Graw-Hill, 1955.
6. H. K. Wilson, *Ordinary Differential Equations*, Addison, 1971.
7. M. R. Spiegel, *Theory and Problems of calculus of finite differences and difference equations*, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, 1971.

8. R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, Mc Graw-Hill, 1970.
9. E. C. Nering, *Linear Algebra and Matrix Theory*, Wiley, 1970.
10. C. C. Mac Duffee, *The Theory of Matrices*, Chelsea.
11. J. A. Eisele, R. M. Mason, *Applied Matrix and Tensor Analysis*, Wiley, 1970.
12. B. Noble, *Applied Linear Algebra*, Prentice Hall, 1969.
13. F. Ayres, *Modern Algebra*, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, 1965.
14. F. Trèves, *Topological Vector Space, Distributions and Kernels*, Academic Press, 1967.
15. S. Lipschutz, *Theory and Problems of Linear Algebra*, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, 1968.
16. O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, Voll. I e II, Van Nostrand, 1960.
17. S. Barnett, *Matrices in Control Theory*, Van Nostrand, 1971.
18. A. W. Naylor, G. R. Sell, *Linear Operator Theory in Engineering Science*, Holt, 1971.
19. L. Schwartz, *Methodes Mathematiques pour les Sciences Physiques*, Hermann, 1965.
20. S. A. Gall, *Linear Analysis and Representation Theory*, Springer, 1973.
21. J. Courbon, *Introduction au calcul matriciel*, Dunod, 1971.
22. S. Mc Lane, G. Birkhoff, *Algebra*, Mc Millan, 1967.
23. S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1971.
24. H. H. Rosenbroch, C. Storey, *Mathematics of Dynamical Systems*, Nelson, 1970.

25. L. A. Pipes, S. A. Hovanessian, *Matrix-Computer Methods in Engineering*, Wiley, 1969.
26. T. L. Boullion, P. L. Odell, *Generalized Inverse Matrices*, Wiley, 1971.
27. S. Lang, *Algebra Lineare*, Boringhieri.
28. G. F. Feeman, N. R. Grabois, *Linear Algebra and Multivariable Calculus*, Mc Graw-Hill, 1970.
29. L. Lombardo Radice, *Algebra*, Feltrinelli.
30. A. Ghizzetti, F. Rosati, *Lezioni di Analisi Matematica*, Voll. I e II, Veschi.
31. Ghizzetti, Marchetti, Ossicini, *Complementi di Analisi Matematica*, Veschi.

I seguenti riferimenti sono relativi alla Teoria dei Sistemi. Poiché la teoria è in rapido sviluppo, alcuni testi hanno prevalentemente interesse storico e sono stati segnalati principalmente perché contengono applicazioni interessanti. I numeri 1, 2, 6, 8, 9, 10, 13, 24 sono forse i più significativi.

1. A. Ruberti, A. Isidori, *Teoria dei Sistemi*, Boringhieri, 1979.
2. A. Ruberti, A. Isidori, *Elementi di Teoria della Stabilità*, Siderea, 1979.
3. R. Hermann, *Linear System Theory and Introductory Algebraic Geometry*, Interdisciplinary Mathematics, I-VIII, Rutgers University, 1974.
4. D. M. Wiberg, *Theory and Problems of State Space and Linear Systems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1971.
5. L. Von Bertalanffy, *Teoria Generale dei Sistemi*, ILI, 1968.
6. M. D. Mesarovic, Y. Takahara, *General System Theory Mathematical Foundations*, Academic, 1975.
7. R. A. Roher, *Circuit Theory: An introduction to the state variable approach*, McGraw-Hill, 1970.

8. L. Padulo, M. A. Arbib, *System Theory*, Saunders, 1974.
9. R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib, *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw-Hill, 1969.
10. L. A. Zadeh, E. Polak, *System Theory*, McGraw-Hill, 1969.
11. G. J. Klir, *Trends in General System Theory*, Wiley, 1972.
12. J. E. Rubio, *The Theory of Linear Systems*, Academic, 1971.
13. C. T. Chen, *Introduction to Linear Systems*, Holt, 1970.
14. L. M. K. Timothy, B. E. Boa, *State space analysis: an introduction*, McGraw-Hill, 1968.
15. T. G. Windeknecht, *General dynamical processes*, Academic, 1971.
16. D. K. Frederic, A. B. Carlson, *Linear systems in Communication and Control*, Wiley, 1971.
17. L. A. Zadeh, C. A. Desoer, *Linear System Theory*, McGraw-Hill, 1963.
18. S. R. Searle, *Linear Models*, Wiley, 1971.
19. J. Lifermann, *Systemes Lineares, variables d'etat*, Masson, 1972.
20. R. J. Schwartz, B. Friedland, *Linear Systems*, McGraw-Hill, 1967.
21. B. C. Kuo, *Linear Networks and Systems*, McGraw-Hill, 1967.
22. H. R. Martens, D. R. Allen, *Introduction to System Theory*, Merrill, 1969.
23. C. A. Desoer, *Notes for a Second Course on Linear Systems*, Van Nostrand, 1970.
24. R. W. Brockett, *Finite Dimensional Linear Systems*, Wiley, 1970.
25. D. G. Luenberger, *Introduction to dynamic Systems theory, models and applications*, J. Wiley & Sons, 1979.

26. C. Gori Giorgi e S. Monaco, *Teoria dei Sistem: Complementi ed Esercizi*, Editrice Universitaria di Roma – La Goliardica, 1988.
27. B. Friedland, *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods*, McGraw-Hill, 1987.
28. T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, 1980.
29. J. J. D'Azzo e C. H. Houpis, *Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern*, McGraw-Hill, 1988.
30. H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 1996.
31. R. C. Dorf, *Moder Control Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
32. G. Franklin, J. D. Powell e A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1986.